VAULOT

Congruences rectilignes qui sont en même temps W et de Ribaucour

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1923

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1923__39__1_0>

Nº D'ORDRE :
1742.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. VAULOT.

1re THÈSE. — CONGRUENCES RECTILIGNES QUI SONT EN MÊME TEMPS W ET DE RIBAUCOUR.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ : GROUPES DE SUBSTITUTIONS. APPLICATIONS A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Soutenues le 24 MAI 1923 devant la Commission d'Examen.

MM. KŒNIGS, *Président*

CL. GUICHARD, VESSIOT, } *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1923

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

69940-23 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

PREMIÈRE THÈSE.

CONGRUENCES RECTILIGNES

QUI SONT EN MÊME TEMPS W ET DE RIBAUCOUR

INTRODUCTION.

Une congruence rectiligne de Ribaucour est une congruence telle que ses développables découpent sur la surface moyenne un réseau conjugué.

Une congruence W est une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier les congruences rectilignes qui sont en même temps congruences de Ribaucour et congruences W.

Dans le Chapitre I, nous rappelons les formules fondamentales relatives aux congruences de Ribaucour rapportées à leurs développables. On peut définir une telle congruence au moyen de quatre solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3 et λ d'une équation de Moutard,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = M\xi, \tag{1}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant les paramètres directeurs d'une droite de la congruence et le point central étant défini par les formules

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = -\xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \quad \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial v},$$

et quatre autres formules analogues pour les deux autres coordonnées y_2 et y_3. Nous cherchons à quelles conditions doivent satisfaire ξ_1, ξ_2, ξ_3 et λ pour que la congruence de Ribaucour soit W; nous démontrons qu'on doit avoir

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} \\ \xi_2 & \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial v^2} \\ \xi_3 & \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0,$$

et que λ est alors donné par l'expression

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \\ \xi_2 & \frac{\partial \xi_2}{\partial u} & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \\ \xi_3 & \frac{\partial \xi_3}{\partial u} & \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Mais cela nécessite que les variables u et v qui définissent les développables aient été choisies d'une façon particulière.

Au Chapitre II, nous cherchons quelles sont les équations (1) de Moutard dont deux solutions ξ_2 et ξ_3 sont telles que la condition (2) soit satisfaite quand ξ_1 est une solution quelconque de (1). Nous trouvons des congruences appartenant aux complexes linéaires, signalées par M. Guichard, et d'autres congruences correspondant au cas où M est une fonction homogène de degré — 2 en u et v.

Au Chapitre III, nous cherchons si nos congruences peuvent admettre une ou plusieurs congruences parallèles. Nous démontrons qu'elles en admettent si λ est une fonction homogène du premier degré de deux quantités U et V fonctions respectivement de u et v.

Au Chapitre IV, nous transformons les conditions trouvées au Chapitre I en introduisant les coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un point de la surface génératrice de la congruence de Ribaucour.

x_1, x_2, x_3 sont donnés par les formules de Lelieuvre,

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial v},$$

et d'autres formules analogues pour x_2 et x_3.

Nous avons cherché, sans succès, à former d'une façon simple une équation ou un système d'équations aux dérivées partielles ne contenant qu'une seule des quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3, M, x_1, x_2, x_3, λ. Nous avons ramené de diverses façons le problème à la résolution d'un système de deux équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues.

Au Chapitre V, nous appliquons les résultats du Chapitre IV à divers cas particuliers où nous supposons que x_1 a une des formes

$$u - v, \quad \int \frac{d(u+v)}{f'(u+v)}, \quad uv, \quad f(uv), \quad \mathrm{U} + \mathrm{V}.$$

Le deuxième cas nous conduit aux congruences pour lesquelles le réseau de la surface moyenne est isotherme et plan.

Nous formons une équation aux dérivées partielles du troisième ordre en x dont la résolution permettrait d'obtenir les congruences à surface moyenne plane.

Au Chapitre VI, nous résolvons complètement le cas où le coefficient M de l'équation (1) est nul et nous indiquons quelques solutions pour le cas où M est de la forme $\frac{2U'V'}{(U+V)^2}$.

Au Chapitre VII, nous étudions les congruences de normales qui sont en même temps de Ribaucour et W, en laissant de côté les cas bien connus des congruences de normales aux surfaces minima ou aux surfaces de révolution. Nous ramenons le problème à la résolution d'une équation de Riccati et à des quadratures. Ce Chapitre, absolument indépendant des précédents, aurait pu être aussi bien placé au commencement qu'à la fin du Mémoire.

Je tiens à exprimer ici mes sentiments de très vive gratitude à M. Guichard qui m'a indiqué le sujet de ce travail et dont les précieux conseils m'ont permis de mener à bien l'étude que je présente dans les pages qui suivent.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU PROBLÈME.

1. Considérons une droite Δ d'une congruence rectiligne rapportée à ses développables correspondant aux valeurs constantes données aux variables u et v. Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 les paramètres directeurs de Δ; F_1 et F_2 ses foyers; m le milieu de F_1F_2.

Si la congruence est de Ribaucour, on a des relations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} &= A\frac{\partial\xi}{\partial u} + B\frac{\partial\xi}{\partial v} + C\xi,\\ \frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} &= M\xi.\\ \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} &= D\frac{\partial\xi}{\partial u} + E\frac{\partial\xi}{\partial v} + F\xi,\end{aligned}\right.$$

où ξ peut prendre les valeurs ξ_1, ξ_2, ξ_3.

La deuxième de ces relations exprime que les paramètres ξ sont solutions d'une même équation de Moutard; dans la première et la troisième, les coefficients A, B, C, D, E, F se calculent en résolvant des systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues dont le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \\ \xi_2 & \frac{\partial \xi_2}{\partial u} & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \\ \xi_3 & \frac{\partial \xi_3}{\partial u} & \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, si l'on suppose que les droites de la congruence ne sont pas parallèles aux génératrices d'un même cône.

Si λ est une solution de

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M\theta, \tag{2}$$

les coordonnées x_1, x_2, x_3 de m seront données par les formules connues

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= -\xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \quad \xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial v}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Les coordonnées de F_1 sont

$$y_i + \lambda \xi_i$$

et celles de F_2

$$y_i - \lambda \xi_i$$

et l'on a

$$\frac{\partial (y_i + \lambda \xi_i)}{\partial u} = 2\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial (y_i + \lambda \xi_i)}{\partial v} = 2\xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial (y_i - \lambda \xi_i)}{\partial u} = -2\xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \frac{\partial (y_i - \lambda \xi_i)}{\partial v} = -2\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial v}. \tag{5}$$

Exprimons que la congruence ainsi obtenue est W, c'est-à-dire que les asymptotiques se correspondent sur les surfaces lieux de F_1 et F_2.

Les asymptotiques de la surface lieu de F_1 sont définies par la relation différentielle

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} & \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial u^2} & \frac{\partial z_2}{\partial u} & \frac{\partial z_2}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z_3}{\partial u^2} & \frac{\partial z_3}{\partial u} & \frac{\partial z_3}{\partial v} \end{vmatrix} du^2 + 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial z_2}{\partial u} & \frac{\partial z_2}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z_3}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial z_3}{\partial u} & \frac{\partial z_3}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2} & \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial v^2} & \frac{\partial z_2}{\partial u} & \frac{\partial z_2}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z_3}{\partial v^2} & \frac{\partial z_3}{\partial u} & \frac{\partial z_3}{\partial v} \end{vmatrix} dv^2 = 0,$$

où l'on pose

$$z_i = y_i + \lambda \xi_i.$$

Le coefficient de $du\,dv$ est nul, puisque les développables déterminent un système conjugué sur chaque surface focale : cela résulte d'ailleurs des formules (4).

Le coefficient de du^2 est égal à

$$8\mathrm{BH}\lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

et celui de dv^2 à

$$8\mathrm{H}\lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2,$$

ainsi qu'il résulte facilement de l'application des formules (4) et (1).

Les asymptotiques de la première surface focale sont données par la relation différentielle

(6) $$\lambda \mathrm{B}\, du^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\, dv^2 = 0,$$

si l'on suppose λ et $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$ différents de zéro.

De même, les asymptotiques de la deuxième surface focale seront données par

(7) $$\frac{\partial \lambda}{\partial u}\, du^2 + \lambda \mathrm{D}\, dv^2 = 0,$$

et, pour que les asymptotiques se correspondent, on devra avoir

$$\frac{\lambda B}{\frac{\partial \lambda}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}}{\lambda D},$$

ou

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda^2 BD. \tag{8}$$

2. Le calcul précédent exclut les cas où λ est soit une constante, soit une fonction dépendant d'une seule des deux variables u et v.

Si λ est une constante, on a $M = o$. Les équations (4) et (5) montrent que chacune des deux surfaces focales se réduit à une courbe. Réciproquement, si chacune des deux surfaces focales se réduit à une courbe, on a une congruence qui peut être considérée comme répondant au problème.

Soient en effet U_1, U_2, U_3 les coordonnées de F_1, ces coordonnées étant fonction de u seul, V_1, V_2, V_3 les coordonnées de F_2, ces coordonnées étant fonction de v seul. On pourra prendre pour paramètres de la droite F_1, F_2 les quantités

$$U_1 - V_1, \quad U_2 - V_2, \quad U_3 - V_3,$$

qui satisfont à l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = o.$$

Supposons maintenant que λ soit une fonction de u seul :

$$\lambda = U.$$

Il en résultera

$$M = o,$$

et les paramètres de la droite de la congruence seront de la forme

$$\xi_1 = U_1 + V_1,$$
$$\xi_2 = U_2 + V_2,$$
$$\xi_3 = U_3 + V_3.$$

Les formules (5) montrent que F_1 décrit une courbe C_1' définie par les équations

(9) $$x_i = 2\int UU_i'\,du.$$

Pour chaque point de cette courbe, le cône de la congruence est constitué par les droites de paramètres directeurs

$$U_1 + V_1, \quad U_2 + V_2, \quad U_3 + V_3.$$

Cette congruence Γ' est parallèle (au sens de M. Guichard) à celle Γ qui serait donnée par $\lambda = \text{const.}$, les valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3 restant les mêmes.

Considérons la courbe C_1' et la première courbe focale C_1 de la congruence Γ. Comme le montrent les équations (9), il est possible d'établir une correspondance entre C_1' et C_1 telle qu'à chaque point de C_1' on puisse faire correspondre un point de C_1 de façon que les tangentes aux courbes en deux points correspondants soient parallèles :

C_1' se déduit de C_1 par une transformation que l'on peut appeler *transformation de Combescure*. (*Cf.* L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª edizione, § 22.)

Il est à remarquer que ces congruences ne sont pas les plus générales pour lesquelles une surface focale se réduit à une courbe.

3. Ce cas particulier étant laissé de côté, revenons au cas général.

Les équations (1) forment évidemment un système complet. Écrivons qu'il y a identité entre les valeurs de $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}$ et $\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$ d'une part, de $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}$ d'autre part, calculées en dérivant les expressions (1), et remplaçant $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}$ par leurs valeurs données par les mêmes expressions (1) en fonction de $\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}, \xi$. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{M}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\xi,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} &= \mathrm{A}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \mathrm{C}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v}\xi \\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + \mathrm{BD}\right)\frac{\partial \xi}{\partial u} + \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} + \mathrm{BE} + \mathrm{C}\right)\frac{\partial \xi}{\partial v} + \left(\mathrm{BF} + \mathrm{AM} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v}\right)\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} &= \mathrm{D}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + \mathrm{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \mathrm{F}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\xi \\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial u} + \mathrm{AD} + \mathrm{F}\right)\frac{\partial \xi}{\partial u} + \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} + \mathrm{BD}\right)\frac{\partial \xi}{\partial v} + \left(\mathrm{CD} + \mathrm{EM} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\right)\xi,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{M}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\xi.$$

On en conclut

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} \alpha) & \left[\begin{array}{l} \mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + \mathrm{BD}, \\ \mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} + \mathrm{BD}; \end{array}\right. \\ \beta) & \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} + \mathrm{BE} + \mathrm{C} = 0, \\ \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial u} + \mathrm{AD} + \mathrm{F} = 0; \end{array}\right. \\ \gamma) & \left[\begin{array}{l} \mathrm{BF} + \mathrm{AM} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}, \\ \mathrm{CD} + \mathrm{EM} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}. \end{array}\right. \end{array}$$

Les deux premières équations (10) nous donnent

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} = \mathrm{M} - \mathrm{BD}.$$

En remarquant que λ est solution de l'équation (2) et satisfait à la relation (8), on tire de là

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial E}{\partial u} = M - BD = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\log \lambda.$$

Par suite,

$$A = \frac{\partial}{\partial u}\log \lambda + f(u) = \frac{1}{\lambda}\frac{\delta \lambda}{\partial u} + f(u),$$

$$E = \frac{\partial}{\partial v}\log \lambda + \varphi(v) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \varphi(v),$$

$f(u)$ et $\varphi(v)$ étant respectivement des fonctions de u et de v. Mais la forme des équations (1) montre que l'on peut supposer nulles ces fonctions, à condition de prendre pour variables indépendantes des fonctions convenables de u et de v respectivement.

Remplaçons en effet u et v par de nouvelles variables U et V, fonctions respectivement de u et de v. On aura

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial U}U', \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial U}U',$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial V}V', \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial V}V',$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial U^2}U'^2 + \frac{\partial \xi}{\partial U}U''.$$

La première équation (1) devient alors

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial U^2}U'^2 + \frac{\partial \xi}{\partial U}U'' = A\frac{\partial \xi}{\partial U}U' + B\frac{\partial \xi}{\partial V}V' + C\xi;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial U^2} = \left(\frac{A}{U'} - \frac{U''}{U'^2}\right)\frac{\partial \xi}{\partial U} + B\frac{V'}{U'^2}\frac{\partial \xi}{\partial V} + \frac{C}{U'^2}\xi.$$

L'ancienne valeur de A était

$$A = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + f(u) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial U}U' + f(u).$$

La nouvelle valeur de ce coefficient sera

$$A_1 = \frac{A}{U'} - \frac{U''}{U'^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial U} - \frac{U''}{U'^2} + \frac{f(u)}{U'}.$$

Pour qu'elle se réduise à

$$A_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial U},$$

il suffit de choisir U de façon que l'on ait

$$-\frac{U''}{U'^2} + \frac{f(u)}{U'} = 0,$$

ou

$$\frac{U''}{U'} = f(u).$$

On en tire

$$U = \int du\, e^{\int f(u)\,du}.$$

On pourra opérer de même pour la variable v.

Le coefficient M de l'équation de Moutard sera bien entendu changé.

On peut donc écrire, ce changement de variables étant supposé effectué,

$$(11)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}, \\[2ex] E = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}. \end{cases}$$

Il en résulte, par comparaison avec (8),

$$(12)\qquad AE - BD = 0.$$

Dans le déterminant

$$(13)\qquad \left| \xi_1 \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} \right| \text{ (}^1\text{)},$$

[1] Nous désignons ainsi un déterminant du troisième ordre dont nous n'écrivons que la première ligne et dont les deuxième et troisième lignes s'obtiennent en remplaçant dans la première l'indice 1 par les indices 2 et 3. Cette notation sera constamment employee dans la suite.

on a, d'après les relations (1) et (12),

$$E\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} - B\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} + (BF - EC)\xi_1 = 0,$$

et deux relations analogues entre les éléments des deuxième et troisième lignes. Il en résulte que le déterminant (13) est nul, ses éléments d'une même ligne étant liés par une relation linéaire.

Or, on a, d'après la règle de dérivation des déterminants,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \left| \xi_1 \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right|, \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= \left| \xi_1 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} \right|, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u\, \partial v} &= \left| \xi_1 \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} \right| + MH, \end{aligned}\right.$$

et dire que le déterminant (13) s'annule revient à dire que le déterminant H est solution de (2).

Du système (1) nous pouvons tirer

$$A = \frac{\left| \xi_1 \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right|}{H} = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial u},$$

$$E = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial v}.$$

En comparant avec les relations (11), on voit que le rapport $\frac{\lambda}{H}$ est constant. On peut donc prendre

$$\lambda = H.$$

4. En résumé, la congruence étant rapportée à ses développables, on est ramené à définir une congruence de Ribaucour au moyen de quatre fonctions ξ_1, ξ_2, ξ_3, λ, solutions d'une même équation de Moutard telles que l'on ait

$$\lambda = \left| \xi_1 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right|.$$

Cela suppose un choix particulier des variables indépendantes u et v : nous appellerons ***variables normales*** des variables satisfaisant à ces conditions ([1]).

Des variables restent normales si on leur fait subir une transformation linéaire

$$
\begin{aligned}
u' &= au + b, \\
v' &= cv + d,
\end{aligned}
$$

a, b, c, d étant des constantes.

On peut également permuter u et v.

Remarquons encore que si l'on remplace les fonctions ξ_1, ξ_2, ξ_3 par trois autres fonctions ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, telles que

$$
\begin{aligned}
\xi'_1 &= a_1 \xi_1 + b_1 \xi_2 + c_1 \xi_3, \\
\xi'_2 &= a_2 \xi_1 + b_2 \xi_2 + c_2 \xi_3, \\
\xi'_3 &= a_3 \xi_1 + b_3 \xi_2 + c_3 \xi_3,
\end{aligned}
$$

a_1, b_1, c_1, a_2, ... étant des constantes, on obtient une congruence identique à celle dont on est parti, à une affinité près.

5. On peut énoncer de diverses façons le problème auquel nous sommes ramenés.

On peut dire qu'il s'agit de trouver trois fonctions ξ_1, ξ_3, ξ_3 linéairement indépendantes qui satisfassent à deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre de la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = M\xi, \\
&P\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + Q\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + R\xi = 0. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

([1]) Dans la suite, nous supposerons toujours, sauf avis contraire, que les variables choisies répondent à ces conditions. Il est évident que, si les variables, au lieu d'être normales, étaient quelconques, on aurait, U et V étant des fonctions de u et v respectivement,

$$
\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix} UV.
$$

Les asymptotiques des surfaces focales de la congruence sont données par l'équation (6)

$$\lambda B\, du^2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\, dv^2 = 0. \tag{6}$$

On a

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial\xi_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

et, d'après la règle de dérivation des déterminants,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial^2\xi_1}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

D'autre part, on tire des équations (1)

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2} \end{vmatrix}}{\lambda},$$

en sorte que l'équation (6) des asymptotiques devient

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial^2\xi_1}{\partial v^2} \end{vmatrix} dv^2 = 0. \tag{17}$$

Or, on tire de l'équation (16)

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = -\frac{Q}{P}\frac{\partial^2\xi}{\partial v_2} - \frac{R}{P}\xi,$$

ce qui donne, pour l'équation des asymptotiques,

$$-\frac{du^2}{P} + \frac{dv^2}{Q} = 0.$$

Or, on a évidemment,

$$\frac{P}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi_1}{\partial v^2} & \xi_1 \\ \frac{\partial^2\xi_2}{\partial v^2} & \xi_2 \end{vmatrix}} = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2} & \xi_1 \\ \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2} & \xi_2 \end{vmatrix}}.$$

L'équation des asymptotiques des surfaces focales prend donc finalement la forme

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} & \xi_1 \\ \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} & \xi_2 \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi_1}{d v^2} & \xi_1 \\ \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial v^2} & \xi_2 \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

6. On peut dire aussi que le problème consiste à trouver un réseau plan à invariants égaux dont les coordonnées x_1 et x_2 satisfassent à la relation

$$\frac{\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}} = \frac{\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}}.$$

Considérons en effet la surface génératrice de la congruence. Les coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un de ces points sont données par les formules de Lelieuvre

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial v}$$

et des formules analogues pour x_2 et x_3.

On en tire

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \xi_2 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2} - \xi_3 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2},$$
$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = -\xi_2 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial v^2} + \xi_3 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial v^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}} = \frac{\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}} = \frac{\frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2}},$$

car, dans la proportion formée en égalant deux quelconques de ces trois rapports, la relation obtenue en écrivant que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens revient précisément à exprimer que le déterminant (13) s'annule, ce qui doit être pour que les fonctions ξ_1, ξ_2, ξ_3 conviennent au problème.

CHAPITRE II.

CONGRUENCES APPARTENANT AU COMPLEXE LINÉAIRE.

1. Nous avons vu qu'une congruence W et de Ribaucour est déterminée par trois solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'une équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = M\xi, \tag{1}$$

telles que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Nous nous proposons de rechercher dans ce Chapitre quelles sont les équations (1) qui admettent deux solutions ξ_2 et ξ_3 telles que la condition (2) soit satisfaite quand ξ_1 est une solution quelconque de (1).

En d'autres termes, nous cherchons les cas où, ξ_1 et ξ_2 étant deux solutions de (1), la relation

$$\begin{vmatrix} \xi & \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \\ \xi_2 & \dfrac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 \xi_2}{\partial v^2} \\ \xi_3 & \dfrac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 \xi_3}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

est une conséquence de (1).

La relation (3) considérée comme une équation aux dérivées partielles en ξ doit être une identité, et l'on doit avoir

$$(4) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 \xi_2}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2 \xi_3}{\partial v^2}} = \frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{\dfrac{\partial^2 \xi_2}{\partial u\, \partial v}}{\dfrac{\partial^2 \xi_3}{\partial u\, \partial v}}.$$

Soit θ la valeur commune de tous ces rapports.

On a

$$\xi_2 = \theta \xi_3,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} = \theta \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \xi_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial v^2} = \theta \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u\, \partial v} = \theta \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \xi_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v}.$$

Les équations (4) donnent alors

$$(5) \qquad 2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \xi_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = 0,$$

$$(6) \qquad 2 \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \xi_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Les équations (5) et (6) donnent respectivement

$$(8) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{V}{\xi_3^2},$$

$$(9) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{U}{\xi_3^2},$$

V et U étant respectivement fonctions de v et de u seuls.

Écrivant que les équations (8) et (9) donnent pour $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v}$ deux valeurs égales, on obtient

$$(10) \qquad (U' - V') \xi_3 + 2\left(V \frac{\partial \xi_3}{\partial v} - U \frac{\partial \xi_3}{\partial u}\right) = 0.$$

Écrivant d'autre part que l'équation (7) est satisfaite, on obtient, en tenant compte de (10),

$$(U'+V')\,\xi_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$U'+V' = 0;$$

U' et V' sont donc des constantes opposées, et l'on a

$$U = au + b, \qquad V = -av + c,$$

a, b, c étant des constantes.

Deux cas sont maintenant à distinguer, suivant que a est nul ou non.

2. Supposons d'abord $a = 0$.

L'équation (10) donne

$$c\,\frac{\partial \xi_3}{\partial v} - b\,\frac{\partial \xi_3}{\partial u} = 0.$$

Pour discuter cette équation aux dérivées partielles, nous allons distinguer divers cas, suivant qu'aucune, deux ou une des quantités b et c sont nulles.

Supposons d'abord que b et c soient des constantes non nulles. A condition de multiplier u et v par des constantes convenables, on peut poser

$$b = c = 1,$$

et l'équation (10) donne

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial v} - \frac{\partial \xi_3}{\partial u} = 0;$$

ξ_3 est donc une fonction de $u+v$. On peut poser

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{f'(u+v)}}.$$

Les équations (8) et (9) donnent alors

$$\theta = f, \qquad \xi_2 = \frac{f}{\sqrt{f'}}.$$

Si b et c étaient nuls simultanément, on aurait

$$U = 0, \qquad V = 0,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = 0;$$

θ serait constant, et les deux paramètres ξ_2 et ξ_3 auraient un rapport constant, en sorte qu'on n'aurait pas une congruence proprement dite.

Si une seule des quantités b et c était nulle, on aurait, par exemple,

$$b = 1, \qquad c = 0, \qquad U = 1, \qquad V = 0.$$

L'équation (10) donnerait

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial u} = 0;$$

ξ_3 serait une fonction de V seul :

$$\xi_3 = V_3.$$

Les équations (8) et (9) deviendraient

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{1}{V_3^2},$$

d'où

$$\theta = \int \frac{dv}{V_3^2}, \qquad \xi_2 = \theta\xi_3 = V_3 \int \frac{dv}{V_3^2}.$$

On aurait

$$M = 0, \qquad \xi_1 = U_1 + V_1,$$

$$\lambda = \begin{vmatrix} U_1 + V_1 & U'_1 & V'_1 \\ V_3 \displaystyle\int \frac{dv}{V_3^2} & 0 & V'_3 \displaystyle\int \frac{dv}{V_3^2} + \frac{1}{V_3} \\ V_3 & 0 & V'_3 \end{vmatrix} = U'_1;$$

λ serait donc fonction de la seule variable u, et ce cas a été éliminé au Chapitre I.

3. Supposons $a \neq 0$. Nous pouvons faire subir aux variables u et v des transformations linéaires qui permettent de poser

$$U = u, \qquad V = -v.$$

L'équation (10) devient alors

$$u \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + v \frac{\partial \xi_3}{\partial v} = \xi_3,$$

ce qui montre que ξ_3 est une fonction homogène du premier degré en u et v. On peut poser

$$\xi_3 = \frac{v}{\sqrt{g'\left[\frac{u}{v}\right]}}.$$

Les équations (8) et (9) donnent alors

$$\theta = g, \qquad \xi_2 - \frac{vg}{\sqrt{g'}}.$$

4. Considérons le premier cas, où l'on a

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{f'(u+v)}}, \qquad \xi_2 = \frac{f}{\sqrt{f'}}; \tag{11}$$

ξ_1 est alors une solution quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u \, \partial v} = \xi_1 \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{f'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{f'}}} = \mathrm{M}\xi. \tag{12}$$

Riemann, dans son *Mémoire sur la propagation des ondes aériennes*, a intégré cette équation (12) ou une équation équivalente au moyen de séries hypergéométriques et de quadratures.

A part les solutions (11), on peut obtenir une infinité de solutions de (12) par la résolution d'équations différentielles du second ordre.

Pour cela, cherchons une solution de la forme

$$\xi_1 = e^{\alpha u} h(u+v), \tag{13}$$

α étant une constante ; h sera donné par la résolution de l'équation différentielle

$$h'' + \alpha h' = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{f'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{f'}}} h.$$

En combinant linéairement ces diverses solutions, on obtient une intégrale de (12) dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on voudra.

ξ_1 étant choisi, on aura pour λ

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ou

$$\lambda = \frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right) \xi_1. \tag{14}$$

Cette valeur est solution de (12), comme on le vérifie directement.

Si l'on fait jouer à λ le rôle de ξ_1, on aura une nouvelle congruence pour laquelle λ sera remplacé par

$$\lambda_1 = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)^{(2)} \xi_1,$$

et ainsi de suite. En général, on peut prendre

$$\xi_n = \lambda_{n-1} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)^{(n)} \xi_1.$$

Inversement, connaissant λ solution de (12), déterminons une fonction ξ qui soit solution de (12) et de

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial v} = \lambda. \tag{15}$$

La solution générale de (15) est

$$(16) \qquad \xi = \varphi(u, v) + A(u+v);$$

A étant une fonction arbitraire de $u+v$ et φ une solution particulière de (14).

Portant la valeur (15) dans l'équation (12), on obtient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + A'' = (\varphi + A) M$$

ou

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} - \varphi M = - A'' + AM.$$

Or, dans l'équation (17), le second membre est évidemment une fonction de $u+v$. Je dis qu'il en est de même du premier. En effet, le déterminant fonctionnel de ce premier membre et de $u+v$ est

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\, \partial v} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u\, \partial v^2} - M\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - M\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right);$$

φ étant une solution particulière de (15), ce déterminant fonctionnel est

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} - M\lambda = 0.$$

L'équation (17) pourra donc être considérée comme une équation différentielle du second ordre linéaire avec second membre, la fonction inconnue étant A et la variable $u+v$. La solution générale de (17) s'obtient d'ailleurs en prenant une solution particulière à laquelle on ajoute les quantités (11) multipliées par des constantes arbitraires.

La connaissance d'une solution de (12) entraînera donc la connaissance d'une série de solutions en général illimitée dans les deux sens [1].

---

[1] Cela résulte d'ailleurs de ce que l'équation linéaire (12) n'est pas changée par les transformations du groupe à un paramètre

$$x' = x + a, \qquad y' = x - a,$$

qui a pour transformation infinitésimale $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$

Si nous calculons les coordonnées y_1, y_2, y_3 du point moyen d'une droite de la congruence, d'après les formules (3) du Chapitre I, nous trouvons notamment

$$y_2 = \quad 2\left(\frac{f}{\sqrt{f'}}\right)'\xi_1 - \frac{\sqrt{f'}}{f}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + \frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right),$$
$$y_3 = -2\left(\frac{1}{\sqrt{f'}}\right)'\xi_1 - \frac{1}{\sqrt{f'}}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + \frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right).$$

En calculant les coordonnées pluckériennes, on trouve par exemple

$$L_1 = y_2\xi_3 - y_3 - \xi_2 = 2\xi_1.$$

Les congruences en question font donc partie du complexe linéaire d'équation

(18) $$L_1 = 2X_1.$$

Elles ont été signalées par M. Guichard.

5. Considérons le second cas, où l'on a

(19) $$\xi_3 = \frac{v}{\sqrt{g'\left(\frac{u}{v}\right)}}, \qquad \xi_2 = \frac{vg}{\sqrt{g'\left(\frac{u}{v}\right)}};$$

ξ_1 est alors une solution quelconque de l'équation

(20) $$\frac{\partial^2\xi_1}{\partial u\,\partial v} = -\frac{u}{v^3}\,\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{g'}}\right)''}{\sqrt{\frac{g'}{1}}}\,\xi_1.$$

Cette équation (19) se transforme en une équation de la forme (12) si l'on fait le changement de variables

(21) $$u = e^{u'}, \qquad v = e^{-v'};$$

ξ_1 étant connu, la valeur de λ sera

(22) $$\lambda = u\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + v\frac{\partial\xi_1}{\partial v} - \xi_1 = \left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} - 1\right)\xi_1.$$

Les congruences obtenues n'appartiennent pas à un complexe linéaire tel que (20), mais peuvent s'en déduire, puisque l'on peut ramener les équations (20) aux équations (12) par la transformation (21).

CHAPITRE III.

CONGRUENCES PARALLÈLES.

1. Deux congruences sont dites *parallèles* lorsque les développables se correspondent et que les droites correspondantes sont parallèles. (*Cf.* C. Guichard, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XIV, année 1897, p. 478.)

Nous nous proposons dans le présent Chapitre de rechercher s'il existe des congruences W et de Ribaucour parallèles entre elles au sens rappelé ci-dessus.

Soit une congruence γ déterminée par les solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3, λ de l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{M}\xi, \tag{1}$$

comme il a été expliqué au Chapitre I : ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les paramètres directeurs d'une droite de la congruence rapportée à ses développables, et les variables u et v sont supposées normales [1], c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{M}\lambda,$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour avoir une congruence γ' parallèle à γ, nous conserverons les

---

[1] Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas nécessaire dans ce premier paragraphe.

paramètres u et v, et remplacerons λ par une fonction λ' qui devra être solution de (1) et telle que l'on ait

$$\lambda' = \mathrm{UV} \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \mathrm{UV}\lambda$$

(*cf.* Chapitre I, § **4**, renvoi), les variables n'étant plus normales.

λ' devra être solution de (1). Or on a

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial u} = \mathrm{UV}\frac{\partial \lambda}{\partial u} \quad + \mathrm{U'V}\lambda,$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial v} = \mathrm{UV}\frac{\partial \lambda}{\partial v} \quad + \mathrm{UV'}\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 \lambda'}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{UV}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} + \mathrm{UV'}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \mathrm{U'V}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \mathrm{U'V'}\lambda.$$

En substituant dans (1), il reste

$$\mathrm{UV'}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \mathrm{U'V}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \mathrm{U'V'}\lambda = 0. \tag{2}$$

La solution générale de cette équation aux dérivées partielles est

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{U}} g\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}\right).$$

2. On peut résoudre la même question comme suit, en conservant l'emploi des variables normales.

Pour avoir une congruence parallèle à la congruence γ, nous remplacerons les paramètres u et v par U et V fonctions respectivement de u et de v et nous multiplierons les ξ par une fonction $f(u, v)$.

Les nouveaux paramètres directeurs seront

$$\Xi_i = \xi_i(\mathrm{U}, \mathrm{V}) f(u, v).$$

On en tire

$$\frac{\partial^2 \Xi_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial \mathrm{U}\, \partial \mathrm{V}} \mathrm{U'V'}f + \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathrm{U}} \mathrm{U'} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathrm{V}} \mathrm{V'} \frac{\partial f}{\partial u} + \xi_i \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}$$

$$= \xi_i\left(\mathrm{MU'V'}f + \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}\right) + \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \mathrm{U'} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \mathrm{V} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

En écrivant que Ξ_i satisfait à une équation de Moutard, on obtient une relation de la forme

$$A\xi_i + U' \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial u} + V' \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = 0.$$

Comme, dans cette relation, i peut prendre les valeurs 1, 2, 3 et que le déterminant

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro, il en résulte que l'on doit avoir notamment

$$U' \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

$$V' \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Or, U' et V' sont tous deux différents de zéro.

Les relations précédentes donnent donc

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

f est donc une constante que nous prendrons égale à l'unité.

Considérons donc les paramètres directeurs

$$\Xi_i = \xi_i(U, V)$$

On a

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial u} = U' \frac{\partial \xi_i}{\partial U}, \qquad \frac{\partial \Xi_i}{\partial v} = V' \frac{\partial \xi_i}{\partial V}, \qquad \frac{\partial^2 \Xi_i}{\partial u\, \partial v} = U'V' \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial U\, \partial V},$$

et les Ξ_i satisfont à l'équation de Moutard

(3) $$\frac{\partial^2 \Xi}{\partial u\, \partial v} = MU'V'\Xi,$$

λ sera remplacé par

(4) $$\Lambda = \begin{vmatrix} \Xi_1 & \frac{\partial \Xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Xi_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \lambda(U, V)U'V'.$$

On a alors

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial U} U'^2 V' \qquad + \lambda U'' V',$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial v} = \frac{\partial\lambda}{\partial V} U' V'^2 \qquad + \lambda U' V'',$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial U\,\partial V} U'^2 V'^2 + \frac{\partial\lambda}{\partial U} U'^2 V'' + \frac{\partial\lambda}{\partial V} U'' V'^2 + \lambda U'' V''.$$

Écrivant que Λ est solution de l'équation (3), on obtient

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial U} U'^2 V'' + \frac{\partial\Lambda}{\partial V} U'' V'^2 + \Lambda U'' V'' = 0. \tag{5}$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, posons

$$U = x, \qquad V = y,$$

$$U' = \frac{1}{X}, \qquad V' = \frac{1}{Y},$$

X et Y étant respectivement fonctions de x et de y.

Il en résulte

$$U'' = -\frac{X'}{X^3}, \qquad V'' = -\frac{Y'}{Y^3}.$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$-\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{1}{X^2}\frac{Y'}{Y^3} - \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\frac{X'}{X^3}\frac{1}{Y^2} + \Lambda\frac{X'Y'}{X^3Y^3}$$

ou bien

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x} XY' + \frac{\partial\Lambda}{\partial y} YX' - \Lambda X'Y' = 0. \tag{6}$$

La solution générale de cette équation aux dérivées partielles est

$$\Lambda = X g\left(\frac{X}{Y}\right). \tag{7}$$

g étant une fonction arbitraire de $\frac{X}{Y}$.

Autrement dit, λ doit être une fonction homogène du premier degré de deux quantités dépendant respectivement de u et de v seuls.

3. En général, une congruence W et de Ribaucour n'admet aucune congruence parallèle. (Nous laissons de côté le cas banal de l'homothétie.) Voici un exemple de ce fait :

Considérons la congruence des normales à la surface de vis à filet carré.

Cette surface rapportée à ses lignes de courbure a pour équations paramétriques :

$$y_1 = \operatorname{sh}(u+v)\cos(u-v), \qquad y_2 = \operatorname{sh}(u+v)\sin(u-v), \qquad y_3 = u-v.$$

La normale a pour paramètres directeurs :

$$\xi_1 = -\sin(u-v), \qquad \xi_2 = \cos(u-v), \qquad \xi_3 = \operatorname{sh}(u+v).$$

Ces paramètres satisfont à l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} = \xi.$$

Pour λ, on peut prendre à un facteur constant près

$$\lambda = \operatorname{ch}(u+v).$$

L'équation (6) nous donnerait, en remplaçant Λ, x, y, X, Y, respectivement par $\operatorname{ch}(u+v)$, u, v, U, V :

$$\operatorname{sh}(u+v)(U'V''+U''V')+U''V''\operatorname{ch}(u+v)=0,$$

d'où

$$\frac{\operatorname{ch}(u+v)}{\operatorname{sh}(u+v)} = \operatorname{coth}(u+v) = -\frac{U'V''+U''V'}{U''V''} = -\frac{U'}{U''}-\frac{V'}{V''}$$

et

$$\frac{\partial^2 \operatorname{coth}(u+v)}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Or, cette relation est fausse, donc la congruence n'admet pas de parallèles.

4. Voici un exemple de congruence admettant des parallèles, lesquelles sont également W et de Ribaucour.

Considérons l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = 0, \tag{8}$$

et ses trois solutions

$$\xi_1 = \sin\omega \sin v, \qquad \xi_2 = \sin\omega\, \mathrm{sh}\, u, \qquad \xi_3 = \cos v + \cos\omega\, \mathrm{ch}\, u,$$

où ω est un angle arbitraire. Ces trois solutions, associées au déterminant

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix} = -(\cos\omega \cos v + \mathrm{ch}\, u) \sin^2\omega,$$

déterminent bien une congruence W et de Ribaucour, car λ est solution de (8).

Les droites de cette congruence sont les normales à une surface minima à lignes de courbure planes, qui est la surface de Bonnet et dont les équations paramétriques sont

$$y_1 = v\cos\omega + \sin v\, \mathrm{ch}\, u, \qquad y_2 = -u - \cos\omega \cos v\, \mathrm{ch}\, u, \qquad y_3 = \sin\omega \cos v\, \mathrm{ch}\, u.$$

Pour trouver une congruence parallèle, remarquons que λ peut s'écrire

$$\lambda = \sin^2\omega\,[(\alpha + \cos v)\cos\omega + \mathrm{ch}\, u - \alpha\cos\omega],$$

α étant une constante, et λ est ainsi une fonction homogène du premier degré des quantités

$$\alpha + \cos v \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}\, u - \alpha\cos\omega.$$

Nous prendrons $\alpha = 0$.

Pour trouver la congruence parallèle correspondante, résolvons le système

$$\mathrm{U} = x, \qquad \mathrm{U}' = \frac{d\mathrm{U}}{du} = \frac{1}{\mathrm{ch}\, x};$$

il donne

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} x \, dx, \qquad U = x = \operatorname{arc\,sh} u.$$

De même

$$V = \arc \sin v.$$

Les nouvelles expressions des paramètres sont

$$\Xi_1 = v \sin\omega, \qquad \Xi_2 = u \sin\omega, \qquad \Xi_3 = \sqrt{1+u^2}\cos\omega + \sqrt{1-v^2}.$$

Prenons pour Λ la quantité

$$\Lambda = -\begin{vmatrix} \Xi_1 & \dfrac{\partial \Xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \Xi_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\cos\omega}{\sqrt{1+u^2}},$$

qui est également solution de (8).

Les quatre quantités

$$\Xi_1, \quad \Xi_2, \quad \Xi_3 \qquad \text{et} \qquad \Lambda$$

définissent une nouvelle congruence W et de Ribaucour qui est parallèle à la congruence des normales à la surface de Bonnet : cette nouvelle congruence est encore une congruence de normales, mais non plus une congruence de normales à une surface minima.

Les congruences W et de Ribaucour, qui sont parallèles à des congruences de normales à des surfaces minima sans être elles-mêmes des congruences de normales à des surfaces minima, seront étudiées au Chapitre VII.

5. Nous allons rechercher si une congruence W et de Ribaucour peut admettre plusieurs congruences parallèles distinctes (nous ne regardons pas comme distinctes des congruences homothétiques).

Si la congruence γ admet deux congruences parallèles, λ devra satisfaire à deux équations distinctes telles que l'équation (2). On devra donc avoir

$$(2) \qquad U\,V' \frac{\partial\lambda}{\partial u} + U'\,V \frac{\partial\lambda}{\partial v} + U'\,V'\,\lambda = 0,$$

$$(2') \qquad U_1\,V'_1 \frac{\partial\lambda}{\partial u} + U'_1\,V_1 \frac{\partial\lambda}{\partial v} + U'_1\,V'_1\,\lambda = 0.$$

On en conclut

$$\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}{U'U'_1(VV'_1 - V_1V')} = \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{V'V'_1(U'U_1 - UU'_1)} = \frac{\lambda}{UU'_1V_1V' - U_1U'VV'_1},$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{U'U'_1(VV'_1 - V_1V')}{UU'_1V_1V' - U_1U'VV'_1}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{V'V'_1(U'U_1 - UU'_1)}{UU'_1V_1V' - U_1U'VV'_1}. \tag{9}$$

Écrivons que les relations (8) et (9) sont compatibles :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{U'U'_1(VV'_1 - V_1V')}{UU'_1V_1V' - U_1U'VV'_1} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{V'V'_1(U'U_1 - UU'_1)}{UU'_1V_1V' - U_1U'VV'_1}.$$

En développant et faisant les réductions, on obtient finalement une relation qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}(U'_1U - U_1U')\,U'U'_1VV_1(V''_1V' - V''V'_1)&\\ +(V'_1V - V_1V')\,V'V'_1UU_1(U''U'_1 - U''_1U') &= 0.\end{aligned}$$

On en tire

$$\frac{U''U'_1 - U''_1U'}{U'U_1 - U'_1U}\,\frac{UU_1}{U'U'_1} = \frac{V''V'_1 - V''_1V'}{V'V_1 - V'_1V}\,\frac{VV_1}{V'V'_1}.$$

Le premier membre étant une fonction de u seul, et le second membre une fonction de v seul, doivent être l'un et l'autre constants. Nous les poserons égaux à $1 - c$. On aura par exemple

$$\frac{\frac{U''}{U'} - \frac{U''_1}{U'_1}}{\frac{U'}{U} - \frac{U'_1}{U_1}} = 1 - c$$

ou bien

$$\frac{U''}{U'} - \frac{U''_1}{U'_1} = (1 - c)\left(\frac{U'}{U} - \frac{U'_1}{U_1}\right),$$

d'où en intégrant, A désignant une constante,

$$A\frac{U'}{U'_1}=\frac{U^{1-c}}{U_1^{1-c}},$$

ce qui peut s'écrire

$$(10)\qquad AU^{c-1}U'=U_1^{c-1}U'_1,$$

et en intégrant encore une fois, en supposant toutefois $c\neq 0$,

$$AU^c=U_1^c+B \qquad \text{ou} \qquad U_1^c=AU^c-B,$$

et de même

$$V_1^c=EV^c-D.$$

Il en résulte

$$\frac{U'_1}{U_1}=\frac{AU^{c-1}U'}{AU^c-B},\qquad \frac{V'_1}{V_1}=\frac{EV^{c-1}V'}{EV^c-D}.$$

Portant ces expressions dans les formules (8) et (9), on obtient

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\frac{ADU^{c-1}U'}{BEV^c-ADU^c},\qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{-BEV^{c-1}V'}{BEV^c-ADU^c},$$

d'où, en intégrant,

$$(11)\qquad \lambda=(BEV^c-ADU^c)^{-\frac{1}{c}}.$$

On peut alors écrire, en posant $BD=h$,

$$\lambda=\left[(BEV^c-h)^{\frac{1}{c}c}-(ADU^c-h)^{\frac{1}{c}c}\right]^{-\frac{1}{c}};$$

λ est alors une fonction homogène de degré -1 des quantités

$$(ADU^c-h)^{\frac{1}{c}} \qquad \text{et} \qquad (BEV^c-h)^{\frac{1}{c}},$$

qui sont fonctions respectivement de u et de v seuls. On peut alors prendre

$$\lambda'=(BEV^c-h)^{\frac{1}{c}}(ADU^c-h)^{\frac{1}{c}}[(BEV^c-h)-(ADU^c-h)]^{-\frac{1}{c}}$$

ou

$$(12)\qquad \lambda'=\left(\frac{1}{ADU^c-h}-\frac{1}{BEV^c-h}\right)^{-\frac{1}{c}}.$$

Si l'on considère l'identité

$$\frac{\alpha \mathrm{BEV}^c+\beta}{\gamma \mathrm{BEV}^c+\delta}-\frac{\alpha \mathrm{ADU}^c+\beta}{\gamma \mathrm{ADU}^c+\delta}=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(\mathrm{BEV}^c-\mathrm{ADU}^c)}{(\gamma \mathrm{BEV}^c+\delta)(\gamma \mathrm{ADU}^c+\delta)},$$

on constate que λ' peut encore prendre la forme, α, β, γ, δ étant des constantes,

$$(13)\qquad \lambda'=\left(\frac{\alpha \mathrm{BEV}^c+\beta}{\gamma \mathrm{BEV}^c+\delta}-\frac{\alpha \mathrm{ADU}^c+\beta}{\gamma \mathrm{ADU}^c+\delta}\right)^{-\frac{1}{c}}.$$

Cette expression (13) a l'avantage de montrer que λ donné par l'expression (11) est un cas particulier de λ', où l'on fait

$$\alpha=\delta=1,\qquad \beta=\gamma=0.$$

Si nous supposons maintenant $c=0$, la relation (10) donne

$$\mathrm{A}\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}'}=\frac{\mathrm{U}_1'}{\mathrm{U}_1},$$

d'où, en intégrant,

$$\mathrm{U}_1=\mathrm{FU}^{\mathrm{A}},$$

et de même

$$\mathrm{V}_1=\mathrm{KV}^{\mathrm{E}}.$$

Les formules (8) et (9) deviennent

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\frac{\mathrm{A}(\mathrm{E}-1)}{\mathrm{A}-\mathrm{E}},\qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\frac{\mathrm{E}(1-\mathrm{A})}{\mathrm{A}-\mathrm{E}},$$

d'où, en intégrant,

$$(14)\qquad \lambda=\mathrm{U}^{\frac{\mathrm{A}(\mathrm{E}-1)}{\mathrm{A}-\mathrm{E}}}\,\mathrm{V}^{\frac{\mathrm{E}(1-\mathrm{A})}{\mathrm{A}-\mathrm{E}}}.$$

Les exposants de U et V dans (14) ayant pour somme -1, λ est une fonction homogène de degré -1 des quantités U et V.

On peut écrire

$$\lambda=(\mathrm{U}^{\mathrm{A}})^{\frac{\mathrm{E}-1}{\mathrm{A}-\mathrm{E}}}(\mathrm{V}^{\mathrm{E}})^{\frac{1-\mathrm{A}}{\mathrm{A}-\mathrm{E}}}$$

et l'on voit que λ est aussi une fonction homogène de degré -1 des quantités U^A et V^E. On peut donc prendre

$$\lambda' = U^A V^E \lambda = U^{\frac{A^2 - A}{A - E}} V^{\frac{E - E^2}{A - E}}.$$

Si λ est le produit d'une fonction de u par une fonction de v,

$$\lambda = f(u)\varphi(v),$$

on pourra prendre A et E arbitrairement.

Il en résultera

$$U = f^{\frac{A-E}{A(E-1)}}, \qquad V = \varphi^{\frac{A-E}{E(1-A)}},$$

et

$$\lambda' = f^{\frac{A-1}{E-1}} \varphi^{\frac{E-1}{A-1}}.$$

Cette expression dépend d'un paramètre, qui est la valeur du rapport

$$\frac{A - 1}{E - 1},$$

et λ' reprend la valeur λ si ce rapport est égal à l'unité.

6. Nous allons donner des exemples de congruences rentrant dans les cas généraux trouvés au paragraphe précédent.

Considérons l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = \frac{2}{(u+v)^2} \xi,$$

et les solutions

$$\xi_1 = (u+v)^2,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{u+v},$$

$$\xi_3 = (u+v)^2(u-v),$$

$$\lambda = (u+v)^2.$$

Elles définissent une congruence W et de Ribaucour, puisque λ est, à un facteur constant près, égal au déterminant

$$\left| \xi_1 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right|.$$

Cette congruence admet des parallèles de même espèce, puisque λ peut être mis sous la forme (11), à condition de prendre

$$c = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{AD}{\sqrt{U}} = -u, \qquad \frac{BE}{\sqrt{V}} = v.$$

Considérons maintenant l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \frac{l(1-l)}{uv}\xi,$$

et ses solutions

$$\xi_1 = u^l v^{1-l}, \qquad \xi_2 = u^{1-l} v^l, \qquad \xi_3 = u^{lp} v^{\frac{1-l}{p}}, \qquad \lambda = u^{lp} v^{\frac{1-l}{p}},$$

où l et p sont des constantes. Ces quatre solutions définissent une congruence W et de Ribaucour, les variables étant normales.

On voit que l'expression de λ rentre dans la forme (14).

7. Nous avons trouvé au paragraphe 5 que, si λ a l'une des formes (11) ou (14), les valeurs de λ' dépendent de paramètres autres que des facteurs constants. Il en résulte que les congruences de départ admettent une infinité de congruences parallèles distinctes non homothétiques entre elles.

Il en résulte que :

Si une congruence W *et de Ribaucour admet deux congruences parallèles de la même espèce, elle en admet une infinité.*

On pouvait d'ailleurs démontrer facilement ce résultat sans connaître la forme de λ. Les équations (2) et (2') du paragraphe 5 s'écrivent, en effet,

$$\frac{U}{U'}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{V}{V'}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda = 0, \qquad \frac{U_1}{U'_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{V_1}{V'_1}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda = 0.$$

Si λ satisfait à ces deux équations, il satisfera à une infinité d'équations de la même forme

$$\frac{U_2}{U'_2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{V_2}{V'_2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\lambda=0.$$

Il suffit, en effet, de prendre U_2 et V_2 tels que l'on ait

$$\frac{U_2}{U'_2}=\alpha\frac{U}{U'}+\beta\frac{U_1}{U'_1},\qquad \frac{V_2}{V'_2}=\alpha\frac{V}{V'}+\beta\frac{V_1}{V'_1},$$

α et β désignant deux constantes dont la somme est l'unité.

8. Nous avons donné des exemples de congruences n'admettant pas de parallèles et des exemples de congruences admettant une infinité de parallèles : nous allons terminer ce Chapitre en donnant un exemple de congruence admettant une seule parallèle.

Considérons l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}=\frac{l(1-l)}{uv}\xi,$$

et ses solutions

$$\xi_1=u^l v^{1-l},\qquad \xi_2=u^{1-l}v^l,\qquad \xi_3=u^{lp}v^{\frac{1-l}{p}}+u^{\frac{1-l}{p}}v^{lp},\qquad \lambda=u^{lp}v^{\frac{1-l}{p}}+u^{\frac{1-l}{p}}v^{lp}.$$

Elles définissent en variables normales une congruence W et de Ribaucour. λ n'est pas de l'une des formes (11) et (14), mais est une fonction homogène de degré -1 des quantités

$$u^{-\left(lp+\frac{1-l}{p}\right)},$$

$$v^{-\left(lp+\frac{1-l}{p}\right)}.$$

La congruence correspondante n'admet donc qu'une parallèle.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

1. Nous nous proposons de transformer les conditions trouvées au Chapitre I et d'introduire les coordonnées d'un point de la surface génératrice de la congruence (*cf.* Chapitre I, § 5).

Nous allons d'abord résoudre le problème suivant :

Problème. — Étant donnée une équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = M\xi, \tag{1}$$

à quelles conditions doit satisfaire une fonction x de u et v pour être une coordonnée de la surface génératrice d'une congruence de Ribaucour formée au moyen de solutions de l'équation (1).

En d'autres termes, ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant trois solutions de l'équation (1), et x étant donné par les formules de Lelieuvre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial v},$$

nous allons rechercher à quelles équations doit satisfaire x lorsque M est donné.

On sait, et l'on vérifie d'ailleurs immédiatement, que l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \xi = 0 \tag{2}$$

est satisfaite quand on donne à ξ la valeur ξ_2 ou la valeur ξ_3 qui sont toutes deux solutions de (1). On a donc à chercher la relation qui doit exister entre x et M pour que (1) et (2) aient en commun deux solutions linéairement distinctes.

Dérivant (2) par rapport à u et tenant compte de (1), on obtient

$$\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \left(M \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial^3 x}{\partial u^2\, \partial v} \right) \xi = 0. \tag{3}$$

On obtiendrait de même, en dérivant par rapport à v,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\left(\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}\right)\xi=0. \tag{4}$$

Dérivant (3) par rapport à v, en tenant compte de (1), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}+\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}&\\ +\left(\mathrm{M}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial^4 x}{\partial u^2\partial v^2}\right)\xi&=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Si les équations (2), (3), (4) et (5), linéaires en $\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}, \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}, \frac{\partial\xi}{\partial v}, \frac{\partial\xi}{\partial u}, \xi$ étaient linéairement distinctes, elles permettraient de calculer

$$\frac{\partial\xi}{\partial u},\quad \frac{\partial\xi}{\partial v},\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2},\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}$$

en fonction de ξ. En dérivant les expressions obtenues et en dérivant également l'équation (1), on calculerait les valeurs de toutes les dérivées de ξ en un point (u_0, v_0) en fonction de la valeur ξ_0 en ce point. L'intégrale du système (1), (2) dépendrait donc d'une constante arbitraire au plus et comme les équations sont linéaires, elles ne pourraient admettre les deux intégrales linéairement distinctes ξ_2 et ξ_3.

Les équations (2), (3), (4), (5) doivent donc se réduire à trois.

Le tableau de leurs coefficients

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & -\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & 0 & \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial u} & \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial v} & \mathrm{M}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial^4 x}{\partial u^2\partial v^2} \end{vmatrix}$$

doit être de rang 3.

On reconnaît facilement que cette condition donne une seule équation, que l'on peut former par exemple en ajoutant aux éléments de la dernière ligne les éléments des première, deuxième et troisième, multipliés respectivement par

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\frac{\partial x}{\partial u}}\,\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\frac{\partial x}{\partial v}} - \mathrm{M}, \qquad -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\frac{\partial x}{\partial v}} \quad \text{et} \quad -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\frac{\partial x}{\partial u}}.$$

On obtient ainsi un déterminant dans lequel tous les éléments de la deuxième ligne sont nuls, sauf un, ce qui donne l'équation

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{M}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}} - 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}}\right)$$

$$- \frac{\partial^4 x}{\partial u^2\,\partial v^2} + \frac{\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\frac{\partial x}{\partial v}} + \frac{\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\frac{\partial x}{\partial u}} - \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}} = 0.$$

2. Nous avons trouvé au début que la quantité

$$\lambda = \left|\xi_1 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right|$$

doit être solution de l'équation (1), c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(7) \qquad \left|\xi_1 \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2}\right| = 0.$$

Or, en employant les quantités ξ_1 et x, on voit que l'on a

$$(8) \qquad \lambda = \xi_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

On en tire, en tenant compte de ce que ξ_1 est solution de (1),

$$(9)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u} = \xi_1 \frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{M}\xi_1 \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$(10)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \xi_1 \frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{M}\xi_1 \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \xi_1 \frac{\partial^4 x}{\partial u^2\,\partial v^2} &- \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ &- 2\mathrm{M}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \xi_1\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \mathrm{M}\lambda. \end{aligned}$$

En exprimant que λ est solution de (1), on obtient

$$(12)\qquad \xi_1\left(\frac{\partial^4 x}{\partial u^2\,\partial v^2} - 2\mathrm{M}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0;$$

ξ_1 et x sont donc donnés par la résolution du système d'équations aux dérivées partielles (6) et (12), où l'on suppose que l'on a remplacé dans l'équation (6)

$$\mathrm{M},\quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\quad \text{et}\quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}$$

respectivement par

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{M} = \frac{1}{\xi_1}\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u\,\partial v}, \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} = \frac{1}{\xi_1^2}\left(\xi_1 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial u^2\,\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u\,\partial v}\right), \\ &\qquad\qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} = \frac{1}{\xi_1^2}\left(\xi_1 \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial u\,\partial v^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u\,\partial v}\right). \end{aligned}\right.$$

Remarquons d'ailleurs que l'on peut remplacer une des deux équations (6) ou (9) par celle que l'on obtient en ajoutant à l'équation (12) l'équation (6) multipliée par ξ_1,

$$(14)\qquad \begin{aligned} &-\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}}\right) - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ &+ \xi_1\left(\frac{\dfrac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}} + \frac{\dfrac{d^3 x}{\partial u\,\partial v^2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} - \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}}\right) = 0. \end{aligned}$$

3. Nous pouvons remplacer ce système en ξ_1 et x par un autre où les inconnues seront λ et x.

L'équation (6) reste la même : on y remplace M et ses dérivés par des expressions analogues aux expressions (13), mais où ξ_1 est remplacé purement et simplement par λ.

Des expressions (8), (9), (10), (12), tirons respectivement

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\quad \frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v},\quad \frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2},\quad \frac{\partial^4 x}{\partial u^2\,\partial v^2},$$

et portons ces expressions dans (14) ; on obtient après réductions

$$(15)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u}\,\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\,\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}}-\lambda\,\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\,\dfrac{\partial x}{\partial v}}=0,$$

ou bien

$$(16)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u}\,\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\,\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}-\lambda=0.$$

Les équations (16) et (6) permettront de trouver certaines solutions particulières au Chapitre suivant.

4. Nous avons dit, à la fin du Chapitre I, que le problème de la recherche d'une congruence W et de Ribaucour consiste à trouver trois quantités x_1, x_2, x_3, coordonnées d'un point de la surface génératrice de la congruence, et telles que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}}=\frac{\dfrac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}}=\frac{\dfrac{\partial^2 x_3}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 x_3}{\partial v^2}}.$$

Posons

$$(16)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}=e^{\varphi}$$

et

$$\lambda = e^{\mu}.$$

L'équation (15) devient alors

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + e^{\varphi}\frac{\partial\mu}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{17}$$

On a également

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = e^{-\varphi}\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\mu}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{18}$$

Les deux équations (17) et (18) admettent les quatre solutions communes x_1, x_2, x_3, 1. Comme ces quatre solutions sont linéairement distinctes pour des raisons évidentes, les équations (17) et (18) qui sont linéaires ont en commun la solution

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4,$$

dépendant de quatre constantes arbitraires a_1, a_2, a_3, a_4. En un point (u, v), on peut donc prendre arbitrairement les quatre quantités

$$x, \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}.$$

Calculons les dérivées troisièmes de x en dérivant les formules (17) et (18) et en remplaçant $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ par leurs valeurs données par les formules (17) et (18). On obtient

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} = e^{\varphi}\frac{\partial\mu}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2}\right]\frac{\partial x}{\partial u} + e^{\varphi}\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v} = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \left(\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + e^{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{\partial^2\mu}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)^2\right]\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2} = \frac{\partial\mu}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + e^{-\varphi}\left[\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial u} + \left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)^2\right]\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial v^3} = e^{-\varphi}\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u} + \frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial^2\mu}{\partial v^2}\right]\frac{\partial x}{\partial v}.$$

En calculant d'autre part de deux façons différentes $\frac{\partial^4}{\partial u^2\,\partial v^2}$, par dérivation des dérivées troisièmes, on obtient, après remplacement de $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ par leurs valeurs données par les formules (17) et (18) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 x}{\partial u^2 \partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = {} & 2\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\
& + \Bigg\{ \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2 \\
& \quad + 2\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} + \frac{\partial^3 \mu}{\partial u \partial v^2} \\
& \quad + e^{\varphi}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)^3\right]\Bigg\}\frac{\partial x}{\partial u} \\
& + \Bigg\{ \frac{\partial \mu}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right) \\
& \quad + e^{\varphi}\Bigg[\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^3 + 3\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2 \\
& \quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial \mu}{\partial v} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} + \frac{\partial^3 \mu}{\partial v^3} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\frac{\partial \mu}{\partial v}\Bigg]\Bigg\}\frac{\partial x}{\partial v}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 x}{\partial u^2 \partial v^2} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} = {} & 2\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\
& + \Bigg\{ \frac{\partial \mu}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right) \\
& \quad + e^{-\varphi}\Bigg[\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)^3 + 3\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)^2 \\
& \quad - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial \mu}{\partial u} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \frac{\partial^3 \mu}{\partial u^3} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial \mu}{\partial u}\Bigg]\Bigg\}\frac{\partial x}{\partial u} \\
& + \Bigg\{ \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)^2 \\
& \quad + 2\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \frac{\partial^3 \mu}{\partial u^2 \partial v} \\
& \quad + e^{\varphi}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^3\right]\Bigg\}\frac{\partial x}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Les deux expressions trouvées pour $\frac{\partial^4 x}{\partial u^2 \partial v^2}$ doivent être identiques, sans quoi il y aurait une relation entre $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$. On a donc les deux équations aux dérivées partielles en φ et μ

$$e^{\varphi}\left[\frac{\partial \mu}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial v}+2\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^3 \mu}{\partial u\, \partial v^2}\right]$$
$$=2\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial \mu}{\partial u}-2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}+\frac{\partial^3 \mu}{\partial u^3}+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial \mu}{\partial u},$$

$$e^{-\varphi}\left[\frac{\partial \mu}{\partial v}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial u}+2\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}\right)+\frac{\partial^3 \mu}{\partial u^2\, \partial v}\right]$$
$$=2\frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial \mu}{\partial v}+2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}+\frac{\partial^3 \mu}{\partial v^3}+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

CHAPITRE V.

ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS.

1. Dans ce Chapitre, nous allons étudier quelques solutions particulières des équations du Chapitre précédent, en procédant en général de la façon suivante : Nous nous donnerons la forme de x [1], première coordonnée de la surface génératrice, par exemple

$$x=u-v,\qquad x=f(u+v),\qquad x=uv,\qquad x=f(uv),\qquad x=\mathrm{U}+\mathrm{V},$$

λ sera alors donné par l'intégration de l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}+\frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}-\lambda=0,$$

M sera donné par

$$(2)\qquad \mathrm{M}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}$$

---

[1] Dans un but de simplification d'écriture, nous écrivons x au lieu de x_1.

et devra satisfaire à l'équation

$$(3)\quad \frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-M\left(\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}}-2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}}\right)$$

$$-\frac{\partial^4 x}{\partial u^2\,\partial v^2}+\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\frac{\partial x}{\partial v}}+\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\frac{\partial x}{\partial u}}-\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}=0;$$

ξ_1 devra satisfaire aux deux équations

$$(4)\quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}=M\xi,$$

$$(5)\quad \lambda=\xi_1\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

ξ_2 et ξ_3 sont deux solutions de

$$(6)\quad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\xi=0$$

qui devront satisfaire à l'équation (4).

Nous vérifierons ensuite que λ est bien égal, à un facteur constant près, au déterminant

$$\left|\xi_1\quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right|.$$

2. Considérons d'abord le cas où l'on aurait

$$x=u-v.$$

L'équation (1) est indéterminée. L'équation (3) donne

$$-\frac{\partial M}{\partial u}+\frac{\partial M}{\partial v}=0,$$

M sera donc une fonction de $u+v$ que nous écrirons

$$M=\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{f'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{f'}}}.$$

On aura

$$\lambda = \frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial v}.$$

ξ_2 et ξ_3 seront deux solutions communes aux deux équations

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = M\xi.$$

On aura donc par exemple

$$\xi_2 = \frac{f}{\sqrt{f'}}, \qquad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{f'}}.$$

On retombe ainsi sur les congruences du complexe linéaire (*cf.* Chapitre II, § **2**).

3. Supposons que x soit une fonction de $u + v$. Nous écrirons

$$x = \int \frac{d(u+v)}{f'},$$

f étant une fonction arbitraire dont les dérivées successives sont $f', f'', \ldots$.

Nous supposons $f'' \neq 0$, le cas contraire se ramenant immédiatement à celui qui a été examiné au paragraphe précédent.

L'équation (1) donne alors

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \frac{f''}{f'} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{f'}} \sqrt{\frac{1}{\varphi'}},$$

φ étant une fonction arbitraire de $u - v$ dont les dérivées sont φ', φ''.

On aura

$$M = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{f'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{f'}}} - \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{\varphi'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{\varphi'}}}$$

et cette valeur satisfait identiquement à l'équation (3).

ξ_1, ξ_2, ξ_3 devront être solutions de l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \xi \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{f'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{f'}}} - \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{\varphi'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{\varphi'}}} \right]. \tag{7}$$

L'équation (6) s'écrit

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{f''}{f'}\xi = 0.$$

La solution générale de cette équation aux dérivées partielles est

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{f'}}\,A, \tag{8}$$

A étant une fonction arbitraire de $u - v$.

Écrivant que (8) est une solution de (7), on obtient

$$\frac{A''}{A} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{\varphi'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{\varphi'}}}.$$

Cette équation différentielle linéaire en A admet les deux solutions

$$\sqrt{\frac{1}{\varphi'}} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi'}}.$$

Nous prendrons donc

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{f'}}\sqrt{\frac{1}{\varphi'}},$$

$$\xi_3 = \sqrt{\frac{1}{f'}}\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi'}}.$$

L'équation (5) donne

$$-f'\sqrt{\frac{1}{\varphi'}} = \xi_1 \frac{f''}{f'} + \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \frac{\partial \xi_1}{\partial v}.$$

Cette équation linéaire par rapport à ξ_1 et à ses dérivées partielles du premier ordre, avec un second membre, admet comme solution particulière

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\frac{f}{\sqrt{f'}},$$

et comme solution générale

$$\sqrt{\frac{1}{f'}}\,B-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\frac{f}{\sqrt{f'}},$$

B étant une fonction arbitraire de $u-v$. Écrivant que l'expression précédente satisfait à l'équation (7), on obtient

$$\frac{A''}{A}=\frac{\varphi''}{\varphi};$$

ξ_1 doit donc être de la forme

$$C_2\xi_2+C_3\xi_3-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\frac{f}{\sqrt{f'}},$$

C_2 et C_3 étant des constantes que nous pouvons supposer nulles. Nous prendrons donc simplement

$$\xi_1=\frac{f}{\sqrt{f'}}\frac{1}{\sqrt{\varphi'}},\qquad \xi_2=\frac{1}{\sqrt{f'}}\frac{1}{\sqrt{\varphi'}},\qquad \xi_3=\frac{1}{\sqrt{f'}}\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi'}}.$$

La valeur de λ,

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{f'}}\frac{1}{\sqrt{\varphi'}},$$

est bien, à un facteur constant près, égale au déterminant :

$$\begin{vmatrix}\xi_1 & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Les coordonnées d'un point de la surface génératrice sont

$$x_1=\int\frac{d(u+v)}{f'},\qquad x_2=\int\frac{\varphi}{\varphi'}\,d(u-v)-\int\frac{f}{f'}\,d(u+v),$$
$$x_3=-\int\frac{d(u-v)}{\varphi'}.$$

C'est la surface de translation la plus générale dont les courbes génératrices sont dans des plans parallèles aux deux plans de coordonnées $x_1 O x_2$ et $x_2 O x_3$.

Les congruences ainsi obtenues peuvent être considérées comme une dégénérescence des congruences de normales aux surfaces minima de la façon suivante :

Pour les congruences de normales aux surfaces minima, la surface génératrice est une autre surface minima, donc une surface de translation dont les courbes génératrices sont des lignes de longueur nulle, c'est-à-dire des courbes dont les tangentes rencontrent le cercle de l'infini. Par affinité, on en déduit des congruences dont la surface génératrice est une surface de translation dont les deux systèmes de courbes génératrices rencontrent une même conique à l'infini.

Si cette conique à l'infini se décompose en deux droites, on en déduit des congruences dont la surface génératrice est une surface de translation dont les deux systèmes de courbes génératrices sont planes, ce qui est le cas que nous venons de trouver.

Les coordonnées d'un point de la surface moyenne de la congruence seront

$$y_1 = \int \frac{d(u-v)}{\varphi'}, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = \int \frac{d(u+v)}{f'}.$$

Nous obtenons ainsi un réseau plan à invariants égaux pour lequel les tangentes en un point aux deux courbes coordonnées ont leurs bissectrices parallèles à deux directions fixes qui sont les premier et troisième axes de coordonnées.

Si nous transformons par affinité de façon à rendre ces deux directions fixes isotropes, le réseau de la surface moyenne sera transformé en un réseau orthogonal à invariants égaux (isotherme) et l'on aura une congruence W dont la surface moyenne est coupée suivant un réseau plan isotherme. Elle sera définie par les quatre solutions suivantes de (7) :

$$\xi_1 = \frac{f+\varphi}{\sqrt{f'\varphi'}}, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{f'\varphi'}}, \qquad \xi_3 = i\,\frac{\varphi - f}{\sqrt{f'\varphi'}}, \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{f'\varphi'}} = \xi_2.$$

Ces congruences dépendent de deux fonctions arbitraires comme les congruences de normales aux surfaces minima. Voici les équations générales de ces surfaces rapportées à leurs lignes de courbure :

$$\begin{aligned} x_1 &= i\int \frac{f^2-1}{f'}\,d(u+v) + i\int \frac{\varphi^2-1}{\varphi'}\,d(u-v), \\ x_2 &= 2i\int \frac{f}{f'}\,d(u+v) + 2i\int \frac{\varphi}{\varphi'}\,d(u-v), \\ x_3 &= \int \frac{f^2+1}{f'}\,d(u+v) - \int \frac{\varphi^2+1}{\varphi'}\,d(u-v). \end{aligned}$$

Les paramètres directeurs de la normale sont

$$\xi_1 = \frac{f+\varphi}{\sqrt{f'\varphi'}}, \qquad \xi_2 = \frac{1-f\varphi}{\sqrt{f'\varphi'}}, \qquad \xi_3 = i\,\frac{\varphi-f}{\sqrt{f'\varphi'}};$$

ils sont solutions de (7).

4. Considérons ensuite le cas où l'on aurait

$$x = uv.$$

L'équation (1) est indéterminée. L'équation (3) donne

$$u\frac{\partial M}{\partial u} + v\frac{\partial M}{\partial v} + 2M = 0,$$

M sera une fonction homogène de degré -2 en u et v. Nous écrirons

$$M = -\frac{u}{v^3}\,\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{g'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{g'}}},$$

g étant une fonction de $\frac{u}{v}$.

On aura d'après (5)

$$\lambda = \xi_1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial v},$$

ξ_2 et ξ_3 seront deux solutions communes aux deux équations

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = -\frac{u}{v^3} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{g'}}\right)''}{\sqrt{\frac{1}{g'}}}, \qquad u \frac{\partial \xi}{\partial u} + v \frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi = 0.$$

On peut prendre par exemple

$$\xi_2 = \frac{vg}{\sqrt{g'}}, \qquad \xi_3 = \frac{v}{\sqrt{g'}}.$$

On retombe ainsi sur des congruences déjà rencontrées au Chapitre II, paragraphe **3**.

5. Supposons que x soit une fonction de uv. Nous écrirons

$$x = f(uv)$$

et nous supposerons

$$f'' \neq 0,$$

le cas contraire se ramenant immédiatement à celui qui a été examiné au paragraphe précédent.

L'équation (1) donne

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{1}{u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{f''}{f'} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \sqrt{f'}\, A\left(\frac{u}{v}\right),$$

A étant une fonction arbitraire de $\frac{u}{v}$.

On aura

$$M = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} = \frac{f'''}{2f'} uv - \frac{f''^2}{2f'^2} uv + \frac{f''}{2f'} - \frac{A''}{A} \frac{u}{v^3} - \frac{A'}{A} \frac{1}{v^2}. \tag{9}$$

L'équation (3) s'écrit

$$u \frac{\partial M}{\partial u} + v \frac{\partial M}{\partial v} + 2M = \frac{2f'' + 4uvf''' + u^2 v^2 f^{\text{IV}}}{f'} - uv \frac{3f''^2 + 2uvf''f'''}{f'^2} + \frac{u^2 v^2 f''^3}{f'^3}.$$

Elle admet pour solution générale

$$M = \frac{1}{uv}\varphi\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{f'''}{2f'}uv - \frac{f''^2}{4f'^2}uv + \frac{f''}{f'}. \tag{10}$$

Les expressions (9) et (10) doivent être identiques.

Comme nous avons supposé $f'' \neq 0$, on doit avoir

$$uv\frac{f''}{f'} = a,$$

a étant une constante non nulle.

Il en résulte

$$\frac{f''}{f'} = \frac{a}{uv}, \qquad f' = C(uv)^a.$$

Si $a = -1$, on a

$$f = C\log(uv) + D;$$

Si $a \neq -1$, on a

$$f = C(uv)^{a+1} + D.$$

Il en résulte dans les deux cas

$$M = \frac{a^2}{4uv} - \frac{u}{v^3}\frac{A''}{A} - \frac{1}{v^2}\frac{A'}{A};$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 devront être solution de l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} = \xi\left(\frac{a^2}{4uv} - \frac{u}{v^3}\frac{A''}{A} - \frac{1}{v^2}\frac{A'}{A}\right). \tag{11}$$

L'équation (6) s'écrit alors

$$u\frac{\partial\xi}{\partial u} + v\frac{\partial\xi}{\partial v} - (a+1)\xi = 0. \tag{12}$$

La solution générale de cette équation aux dérivées partielles est

$$\xi = (uv)^{\frac{a+1}{2}}\psi\left(\frac{u}{v}\right), \tag{13}$$

ψ étant une fonction arbitraire de $\frac{u}{v}$.

Écrivant que la quantité (13) est solution de l'équation (11), on obtient

$$\frac{\frac{u}{v}\psi'' + \psi'}{\frac{u}{v}\psi} = \frac{\frac{u}{v}A'' + A'}{\frac{u}{v}A} - \frac{a^2}{4}.$$

Si ψ_2 et ψ_3 sont deux solutions linéairement distinctes de cette équation linéaire du second ordre, on pourra prendre pour les valeurs

$$\xi_2 = (uv)^{\frac{a+1}{2}}\psi_2,$$
$$\xi_3 = (uv)^{\frac{a+1}{2}}\psi_3.$$

L'équation (5) donne, en faisant $C = 1$,

$$\begin{aligned}\lambda &= (a+1)(uv)^{\frac{a}{2}}A\left(\frac{u}{v}\right)\\ &= \xi_1(a+1)^2(uv)^a - (a+1)u(uv)^a\frac{\partial\xi_1}{\partial u} - (a+1)v(uv)^a\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\end{aligned}$$

ou

$$u\frac{\partial\xi}{\partial u} + v\frac{\partial\xi}{\partial v} - (a+1)\xi + (uv)^{-\frac{a}{2}}A\left(\frac{u}{v}\right) = 0,$$

équation dont la solution générale est

$$\xi = (uv)^{\frac{a+1}{2}}\psi\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{2a+1}(uv)^{-\frac{a}{2}}A\left(\frac{u}{v}\right).$$

Écrivant que l'expression précédente satisfait à l'équation (11), on trouve que ξ_1 doit être de la forme

$$D_2\xi_2 + D_3\xi_3 + \frac{1}{2a+1}(uv)^{-\frac{a}{2}}A\left(\frac{u}{v}\right),$$

D_2 et D_3 étant des constantes que nous pourrons supposer nulles. Nous prendrons simplement

$$\xi_1 = (uv)^{-\frac{a}{2}}A\left(\frac{u}{v}\right), \qquad \xi_2 = (uv)^{\frac{a+1}{2}}\psi_2, \qquad \xi_3 = (uv)^{\frac{a+1}{2}}\psi_3.$$

6. Supposons que x soit la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v. Nous écrirons

$$x = U + V,$$

U' et V' étant supposés tous deux différents de zéro.

L'équation (1) donne

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{U'}{U''} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{V'}{V''} - \lambda = 0,$$

d'où l'on tire

$$(14) \qquad \lambda = V' f\left(\frac{U'}{V'}\right),$$

f étant une fonction arbitraire.

Il en résulte

$$(15) \qquad M = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{du\,dv} = -\frac{U''V''U'}{V'^3}\frac{f''}{f} = \frac{U''V''}{U'V'}g\left(\frac{U'}{V'}\right);$$

en posant

$$g = -\frac{U'^2}{V'^2}\frac{f''}{f'},$$

l'équation (3) s'écrit

$$(16) \qquad \frac{\partial M}{\partial u}V' + \frac{\partial M}{\partial v}U' - M\left(\frac{U''V'}{U'} + \frac{V''U'}{V'}\right) = 0.$$

Écrivons que l'expression (15) est solution de (16). Nous obtenons

$$g\left[\frac{U''V'''}{V'} + \frac{V''U'''}{U'} - \frac{2V''U''^2}{U'^2} - \frac{2U''V''^2}{V'^2}\right] + g'\frac{U'}{V'}\left(\frac{U''^2}{U'^2}V'' - \frac{U''V''^2}{V'^2}\right) = 0.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut et il suffit que le rapport

$$(17) \qquad \frac{\dfrac{U''V'''}{V'} + \dfrac{V''U'''}{U'} - \dfrac{2V''U''^2}{U'^2} - \dfrac{2U''V''^2}{V'^2}}{\dfrac{U''^2V''}{U'^2} - \dfrac{U''V''^2}{V'^2}}$$

soit fonction de $\frac{U'}{V'}$.

Posons

$$U' = y, \qquad V' = z,$$
$$U'' = Yy^2, \qquad V'' = Zz^2.$$

Il en résulte

$$U''' = (2Y + Y'y)Yy^3, \qquad V''' = (2Z + Z'z)Zz^3.$$

L'expression (17) devient

$$\frac{Y'y + Z'z}{Y - Z},$$

et elle doit être fonction de $\frac{y}{z}$.

En annulant le déterminant fonctionnel de ces deux quantités, on obtient l'équation aux variables mêlées

$$(18) \qquad \begin{aligned} &-Yy(Y''y + Y') + Y'y^2 + y(Y''y + Y')Z \\ &\quad - Yz(Z''z + Z') + Zz(Z''z + Z') - Z'z^2 = 0. \end{aligned}$$

Pour la résoudre, nous allons faire des hypothèses sur le nombre des relations linéaires homogènes distinctes qui lient les quatre quantités

$$(19) \qquad 1, \quad Y, \quad y(Y''y + Y'), \quad -Yy(Y''y + Y') + Y''y^2.$$

Il ne peut exister quatre relations entre ces quatre quantités dont la première est différente de zéro.

Nous examinerons seulement les deux cas où il existe trois ou deux relations entre les quantités (19), car les autres cas nous ramèneraient à ceux-là par permutation de y et z qui jouent des rôles symétriques dans l'équation (18).

I. Supposons qu'il existe trois relations entre les quatre quantités (19).

Y sera égal à une constante.

Soit $Y = C$.

Il en résulte, d'après (18),

$$\frac{Z(Z''z+Z')-Z''z^2}{Z''z+Z'}=C$$

ou

$$\frac{Z''z+Z'}{Z'z}=\frac{Z'}{Z-C};$$

d'où, en intégrant,

$$Z'z=k(Z-C), \qquad Z=Dz^k+C,$$

k, C et D étant des constantes.

II. Supposons qu'il existe trois relations entre les quatre quantités (19). On a alors, en laissant ici de côté le cas traité plus haut où Y est constant,

$$(20) \qquad y(Y''y+Y')=aY+b,$$

$$(21) \qquad Yy(Y''y+Y')-Y''y^2=cY+d.$$

Multipliant la première de ces relations par Y, et ajoutant à la seconde multipliée par — 1, on obtient

$$(22) \qquad Y'^2y^2=aY^2+(b-c)Y-d.$$

Dérivons et divisons par Y' qui est différent de zéro; il vient

$$2Y''y^2+2Y'y=2aY+b-c.$$

Comparant cette équation à l'équation (20), on trouve

$$c=-b,$$

et la condition (22) devient

$$(23) \qquad Y'^2y^2=aY^2+2bY-d.$$

Cette équation suffit pour entraîner (20) et (21). La formule (23) permet de calculer Y par des quadratures. Divers cas seraient à distinguer suivant qu'un ou plusieurs des coefficients a, b, d sont nuls. Nous ne développerons pas les calculs qui conduisent en général à des intégrales transcendantes. Remarquons simplement que, d'après l'expression (14) de λ, les congruences trouvées admettent des parallèles.

7. Dans le cas général, nous ne pouvons pas former d'une façon simple une équation ou un système d'équations aux dérivées partielles contenant une seule des fonctions inconnues.

Nous allons résoudre cette question simplement dans le cas où la surface moyenne est plane.

En se reportant aux formules bien connues et plusieurs fois rappelées qui donnent les coordonnées d'un point de la surface moyenne en fonction de ξ_1, ξ_2, ξ_3 et λ, on voit que si le plan de la surface moyenne est parallèle aux deuxième et troisième axes de coordonnées, on devra avoir :

$$\lambda = a\xi_1,$$

a étant une constante non nulle.

Nous avons les deux équations suivantes, en λ et x,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}\,\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}} + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\,\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}} - \lambda = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \left(a - \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)\lambda = 0, \tag{24}$$

dont la dernière n'est autre que l'équation (6) où l'on a posé

$$\lambda = a\xi_1.$$

En général, les deux équations (1) et (24) ne sont pas équivalentes, et l'on pourra en tirer les valeurs des quantités $\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \lambda}{\partial u}$ et $\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \lambda}{\partial v}$.

On aura

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \left(a - \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \left(a - \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2}.$$

Pour que les deux équations soient compatibles, il faut que les deux expressions de $\dfrac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u\,\partial v}$ soient égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \left(a - \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \left(a - \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2}\right].$$

La connaissance d'une solution de cette équation aux dérivées partielles du troisième ordre permet de déterminer une congruence W de Ribaucour à surface moyenne plane. A titre de vérification, on peut remarquer que cette équation (25) est satisfaite par les expressions de x_1, x_2, x_3 pour les congruences du paragraphe **5** du présent Chapitre, qui sont à surface moyenne plane.

CHAPITRE VI.

CONGRUENCES DONNÉES PAR CERTAINES ÉQUATIONS DE MOUTARD INTÉGRABLES PAR LA MÉTHODE DE LAPLACE.

1. Nous allons étudier les congruences obtenues en prenant quatre solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3, λ de l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Posons

$$\xi_1 = U_1 + V_1, \qquad \xi_2 = U_2 + V_2, \qquad \xi_3 = U_3 + V_3.$$

Il s'agit de déterminer les U et les V de façon que l'on ait :

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} U_1+V_1 & U''_1 & V''_1 \\ U_2+V_2 & U''_2 & U''_2 \\ U_3+V_3 & U''_3 & V''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Énonçons tout de suite le résultat :

On obtient toutes les congruences distinctes possibles, à des affinités près, en considérant les groupes de solutions suivantes :

$$(3)\qquad \xi_1 = U+V,\qquad \xi_2 = u,\qquad \xi_3 = v.$$

$$(4)\qquad \xi_1 = U+V,\qquad \xi_2 = u+v,\qquad \xi_3 = 1,$$

$$(5)\qquad \xi_1 = \frac{U}{\sqrt{U'}} + \frac{V}{\sqrt{V'}},\qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{U'}},\qquad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{V'}}.$$

Rappelons qu'on obtient une même congruence, à une affinité près, si les quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont remplacées respectivement par des combinaisons linéaires quelconques des mêmes quantités.

2. En développant le premier membre de l'équation (2), on obtient l'équation aux variables mêlées

$$(6)\qquad \begin{aligned} &(U_2U''_3 - U_3U''_2)\,V''_1 + (U_3U''_1 - U_1U''_3)\,V''_2 + (U_1U''_2 - U_2U''_1)\,V''_3 \\ &+ U''_1(V_3V''_2 - V_2V''_3) + U''_2(V_1V''_3 - V_3V''_1) + U''_3(V_2V''_1 - V_1V''_2) = 0. \end{aligned}$$

Pour la résoudre, nous allons faire des hypothèses sur le nombre des relations linéaires homogènes distinctes qui lient les six quantités

$$(7)\qquad U''_3,\quad U''_2,\quad U''_1,\quad U_1U''_2 - U_2U''_1,\quad U_3U''_1 - U_1U''_3,\quad U_2U''_3 - U_3U''_2.$$

Le nombre de ces relations peut être six ou moins. Nous examinerons seulement les cas où ce nombre est 6, 5, 4 ou 3 : les autres cas nous ramèneraient à ceux-là par permutation de u et v qui jouent des rôles symétriques dans l'équation (6).

I. Supposons qu'il y ait six relations entre les quantités (7).

Les U'' seraient tous nuls ; les V seraient quelconques. On pourrait prendre par exemple

$$\xi_1 = u + V_1, \qquad \xi_2 = V_2, \qquad \xi_3 = V_3.$$

Il en résulterait

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

λ serait une fonction de la seule variable v, et nous avons exclu ce cas au Chapitre I.

II. Supposons qu'il existe cinq relations entre les quantités (7) : les cinq dernières quantités s'exprimeraient en fonction linéaire de U_3.

On aurait par exemple

$$U_1'' = a_1 U_3'',$$

d'où, en intégrant,

$$U_1 = a_1 U_3 + b_1 u + c_1.$$

Nous pouvons supposer $a_1 = 0$, en remplaçant ξ_1 par $\xi_1 = a\xi_3$, ce qui revient à faire subir à la congruence une transformation par affinité.

On peut aussi supposer $c_1 = 0$, quitte à augmenter V_1 d'une constante.

On a donc

$$U_1 = b_1 u,$$

d'où

$$U_1 U_3'' - U_3 U_1'' = b_1 u U_3'',$$

et cette dernière quantité doit être égale à U_3'' multiplié par une constante. Donc

$$b_1 = 0, \qquad U_1 = 0,$$

et de même

$$U_2 = 0.$$

L'équation (6) devient

$$U_3''(V_2 V_1'' - V_1 V_2'') = 0.$$

Si $U_3'' = 0$, on est ramené au cas exclu plus haut.

Si $U''_3 \neq 0$, l'équation (6) devient

$$V_2 V''_1 - V_1 V''_2 = 0.$$

Elle admet pour solution générale

$$V_1 = \frac{V}{\sqrt{V'}}, \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{V'}},$$

et l'on obtient ainsi un cas particulier de la solution (5).

III. Supposons qu'il existe quatre relations entre les quantités (7).

a. Considérons d'abord le cas où, en fonction de deux des quantités U''_1, U''_2, U''_3, on peut exprimer les quatre autres des quantités (7).

On aura par exemple

$$U''_3 = a_1 U''_1 + a_2 U''_2.$$

Intégrant et faisant subir à la congruence une transformation par affinité, on obtient

$$U_3 = bu + c,$$

d'où

$$(8) \qquad U_2 U''_3 - U_3 U''_2 = -(bu+c) U''_2, \qquad U_3 U''_1 - U_1 U''_3 = (bu+c) U''_1.$$

Ces quantités devant être de la forme

$$d_1 U''_1 + d_2 U''_2, \quad e_1 U''_1 + e_2 U''_2,$$

on obtient les deux relations

$$(9) \qquad -(bu+c+d_2) U''_2 = d_1 U''_1, \qquad e_2 U''_2 = (bu+c-e_1) U''_1.$$

On peut supposer que U''_1 et U''_2 sont tous deux différents de zéro, sans quoi on se trouverait dans les cas où il existe cinq ou six relations entre les quantités (7).

Les relations (9) nous donnent :

$$(bu+c+d_2)(bu+c-e_1) = -e_2 d_1.$$

On doit donc avoir

$$b = 0.$$

On peut supposer aussi $c = 0$, quitte à augmenter V_3 d'une constante. Il en résulte

$$U_3 = 0.$$

On doit avoir une expression de la forme

$$U_1 U''_2 - U_2 U''_1 = f_1 U''_1 + f_2 U''_2$$

ou

$$(U_1 - f_2) U''_1 - (U_2 - f_1) U''_2 = 0.$$

On peut écrire simplement, en augmentant U_1 et U_2 de constantes :

$$U_1 U''_2 - U_2 U''_1 = 0.$$

On satisfait à cette relation en prenant

$$U_1 = \frac{U}{\sqrt{U'}} \qquad U_2 = \frac{1}{\sqrt{U'}}.$$

L'équation (6) donne alors

$$V_3 V''_2 = V_2 V''_3 = 0$$

et

$$V_1 V''_3 - V_3 V''_1 = 0,$$

d'où

$$\frac{V''_3}{V_3} = \frac{V''_2}{V_2} = \frac{V''_1}{V_1}.$$

V_3 ne pouvant pas être nul, sans quoi on aurait $\xi_3 = 0$, on pourra prendre

$$V_1 = \frac{V}{\sqrt{V'}}, \qquad V_2 = 0, \qquad V_3 = \frac{1}{\sqrt{V'}},$$

et l'on obtient la solution (5).

b. Considérons maintenant le cas où l'on ne peut pas exprimer les quantités (7) en fonction de deux des trois premières.

Deux des quantités U''_1, U''_2, U''_3 s'expriment alors en fonction linéaire de la troisième.

U_1 étant quelconque, on pourrait prendre en éliminant ici les cas étudiés plus haut,

$$U_2 = u, \qquad U_3 = 0.$$

L'équation (6) donne alors

$$-uU''_1V''_3 + U''_1(V_3V''_2 - V_2V''_3) = 0,$$

ou, en divisant par U''_1 qui n'est pas nul,

$$-uV''_3 + V_3V''_2 - V_2V''_3 = 0.$$

On doit donc avoir

$$V''_3 = 0, \qquad V_3V''_2 = 0.$$

On ne peut avoir $V_3 = 0$, qui entraînerait

$$\xi_3 = 0.$$

Il reste donc

$$\xi_1 = U_1 + V_1, \qquad \xi_2 = u + av + b, \qquad \xi_3 = cv + d.$$

Si c est nul, on est ramené à une solution du genre (3). Si c n'est pas nul, on est ramené à une solution du genre (4).

IV. Supposons qu'il existe trois relations entre les quantités (7).

Nous pouvons supposer que les trois dernières quantités (7) peuvent s'exprimer en fonction linéaire et homogène des trois premières : le cas contraire entraînerait une ou plusieurs relations entre les seules quantités U''_1, U''_2, U''_3 et se traiterait comme les cas envisagés ci-dessus sans donner de solution nouvelle.

On a donc des relations de la forme

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_2U''_3 - U_3U''_2 &= a_1U''_1 + a_2U''_2 + a_3U''_3, \\ U_3U''_1 - U_1U''_3 &= b_1U''_1 + b_2U''_2 + b_3U''_3, \\ U_1U''_2 - U_2U''_1 &= c_1U''_1 + c_2U''_2 + c_3U''_3. \end{aligned} \right.$$

Multipliant les trois équations (10) respectivement par U''_1, U''_2, U''_3 et ajoutant, on obtient, entre ces trois dérivées secondes, la relation quelconque homogène

$$(11)\qquad U''_1(a_1 U''_1 + a_2 U''_2 + a_3 U''_3) + U''_2(b_1 U''_1 + b_2 U''_2 + b_3 U''_3) + U''_3(c_1 U''_1 + c_2 U''_2 + c_3 U''_3) = 0.$$

On peut, en effectuant sur les U et sur les U'' une transformation linéaire et homogène, amener cette forme quadratique à n'avoir plus de termes rectangles : la congruence reste la même à une affinité près, à condition de faire subir aux V la même transformation.

Nous supposons que cette transformation a été effectuée, c'est-à-dire que l'on a, dans les formules (10),

$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0.$$

Nous pouvons même supposer, en outre, que les trois coefficients restants ont les valeurs suivantes :

$$a_1 = 1, \qquad b_2 = 1, \qquad c_3 = -1.$$

D'ailleurs, si un seul de ces trois coefficients était nul, la relation (11) se décomposerait en deux relations linéaires et homogènes reliant les quantités U'', en sorte que les quantités (7) seraient liées par une quatrième relation homogène s'adjoignant aux relations (10), alors que nous avons fait l'hypothèse qu'il n'y avait que trois relations. Pour la même raison, on peut supposer que chacune des quantités U'' est différente de zéro.

La relation (11) devient alors

$$U''^2_1 + U''^2_2 = U''^2_3.$$

Posons

$$(12)\qquad U''_1 = U''_3 \cos\varphi, \qquad U''_2 = U''_3 \sin\varphi,$$

φ étant une fonction de u.

Les équations (10) donnent, après division par U_3'' qui est différent de zéro,

$$U_2 - U_3 \sin\varphi = \cos\varphi, \qquad U_3 \cos\varphi - U_1 = \sin\varphi, \qquad U_1 \sin\varphi - U_2 \cos\varphi = -1.$$

De ces trois équations, qui se réduisent à deux, on tire

$$U_1 = U_3 \cos\varphi - \sin\varphi, \qquad U_2 = \cos\varphi + U_3 \sin\varphi,$$

et

$$U_1'' = (U_3'' - U_3\varphi'^2 - \varphi'') \cos\varphi + (-2U_3'\varphi' - U_3\varphi'' + \varphi'^2) \sin\varphi,$$
$$U_2'' = (U_3\varphi'' + 2U_3'\varphi' - \varphi'^2) \cos\varphi + (U_3'' - U_3\varphi'^2 - \varphi'') \sin\varphi.$$

En portant dans les relations (12), on obtient

$$-(U_3\varphi'^2 + \varphi'') \cos\varphi + (-2U_3'\varphi' - U_3\varphi'' + \varphi'^2 \sin\varphi = 0,$$
$$(U_3\varphi'^2 + \varphi'') \sin\varphi + (-2U_3'\varphi' - U_3\varphi'' + \varphi'^2 \cos\varphi = 0;$$

d'où

$$U_3\varphi'^2 + \varphi'' = 0, \tag{13}$$
$$-2U_3'\varphi' - U_3\varphi'' + \varphi'^2 = 0. \tag{14}$$

De l'équation (13), on tire

$$U_3 = -\frac{\varphi''}{\varphi'^2} = \left(\frac{1}{\varphi'}\right)'.$$

Posons

$$U_3 = U', \qquad \varphi' = \frac{1}{U},$$

l'équation (14) devient

$$-2UU'' + U'^2 + 1 = 0.$$

Cette équation s'intègre facilement en prenant U pour variable et U′ pour fonction inconnue. Sa solution générale est

$$U = Cu^2 + Du\,\frac{D^2+1}{4C},$$

C et D étant des constantes.

On en conclut

$$U_3 = 2Cu + D,$$
$$U''_3 = 0.$$

Cette formule constitue une quatrième relation homogène s'ajoutant aux relations (10) : nous tombons donc dans les cas étudiés précédemment où il y a plus de trois relations entre les quantités (7).

Ainsi qu'il avait été annoncé, nous avons donc les seules solutions (3), (4), (5).

3. Dans le cas de la solution (3), on a

$$\xi_1 = U + V, \qquad \xi_2 = u, \qquad \xi_3 = v;$$

il en résulte

$$\lambda = \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix} = U - uU' + V - vV'.$$

Nous pouvons définir la congruence au moyen d'une de ses surfaces focales.

L'une d'elles est définie par les relations (*cf.* Chap. I)

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = 2\lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = 2\xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

et deux autres relations analogues pour chacune des autres coordonnées z_2 et z_3. Les droites de la congruence seront obtenues en menant sur les surfaces focales les tangentes aux courbes v variable.

On a

$$z_1 = 2\int (U - uU' + V - vV')U'\,du - (U + V)V''v\,dv,$$
$$z_2 = 2\int (U - uU' + V - vV')\,du - uV''v\,dv,$$
$$z_3 = -2\int v^2 V''\,dv,$$

ou, si l'on veut,

$$z_1 = -2U(vV' - V) + 2\int(U - uU')\,du - 2\int vVV''\,dv,$$

$$z_2 = -2u(vV' - V) + 2\int(U - vV')\,du,$$

$$z_3 = -2\int v^2 V''\,dv.$$

L'équation différentielle des asymptotiques des surfaces focales est

$$U''\,du^2 + V''\,dv^2 = 0,$$

ainsi qu'on le trouve immédiatement par application de la formule (18) du Chapitre I.

Ces congruences sont un cas particulier de celles qui ont été rencontrées au Chapitre II, paragraphe **3**.

4. Dans le cas de la solution (4), on a

$$\xi_1 = U + V, \qquad \xi_2 = u + v, \qquad \xi_3 = 1, \qquad \lambda = U' - V'.$$

Les coordonnées d'un point d'une surface focale sont

$$z_1 = 2\int(U' - V')\,U'\,du - (U + V)V''\,dv = -2UV' + 2\int U'^2\,du - 2\int VV''\,dv,$$

$$z_2 = 2\int(U' - V')\,du \quad -(u + v)\,V''\,dv = -2uV' + 2U + 2(V - vV'),$$

$$z_3 = -2\int V''\,dv \qquad\qquad = -2V.$$

Les courbes v variable sur cette surface sont les arêtes de rebroussement d'une famille de développables de la congruence.

Les asymptotiques de cette surface focale ont pour équation différentielle [*cf.* Chap. I, équation (18)]

$$U''\,du^2 + V''\,dv^2 = 0.$$

Ces congruences font partie d'un complexe linéaire (*cf.* Chap. II, § **4**).

5. Dans le cas de la solution (5), on peut écrire (en changeant les notations)

$$\xi_1 = \mathrm{U}\int \frac{du}{\mathrm{U}^2} + \mathrm{V}\int \frac{dv}{\mathrm{V}^2}, \qquad \xi_2 = \mathrm{U}, \qquad \xi_3 = \mathrm{V};$$

il en résulte

$$\lambda = \mathrm{U}' + \mathrm{V}'.$$

Les coordonnées d'un point d'une surface focale sont

$$z_1 = 2\int (\mathrm{U}' + \mathrm{V}')\left(\mathrm{U}'\int \frac{du}{\mathrm{U}^2} + \frac{1}{\mathrm{U}}\right) du + \left(\mathrm{U}\int \frac{du}{\mathrm{U}^2} + \mathrm{V}\int \frac{dv}{\mathrm{V}^2}\right) dv,$$

$$z_2 = 2\int (\mathrm{U}' + \mathrm{V}')\,\mathrm{U}'\,du + \mathrm{U}\mathrm{V}''\,dv,$$

$$z_3 = 2\int \mathrm{V}\mathrm{V}''\,dv.$$

Les asymptotiques de cette surface focale sont données par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}\,du^2 - \frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{V}}\,dv^2 = 0.$$

6. Les congruences précédentes ont en commun le caractère suivant : sur les surfaces focales, les courbes conjuguées des arêtes de rebroussement des développables sont des courbes planes situées dans des plans parallèles.

Cette propriété ne suffit d'ailleurs pas à caractériser ces congruences.

En se reportant au Chapitre des congruences parallèles, on voit, d'après la forme des expressions trouvées pour λ, que chacune de ces congruences admet une infinité de parallèles.

Nous allons préciser ce point en rapportant les congruences à des paramètres quelconques, non normaux.

Les congruences (3) et (5) peuvent être représentées par les formules

$$\xi_1 = \mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1, \qquad \xi_2 = \mathrm{U}_2, \qquad \xi_3 = \mathrm{V}_3.$$

On a alors

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 + V_1 & U'_1 & V'_1 \\ U_2 & U'_2 & 0 \\ V_3 & 0 & V'_3 \end{vmatrix}$$

$$= U'_2 V'_3 \left(U_1 - \frac{U'_1 U_2}{U'_2} + V_1 - \frac{V'_1 V_3}{V'_3} \right)$$

$$= U'_2 \left(U_1 - \frac{U'_1 U_2}{U'_2} + a \right) V'_3 \left(V_1 - \frac{V'_1 V_3}{V'_3} - a \right) \left(\frac{1}{U_1 - \dfrac{U'_1 U_2}{U'_2} + a} + \frac{1}{V_1 - \dfrac{V'_1 V_3}{V'_3} - a} \right),$$

a étant une constante arbitraire.

On peut donc prendre pour λ la valeur

$$\lambda = \frac{1}{U_1 - \dfrac{U'_1 U_2}{U'_2} + a} + \frac{1}{V_1 - \dfrac{V'_1 V_3}{V'_3} - a}$$

$$= \frac{U'_2}{U_1 U'_2 - U'_1 U_2 - a U'_2} + \frac{V'_3}{V_1 V'_3 - V'_1 V_3 - a V'_3},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = V_3 \frac{V'_3 V''_1 - V'_1 V''_3}{(V_1 V'_3 - V'_1 V_3 - a V'_3)^2}.$$

Les coordonnées d'un point de la surface focale seront alors

$$z_1 = 2 \int \left(\frac{U'_2}{U_1 U'_2 - U'_1 U_2 + a U'_2} + \frac{V'_3}{V_1 V'_3 - V'_1 V_3 - a V'_3} \right) U'_1 \, du$$
$$+ V_3 \frac{V'_3 V''_1 - V'_1 V''_3}{(V_1 V'_3 - V'_1 V_3 - a V'_3)^2} (U_1 + V_1) \, dv,$$

$$z_2 = 2 \int \left(\frac{U'_2}{U_1 U'_2 - U'_1 U_2 + a U'_2} + \frac{V'_3}{V_1 V'_3 - V'_1 V_3 - a V'_3} \right) U'_2 \, du$$
$$+ V_3 \frac{V'_3 V''_1 - V'_1 V''_3}{(V_1 V'_3 - V'_1 V_3 - a V'_3)^2} U_2 \, dv,$$

$$z_3 = 2 \int V_3^2 \frac{V'_3 V''_1 - V'_1 V''_3}{(V_1 V'_3 - V'_1 V_3 - a V'_3)^2} \, dv,$$

ou bien

$$z_1 = 2\frac{U_1 V'_3}{V_1V'_3 - V_3V'_1 - aV'_3} + 2\int \frac{U'_2 U'_1\,du}{U_1U'_2 - U_2U'_1 + aU'_2} + 2\int \frac{V_1V_3(V'_3V''_1 - V_1V''_3)\,dv}{(V_1V'_3 - V_1V_3 - aV'_3)^2},$$
$$z_2 = 2\frac{U_2 V'_3}{V_1V'_3 - V_3V'_1 - aV'_3} + 2\int \frac{U'^2_3\,du}{U_1U'_2 - U_2U'_1 + aU'_2},$$
$$z_3 = 2\int V_3^2 \frac{V'_3V''_1 - V'_1V''_3}{(V_1V'_3 - V'_1V_3 - aV'_3)^2}\,dv.$$

Pour les congruences (4), on peut prendre les formules

$$\xi_1 = U_1 + V_1, \qquad \xi_2 = U_2 + V_2, \qquad \xi_3 = 1.$$

On a alors

$$\left|\xi_1 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right| = \begin{vmatrix} U_1 + V_1 & U'_1 & V'_1 \\ U_2 + V_2 & U'_2 & V'_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = U'_2V'_2\left(\frac{U'_1}{U'_2} - \frac{V'_1}{V'_2}\right)$$
$$= U'_2\left(\frac{U'_1}{U'_2} + a\right)V'_2\left(\frac{V'_1}{V'_2} + a\right)\left(\frac{1}{\frac{U'_1}{U'_2} + a} - \frac{1}{\frac{V'_1}{V'_2} + a}\right),$$

a étant une constante arbitraire.

On peut donc prendre pour λ

$$\lambda = \frac{1}{\frac{U'_1}{U'_2} + a} - \frac{1}{\frac{V'_1}{V'_2} + a} = \frac{U'_2}{U'_1 + aU'_2} - \frac{V'_2}{V'_1 + aV'_2}.$$

On a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{V''_1V'_2 - V'_1V''_2}{(V'_1 + aV'_2)^2}.$$

Les coordonnées d'un point de la surface focale sont alors

$$z_1 = 2\int\left(\frac{U'_2}{U'_1 + aU'_2} - \frac{V'_2}{V'_1 + aV'_2}\right)U'_1\,du + \frac{V''_1V'_2 - V'_1V''_2}{(V'_1 + aV'_2)^2}(U_1 + V_1)\,dv,$$
$$z_2 = 2\int\left(\frac{U'_2}{U'_1 + aU'_2} - \frac{V'_2}{V'_1 + aV'_2}\right)U'_2\,du + \frac{V''_1V'_2 - V'_1V''_2}{(V'_1 + aV'_2)^2}(U_2 + V_2)\,dv,$$
$$z_3 = 2\int \frac{V''_1V'_2 - V'_1V''_2}{(V'_1 + aV'_2)^2}\,dv,$$

ou bien

$$z_1 = -2\frac{U'_1 V'_2}{V'_1 + aV'_2} + 2\int \frac{U'_1 U'_2\, du}{U'_1 + aU'_2} + 2\int V_1 \frac{V''_1 V'_2 - V'_1 V''_2}{(V'_1 + aV'_2)^2} dv,$$

$$z_2 = -2\frac{U_2 V'_2}{V'_1 + aV'_2} + 2\int \frac{U'^2_2\, du}{U'_1 + aU'_2} + 2\int V_2 \frac{V''_1 V'_2 - V'_1 V''_2}{(V'_1 + aV'_2)^2} dv,$$

$$z_3 = \quad 2\int \frac{V''_1 V'_2 - V'_1 V''_2}{(V'_1 + aV'_2)^2} dv.$$

7. Passons maintenant au cas où l'équation de Moutard

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = M\xi,$$

à laquelle doivent satisfaire les paramètres directeurs, s'intègre par la méthode de Laplace, sans que l'on ait $M = 0$.

Les deux invariants de l'équation (15) étant égaux, si la suite de Laplace est limitée dans un sens après r transformations, elle sera limitée dans l'autre sens également après r transformations, et la suite de Laplace se composera en tout de $2r + 1$ équations.

r est dit le *rang* de l'équation (15).

Le cas de $r = 0$ est celui de $M = 0$ qui vient d'être traité.

Le cas de $r = 1$ se présente si l'on a [*cf.* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Chap. II, § 307, formule (24)]

$$M = \frac{\partial^2 \log M}{\partial u\, \partial v}.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$M = \frac{2U'V'}{(U + V)^2}.$$

L'équation de Moutard (15) prend alors la forme

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = \frac{2U'V'}{(U + V)^2}\xi.$$

Son intégrale générale est

$$\xi_1 = 2\frac{U_1+V_1}{U+V} - \frac{U'_1}{U'} - \frac{V'_1}{V'}.$$

Comme ξ_1 et ses dérivées partielles ne contiennent pas explicitement u et v, faisons les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} U &= x, & V &= y, \\ U' &= X, & V' &= Y, \\ U_1 &= X_1, & V_1 &= Y_1. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$U'_1 = X'_1 X, \qquad V'_1 = Y'_1 Y.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2\frac{X_1+Y_1}{x+y} - X'_1 - Y'_1, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= X\left[-2\frac{X_1+Y_1}{(x+y)^2} + \frac{2X'_1}{x+y} - X''_1\right], \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} &= Y\left[-2\frac{X_1+Y_1}{(x+y)^2} + \frac{2Y'_1}{x+y} - Y''_1\right]. \end{aligned}$$

En remplaçant l'indice 1 par les indices 2 ou 3, on aurait des formules se rapportant à ξ_2, ξ_3 et à leurs dérivées.

λ et ses dérivées auront encore des formes analogues; nous attribuerons l'indice 0 à leurs composantes,

$$\lambda = 2\frac{X_0+Y_0}{x+y} - X'_0 - Y'_0.$$

Écrivons que λ est égal au déterminant

$$\left| \xi_1 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right|.$$

En remarquant que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= -\frac{\xi_1 X}{x+y} + \left(\frac{X'_1 - Y'_1}{x+y} - X''_1\right) X, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} &= -\frac{\xi_1 Y}{x+y} + \left(\frac{Y'_1 - X'_1}{x+y} - Y''_1\right) Y, \end{aligned}$$

avec des équations analogues pour les indices 2 et 3, on obtient la condition

$$2\,\frac{X_0+Y_0}{x+y}-X'_0-Y'_0=\left|\,2\,\frac{X_1+Y_1}{x+y}-X'_1-Y'_1\quad\left(\frac{X'_1-Y'_1}{x+y}-X''_1\right)X\quad\left(\frac{Y'_1-X'_1}{x+y}-Y''_1\right)Y\right|,$$

qui peut s'écrire, en divisant tout par XY, ajoutant la deuxième colonne du déterminant à la troisième, faisant tout passer dans le premier membre et multipliant par $(x+y)^2$,

$$\begin{aligned}&\frac{x+y}{XY}\Big[2(X_0+Y_0)-(X'_0+Y'_0)(x+y)\Big]\\&\quad+\left|\,2(X_1+Y_1)-(X'_1+Y'_1)(x+y)\quad X'_1-Y'_1-X''_1(x+y)\quad X''_1+Y''_1\right|=0.\end{aligned}$$

En développant, on obtient l'équation aux variables mêlées

$$\begin{aligned}(17)\quad &2\,|X_1\quad X'_1\quad X''_1|\\&+\Sigma[2(X_2X'_3-X_3X'_2)+2x(X_3X''_2-X_2X''_3)+x^2(X'_2X''_3-X'_3X''_2)]\,Y''_1\\&+2\Sigma[X_2X''_3-X_3X''_2+x(X'_3X''_2-X'_2X''_3)]\,(Y'_1-yY''_1)\\&+\Sigma(X'_2X'_3-X'_3X''_2)(2Y_1-2yY'_1+y_2Y''_1)\\&-\Sigma(2X_1-2xX'_1+x^2X''_1)(Y'_2Y''_3-Y'_3Y''_2)\\&-2\Sigma(X'_1-xX''_1)[Y_2Y''_3-Y_3Y''_2+y(Y'_3Y''_2-Y'_2Y''_3)]\\&-\Sigma X''_1[2(Y_2-Y'_3-Y_3Y'_2)+2y(Y_3Y''_2-Y_2Y''_3)+y^2(Y'_2Y''_3-Y'_3Y''_2)]\\&+2\,\frac{X_0-X'_0x}{X}\,\frac{y}{Y}-\frac{X'_0}{Y}\,\frac{y^2}{Y}+\frac{x}{X}(2X_0-X'_0x)\frac{1}{Y}\\&-\frac{x^2}{X}\,\frac{Y'_0}{Y}+\frac{2x}{X}\,\frac{Y_0-Y'_0y}{Y}+\frac{1}{X}\,\frac{y}{Y}(2Y_0-Y'_0y)-2\,|Y_1\quad Y'_1\quad Y''_1|=0.\end{aligned}$$

Dans cette équation, le signe Σ indique qu'au terme écrit il faut en ajouter deux autres obtenus en permutant circulairement les indices 1, 2 et 3.

Le premier membre de l'équation (17) est donc la somme de 26 termes dont chacun est le produit d'une fonction de x par une fonction de y.

Nous n'entreprendrons pas la résolution complète de cette équation qui semble compliquée. Nous en signalerons seulement quelques solutions particulières.

8. Cherchons si les équations de Moutard de rang 1 de la forme (16) peuvent donner des congruences faisant partie d'un complexe linéaire.

Pour cela, il suffit que l'expression

$$M = \frac{2U'V'}{(U+V)^2}$$

soit fonction de $u+v$.

Écrivant que le déterminant fonctionnel de M et $u+v$ est nul, on obtient, toutes réductions faites, l'équation aux variables mêlées

$$\frac{UU''}{U'} - 2U' + \frac{U''}{U'}V - U\frac{V''}{V'} + 2V' - \frac{VV''}{V'} = 0. \tag{18}$$

Pour la résoudre, nous allons faire des hypothèses sur le nombre des relations linéaires homogènes distinctes qui lient les quatre quantités

$$1, \quad U, \quad \frac{U''}{U'}, \quad \frac{UU''}{U'} - 2U'.$$

Le nombre de ces relations peut être 3 ou moins.

Nous examinerons seulement les cas où ce nombre est 3 ou 2 : les autres nous ramèneraient à ceux-là par permutation de u et v, qui jouent des rôles symétriques.

Le cas de trois relations donnerait

$$U = \text{const.}, \qquad U' = 0, \qquad M = 0,$$

cas qui a été examiné au début du présent Chapitre.

Considérons donc exclusivement le cas de deux relations. On a (a, b, c désignant des constantes) :

$$\frac{U''}{U'} = 2aU + 2b,$$

d'où, en intégrant,

$$U' = aU^2 + 2bU + c. \tag{19}$$

Cette relation donne

$$U\frac{U''}{U'} - 2U' = -2bU - 2c.$$

Elle est donc suffisante.

L'équation (18) prend la forme

$$U\left(-2b + 2aV - \frac{V''}{V'}\right) - 2c + 2bV + 2V' - \frac{VV''}{V'} = 0,$$

ce qui entraîne les deux relations

$$-2b + 2aV - \frac{V''}{V'} = 0, \qquad -2c + 2bV + 2V' - \frac{VV''}{V'} = 0.$$

De ces deux relations on tire, en éliminant V'', la relation suivante qui entraîne les deux précédentes :

$$V' = aV^2 - 2bV + c. \tag{20}$$

Remarquons que M ne change pas si l'on remplace U et V respectivement par

$$\frac{\alpha U + \beta}{\gamma U + \delta} \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha V + \beta}{\gamma V - \delta}.$$

Cette propriété permet de simplifier la discussion.

1° Si le trinome $aU^2 + 2bU + c$ a une racine double, on peut supposer cette racine infinie. On peut aussi multiplier les variables u et v par constantes, ce qui permet de poser

$$U' = 1, \qquad V' = 1,$$

et l'on peut prendre

$$U = u, \qquad V = v.$$

Il en résulte

$$M = \frac{2}{(u+v)^2},$$

et l'on peut prendre

$$\xi_1 = 2\,\frac{U_1 + V_1}{u+v} - U'_1 - V'_1, \qquad \xi_2 = (u+v)^2, \qquad \xi_3 = \frac{1}{u+v}.$$

2° Si le trinome $aU^2 + 2bU + c$ a deux racines distinctes imaginaires, on pourra prendre

$$U' = U^2 + 1, \qquad V' = V^2 + 1.$$

Il en résulte

$$U = \operatorname{tang} u, \qquad V = \operatorname{tang} v, \qquad M = \frac{2}{\sin^2(u+v)}.$$

Les deux solutions qui joueront le rôle de ξ_2 et ξ_3 du Chapitre II, paragraphe **3**, seront

$$\xi_2 = \cot(u+v), \qquad \xi_3 = 1 - (u+v)\cot(u+v).$$

On pourra prendre pour ξ_1 une solution quelconque de l'équation de Moutard, c'est-à-dire

$$\xi_1 = 2\,\frac{U_1 + V_1}{\operatorname{tang} u + \operatorname{tang} v} - U'_1 \cos^2 u - V'_1 \cos^2 v.$$

3° Si le trinome $aU^2 + 2bU + c$ a deux racines distinctes réelles, on pourra prendre

$$U' = U^2 - 1, \qquad V' = V^2 - 1.$$

Il en résulte

$$U = -\operatorname{th} u, \qquad V = -\operatorname{th} v, \qquad M = \frac{2}{\operatorname{sh}^2(u+v)};$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont donnés par des formules analogues aux précédentes.

9. Cherchons si les équations de Moutard de la forme (16) peuvent donner des congruences de la nature de celles qui ont été rencontrées au Chapitre II, paragraphes **3** et **5**.

Pour cela, M doit être fonction homogène de degré -2 de u et v.

Écrivons que le déterminant fonctionnel de

$$H = uvM = \frac{2U'V'uv}{(U+V)^2}$$

et de $\frac{u}{v}$ s'annule ; on doit exprimer que

$$u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v} = 0,$$

ce qui donne l'équation aux variables mêlées

$$(21) \quad \frac{uUU''}{U'} - 2U'u + 2U + \frac{uU''}{U'}V + U\frac{vV''}{V'} + \frac{vVV''}{V'} - 2V'v + 2V = 0.$$

Étudions le nombre de relations linéaires homogènes distinctes qui peuvent exister entre les quantités

$$(22) \qquad 1, \quad U, \quad \frac{uU''}{U'}, \quad \frac{uUU''}{U'} - 2U'u + 2U,$$

en nous bornant, pour les mêmes raisons que pour l'équation (18), au cas où ces relations sont au nombre de deux.

Comme U ne peut pas être constant sans entraîner

$$M = 0,$$

on peut exprimer les deux dernières quantités (22) en fonction linéaire et homogène des deux premières. On a par exemple (a, b, c étant des constantes)

$$\frac{uU''}{U'} = aU + b - 1,$$

d'où

$$uU'' = aUU' + (b-1)U',$$

et en intégrant

$$2(uU' - U) = aU^2 + 2(b-1)U + c,$$

$$(23) \qquad 2uU' = aU^2 + 2bU + c.$$

On vérifie d'ailleurs immédiatement que cette condition suffit pour que la dernière des quantités (22) s'exprime en fonction linéaire des deux premières, comme suit :

$$\frac{a\mathrm{UU}''}{\mathrm{U}'} - 2\mathrm{U}'u + 2\mathrm{U} = (1-b)\mathrm{U} - c.$$

L'équation (21) prend alors la forme

$$\mathrm{U}\left(1 - b + a\mathrm{V} + \frac{v\mathrm{V}''}{\mathrm{V}'}\right) - c + \left(b - \frac{1}{2}\right)\mathrm{V} + \frac{v\mathrm{VV}''}{\mathrm{V}} - 2\mathrm{V}'v + 2\mathrm{V} = 0,$$

ce qui entraîne les deux relations

$$1 - b + a\mathrm{V} + \frac{v\mathrm{V}''}{\mathrm{V}'} = 0, \qquad -c + \left(b - \frac{1}{2}\right)\mathrm{V} + \frac{v\mathrm{VV}''}{\mathrm{V}'} + 2\mathrm{V}'v + 2\mathrm{V} = 0,$$

lesquelles se résument en la suivante :

$$(24) \qquad 2v\mathrm{V}' = -a\mathrm{V}^2 + 2b\mathrm{V} - c.$$

Rappelons que M ne change pas si l'on remplace U et V respectivement par

$$\frac{\alpha\mathrm{U} + \beta}{\gamma\mathrm{U} + \delta} \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha\mathrm{V} + \beta}{\gamma\mathrm{V} - \delta}.$$

On peut faire la discussion suivante :

1° Si le trinome $a\mathrm{U}^2 + 2b\mathrm{U} + c$ a une racine double, on peut prendre

$$u\mathrm{U}' = 1, \qquad v\mathrm{V}' = -1,$$

d'où, en intégrant,

$$\mathrm{U} = \log u, \qquad \mathrm{V} = -\log v.$$

Il en résulte

$$\mathrm{M} = -\frac{2}{uv\left(\log\frac{u}{v}\right)^2}.$$

La solution la plus générale de l'équation de Moutard correspondante sera

$$\xi_1 = \frac{U_1 - V_1}{\log u - \log v} - U'_1 u - V'_1 v = \frac{U_1 - V_1}{\log \frac{u}{v}} - U'_1 u - V'_1 v.$$

Pour avoir l'expression de ξ_2 et ξ_3, on pourra faire, dans l'expression précédente, successivement

$$U_1 = u, \qquad V_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad U_1 = 0, \qquad V_1 = v,$$

de façon à obtenir des solutions homogènes de degré 1 en u et v.

On aura ainsi

$$\xi_2 = \frac{u}{\log \frac{u}{v}} - u, \qquad \xi_3 = \frac{v}{\log \frac{v}{u}} - v.$$

2° Si le trinome $aU^2 + 2bU + c$ a deux racines distinctes réelles, on peut rendre ces racines égales respectivement à o et à ∞, et écrire

$$uU' = mU, \qquad vV' = mV.$$

Il en résulte

$$U = u^m, \qquad V = -v^m,$$

$$M = -\frac{2m^2 u^{m-1} v^{m-1}}{(u^m - v^m)^2} = \frac{-2m^2}{uv\left[\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{m}{2}} - \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{m}{2}}\right]^2} = \frac{-m^2}{2uv \operatorname{sh}^2\left(\frac{m}{2}\log\frac{u}{v}\right)}.$$

La solution la plus générale de l'équation de Moutard correspondante sera

$$\xi_1 = 2\frac{U_1 - V_1}{u^m - v^m} - \frac{U'_1}{mu^{m-1}} - \frac{V'_1}{mv^{m-1}}.$$

Pour avoir les valeurs de ξ_2 et ξ_3, on pourra faire, dans l'expression précédente, successivement

$$U_1 = u^{m+1}, \qquad V_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad U_1 = 0, \qquad V_1 = v^{m+1},$$

de façon à obtenir des solutions homogènes de degré 1 en u et v.

On aura ainsi

$$\xi_2 = 2\,\frac{u^{m+1}}{u^m - v^m} - \frac{m+1}{m}\,u = u\left(-\frac{1}{m} + \frac{u^m + v^m}{u^m - v^m}\right),$$

$$\xi_3 = 2\,\frac{-v^{m+1}}{u^m - v^m} - \frac{m+1}{m}\,v = v\left(-\frac{1}{m} - \frac{u^m + v^m}{u^m - v^m}\right).$$

Ces deux solutions sont linéairement distinctes, sauf si $m = +1$ ou $m = -1$. Considérons simplement le premier cas, auquel le second se ramène par le changement de U et V en $\frac{1}{U}$ et $\frac{1}{V}$. On a

$$\xi_1 = 2\,\frac{U_1 - V_1}{u - v} - U_1' - V_1'.$$

On peut prendre pour ξ_2 et ξ_3 les valeurs de la fonction précédente obtenues en faisant successivement

$$U_1 = u, \qquad V_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad U_1 = u^2 \log u, \qquad V_1 = v^2 \log v.$$

On aura ainsi

$$\xi_2 = \frac{2uv}{u - v}, \qquad \xi_3 = -(u+v) + \frac{2uv \log \frac{u}{v}}{u - v}.$$

3° Si le trinome $aU^2 + 2bU + c$ a deux racines distinctes imaginaires, on pourra écrire

$$2uU' = a(U^2 + 1), \qquad 2vV' = -a(V^2 + 1).$$

On en tire

$$U = \operatorname{tang} \log u^{\frac{a}{2}}, \qquad V = -\operatorname{tang} \log v^{\frac{a}{2}}.$$

Il en résulte

$$M = \frac{-a^2}{2uvm^2 \log \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{a}{2}}}.$$

On pourra prendre pour valeurs de ξ_2 et ξ_3

$$\xi_2 = u\left[\frac{1}{a} + \cot \log \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{a}{2}}\right], \qquad \xi_3 = v\left[\frac{1}{a} + \cot \log \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{a}{2}}\right].$$

10. Cherchons si les équations de Moutard de la forme (16) peuvent donner des congruences de la nature de celles qui ont été obtenues au Chapitre V, paragraphe **3**, c'est-à-dire pour lesquelles la surface moyenne est coupée suivant un système isotherme plan, à une affinité près.

Pour cela, il faut que M soit la somme d'une fonction de $u+v$ et d'une fonction de $u-v$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} = 0. \tag{25}$$

Or on a

$$M = \frac{2U'V'}{(U+V)^2}\quad \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = 2V'\left[\frac{U''}{(U+V)^2} - \frac{6U'U''}{(U+V)^3} + \frac{6U'^3}{(U+V)^4}\right],$$

et l'équation (25) donne, toutes réductions faites, l'équation aux variables mêlées

$$\begin{aligned}(-6UU'U''+6U'^3+U'''U^2)V' + 2(UU'''-3U'U'')VV' \\ + U'''V'V^2 - U'U^2V''' + 2UU'(3V'V''-VV''') \\ + U'(6VV'V''-6V'^3-V'''V^2) = 0.\end{aligned} \tag{26}$$

Pour la résoudre, nous ferons des hypothèses sur le nombre des relations linéaires homogènes distinctes qui lient les six quantités

$$U',\quad UU',\quad U'U^2,\quad U''',\quad UU'''-3U'U'',\quad -6UU'U''+6U'^3+U'''U^2. \tag{27}$$

Le nombre de ces relations ne peut pas dépasser 6. Nous examinerons seulement le cas où ce nombre est 6, 5, 4 ou 3; les autres cas nous ramèneraient à ceux-là par permutation de u et v qui jouent des rôles symétriques dans l'équation (26).

I. L'hypothèse de six relations ne peut convenir, car elle donnerait $U'=0$, d'où $M=0$, et ce cas a été étudié.

II. Dans l'hypothèse de cinq relations, on pourrait exprimer les cinq dernières quantités (27) en fonction linéaire et homogène de U', ce qui donnerait encore $U'=0$, ou $U=\text{const.}$, d'où $M=0$.

III. Dans l'hypothèse de quatre relations, on pourrait exprimer les quatre dernières des quantités (27) en fonction linéaire et homogène de U' et UU' (sans quoi, on aurait une relation linéaire et homogène entre U' et UU', ce qui redonnerait le cas précédent). On aurait par exemple

$$U'U^2 = aUU' + bU',$$

d'où l'on tirerait $U' = 0$, ou $U = \text{const.}$, et l'on aurait toujours $M = 0$.

IV. Supposons que le nombre des relations soit 3. On pourra exprimer les trois dernières des quantités (27) en fonction des trois premières (sans quoi, on aurait une relation linéaire et homogène entre U', U^2, $U'U$ et U comme au cas précédent). On aura par exemple

$$\begin{aligned} U''' &= 3U'(2aU^2 + bU + c), \\ UU''' - 3U'U'' &= 3U'(dU^2 + eU + f). \end{aligned} \tag{28}$$

Éliminant U'' entre ces deux relations, on obtient, U' étant supposé différent de zéro,

$$U'' = 2aU^3 + (b - d)U^2 + (c - e)Uf,$$

d'où, en dérivant,

$$U''' = U'[6aU^2 + 2(b - d)U + c - e].$$

U n'étant pas constant, cette expression doit être identique à l'expression (28), d'où

$$b = -2d, \qquad e = -2c,$$

ce qui donne

$$U'' = 2aU^3 - 3dU^2 + 3cU - f,$$

et, en multipliant par $2U'$ et intégrant,

$$U'^2 = aU^4 - 2dU^3 + 3cU^2 - 2fU + l. \tag{29}$$

On reconnaît immédiatement que, de cette équation, résulte la possibilité d'exprimer les trois dernières quantités (27) en fonction linéaire et homogène des trois premières.

L'équation (26) s'écrit alors en divisant par U'

$$\begin{aligned}
&U^2(3cV' + 6\,dVV' + 6aV'V^2 - V''') \\
&\quad + 2U(-3fV - 6cVV' - 3\,dV'V^2 + 3V'V'' - VV''') \\
&\quad + 6lV' + 6fVV' + 3cV'V^2 + 6VV'V'' - 6V'^3 - V'''V^2 = 0.
\end{aligned}$$

On doit donc avoir séparément

$$\begin{gathered}
3cV' + 6\,dVV' + 6aV'V^2 - V''' = 0, \\
-3fV' - 6cVV' - 3\,dV'V^2 + 3V'V'' - VV''' = 0, \\
6lV' + 6fVV' + 3cV'V^2 + 6VV'V'' - 6V'^3 - V'''V^2 = 0.
\end{gathered}$$

Ces trois équations se résument en la suivante :

$$V'^2 = aV^4 + 2\,dV^3 + 3cV^2 + 2fV + l. \tag{30}$$

Le problème se termine par des quadratures, les équations (29) et (30) permettant de calculer U et V par des intégrales qui sont elliptiques si les coefficients a, d, c, f, l ont des valeurs quelconques.

Pour faire la discussion, il y a lieu d'utiliser les deux propriétés suivantes :

On peut faire subir aux paramètres normaux u et v des transformations linéaires sans qu'ils cessent d'être normaux;

on peut remplacer U et V respectivement par

$$\frac{\alpha U + \beta}{\gamma U + \delta} \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha V + \beta}{\gamma V - \delta}$$

sans changer la valeur de M.

Examinons simplement le cas le plus général, et supposons que le polynome

$$ax^4 + 2\,dx^3 + 3cx^2 + 2fx + l \tag{31}$$

ait quatre racines distinctes. On pourra écrire

$$U'^2 = 4U^3 - g_2 U = g_3, \qquad V'_2 = -4V^3 + g_2 V - g_3,$$

d'où

$$U = pu, \qquad V = -pv.$$

Il en résulte

$$M = \frac{-2p'up'v}{(pu - pv)^2} = 2p(u+v) - 2p(u-v).$$

Cette valeur de M est la somme des deux quantités

$$2p(u+v) + pa = 2pt + pa$$

et

$$-2p(u-v) - pa = -2ps - pa,$$

qui sont respectivement fonctions de $u + v = s$ et de $u - v = d$.

En se reportant à l'équation (7) du Chapitre V, on voit que

$$\sqrt{\frac{1}{f'}} = g \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{1}{\varphi'}} = \psi$$

sont donnés par la résolution des équations

$$g'' = (2ps + pa)g, \tag{32}$$

$$\psi'' = (2pd + pa)\psi, \tag{33}$$

qui sont un cas particulier de l'équation de Lamé

$$y'' = [n(n+1)px + \lambda]y,$$

laquelle est bien connue, surtout dans le cas de $n = 1$, qui est celui auquel nous avons à faire ici (*voir* par exemple le Cours d'analyse professé à l'École Polytechnique par M. Jordan).

Si a n'est pas égal à l'une des quantités e_1, e_2, e_3, on aura

$$\sqrt{\frac{1}{f'}} = g = A e^{s\zeta a} \frac{\sigma(s-a)}{\sigma s} + B e^{-s\zeta a} \frac{\sigma(s+a)}{\sigma s}. \tag{34}$$

Comme $\frac{f}{\sqrt{f'}}$ est également une solution de l'équation différentielle (33) qui donne g, on aura aussi

$$\frac{f}{\sqrt{f'}} = \mathrm{C}e^{s\zeta a}\frac{\sigma(s-a)}{\sigma s} + \mathrm{D}e^{-s\zeta a}\frac{\sigma(s+a)}{\sigma s}. \tag{35}$$

A, B, C, D étant des constantes,

$$f = \frac{\mathrm{C}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{D}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)}{\mathrm{A}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{B}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)}. \tag{36}$$

On en tire en dérivant

$$f' = \frac{(\mathrm{BC}-\mathrm{AD})\sigma(s-a)\sigma(s+a)\left[2\zeta a - \frac{\sigma'(s+a)}{\sigma(s+a)} + \frac{\sigma'(s-a)}{\sigma(s-a)}\right]}{[\mathrm{A}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{B}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)]^2}.$$

Or on a, d'après les formules classiques de la théorie des fonctions elliptiques,

$$\sigma(s-a)\sigma(s+a) = -\sigma^2 s\,\sigma^2 a(\mathrm{p}s - \mathrm{p}a),$$

$$2\zeta a - \frac{\sigma'(s+a)}{\sigma(s+a)} + \frac{\sigma'(s-a)}{\sigma(s-a)} = 2\zeta a - \zeta(a+s) - \zeta(a-s) = \frac{\mathrm{p}'a}{\mathrm{p}s - \mathrm{p}a},$$

d'où

$$f' = \frac{(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})\sigma^2 a\,\mathrm{p}'a\,\sigma^2 s}{[\mathrm{A}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{B}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)]^2}. \tag{37}$$

On tire d'autre part de (34)

$$f' = \frac{\sigma^2 s}{[\mathrm{A}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{B}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)]^2}. \tag{38}$$

La comparaison des formules (37) et (38) montre que l'on doit avoir

$$(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})\sigma^2 a\,\mathrm{p}'a = 1. \tag{39}$$

La résolution de l'équation (33) donnerait de même

$$(40)\qquad \sqrt{\frac{1}{\varphi'}} = \psi = \mathrm{E}e^{d\zeta a}\frac{\sigma(d-a)}{\sigma d} + \mathrm{F}e^{-d\zeta a}\frac{\sigma(d+a)}{\sigma d},$$

$$(41)\qquad \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi'}} = \mathrm{G}e^{d\zeta a}\frac{\sigma(d-a)}{\sigma d} + \mathrm{H}e^{-d\zeta a}\frac{\sigma(d+a)}{\sigma d},$$

$$(42)\qquad \varphi = \frac{\mathrm{G}e^{d\zeta a}\sigma(d-a) + \mathrm{H}e^{-d\zeta a}\sigma(d+a)}{\mathrm{E}e^{d\zeta a}\sigma(d-a) + \mathrm{F}e^{-d\zeta a}\sigma(d+a)},$$

$$(43)\qquad \varphi' = \frac{(\mathrm{EH}-\mathrm{FG})\sigma^2 a p' a \sigma^2 d}{[\mathrm{E}e^{d\zeta a}\sigma(d-a) + \mathrm{F}e^{-d\zeta a}\sigma(d+a)]^2},$$

$$(44)\qquad \varphi' = \frac{\sigma^2 d}{[\mathrm{E}e^{d\zeta a}\sigma(d-a) + \mathrm{F}e^{-d\zeta a}\sigma(d+a)]^2},$$

$$(45)\qquad (\mathrm{EH}-\mathrm{FG})\sigma^2 a p' a = 1.$$

On en conclut, par application des formules du Chapitre V, paragraphe **3**, pour les paramètres d'une congruence dont la surface moyenne est coupée suivant un réseau isotherme, à une affinité près,

$$\xi_1 = \frac{[\mathrm{C}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{D}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)][\mathrm{E}e^{d\zeta a}\sigma(d-a) + \mathrm{F}e^{-d\zeta a}\sigma(d+a)]}{\sigma s\,\sigma d},$$

$$\xi_2 = \frac{[\mathrm{A}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{B}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)][\mathrm{E}e^{d\zeta a}\sigma(d-a) + \mathrm{F}e^{-d\zeta a}\sigma(d+a)]}{\sigma s\,\sigma d},$$

$$\xi_3 = \frac{[\mathrm{A}e^{s\zeta a}\sigma(s-a) + \mathrm{B}e^{-s\zeta a}\sigma(s+a)][\mathrm{G}e^{d\zeta a}\sigma(d-a) + \mathrm{H}e^{-d\zeta a}\sigma(d+a)]}{\sigma s\,\sigma d}.$$

On a d'autre part

$$\lambda = \xi_2.$$

CHAPITRE VII.

ÉTUDE DIRECTE DES CONGRUENCES DE NORMALES.

I. Nous nous proposons dans ce Chapitre de déterminer les congruences de normales qui sont à la fois congruences de Ribaucour et congruences W.

L'image sphérique des développables constituant dans ce cas un système orthogonal, la surface génératrice de la congruence aura ses lignes asymptotiques orthogonales et sera par suite une surface minima. La représentation sphérique des développables sera donc isotherme et admettra un ds^2 de la forme

$$(1) \qquad ds^2 = \lambda U^2 du^2 + \lambda V^2 dv^2,$$

U et V étant respectivement fonctions de u et v. Pour que la congruence de normales soit W, les coefficients de du^2 et dv^2 dans (1) doivent être fonctions l'un de l'autre ([1]). En annulant le déterminant fonctionnel de ces deux coefficients, on obtient

$$\lambda UV\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} UV' + \frac{\partial\lambda}{\partial v} U'V + 2\lambda U'V'\right) = 0.$$

Or λ est différent de zéro. Il en est de même de U et V.

Il reste donc

$$(2) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u} UV' + \frac{\partial\lambda}{\partial v} U'V + 2\lambda U'V' = 0.$$

En posant $\lambda = e^z$, cette équation se ramène à l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial u} UV' + \frac{\partial z}{\partial v} U'V + 2U'V' = 0,$$

dont l'intégration est équivalente à celle du système

$$\frac{du}{UV'} = \frac{dv}{U'V} = \frac{-dz}{2U'V'}.$$

Plusieurs cas sont ici à considérer :

a. U′ et V′ sont nuls, U et V sont des constantes; on obtient une congruence de normales à une surface minima, résultat connu.

([1]) Nous éliminons ainsi les cas où une surface focale est réduite à une courbe. C'est ce qui se produirait pour les congruences de normales aux cyclides de Dupin. Pour ces surfaces, les asymptotiques des surfaces focales sont indéterminées et peuvent être considérées comme se correspondant, mais il n'y a pas de relation entre les rayons de courbure principaux.

b. Une seule des quantités U' et V' est nulle, soit par exemple $U' \neq 0$, $V' = 0$. On obtient une congruence de normales à une surface de révolution : cas banal.

c. U' et V' sont l'un et l'autre différents de zéro. Nous allons étudier en détail ce cas nouveau.

2. L'intégrale de l'équation (2) est

$$\lambda = \psi(U, V),$$

ψ étant une fonction homogène de degré -2, et l'on a

$$ds'^2 = \psi(U, V)\,(U^2\,du^2 + V^2\,dv^2).$$

Prenons de nouvelles variables x et y et de nouvelles fonctions inconnues X et Y fonctions de x et de y respectivement. Posons

$$\begin{aligned}
U &= e^{-x}, & x &= -\log U,\\
V &= e^{-y}, & y &= -\log V;\\
X &= \frac{U'^2}{U^4}, & du &= \frac{dU}{U'} = e^{x}\frac{dx}{\sqrt{X}},\\
Y &= \frac{V'^2}{V^4}, & dv &= \frac{V'}{dV} = e^{y}\frac{dy}{\sqrt{Y}}.
\end{aligned}$$

L'expression du ds'^2 devient

$$ds'^2 = \left(\frac{dx^2}{X} + \frac{dy^2}{Y}\right) e^{x+y-f(x-y)}, \tag{3}$$

$f(x-y)$ représentant une fonction de $x-y$.

Écrivant que la courbure de l'expression (3) est égale à l'unité, on obtient la relation

$$2(X+Y)f'' + X'(1+f') + Y'(1-f') + 4e^{x+y-f} = 0. \tag{4}$$

3. Cherchons d'abord si l'on peut avoir

$$f'' = 0,$$

c'est-à-dire

$$f = \lambda(x - y) + \mu,$$

λ et μ étant des constantes.

L'équation (4) s'écrit alors

$$(1+\lambda)X' + (1-\lambda)Y' + 4e^{\mu}e^{(\lambda+1)x}e^{(1-\lambda)y} = 0,$$

d'où, en dérivant par rapport à x, puis par rapport à y,

$$4e^{\mu}(\lambda+1)(1-\lambda)e^{(\lambda+1)x}e^{(1-\lambda)y} = 0.$$

On en conclut soit $\lambda = +1$, soit $\lambda = -1$.

La première hypothèse $\lambda = +1$ donne

$$X' = -2e^{\mu}e^{2x}, \qquad X = -Ae^{2x} + B, \qquad f = x - y + \log A;$$

Y sera une fonction quelconque.

L'hypothèse $\lambda = -1$ donne une solution analogue.

4. L'équation (4) admet en outre la solution

$$X = Ae^{2x} + E,$$
$$Y = Be^{2y} - E,$$

où A, B, E sont des constantes.

Elle n'admet pas d'autres solutions que celles qui viennent d'être énumérées ; mais nous ne donnerons pas la démonstration de ce dernier point, que l'on peut trouver dans la thèse de M. Th. Caronnet : *Recherches sur les surfaces isothermiques et les surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre* [troisième partie, équation (10″), pages 36 à 53].

5. Parmi les solutions de l'équation (4) que nous venons de trouver, la solution du paragraphe **3**,

$$f = x - y + \log A,$$
$$X = -Ae^{2x} + B,$$

donne

$$ds'^2 = A e^{2x}\left(\frac{dx^2}{-A e^{2x} + B} + \frac{dy^2}{Y}\right),$$

ce qui conduit évidemment à des congruences de normales à des surfaces de révolution.

La même remarque s'applique évidemment à la solution

$$f = -x + y + \log A,$$
$$Y = -A e^{2y} + B.$$

Il reste la solution

$$X = A e^{2x} + E,$$
$$Y = B e^{2y} - E.$$

En posant

$$x - y = t,$$

l'équation (4) devient après division par e^{x+y}

$$(A e^{t} + B e^{-t}) f'' + (A e^{t} - B e^{-t}) f' + A e^{t} + B e^{t} + 2 e^{f} = 0,$$

ou bien

$$\begin{gathered}[(A + B)\operatorname{ch} t + (A - B)\operatorname{sh} t](f'' + 1) \\ + [(A - B)\operatorname{ch} t + (A + B)\operatorname{sh} t] f' + 2 e^{f} = 0.\end{gathered}$$

Posons, en supposant A et B différents de zéro,

$$\frac{A + B}{A - B} = \operatorname{th}\alpha;$$

l'équation devient

$$(f'' + 1)\operatorname{sh}(t + \alpha) + f' \operatorname{ch}(t + \alpha) + \frac{2 \operatorname{ch}\alpha}{A - B} e^{f} = 0.$$

On peut évidemment augmenter t d'une constante α; cela revient par exemple à augmenter x de α; U est multiplié par $e^{-\alpha}$, u et du par e^{α}, et l'expression ds'^2 reste inaltérée.

On peut aussi augmenter f d'une constante 2α, car si l'on multiplie en même temps X et Y par e^{α}, l'expression ds'^2 n'est pas changée.

On est donc ramené à l'équation différentielle

$$(f''+1)\operatorname{sh} t + f' \operatorname{ch} t + 2e^{f} = 0.$$

Dérivant par rapport à t, on obtient

$$f''' \operatorname{sh} t + 2f'' \operatorname{ch} t + f' \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t + 2e^{f} f' = 0.$$

L'élimination de e^{f} donne

$$\frac{f''' - f'f''}{f'^2 - 2f'' - 1} = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t},$$

et, en intégrant,

(5) $$f'^2 - 2f'' - 1 = \frac{2C}{\operatorname{sh}^2 t},$$

C désignant une constante.

Nous avons supposé A et B tous deux différents de zéro. Supposons par exemple $B = 0$. L'équation (30) devient

$$A e^{t}(f'' + f' + 1) + 2e^{f} = 0.$$

Éliminant e^{f} entre cette équation et celle que l'on obtient en la dérivant, il vient

$$\frac{f''' - f'f''}{f'^2 - 2f'' - 1} = 1,$$

et, en intégrant,

(6) $$f'^2 - 2f'' - 1 = \frac{2C}{e^{2t}}.$$

Pour $A = 0$, on obtient de même

(7) $$f'^2 - 2f'' - 1 = 2C e^{2t}.$$

Les équations (5), (6) et (7), où f' est la fonction inconnue, sont des équations de Riccati dont nous ne connaissons pas la solution générale pour C quelconque.

Nous allons simplement traiter un cas particulier simple.

Si dans l'équation (5) on suppose $C = 0$, on aura, ω étant un angle arbitraire,

$$f' = \frac{\cos\omega - e^t}{\cos\omega + e^t},$$

$$f = 2\log\sin\omega + t - 2\log(e^t - \sin\omega),$$

$$X = -e^{2x} - 1, \qquad Y = -e^{2y} + 1.$$

Le ds'^2 sphérique sera

$$ds'^2 = e^{x+y}\sin^2\omega\,\frac{e^{x-y}}{(e^{x-y} + \cos\omega)^2}\left(\frac{dx^2}{X} + \frac{dy^2}{Y}\right),$$

ou, en revenant aux variables primitives u et v,

$$ds'^2 = \frac{\sin^2\omega\,\mathrm{ch}^2 u\cos^2 v}{(\mathrm{ch}\,u + \cos\omega\cos v)^2}\left(\frac{du^2}{\mathrm{ch}^2 u} + \frac{dv^2}{\mathrm{ch}^2 v}\right).$$

Cette expression est de la forme

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2,$$

si l'on pose

$$\sqrt{e} = \frac{\sin\omega}{\dfrac{\mathrm{ch}\,u}{\cos v} + \cos\omega}, \qquad \sqrt{g} = \frac{\sin\omega}{1 + \cos\omega\dfrac{\cos v}{\mathrm{ch}\,u}}.$$

Les lignes coordonnées dans la représentation sphérique sont alors deux systèmes de cercles orthogonaux.

Si nous posons

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\mathrm{ch}\,u + \cos\omega\cos v}{\sin\omega\cos v},$$

$$\theta'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{\mathrm{ch}\,u + \cos\omega\cos v}{\sin\omega\,\mathrm{ch}\,u},$$

nous aurons entre α et $\theta'(\alpha)$ la relation

$$\alpha\theta'\sin\omega - \alpha - \theta'\cos\omega = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\theta = \frac{\alpha}{\sin\omega} + \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\log\left(\alpha - \frac{\cos\omega}{\sin\omega}\right).$$

Il en résulte pour les rayons de courbure principaux de la surface W (*cf.* L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 3^e^ édition, § 165) :

$$r_2 = \theta(\alpha) = \frac{\alpha}{\sin\omega} + \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\log\left(\alpha - \frac{\cos\omega}{\sin\omega}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{ch} u + \cos\omega\cos v}{\sin^2\omega\cos v} + \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\log\frac{\operatorname{ch} u}{\cos v\sin\omega},$$

$$r_1 = \theta - \alpha\theta' = -\frac{\alpha\cos\omega}{\sin\omega(\alpha\sin\omega - \cos\omega)} + \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\log\left(\alpha - \frac{\cos\omega}{\sin\omega}\right)$$
$$= -(\operatorname{ch} u + \cos\omega\cos v)\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega\operatorname{ch} u} + \frac{\cos\omega}{\sin^2\varpi}\log\frac{\operatorname{ch} u}{\sin\omega\cos v}.$$

La congruence correspondante a été étudiée au Chapitre IV (§ **6**). Elle correspond aux quatre solutions

$$\xi_1 = v\sin\omega,$$
$$\xi_2 = u\sin\omega,$$
$$\xi_3 = \sqrt{1+u^2}\cos\omega + \sqrt{1-v^2},$$
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v_2}} + \frac{\cos\omega}{\sqrt{1+u^2}}$$

de l'équation de Moutard

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Elle est parallèle à la congruence des normales à une surface minima de Bonnet.

6. L'intégration des équations de Riccati obtenues plus haut pourra dans de nombreux cas particuliers être ramenée à une quadrature.

Si, en effet, dans l'équation (5) nous posons $f' = -\frac{2z'}{z}$, nous obtenons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{z''}{z} = \frac{C}{2\operatorname{sh}^2 t} - \frac{1}{4}. \tag{8}$$

Or on sait que l'équation de Lamé

$$\frac{z''}{z} = n(n+1)\,pt + \lambda \tag{9}$$

s'intègre explicitement au moyen des fonctions σ si n est entier positif. Si l'on maintient fixe la période $2\omega'$ supposée imaginaire pure et égale à $i\pi$ pendant que l'autre période 2ω tend vers l'infini, les fonctions pt, ζt et σt dégénèrent en les expressions suivantes :

$$pt = \frac{1}{3} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}, \qquad \zeta t = -\frac{t^2}{3} + \coth t, \qquad \sigma t = e^{-\frac{t^2}{6}} \operatorname{sh} t.$$

L'équation (9) prend alors la forme

$$\frac{z''}{z} = n(n+1)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}\right) + \lambda.$$

On en conclut immédiatement que l'équation (8) pourra s'intégrer explicitement si C est de la forme $2n(n+1)$, où n est entier positif.

Vu et approuvé :

Paris, le 13 mars 1923.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 13 mars 1923.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. APPELL.