PAUL MENTRÉ

Les variétés de l'espace réglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales projectives

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1923

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1923__43__1_0>

N° D'ORDRE
1774

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. Paul MENTRÉ

INGÉNIEUR I. E. N., AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

1re THÈSE. — LES VARIÉTÉS DE L'ESPACE RÉGLÉ ÉTUDIÉES DANS LEURS PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES PROJECTIVES.

2e THÈSE. — ÉQUILIBRAGE.

Soutenues le 20 novembre 1923, devant la Commission d'examen

Commission	MM. KŒNIGS, *Président*.	
	CARTAN	*Examinateurs*.
	VESSIOT	

PARIS

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, Boulevard Saint-Michel, 49

1923

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

MM.

Doyen	MOLLIARD, *Professeur*.	Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX.	
	VÉLAIN.	
	BOUSSINESQ	
	PRUVOT.	
Professeurs	Emile PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Electrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés)
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale
	Emile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Mécanique rationnelle.
	Cl. GUICHARD	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE	Physiologie.
	GENTIL	Géographie physique.
	VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Application de l'analyse à la géométrie
	C. FABRY	Physique
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	Léon BERTRAND	Géologie appliquée et géologie régionale.
	DANGEARD	Botanique.
	LESPIEAU	Théories chimiques.
	LEDUC	Physique théorique et physique céleste.
	MONTEL	Mathématiques générales
	MAURAIN	Physique du globe.
	RABAUD	Biologie expérimentale.
	WINTREBERT	Anatomie et physiologie comparées.
	HÉROUARD	Zoologie.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.)
	SAGNAC	Physique théorique et physique céleste.
	PORTIER	Physiologie.
	BLAISE	Chimie organique
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER	Chimie analytique
	M. GUICHARD	Chimie minérale
	GUILLET	Physique.
Secrétaire	Daniel TOMBECK	

A M. E. CARTAN.

PREMIÈRE THÈSE

LES VARIÉTÉS RÉGLÉES

ÉTUDE PAR LE CALCUL EXTÉRIEUR DE LEURS PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES PROJECTIVES.

INTRODUCTION

La Géométrie réglée a été l'objet de nombreux travaux. Pour s'en convaincre il suffit de lire la Préface de l'important Mémoire de M. Kœnigs sur *La Géométrie réglée et ses applications* (1).

Les principales propriétés des surfaces réglées, des congruences et des complexes sont données par M. Vessiot dans ses *Leçons de Géométrie supérieure* (2). Une étude détaillée des variétés de droites se trouve dans le livre de M. Kœnigs *sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (3).

Dans ses *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces* (4), M. Darboux a consacré de nombreux chapitres à la déformation; il a employé les méthodes du calcul différentiel ordinaire. Comme en géométrie ponctuelle, le problème de la déformation présente en géométrie réglée un intérêt tout particulier. M. Fubini a généralisé aux espaces projectifs, la définition de l'applicabilité de deux variétés ; il s'est occupé tout particulièrement de la déformation projective des surfaces

(1) Gauthier-Villars éditeur, Paris 1895.
(2) Hermann éditeur, Paris 1919.
(3) Gauthiers Villars, Paris 1882.
(4) Gauthier-Villars, Paris 1896.

mais il a consacré un court Mémoire à des considérations sur l'applicabilité projective des complexes et des congruences ; il a employé dans ses nombreux Mémoires [1] les procédés du calcul différentiel absolu imaginé par Christoffel et perfectionné par Ricci. Enfin M. Cartan dans une Communication au Congrès de Strasbourg, a montré comment on pouvait étudier la déformation des variétés engendrées dans un espace quelconque par un élément géométrique quelconque en employant une méthode fondée sur l'emploi des « covariants bilinéaires ». Le procédé de calcul avait été imaginé par Frœbonius ; il fut perfectionné et mis au service de l'étude des groupes de transformations par M. Cartan qui l'a appelé « calcul extérieur » et a fourni de nombreux exemples d'applications géométriques de sa méthode. En étudiant les espaces conformes M. Cartan a remarqué que le problème de la déformation dans l'espace à 4 dimensions présentait des difficultés spéciales; il s'est borné dans ce cas particulier à la recherche des hypersurfaces applicables sur une hypersphère ; cette question correspond par une transformation qui change une hypersphère de rayon nul de l'espace à 4 dimensions en une droite de l'espace à 3 dimensions à l'application des complexes sur un complexe linéaire, dans l'espace projectif à trois dimensions. D'ailleurs, dans sa Communication au Congrès de Strasbourg, M. Cartan a énoncé les nombreux résultats intéressants qu'il a obtenus sur l'applicabilité projective des complexes et des congruences.

Dans ce Mémoire je me suis proposé d'employer le calcul extérieur à l'étude des propriétés infinitésimales de l'espace réglé projectif. J'ai porté surtout mon attention sur la déformation des variétés mais j'ai l'intention de poursuivre mes recherches sur ce problème difficile.

Je consacre les trois premiers chapitres à des généralités sur l'emploi des symboles représentatits des principaux éléments géométriques, sur la détermination projective du repère mobile associé à la droite qui décrit une variété et enfin sur le problème de l'applicabilité projective. J'étudie ensuite successivement les variétés réglées à une, deux et trois dimensions.

L'emploi du repère mobile fournit aisément certaines propriétés projectives des variétés ; beaucoup de ces propriétés ont d'ailleurs été données par différents auteurs qui employaient la méthode ordinaire de calcul dans l'espace euclidien ; la plupart des propriétés relatives aux complexes enveloppés par un complexe

---

(1) Dans l'avant propos de son Mémoire intitulé *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale* et paru dans les *Rendiconti del Circolo M. di Palermo* (1918-19), M Fubini donne la liste de ses principaux Mémoires.

linéaire dont la position dépend d'un ou de deux paramètres sont nouvelles (1). La détermination projective du repère mobile fournit une classification projective des différentes sortes de variétés ; la classification des complexes présente un intérêt particulier

La méthode du calcul extérieur a été exposée par M. Cartan, notamment dans son Mémoire *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien et non euclidien* (2) et dans ses *Leçons sur les Invariants intégraux* (3)

(1) J'ai résumé ces propriétés dans une note à l'Académie des Sciences, C. R du 20 novembre 1922.
(2) Bulletin de la Société Mathématique, années 1919 et 1920
(3) Hermann éditeur, Paris 1922

CHAPITRE PREMIER

Symboles de la Géométrie projective réglée

Symboles de points. Repères. — Considérons l'espace ordinaire rapporté à trois axes Ox, Oy, Oz.

Nous désignerons un point de l'espace par l'une des lettres a, b, c, m, n. Dans une équation la lettre qui représente un point symbolisera l'ensemble des quatre coordonnées homogènes de ce point.

Par un symbole tel que $ha + kb + lc + \ldots$ nous représenterons le point dont les quatre coordonnées homogènes s'obtiennent en multipliant respectivement celles de a, b, c,... par les nombres h, k, l... et en ajoutant les produits. Les symboles a et ha correspondent ainsi au même point géométrique.

Il est facile de rapporter l'espace à un repère formé de quatre points a_i dont les coordonnées homogènes sont déterminées; il suffit que le repère forme un tétraèdre ou ce qui revient au même que le déterminant des seize coordonnées ne soit pas nul. Etant donné le tétraèdre $a_1a_2a_3a_4$ on peut en effet écrire pour tout point m de l'espace : $m = \tau a_1 + \zeta a_2 + \eta a_3 + \xi a_4$; les quatre coefficients déterminés ainsi s'appellent les coordonnées du point m dans le repère $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$.

Nous appellerons repère simple le repère constitué par les quatre points $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ dont les coordonnées homogènes respectives sont : 0, 0, 0, 1 ; 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0 ; 1, 0, 0, 0. On peut alors écrire : $m = tb_1 + zb_2 + yb_3 + xb_4$; les coordonnées homogènes cartésiennes du point m sont donc identiques aux coordonnées du point m dans le repère $b_1b_2b_3b_4$.

On sait qu'une transformation homographique de l'espace est déterminée quand on connaît les anciennes et les nouvelles coordonnées homogènes de quatre points. Si nous effectuons la transformation qui amène le repère $a_1a_2a_3a_4$ en coïncidence avec le repère $\overline{a}_1\,\overline{a}_2\,\overline{a}_3\,\overline{a}_4$ le point $m = \tau a_1 + \zeta a_2 + \eta a_3 + \xi a_4$

sera amené en coïncidence avec le point $\overline{m} = \tau\overline{a_1} + \zeta\overline{a_2} + \eta\overline{a_3} + \xi\overline{a_4}$. Les coordonnées anciennes relatives à l'ancien repère sont donc les mêmes que les coordonnées nouvelles relatives au nouveau repère. On peut donc dire que le repère mobile $a_1a_2a_3a_4$ entraîne avec lui tous les points de l'espace de telle manière que les coordonnées relatives soient respectées ; on a ce qu'on appelle un déplacement projectif de l'espace. En géométrie projective, on ne doit pas considérer comme distinctes deux figures qui peuvent être amenées en coïncidence par un déplacement projectif de l'espace. Deux figures (F') et (F'') seront donc dites égales quand on pourra trouver deux repères (a') et (a'') tels que les deux figures soient définies par les mêmes relations entre les coordonnées relatives de leurs points.

Pour étudier les symboles de droites, plans et complexes linéaires nous imaginerons que l'espace est rapporté au repère simple $b_1b_2b_3b_4$ et à un autre repère quelconque $a_1a_2a_3a_4$. Pour abréger le langage nous appellerons « coordonnées absolues » les coordonnées dans le repère (b) et « coordonnées relatives » les coordonnées dans le repère (a).

Les coordonnées absolues d'un point m sont donc les coordonnées homogènes cartésiennes. De plus les coordonnées relatives du point m sont identiques aux coordonnées absolues du point $\overline{m}$ avec lequel le point m vient coïncider quand on effectue le déplacement projectif de l'espace pour lequel on a :

$$\overline{a_i} = b_i :$$

Nous désignerons par x_i, y_i, z_i, t_i les coordonnées absolues du point a_i et par x, y, z, t les coordonnées absolues du point $\overline{m}$ c'est-à-dire les coordonnées relatives du point m.

Symboles de droites. — Considérons la droite qui joint le point m au point m' Désignons par $x, y, z, t, x', y', z', t'$, les coordonnées relatives des points m et m'. Si nous appliquons le repère (a) sur le repère (b) la droite $\overline{m}\,\overline{m'}$ aura pour coordonnées pluckériennes cartésiennes :

$$X = tx' - t'x, \quad Y = ty' - t'y, \quad Z = tz' - t'z, \quad L = yz' - y'z,$$
$$M = zx' - z'x, \quad N = xy' - x'y ;$$

ces six quantités déterminent la position de la droite $\overline{m}\,\overline{m'}$ dans le repère (b) et par suite la position de la droite mm' dans le repère (a). Nous dirons que ce sont les coordonnées pluckériennes relatives de la droite mm' et les coordonnées pluckériennes absolues de la droite $\overline{m}\,\overline{m}'$.

Par le symbole $[mm']$ représentons l'ensemble des six coordonnées absolues de la droite mm' et par le symbole $[a_i a_j]$, représentons l'ensemble des six coordonnées absolues de la droite $a_i a_j$. Dans les calculs symboliques nous devrons traiter les symboles de droites comme des déterminants à deux colonnes, puisque chacune des coordonnées pluckériennes est égale à un déterminant à deux colonnes.

Par un symbole tel que : $h[a_1a_2] + k[a_3a_4] + \ldots$ nous représenterons la droite dont les six coordonnées absolues s'obtiennent en multipliant respectivement celles de $[a_1a_2]$, $[a_3a_4]\ldots$ par les nombres h, k et en effectuant les sommes des produits obtenus. Un calcul simple montre que l'on a la formule symbolique.

$$[mm'] = \mathrm{Z}[a_1a_2] + \mathrm{Y}[a_1a_3] + \mathrm{X}[a_1a_4] - \mathrm{N}[a_3a_4] - \mathrm{M}[a_4a_2] - \mathrm{L}[a_2a_3].$$

Symboles de plans. — Considérons le plan qui passe par les trois points m, m', m''. Appliquons le repère (b) sur le repère (a). Désignons par x_0, y_0, z_0, t_0 les coordonnées absolues d'un point variable du plan $\overline{m}\,\overline{m'}\,\overline{m''}$.

L'équation cartésienne du plan $\overline{m}\,\overline{m'}\,\overline{m''}$ peut s'écrire $\mathrm{E} = 0$, E désignant un déterminant à quatre lignes dont la première est : $xx'x''x_0$. En développant E suivant les éléments de la dernière colonne on trouve

$$\mathrm{E} = ux_0 + vy_0 + wz_0 + rt_0\,;$$

les coefficients u, v, w, r sont égaux à des déterminants à trois colonnes formés avec les coordonnées relatives des 3 points m, m', m''.

Les 4 nombres u, v, w, r déterminent le plan $\overline{m}\,\overline{m'}\,\overline{m''}$ dans le repère (b) ils déterminent donc le plan $mm'm''$ dans le repère (a) ; nous dirons que ces nombres sont les coordonnées absolues du plan $\overline{m}\,\overline{m'}\,\overline{m''}$ et les coordonnées relatives du plan $mm'm''$.

Par les symboles $[mm'm'']$, $[a_i a_j a_k]$ représentons l'ensemble des 4 coordonnées absolues des plans $mm'm''$ et $a_i a_j a_k$. Dans les calculs un symbole de plan devra manifestement se traiter comme un déterminant à trois colonnes.

Si l'on cherche les coordonnées absolues du plan $mm'm''$ on voit qu'elles satisfont à l'équation symbolique ;

$$[mm'm''] = u[a_1a_2a_3] - v[a_4a_1a_2] + w[a_3a_4a_1] - r[a_2a_3a_4].$$

Ajoutons que tout point n du plan $mm'm''$ peut s'écrire

$$n = \alpha m + \beta m' + \gamma m''$$

et que l'on a par suite

$$[mm'm'n] = 0,$$

si l'on convient de représenter le déterminant à quatre colonnes formé par les 16 coordonnées des points $mm'm''n$ par le symbole

$$[mm'm''n].$$

Symboles des complexes linéaires spéciaux — Un complexe spécial étant défini par sa directrice nous le représenterons par le même symbole que sa directrice. Un complexe spécial peut donc se représenter par une expression telle que ;

$$\rho[a_1a_2] + \rho_1[a_1a_3] + \rho 2[a_1a_4] + \rho'[a_3a_4] + \rho_1[a_4a_2] + \rho' 2[a_2a_3]$$

si l'on désigne par

$$\rho, \rho_1, \rho_2, -\rho', -\rho'_1, -\rho'_2$$

les coordonnées relatives Z, Y, X, N, M, L, de la directrice. Les six nombres ρ s'appellent les coordonnées relatives du complexe spécial; ils sont liés par l'équation :

$$\rho\rho' + \rho_1\rho'_1 + \rho_2\rho'_2 = 0.$$

Deux complexes linéaires spéciaux de coordonnées relatives respectives $\rho, \rho' \dots$ et σ, σ' auront des directrices concourantes si l'on a :

$$\rho\sigma' + \sigma\rho' + \rho_1\sigma'_1 + \sigma_1\rho'_1 + \rho_2\sigma'_2 + \sigma_2\rho'_2 = 0.$$

Symboles des complexes linéaires quelconques. — Considérons pour un instant les coordonnées ρ d'un complexe spécial comme étant les coordonnées homogènes d'un « point-image » ρ_0 dans un espace à 5 dimensions E_5. Tous les points-images des complexes spéciaux sont situés sur l'hyperquadrique ψ dont l'équation est :

$$\rho\rho' + \rho_1\rho'_1 + \rho_2\rho'_2 = 0.$$

Deux directrices se rencontrent quand les points images sont conjugués.

Soit un point quelconque γ de l'espace E_0. Désignons ses coordonnées par $\sigma, \sigma_1, \dots \sigma'_2$. Les points conjugués de γ satisfont à la relation :

$$\rho\sigma' + \sigma\rho' + \rho_1\sigma'_1 + \sigma_1\rho'_1 + \rho_2\sigma_2 + \sigma_2\rho'_2 = 0\,;$$

les points conjugués qui sont situés sur ψ sont donc les images des complexes spéciaux dont les directrices satisfont à la relation :

$$Z\sigma' + Y\sigma'_1 + Z\sigma_2 - N\sigma - M\sigma_1 - L\sigma_2 = 0.$$

Ces directrices sont donc situées dans un complexe linéaire.

A tout point γ de l'espace E_5 on peut donc faire correspondre un complexe linéaire de l'espace réglé.

Il est commode d'adopter dans l'espace E_5 des repères formés par six points dont on connait les six coordonnées homogènes.

A tout repère de l'espace réglé nous pourrons faire correspondre un repère de l'espace E_5 en prenant les images des six arêtes du tétraèdre.

Au repère $a_1a_2a_3a_4$ correspondra donc le repère $rr_1r_2r'r'_1r_2$ formé par les images des complexes spéciaux :

$$[a_1a_2],\ [a_1a_3],\ [a_1a_4],\ [a_3a_4],\ [a_4a_2],\ [a_2a_3]$$

Au complexe spécial dont le symbole est

$$\rho[a_1a_2] + \dots.$$

correspond le point image dont le symbole est

$$\rho r + \dots$$

Considérons un point quelconque

$$\gamma = \sigma r + \sigma_1 r_1 + \dots$$

de l'espace E_5.

Si nous déplaçons le repère $a_1a_2a_3a_4$ qui entraîne les points de l'espace réglé, les points de l'espace E_5 subiront un déplacement non euclidien respectant l'absolu ψ. Mais il est facile de connaître la transformation subie par un point de ψ puisqu'on connaît la transformation subie par la directrice du complexe spécial correspondant. Si le repère (a) vient en effet coïncider avec le repère $(\overline{a})$ défini par les équations :

$$a_i = \alpha_{i1}\overline{a}_1 + \alpha_{i2}\overline{a}_2 + \alpha_{i3}\overline{a}_3 + \alpha_{i4}\overline{a}_4$$

on obtiendra immédiatement les nouvelles coordonnées du complexe spécial

$$\rho[a_1a_2] + \rho_1[a_1a_3] + \dots$$

en remplaçant dans son symbole les lettres a_i par leurs valeurs.

Comme tous les points de l'espace E_5 subissent une même transformation projective, nous sommes conduits pour trouver la transformation subie par γ à chercher comment se modifie l'expression

$$\sigma[a_1a_2] + \sigma_1[a_1a_3] + \dots,$$

Désormais par une expression telle que :

$$\gamma = \sigma\,[a_1a_2] + \sigma_1[a_1a_3] + \sigma_2[a_1a_4] + \sigma'[a_3a_4] + \sigma'_1[a_4a_2] + \sigma'_2[a_2a_3]$$

nous symboliserons un complexe quelconque dont l'image dans l'espace E_5 aurait pour coordonnées

$$\sigma,\ \sigma_1, \ldots .$$

et dont les droites satisfont par suite à l'équation :

$$Z\sigma' + Y\sigma' + X\sigma'_2 - N\sigma - M\sigma_1 - Z_1\sigma_2 = 0.$$

Deux complexes linéaires sont en involution quand leurs images sont conjuguées.

Pour exprimer qu'un complexe linéaire est fixe il suffit d'écrire que la forme γ se reproduit à un facteur près.

Pour trouver la nouvelle position d'un complexe linéaire après un déplacement projectif, il suffit de chercher comment se modifie la forme γ. Les six nombres σ s'appellent coordonnées relatives du complexe.

Moment relatif de deux complexes. — Etant donné deux complexes linéaires quelconques ρ_0 et σ_0 de coordonnées ρ, ρ_1... et σ, σ_1... on appelle « moment relatif » l'expression bilinéaire :

$$F = \rho\sigma' + \rho_1\sigma'_1 + \rho_2\sigma'_2 + \rho'\sigma + \rho'_1\sigma_1 + \rho'_2\sigma_2.$$

Si le moment relatif est nul, les deux complexes sont en involution et si l'un des complexes est alors spécial, sa directrice est contenue dans l'autre complexe.

Le moment relatif de deux complexes est un invariant absolu vis-à-vis des déplacements de l'espace projectif quand on impose à ces déplacements la restriction de ne pas modifier la valeur du déterminant.

$$[a_1a_2a_3a_4].$$

Donnons pour le démontrer un déplacement infiniment petit au repère $a_1a_2a_3a_4$. Ce déplacement sera défini par les relations :

$$da_i = \omega_{i1}a_1 + \omega_{i2}a_2 + \omega_{i3}a_3 + \omega_{i4}a_4,$$

où les ω sont des expressions de Pfaff formées avec les variables qui servent à déterminer la position du repère.

Ecrivons pour abréger r, ..., r'_2 au lieu de $[a_1a_2]$, ... $[a_2a_3]$. La forme du complexe dr s'obtient aisément. On a en effet :

$$dr = d[a_1a_2] = [a_1da_2] + [da_1a_2] = (\omega_{11} + \omega_{22})r + \omega_{13}r_1 + \omega_{24}r_2 + \omega_{14}r'_1 - \omega_{13}r'_2$$

On trouve de même dr_1, ... dr'_2. On peut alors aisément calculer la variation $d\mathrm{F}$ du moment relatif; on trouve :

$$d\mathrm{F} = \mathrm{F}(\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44}).$$

Mais on a :

$$d[a_1a_2a_3a_4] = (\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44})\,[a_1a_2a_3a_4].$$

Par suite, si l'on s'impose la restriction

$$\mathrm{D} = [a_1a_2a_3a_4] = \mathrm{C}^{te},$$

on aura $d\mathrm{F} = 0$ et par suite F sera un invariant absolu.

Il est important de remarquer que la restriction imposée au repère ne diminue pas la généralité du déplacement projectif du repère si l'on se place au point de vue géométrique ; cela résulte de cette remarque que le déplacement projectif qui transforme le repère

$$a_1a_2a_3a_4$$

dans le repère

$$\mathrm{K}a_1\,\mathrm{K}a_2\,\mathrm{K}a_3\,\mathrm{K}a_4$$

laisse fixe tous les points de l'espace et modifie la valeur du déterminant D.

Nous supposerons désormais que l'on a

$$\mathrm{D} = 1\,;$$

nous aurons donc :

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0.$$

Pour abréger l'écriture nous représenterons par le symbole ρ_0/σ_0 le moment relatif des deux complexes linéaires dont les formes symboliques sont ρ_0 et σ_0. D'ailleurs un moment relatif a les propriétés d'un produit géométrique.

CHAPITRE II

Invariants fondamentaux d'une Variété.

Expressions fondamentales de Pfaff pour le repère (a) associé à une droite mobile qui décrit une variété.

Pour étudier une variété V de l'espace réglé nous emploierons comme repère fixe un repère quelconque $c_1c_2c_3c_4$.
On se ramène immédiatement au cas d'un repère fixe simple : il suffit d'entraîner l'espace dans le déplacement projectif qui amène le repère (c) en coïncidence avec le repère simple (b) ; les coordonnées anciennes (dans le repère $c_1c_2c_3c_4$) deviennent alors égales aux coordonnées nouvelles c'est à dire aux coordonnées homogènes cartésiennes.

Nous associerons à chaque droite r de la variété un repère

$$a_1a_2a_3a_4$$

tel que les points

$$a_1 \text{ et } a_2$$

soient situés sur la droite r considérée. Nous pourrons donc écrire :

$$r = [a_1a_2].$$

Si la variété considérée est à n dimensions et si l'on désigne par

$$p_1, \qquad p_2, \ldots \qquad p_n$$

les paramètres de position de la droite r mobile dans la variété, la droite r sera immobile lorsque dp_1, dp_2. . dp_n
seront nuls. Le repère le plus général que l'on peut associer à la droite r supposée fixe dépend de 12 paiamètres u_1, u_2...
Pour déterminer complètement les repères associés aux différentes droites r, il faudra donc fournir tous les paramètres u_i en fonction des « paramètres fondamentaux » p_1, p_2... p_n.

Si nous associons à la droite variable r un repère arbitraire le déplacement infinitésimal de ce repère sera caractérisé par les équations :

$$da_i = \omega_{i1} a_1 + \omega_{i2} a_2 + \omega_{i3} a_3 + \omega_{i4} a_4.$$

Les seize expressions de Pfaff

$$\omega_{ij}$$

renferment les variables p et les variables u. Il est facile de voir que les quatre expressions

$$\omega_{13}, \qquad \omega_{14}, \qquad \omega_{23}, \qquad \omega_{24}$$

ne peuvent renfermer que les différentielles dp_1, dp_2,... dp_n.
En effet si on considère un déplacement infinitésimal qui laisse nulles les différentielles dp, la droite r restera fixe et par suite les points da_1 et da_2
seront alors situés sur la droite

$$[a_1 a_2].$$

Les expressions

$$\omega_{13}, \qquad \omega_{14}, \qquad \omega_{23}, \qquad \omega_{24}$$

ne sont donc pas indépendantes à moins que l'on n'ait

$$n = 4$$

ce qui n'arrive que dans le cas où la variété étudiée se confond avec l'espace.
On peut choisir n des expressions

$$\omega_{13}, \qquad \omega_{14}, \qquad \omega_{23}, \qquad \omega_{24}$$

et exprimer les

$$4 - n$$

autres expressions linéairement au moyen de celles choisies.

Nous écrirons pour abréger

$$\omega_1, \qquad \omega_2, \qquad \omega_3, \qquad \omega_4$$

au lieu de

$$\omega_{13}, \qquad \omega_{23}, \qquad \omega_{24}, \qquad \omega_{14}$$

et nous appellerons « expressions fondamentales » les n expressions ω_i au moyen desquelles nous exprimerons linéairement les expressions ω_i non nulles.

Généralités sur la détermination intrinsèque du repère (a).

Quand le repère (a) est choisi complètement, ce repère ne dépend plusque des paramètres fondamentaux p. Par suite toutes les seize expressions ω_{ij} deviennent des expressions de Pfaff à n variables $p_1, \quad p_2 \ldots \quad p_n$. Elles peuvent donc s'exprimer linéairement au moyen de n d'entre elles ; nous les exprimerons au moyen des n expressions fondamentales.

On peut réaliser un choix intrinsèque du repère (a) en opérant par étapes successives. Chaque étape consiste à imposer aux expressions ω_{ij} de nouvelles équations linéaires et homogènes. Après une étape le repère dépend encore des paramètres p et de certains paramètres u. Nous appellerons alors déplacement d un déplacement infinitésimal quelconque du repère, pourvu qu'il soit compatible avec toutes les restrictions déjà imposées.

Nous appellerons déplacement δ un déplacement d quelconque pourvu qu'il laisse fixe la droite r. On obtient donc les valeurs des 4 quantités δ_{a_i} en annulant $dp_1, \ldots, \quad dp_n$ dans les valeurs des quantités da_i.

Pour éviter les confusions nous désignerons par e_{ij} ce que devient l'expression ω_{ij} dans un déplacement δ.

Avec ces notations, puisque les déplacements d et δ correspondent à deux modes différents de différentiation on pourra écrire :

$$\omega'_\alpha = de_\alpha - \delta\omega_\alpha$$

et

$$[\omega_\alpha \omega_\beta] = \omega_\alpha . e_\beta - e_\alpha . \omega_\beta$$

d'après les définitions d'un covariant bilinéaire et d'un produit (extérieur les indices α et β remplacent deux chiffres quelconques compris entre o et 5).

Le choix des points a_1 et a_2 sur la droite r impose ensuite :

$$e_{13} = e_{14} = e_{23} = e_{24} = 0$$

puisque les points

$$\delta a_1 \qquad \text{et} \qquad \delta a_2$$

sont situés sur

$$[a_1 a_2].$$

Quand le choix du repère sera terminé les seize expressions e_{ij} seront nulles. On considérera donc le choix du repère comme terminé quand, après une étape, toutes les expressions e dont les 2 indices sont différents sont nulles tandis que les quatre autres expressions e sont égales entre elles ; il suffira en effet de s'imposer la restriction

$$[a_1 a_2 a_3 a_4] = 1$$

pour avoir

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0$$

dans un déplacement d et par suite

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} = 0$$

dans un déplacement δ. Les quatre expressions égales e_{ii} seront alors annulées.

Pour trouver un choix intrinsèque du repère nous utiliserons les covariants bilinéaires des expressions ω_{ij}. Ces covariants satisfont à des équations qui nous seront très utiles ; on déduit ces équations de celles obtenues en prenant les covariants bilinéaires des deux membres de chacune des équations

$$da_i = \omega_{i1} a_1 + \omega_{i2} a_2 + \omega_{i3} a_3 + \omega_{i4} a_4.$$

On obtient finalement les seize relations :

$$\omega'_{ij} = [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + [\omega_{i3}\omega_{3j}] + [\omega_{i4}\omega_{4j}].$$

Généralités sur la particularisation fondamentale du repère. Foyers et plans focaux.

La particularisation fondamentale du repère consistera à simplifier autant qu'il sera possible les coefficients des $4-n$ relations linéaires et homogènes qui existent entre les expressions ω_i.

La seule restriction imposée à un déplacement δ est de laisser fixe la droite r. Il est facile d'avoir les effets d'un déplacement δ sur une expression ω_i.

Par exemple l'équation

$$\omega_1' = \omega_{13}' = [\omega_1(\omega_{33} - \omega_{11})] + [\omega_4\omega_{43}] - [\omega_2\omega_{12}]$$

peut s'écrire, puisque les expressions e_i et les différentielles de_i sont nulles :

$$\delta\omega_1 = \omega_1(e_{11} - e_{33}) + \omega_2 e_{12} - \omega_4 e_{43}.$$

Les valeurs des quatre quantités $\delta\omega$ montrent que les quatre expressions ω considérées pour un instant comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à trois dimensions subissent un déplacement à 7 paramètres ; c'est le déplacement de la géométrie non euclidienne pour laquelle la quadrique absolue a pour équation

$$\varphi = 2(\omega_1\omega_3 - \omega_2\omega_4) = 0,$$

car on a

$$\delta\varphi = \varphi(e_{11} + e_{22} - e_{33} - e_{44})$$

et par suite l'équation

$$\varphi = 0 \text{ est invariante.}$$

D'ailleurs cette équation

$$\varphi = 0$$

a une signification géométrique simple : un déplacement d qui satisfait à la condition

$$\varphi = 0$$

est tel que les deux droites infiniment voisines

$$r \qquad \text{et} \qquad r + \Delta r$$

se rencontrent. En effet on a

$$\varphi = - dr|dr = r|d^2r\,;$$

par suite la forme quadratique φ est égale au double de la partie principale du moment relatif infiniment petit

$$r|(r + \Delta r)$$

Désormais nous appellerons « déplacement d_0 » tout déplacement d qui satisfait à la condition

$$\varphi = 0.$$

Nous allons étudier les déplacements d_0.

Considérons d'abord le cas pour lequel

$$n = 1\,;$$

la variété est alors une surface réglée. On peut poser

$$\omega_1 = h_1 dp_1\,;$$

si

$$(h_1 h_3 - h_2 h_4)$$

n'est pas nul le déplacement d n'est pas un déplacement d_0.

Etudions les surfaces pour lesquelles on a identiquement

$$h_1 h_3 - h_2 h_4 = 0$$

On a alors, quel que soit le coefficient K :

$$[a_1\ a_2\ \omega_1 a_3 + \omega_4 a_4\ d(a_1 + \mathrm{K} a_2)] = 0$$

ce qui montre que le point

$$d(a_1 + \mathrm{K} a_2)$$

est situé dans le plan

$$[a_1\ a_2\ h_1 a_3 + h_4 a_4]\,;$$

ce plan est donc tangent à la surface au point

$$(h_1 a_3 + h_4 a_4).$$

Il en résulte que le plan tangent à la surface est le même tout le long de la droite r ; les surfaces considérées sont donc développables. En posant

$$\omega_2 = \mu \omega_1$$

on voit que le point

$$(\mu a_1 - a_2)$$

est situé sur l'arête de rebroussement car

$$d(\mu a_1 - a_2) = (\ldots) a_1 + (\ldots) a_2$$

et cette équation montre que la droite

$$[a_1 a_2]$$

est tangente à la courbe décrite par le point

$$(\mu a_1 - a_2)$$

Considérons maintenant le cas d'une variété pour laquelle n est plus grand que 1. On pourra imaginer des déplacements d_0 à un paramètre pour lesquels la droite r se déplace dans la variété. La portion de surface développable ainsi engendrée s'appelle « plan focal » ; le point de la droite initiale r qui est situé sur l'arête de rebroussement s'appelle « foyer ». On peut dire que dans un déplacement d_0 la droite mobile reste sensiblement dans un plan focal tandis qu'elle rencontre la droite r initiale en un point infiniment voisin d'un foyer. D'après ce qui précède le plan focal et le foyer sont représentés par les symboles

$$[a_1 a_2 (\omega_1 a_3 + \omega_4 a_4)]$$

et

$$[\omega_2 a_1 - \omega_1 a_2],$$

Revenons à l'étude de la particularisation fondamentale.

A toute relation linéaire et homogène entre les expressions ω_i correspond un plan de l'espace E à 3 dimensions dont les points (ω) » ont pour coordonnées homogènes

$$\omega_1, \qquad \omega_2, \qquad \omega_3 \text{ et } \omega_4.$$

Si on considère le morceau d'une variété qui est constitué par les droites qui sont situées au voisinage d'une position r de la droite génératrice on pourra faire correspondre à ce morceau une image dans l'espace E : on obtiendra un « plan ω » dans le cas d'un complexe, une « droite ω » dans le cas d'une congruence et « un point ω » dans le cas d'une surface réglée.

La particularisation fondamentale consiste donc à profiter des déplacements non euclidiens de l'espace E pour simplifier les équations d'un plan, d'une droite ou d'un point. Nous désignerons par φ la quadrique absolue.

Pout tout déplacement non euclidien de l'espace E les points situés sur la quadrique absolue y restent ; ces points sont d'ailleurs les images de déplacements d_0 ; cela explique le rôle important que vont jouer les déplacements d_0 dans la particularisation fondamentale.

Classification fondamentale des variétés en huit catégories. Particularisation fondamentale du repère dans les différents cas.

S'il s'agit d'une surface réglée on doit distinguer deux cas. En général le « point ω » n'est pas situé sur la quadrique absolue φ et on peut alors l'amener en coïncidence avec le point de coordonnées

$$\omega_1, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = \omega_1, \qquad \omega_4 = 0;$$

il s'agit d'une surface non développable, caractérisée par l'absence de foyer sur la droite n. Si le « point ω » est situé sur φ, on peut l'amener en coïncidence avec le point de coordonnées

$$\omega_1, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \omega_4 = 0;$$

il s'agit d'une surface développable caractérisée par la présence d'un foyer sur la droite r.

S'il s'agit d'une congruence on doit distinguer quatre cas. En général la « droite ω » a deux points distincts communs avec la quadrique φ et on peut alors l'amener en coïncidence avec la droite d'équations :

$$\omega_2 = 0, \qquad \omega_4 = 0;$$

il s'agit d'une congruence qui admet deux foyers distincts sur la droite r. Si la « droite ω » a deux points confondus communs avec la quadrique φ, on peut l'amener en coïncidence avec la droite tangente à φ dont les équations sont :

$$\omega_4 = 0, \qquad \omega_3 = \omega_1;$$

il s'agit d'une congruence qui admet deux foyers confondus sur la droite n.

Si la « droite ω » coïncide avec une génératrice de φ appartenant à la même famille que la génératrice G_1 d'équations :

$$\omega_3 = 0, \qquad \omega_4 = 0$$

on peut l'amener en coïncidence avec G_1 ; il s'agit d'une congruence qui admet une infinité de foyers mais dont les plans focaux correspondants sont confondus ; après la particularisation fondamentale on a en effet

$$\omega_3 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_4 = 0$$

et il en résulte que da_1 et da_2 sont toujours situés dans le plan

$$[a_1 a_2 a_3];$$

bien plus le plan

$$[a_1 a_2 a_3]$$

est fixe car les équations

$$\omega_3 = 0 \text{ et } \omega_4 = 0$$

entraînent

$$[\omega_2 \omega_{34}] = 0$$

et

$$[\omega_1 \omega_{34}] = 0,$$

ce qui exige que ω_{34} soit nul ; on a donc

$$d[a_1 a_2 a_3] = (\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33})[a_1 a_2 a_3]$$

ce qui montre bien que le plan

$$[a_1 a_2 a_3] \text{ est fixe ;}$$

comme la droite

$$[a_1 a_2]$$

reste situé dans le plan fixe

$$[a_1 a_2 a_3]$$

il s'agit d'une « congruence plane » formée par l'ensemble des droites d'un plan.

Enfin si la « droite ω » coïncide avec une génératrice appartenant à la même famille que la génératrice G_2 d'équations

$$\omega_1 = 0 \text{ et } \omega_4 = 0$$

on peut l'amener en coïncidence avec G_2 ; il s'agit d'une congruence qui n'admet qu'un foyer auquel correspondent une infinité de plans focaux ; après la particularisation fondamentale on a en effet

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_4 = 0$$

et il en résulte que da_1 est toujours situé sur la droite

$$[a_1 a_2]$$

ce qui montre que a_1 est foyer pour tous les déplacements ; d'ailleurs da_2 est situé dans un plan quelconque ; bien plus le point a_1 est fixe car les équations

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_4 = 0$$

entraînent

$$[\omega_{12} \omega_2] = 0 \quad \text{et} \quad [\omega_{12} \omega_3] = 0$$

ce qui exige que ω_{12} soit nul, on a donc

$$da_1 = \omega_{11} a_1$$

ce qui montre bien que le point a_1 est fixe ; comme la droite

$$[a_1 a_2]$$

passe toujours par le point fixe a_1 il s'agit d'une « congruence ponctuelle » formée par l'ensemble des droites qui passent par un point.

Si la variété considérée est un complexe, on doit distinguer deux cas. En général le « plan ω » ne sera pas tangent à φ ; on pourra l'amener en coïncidence avec le plan d'équation :

$$\omega_2 + \omega_4 = 0.$$

Si le « plan ω » est tangent à φ on pourra l'amener en coïncidence avec le plan :

$$\omega_4 = 0$$

Dans ce dernier cas, après la particularisation fondamentale on a donc :

$$\omega_4 = 0$$

c'est-à-dire que da_1 est situé dans le plan

$$[a_1 a_2 a_3] ;$$

par suite le point a_1 décrit une courbe ou une surface. Le plan

$$[a_1 a_2 a_3]$$

qui ne cesse d'être tangent en a_1 à cette courbe ou à cette surface, contient la droite

$$[a_1 a_2] ;$$

la génératrice r du complexe reste donc tangente à une surface ou ne cesse de rencontrer une courbe. Il s'agit alors d'un complexe spécial. Réciproquement si une droite reste tangente à une surface ou ne cesse de rencontrer une courbe on peut aisément choisir un repère tel que l'on ait

$$\omega_4 = 0.$$

Etudions les foyers et les plans focaux dans les deux cas relatifs au complexe. Dans le cas général on a après la particularisation fondamentale

$$\omega_2 + \omega_4 = 0.$$

On pourra poser pour un déplacement d_0 à un paramètre

$$\omega_2 = \mu\omega_1 \qquad \text{et} \qquad \omega_4 = -\mu\omega_1 .$$

Le point

$$(\mu a_1 - a_2)$$

qui a une position quelconque sur r est donc un foyer auquel correspond le plan focal

$$[a_1 a_2 (a_3 - \mu a_4)].$$

Remarquons que ce plan focal passe par le point

$$(a_3 - \mu a_4)$$

situé sur la droite

$$[a_3 a_4].$$

Il y a donc une correspondance homographique simple entre les foyers et les plans focaux correspondants. Dans le cas particulier on a après la particularisation fondamentale

$$\omega_4 = 0.$$

Les déplacements d_0 satisfont donc à

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{ou à} \qquad \omega_3 = 0\,;$$

les déplacements de première espèce admettent tous pour foyer le point a_1 tandis que les déplacements de deuxième espèce admettent tous pour plan focal le plan

$$[a_1 a_2 a_3].$$

Remarquons d'ailleurs que le complexe a pour image un plan tangent à φ et par suite les déplacements d_0 ont pour images les points situés sur les deux génératrices de φ qui sont dans le plan tangent ; à chacune de ces deux génératrices correspond une espèce de déplacements d_0.

Les repères que nous emploierons dorénavant auront toujours subi la particularisation fondamentale. Nous supposerons donc que l'on a :

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$$

pour les surfaces développables

$$\omega_2 = \omega_3 - \omega_1 = \omega_4 = 0$$

pour les surfaces non développables (symbole D),

$$\omega_3 = \omega_4 = 0$$

pour les congruences planes,

$$\omega_1 = \omega_4 = 0$$

pour les congruences ponctuelles,

$$\omega_4 = \omega_3 - \omega_1 = 0$$

pour les congruences à deux foyers confondus (symbole U),

$$\omega_2 = \omega_4 = 0$$

pour les congruences à deux foyers distincts (symbole V),

$$\omega_4 = 0$$

pour les complexes spéciaux et

$$\omega_2 + \omega_4 = 0$$

pour les complexes non spéciaux. Nous voyons que la particularisation fondamentale oblige à distinguer huit catégories de variétés.

Après la particularisation fondamentale le repère attaché à une droite r déterminée dépend encore suivant la catégorie de la variété de 8, 9, 10 ou 11 paramètres arbitraires (9 paramètres par exemple pour les surfaces non développables, pour les congruences à deux foyers confondus et pour les complexes non spéciaux).

Invariants fondamentaux d'une variété. — Après la particularisation fondamentale les 16 paramètres dont dépend dans l'espace un repère quelconque sont amenés à satisfaire à un système de Pfaff (Σ_1). Par exemple, dans le cas d'un repère associé à une conférence à deux foyers confondus on aura les deux équations de Pfaff :

$$\omega_4 = 0. \qquad \omega_3 - \omega_1 = 0,$$

Pour poursuivre la détermination intrinsèque du repère on commence par prolonger le système (Σ) en satisfaisant de la manière la plus générale possible aux équations quadratiques extérieures entraînées par les équations (Σ_1). On obtient ainsi de nouvelles équations de Pfaff formées avec les expressions ω_{ij} affectées de certains coefficients α. Quand on modifie le repère attaché à une génératrice déterminée r, les coefficients α subissent un groupe de transformations. On trouve d'ailleurs aisément les transformations infinitésimales du groupe. On profite du groupe pour simplifier les coefficients α qui doivent être amenés à être nuls ou égaux à des constantes (le plus souvent ces constantes seront $+1$ et -1) ou à des invariants.

On adjoint alors les nouvelles équations de Pfaff simplifiées aux équations (Σ_1) de manière à former un nouveau système (Σ_2).

On opère ensuite avec (Σ_2) comme on a opéré avec (Σ_1) et ainsi de suite jusqu'à ce que le déplacement δ permis au repère laisse fixe tous les points de l'espace, parce qu'on a annulé toutes les expressions

$$e_{ij}(i \neq j)$$

et égalé les quatre expressions e_{ii}.

A moins que la variété étudiée n'admette un groupe projectif de déplacements on peut déterminer le repère d'une manière intrinsèque en employant quelques « particularisations spéciales » successives. On adjoint alors aux équations de Pfaff imposées par les différentes particularisations, l'équation

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0 ;$$

cette équation est la conséquence de la restriction

$$[a_1 a_2 a_3 a_4] = 1$$

que l'on s'impose de manière à annuler les e_{ii} puisque l'on a ainsi

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} = 0.$$

On peut, dans ces conditions, exprimer toutes les expressions ω_{ij} linéairement au moyen des n expressions fondamentales que nous désignerons par

$$\omega_1, \ldots \quad \omega_n.$$

On peut ensuite transformer les valeurs des différentielles da_i ce qui donne :

$$da_i = \lambda_{i1}\omega_1 + \ldots + \lambda_{in}\omega_n. \tag{1}$$

Certains coefficients λ sont nuls. Les autres sont d'après la manière même dont ils ont été obtenus des invariants puisque l'on a

$$\delta\lambda = 0;$$

ils ont des valeurs numériques déterminées pour une génératrice r déterminée ; ces invariants s'appellent « invariants fondamentaux » de la variété ; ce sont des fonctions des paramètres fondamentaux

$$p_1, \qquad p_2, \qquad p_n$$

que l'on a adoptés.

Les équations (1) entraînent

$$[d\lambda_{i1}\omega_1] + \ldots + [d\lambda_{in}\omega_n] = 0.$$

On peut donc poser pour chacun des invariants :

$$d\lambda = \mu_1\omega_1 + \ldots + \mu_n\omega_n.$$

Les coefficients μ sont de nouveaux invariants que l'on appelle invariants dérivés du premier ordre.

CHAPITRE III

Applicabilité projective de deux Variétés

Définition de l'applicabilité projective de deux variétés réglées.

Considérons deux variétés réglées à n dimensions : v et V ; adoptons comme infiniment petits du 1er ordre les différentielles des quatre paramètres de position d'une droite dans l'espace (de façon que

$$dr \quad \text{et} \quad d\mathrm{R}$$

soient du 1er ordre). Les deux variétés v et V sont applicables d'ordre h s'il est possible de trouver une correspondance entre les droites r et R telle qu'un déplacement projectif de V suffise pour amener une droite R *arbitrairement choisie* en coïncidence avec la droite r correspondante tandis que, aux infiniment petits d'ordre

$$h + 1$$

près, les droites qui avoisinent R sont amenées en coïncidence avec les droites correspondantes qui avoisinent r.

Si nous représentons par V la nouvelle position de V après le déplacement projectif deux morceaux infiniment petits de v et de V coïncident aux infiniment petits d'ordre

$$h + 1$$

près. On dit que v et V ont alors un contact d'ordre h.

Imaginons que la droite r décrive la variété v ; la variété V occupera successivement différentes positions. Associons à la droite r un repère mobile

$$a_1 a_2 a_3 a_4$$

et à la droite correspondante R le repère mobile

$$A_1A_2A_3A_4.$$

Quand r se déplace la droite R correspondante reste en coïncidence avec r. Supposons pour simplifier que pour les différentes positions de r les points

$$A_1, A_2, A_3, A_4$$

sont choisis en coïncidence respective avec les points

$$a_1, a_2, a_3, a_4.$$

Enfin à chaque droite R de la variété fixe V nous associerons le repère

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$$

qui s'obtient en imprimant à la variété V dans laquelle est fixée le repère

$$A_1A_2A_3A_4$$

un déplacement projectif inverse de celui qui amènerait cette variété mobile de la position V à la position de contact V.

Attribuons à deux droites correspondantes les mêmes valeurs numériques des paramètres fondamentaux, ce qui revient à supposer que ces paramètres sont choisis de manière que la correspondance de droites soit réalisée par les équations

$$\mathrm{P}_1 = p_1, \ldots, \mathrm{P}_n = p_n.$$

La variété V est telle que pour l'une quelconque de ses positions les complexes spéciaux

$$R + \Delta R \qquad \text{et} \qquad r + \Delta r$$

coïncident aux infiniment petits d'ordre

$$h + 1$$

près. On peut donc poser d'une manière approchée :

$$(R + \Delta R) = k(r + \Delta r).$$

On aura donc :

$$\left(R + dR + \ldots + \frac{1}{h!}\, d^h R\right) = \left(k_0 + k_1 + \ldots + k_h\right)\left(r + dr + \ldots + \frac{1}{h!}\, d^h r\right) +$$

termes d'ordre

$$h + 1$$

au moins, si l'on désigne par k_0 une quantité finie et par k_α une expression homogène et de degré α par rapport aux différentielles

$$dp_1, \ldots, dp_n.$$

Cela exige :

$$R = k_0 r\,;\; dR = k_0 dr + k_1 r\,;\ldots;$$

$$\frac{1}{h\,!}\, d^h R = \frac{k_0}{h\,!}\, d^h r + \frac{k_1}{(h-1)!}\, d^{h-1} r + \ldots + k_{h-1} dr + k_h r.$$

D'ailleurs

$$A_1 \quad \text{et} \quad A_2$$

coïncident avec

$$a_1 \quad \text{et} \quad a_2\,;$$

par suite

$$R = [A_1 A_2] \qquad \text{et} \qquad r = [a_1 a_2]$$

sont égaux ; cela montre que

$$k_0 = 1.$$

Les conditions analytiques d'applicabilité se traduisent donc par

$$h-1$$

équations :

$$dR = dr + k_1 r\,;\; \frac{1}{2\,!}\, d^2 R = \frac{1}{2!}\, r^2 d + k_1 dr + k_2 r\,;\ldots;\; \frac{1}{h\,!}\, d^h R = \frac{1}{h\,!}\, d^h r + \ldots..$$

Insistons sur ce point que ces conditions peuvent être réalisées avec un choix quelconque du repère mobile de la variété v.

On dit qu'une variété est déformable quand on peut la considérer comme faisant partie d'une suite continue de variétés sur chacune desquelles elle est applicable.

Système de Pfaff imposé par une applicabilité du premier ordre. — L'applicabilité du premier ordre exige

$$dR = dr + k_1 r.$$

Posons

$da_i = \omega_{i1} a_1 + \ldots.$ puis $dA_i = \Omega_{i1}\Omega_1 + \ldots$ et $\Omega_{ij} = \Omega_{ij} - \omega_i$.

Puisque le repère

$$A_1\; A_2\; A_3\; A_4$$

se déduit du repère

$$\mathrm{A}_1\; \mathrm{A}_2\; \mathrm{A}_3\; \mathrm{A}_4$$

par un déplacement projectif, on aura :

$$dA_i = \Omega_{i1} A_1 + \dots$$

et par suite

$$dA_i = \Omega_{i1} a_1 + \dots$$

puisque les points A_i coïncident avec les points a_i.

Des deux équations

$$dr = (\omega_{11} + \omega_{22}) r + \omega_2 r_1 + \omega_3 r_2 + \omega_4 r'_1 - \omega_1 r'_2 \qquad \text{et} \qquad dR = (\Omega_{11} + \Omega_{22}) r + \dots,$$

il résulte que l'on n'a

$$dR = dr + k_1 r$$

que si les expressions

$$\overline{\Omega}_1, \ \overline{\Omega}_2, \ \overline{\Omega}_3, \ \overline{\Omega}_4$$

sont nulles.

Nous voyons que si deux variétés sont applicables du premier ordre les 32 variables qui sont nécessaires pour déterminer la position dans l'espace des deux repères

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \qquad \text{et} \qquad A_1 A_2 A_3 A_4$$

satisfont au système de Pfaff

$$\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}_3 = \overline{\Omega}_4 = 0\,;$$

dans ce système il y a d'ailleurs n variables indépendantes : ce sont

$$p_1, \dots p_n.$$

Quand deux variétés sont applicables d'un ordre quelconqne, elles sont manifestement applicables du premier ordre, On peut supposer que la particularisation fondamentale a été imposée au premier repère (a).

Les équations

$$\overline{\Omega}_i = 0$$

montrent que le deuxième repère (A) devra alors subir aussi la particularisation fondamentale et que deux variétés applicables doivent appartenir à la même catégorie ; on le voit en supposant successivement que la première variété appartient à l'une des huit catégories.

Système de Pfaff imposé par une applicabilité du deuxième ordre. — L'applicabilité du deuxième ordre impose la nouvelle condition

$$d^2R = d^2r + 2k_1 dr + k_2 r$$

avec

$$k_1 = \overline{\Omega_{11} + \Omega_{22}}.$$

Il est facile de calculer $d'r$ en différentiant la valeur de dr.

On en déduit d^2R par changement de notations.

La nouvelle condition imposée n'est satisfaite que si l'on a :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \omega_1\overline{\Omega_{33}-\Omega_{11}}+\omega_4\overline{\Omega_{43}}-\omega_2\overline{\Omega_{12}}=0\,;\ \omega_2\overline{\Omega_{33}-\Omega_{22}}+\omega_3\overline{\Omega_{43}}-\omega_1\overline{\Omega_{21}}=0 \\ \omega_3\overline{\Omega_{44}-\Omega_{22}}+\omega_2\overline{\Omega_{34}}-\omega_4\overline{\Omega_{21}}=0\,;\ \omega_4\overline{\Omega_{44}-\Omega_{11}}+\omega_1\overline{\Omega_{34}}-\omega_3\overline{\Omega_{12}}=0. \end{array}\right.$$

Remarquons que les équations $\overline{\Omega_{13}}=\overline{\Omega_{23}}=\overline{\Omega_{24}}=\overline{\Omega_{14}}=0$ qui sont satisfaites (puisque l'applicabilité du deuxième ordre exige celle du premier ordre) entraînent :

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \overline{\Omega_{13}}'=[\omega_1\overline{\Omega_{33}-\Omega_{11}}]+[\omega_4\overline{\Omega_{43}}]-[\omega_2\overline{\Omega_{12}}]=0\,;\ \overline{\Omega_{23}}'=[\omega_2\overline{\Omega_{33}-\Omega_{22}}]+[\omega_3\overline{\Omega_{43}}]-[\omega_1\overline{\Omega_{21}}]=0 \\ \overline{\Omega_{24}}'=[\omega_3\overline{\Omega_{44}-\Omega_{22}}]+[\omega_2\overline{\Omega_{34}}]-[\omega_4\overline{\Omega_{21}}]=0\,;\ \overline{\Omega_{14}}'=[\omega_4\overline{\Omega_{44}-\Omega_{11}}]+[\omega_1\overline{\Omega_{34}}]-[\omega_3\overline{\Omega_{12}}]=0. \end{array}\right.$$

Donnons aux deux repères (a) et (A) la particularisation fondamentale.

Désignons par $\omega_1 \ldots \omega_n$ les expressions fondamentales.

Remarquons que les équations (2) se déduisent, au point de vue de l'écriture, des équations (1) par l'introduction de crochets dans les premiers membres; cela transforme d'ailleurs les produits ordinaires en produits extérieurs.

En tenant compte des relations simples auxquelles satisfont les expressions ω_i on peut mettre l'une quelconque des équations (1) sous la forme :

$$\omega_1\overline{\Pi}_1+\ldots+\omega_n\overline{\Pi}_n=0\,;$$

l'équation (2) correspondante se mettra alors sous la forme :

$$[\omega_1\overline{\Pi}_1]+\ldots+[\omega_n\overline{\Pi}_n]=0.$$

Cette dernière équation montre que les expressions de Pfaff

$$\overline{\Pi}_1, \ldots \overline{\Pi}_n$$

s'expriment linéairement au moyen de

$$\omega_1, \ldots \omega_n$$

et que le tableau des coefficients est symétrique.

On peut donc poser

$$\overline{\Pi}\alpha = h\alpha_1\omega_1+\ldots+h\alpha_n\omega_n(\alpha=1,\ldots,n)$$

avec les conditions

$$h\beta\alpha = h\alpha\beta.$$

On a donc :

$$\omega_1\overline{\Pi}_1+\ldots+\omega_n\overline{\Pi}_n = h_{11}\omega_1^2+2h_{12}\omega_1\omega_2+h_{22}\omega_2^2+\ldots$$

Mais le premier membre est nul. Le second membre est une forme quadratique en

$$\omega_1, \ldots \omega_n,$$

qui doit être nulle quelles que soient les expressions indépendantes

$$\omega_1, \ldots \omega_n.$$

Il en résulte que tous les coefficients h sont nuls. Les expressions de Pfaff

$$\overline{\Pi}_1, \ldots \overline{\Pi}_n$$

sont donc nulles.

Aux quatre équations (1) correspondent $4n$ expressions Π ; mais certaines de ces expressions sont nulles d'elles-mêmes. D'ailleurs il ne peut pas y avoir plus de sept expressions $\overline{\Pi}$ indépendantes, car toutes les expressions $\overline{\Pi}$ s'annulent manifestement en même temps que les sept expressions

$$\overline{\Omega_{12}}, \overline{\Omega_{21}}, \overline{\Omega_{34}}, \overline{\Omega_{43}}, \overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}}, \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}}, \overline{\Omega_{44} - \Omega_{11}}.$$

En résumé les 32 variables définies au paragraphe précédent doivent satisfaire au système de Pfaff formé par les quatre équations $\overline{\Omega_i} = 0$ auxquelles on adjoint celles des équations $\overline{\Pi} = 0$ qui sont indépendantes.

Système de Pfaff imposé par une applicabilité d'ordre quelconque. — On pourait trouver le système de Pfaff imposé aux 32 variables par une application des 3^e^, 4^e^, 5^e^ ordres en continuant à employer la méthode que nous venons d'utiliser pour l'application du premier et du second ordres, mais il n'y a lieu de faire le calcul que pour les variétés pour lesquelles l'application du 2^e^ ordre est possible. Il suffit de s'occuper des surfaces réglées et des congruences car nous verrons bientôt que l'applicabilité du 1^er^ ordre de deux espaces projectifs réglés est impossible et que l'applicabilité du 2^e^ ordre de deux complexes est impossible.

Dire qu'une applicabilité est impossible signifie d'ailleurs qu'elle ne peut être réalisée que par deux variétés égales. Il est en effet évident que deux variétés égales sont applicables d'un ordre aussi élevé que l'on veut ; il en résulte d'ailleurs que le système de Pfaff imposé par une applicabilité n'est jamais impossible car il admet au moins la solution banale fournie par des variétés qui ne diffèrent l'une de l'autre que par un déplacement projectif.

Mais il est plus rapide d'appliquer la règle énoncée par M. Cartan dans sa communication au Congrès de Strasbourg sur le problème général de la déformation. Considérons le système de Pfaff imposé par une applicabilité d'ordre h.

Si l'on suppose que le premier repère est complètement choisi les équations quadratiques extérieures entraînées par les équations de ce système peuvent se mettre sous la forme

$$[\overline{\theta}_1 dp_1] + [\overline{\theta}_2 dp_2] + \ldots + [\overline{\theta}_n dp_n] = 0.$$

On obtient les nouvelles équations de Pfaff imposées par une applicabilité d'ordre $h+1$ en annulant les expressions $\overline{\theta}$.

Il revient évidemment au même de mettre les équations quadratiques sous la forme

$$[\omega_1 \overline{\Pi}_1] + [\omega_2 \overline{\Pi}_2] + \ldots [\omega_n \overline{\Pi}_n]$$

et d'annuler toutes les expressions Π : cela résulte immédiatement de ce fait que les expressions fondamentales ω_i sont des formes de Pfaff indépendantes qui renferment les différentielles $dp_1, \ldots, dp_n$ car on en déduit que les expressions $\overline{\Pi}$ s'expriment linéairement au moyen des expressions $\overline{\theta}$. La règle qui consiste à annuler les expressions $\overline{\Pi}$ est celle que nous avons trouvée pour l'applicabilité de deuxième ordre. Nous l'appliquerons pour les applicabilités d'ordre supérieur.

L'applicabilité du premier ordre est impossible pour deux espaces projectifs. — L'applicabilité du premier ordre de deux espaces projectifs impose le système de Pfaff à quatre variables indépendantes :

$$(1) \qquad \overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega_3} = \overline{\Omega_4} = 0.$$

En formant les équations quadratiques extérieures entraînées par le système (1), on constate que le système (1) n'est pas en involution.

Mais il est facile de voir que l'on peut profiter de l'arbitraire laissé aux repères en prolongeant le système (1) par les nouvelles équations :

$$(2) \quad \overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{21}} = \overline{\Omega_{34}} = \overline{\Omega_{43}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\Omega_{11}} = \overline{\Omega_{22}} = \overline{\Omega_{33}} = \overline{\Omega_{44}}\ ;$$

ces équations de Pfaff entraînent des équations quadratiques qui ne peuvent être satisfaites que si les expressions

$$\overline{\Omega_{31}},\ \overline{\Omega_{32}},\ \overline{\Omega_{41}} \text{ et } \overline{\Omega_{42}}$$

sont nulles. En tenant compte de l'équation

$$\overline{\Omega_{11}} + \overline{\Omega_{22}} + \overline{\Omega_{33}} + \overline{\Omega_{44}} = 0$$

qui est une conséquence de

$$[a_1 a_2 a_3 a_4] = [A_1 A_2 A_3 A_4] = 1,$$

on voit que toutes les expressions $\overline{\Omega_{ij}}$ sont nulles. Cela impose aux deux espaces de ne différer que par un déplacement projectif.

L'application projective de deux espaces réglés est donc impossible. Ce résultat surprend quand on sait que deux espaces ponctuels possèdent toujours la propriété d'être applicables du premier ordre (on le démontre en remarquant que les conditions d'applicabilité de l'espace engendré par A_1 sur l'espace engendré par a_1 sont :

$$\overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = 0$$

et que ces trois équations de Pfaff forment un système en involution avec

$$s^3 = 3).$$

L'applicabilité du deuxième ordre est impossible pour deux complexes. — Considérons d'abord deux complexes spéciaux. La particularisation fondamentale des repères donne :

$$\omega_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Omega_4 = 0.$$

Les conditions d'applicabilité du premier ordre sont

$$\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega_3} = \overline{\Omega_4} = 0\,;$$

la dernière condition est d'ailleurs remplie d'elle-même. On trouve immédiatement que les nouvelles conditions imposées par l'applicabilité du deuxième ordre sont

$$\overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{21}} = \overline{\Omega_{34}} = \overline{\Omega_{43}} = 0 \qquad \overline{\Omega_{11}} = \overline{\Omega_{22}} = \overline{\Omega_{33}} = \overline{\Omega_{44}}.$$

Ces équations de Pfaff entraînent des équations quadratiques qui ne peuvent être satisfaites que si l'on a :

$$\overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{32}} = \overline{\Omega_{41}} = \overline{\Omega_{42}} = 0.$$

On doit donc pouvoir annuler toutes les expressions $\overline{\Omega_{ij}}$, ce qui impose aux deux complexes spéciaux d'être égaux.

Considérons maintenant deux complexes non spéciaux. La particularisation fondamentale donne

$$\omega_2 + \omega_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Omega_2 + \Omega_4 = 0.$$

Les conditions d'applicabilité du premier ordre sont

$$\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega_3} = \overline{\Omega_4} = 0.$$

On trouve immédiatement que les nouvelles conditions imposées par l'applicabilité du deuxième ordre sont les mêmes que dans le cas précédent. Les nouvelles équations quadratiques qui sont entraînées ne peuvent être satisfaites que si l'on a :

$$\overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{32}} = \overline{\Omega_{41}} = \overline{\Omega_{42}} = 0.$$

On doit donc pouvoir annuler toutes les expressions $\overline{\Omega_{ij}}$, ce qui impose aux deux complexes non spéciaux d'être égaux.

CHAPITRE IV

Propriétés projectives des surfaces réglées non développables

Première particularisation spéciale du repère associé à une surface D. — Supposons qu'une droite r engendre une surface réglée non développable D.

La particularisation fondamentale du repère consistera à s'imposer

$$\omega_3 - \omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = 0.$$

Ces trois équations de Pfaff entraînent trois équations quadratiques qui conduisent à poser :

$$\omega_{34} - \omega_{12} = g_1\omega_1, \qquad \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = g_2\omega_1, \qquad \omega_{43} - \omega_{21} = g_3\omega_1.$$

Dans un déplacement δ, les coefficients g subissent des transformations linéaires non homogènes, qui permettent d'annuler ces trois coefficients. Par suite, la première particularisation spéciale du repère est commune à toutes les surfaces D ; elle consiste à s'imposer :

$$\omega_{34} - \omega_{12} = \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = \omega_{43} - \omega_{21} = 0.$$

Ces trois équations entraînent trois équations quadratiques qui conduisent à poser :

$$\omega_{32} = \alpha_1\omega_1, \qquad \omega_{31} - \omega_{42} = \alpha_2\omega_1, \qquad \omega_{41} = \alpha_3\omega_1.$$

Dans un déplacement δ, les coefficients α subissent la transformation linéaire et homogène qui laisse invariante l'équation :

$$(\alpha_2{}^2 + 4\alpha_1\alpha_3 = 0.$$

Classification des surfaces réglées non développables D en 3 genres D_0, D_1, D_2 — La transformation subie par les coefficients α nous oblige à distinguer trois genres de surfaces. En général la quantité

$$(\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_3$$

n'est pas nulle; nous dirons qu'il s'agit de surfaces D_0. Pour certaines surfaces D_1 on a

$$(\alpha_2^2) + 4\alpha_1\alpha_3 = 0$$

mais α_1, α_2 et α_3 ne sont pas nuls en même temps.

Enfin certaines surfaces très particulières D_2 sont telles que l'on a

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Les surfaces D_2 sont égales entre elles; ce sont des quadriques non développables. — Pour toute surface D_2 on a :

$$\omega_{14} = \omega_{23} = \omega_{24} - \omega_{13} = \omega_{34} - \omega_{12} = \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = \omega_{43} - \omega_{21} = \omega_{32} = 0$$
$$\omega_{31} - \omega_{42} = \omega_{41} = 0.$$

Ces neuf équations de Pfaff n'entraînent aucune équation quadratique; elles suffisent pour caractériser projectivement les surfaces D_2; celles-ci sont donc égales entre elles; de plus toute surface D_2 admet un groupe projectif de déplacements.

On peut achever la détermination du repère en adoptant :

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \omega_{31} = \omega_{22} - \omega_{11} = \omega_{33} - \omega_{11} = 0\ ;$$

on a alors

$$\omega'_1 = 0,$$

ce qui permet de choisir p_1 de façon à avoir

$$\omega_1 = dp_1.$$

En tenant compte de l'équation

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0,$$

on obtient pour équations de Frenet :

$$da_1 = a_3dp_1, \quad da_2 = a_4dp_1, \quad da_3 = 0, \quad da_4 = 0\ ;$$

on obtient en intégrant

$$a_3 = c_3, \qquad a_4 = c_4, \qquad a_1 = c_1 + p_1c_3, \qquad a_2 = c_2 + p_1c_4.$$

Un point quelconque m situé sur la surface a pour symbole :

$$m = a_1 + qa_2 = (c_1 + p_1c_3) + q(c_2 + p_1c_4)$$

Si nous déplaçons le repère $c_1c_2c_3c_4$ de façon qu'il devienne simple, les coordonnées homogènes cartésiennes de m seront :

$$t = 1, \qquad z = q, \qquad y = p_1, \qquad x_1 = p_1 q.$$

On aura donc réduit l'équation d'une surface D_2 à

$$yz - tx = 0.$$

Les surfaces D_2 sont donc des quadriques non développables.

On pourrait d'ailleurs le déduire de cette remarque que la droite mobile r est assujettie à appartenir à un réseau fixe de complexes linéaires :

$$\gamma = \rho_1 r_1 + \rho'_1 r'_1 + \rho_2(r_2 + r'_2).$$

Deuxième particularisation spéciale du repère associé à une surface D_0. — Dans le cas d'une surface D_0 la transformation subie par les trois coefficients α permet de supposer que l'on a :

$$\alpha_1 = \alpha_2 - 1 = \alpha_3 = 0.$$

Les équations nouvelles de Pfaff :

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{42} - \omega_1 = \omega_{41} = 0$$

entraînent trois équations quadratiques qui conduisent à poser

$$\omega_{12} = h_1\omega_1, \qquad \omega_{33} - \omega_{11} = h_2\omega_1, \qquad \omega_{21} = h_3\omega_1.$$

Dans un déplacement δ on a :

$$\delta h_1 = -h_1(e_{22} - e_{11}), \qquad \delta h_2 = 2e_{31}, \qquad \delta h_3 = h_3(e_{22} - e_{11}).$$

chacune des équations

$$h_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad h_3 = 0$$

on a donc une signification invariante. De plus le produit h_1h_3 est invariant.

On peut d'ailleurs toujours supposer que h_2 est nul. Nous pouvons donc imaginer une deuxième particularisation spéciale du repère, commune à toutes les surfaces D_0; cette particularisation consistera à s'imposer quatre équations de Pfaff :

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{42} - \omega_1 = \omega_{41} = \omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

L'équation

$$\omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

entraîne

$$[\omega_1\omega_{31}] = 0.$$

Posons donc

$$\omega_{31} = \lambda\omega_1.$$

Nous aurons

$$\delta\lambda = 0\ ;$$

λ est donc un invariant fondamental.

Nous aurons de plus

$$\omega'_1 = 0$$

et par suite

$$\delta\omega_1 = 0.$$

Nous pouvons donc poser

$$\omega_1 = dp.$$

Cette équation définit, à une constante additive près, un paramètre intrinsèque p de position de la droite r sur la surface D_0.

Deuxième particularisation spéciale du repère associé à une surface D_1. — Dans le cas d'une surface D_1 on peut supposer que l'on a :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 - 1 = 0.$$

Les équations nouvelles de Pfaff :

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{42} = \omega_{41} - \omega_1 = 0$$

entraînent deux équations quadratiques qui conduisent à poser :

$$\omega_{12} = h_1\omega_1 \qquad \text{et} \qquad 2\omega_{11} - \omega_{33} - \omega_{44} = h_0\omega_1.$$

Nous aurons

$$\delta h_1 = h_1(e_{33} - e_{22}) \qquad \text{et} \qquad \delta h_0 = h_0(e_{33} - e_{11}) - 2h_1e_{21} - 4e_{31}.$$

L'équation $h_1 = 0$ a donc une signification invariante, mais on peut toujours supposer que h_0 est nul. Nous obtiendrons donc une deuxième particularisation spéciale du repère, commune à toutes les surfaces D_1, en nous imposant quatre équations nouvelles de Pfaff :

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{42} = \omega_{41} - \omega_1 = 2\omega_{11} - \omega_{33} - \omega_{44} = 0.$$

Classification des surfaces réglées D_0 en 3 familles D'_0, D''_0 et D'''_0. — La transformation subie par les coefficients h_1 et h_3 nous oblige à distinguer trois familles de surfaces réglées D_0. En général h_1 et h_3 ne sont pas nuls ; nous dirons qu'il s'agit de surfaces D'_0. Pour certaines surfaces D'_0 l'un des coefficients h_1 ou h_3 est nul ; nous supposerons par exemple que h_3 est nul ; si on avait

$$h_1 = 0,$$

on se ramènerait au cas

$$h_3 = 0$$

en changeant

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \qquad \text{en} \qquad a_2 a_1 a_4 a_3.$$

Enfin certaines surfaces très particulières D''_0 sont telles que l'on a :

$$h_1 = h_3 = 0.$$

Classification des surfaces réglées D_1 *en 2 familles* D'_1 *et* D''_1. — La transformation subie par le coefficient h_1 nous oblige à distinguer deux familles de surfaces réglées D_1. En général h_1 n'est pas nul; nous dirons qu'il s'agit de surfaces D'_1. Au contraire pour certaines surfaces D''_1 le coefficient h_1 est nul.

Equations de Frenet d'une surface réglée non développable, dans le cas général. — En général, une surface D appartient à la famille D'_0. On peut achever la détermination du repère en s'imposant

$$h_1 = 1.$$

Le coefficient h_3 devient alors un invariant que nous désignerons par λ_1. On est ainsi conduit aux équations de Frenet :

$$da_1 = dp\,(-\lambda_0 a_1 + a_2 + a_3)\,;\; da_2 = dp\,(\lambda_1 a_1 + \lambda_0 a_2 + a_4)\,;$$
$$da_3 = dp\,(\lambda a_1 - \lambda_0 a_3 + a_4)\,;\; da_4 = dp\,(\lambda a_2 - a_2 + \lambda_1 a_3 + \lambda_0 a_4).$$

Les trois invariants fondamentaux λ_0, λ et λ_1 sont des fonctions arbitraires du paramètre intrinsèque p.

Equations de Frenet d'une surface D''_0. — On trouve aisément les équations de Frenet d'une surface D''_0. Ce sont les équations de Frenet d'une surface D'_0 dans lesquelles on annule l'invariant λ_1. On voit immédiatement sur ces équations que toute surface D'_0 admet la droite fixe r'_1 pour directrice.

Equations de Frenet d'une surface D'''_0. — Après la deuxième particularisation spéciale du repère on a dans le cas d'une surface D''_0 :

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{21} = 0, \qquad \omega_{31} = \lambda\omega_1.$$

Ces trois équations de Pfaff n'entraînent que :

$$[d\lambda\, \omega_1] = 0$$

D'ailleurs si l'on pose

$$\omega_1 = dp,$$

cette équation quadratique montre que λ ne dépend que de p bien que le repère ne soit pas encore complètement fixé. On ne peut pas achever d'une manière projective la détermination du repère. Un calcul assez long montre que l'on peut profiter de l'arbitraire laissé au repère en annulant l'expression

$$\omega_{22} - \omega_{11}.$$

On a alors pour équations de Frenet :

$$da_1 = a_3 dp, \qquad da_2 = a_4 dp, \qquad da_3 = \lambda a_1 dp, \qquad da_4 = (\lambda - 1)\, a_2 dp.$$

On voit immédiatement sur ces équations que toute surface D'''_0 admet les deux droites fixes r_1 et r'_1 pour directrices.

Dans les équations de Frenet d'une surface D'''_0 n'intervient qu'un seul invariant fondamental. D'ailleurs les surfaces D'''_0 ne dépendent manifestement que d'une fonction arbitraire d'un argument.

Détermination projective du repère associé à une surface D'_1. — Imposons la deuxième particularisation spéciale au repère associé à une surface D_1. Nous pourrons achever la détermination projective du repère en imposant d'abord l'équation de Pfaff

$$\omega_{12} = \omega_1$$

puis enfin l'équation

$$\omega_{33} - \omega_{22} = 0.$$

Nous poserons alors :

$$\omega_{21} = \lambda_1 \omega_{13} \qquad \text{et} \qquad \omega_{31} = \lambda \omega_{13}.$$

Si nous choisissons le paramètre de position de manière à avoir

$$\omega_{13} = dp,$$

nous obtiendrons les équations de Frenet sous la forme :

$$da_1 = (a_2 + a_3)dp\,;\; da_2 = (\lambda_1 a_1 + a_4)\, dp\,;\; da_3 = (\lambda a_1 + a_4)dp\,;$$
$$= da_4 = (a_1 + \lambda a_2 + \lambda_1 a_3)dp.$$

Equations de Frenet d'une surface D''_1 proprement dite. — Imposons la deuxième particularisation spéciale au repère d'une surface D''_1. Nous aurons

$$\omega_{12} = 0.$$

Nous serons conduits à poser

$$\omega_{31} = f\omega_1.$$

L'équation

$$f = 0$$

a d'ailleurs une signification invariante. Si f n'est pas nul nous dirons qu'il s'agit d'une surface D_1 proprement dite. On peut alors supposer que

$$f = 1.$$

On est ainsi conduit à poser

$$\omega_{33} - \omega_{11} = 2g\omega_1,$$

g étant un invariant. Le repère n'est pas complètement déterminé puisque e_2 n'est pas nul. Comme on a

$$\omega_1' = 0,$$

on peut poser

$$\omega_1 = dp\ ;$$

comme

$$[dg\omega_1] = 0,$$

g ne dépend que de p. On ne peut achever la détermination du repère d'une manière projective, mais on peut profiter de l'arbitraire laissé au repère en annulant ω_{21}.

Nous obtenons alors pour équations de Frenet :

$$da_1=(ga_1+a_3)dp;\ da_2=(a_1-3ga_2+a_4)dp;\ da_3=(a_1+3ga_3)dp,\ da_4=(a_1+a_2-ga_4)dp.$$

Équations de Frenet des « surfaces de Cayley ». — Dans la détermination du repère d'une surface D_1'' nous avons écarté le cas pour lequel f serait nul. Il est facile de voir qu'il s'agit de « surfaces de Cayley » égales entre elles.

Un choix convenable du repère donne pour équations de Frenet .

$$da_1 = a_3dp, \qquad da_2 = a_4dp, \qquad da_3 = 0, \qquad da_4 = a_1dp.$$

En intégrant on trouve immédiatement :

$$a_3 = c_3\ ; \qquad a_1 = c_1 + c_3p\ ; \qquad a_4 = c_4 + c_1p + \frac{1}{2}c_3p^2\ ; \qquad a_2 = c_2 + c_4p + c_1\frac{p^2}{2} + c_3\frac{p^3}{6}.$$

En appliquant le repère $c_1c_2c_3c_4$ sur un repère simple on obtient pour équation de la surface en coordonnées cartésiennes homogènes :

$$x\left(tz - \frac{x^2}{3}\right) = yz^2.$$

Remarquons que le point a_1 décrit la directrice $[c_1c_3]$, que le point a_3 reste fixe, que le point a_4 décrit une conique et que le point a_2 décrit une cubique gauche.

Les surfaces très spéciales D'''_0 *et* D''_1 *dans l'espace ordinaire.* — Considérons une surface D'''_0 dans l'espace ordinaire. Nous pouvons par une transformation homographique amener les deux directrices rectilignes en coïncidence avec l'axe Oy et avec la droite de l'infini du plan yOz. Les équations cartésiennes de la droite génératrice sout alors

$$x = az, \qquad y = \varphi(a).$$

Les surfaces D'''_0 sont des conoïdes à plan directeur.

Considérons maintenant une surface D''_1. Elle appartient à une congruence linéaire spéciale. Par une transformation homographique on peut se ramener au cas pour lequel cette congruence est définie par les deux équations

$$b = o \qquad \text{et} \qquad a = q.$$

Les équations cartésiennes de la droite génératrice sont alors

$$x = az + \psi(a), \qquad y = a.$$

Propriétés projectives communes à toutes les surfaces D. Complexes linéaires osculateurs. — Un grand nombre de propriétés d'une surface réglée D résultent de l'étude du contact de D avec un complexe linéaire γ. On dit qu'une variété V admet un contact d'ordre h avec un complexe linéaire γ lorsqu'une droite r de V appartient à γ et que les droites

$$r + \Delta r$$

qui sont infiniment voisines de r et situées sur V appartiennent à γ aux infiniment petits d'ordre $h + 1$ près ; on a donc

$$\gamma|r = \gamma|dr = \ldots = \gamma|d^{h-1}r = \gamma|d^h r = 0.$$

Considérons une surface D engendrée par la droite mobile r. Imposons au repère la particularisation spéciale. Posons :

$$\gamma = \rho r + \rho_1 r_1 + \rho_2 r_2 + \rho'_1 r'_1 + \rho'_2 r'_2 ;$$

les complexes linéaires γ contiennent r. Les complexes linéaires tangents γ seront des complexes qui satisferont à

$$\gamma|dr = 0 ;$$

mais

$$dr = (\omega_{11} + \omega_{22})r + \omega_1(r_2 - r'_2) ;$$

on aura donc

$$\rho_2 = \rho'_2.$$

D'où

$$\gamma' = \rho r + \rho_1 r_1 + \rho'_1 r'_1 + \rho_2 (r_2 + r'_2).$$

Nous obtenons ainsi ∞^3 complexes linéaires tangents ; ce sont les complexes linéaires qui contiennent la droite r et sont en involution avec un complexe linéaire non spécial

$$r_2 - r'_2.$$

Parmi les complexes γ' il en existe ∞^2 qui sont spéciaux ; ces complexes γ'_1 satisfont à

$$\rho_1 \rho'_1 + \rho_2^2 = 0 ;$$

on les obtient en adoptant

$$\rho_1 = 1, \ \rho_2 = K, \ \rho'_1 = - K^2.$$

On peut donc poser :

$$\gamma'_1 = \rho r + [(a_1 + K a_2)(a_3 + K a_4)].$$

Donnons à K une valeur fixe. Les directrices des γ'_1 correspondants passent par le point

$$(a_1 + K a_2)$$

et sont situées dans le plan Π défini par les trois points

$$a_1 \ a_2 \qquad \text{et} \qquad a_3 + K a_4.$$

Mais le plan Π est tangent à la surface au point

$$(a_1 + K a_2).$$

Les directrices des complexes spéciaux tangents sont donc tangentes à la surface.

Les complexes linéaires osculateurs γ'' sont des complexes γ' tels que l'on ait

$$\gamma' / d^2 r = 0$$

c'est-à-dire

$$2\rho(\omega_1)^2 = 0.$$

On a donc

$$\rho = 0$$

et par suite

$$\gamma'' = \rho r_1 + \rho'_1 r'_1 + \rho_2 (r_2 + r'_2).$$

Nous obtenons donc un réseau de complexes linéaires osculateurs. Les complexes γ''_1 qui sont les complexes spéciaux du réseau sont fournis par

$$\gamma''_1 = [(a_1 + K a_2)(a_3 + K a_4)].$$

Les droites s communes à tous les complexes γ'' doivent satisfaire à

$$\gamma''/s = 0,$$

on peut donc poser

$$s = \sigma r + \sigma' r' + \sigma_2(r_2 - r'_2).$$

On aura

$$\gamma''_1/s = 0.$$

Cela prouve ce qui est d'ailleurs un résultat classique que les droites communes du réseau rencontrent toutes les directrices des complexes spéciaux du réseau.

Les directrices des complexes γ''_1 rencontrent les deux droites r et r' et elles tracent sur ces droites des divisions homographiques. Elles coïncident donc avec les génératrices d'un système d'une quadrique non développable φ. Il est facile de voir que les complexes osculateurs spéciaux ont pour directrices les deuxièmes directions asymptotiques (la droite r fournit une direction asymptotique). Il suffit de le démontrer pour le complexe $[a_1 a_3]$
qui correspond à

$$K = 0$$

car le point a_1 occupe une position arbitraire sur

$$[a_1 a_2].$$

Or on a :

$$[d^2 a_1\ a_1\ a_2\ a_3] = \omega_1(\omega_{12} + \omega_{34}).$$

D'ailleurs le plan tangent en a_1 est

$$[a_1 a_2 a_3].$$

Le point $d^2 a_1$ sera donc situé dans le plan tangent si l'on a

$$\omega_{12} + \omega_{34} = 0$$

c'est-à-dire si

$$2\omega_{12} = 0\ ;$$

le point a_1 devra donc être choisi de façon qu'il se déplace dans la direction asymptotique.

La surface D et la quadrique Q se raccordent tout le long de r, puisque la deuxième direction asymptotique est située dans les plans tangents à D et à φ. Il est en outre facile de démontrer que la quadrique φ est osculatrice à D. On a en effet :

$$\gamma''_1/(r + dr + \frac{1}{2} d^2r) = 0.$$

Par suite au 3ᵉ ordre près, les droites

$$r + \Delta r$$

rencontrent les directrices des complexes γ''_1 et par suite sont situées sur la quadrique φ. Les deuxièmes directions asymptotiques sont donc situées sur une quadrique φ non développable et les deux surfaces réglées D et φ admettent un contact du 2ᵉ ordre.

Caractères géométriques distinctifs des surfaces D des différentes catégories $D_0 D_1 D_2$. Points principaux. — Les complexes linéaires surosculateurs γ''' sont des complexes γ'' qui satisfont à la condition

$$\gamma''' \, d^3r = 0$$

c'est-à-dire à l'équation

$$2\omega_1{}^3(\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1 - \rho'_1\alpha_3) = 0.$$

Les complexes γ'''_1 qui sont les complexes γ''' spéciaux s'obtiennent donc en adoptant

$$\rho_1 = 1, \ \rho_2 = K, \ \rho'_1 = -K^2$$

si K est racine de l'équation du deuxième degré :

$$\alpha_3 K^2 + \alpha_2 K - \alpha_1 = 0.$$

Il y a donc lieu de distinguer trois cas. Si

$$\alpha_1, \ \alpha_2 \quad \text{et} \quad \alpha_3$$

sont nuls le coefficient K est arbitraire et il existe une infinité de complexes γ'''_1 ; si le discriminant

$$\alpha_2{}^2 + 4\alpha_1\alpha_3$$

n'est pas nul on aura deux complexes γ'''_1 distincts ; enfin si le discriminant est nul on aura deux complexes γ'''_1 confondus. Nous sommes ainsi amenés à distinguer les trois catégories de surfaces D d'après le nombre des complexes γ'''_1 distincts.

Dans le cas d'une quadrique D_2 les complexes γ'''_1 sont les mêmes que les complexes γ''_1 ; leurs directrices sont les deuxièmes directions asymptotiques ; ces directrices sont donc situées sur la surface D_2 sur laquelle elles constituent les génératrices d'un système.

Dans le cas d'une surface D_0 ou D_1 on a :

$$\gamma_1 (r + dr + \frac{1}{2} d^2r + \frac{1}{6} d^3r) = 0.$$

On a donc au quatrième ordre près

$$\gamma'''|r + \Delta r = 0.$$

La directrice d'un complexe spécial surosculateur rencontre donc au quatrième ordre près les droites infiniment voisines de r. Par suite en général les génératrices infiniment voisines d'une génératrice r s'appuient au quatrième ordre près, sur deux droites singulières qui rencontrent r ; si les deux droites singulières se confondent on a une surface D_1 ; enfin s'il y a plus de deux droites singulières on a une quadrique D_2. Nous appellerons pour abréger « point principal » le point de rencontre de la génératrice r avec une directrice de complexe linéaire surosculateur et « direction principale » la deuxième direction asymptotique en un point principal.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une surface D_0. Donnons au repère la deuxième particularisation spéciale. Les complexes surosculateurs γ''' satisfont alors à la condition

$$\rho_2 = 0.$$

On a donc :

$$\gamma''' = \rho_1 r_1 + \rho'_1 r'_1.$$

On obtient donc un faisceau de complexes γ'''. Les droites communes du faisceau forment la congruence linéaire non spéciale dont les directrices sont

$$r_1 \qquad \text{et} \qquad r'_1 ;$$

on peut dire que cette congruence est « surosculatrice ».

Les deux complexes γ'''_1 ont pour directrices

$$[a_1 a_3] \qquad \text{et} \qquad [a_2 a_4].$$

Par suite, les particularisations du repère sont telles que les points a_1 et a_2 coïncident avec les deux points principaux et que les droites

$$[a_1 a_3] \qquad \text{et} \qquad [a_2 a_4]$$

soient les directions asymptotiques en

$$a_1 \qquad \text{et} \qquad a_2.$$

On peut même ajouter que la droite

$$[aa_4]$$

est située sur la quadrique surosculatrice φ et qu'elle est une génératrice du système qui contient la droite

$$[a_1 a_2].$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une surface D_1. Donnons au repère la deuxième particularisation spéciale. Les complexes surosculateurs satisfont alors à :

$$\rho'_1 = 0.$$

On a donc

$$\gamma''' = \rho_1 r_1 + \rho_2(r_2 + r'_2).$$

Nous obtenons encore un faisceau de complexes γ''', mais ce faisceau est singulier ; les droites communes forment en effet la congruence linéaire spéciale qui admet pour directrice la droite r_1 et dont les droites sont situées dans le complexe

$$(r_2 + r'_2)$$

contenant la droite r_1. La congruence des droites communes peut être appelée « congruence surosculatrice ». Le complexe γ'''_1 a pour directrice

$$r_1 = [a_1 a_3].$$

Par suite le point a_1 coïncide avec le point principal double.

Les surfaces qui admettent un groupe projectif de déplacements. — Les surfaces dont les invariants fondamentaux sont des constantes admettent un déplacement à un paramètre :

$$\bar{p} = p + c^{te}.$$

Les autres surfaces qui admettent un groupe projectif sont celles pour lesquelles on ne peut achever projectivement la détermination du repère. Si les équations de Pfaff imposées par les particularisations projectives possibles ne renferment pas d'invariants fondamentaux toutes les surfaces considérées sont égales entre elles. Les seules surfaces réglées non développables qui ont une telle propriété sont les quadriques et les surfaces de Cayley.

Enfin si les équations de Pfaff imposées renferment des invariants fondamentaux, toutes les surfaces qui ont mêmes invariants fondamentaux pour les génératrices de même paramètre p_1 sont égales entre elles. Les seules surfaces réglées non développables qui ont une telle propriété sont les surfaces D'''_0 et D'_1 qui sont caractérisées par ce fait que les génératrices appartiennent à une congruence linéaire.

Caractères distinctifs des surfaces D_0 des différentes familles D'_0, D'_0, D'''_0. Complexes linéaires hypertangents. — Nous avons vu qu'une surface D_0 admettait pour complexes surosculateurs :

$$\gamma = \rho_1 r_1 + \rho'_1 r'_1.$$

Les complexes γ qui admettront un contact du quatrième ordre seront des complexes γ qui satisferont à la condition

$$\gamma'''|d^4 r = 0$$

ou encore à la condition

$$d\gamma'''|d^3 r = 0.$$

On aura donc

$$\rho_1 \omega_{12} - \rho'_1 \omega_{21} = 0$$

pour un complexe « hypertangent » γ . Par suite

$$\rho_1 h_1 - \rho'_1 h_3 = 0.$$

Les complexes hypertangents spéciaux doivent satisfaire à la condition

$$\rho_1 \rho'_1 = 0.$$

Ils n existent donc que si h_1 ou h_3 est nul ou si h_1 et h_3 sont nuls tous deux ; dans ce dernier cas tous les complexes surosculateurs sont en même temps hypertangents.

Nous sommes amenés à distinguer les trois familles de surfaces D_0 d'après le nombre de complexes spéciaux hypertangents : les surfaces D'_0 n'en admettent pas, les surfaces D''_0 en admettent un et les surfaces D_0 en admettent deux.

D'ailleurs il est facile de voir que les complexes spéciaux hypertangents ont leur directrice situées sur la surface ; par suite le contact de ces complexes est aussi élevé que l'on veut.

Supposons en effet que h_1 soit nul ; on aura alors :

$$dr_1 = (\omega_{11} + \omega_{33}) r_1$$

la droite r_1 sera donc fixe et elle sera située sur la surface puisqu'elle passe par a_1. De même si h_3 est nul, la droite r'_1 est située sur la surface.

Donc les surfaces D'_0 n'ont aucune directrice rectiligne ; les surfaces D''_0 ont une directrice rectiligne et les surfaces D_0 ont deux directrices rectilignes.

Le point de rencontre d'une directrice rectiligne avec une génératrice est évidemment un point principal.

Dans le cas d'une surface D_0 tous les complexes γ sont hypertangents. Mais il est facile de voir qu'ils ont un contact d'ordre aussi élevé que l'on veut ; ils contiennent en effet la surface D''_0 puisque les génératrices de D''_1 rencontrent les droites fixes

$$r_1 \qquad \text{et} \qquad r'_1.$$

Dans le cas d'une surface D''_0 pour laquelle h_3 est nul les complexes γ'' doivent satisfaire à

$$\rho_1 = 0\,;$$

le seul complexe hypertangent est donc le complexe spécial r'_1 ; mais le contact de ce complexe est aussi élevé que l'on veut puisque la droite fixe r'_1 est située sur D''_0.

Les surfaces D'_0 sont donc les seules surfaces D_0 qui admettent un complexe linéaire hypertangent ne contenant pas les génératrices de la surface ; ce complexe n'est d'ailleurs jamais spécial.

Le complexe hypertangent appartient d'ailleurs au faisceau de complexes qui admet pour directrices les deux directions principales.

Caractères distinctifs des surfaces D_1 des différentes familles D'_1 et D''_1. Complexe spécial hypertangent d'une surface D'_1. — Nous avons vu qu'une surface D_1 admettait pour complexes surosculateurs les complexes du faisceau

$$\gamma = \rho_1 r_1 + \rho_2(r_2 + r'_2).$$

Les complexes γ' qui admettent un contact du quatrième ordre sont des complexes γ'' qui satisfont à la condition

$$\gamma'''|d^4 r = 0.$$

On aura donc

$$\rho_2\omega_{12} = 0$$

ou

$$\rho_2 h_1 = 0$$

pour tout complexe γ''''.

Nous sommes amenés à distinguer les deux familles de surfaces D_1. Pour les surfaces particulières D''_1, h_1 est nul et par suite tous les complexes surosculateurs sont hypertangents. Mais il est facile de voir que ces complexes surosculateurs ont un contact d'ordre aussi élevé que l'on veut car ils contiennent la surface D''_1. La congruence linéaire surosculatrice commune à tous les complexes γ est en effet fixe car on a :

$$dr_1 = (\omega_{11} + \omega_{33})r_1 \qquad \text{et} \qquad d(r_2 + r'_2) = (\omega_{11} + \omega_{44})(r_2 + r'_2) + 2h_2\omega_1 r_1.$$

La directrice fixe r_1 est d'ailleurs située sur la surface puisque r_1 contient a_1. D'ailleurs la génératrice r est située dans les γ'''. Les génératrices d'une surface D''_1 appartiennent donc à une même congruence linéaire spéciale.

Dans le cas général des surfaces D'_1, h_1 n'est pas nul et par suite ρ_2 est nul pour un complexe γ''''. Le seul complexe hypertangent est donc le complexe spécial qui admet la droite r_1 pour directrice.

Le contact du complexe r_1 avec D'_1 n'est jamais d'ailleurs d'ordre supérieur à 4 car

$$r_1 | d^5 r = 4 h_1^2 \omega_1^5 \qquad \text{et} \qquad h_1$$

n'est pas nul.

Surfaces D'_0 dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire. — Nous avons vu qu'une surface D'_0 admettait un complexe hypertangent :

$$\gamma'''' = \rho_1 r_1 + \rho'_1 r'_1.$$

On peut adopter :

$$\rho_1 = h_3 \qquad \text{et} \qquad \rho'_1 = h_1.$$

Achevons la détermination projective du repère. Nous aurons alors

$$\gamma'''' = \lambda_1 r_1 + r'_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma''''}{dp} = \left(\frac{dp_1}{dp} - 2\lambda_0\lambda_1\right) r_1 + 2\lambda_0 r'_1.$$

On a

$$\gamma'''' | d^4 r = 0 ;$$

si le complexe γ'''' a un contact d'ordre supérieur à 4 on devra avoir

$$\gamma'''' | d^5 r = 0$$

ou, ce qui revient au même

$$d\gamma'''' | d^4 r = 0.$$

Le complexe $d\gamma''''$ doit être conjugué avec le complexe $d^4 r$. Mais γ'''' est le seul complexe conjugué avec $d^4 r$; il en résulte que les deux complexes

$$d\gamma'''' \qquad \text{et} \qquad \gamma''''$$

doivent coïncider géométriquement ; cela exige la fixité du complexe γ''''. D'ailleurs la droite r est située dans γ''''. Donc si le contact de γ'''' atteint l'ordre 5 il atteint en même temps un ordre aussi élevé que l'on veut puisqu'alors γ'''' contient la surface D'_0.

Lorsque le complexe γ'''' est fixe on a des surfaces D'_0 particulières dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire non spécial. Pour qu'il en soit ainsi il faut que les formes

$$\gamma''' \qquad \text{et} \qquad d\gamma''''$$

soient proportionnelles ce qui impose la relation :

$$d\lambda_1 = 4\lambda_0\lambda_1 dp.$$

Un exemple simple de surface dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire non spécial est fourni pour le cas particulier :

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_1 = 1{,}16\lambda = 7\,;$$

il est facile d'intégrer les équations de Frenet correspondantes.

Courbes principales. — Nous appellerons courbe principale, une courbe dont tous les points sont principaux. Si une surface admet une directrice rectiligne, cette directrice est une courbe principale. En général une surface admet deux courbes principales. Sur une surface D_1 les deux courbes principales sont confondues. Un calcul simple montre qu'une courbe principale ne peut coïncider avec une ligne asymptotique que si elle est rectiligne. Dans le cas d'une surface D'_0 la courbe principale décrite par a_2 est une droite. La courbe principale décrite par a_1 est plane lorsque λ et λ_0 satisfont à l'équation :

$$d\lambda_0 = (\lambda_0^2 + 1 - \lambda)dp.$$

Dans le cas d'une surface D'_1 la courbe principale double est plane si l'on a

$$\lambda = \lambda_1.$$

Propriété caractéristique des points principaux. — Le calcul montre qu'une courbe passant par un point principal et admettant en ce point la direction principale pour tangente d'inflexion a quatre points confondus communs avec le plan tangent au point principal.

Cette propriété permet de trouver assez rapidement les points principaux d'une surface dont on connaît les équations finies par rapport à un repère fixe

$$c_1c_2c_3c_4\,;$$

on commence par appliquer le repère fixe sur un repère simple et l'on est ramené ainsi à un problème de l'espace ordinaire. Soient

$$a, \ b, \ p, \ q$$

les 4 paramètres habituels qui servent à fixer la position d'une droite dans l'espace ordinaire.

Désignons par

$$a', \ a'', \ a''', \ b'\ldots$$

les dérivées successives de a, b... par rapport au paramètre de position sur la surface considérée. Posons pour abréger

$$u = a'q' - b'p' \qquad \text{et} \qquad u' = a'q'' + a''q' - b'p'' - b''p'.$$

Dans ces conditions les côtes des deux points principaux sont données en fonction du paramètre de position sur la surface par l'équation du second degré en z :

$$3u'[(a'z + p)(b''z + q') - (b'z + q')(a''z + p'')]$$
$$- 2u[(a'z + p')(bz + q) - (b'z + q')(az + p)] = 0.$$

Le calcul conduit au procédé géométrique suivant de détermination des points principaux. On considère l'intersection (C) de la quadrique surosculatrice φ avec le plan de côte nulle. Quand on fait varier la génératrice r on obtient une famille à un paramètre de coniques (C). Deux coniques infiniment voisines ont deux points communs confondus avec le point d'intersection du plan de côte nulle avec la génératrice r. Les deux autres points communs sont les pieds des droites principales. Il est facile de tracer ces droites principales puisqu'elles sont des génératrices de φ.

CHAPITRE V

Déformation des Surfaces Réglées non développables

Deux surfaces réglées non développables sont toujours applicables du premier ordre. — Donnons-nous deux surfaces réglées non développables. Nous réaliserons une application du premier ordre si nous pouvons choisir les deux repères de manière à avoir .

$$\overline{\Omega}_{13} = \overline{\Omega}_{14} = \overline{\Omega}_{23} = \overline{\Omega}_{24} = 0.$$

Imposons au premier repère la particularisation fondamentale. Nous aurons

$$\omega_{14} = \omega_{23} = \omega_{24} - \omega_{13} = 0.$$

Le deuxième repère doit donc subir la même particularisation. Pour satisfaire à toutes les conditions imposées par l'application du premier ordre, il suffit alors de choisir les repères et la correspondance de droites de manière que l'on ait :

$$\Omega_{13} = \omega_{13}.$$

Cette équation entraîne l'équation quadratique

$$[\omega_1 \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}}] = 0.$$

Cette équation quadratique n'est pas une conséquence des restrictions imposées aux deux repères. L'équation

$$\Omega_{13} = \omega_{13}$$

admet donc une solution qui dépend d'une fonction arbitraire d'un argument (elle entraîne en effet un système involutif avec

$$s_1 = 1).$$

Mais la correspondance de droites la plus générale ne dépend que d'une fonction arbitraire d'un argument. Il en résulte que l'applicabilité du premier ordre est toujours possible et qu'on peut la réaliser avec une correspondance arbitraire entre les droites.

Deux surfaces réglées non développables sont toujours applicables du deuxième ordre. — Donnons la particularisation fondamentale aux repères associés à deux surfaces non développables. Les équations de Pfaff imposées par l'application du premier ordre entraînent :

$$[\omega_1 \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}}] = [\omega_1 \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}}] = [\omega_1 \overline{\Omega_{34} - \Omega_{12}}] = [\omega_1 \overline{\Omega_{43} - \Omega_{21}}] = 0.$$

L'application du deuxième ordre exige donc quatre nouvelles équations de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}} = \overline{\Omega_{34} - \Omega_{12}} = \overline{\Omega_{43} - \Omega_{21}} = 0.$$

Puisque nous pouvons choisir à notre guise le premier repère, imposons-lui la première particularisation spéciale.

Nous aurons alors :

$$\omega_{34} - \omega_{12} = \omega_{43} - \omega_{21} = \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 0$$

et ces équations entraîneront :

$$[\omega_1 \omega_{32}] = [\omega_1(\omega_{31} - \omega_{42})] = [\omega_1 \omega_{41}] = 0.$$

Pour réaliser une application du deuxième ordre, nous devons imposer au deuxième repère la première particularisation spéciale. Il suffira ensuite de satisfaire au système de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{13}} = 0 \qquad \overline{\omega_{33} - \omega_{11}} = 0.$$

Ce système qui fournit la correspondance de droites n'entraîne qu'une équation quadratique :

$$[\omega_1 \overline{\Omega_{31}}] = 0 ;$$

cette équation quadratique n'est d'ailleurs pas une conséquence des restrictions imposées aux repères. Le système de Pfaff formé par les deux équations

$$\overline{\Omega_{13}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = 0$$

est donc en involution et sa solution générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. On en déduit que deux surfaces D sont toujours applicables du deuxième ordre avec une correspondance arbitraire.

Généralités sur l'applicabilité du troisième ordre pour deux surfaces D. — On voit immédiatement que l'applicabilité du troisième ordre pour deux surfaces D exige quatre équations nouvelles de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{32}} = \overline{\Omega_{41}} = \overline{\Omega_{42}} = 0.$$

Donnons au premier repère la première particularisation spéciale ; cette même particularisation est imposée au deuxième repère. Puisque l'on doit avoir

$$\Omega_{32} = \omega_{32}, \quad \Omega_{31} - \Omega_{42} = \omega_{31} - \omega_{42} \qquad \text{et} \qquad \Omega_{41} = \omega_{41},$$

deux surfaces D applicables du troisième ordre doivent appartenir au même genre D_0, D_1 ou D_2. Rappelons que deux surfaces de genre D_2 sont égales et par suite peuvent être considérées comme étant applicables d'un ordre quelconque.

Le système de Pfaff qui fournit les surfaces applicables du troisième ordre sur une surface donnée entraîne les équations quadratiques suivantes :

$$[\omega_1\theta_1] = [\omega_2\theta_2] = [\omega_3\theta_3] = 0,$$

si l'on pose

$$\theta_1 = \alpha_1\overline{\Omega_{21}} - \alpha_3\overline{\Omega_{12}}, \qquad \theta_2 = \alpha_1\overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}} + \alpha_2\overline{\Omega_{12}}, \qquad \theta_3 = \alpha_3\overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}} + \alpha_2\overline{\Omega_{21}}.$$

Excluons le cas pour lequel les trois coefficients α seraient nuls ; la surface donnée serait alors une quadrique D_2. Nous avons l'identité :

$$\alpha_3\theta_2 - \alpha_1\theta_3 + \alpha_2\theta_1 = 0.$$

Par suite que la quantité

$$(\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_3$$

soit nulle ou non, on a toujours deux expressions θ indépendantes ; le système quadratique :

$$[\omega_1\theta_1] = [\omega_1\theta_2] = [\omega_1\theta_3] = 0$$

est donc involutif avec

$$s_1 = 2.$$

La solution générale du système de Pfaff qui fournit les surfaces applicables du troisième ordre sur une surface D_0 ou D_1 dépend donc de deux fonctions arbitraires d'un argument. Puisque les surfaces réglées les plus générales dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument, deux surfaces réglées ne sont pas en général applicables du troisième ordre.

Applicabilité du 3e ordre sur une surface D_0. — Les surfaces D_0 dépendent de 3 fonctions arbitraires d'un argument. Deux surfaces D_0 ne sont donc pas en général applicables du 3e ordre.

Donnons-nous une surface D_0 et cherchons les surfaces applicables du 3e ordre. Imposons au 1er repère la 2e particularisation spéciale. Le système de

Pfaff exigé par l'applicabilité montre que le 2ᵉ repère devra subir aussi la 2ᵉ particularisation. Il ne reste alors qu'à satisfaire aux 2 équations

$$\Omega_{13} = \omega_{13} \qquad \text{et} \qquad \Omega_{31} = \omega_{31}\,;$$

cela exige que la valeur numérique de l'invariant fondamental λ relatif à la droite r soit égale à la valeur numérique de l'invariant fondamental Ω relatif à la droite R qui correspond à la droite r. Si nous posons

$$\omega_{13} = dp \qquad \text{et} \qquad \Omega_{13} = d\mathrm{P}$$

et si nous remarquons que $\delta\omega_{13}$ et $\delta\Omega_{13}$ sont nuls, nous obtiendrons :

$$d\mathrm{P} = dp.$$

La correspondance de droites qui réalise l'applicabilité d'un ordre égal ou supérieur à 3, associe donc des droites dont les paramètres intrinsèques ne diffèrent que par une constante. On peut d'ailleurs annuler cette constante par un choix convenable des paramètres intrinsèques, puisque ceux-ci ne sont définis qu'à une constante additive près.

Il est facile de déduire de ce qui précède qu'une surface D_0 est toujours déformable du 3ᵉ ordre. Supposons par exemple que la surface donnée soit une surface D'_0, ce qui est le cas général. Imposons au repère associé à cette surface toutes les particularisations projectives ; soient $\lambda(p)$, $\lambda_0(p)$ et $\lambda_1(p)$ les trois invariants fondamentaux. Considérons le système d'équations différentielles :

$$da_1 = [-\mathrm{F}(p)a_1 + a_2 + a_3]dp\,; \qquad da_2 = [\Phi(p)a_1 + \mathrm{F}(p)a_2 + a_3]\,dp\,;$$

$$da_3 = [\lambda(p)a_1 - \mathrm{F}(p)a_3 + a_4]dp\,; \qquad da_4 = [\lambda(p)a_2 - a_2 + \Phi(p)a_3 + \mathrm{F}(p)a_4]\,dp.$$

A chaque détermination des deux fonctions $\mathrm{F}(p)$ et $\Phi(p)$, ces équations différentielles font correspondre une surface dont les trois invariants fondamentaux sont $\lambda(p)$, $\mathrm{F}(p)$ et $\Phi(p)$. Donnons-nous alors une suite continue de déterminations des fonctions $\mathrm{F}(p)$ et $\Phi(p)$: à partir de la détermination $\lambda_0(p)$ et $\lambda_1(p)$; nous obtiendrons ainsi une suite continue de surfaces ; la première surface de la suite sera la surface donnée tandis que les autres surfaces de la suite satisferont aux conditions d'applicabilité sur la surface donnée. Celle-ci est donc déformable.

Donnons-nous deux surfaces D_0 et cherchons à reconnaître si elles sont applicables du troisième ordre. Donnons aux repères la deuxième particularisation spéciale. Nous aurons

$$\omega_{31} = \lambda\omega_{13} \qquad \text{et} \qquad \Omega_{31} = \Lambda\omega_{13}.$$

Un premier cas particulier serait celui pour lequel λ serait identiquement nul ; il faudrait alors que Λ soit nul ; l'identité

$$\lambda = 0$$

a d'ailleurs une signification géométrique simple : quand elle est satisfaite la droite r' reste fixe et par suite les différentes quadriques surosculatrices contiennent une droite fixe. Un autre cas particulier serait celui pour lequel λ aurait une valeur constante; il faudrait alors que Λ ait la même valeur constante. Dans le cas général λ aura une valeur variable; il faudra alors que Λ ait aussi une valeur variable. D'ailleurs on a

$$[d\lambda\ \omega_{13}] = 0 \qquad \text{et} \qquad [d\Lambda\Omega_{13}] = 0\,;$$

si nous posons par suite

$$d\lambda = \lambda^1\omega_{13} \qquad \text{et} \qquad d\Lambda = \Lambda^1\Omega_{13},$$

la condition que l'on ait

$$\Lambda = \lambda$$

pour chacun des couples de droites correspondantes impose que l'on ait aussi

$$\Lambda^1 = \lambda^1.$$

D'ailleurs l'invariant λ et l'invariant dérivé λ^1 ne dépendent plus que d'un paramètre (intrinsèque ou non) ; ils sont donc unis par une relation de la forme

$$\lambda^1 = \Psi(\lambda).$$

Pour que la 2e surface donnée soit applicable il faudra que l'on ait

$$\Lambda^1 = \Psi(\Lambda).$$

Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante. Supposons en effet qu'elle soit remplie et imposons la correspondance définie par

$$\lambda(p_1) = \Lambda(P_1)\,;$$

nous aurons

$$d\lambda = d\Lambda$$

et par suite, puisque

$$\lambda^1(p_1) = \Lambda^1(P_1)\,;$$

la condition

$$\Omega_{13} = \omega_{13}$$

sera réalisée.

Remarquons enfin que s'il s'agit de deux surfaces D''_0, l'égalité des uniques invariants fondamentaux λ et Λ entraîne l'égalité des deux surfaces, comme on le vérifie aisément.

Généralités sur l'applicabilité du 4ᵉ ordre pour deux surfaces D_0. — Considérons deux surfaces D_0 et supposons que le 1er repère a subi la 2e particularisation spéciale. L'applicabilité du 3e ordre exige, comme nous l'avons vu, quatre équations nouvelles de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{32}} = \overline{\Omega_{41}} = \overline{\Omega_{42}} = 0.$$

Ces équations de Pfaff entraînent deux équations quadratiques :

$$[\omega_1 \overline{\Omega_{12}}] = 0 \qquad \text{et} \qquad [\omega_1 \overline{\Omega_{21}}] = 0.$$

L'applicabilité du 4e ordre exigera donc deux équations nouvelles de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{12}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\Omega_{21}} = 0.$$

On en déduit immédiatement que deux surfaces D_0 qui n'appartiennent pas à la même famille D'_0, D''_0 ou D'''_0, ne sont jamais applicables du 4e ordre.

D'ailleurs deux surfaces D'''_0 applicables du 4e ordre sont *a fortiori* applicables du 3e ordre et par suite, en vertu d'une remarque faite précédemment, sont égales. Aussi ne nous occuperons-nous que de l'applicabilité du 4e ordre de deux surfaces D'_0 ou de deux surfaces D''_0

Applicabilité du quatrième ordre pour deux surfaces D'_0. — Donnons-nous une surface D'_0 et imposons à son repère toutes les particularisations projectives. Le repère associé à une autre surface D'_0 applicable du quatrième ordre sur la surface donnée devra subir aussi toutes les particularisations projectives. Il suffira alors, pour satisfaire à toutes les conditions exigées par l'applicabilité, de réaliser les trois équations de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = 0.$$

Il est donc nécessaire que les invariants λ et λ_1 aient les mêmes valeurs numériques que les invariants Λ et Λ_1, pour chacun des couples de droites correspondantes (c'est-à-dire pour des valeurs égales des paramètres intrinsèques p et P convenablement choisis).

Il est facile de déduire de ce qui précède qu'une surface D'_0 est toujours déformable du quatrième ordre.

Applicabilité du 4e ordre pour deux surfaces D''_0. — Donnons-nous une surface D''_0 et imposons à son repère toutes les particularisations projectives. Nous aurons donc

$$\omega_{12} = \omega_1 \qquad \text{et} \qquad \omega_{21} = 0.$$

Le repère associé à une surface D''_0 applicable du 4e ordre sur la surface donnée devra subir aussi toutes les particularisations projectives. On aura alors

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \qquad \text{et} \qquad \Omega_{21} = 0.$$

Pour réaliser une application du 4^e ordre, il suffit donc de réaliser une application du 3^e ordre car les deux équations de Pfaff

$$\overline{\Omega_{12}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\Omega_{21}} = 0$$

seront satisfaites par un choix convenable des repères,

Deux surfaces D_0 applicables du 5^e ordre sont égales. — Nous avons déjà remarqué que 2 surfaces D'''_0 applicables du 3^e ordre étaient égales.

Considérons deux surfaces D'_0. L'applicabilité du 4^e ordre impose les équations nouvelles de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{12}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\Omega_{21}} = 0.$$

Ces deux équations entraînent

$$[\omega_1 \overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}}] = 0.$$

L'applicabilité du 5^e ordre exige donc

$$\overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}} = 0.$$

On peut d'ailleurs supposer que l'expression

$$\overline{\Omega_{11} + \Omega_{22} + \Omega_{33} + \Omega_{44}}$$

est nulle. Il en résulte que l'applicabilité du 5^e ordre entraîne les seize équations

$$\overline{\Omega_{ij}} = 0\,;$$

deux surfaces D'_0 applicables sont donc égales.

Le même raisonnement s'applique au cas de deux surfaces D''_0.

Deux surfaces D_1 sont toujours applicables du 3^e ordre. — Donnons nous deux surfaces D_1 et cherchons à réaliser l'application du troisième ordre. Imposons au premier repère la première particularisation spéciale puis une deuxième particularisation spéciale partielle telle que l'on ait

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{42} = \omega_{41} - \omega_{13} = 0.$$

Les mêmes particularisations seront imposées au deuxième repère. Par suite du choix des repères, on aura alors satisfait aux équations quadratiques :

$$[\omega_1\ \omega_{12}] = 0 \qquad [\omega_1(2\omega_{11} - \omega_{33} - \omega_{44})] \qquad \text{et} \qquad [\omega_1\Omega_{12}] = 0$$

$$[\omega_1(2\Omega_{11} - \Omega_{33} - \Omega_{44})] = 0.$$

Pour satisfaire à toutes les conditions imposées par l'applicabilité du troisième ordre, il suffira de choisir la correspondance de droites et les repères de manière à avoir :

$$\overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{31}} = 0.$$

Ces trois équations de Pfaff constituent donc un système qui fournit la correspondance de droites. Ce système est d'ailleurs complètement intégrale : il entraîne l'équation quadratique

$$[\omega_1 \overline{\Omega_{12}}] = 0$$

mais cette équation est identiquement satisfaite puisque l'on a

$$[\omega_1 \omega_{12}] = 0 \qquad \text{et} \qquad [\omega_1 \Omega_{12}] = 0.$$

Il est donc toujours possible de trouver une correspondance de droites qui réalise l'application du troisième ordre. De plus le choix des repères et de la correspondance dépend de trois constantes arbitraires.

Il est intéressant de remarquer que l'on peut d'une infinité de manières choisir le repère associé à une surface D_1 de manière à satisfaire aux conditions imposées par la particularisation fondamentale et par la première particularisation spéciale ainsi qu'aux conditions :

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{42} = \omega_{41} - \omega_1 = \omega_{33} - \omega_{11} = \omega_{31} = 0.$$

On peut même ensuite modifier le repère de manière à changer l'expression ω_{13} en l'expression

$$\overline{\omega_{13}} = K\omega_{13},$$

K étant une constante arbitraire. (Je ne donnerai pas ma démonstration car elle est un peu longue. Pour obtenir un repère convenable, je suis conduit à chercher une solution particulière d'une équation de Ricatti et à effectuer une quadrature).

Choisissons alors les repères associés à deux surfaces D′ données, de la manière qui vient d'être expliquée. Pour réaliser une application du troisième ordre, il suffira d'adopter une correspondance de droites qui satisfera à la condition

$$\Omega_{13} = \omega_{13}$$

ou, ce qui revient au même, à la condition

$$\Omega_{13} = K\omega_{13}$$

(il suffit dans ce dernier cas de modifier ensuite le premier repère).

Adoptons des paramètres de position tels que l'on ait

$$\omega_{13} = dp \qquad \text{et} \qquad \Omega_{13} = dP$$

On réalisera une correspondance donnant l'application du troisième ordre en s'imposant l'une quelconque des relations :

$$P = kp + h.$$

k et h étant des constantes arbitraires.

Généralités sur l'applicabilité du quatrième ordre pour deux surfaces D_1. — Considérons deux surfaces D_1. Donnons au premier repère les deux premières particularisations spéciales. Nous avons vu que l'applicabilité du troisième ordre imposait quatre équations nouvelles de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{32}} = \overline{\Omega_{41}} = \overline{\Omega_{42}} = 0 :$$

ces équations entraînent deux équations quadratiques :

$$[\omega_1\overline{\Omega_{12}}] = 0 \qquad \text{et} \qquad [\omega_1\overline{\Omega_{22}} - \overline{\Omega_{11}}] = 0.$$

L'applicabilité du quatrième ordre exige donc deux équations nouvelles de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{12}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}} = 0.$$

Les deux premières particularisations spéciales sont imposées au deuxième repère. Posons alors

$$\omega_{12} = h_1\omega_1 \qquad \text{et} \qquad \Omega_{12} = H_1\Omega_1$$

Si h_1 est nul, H_1 devra être nul. Il en résulte qu'une surface D'_1 n'est jamais applicable du quatrième ordre sur une surface D''_1.

Nous allons étudier l'applicabilité de deux surfaces D'_1 puis nous démontrerons que deux surfaces D''_1 applicables sont égales.

Applicabilité du 4^e ordre pour deux surfaces D'_1. — Considérons deux surfaces D'_1. Imposons à la 1^{re} surface un repère qui a subi toutes les particularisations projectives. Si l'on veut appliquer la 2^e surface sur la 1^{re}, on devra faire subir à son repère toutes les particularisations projectives. Les deux équations de Pfaff

$$\Omega_{13} = \omega_{13} \qquad \text{et} \qquad \Omega_{31} = \omega_{31}$$

sont alors les seules qu'il suffit de satisfaire pour réaliser une application du 4^e ordre. Puisque l'on a

$$\omega_{31} = \lambda''\omega_{13} \qquad \text{et} \qquad \Omega_{31} = \Lambda''\Omega_{13}$$

il en résulte que sur deux droites correspondantes les invariants λ'' et Λ'' doivent avoir même valeur numérique.

L'étude de l'applicabilité du 4^e ordre de deux surfaces D'_1 s'effectuerait d'une manière analogue à celle de l'applicabilité du 3^e ordre de deux surfaces D_0. On verrait qu'en général deux surfaces D'_1 ne sont pas applicables du 4^e ordre mais qu'une surface D'_1 est toujours déformable du 4^e ordre.

Deux surfaces D''_1 *applicables du* 4^e *ordre sont égales.* — Considérons deux surfaces D''_1, Donnons aux deux repères les deux premières particularisations spéciales. Nous aurons

$$\omega_{12} = 0, \qquad \Omega_{12} = 0, \qquad \omega_{31} = f\omega_1 \qquad \text{et} \qquad \Omega_{31} = F\Omega_1\,;$$

l'équation

$$\overline{\Omega_{31}} = 0$$

montre que si f est nul, F sera nul aussi, mais les deux surfaces considérées seront alors égales puisqu'il s'agira de deux surfaces de Cayley.

Supposons donc que les deux surfaces soient des surfaces D''_1 proprement dites. Imposons à la 1^{re} surface le repère défini au chapitre précédent. Nous aurons en particulier

$$\omega_{21} = 0.$$

Toutes les expressions $\overline{\Omega_{ij}}$ sont nulles sauf $\overline{\Omega_{21}}$. Donc Ω_{21} n'est pas nul. Mais une surface D''_1 admet un groupe projectif de déplacements qui permet d'annuler ω_{21}. La 2^e surface est donc égale à une surface pour laquelle on aurait en outre

$$\Omega_{21} = 0.$$

Avec cette nouvelle surface on aurait

$$\overline{\Omega_{21}} = 0.$$

Les deux surfaces applicables du 4^e ordre sont dont égales puisque toutes les expressions $\overline{\Omega_{ij}}$ doivent pouvoir être annulées.

Deux surfaces D_1 *applicables du* 5^e *ordre sont égales.* — Deux surfaces D_1 applicables du 5^e ordre sont *a fortiori* applicables du 4^e ordre et par suite elles sont égales. Considérons alors deux surfaces D'_1 applicables du 5^e ordre. Les équations nouvelles de Pfaff imposées par l'applicabilité du 1^{er} ordre entraînent l'équation quadratique

$$[\omega_1\overline{\Omega_{21}}] = 0.$$

L'applicabilité du 5^e ordre exige donc la nouvelle équation de Pfaff

$$\overline{\Omega_{21}} = 0.$$

Il en résulte que les deux surfaces D'_1 sont égales.

Remarques sur l'applicabilité des surfaces non développables. — De l'étude de l'applicabilité des surfaces non développables résulte un rôle important des invariants fondamentaux. Les déformations du 3e et du 4e ordre d'une surface D_0 et la déformation du 4e ordre d'une surface D'_1 respectent en effet certains invariants fondamentaux.

CHAPITRE VI

Propriétés projectives des Congruences.

Nappes focales d'une congruence V. — Les congruences V possèdent deux foyers distincts sur la génératrice r. Chacun des deux foyers engendre une « nappe focale » à une ou deux dimensions. La particularisation fondamentale du repère donne

$$\omega_2 = \omega_4 = 0\,;$$

les déplacements d_0 satisfont à

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \text{à } \omega_3 = 0.$$

On en déduit que les deux foyers sont a_1 et a_2 et que les plans focaux correspondants sont respectivement

$$[a_1 a_2 a_4] \qquad [a_1 a_2 a_3].$$

Le premier plan focal est tangent à la deuxième nappe focale tandis que le deuxième plan focal est tangent à la première nappe focale.

Classification des congruences V. Première particularisation spéciale du repère. — Considérons une congruence V. Après la particularisation fondamentale du repère nous sommes conduits à poser

$$\omega_{34} = u\omega_1 + v\omega_3,\ \omega_{12} = -v\omega_1 + w\omega_3,\ \omega_{21} = u'\omega_1 + v'\omega_3,\ \omega_{43} = -v'\omega_1 + w'\omega_3.$$

On peut toujours annuler les coefficients v et v' mais chacune des 4 équations

$$u = 0,\ u' = 0,\quad w = 0.\ w' = 0$$

a une signification invariante; d'ailleurs chacun des coefficients u, u', w, w' peut subir une dilatation; les 4 dilatations ne sont assujetties qu'à laisser invariant le rapport λ des deux quantités $u.w'$ $u'.w$. Nous devons donc distinguer différents genres de congruences V. On déduit des valeurs de da_1 et de $d[a_1 a_2 a_3]$ que la position du premier foyer dépend de 1 ou 2 paramètres suivant que w est nul ou non et que la position du deuxième plan focal dépend de 1 ou 2 paramètres suivant que u est nul ou non. Si u et w sont nuls à la fois la première nappe focale N_1 se réduit à une droite R_1

Dans le cas général aucun des coefficients u, w, u', w', ne sera nul et l'on pourra se ramener à

$$u = w = u' = 1 ;$$

on aura alors

$$\lambda = w' ;$$

les deux nappes focales seront des surfaces non développables. Les différents cas particuliers se distinguent par la nature de chacune des deux nappes focales (surface non développable, surface développable, courbe ou droite); dans chaque cas particulier la première particularisation spéciale consistera à égaler à l'unité ceux des coefficients u, w, u', w' qui ne sont pas nuls. Il n'est pas nécessaire d'étudier tous les neuf cas particuliers possibles si l'on tient compte de cette remarque qu'une transformation par polaires réciproques change une nappe focale « courbe » en une surface développable. Les congruences V les plus singulières sont celles pour lesquelles les 4 coefficients u, w, u', w' sont nuls; ce sont les congruences linéaires non spéciales.

Propriétés des Congruences V générales. — Considérons une congruence à deux surfaces focales distinctes et non développables. Imposons au repère la première particularisation spéciale. Nous aurons :

$$\omega_{14} = \omega_{23} = 0 ; \quad \omega_{34} = \omega_{21} = \omega_1 ; \quad \omega_{12} = \omega_3 ; \quad \omega_{43} = \lambda \omega_1 .$$

Portons d'abord notre attention sur les déplacements d_0 ; ils satisfont à l'une des deux équations

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_3 = 0 .$$

D'ailleurs chacune de ces deux équations est complètement intégrable; un choix convenable des paramètres p_1 et p_2 permettra d'avoir :

$$\omega_1 = g_1 dp_1 \qquad \omega_3 = g_2 dp_2 .$$

Les déplacements d_0 peuvent s'associer de manière à engendrer des développables. Grâce au choix des paramètres p les deux familles de développables sont fournies respectivement par

$$p_1 = C^{te} \qquad p_2 = C^{te};$$

aussi dirons-nous que la congruence a été « rapportée à ses développables ».

Occupons-nous des lignes asymptotiques des nappes focales N_1 et N_2. Les directions asymptotiques sont fournies respectivement par :

$$[a_1 a_2 a_3\, d^2 a_1] = 0 \qquad [a_1 a_2 a_4 d^2 a_2] = 0.$$

Les lignes asymptotiques de N_1 satisfont donc à l'une des deux équations différentielles

$$\omega_1 = i\omega_3, \qquad \omega_1 = -i\omega_3$$

tandis que les lignes asymptotiques de N_2 satisfont à

$$\omega_1 = i\lambda\omega_3 \qquad \text{ou} \qquad \omega_1 = -i\lambda\omega_3.$$

Propriétés des congruences V dont les deux nappes focales sont des surfaces développables. — Considérons une congruence à deux surfaces focales distinctes et développables. Imposons au repère la première particularisation spéciale. Nous aurons.

$$\omega_{14} = \omega_{23} = 0; \quad \omega_{34} = \omega_{43} = \sigma; \quad \omega_{12} = \omega_3; \quad \omega_{21} = \omega_1; \quad \omega'_{34} = [\omega_{32}\omega_3] = 0;$$

$$\omega'_{43} = [\omega_{41}\omega_1] = 0.$$

Les déplacements d_0 sont fournis par

$$\omega_1 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_3 = 0; \qquad \text{si } \omega_1 = 0$$

la droite r'_1 reste fixe tandis que si $\omega_3 = 0$
la droite r_1 reste fixe. Les deux nappes focales contiennent donc respectivement les droites r_1 r'_1. D'ailleurs les développables de la congruence sont aplaties sur des plans : dans un déplacement d_0 pour lequel

$$\omega_1 = 0$$

le premier plan focal reste fixe tandis que dans un déplacement d_0 pour lequel

$$\omega_3 = 0$$

le deuxième plan focal reste fixe.

On peut donc engendrer de deux manières différentes une telle congruence par les tangentes à une famille de sections planes d'une surface développable.

Choix projectif du repère associé à une congruence V générale. — Après la première particularisation spéciale du repère associé à une congruence V généiale on doit poser :

$$\omega_{33} - \omega_{11} = h\omega_1 + h_1\omega_3 \qquad \omega_{44} - \omega_{22} = k_1\omega_1 + k\omega_3.$$

Il est aisé de voir qu'on achèvera de déterminer le repère par une deuxième particularisation spéciale qui consistera à annuler h et k; on posera donc ;

$$\omega_{33} - \omega_{11} = \lambda_1\omega_3 \qquad \omega_{44} - \omega_{22} = \lambda_2\omega_1$$

en désignant par λ_1 et λ_2 deux invariants fondamentaux de la variété. D'ailleurs on aura :

$$\omega'_1 = \lambda_1[\omega_1\omega_3] \qquad \omega'_3 = -\lambda_2[\omega_1\omega_3].$$

Classification des congruences U en trois genres U_0, U_1, U_2. — Considérons une congruence à nappes focales confondues. Imposons au repère la particularisation fondamentale. Nous devons poser :

$$\omega_{14} = 0, \quad \omega_{24} = \omega_{13}, \quad \omega_{34} - \omega_{12} = \gamma\omega_1, \quad \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44}$$
$$= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2, \quad \omega_{34} + \omega_{12} = \gamma_2\omega_1 + \gamma_3\omega_2$$

Nous pourrons toujours annuler γ et γ_1 mais les valeurs de $\delta\gamma_2$ et $\delta\gamma_3$ nous obligent à distinguer trois *genres* de congruences U : 1° les congruences U_0 pour lesquelles γ_3 n'est pas nul; 2° les congruences U_1 pour lesquelles γ_3 est nul tandis que γ_2 n'est pas nul ; 3° les congruences U_2 pour lesquelles γ_2 et γ_3 sont nuls.

De la valeur de da_1 on déduit que la nappe focale double d'une congruence U_0 est une surface tandis que la nappè focale double d'une congruence U_1 ou U_2 est une courbe.

Propriétés des congruences U_0. — La première particularisation spéciale du repère associé à une congruence U_0 consistera à s'imposer les trois équations :

$$\omega_{34} = \omega_2, \qquad \omega_{12} = \omega_2, \qquad \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 0.$$

Les déplacements d_0 sont fournis par

$$\omega_1^2 = 0 ;$$

le foyer a_1 se meut alors sur une courbe qui admet r pour tangente et $[a_1a_2a_3]$ pour plan osculateur. Mais ce plan est tangent à la surface focale en a_1 ; il en résulte que dans un déplacement d_0, le point a_1 décrit une ligne asymptotique de de la surface focale.

Les congruences U_0 peuvent donc être engendrées par les tangentes aux asymptotiques d'une famille, sur une surface. Cette propriété et sa réciproque ont d'ailleurs été démontrées par M. Kœnigs.

Propriétés des congruences U_1 et U_2. — La première particularisation spéciale du repère associé à une congruence U_1 ou U_2 consistera à s'imposer respectivement l'un des deux groupes de trois équations :

$$\omega_{34} = \omega_{12} = \omega_1, \quad \theta = \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 2\omega_2 \ ; \quad \omega_{34} = \omega_{12} = 0, \quad \theta = 0.$$

Pour un déplacement d_0 on a

$$\omega_1 = 0 \ ;$$

le point a_1 et le plan $[a_1a_2a_3]$ restent fixes ; il en résulte que la droite r engendre ce plan en tournant autour du foyer a_1.

De la valeur de $d[a_1a_2a_3]$ on déduit que les congruences U_1 sont formées par les tangentes à une surface développable le long d'une courbe arbitraire (1) et que les congruences U_2 sont formées par les tangentes à une surface développable le long de son arête de rebroussement.

Les congruences U_1 dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument tandis que les congruences U_2 dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Classification des congruences en trois familles U'_2, U''_2, U'''_2. — Après la première particularisation spéciale du repère associé à une congruence U_2, on est conduit à poser :

$$\omega_{32} = h\omega_1 \qquad \omega_{42} - \omega_{31} = k\omega_1$$

L'équation

$$h = 0$$

et le système

$$h = k = 0$$

ont des significations invariantes. On doit alors distinguer trois familles de congruences U_2. En général h n'est pas nul ; la courbe focale double n'est alors pas rectiligne ; la deuxième particularisation spéciale pour ces congruences « U'_2 » consistera à se ramener à

$$h = 1, \ k = 0.$$

Pour les congruences particulières « U''_2 », h est nul mais k n'est pas nul ; la courbe focale double est alors une droite ; la deuxième particularisation spéciale pour ces congruences consistera à se ramener à

$$k = 1.$$

(1) Cette propriété est étudiée dans le livre de M. Kœnigs sur *La géométrie réglée et ses Applications.*

Pour les congruences très particulières « U'''_2 » h et k sont nuls ; la courbe focale double est encore une droite ; on ne peut achever la détermination du repère d'une manière projective ; les congruences « U'''_2 » sont donc égales entre elles ; une congruence « U'''_2 » coïncide avec la congruence linéaire et spéciale définie par les deux complexes linéaires

$$r_1 \quad \text{et} \quad r_2 + r'_2$$

car cette congruence reste fixe quand la droite r se déplace.

Etude des congruences U''_2. — Imposons au repère associé à une congruence U''_2 la deuxième particularisation spéciale. Nous sommes conduits à poser

$$\omega_{33} - \omega_{11} = g\omega_1$$

et nous pouvons ensuite annuler g ; nous devons alors poser

$$\omega_{31} = \lambda\omega_1,$$

λ étant un invariant fondamental. Nous ne pouvons d'ailleurs pas achever la détermination du repère d'une manière projective ; les congruences U''_2 pour lesquelles l'invariant λ a même valeur numérique sur deux droites de mêmes paramètres p_1, p_2 sont donc égales.

Il est facile d'étudier les congruences U'_2 dans l'espace ordinaire. On voit aisément que pour obtenir la congruence U''_2 la plus générale il suffit d'associer d'une manière arbitraire les points M de l'axe Oy avec les plans P qui passent par Oz : les droites de la congruence qui passent par M sont situées dans le plan P correspondant.

Classification des congruences de la famille U_2. — Donnons au repère associé à une congruence U'_2 la deuxième particularisation spéciale. Nous sommes alors conduits à poser

$$\omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{33} = s_1\omega_1 \qquad \omega_{21} + \omega_{43} = s_2\omega_1.$$

Nous pourrons toujours annuler s_1 mais l'équation

$$s_2 = 0$$

a une signification invariante. Nous distinguerons donc les « congruences U'_2 singulières » pour lesquelles s_2 est nul.

Considérons une congruence U'_2 singulière. Nous pouvons annuler par des particularisations projectives

$$\omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{33} \qquad 4\omega_{31} - 3\omega_2 \qquad \text{et} \qquad \omega_{21}.$$

Grâce à ce choix du repère le complexe linéaire

$$r_2 + r'_2$$

sera fixe; par suite toutes les génératrices d'une congruence U'_2 singulière appartiennent à un complexe linéaire non spécial γ ; la courbe focale double a donc ses tangentes situées dans un complexe linéaire γ.

On engendre une congruence U'_2 singulière en considérant une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire non spécial; les génératrices de la congruence seront les tangentes à la surface développable aux différents points de l'arête de rebroussement.

L'équation

$$\omega_{21} = 0$$

conduit à poser

$$\omega_{41} = s_3\omega_1 \;;$$

l'équation

$$s_3 = 0$$

a une signification invariante. Parmi les congruences U'_2 singulières nous distinguerons donc les congruences « U'_2 très singulières » pour lesquelles s_3 est nul.

Etude des congruences U'_2 très singulières. — Les particularisations projectives du repère associé à une congruence U'_2 nous ont donné des équations de Pfaff ne renfermant que des constantes numériques comme coefficients, et n'entraînant aucune équation quadratique extérieure ; il en résulte que les congruences U'_2 très singulières sont égales entre elles et qu'une congruence U'_2 admet un groupe de déplacements projectifs.

Cherchons la courbe focale double d'une congruence U'_2 très singulière. Cette courbe sera engendrée par le foyer a_1 si l'on donne à r un déplacement à un paramètre; il est simple de considérer le déplacement pour lequel

$$\omega_2 = 0.$$

On a alors à étudier une surface réglée telle que le déplacement infiniment petit du repère satisfasse à :

$$\omega_{14} = \omega_{23} = \omega_{24} - \omega_{13} = \omega_{34} = \omega_{12} = \omega_{21} = \omega_{43} = \omega_{32} - \omega_1 = \omega_{41} = \omega_{31} = \omega_{42} = 0$$
$$\omega_{11} - \omega_{33} = \omega_{22} - \omega_{44} = \omega_{33} - \omega_{22}.$$

Pour achever de déterminer le repère, il suffit de fournir la valeur de l'expression

$$\omega_{11} - \omega_{33}$$

dont le covariant bilinéaire est nul ; on peut supposer que cette expression est nulle ; en tenant compte de la relation

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0$$

on annule ainsi les quatre expressions ω_{ii} ; d'ailleurs on peut choisir le paramètre p_1 de façon que l'on ait

$$\omega_1 = dp_1$$

puisque ω'_1 est nul. Dans ces conditions on a pour le déplacement infiniment petit du repère :

$$da_1 = a_3 dp_1 ; \qquad da_2 = a_4 dp_1 ; \qquad da_3 = a_2 dp_1 ; \qquad da_4 = 0.$$

Ces équations différentielles ont pour solution :

$$a_4 = c_4, \qquad a_2 = c_4 p_1 + c_2, \qquad a_3 = \frac{1}{2} c_4 p_1^2 + c_2 p_1 + c_3,$$

$$a_1 = \frac{1}{6} c_4 p_1^3 + \frac{1}{2} c_2 p_1^2 + c_3 p_1 + c_1.$$

Si l'on amène le repère fixe $c_1 c_2 c_3 c_4$ en coïncidence avec un repère simple les coordonnées cartésiennes ordinaires du point a_1 deviennent :

$$x = \frac{1}{6} p_1^3 \qquad y = p_1 \qquad z = \frac{1}{2} p_1^2.$$

Le point a_1 décrit donc une cubique gauche unicursale. Il en résulte que toute congruence U'_2 très singulière est formée par les droites qui passent par les différents points d'une cubique gauche unicursale et sont situées dans les plans osculateurs correspondants.

CHAPITRE VII

Déformation projective des Congruences.

Généralités sur l'applicabilité du premier ordre pour deux congruences. — Deux congruences sont applicables du premier ordre si les quatre formes fondamentales de Pfaff Ω_i relatives à la deuxième congruence sont respectivement égales aux quatre formes fondamentales ω_i relatives à la première congruence. Il en résulte immédiatement que l'application du premier ordre établit une correspondance entre les développables des deux congruences puisqu'à un déplacement d_0 de la droite r est associé un déplacement D_0 de la droite R.

Donnons au premier repère la particularisation fondamentale qui intéresse précisément les formes ω_i. Nous devrons imposer en même temps la même particularisation au deuxième repère. D'ailleurs l'application exige que les deux congruences appartiennent à un même groupe fondamental.

Deux congruences ponctuelles ou deux congruences planes sont égales ; elles sont donc *a fortiori* applicables du premier ordre. Nous allons étudier l'application de deux congruences V et de deux congruences U ; nous verrons qu'elle est toujours possible comme l'a indiqué M. Cartan dans sa communication au Congrès de Strasbourg.

Deux congruences V sont toujours applicables du premier ordre. — Donnons-nous deux congruences V et cherchons à réaliser l'application. Imposons aux deux repères la particularisation fondamentale. Il suffira de réaliser les équations de Pfaff :

$$(1) \qquad \Omega_{13} = \omega_{13} \qquad \Omega_{24} = \omega_{24}.$$

Ces deux équations entraînent deux équations quadratiques extérieures :

$$(2) \qquad [\omega_1 \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}}] = [\omega_3 \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}}] = 0.$$

D'ailleurs les deux expressions auxiliaires de Pfaff qui interviennent dans le système (2) sont indépendantes malgré les conséquences de la restriction imposée au choix des repères.

Le système (2) est alors manifestement involutif avec

$$s_2 = 0, \qquad s_1 = 2.$$

Le système (1) qui fournit la correspondance et le choix des repères admet donc une solution générale qui dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument. L'application du premier ordre est donc toujours possible.

La correspondante de droites dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument ; d'ailleurs elle doit associer les développables ; si nous rapportons les deux congruences à leurs développables, nous prévoyons que nous pourrons réaliser l'application au moyen de l'une quelconque des correspondances définies par les deux relations

$$P_1 = F_1(p_1) \qquad P_2 = F_2(p_2).$$

Il est facile de montrer qu'il en est bien ainsi. Grâce à la correspondance adoptée les expressions ω_1 et ω_3 s'annulent respectivement en même temps que les expressions Ω_1 et Ω_3 ; le calcul montre que par une modification du premier repère, on peut réaliser l'égalité des expressions fondamentales de Pfaff relatives aux deux congruences.

En résumé on peut toujours réaliser l'application du premier ordre de deux congruences V au moyen d'une correspondance qui associe les développables famille à famille.

Deux congruences U sont toujours applicables du premier ordre. — Donnons-nous deux congruences U. Imposons aux deux repères la particularisation fondamentale. Pour réaliser l'application, il suffira de satisfaire aux deux équations de Pfaff :

$$(1) \qquad \Omega_{13} = \omega_{13} \qquad \Omega_{23} = \omega_{23}.$$

Ces deux équations entraînent :

$$(2) \qquad [\omega_1 \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}}] - [\omega_2 \overline{\Omega_{12}}] = [\omega_2 \overline{\Omega_{33} - \Omega_{22}}] + [\omega_1 \overline{\Omega_{43} - \Omega_{21}}] = 0.$$

D'ailleurs les équations

$$\omega_{14} = \omega_{24} - \omega_{13} = \Omega_{14} = \Omega_{24} - \Omega_{13} = 0.$$

conduisent à poser

$$2\omega_{12} = (\gamma_2 - \gamma)\omega_1 + \gamma_3\omega_2, \qquad 2\overline{\Omega_{12}} = (\Gamma_2 - \Gamma - \gamma_2 + \gamma)\omega_1 + (\Gamma_3 - \gamma_3)\omega_2.$$

Le système (2) ne contient alors que trois expressions auxiliaires indépendantes ; il est involutif avec

$$s_1 = 2, \qquad s_2 = 1.$$

Par suite, l'application de deux congruences U est toujours possible et la correspondance dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Une correspondance arbitraire dépend de deux fonctions arbitraires de deux arguments mais une correspondance d'application doit associer les développables doubles. Rapportons les deux congruences à leurs développables doubles, de telle manière que ces développables seront fournies respectivement par les équations :

$$p_1 = C^{te} \qquad P_1 = C^{te}.$$

La correspondance définie par les deux équations :

$$P_1 = \Phi_1(p_1) \qquad P_2 = \Phi_2(p_1,\ p_2)$$

associe les développables et dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. Le calcul montre qu'on peut choisir le premier repère de manière à réaliser l'application avec une telle correspondance.

Généralités sur l'applicabilité du deuxième ordre pour deux congruences V. — Deux congruences V sont applicables du premier ordre lorsque l'on a :

$$(1) \qquad \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = 0.$$

Donnons aux repères la particularisation fondamentale. Formons les équations quadratiques entraînées par le système (1) ; nous en déduisons que l'applicabilité du deuxième ordre exige six équations nouvelles de Pfaff.

$$(2) \qquad \overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{21}} = \overline{\Omega_{34}} = \overline{\Omega_{43}} = \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}} = 0.$$

On voit que si l'on impose au premier repère la première particularisation spéciale, on doit imposer en même temps cette particularisation au deuxième repère ; de plus pour être applicables du deuxième ordre, deux congruences V doivent appartenir au même genre, c'est-à-dire doivent avoir des nappes focales de même nature. Enfin à une surface focale d'une congruence correspond une surface focale d'une congruence applicable et les asymptotiques sont en correspondance car on a pour équations des asymptotiques sur une première et sur une seconde surface focale de la première congruence :

$$\omega_1.\omega_{34} + \omega_3.\omega_{12} = 0, \qquad \omega_1\omega_{21} + \omega_3\omega_{43} = 0.$$

Les congruences V sont en général indéformables du deuxième ordre. — Le système de Pfaff qui fournit tous les couples de congruences V applicables est ;

$$(1) \qquad \omega_{14} = \omega_{23} = \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = \overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{21}} = \overline{\Omega_{34}} = \overline{\Omega_{43}}$$
$$= \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}} = 0.$$

Ces équations entraînent huit équations quadratiques extérieures. Le système (1) devient un système en involution par une prolongation partielle qui consiste à poser :

$$(2) \qquad \overline{\Omega_{11} - \Omega_{22}} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3.$$

Le système de Pfaff (1) prolongé par (2) entraîne neuf équations quadratiques, dans le cas général pour lequel α et β ne sont pas nuls tous deux :

$$(3) \quad \begin{cases} [\omega_1(\overline{\Omega}_{32} + \alpha\omega_{12} + \beta\omega_{34})] = [\omega_3(\overline{\Omega}_{32} - \alpha\omega_{12} - \beta\omega_{34})] = [\omega_1\omega_{34}] - [\omega_3\omega_{12}] = 0. \\ [\omega_3(\overline{\Omega}_{41} - \alpha\omega_{43} - \beta\omega_{21})] = [\omega_1(\overline{\Omega}_{41} + \alpha\omega_{43} + \beta\omega_{21})] = [\omega_1\omega_{21}] - [\omega_3\omega_{43}] = 0. \\ [\omega_1\overline{\Omega}_{31}] = [\omega_3\overline{\Omega}_{42}] = [\omega_1(d\alpha + \alpha\omega_{11} - \alpha\omega_{33})] = [\omega_3(d\beta + \beta\omega_{22} - \beta\omega_{44})] = 0. \end{cases}$$

Le système quadratique (3) est manifestement involutif ; les trois équations de chaque ligne forment des systèmes partiels involutifs et l'on a

$$s_1 = 9, \qquad s_2 = 1.$$

Il en résulte que le système de Pfaff (1) admet une solution générale qui dépend d'une seule fonction arbitraire de deux arguments ; c'est un résultat donné par M. Cartan dans sa communication.

Si l'on remarque qu'une congruence V générale dépend de deux fonctions arbitraires de deux arguments, on voit que sur une congruence V donnée il n'existe pas en général de congruence applicable ; les congruences V sont donc en général indéformables. Un problème intéressant mais difficile consiste à rechercher les congruences V déformables.

Applicabilité du deuxième ordre pour deux congruences V *générales* — Deux congruences V générales données ne sont, en général, pas applicables. Si on impose la deuxième particularisation spéciale au premier repère, cette même particularisation est imposée par une application du deuxième ordre ; de plus les trois invariants fondamentaux λ, λ_1, λ_2, et tous les invariants dérivés doivent avoir les mêmes valeurs numériques dans les deux congruences sur deux droites correspondantes. Cette remarque permet de rechercher si deux congruences sont applicables.

En particulier si λ est égal à 1 pour la première congruence, il doit en être de même pour la deuxième congruence : sur une congruence W on ne peut donc appliquer que des congruences W.

Généralités sur l'applicabilité du deuxième ordre pour deux congruences U. — Deux congruences U sont applicables du premier ordre quand on a :

$$(1) \qquad \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = 0.$$

Donnons aux repères la particularisation fondamentale. Il est facile de trouver les nouvelles équations de Pfaff imposées par une applicabilité du deuxième ordre :

$$(2) \qquad \overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{34}} = \overline{\Omega_{43}} - \overline{\Omega_{21}} = 0, \qquad \overline{\Omega_{11}} = \overline{\Omega_{22}} = \overline{\Omega_{33}} = \overline{\Omega_{44}}.$$

On voit que si l'on impose au premier repère la première particularisation spéciale, on doit imposer en même temps cette particularisation au deuxième repère; de plus deux congruences U applicables appartiennent au même genre.

Si la première congruence a une *surface* focale, il en est de même pour la deuxième congruence applicable ; les lignes asymptotiques des surfaces focales se correspondent puisqu'elles sont fournies par :

$$\omega_{13}(\omega_{34} + \omega_{12}) = 0 \qquad \Omega_{13}(\Omega_{34} + \Omega_{12}) = 0.$$

Les congruences U *sont toujours déformables du deuxième ordre.* — Donnons nous une congruence U_1. Imposons au repère la première particularisation spéciale. Le système de Pfaff qui fournit les congruences applicables sur la congruence donnée comprend les dix équations écrites au paragraphe précédent. Ce système entraîne un système quadratique involutif avec

$$s_1 = 5, \qquad s_2 = 0.$$

Il en résulte qu'on pourra toujours déformer la congruence donnée.

Les congruences U_1 dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Deux congruences U_1 ne sont pas en général applicables.

On démontre aisément qu'une congruence U_2 est toujours déformable.

Deux congruences U_2 *sont toujours applicables du deuxième ordre.* — Donnons nous une congruence U_2. Choisissons son repère de façon que les restrictions imposées par la première particularisation spéciale soient satisfaites.

Le système de Pfaff qui fournit les congruences applicables et la manière de réaliser l'application est :

$$(1) \qquad \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = \overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{34}} = \overline{\Omega_{43} - \Omega_{21}} = 0,$$
$$\overline{\Omega_{11}} = \overline{\Omega_{22}} = \overline{\Omega_{33}} = \overline{\Omega_{44}}$$

ce système de Pfaff entraîne six équations quadratiques :

$$(2) \qquad [\omega_1\overline{\Omega_{32}}] = 2[\omega_1\overline{\Omega_{41}}] + [\omega_2\overline{\Omega_{31} + \Omega_{42}}] = 0,$$
$$[\omega_1\overline{\Omega_{31}}] = [\omega_2\overline{\Omega_{32}}] + [\omega_1\overline{\Omega_{42}}] = [\overline{\Omega_{31}}\omega_1] + [\overline{\Omega_{32}}\omega_2] = [\overline{\Omega_{42}}\omega_1]$$

ce système quadratique ne peut être satisfait que si l'on a :

$$(3) \qquad \overline{\Omega_{32}} = 0.$$

Le système de Pfaff formé par les équations (1) et (3) entraîne trois équations quadratiques :

$$(4) \qquad [\omega_1\overline{\Omega_{31}}] = [\omega_1\overline{\Omega_{42}}] = 2[\omega_1\overline{\Omega_{41}}] + [\omega_2\overline{\Omega_{31}} + \overline{\Omega_{42}}] = 0.$$

Le système (4) est involutif avec $s_1 = 3$ et $s_2 = 0$.

Par suite une congruence applicable et la correspondance dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument. Comme toute congruence applicable est du genre U_2 et que les congruences U_2 dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument, on prévoit que deux congruences U_2 sont toujours applicables en vertu d'une correspondance qui dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. Nous allons montrer qu'il en est effectivement ainsi.

Donnons-nous une congruence U_2. Imposons à son repère la première particularisation spéciale. Nous devons poser :

$$\omega_{32} = h\omega_1 \qquad \omega_{42} - \omega_{31} = h\omega_1.$$

Plaçons-nous dans le cas général pour lequel la congruence donnée est de la famille U'_2. Nous pouvons choisir le repère de manière à avoir

$$h = 1.$$

Si l'on cherche à appliquer une autre congruence, on constate qu'il faut d'abord imposer à son repère les mêmes particularisations que nous venons d'imposer au repère de la congruence donnée ; toute congruence applicable doit aussi appartenir à la famille U'_2.

Nous sommes conduits à poser :

$$\omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{33} = g\omega_1.$$

puis annuler g, ce qui oblige à poser :

$$\omega_{42} + 3\omega_{31} = 3\omega_2 + l\omega_1.$$

Le repère d'une congruence applicable devra subir les nouvelles particularisations. Considérons alors deux congruences U'_2 données. Associons à chaque droite un repère satisfaisant aux particularisations qui viennent d'être définies. Le système de Pfaff qui fournit la correspondante de droites est ;

$$(5) \qquad \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{43} - \Omega_{21}} = 0 \qquad \overline{\Omega_{11}} = \overline{\Omega_{22}}$$

car les équations (1) et (3) seront alors toutes satisfaites. Le système (5) entraîne

$$(6) \qquad 2[(\omega_1\overline{\Omega_{41}})] + [\omega_2\overline{\Omega_{31} + \Omega_{42}}] = 0, \qquad [\omega_1\overline{\Omega_{42} - \Omega_{31}}] = 0.$$

La dernière de ces deux équations quadratiques est identiquement satisfaite tandis que la première peut s'écrire :

$$[\omega_1\{4\overline{\Omega_{41}} + (L + K - l - k)\omega_2\}].$$

Le système de Pfaff (5) n'entraîne donc qu'une équation quadratique; il est en involution avec

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = 0.$$

Il en résulte que la correspondance dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. L'application est donc toujours possible.

Si on immobilise a_1 en annulant ω_1, on immobilise en même temps A_1 ainsi que les tangentes en a_1 et A_1 aux courbes focales doubles. Toute correspondance qui réalise l'application associe donc chacune des tangentes à la première courbe focale avec l'une des tangentes à la deuxième courbe focale.

Généralités sur l'applicabilité singulière pour les congruences V. — En considérant les équations quadratiques entraînées par le système de Pfaff qui fournit les couples de congruences V applicables du deuxième ordre, on remarque que tout élément intégral pour lequel on a :

$$\overline{\Omega_{11} - \Omega_{22}} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 = 0$$

est un élément singulier. Nous obtiendrons donc des solutions singulières du système de Pfaff considéré en étudiant le cas particulier pour lequel α et β sont nuls. Le système des équations quadratiques entraînées est alors résolu par les équations nouvelles de Pfaff.

$$\overline{\Omega_{32}} = \overline{\Omega_{41}} = 0\,; \qquad \overline{\Omega_{31}} = a\omega_1\,; \qquad \overline{\Omega_{42}} = b\omega_3\,;$$

$$\omega_{34} = u\omega_1 + v\omega_3\,; \quad \omega_{12} = -v\omega_1 + w\omega_3\,; \quad \omega_{21} = u'\omega_1 + v'\omega_3\,; \quad \omega_{43} = -v'\omega_1 + w'\omega_3.$$

Les quatre premières de ces équations exigent que l'on ait :

$$bu + aw = 0\,; \qquad bu' + aw' = 0\,; \qquad 2a\omega'_1 = [\omega_1 da]\,; \qquad 2b\omega'_3 = [\omega_3 db]$$

D'ailleurs il faut supposer que a et b ne sont pas tous deux nuls car on obtiendrait alors la solution banale formée par les couples de congruences égales. Les seules congruences sur lesquelles on puisse effectuer une application singulière du deuxième ordre sont donc telles que l'on ait :

$$uw' - u'w = 0.$$

S'il s'agit de congruences V générales, ces congruences devront donc appartenir à la famille W comme d'ailleurs les congruences applicables sur elles.

Applicabilité singulière pour deux congruences W. — Donnons nous une congruence W. Imposons à son repère la première particularisation spéciale puis choisissons complètement ce repère. On ne pourra réaliser une application singulière qu'avec un coefficient b égal et de signe contraire au coefficient a.

De plus le coefficient a devra satisfaire aux deux conditions :

$$(1) \qquad 2a\omega'_1 = [\omega_1 da]\,; \qquad 2a\omega'_3 = [\omega_3 da]$$

Rapportons la congruence donnée à ses développables et posons :

$$\omega_1 = g_1 dp_1, \qquad \omega_3 = g_2 . dp_2$$

Les deux équations (1) s'écrivent alors :

$$[dp_1 d(ag_1^2)] = 0, \qquad [dp_2 d(ag_2^2)] = 0$$

On peut donc poser :

$$ag_1^2 = \mathrm{A}(p_1), \; ag_2^2 = \mathrm{B}(p_2)$$

L'équation différentielle qui fournit les deux familles d'asymptotiques sur l'une quelconque des deux surfaces focales devient :

$$\mathrm{A}(p_1)dp_1^2 + \mathrm{B}(p_2)dp_2^2 = 0 \qquad (\omega_1^2 + \omega_3^2 = 0)$$

Sur une congruence W arbitraire on ne peut donc pas en général réaliser une application singulière.

Considérons une congruence W telle que l'équation différentielle des lignes asymptotiques présente la forme spéciale :

$$(2) \qquad \mathrm{F}_1(p_1)dp_1^2 + \mathrm{F}_2(p_2)dp_2^2 = 0$$

Les fonctions F_1 et F_2 ne sont manifestement définies qu'à un même facteur numérique près.

Posons

$$\mathrm{F}_1(p_1) = j.\mathrm{A}(p_1), \qquad \mathrm{F}_2(p_2) = j.\mathrm{B}(p_2),$$

la quantité j étant une constante numérique. Considérons la fonction a définie par l'identité :

$$\mathrm{F}_1(p_1)dp_1^2 + \mathrm{F}_2(p_2)dp_2^2 = a(\omega_1^2 + \omega_3^2) = a(g_1^2 dp_1^2 + g_2^2 dp_2^2).$$

On aura :

$$j.A(p_1) = ag_1^2, \qquad j.B(p_2) = ag_2^2.$$

Considérons alors le système de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{31}} = a\omega_1, \qquad \overline{\Omega_{42}} = -a\omega_1, \qquad \overline{\Omega_{ij}} = 0 (ij \neq 31 \text{ et } 42).$$

Ce système à 3 variables indépendantes p est complètement intégrable d'après la règle de Frobenius. Il impose d'ailleurs toutes les seize expressions Ω. La solution générale dépend de constantes arbitraires : ce sont les paramètres de position dans l'espace d'une congruence applicable sur la congruence donnée.

En faisant varier la constante j on obtient une suite de congruences applicables. On peut donc réaliser une déformation singulière d'une congruence singulière dont l'équation des asymptotiques présente la forme (2). C'est, aux notations près, un théorème énoncé par M. Cartan dans sa communication au Congrès de Strasbourg.

Propriété des surfaces focales d'une congruence W déformable d une façon singulière. — Il est facile de vérifier que les surfaces focales d'une congruence W à déformation singulière sont déformables projectivement du deuxième ordre. Considérons en effet une telle congruence. Les conditions d'applicabilité de la première surface focale engendrée par a_1 sont

$$\overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = 0\,; \qquad \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = \overline{\Omega_{32}} = \overline{\Omega_{34}} = 0, \qquad \overline{\Omega_{11}} = \overline{\Omega_{22}} = \overline{\Omega_{33}}.$$

Les conditions d'applicabilité de la deuxième surface focale engendrée par a_2 sont :

$$\overline{\Omega_{21}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = 0\,; \qquad \overline{\Omega_{41}} = \overline{\Omega_{43}} = \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = 0, \qquad \overline{\Omega_{11}} = \overline{\Omega_{22}} = \overline{\Omega_{44}}.$$

Toutes ces conditions sont précisément remplies. Par suite les deux surfaces focales sont applicables ; il en résulte que ces surfaces focales sont déformables d'après un théorème de M. Cartan (1).

Application singulière de congruences V particulières. — Les congruences particulières pour lesquelles on a, après la particularisation fondamentale

$$uw' - wu' = 0$$

sont celles dont l'une des nappes focales est une droite ou celles qui admettent pour nappes focales une courbe et une surface développable.

Le calcul montre que certaines de ces congruences admettent une déforma-

(1) L'applicabilité projective des surfaces est étudiée dans un Mémoire de M. Cartan (*Annales Ec. Norm.*, tome XXXVII, septembre 1920).

tion singulière. Les congruences linéaires non spéciales admettent même une déformation singulière sur elles-mêmes.

La déformation d'une congruence qui admet pour nappes focales une surface non développable et une droite est analogue à la déformation d'une congruence W : cette déformation n'est possible que si l'équation des asymptotiques de la surface focale présente la forme

$$A(p_1)dp_1^2 + B(p_2)dp_2^2 = 0$$

quand on a rapporté la congruence à ses développables ; si cette condition est remplie, on obtient une infinité de déformées dépendant d'une constante arbitraire ; d'ailleurs la surface focale prend une déformation projective du deuxième ordre.

Les autres cas qui doivent encore être considérés sont analogues entre eux ; on obtient ce résultat que la déformation est toujours possible avec des déformées qui dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

Etudions par exemple le cas d'une congruence dont la première nappe focale est une surface développable tandis que la deuxième nappe focale est une courbe. Donnons au repère la particularisation fondamentale. Nous aurons u et u' nuls et il faudra que a soit nul ; de plus la quantité b devra satisfaire à la condition :

$$[db\omega_3] + 2b\omega'_3 = 0$$

Pour réaliser une application singulière on devra annuler toutes les expressions $\overline{\Omega}$ sauf :

$$\overline{\Omega_{42}} = b\omega_3.$$

Si la congruence donnée est rapportée à ses développables, on devra avoir

$$bh_2^2 = B(p_2).$$

Cette équation sert à définir b par l'intermédiaire de la fonction arbitraire B.

Les équations de Pfaff imposées par l'application singulière forment un système complètement intégrable. On obtient donc, pour chaque détermination de la fonction B, une congruence applicable sur la congruence donnée.

Deux congruences V applicables du troisième ordre sont égales. — On trouve aisément les nouvelles équations de Pfaff imposées par une application du troisième ordre sur une congruence V dont le repère a subi la particularisation fondamentale. Ce sont :

$$\overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{42}} = w\,\overline{\Omega} = w'\,\overline{\Omega} = u\,\overline{\Omega} = u'\,\overline{\Omega} = 0\,; \qquad \overline{\Omega_{32}} = v\,\overline{\Omega}; \qquad \overline{\Omega_{41}} = v'\,\overline{\Omega}\,.$$

$$(\,\overline{\Omega} = \overline{\Omega_{22}} - \overline{\Omega_{11}}\,).$$

Si les 4 coefficients u, u', w, w', ne sont pas tous nuls il faut que l'on ait

$$\overline{\Omega_{22}} - \overline{\Omega_{11}} = 0.$$

Il faut alors que toutes les expressions $\overline{\Omega}$ soient nulles, ce qui exige que les deux congruences applicables soient égales.

Si les 4 coefficients sont nuls la première congruence est linéaire ; il doit en être de même de la seconde ; les deux congruences applicables sont donc encore égales car les congruences linéaires ne diffèrent que par des déplacements projectifs.

Déformation du troisième ordre pour une congruence U'_2. — Donnons nous une congruence U'_2. Imposons à son repère la deuxième particularisation spéciale. Le système de Pfaff qui fournit les congruences applicables du troisième ordre sur la congruence donnée s'obtient en annulant toutes les expressions $\overline{\Omega}$ sauf

$$\overline{\Omega_{21}} = \overline{\Omega_{43}}$$

Ce système de Pfaff n'entraîne qu'une équation quadratique :

$$[\omega_1 \overline{\Omega_{21}}] = 0. \tag{1}$$

La solution générale du système de Pfaff considéré dépend alors d'une fonction arbitraire d'un argument. Il en résulte que sur une congruence U'_2 quelconque on peut appliquer une infinité de congruences.

L'équation (1) conduit à poser :

$$\overline{\Omega_{21}} = \alpha\omega_1.$$

Cette nouvelle équation de Pfaff entraîne l'équation quadratique :

$$\left[\omega_1\left(\frac{d\alpha}{\alpha} + \omega_{11} - \omega_{44}\right)\right] = 0. \tag{2}$$

Supposons qu'il s'agisse d'une congruence donnée non singulière ; il est facile de voir qu'on peut achever de choisir le repère de manière à avoir :

$$[\omega_1(\omega_{11} - \omega_{44})] = 0 \qquad \omega'_1 = [\omega_1(\omega_{33} - \omega_{11})] = 0$$

Posons alors

$$\omega_1 = dp_1$$

La quantité α devra alors satisfaire à :

$$[d\alpha dp_1] = 0.$$

Il suffira de choisir pour α une fonction quelconque de p_1 :

$$\alpha = \Phi(p_1)$$

En faisant varier Φ d'une manière continue on obtient une famille de déformées dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument.

Remarquons enfin que deux congruences U'_2 ne sont en général pas applicables du troisième ordre ; cela résulte de cette remarque qu'une congruence U'_2 générale dépend de *deux* fonctions arbitraires d'un argument.

CHAPITRE VIII

Propriétés projectives des complexes non spéciaux.

Complexes linéaires tangents. — Considérons un complexe non spécial ; imposons à son repère la particularisation fondamentale. Nous aurons :

$$dr = (\omega_{11} + \omega_{22})\, r + \omega_2 (r_1 - r_1') + \omega_3 r_2 - \omega_1 r_2'.$$

On dit qu'un complexe linéaire γ est tangent quand il contient, au deuxième ordre près, les droites s situées dans le complexe considéré au voisinage de la droite r.

On peut poser :

$$s = r + \Delta r, \qquad \Delta r = dr + \frac{1}{2} d^2 r + \frac{1}{3!} d^3 r + \ldots..$$

La forme γ doit satisfaire aux deux conditions :

$$\gamma | r = 0 \qquad \gamma' dr = 0.$$

On a donc un faisceau de complexes linéaires tangents :

$$\gamma = \rho r + \rho_1 (r_1 + r_1')$$

Les droites communes de ce faisceau rencontrent la droite r et sont situées dans le complexe linéaire tangent :

$$\gamma_0 = (r_1 + r_1') ;$$

elles forment donc une congruence linéaire spéciale tangente. Cette congruence établit une correspondance homographique entre les points m de la droite r et les plans q passant par la droite r. Chaque point m est le foyer du plan q correspondant dans l'un quelconque des complexes linéaires tangents. On trouve aisément la correspondance entre les points m et les plans q :

$$m = (\omega_2 a_1 - \omega_1 a_2), \qquad q = [a_1 a_2 (\omega_2 a_4 - \omega_1 a_3)].$$

Couples inflexionnels. — Cherchons les droites s exceptionnelles qui sont « *osculatrices* » à γ_0 : ce sont les droites s qui sont situées, au troisième ordre près dans γ_0 ; elles satisfont donc à la condition :

(1) $\quad \psi = \gamma_0 | d^2 r = 0 \quad$ ou $\quad \psi = -d\gamma_0 | dr = \omega_1 \varpi_1 + \omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_3 = 0,$

si l'on pose, pour abréger

$$\varpi_1 = \omega_{34} - \omega_{21}, \qquad \varpi_2 = \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}, \qquad \varpi_3 = \omega_{43} - \omega_{12}.$$

Les trois expressions ϖ sont linéaires et homogènes en ω_1, ω_2, ω_3. On a, en effet,

$$\omega_2 + \omega_4 = 0 \qquad (\omega_2 + \omega_4)' = [\omega_1 \varpi_1] + [\omega_2 \varpi_2] + [\omega_3 \varpi_3] = 0.$$

On peut donc poser :

$$\varpi_1 = a\omega_1 + b''\omega_2 + b'\omega_3, \qquad \varpi_2 = b''\omega_1 + a'\omega_2 + b\omega_3, \qquad \varpi_3 = b'\omega_1 + b\omega_2 + a''\omega_3.$$

Lorsque le repère est complètement choisi, la condition (1) est une équation de Monge à trois variables p.

Le complexe γ_0 est d'ailleurs un complexe tangent quelconque, car la forme γ_0 est modifiée par un changement de repère. Proposons-nous maintenant de chercher les droites s exceptionnelles osculatrices à l'un des complexes tangents

$$\gamma = \rho r + \rho_1 \gamma_0$$

Ces droites satisfont à :

$$\gamma \mid d^2 r = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho\varphi + \rho_1 \psi = 0$$

si l'on pose :

$$\varphi = r \mid d^2 r = -dr \mid dr = 2(\omega_1 \omega_3 + \omega_2^2).$$

Les droites s exceptionnelles les plus intéressantes sont à la fois osculatrices à tous les complexes linéaires tangents ; nous les appellerons « droites s_0 ». Ces droites s_0 satisfont aux deux équations de Monge :

$$\varphi = 0 \qquad \psi = 0.$$

La première de ces deux équations exprime ce fait que les droites s_0 rencontrent la droite r. Le système des deux équations a une signification géométrique; par suite le faisceau de formes quadratiques différentielles ternaires

$$\rho\varphi + \rho_1 \psi$$

doit rester invariant quand on modifie le repère. On le vérifie en calculant, grâce à l'emploi des covariants bilinéaires, les variations infiniment petites subies par φ et par ψ :

$$\delta\varphi = 2(e_{11} - e_{44})\varphi \qquad \delta\psi = (e_{32} + e_{41})\varphi + (e_{11} - e_{44})\psi.$$

Pour étudier les droites s_0 il est commode d'utiliser une représentation géométrique. Considérons pour un instant ω_1, ω_2, ω_3 comme étant les coordonnées homogènes d'un point M dans un plan Q. A toute droite s correspondra un point M. Inversement à un point M correspondront les droites s pour lesquelles ω_1, ω_2, ω_3 sont proportionnelles aux coordonnées homogènes de M; toutes ces droites définissent sur la droite r une même « *corrélation anharmonique* » (1); nous pourrons dire pour abréger qu'elles sont situées sur une même *direction de droites*.

L'équation

$$\varphi = 0$$

représente une conique E dont les points définissent les directions de droites pour lesquelles la droite r est rencontrée par les droites s; cette équation définit donc les directions d_0, qui engendrent des développables du complexe considéré. Si l'on modifie le repère, la conique E reste fixe.

L'équation

$$\psi = 0$$

représente une conique F_0 dont les points définissent les directions de droites osculatrices au complexe γ_0.

L'équation

$$\rho\varphi + \rho_1\psi = 0$$

représente une conique F qui appartient au faisceau défini par les deux coniques E et F_0; les points de la conique F définissent les directions de droites osculatrices à l'un des complexes γ.

On peut aussi remarquer que si le point M décrit une droite, les droites s dont ce point est l'image restent situées dans une congruence tracée dans le complexe considéré.

Les deux coniques E et F_0 ont en général quatre points communs M_i. Les droites s_0 ont manifestement pour images les quatre points M_i. Il existe donc, en général, au voisinage d'une droite d'un complexe non spécial, quatre directions d_0 singulières dont les droites sont osculatrices à tous les complexes linéaires tangents. L'ensemble du foyer m_i et du plan focal q_i relatifs à une direction d_0 singulière constitue un « couple inflexionnel » (1).

Il est facile de former une équation qui fournit les positions des quatre points m_i: Posons, pour une direction d_0 singulière :

$$\omega_2 = -z.\omega_1, \qquad \omega_3 = +z.\omega_2, \qquad m_i = a_2 + z_i\, a_1.$$

(1) La définition de ce terme est donnée par M. Kœnigs dans son livre sur les propriétés infinitésimales de l'Espace réglé. (Gauthier-Villars, Paris 1882).

En exprimant que l'expression quadratique ψ est nulle on trouve l'équation algébrique du quatrième degré en z dont les racines sont les valeurs des quantités z_i:

$$\Phi(z) = a'z^4 + 2bz^3 + (a' - 2b')z^2 - 2b''z + a = 0.$$

On a d'ailleurs la propriété remarquable suivante. Le rapport anharmonique des quatre points m_i (et par suite aussi celui des quatre plans q_i) est égal au rapport anharmonique des quatre points M_i de la conique E. Adoptons pour le montrer des coordonnées cartésiennes ordinaires dans le plan Q. Nous aurons :

$$\omega_1 = \omega_3 x \qquad \omega_2 = \omega_3 y.$$

et la conique E passera par l'origine O. Le rapport anharmonique des quatre points m_i est égal au rapport anharmonique des quatre nombres z_i ou des quatre quotients $y_i : x_i$; il est donc égal au rapport anharmonique des quatre droites Om_i.

Complexes linéaires tangents stationnaires. — On dit qu'un complexe linéaire γ est stationnaire lorsqu'il est tangent le long de la droite r et le long d'une droite s déterminée.

Si l'on désigne par Δ la variation infiniment petite subie par une quantité lorsqu'on passe de la droite r à la droite s, on doit avoir pour toutes les déplacements d possibles :

$$\gamma \mid (s + ds) = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma \mid d(\Delta r) = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\gamma \mid dr = (\rho\Delta r + \rho_1\Delta\gamma_0) \mid dr = 0.$$

Le calcul montre qu'en général il existe trois complexes γ stationnaires qui sont les complexes γ dont la conique F est dégénérée. A chaque complexe stationnaire correspond une direction de droites s qui sont osculatrices et dont l'image est au centre de la conique dégénérée

Première particularisation spéciale du repère. — La première particularisation spéciale du repère consiste à simplifier dans toute la mesure possible les six coefficients qui interviennent dans la forme quadratique ψ, en profitant du groupe des transformations subies par ces coefficients quand on modifie le repère. Les transformations infinitésimales du groupe s'obtiennent au moyen des covariants bilinéaires. On trouve :

$$\left\{\begin{array}{l} \delta a = a(e_{22} + e_{33} - 2e_{11}) - 2b''e_{21}\,; \quad \delta a' = a'\,(e_{44} - e_{11}) + 4be_{21} - 4b''e_{12} + 2(e_{32} + e_{41})\,; \\ \delta a'' = a''(e_{44} + e_{11} - 2e_{22}) + 2be_{12}\,; \quad \delta b = b(e_{44} - e_{22}) + 2a''e_{21} + (a' - 2b')e_{12}\,; \\ \delta b' = b'(e_{44} - e_{11}) - be_{21} + b''e_{12} + (e_{32} + e_{41})\,; \quad \delta b'' = b''(e_{33} - e_{11}) - 2ae_{12} - (a' - 2b')e_{21}. \end{array}\right.$$

On déduit de ces équations :

$$\delta(a' - 2b') = (a' - 2b')\,(e_{44} - e_{11}) + 6be_{21} - 6b''e_{12}.$$

On voit immédiatement que les 5 coefficients du polynome $\Phi\ (z)$ subissent les transformations linéaires et homogènes d'un groupe que nous désignerons par « groupe g ».

En tenant compte des relations ;

$$e_{34} - e_{21} = e_{11} - e_{22} + e_{33} - e_{44} = e_{43} - e_{12} = e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} = 0$$

on constate que le groupe g ne dépend que des 4 paramètres qui servent de coordonnées homogènes pour les points a_1 et a_2 mobiles sur la droite r.

Quand on modifie le repère, les 4 foyers inflexionnels restent fixes tandis que les symboles a_1 et a_2 subissent la tranformation linéaire et homogène la plus générale. Les quatre racines de l'équation en z subissent donc une même transformation homographique. Le groupe g est donc le groupe connu des transformations subies par les coefficients d'une équation algébrique du quatrième degré quand on donne à la variable une transformation homographique. Changeons légèrement les notations pour pouvoir profiter plus aisément de résultats classiques. Posons :

$$\Phi\ (z) = \alpha_0 z^4 + 4\alpha_1 z^3 + 6\alpha_2 z^2 + 4\alpha_3 z + \alpha_4.$$

On sait que les deux expressions

$$S = \alpha_0\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 3(\alpha_2)^2, \qquad T = \alpha_0\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\ \alpha_3{}^2 - \alpha_4(\alpha_1{}^2 - (\alpha_2)^3$$

sont des invariants relatifs tandis que le rapport du cube de S au carré de T est un invariant absolu. On vérifie d'ailleurs ces propriétés par le calcul qui donne :

$$\delta S = -2S(e_{11} + e_{22}), \qquad \delta T = -3T(e_{11} + e_{22}).$$

Revenons à l'étude de la première particularisation spéciale du repère. Excluons le cas singulier pour lequel l'équation en z aurait tous ses coefficients nuls. Tous les points de la droite r seraient alors des foyers inflexionnels. Il est facile de montrer que le complexe étudié serait linéaire.

Occupons-nous d'abord du cas très particulier pour lequel les quatre racines de l'équation en z sont confondues. Commençons par choisir le point a_2 en coïncidence avec le foyer inflexionnel quadruple; l'équation en z est ainsi réduite à son premier terme. Après cette restriction a'' subit une dilatation tandis que a' subit une transformation linéaire non homogène. Nous pourrons donc annuler a' et égaler a'' à l'unité.

Supposons enfin que l'équation en z n'ait pas toutes ses racines confondues. Commençons par choisir a_1 et a_2 en coïncidence avec deux des foyers inflexionnels; l'équation en z est ainsi privée de son premier et de son dernier termes. Après cette restriction on aura :

$$\delta b' = -b'(e_{11} + e_{22}) + (e_{32} + e_{41})\,; \quad \delta(a' - 2b') = -(a' - 2b')\,(e_{11} + e_{22})\,; \quad \delta b = -2be_{22}\,;$$
$$\delta b'' = -2b'e_{11}.$$

On doit donc étudier à part les cas particuliers pour lesquels l'équation en z privée de ses termes extrêmes n'a qu'un ou deux termes au lieu de trois.

Dans le cas général on pourra profiter des dilatations subies par b et b'' en égalant ces deux coefficients à l'unité positive ou négative ; ensuite on profitera de la translation subie par b' en annulant ce coefficient. Remarquons que le complexe γ_0 sera alors stationnaire puisque la conique F_0 sera dégénérée.

Étudions le cas particulier pour lequel a' est double de b', tandis que b et b'' ne sont pas nuls. On peut alors amener b et b'' à être égaux à l'unité. Grâce à la nouvelle forme de l'équation en z, on voit immédiatement que les quatre foyers inflexionnels forment une division harmonique. On pourra enfin annuler b' et par suite a'.

Les autres cas particuliers sont faciles à étudier; ils sont caractérisés par l'existence d'une racine double, d'une racine triple ou de deux racines doubles.

En résumé, la première particularisation spéciale du repère conduit à distinguer six catégories de complexes non spéciaux et non linéaires ;

1° Les complexes quelconques G dont les foyers inflexionnels sont distincts et ne forment pas une division harmonique;

2° Les complexes G_1 dont les foyers inflexionnels sont distincts et forment une division harmonique ;

3° Les complexes H qui admettent un foyer inflexionnel double;

4° Les complexes H_1 qui admettent un foyer inflexionnel triple ;

5° Les complexes K qui admettent deux foyers inflexionnels doubles ;

6° Les complexes K_1 qui admettent un foyer inflexionnel quadruple.

La forme quadratique ψ peut être réduite respectivement à :

$$\omega_2(a'\omega_2 + 2\omega_3 - 2\omega_1)\,; \quad 2\omega_2(\omega_3 - \omega_1)\,; \quad \omega_2(\omega_2 + 2\omega_3)\,; \quad 2\omega_2\omega_3 : \omega_2^2 : \omega_3^2.$$

Surfaces réglées asymptotiques. — Nous appellerons « surfaces réglées asymptotiques » les surfaces réglées du complexe étudié telles que, pour tout déplacement élémentaire de la droite génératrice sur l'une de ces surfaces, on ait un complexe linéaire tangent stationnaire.

Occupons-nous du cas général pour lequel les foyers inflexionnels sont distincts. Donnons au repère la particularisation fondamentale. Adoptons ensuite pour positions des points a_1 et a_2 les deux points doubles de l'involution définie par les deux couples de points m_1 et m_2, m_3 et m_4. Nous annulerons ainsi b et b''. Nous pourrons ensuite annuler a' puis égaler a et a'' à l'unité. Dans ces conditions nous aurons

$$\psi = (\omega_1)^2 + 2b'\omega_1\omega_2 + (\omega_3)^2.$$

Les directions de droites pour lesquelles il existe un complexe tangent stationnaire ont pour images les trois sommets du triangle autopolaire relatif aux deux coniques E et F_0. Il en résulte qu'il existe trois familles de surfaces réglées asymptotiques. Chacune des familles satisfait à un système de deux équations de Pfaff à trois variables p .

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_3 = 0\,; \qquad \omega_2 = \omega_1 - \omega_3 = 0\,; \qquad \omega_1 = \omega_3 = 0.$$

Chacun de ces trois systèmes de Pfaff peut être considéré comme un système de deux équations différentielles ; on voit ainsi que par une droite du complexe, il passe une surface réglée asymptotique de chaque famille.

CHAPITRE IX

Géométrie tangentielle des complexes non spéciaux

Généralités sur la géométrie tangentielle des complexes non spéciaux. — Je me propose dans ce chapitre de porter mon attention sur les complexes linéaires tangents à un complexe non spécial.

Désignons par r une droite mobile qui engendre un complexe non spécial. Pour obtenir tous les complexes linéaires tangents γ relatifs à la droite r, il nous suffira de connaître l'un quelconque d'entre eux que nous désignerons par γ_1 ; on peut poser en effet :

$$\gamma = \gamma_1 + \mu r,$$

le symbole μ représentant un paramètre arbitraire.

D'ailleurs γ_1 dépendra en général des trois paramètres p. Il en résulte que les complexes linéaires tangents γ dépendent en général de quatre paramètres dont l'un joue un rôle accessoire.

Considérons une famille de complexes linéaires à n paramètres, le nombre n étant supposé égal ou inférieur à 3. Désignons par γ_1 la forme d'un de ces complexes et posons

$$\gamma_1 = \rho[c_1c_2] + \dots \qquad + \rho'_2[c_2c_3] ; \qquad d\gamma_1 = d\rho[c_1c_2] + \dots \qquad + d\rho'_2[c_2c_3]$$

Les droites communes au complexe γ_1 et aux complexes infiniment voisins appartiennent aux complexes linéaires de formes :

$$\gamma_1, \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_1}, \dots\dots\dots, \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_n};$$

l'ensemble de ces droites communes constitue ce que nous appellerons l' « élément caractéristique ».

Supposons que n soit égal à 3. L'élément caractéristique est alors en général constitué par deux droites dont nous désignerons l'une par r. La droite r dépend de trois paramètres p ; elle engendre donc un complexe que nous appellerons l' « enveloppe » des complexes γ_1. Il est facile de voir que chacun des complexes γ_1 est tangent (suivant la droite r correspondante) au complexe enveloppé, car on a :

$$\gamma_1/r = 0\ ; \qquad d(\gamma_1/r) = 0\ ; \qquad d\gamma_1/r = 0\ ; \qquad \gamma_1/dr = 0.$$

Remarquons en outre que la famille à trois paramètres formée par les complexes γ tels que :

$$\gamma = \gamma_1 + \mu(p_1, p_2, p_3).\ r$$

enveloppe le même complexe que la famille formée par les complexes γ_1.

On peut d'ailleurs considérer un complexe non spécial comme enveloppé par le complexe γ_0 ; donc, en général, un complexe non spécial est une enveloppe à trois paramètres.

Remarquons qu'un complexe tangent non stationnaire dépend toujours de trois paramètres p. Supposons en effet que la première particularisation spéciale n'ait pas été effectuée, de telle sorte que le complexe adopté pour γ_0 puisse être l'un quelconque des complexes linéaires qui sont tangents suivant la droite r. On a :

$$d\gamma_0 = \theta r + (\omega_{11} + \omega_{33})\gamma_0 + \varpi_1 r_2 - \varpi_2 r'_1 - \varpi_3 r'_2 \quad \text{avec} \quad \theta = \omega_{32} + \omega_{41}.$$

Pour immobiliser le complexe tangent γ_0, il faut donc annuler les trois expressions ϖ et l'expression θ. Si la conique F_0 n'est pas dégénérée, c'est-à-dire si le complexe γ_0 n'est pas stationnaire, on doit annuler les trois expressions fondamentales ω pour égaler à zéro les trois expressions ϖ ; il est alors nécessaire de laisser fixes les trois paramètres p.

L'étude tangentielle des complexes est surtout intéressante quand l'un des complexes tangents γ_1 ne dépend pas effectivement des trois paramètres p ; ce complexe γ_1 est alors stationnaire et il est naturel de choisir le repère de façon que γ_1 joue le rôle du complexe γ_0.

Généralités sur les enveloppes à un paramètre. — N'imposons au repère associé à la droite génératrice r que la particularisation fondamentale. Supposons que le complexe γ_0 ne dépende que d'un paramètre. Les expressions ϖ s'annulent en même temps que l'une d'entre elles. Il en résulte que la conique F_0 est dégénérée en une droite double et par suite cette conique a deux points doubles distincts ou confondus communs avec la conique E. Les seuls complexes susceptibles d'être considérés comme des enveloppes à un paramètre sont donc les complexes K et K_1.

Il est facile de vérifier que tous les complexes K sont des enveloppes à un paramètre ; en donnant au repère la première particularisation spéciale, on voit aisément que non seulement les expressions ϖ mais aussi l'expression θ s'annulent en même temps que l'expression ω_2, ce qui prouve que la position du complexe γ_0 ne dépend que d'un paramètre.

On peut vérifier d'une manière analogue que tous les complexes K_1 sont des enveloppes à un paramètre

L'élément caractéristique d'une enveloppe à un paramètre est fourni par les droites communes à deux complexes linéaires ; il se confond donc avec une congruence linéaire L. Nous allons voir que dans les complexes K la congruence L n'est pas spéciale tandis que dans les complexes K_1 cette congruence est spéciale.

Propriétés des complexes K_1. — Considérons un complexe K_1. Après la première particularisation spéciale on peut poursuivre la détermination projective du repère, de manière à avoir :

$$\theta = \omega_{32} + \omega_{41} = 0 ; \qquad \omega_{21} = \omega_{34} = 0 ; \quad \omega_{31} = \alpha\omega_3 .$$

D'ailleurs le coefficient α n'est nul que pour des complexes particuliers. On a d'ailleurs :

$$d\gamma_0 = (\omega_{11} + \omega_{33})\gamma_0 - \omega_3 r'_2$$

Le complexe γ_0 ne dépend donc que d'un paramètre. De plus l'élément caractéristique est formé par les droites communes aux deux complexes γ_0 et r_2 ; c'est une congruence linéaire spéciale.

Si on étudie un déplacement pour lequel l'expression ω_3 est nulle, on constate que la droite r rencontre la droite *fixe* r'_2 tout en restant dans le complexe γ_0. Il en résulte que toutes les droites de l'élément caractéristique appartiennent au complexe étudié.

Il est intéressant de remarquer que les droites du couple inflexionnel quadruple appartiennent au complexe étudié.

Le foyer inflexionnel quadruple engendre une surface réglée dont les génératrices sont les directrices des congruences caractéristiques ; cette surface réglée est développable ou non suivant que le coefficient α est nul ou non.

Propriétés des complexes K. — Considérons un complexe K. Après la première particularisation générale du repère on peut annuler l'expression θ. On a alors :

$$d\gamma_0 = (\omega_{11} + \omega_{33})r_1 + (\omega_{22} + \omega_{33})r'_1$$

Le complexe γ_0 ne dépend donc que d'un paramètre. L'élément caractéristique est formé par les droites qui rencontrent les droites r_1 et r'_1.

Si on étudie un déplacement pour lequel l'expression ω_2 est nulle, on constate que la droite r rencontre les deux droites *fixes* r_1, et r'_1.

La congruence linéaire caractéristique est tout entière comprise dans le complexe étudié.

Il est intéressant de remarquer que les droites de chacun des deux couples inflexionnels doubles appartiennent au complexe étudié.

Chacun des deux foyers inflexionnels doubles engendre une surface réglée dont les génératrices sont des directrices des congruences caractéristiques.

Classification des complexes K. — Après la première particularisation spéciale du repère on peut toujours, d'une manière projective, annuler les expressions, θ, ω_{12} et ω_{21}.

On doit alors poser :

$$\omega_{32} = \lambda\omega_2 ; \qquad \omega_{33} - \omega_{22} = \lambda'\omega_2 ; \qquad \omega_{31} = -\lambda\omega_3 + g_1\omega_2 ; \qquad \omega_{42} = -\lambda\omega_1 + g_2\omega_2.$$

Les coefficients λ et λ' sont des invariants fondamentaux mais les coefficients g_1 et g_2 dépendent du choix du repère tandis que le produit g_1g_2 est invariant.

Les coefficients g_1 et g_2 ne sont nuls que dans des cas particuliers.

On est ainsi amené à distinguer parmi les complexes K : ceux pour lesquels g_1 et g_2 ne sont pas nuls ; ceux pour lesquels l'un des deux coefficients g est nul ; ceux pour lesquels g_1 et g_2 sont nuls.

Lorsque g_1 est nul, la surface réglée décrite par le foyer double a_1 est une quadrique. Lorsque g_1 et g_2 sont nuls, chacun des deux foyers doubles décrit une quadrique ; nous allons étudier de plus près ce cas très particulier et nous verrons que les deux foyers doubles restent situés sur une même quadrique.

Complexes K *dont tous les foyers inflexionnels sont situés sur une quadrique.* — Considérons un complexe K pour lequel les coefficients g_1 et g_2 sont nuls. Nous aurons pour un déplacement du repère ;

$$\left\{\begin{array}{ll} da_1 = \omega_{11}a_1 + \omega_1a_3 - \omega_2a_4 ; & da_2 = \omega_{22}a_2 + \omega_2a_3 + \omega_3a_4 ; \\ da_1 = -\lambda\omega_3a_1 + \lambda\omega_2a_2 + \omega_{33}a_3 ; & da_4 = -\lambda\omega_2a_1 - \lambda\omega_1a_2 + \omega_{44}a_4. \end{array}\right.$$

On en déduit que le réseau de complexes linéaires :

$$\rho_1r_1 + \rho'_1r'_1 + \rho'(\lambda r + r')$$

est fixe, puisque l'on a :

$$\lambda(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{44}) = -d\lambda.$$

Les deux droites r_2 et r_2 sont situées sur la quadrique Q formée par les droites communes de ce réseau ; mais le point a_1 est situé sur r_2 tandis que le point a_3 est situé sur r_2'; par suite les deux foyers inflexionnels doubles restent situés sur la quadrique fixe Q.

Etude d'un complexe K *très particulier.* — Supposons que non seulement g_1 et g_2 soient nuls mais que l'invariant fondamental λ soit aussi nul.

Les points a_3 et a_4 sont alors fixes ainsi que les deux plans $[a_1a_3a_4]$ et $[a_2a_3a_4]$.

Les points inflexionnels doubles restent donc situés dans deux plans fixes. D'ailleurs chacune des deux directrices de la congruence linéaire caractéristique pivote dans un plan fixe autour d'un point fixe.

On peut choisir le repère et les paramètres fondamentaux de manière à avoir :

$$a_1 = c_1 + p_1c_3 + \frac{2}{p_3}\,c_4\,; \qquad\qquad a_2 = c_2 + p_2c_4 + 2p_3c_3\,;$$

$$a_3 = p_3c_3\,; \qquad a_4 = \frac{c_4}{p_3}.$$

On obtient ainsi un exemple très simple de complexe à foyers inflexionnels quadruples.

Généralités sur les enveloppes à deux paramètres. — Nous venons de voir que tous les complexes K et K_1 étaient des enveloppes à un paramètre. Il est facile de vérifier que tous les complexes H et H_1 sont des enveloppes à deux paramètres.

Considérons un complexe H ou un complexe H_1. Donnons au repère la première particularisation spéciale. Nous aurons dans le cas d'un complexe H :

$$\varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = \omega_3 + \omega_3, \qquad \varpi_3 = \omega_2, \qquad [(\omega_2 + \omega_3)\omega_{21}] + [\theta\omega_3] = 0$$

et dans le cas d'un complexe H_1 :

$$\varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \varpi_3 = \omega_2, \qquad [\omega_3\omega_{21}] + [\theta\omega_2] = 0.$$

Dans les deux cas, le complexe γ_0 reste fixe pour un déplacement qui annule ω_2 et ω_3 ; par suite le complexe enveloppant γ_0 ne dépend que de deux paramètres.

Il nous reste à chercher si les complexes à foyers inflexionnels distincts G ou G_1 peuvent être des enveloppes à deux paramètres. Nous pouvons supposer, pour cette recherche, que la première particularisation spéciale a été donnée au repère et nous contenter d'étudier s'il est possible que le complexe γ_0 ne dépende que de deux paramètres (cela résulte de ces deux remarques que le complexe γ_0 est stationnaire après la particularisation spéciale et que l'on peut adopter pour γ_0 l'un quelconque des trois complexes stationnaires).

Pour un complexe G on a, après la première particularisation spéciale :

$$\varpi_1 = -\omega_2, \quad \varpi_2 = -\omega_1 + a'\omega_2 + \omega_3, \quad \varpi_3 = +\omega_2,$$

$$\theta = \mu_1(\omega_3 - \omega_1) + \mu_2\omega_2 + \mu_3(\omega_3 - \omega_1).$$

Si le complexe γ_0 ne dépend que de deux paramètres, le coefficient μ_3 est nul.

Cela ne peut arriver que pour certains complexes G exceptionnels car le coefficient μ_3 est un invariant fondamental; ces complexes G seront des enveloppes à deux paramètres.

On voit de même que pour certains complexes G_1 exceptionnels le complexe γ_0 ne dépend que de deux paramètres.

Eléments caractéristiques des enveloppes à deux paramètres. — Un élément caractéristique d'une enveloppe à deux paramètres est fourni par l'ensemble des droites qui sont communes à trois complexes linéaires; cet élément est donc une « demi-quadrique » (dégénérée ou non),

On voit aisément que cette demi-quadrique n'est pas dégénérée quand il s'agit d'un complexe G ou d'un complexe G_1.

Supposons qu'il s'agisse d'un complexe H. Il est possible de choisir le repère de manière à annuler θ. On a alors :

$$d\gamma_0 = (\omega_{11} + \omega_{33})\,\gamma_0 + (\omega_2 + \omega_3)\,r'_1 - \omega_2 r'_2.$$

L'élément caractéristique est alors formé par les droites qui rencontrent les trois droites r_1, r'_1 et r'_2. Il est constitué par deux « couples » dont l'un est précisément le couple inflexionnel double.

S'il s'agit d'un complexe H_1, l'élément caractéristique est formé de deux « couples » dont l'un coïncide avec le couple inflexionnel triple.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : quand l'élément caractéristique d'une enveloppe à deux paramètres est une quadrique dégénérée en deux couples le complexe enveloppé admet l'un de ces couples pour foyer inflexionnel multiple.

CHAPITRE X

Déformation projective des complexes.

Généralités sur l'applicabilité du premier ordre pour deux complexes non spéciaux. — Le système de Pfaff qui fournit les couples de complexes non spéciaux applicables du premier ordre est :

$$(1) \qquad \omega_2 + \omega_4 = 0\,; \qquad \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = 0.$$

Ce système de Pfaff entraîne un système non involutif de cinq équations quadratiques extérieures. On peut d'ailleurs profiter de l'indétermination laissée aux deux repères en prolongeant le système (1) par les quatre équations de Pfaff :

$$(2) \qquad \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}} = \overline{\Omega_{12} + \Omega_{43}} = \overline{\Omega_{21} + \Omega_{34}} = 0.$$

Le système de Pfaff formé par les neuf équations (1) et (2) entraîne six équations quadratiques extérieures :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} [\omega_1 \varpi_1] + [\omega_2 \varpi_2] + [\omega_3 \varpi_3] = 0\,; \\ [\omega_1 \overline{\Omega_{21}}] + [\omega_2 \overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}}] + [\omega_3 \overline{\Omega_{12}}] = 0\,; \qquad [\omega_1 \overline{\Omega_{31}}] + [\omega_2 \overline{\Omega_{32} - \Omega_{41}}] + [\omega_3 \overline{\Omega_{42}}] = 0\,; \\ [\omega_1 \overline{\Omega_{31}}] - [\omega_3 \overline{\Omega_{42}}] + 2[\overline{\Omega_{12}}\, \overline{\Omega_{21}}] + [\overline{\Omega_{21}} \varpi_3] - [\overline{\Omega_{12}} \varpi_1] = 0\,; \\ [\omega_1 \overline{\Omega_{32} - \Omega_{41}}] - 2[\omega_2 \overline{\Omega_{42}}] + 2[\overline{\Omega_{12}}\, \overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}}] - [\overline{\Omega_{12}} \varpi_2] + [\overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}} \varpi_3] = 0\,; \\ -[\omega_3 \overline{\Omega_{32} - \Omega_{41}}] + 2[\omega_2 \overline{\Omega_{31}}] + 2[\overline{\Omega_{21}}\, \overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}}] + [\overline{\Omega_{21}} \varpi_2] - [\overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}} \varpi_1] = 0. \end{array} \right.$$

Le système quadratique (3) est involutif. Par un élément linéaire intégral arbitraire à deux dimensions $\mathcal{E}_2$ il passe en effet comme nous allons le démontrer un élément linéaire intégral $\mathcal{E}_3$. Nous pouvons supposer que l'élément arbitraire $\mathcal{E}_2$ est défini par deux éléments linéaires intégraux qui satisfont respectivement à :

$$\omega_2 = \omega_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Cela résulte de cette remarque que par un changement du premier repère les trois expressions $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$, considérées comme les coordonnées homogènes d'un point M dans un plan Q, subissent la transformation projective qui laisse fixe la conique E; on peut donc amener une droite quelconque du plan Q (image d'un élément $\mathcal{E}_2$) en coïncidence avec la droite qui joint les deux points situés sur E et de coordonnées respectives ω_1, o, o et o, o, ω_2.

Considérons alors les deux éléments linéaires intégraux (a) et (b) pour lesquels les expressions :

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \varpi_1,\quad \varpi_2,\quad \varpi_3,\quad \overline{\Omega_{12}},\quad \overline{\Omega_{11}-\Omega_{22}},\quad \overline{\Omega_{21}},\quad \overline{\Omega_{31}},\quad \overline{\Omega_{32}-\Omega_{41}},\quad \overline{\Omega_{42}}$$

sont respectivement proportionnelles à :

$$1,\quad o,\quad o,\quad a',\quad a,\quad a'',\quad \alpha'',\quad \alpha,\quad \alpha',\quad A',\quad A,\quad A''\quad \text{et}\quad o,\quad o,\quad 1,\ b', \ldots\quad B''.$$

Exprimons que les éléments linéaires (a) et (b) sont en involution et qu'un élément linéaire intégral (ω) est en involution avec (a) et avec (b). Nous obtiendrons ainsi des équations qui traduisent ce fait que l'élément $\mathcal{E}_2$ à deux dimensions défini par (a) et (b) et que l'élément $\mathcal{E}_3$ à trois dimensions défini par (a), (b) et (ω) sont tous deux intégraux. Ces équations montrent que l'on peut exprimer linéairement en ω_1, ω_2, ω_3 les neuf expressions :

$$\varpi_1,\quad \varpi_2,\quad \varpi_3,\quad \overline{\Omega_{12}},\quad \overline{\Omega_{11}-\Omega_{22}},\quad \overline{\Omega_{21}},\quad \overline{\Omega_{31}},\quad \overline{\Omega_{32}-\Omega_{41}},\quad \overline{\Omega_{42}}.$$

Par suite ces équations définissent un seul élément $\mathcal{E}_3$ qui contient l'élément $\mathcal{E}_2$.

En employant les notations du Mémoire de M. Cartan sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales on voit ainsi que le nombre entier r_3 est nul, ce qui exige que le nombre entier s_3 soit aussi nul.

La solution générale du système (1), (2), qui fournit les couples de complexes non spéciaux applicables ne dépend donc certainement pas de fonctions arbitraires à plus de deux arguments. Puisqu'un complexe non spécial, arbitraire, dépend d'une fonction arbitraire à trois arguments, nous devons en conclure qu'en général deux complexes non spéciaux ne sont pas applicables et que sur un complexe non spécial donné arbitrairement on ne peut en général appliquer d'autres complexes. Les complexes non spéciaux sont par suite en général indéformables.

Pour connaître le degré de généralité de la solution du système (1), (2), il faut chercher la valeur de l'entier r_2. Il est facile de vérifier que par un élément linéaire intégral du premier ordre $\mathcal{E}_1$ il passe une infinité d'éléments $\mathcal{E}_2$ dépendant de quatre paramètres; par suite r_2 est égal à 4 et s_2 est égal à 3. La solution générale du système de Pfaff (1) (2), qui fournit les couples de complexes applicables ainsi que la correspondance de droites, dépend donc de trois fonctions arbitraires de deux arguments.

Expressions de Pfaff qui sont égales sur deux complexes non spéciaux applicables. — Considérons deux complexes non spéciaux applicables. Les équations (1) et (2) du paragraphe précédent expriment que les huit expressions de Pfaff

$$\omega_{13},\quad \omega_{14},\quad \omega_{23},\quad \omega_{24},\quad \omega_{33}-\omega_{11},\quad \omega_{44}-\omega_{22},\quad \omega_{34}+\omega_{21},\quad \omega_{43}+\omega_{12}$$

sont égales aux expressions correspondantes du deuxième complexe.

Posons pour abréger en supposant que le premier repère a subi la particularisation fondamentale :

$$\begin{cases} 2a_0 = a'a'' - b^2, & 2a'_0 = a''a - b'^2, \quad 2a''_0 = a'a - b''^2 ; \\ 2b_0 = b'b'' - ab, & 2b'_0 = b''b - a'b', \quad 2b''_0 = bb' - a''b. \end{cases}$$

En vertu des équations (3) du paragraphe précédent, les quatre expressions quadratiques :

$$\begin{gathered} [\omega_1\omega_{31}] + [\omega_2(\omega_{32} - \omega_{41})] + [\omega_3\omega_{42}], \\ -[\omega_1(\omega_{32} - \omega_{41})] + 2[\omega_2\omega_{42}] + a_0[\omega_2\omega_3] + b''_0[\omega_3\omega_1] + b'_0[\omega_1\omega_2], \\ +[\omega_1\omega_{31}] - [\omega_3\omega_{42}] + b''_0[\omega_2\omega_3] + a'_0[\omega_3\omega_1] + b_0[\omega_1\omega_2] \\ 2[\omega_2\omega_{31}] + [\omega_3(\omega_{32} - \omega_{41})] + b'_0[\omega_2\omega_3] + b_0[\omega_3\omega_1] + a''_0[\omega_1\omega_2], \end{gathered}$$

sont égales aux expressions correspondantes du deuxième complexe.

Posons alors :

$$\begin{cases} 2\varphi_1 = 2\omega_{31} - a''_0\omega_1 - 2b_0\omega_2 + a'\omega_3 \\ \varphi_2 = (\omega_{32} - \omega_{41}) - b_0\omega_1 - (a'_0 - b'_0)\omega_2 - b''_0\omega_3 \\ 2\varphi_3 = 2\omega_{42} + a'_0\omega_1 - 2b''_0\omega_2 + a_0\omega_3. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, les quatre expressions quadratiques

$$[\omega_1\varphi_1] + [\omega_2\varphi_2] + [\omega_3\varphi_3],\quad -[\omega_1\varphi_2] + 2[\omega_2\varphi_3],\quad [\omega_1\varphi_1] - [\omega_3\varphi_3],\quad -2[\omega_2\varphi_1] + [\omega_3\varphi_2]$$

doivent être égales aux expressions correspondantes du deuxième complexe.

Cela ne peut d'ailleurs être réalisé que si les trois expressions de Pfaff φ_1, φ_2, φ_3 sont égales aux expressions correspondantes du deuxième complexe.

Remarque sur le choix du deuxième repère — Si deux complexes sont applicables on peut réaliser les équations de Pfaff.

$$\overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = \overline{\Omega_{34} + \Omega_{21}} = \overline{\Omega_{43} + \Omega_{12}} = \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}} = 0.$$

En considérant les équations quadratiques entraînées, on arrive à cette conclusion que le second repère peut encore être modifié sans nuire aux conditions d'applicabilité. Pour cette modification du repère les deux expressions égales

$$E_{32} \quad \text{et} \quad E_{41}$$

ne sont pas nulles et le complexe linéaire qui joue le rôle de Γ_0 est changé. On peut donc supposer que le deuxième repère a été choisi de manière que l'on ait un complexe linéaire tangent déterminé pour jouer le rôle de Γ_0.

Appliquons cette remarque à l'étude de l'applicabilité d'un complexe linéaire non spécial sur un autre complexe. Nous adopterons le complexe linéaire étudié comme complexe Γ_0. Dans ces conditions la forme Γ_0 sera fixe, ce qui entraîne les équations de Pfaff :

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \theta = 0.$$

Déformation des complexes enveloppés par un complexe linéaire dépendant d'un paramètre. — M. Cartan a démontré que dans un espace conforme « les hypersurfaces enveloppes d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre admettent une représentation conforme sur l'hypersphère ». Si on applique ce théorème à l'espace conforme à quatre dimensions on trouve par transposition dans l'espace réglé que les complexes enveloppes d'une famille de complexes linéaires dépendant d'un paramètre sont applicables sur un complexe linéaire.

Faisons la démonstration directe de l'applicabilité d'un complexe linéaire sur un complexe K.

Donnons au repère associé à un complexe K la première particularisation spéciale et supposons le repère complètement choisi. Les paramètres qui fixent la position du repère associé à un complexe linéaire supposé applicable devront satisfaire aux équations de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = \overline{\Omega_{34} + \Omega_{21}} = \overline{\Omega_{43} + \Omega_{12}} = \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}} = 0.$$

$$\Omega_{34} - \Omega_{21} = \Omega_{11} - \Omega_{22} + \Omega_{33} - \Omega_{44} = \Omega_{43} - \Omega_{12} = \Omega_{32} + \Omega_{41} = 0.$$

Ces équations de Pfaff n'entraînent que quatre équations quadratiques extérieures qui exigent pour être satisfaites que l'on ait trois nouvelles équations de Pfaff :

$$\overline{\Omega_{31}} = \overline{\Omega_{32} - \Omega_{41}} = \overline{\Omega_{42}} = 0.$$

Ces dernières équations n'entraînent que l'équation quadratique

$$[\omega_2 \overline{\Omega_{32}}] = 0.$$

Posons donc : $$\overline{\Omega_{32}} = h\omega_2.$$

Cette équation nouvelle de Pfaff entraîne :

$$(1) \qquad 2h[\omega_2(\omega_{22} - \omega_{33})] + [\omega_{32}\omega_2] = [2dh\,\omega_2].$$

Nous pouvons d'ailleurs supposer que le premier repère a été choisi de manière que l'on a :

$$\omega_{12} = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_{21} = 0\,;$$

(il suffit pour cela de profiter de l'indétermination laissée au repère après la première particularisation spéciale).

L'équation (1) devient

$$[dh\omega_2] = 0.$$

D'ailleurs ω_2 est une différentielle totale exacte, car son covariant est nul. Il suffira pour réaliser l'application d'adopter :

$$h = f(p_3)$$

si p_3 est choisi de façon que sa différentielle soit égale à ω_2.

On peut ainsi réaliser d'une infinité de manières, l'application d'un complexe K sur un complexe linéaire, puisque la fonction f est arbitraire.

Les complexes G applicables sur un complexe linéaire. — Donnons au repère associé à un complexe G la première particularisation spéciale. Supposons qu'un complexe linéaire non spécial soit applicable sur le complexe donné. On peut choisir le deuxième repère de manière à avoir :

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Theta = 0,$$

$$\overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = \overline{\Omega_{34} + \Omega_{21}} = \overline{\Omega_{43} + \Omega_{12}} = \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}} = \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}} = 0.$$

Ces équations de Pfaff entraînent quatre équations quadratiques qui exigent que l'on ait :

$$4\overline{\Omega_{31}} = -\omega_1, \qquad \overline{2\Omega_{32} - \Omega_{41}} = +\omega_2, \qquad 4\overline{\Omega_{42}} = -\omega_3.$$

Dès que le premier repère sera complètement choisi, toutes les expressions Ω_{ij} seront donc connues. On aura en effet :

$$2\overline{\Omega_{12}} = -2\overline{\Omega_{43}} = \varpi_3\,; \qquad 2\overline{\Omega_{21}} = -2\overline{\Omega_{34}} = \varpi_1\,; \qquad \overline{2\Omega_{22} - \Omega_{11}} = \varpi_2\,;$$

$$4\overline{\Omega_{31}} = -\omega_1\,; \qquad 4\overline{\Omega_{42}} = -\omega_3\,; \qquad 4\overline{\Omega_{32}} = \omega_2 - 2\theta\,; \qquad 4\overline{\Omega_{41}} = -\omega_2 - 2\theta.$$

D'ailleurs, on a en particulier l'équation quadratique extérieure :

$$(\omega_1 + \omega_3)' = 0.$$

On peut donc choisir les paramètres fondamentaux du complexe G applicable de façon à avoir :

$$\omega_1 + \omega_3 = dp_1.$$

En cherchant les trois familles de surfaces réglées asymptotiques, on trouve que les surfaces de deux familles satisfont à l'équation :

$$\omega_1 + \omega_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad dp_1 = 0.$$

Donc quand un complexe G est applicable sur un complexe linéaire, les surfaces réglées asymptotiques de deux des trois familles s'assemblent en congruences dépendant d'un paramètre.

Déformation d'un complexe spécial. — Donnons-nous un complexe spécial. Imposons au repère associé la particularisation fondamentale. Le système de Pfaff qui fournit les complexes spéciaux applicables est :

$$(1) \qquad \overline{\Omega_{14}} = \overline{\Omega_{13}} = \overline{\Omega_{23}} = \overline{\Omega_{24}} = 0.$$

Ce système n'est pas involutif. On peut d'ailleurs profiter de l'indétermination des repères en prolongeant le système (1) par les deux équations de Pfaff.

$$(2) \qquad \overline{\Omega_{12}} = \overline{\Omega_{34}} = 0.$$

Le système formé par les équations (1) et (2) entraîne cinq équations quadratiques :

$$(3) \quad \begin{cases} [\omega_1 \overline{\Omega_{33} - \Omega_{11}}] = [\omega_1 \overline{\Omega_{21}}] + [\omega_2 \overline{\Omega_{22} - \Omega_{33}}] - [\omega_3 \overline{\Omega_{43}}] = 0. \\ [\omega_3 \overline{\Omega_{44} - \Omega_{22}}] = [\omega_{12} \overline{\Omega_{22} - \Omega_{11}}] + [\omega_1 \overline{\Omega_{32}}] = [\omega_{34} \overline{\Omega_{44} - \Omega_{33}}] - [\omega_3 \overline{\Omega_{32}}] = 0. \end{cases}$$

Il est facile de donner au système (3) une forme simple en donnant au premier repère une première particularisation spéciale qui intéresse les deux expressions ω_{12} et ω_{34}.

Dans le cas général, on peut réaliser les deux équations de Pfaff :

$$(4) \qquad \omega_{12} = -\omega_3, \qquad \omega_{34} = +\omega_1.$$

Il s'agit alors d'un complexe spécial donné à surface non développable comme support. (Dans les cas particuliers où le support est une surface développable, une courbe ou une droite, l'une au moins des deux expressions est nulle).

Plaçons-nous dans ce cas général. Les complexes applicables devront, en vertu des équations (2) avoir pour supports des surfaces non développables et de plus les lignes asymptotiques se correspondent car leurs équations sont :

$$\omega_1^2 - \omega_3^2 = 0, \qquad \Omega_1^2 - \Omega_3^2 = 0.$$

Le système (3), où l'on tient compte des simplifications fournies par (4) est involutif. Les caractères ont pour valeurs respectives

$$s_1 = 5, \qquad s_2 = 1, \qquad s_3 = 0.$$

Il en résulte que le système de Pfaff qui fournit les complexes applicables et la correspondance de droites, admet une solution générale qui dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Mais un complexe spécial dont le support est une surface non développable dépend précisément d'une fonction arbitraire de deux arguments. Il est donc à prévoir que tous les complexes spéciaux dont les supports sont des surfaces non développables sont applicables sur le complexe donné et que par suite les complexes spéciaux admettent tous une déformation du premier ordre.

Il en est effectivement ainsi. Pour le démontrer, on se donne deux complexes spéciaux dont les supports sont des surfaces non développables ; on choisit les deux repères et on considère le système de Pfaff qui fournit les correspondances de droites capables de réaliser une application ; on constate alors que ce système de Pfaff admet toujours des solutions.

APPENDICE

Rapports entre la géométrie réglée de l'espace à trois dimensions et la géométrie conforme de l'espace à quatre dimensions.

M. Cartan a remarqué dans sa communication au Congrès de Strasbourg l'intérêt que présente, pour l'espace réglé E_3 l'étude de l'espace conforme à quatre dimensions $\mathcal{E}_4$.

Tandis que dans l'espace réglé, un complexe linéaire est défini par six coordonnées homogènes x, dans l'espace $\mathcal{E}_4$ une hypersphère est définie par six coordonnées homogènes « hexasphériques » y; tandis que dans E_3 un complexe linéaire est spécial quand ses six coordonnées annulent une certaine forme quadratique $\Phi(x)$, dans l'espace $\mathcal{E}_4$ une hypersphère, point a des coordonnées qui annulent une certaine forme quadratique $\Psi(y)$.

Il est facile d'imaginer que l'on exprime les variables x au moyen des variables y d'une façon linéaire et homogène de telle manière que $\Phi(x)$ se transforme en $\Psi(y)$. On fera ainsi correspondre aux hypersphères de $\mathcal{E}_4$ les complexes linéaires de E_3; aux hypersphères-points de $\mathcal{E}_4$ correspondront les complexes linéaires spéciaux de E_3. A une variété ponctuelle décrite dans $\mathcal{E}_4$ par le centre d'une hypersphère-point on fera correspondre dans E_3 la variété réglée engendrée par la directrice d'un complexe spécial. Aux lignes de courbure d'une hypersurface correspondront les « surfaces asymptotiques » d'un complexe.

L'étude de l'espace réglé s'enrichit donc par transposition de tous les résultats donnés par M. Cartan sur la déformation des hypersurfaces dans l'espace $\mathcal{E}_4$ (1).

(1) *Bull. de la Soc. Math. de France* 1917 et 1918 *: La deformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à n $\geqslant$ 5 dimensions.*

On peut raisonner directement dans l'espace réglé tout en profitant de la symétrie des calculs de l'espace conforme : il suffit de choisir comme repère non plus l'ensemble formé par quatre points mais l'ensemble formé par six complexes *linéaires* convenablement choisis et de considérer le complexe linéaire spécial comme élément générateur de l'espace.

Adopter pour repère mobile l'ensemble des quatre points $a_1 a_2 a_3 a_4$ revient à adopter un repère formé par six complexes spéciaux dont les directrices forment les arêtes du tétraèdre $a_1 a_2 a_3 a_4$. On peut adopter comme repère six complexes quelconques A_1 A_2 A_3 A M N pourvu que leurs formes soient indépendantes ; tout complexe linéaire γ sera défini par six coordonnées homogènes telles que l'on ait :

$$\gamma = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha A + \mu M + \nu N$$

et le complexe γ sera spécial et par suite servira à définir une droite si l'on a

$$\gamma \mid \gamma = \alpha_1^2 A_1 \mid A_1 + 2\alpha_1\alpha_2 A_1 \mid A_2 + \ldots = 0.$$

Pour étudier un complexe linéaire non spécial engendré par la droite r et admettant pour complexe tangent le complexe linéaire de forme $r_1 + r'_1$ il est commode d'adopter comme repère l'ensemble des six complexes :

$$M = r \quad N = 2r' \quad A = r_1 + r'_1 \quad A_1 = ir_1 - ir'_1$$
$$A_2 = r_2 + r'_2 \quad A_3 = ir_2 - ir'_2$$

Dans ces conditions un complexe linéaire γ est spécial si l'on a :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha^2 + 2\mu\nu = 0.$$

Si nous réservons pour un nouvel usage les symboles ω_1, ω_2, ω_3, le déplacement infiniment du repère est caractérisé par les six équations :

$$(1)\left\{\begin{aligned}
dM &= \theta M + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3.\\
dA_1 &= -\chi_1 M - \omega_1 N + \varpi_{12} A_2 + \varpi_{13} A_3 + \psi_1 A.\\
dA_2 &= -\chi_2 M - \omega_2 N + \varpi_{21} A_1 + \varpi_{23} A_3 + \psi_2 A.\\
dA_3 &= -\chi_3 M - \omega_3 N + \varpi_{31} A_1 + \varpi_{32} A_2 + \psi_3 A.\\
dA &= -\chi M - \Psi_1 A_1 - \Psi_2 A_2 - \psi_3 A_3.\\
dN &= -\theta N + \chi_1 A_1 + \chi_2 A_2 + \chi_3 A_3 + \chi A.
\end{aligned}\right.$$

Les expressions θ, ω, χ, ψ, ϖ sont définies par :

$$(2)\left\{\begin{aligned}
&2\theta = (\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{44}),\\
&2\omega_1 = \omega_{24} - \omega_{13}, \quad \omega_2 = i\omega_{23}, \quad 2\omega_3 = -i(\omega_{24} + \omega_{13}),\\
&\chi_1 = \omega_{31} - \omega_{42}, \quad \chi_2 = i(\omega_{41} - \omega_{32}), \quad \chi_3 = -i(\omega_{31} + \omega_{42}), \quad \chi = -(\omega_{32} + \omega_{41}),\\
&2\psi_1 = \omega_{12} - \omega_{21} + \omega_{34} - \omega_{43}, \quad 2\psi_2 = -i(\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}), \quad 2\psi_3 = i(\omega_{12} + \omega_{21} - \omega_{34} - \omega_{43}),\\
&2\varpi_{12} = -2\varpi_{21} = -i(\omega_{12} + \omega_{21} + \omega_{34} + \omega_{43}), \quad 2\varpi_{13} = -2\varpi_{31} = -i(\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44}),\\
&2\varpi_{23} = -2\varpi_{32} = -\omega_{12} + \omega_{21} + \omega_{34} - \omega_{43}
\end{aligned}\right.$$

Les formules (1) ne sont autres que les équations qui caractérisent le déplacement infiniment petit du repère de l'espace $\mathcal{E}_4$ où M et N sont deux hypersphères-points et les A des hypersphères : on obtient les équations fournies par M. Cartan et indiquer : (1)

Les covariants bilinéaires des expressions θ, ω, χ, ψ, ϖ, sont fournis, comme on peut aisément le vérifier directement par les formules données dans $\mathcal{E}_4$ par M. Cartan.

Les relations (2) sont très utiles pour transposer dans l'espace réglé des calcul effectués dans l'espace conforme.

---

(1) Afin d'avoir les mêmes notations que M. Cartan, j'ai employé dans l'Appendice des symboles A_i pour désigner des complexes linéaires tandis que j'ai utilisé, dans le courant du Mémoire, ces symboles pour représenter des points.

TABLE DES MATIÈRES