

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

R. RISSER

**Essai sur la théorie des ondes par émerision**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1925

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1925\\_\\_53\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__53__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :  
1832

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. R. RISSER

Chef du Service de l'Actuariat du Ministère du Travail.

1<sup>re</sup> THÈSE. — ESSAI SUR LA THÉORIE DES ONDES PAR ÉMERSION.

2<sup>e</sup> THÈSE. — CHOCS ET PERCUSSIONS.

Soutenues le <sup>31 MARS</sup> 1925, devant la Commission d'examen.

MM. KOENIGS, *Président.*  
GOURSAT, } *Examineurs.*  
E. BOREL, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>e</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins. 55

1925

## FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.	
Doyen.....	MOLLIARD, Professeur, Physiologie végétale.
Doyen honoraire.....	P. APPELL.
Professeurs honoraires.	P. PUISEUX, Ch. VÉLAIN et BOUSSINESQ
	ÉMILE PICARD..... Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	KOENIGS..... Mécanique physique et expérimentale.
	GOUSAT..... Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER..... Chimie organique.
	JOANNIS..... Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET..... Électrotechnique générale.
	WALLERANT..... Minéralogie.
	ANDOYER..... Astronomie.
	PAINLEVÉ..... Mécanique analytique et Mécanique céleste
	HAUG..... Géologie.
	H. LE CHATELIER... Chimie générale.
	GABRIEL BERTRAND.. Chimie biologique.
	M <sup>me</sup> P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ..... Chimie appliquée.
	G. URBAIN..... Chimie minérale.
	ÉMILE BOREL..... Calcul des probabilités et Physique mathém.
	MARCHIS..... Aviation.
	JEAN PERRIN..... Chimie physique.
	ABRAHAM..... Physique.
	CARTAN..... Mécanique rationnelle.
	LAPICQUE..... Physiologie.
	GENTIL..... Géographie physique.
	VESSIOT..... Théorie des groupes et Calcul des variations.
	COTTON..... Physique générale.
Professeurs.....	DRACH..... Application de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY..... Physique.
	CHARLES PÉREZ..... Zoologie.
	LÉON BERTRAND..... Géologie appliquée et Géologie régionale.
	LESPICHAU..... Théories chimiques.
	LEDUC..... Physique théorique et Physique céleste.
	RABAUD..... Biologie expérimentale.
	PORTIER..... Physiologie comparée.
	DANGEARD..... Botanique.
	MONTEL..... Mathématiques générales.
	MAURAIN..... Physique du globe.
	WINTREBERT..... Anatomie et Histologie comparées.
	DUBOSCO..... Biologie maritime.
	N..... Géométrie supérieure.
	HEROUARD..... Zoologie.
	REMY PERRIER..... Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC..... Physique théorique et Physique céleste.
	BLAISE..... Chimie organique.
	PECHARD..... Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER..... Chimie analytique.
	M. GUICHARD..... Chimie minérale.
	GUILLET..... Physique.
	JULIA..... Mathématiques générales.
	MAUGUIN..... Minéralogie.
	BLARINGHEM..... Botanique.
	MICHEL-LEVY..... Pétrographie.
Secrétaire.....	D. TOMBECK.

**A MA FEMME**





A

**MM. KÖENIGS, BOREL ET GOURSAT,**

MEMBRES DE L'INSTITUT,

A

**M. FICHOT,**

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE GÉNÉRAL, CHEF DU SERVICE HYDROGRAPHIQUE DE LA MARINE,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

Hommage de ma profonde et respectueuse reconnaissance.



---

# PREMIÈRE THÈSE

---

## ESSAI

SUR

# LA THÉORIE DES ONDES PAR ÉMERSION

---

Historique.

Une masse liquide d'une profondeur indéfinie est au repos; on la met en mouvement par l'action de forces impulsives appliquées à sa surface (effet d'un coup de vent), ou par l'émerision d'un corps solide: dans le premier cas, il se produit des ondes dites *par impulsion*; dans le second, des ondes *par émerision*. Nous nous proposons d'étudier ici de semblables ondes, dans l'hypothèse où le liquide est contenu dans un canal d'une largeur constante, dont les bords sont constitués par des plans verticaux parallèles; nous supposerons que les causes du mouvement sont telles que ce mouvement se produise aussi bien dans le sens de la longueur que dans le sens de la largeur.

Laplace est le premier qui ait cherché à soumettre la question à l'analyse. Dans son essai publié en 1776, il forme l'équation du mouvement des fluides pesants et incompressibles, en supposant que les déplacements et les vitesses sont des infiniment petits dont on peut négliger les carrés et produits, comme l'ont supposé d'ailleurs tous ceux qui ont fait des recherches dans ce domaine. Il considère le liquide contenu dans un canal, le mouvement se faisant uniquement

dans le sens de la longueur, et en donnant à la surface du fluide une forme sinusoïdale définie par l'équation  $z = \cos ax$ .

Laplace admet que la surface a été déformée dans toute son étendue, alors qu'en réalité, lorsque l'on produit des ondes à la surface d'un fluide, c'est seulement une partie de la surface que l'on déforme.

Vers 1785, Lagrange traita le problème des ondes, dans le cas où le fluide est contenu dans un canal de profondeur constante et très petite. Il démontre qu'alors la propagation des ondes a lieu suivant les mêmes lois que celle du son, et que la vitesse de propagation est indépendante de l'ébranlement primitif; il trouve de plus, lorsque le liquide est contenu dans un canal qui a même largeur dans toute son étendue, que cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur. Il suppose enfin que le mouvement produit à la surface d'un fluide incompressible, d'une profondeur quelconque, ne se transmet qu'à de très petites distances au-dessous de cette surface, et il en conclut que les résultats de son analyse sont valables, même dans le cas où la profondeur du fluide est quelconque. Si donc l'observation faisait connaître la distance à laquelle le mouvement est insensible, la vitesse de la propagation des ondes à la surface serait proportionnelle à la racine carrée de cette distance, et réciproquement, si cette vitesse est mesurée directement, on en pourra déduire la petite profondeur à laquelle le mouvement parvient.

Nous verrons que cette conclusion n'est pas légitime, et que le mouvement se transmet dans toute la masse fluide, et est encore sensible à des distances notables de la surface.

En 1815, l'Académie des Sciences proposa comme sujet de concours le problème suivant :

« Une masse fluide pesante, primitivement au repos et d'une profondeur indéfinie, a été mise en mouvement par l'effet d'une cause donnée; on demande, au bout d'un temps déterminé, la forme de la surface extérieure du fluide et la vitesse de chacune des molécules situées à cette même surface. »

Le Mémoire couronné fut celui de Cauchy; il est reproduit au Tome I, des *Mémoires des Savants étrangers* de la nouvelle Académie des Sciences, et au Tome I (série I) de ses *Œuvres complètes*. A la même époque, Poisson donne la solution du même problème dans deux mémoires lus à l'Académie des Sciences, les 12 octobre et 18 décembre 1815, qui furent réunis en un seul intitulé : *Théorie des Ondes*, où il ne s'occupe que des ondes par émerision. Il est probable que Cauchy et Poisson ont obtenu leurs résultats en même temps, et en tout cas, il est certain que Poisson connaissait les travaux de Cauchy bien avant que celui-ci eût déposé son Mémoire à l'Institut; voici en effet un passage du mémoire de ce dernier :

« Le mouvement des ondes n'est pas uniforme, ainsi que M. Lagrange l'a supposé dans sa *Mécanique analytique*, mais uniformément accéléré. Avant d'obtenir les intégrales générales des équations du mouvement, j'avais été déjà conduit par des considérations particulières, à soupçonner ces résultats et j'en avais fait la remarque à M. Laplace. Mais je n'osais m'arrêter à cette idée, lorsque M. Poisson m'y confirma. . . . »

Nous analyserons tout d'abord ces importants Mémoires de Cauchy et de Poisson, et conserverons les notations de ces géomètres afin que le lecteur puisse facilement se reporter aux Mémoires originaux; toutefois, en conformité avec un usage de plus en plus répandu, lorsque nous aurons à considérer trois axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , nous prendrons  $Oz$  vertical et nous substituerons à l'expression molécule fluide, celle de particule fluide.

Lorsque le mouvement s'effectuera parallèlement à un plan (que nous choisirons comme plan des  $xz$ ), de façon que dans aucune des fonctions du problème n'intervienne la variable  $y$ , nous dirons que l'on a traité un mouvement plan, ou encore que l'on se trouve dans le cas de deux dimensions; c'est ce qui se passe lorsque l'on étudie les ondes produites par l'émerision d'un cylindre dont les génératrices sont

perpendiculaires à l'axe  $Ox$  du canal et qui occupe toute la largeur du canal.

Si le milieu où se produisent les ondes est indéfini dans tous les sens, ou si le cylindre peu immergé dans un canal à bords verticaux de largeur constante et de profondeur indéfinie n'a point ses génératrices perpendiculaires à l'axe, ou s'il n'obstrue pas toute la largeur du canal, on a à étudier un mouvement à trois dimensions; il en est de même si le corps est différent d'un cylindre (sphère, ellipsoïde, paraboloidé, etc.).

Il ne faut pas oublier que dans cette étude nous négligerons toujours les carrés et les produits des déplacements et des vitesses.

*Analyse du Mémoire de Cauchy.* — Cauchy a divisé son Mémoire en trois Parties. La première Partie est consacrée à la détermination de l'état initial de tout le fluide, en supposant données, à l'origine la forme de la surface fluide, et les forces agissant sur elle. Le problème, qui n'est autre que celui de Dirichlet, revient à déterminer une fonction harmonique définie dans tout le fluide, cette fonction étant assujettie à prendre des valeurs données à la surface  $z = 0$  et devant s'annuler asymptotiquement à l'infini; il se résout par la considération des potentiels.

Dans la seconde Partie, Cauchy a établi, pour la première fois, les équations des mouvements tourbillonnaires, et en a déduit la première démonstration rigoureuse de l'existence du potentiel des vitesses; il donne ensuite les équations représentant à un moment quelconque l'état de la masse fluide et celui de la surface.

Dans la troisième Partie, Cauchy déduit des formules qu'il vient d'établir les lois générales du mouvement considéré et détermine les valeurs générales des constantes qui rentrent dans ces lois.

Cauchy a traité non seulement le problème dans le cas des ondes d'émersion, mais encore dans le cas des ondes par impulsion.

Désignons par  $\delta$  la densité du liquide;  $u, v, w$ , les composantes de

la vitesse d'une particule fluide suivant les trois axes ; par  $q$  le potentiel des vitesses. Les quantités  $U, V, W, Q$  représentent respectivement les composantes de la vitesse d'une particule de la surface, et la valeur de  $q$  pour  $z = 0$ .

L'équation du solide primitivement immergé sera

$$z = F(x) \quad \text{ou} \quad z = F(x, y)$$

suivant que l'on étudiera le mouvement plan ou le mouvement à trois dimensions.

Nous admettrons que l'ordonnée  $z$ , relative au solide immergé, est *très petite*, qu'il en est de même à tous les instants des composantes  $u, v, w$ , et rappellerons que Cauchy, dans son Mémoire, désigne par  $a, b, c$  les coordonnées des points qui sont à la surface libre du liquide.

Rappelons maintenant les équations du problème, que nous établirons plus loin :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0, \\ u = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ v = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial q}{\partial y}, \\ w = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial q}{\partial z}, \\ p = \frac{\partial q}{\partial t} - g z \delta; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 Q}{\partial t^4} + g^2 \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) = 0, \\ Z = -\frac{1}{g \delta} \frac{\partial Q}{\partial t}, \\ U = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ V = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ W = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial Q}{\partial z}. \end{array} \right.$$



L'équation de la surface libre au temps  $t = 0$  est donnée.

Bornons-nous à exposer rapidement la méthode employée par Cauchy pour déterminer le potentiel  $q$ , dans le cas du problème à deux dimensions, en supposant que l'on prenne des unités telles que la densité du fluide et l'accélération de la pesanteur soient égales à l'unité.

On est conduit à résoudre le système

$$(3) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^4 Q}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad \text{pour } z = 0.$$

L'intégrale de l'équation (3) est

$$q = \sum \int_0^\infty \cos mx e^{-mz} f(m, t) dm + \sum \int_0^\infty \cos mx e^{mz} f_1(m, t) dm,$$

où  $f$  et  $f_1$  désignent des fonctions arbitraires de  $m$  et du temps  $t$ ; le signe  $\sum$  indique la somme de l'intégrale correspondant au signe  $\int$  qui lui est rattaché, et de celle obtenue en substituant  $\sin mx$  à  $\cos mx$ , et une fonction  $\varphi$  à la fonction  $f$ .

Il est évident que du fait que  $q$  ne devient pas infini aux grandes profondeurs, il ne faut dans  $q$  conserver que le premier élément  $\Sigma$  :

$$(6) \quad q = \sum \int_0^\infty \cos mx e^{-mz} f(m, t) dm;$$

dans ces conditions,

$$(6') \quad Q = (q)_{z=0} = \sum \int_0^\infty \cos mx f(m, t) dm.$$

Quant à la valeur de  $\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_{z=0}$ , elle est égale à

$$\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_{z=0} = - \sum \int_0^\infty \cos mx f(m, t) m dm.$$

L'équation (4) a pour intégrale générale (voir Note X du Mémoire de Cauchy)

$$(7) \quad Q = \sum \int_0^{\infty} \cos mx e^{\sqrt{m}t} \zeta(m) dm + \sum \int_0^{\infty} \cos mx e^{-\sqrt{m}t} \xi(m) dm \\ + \sum \int_0^{\infty} \cos mx \cos(\sqrt{m}t) \varphi(m) dm \\ + \sum \int_0^{\infty} \cos mx \sin(\sqrt{m}t) \psi(m) dm.$$

L'expression de Q renferme huit fonctions

$$[\zeta(m), \zeta_1(m), \dots, \psi(m), \psi_1(m)].$$

Comme Q ne peut devenir infinie pour  $t$  infini, il faut que les fonctions  $\zeta(m)$  et  $\zeta_1(m)$  soient nulles. Ceci étant, on voit que

$$(8) \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \sum \int_0^{\infty} \cos mx \left[ e^{-\sqrt{m}t} \xi(m) - \cos(\sqrt{m}t) \varphi(m) - \sin(\sqrt{m}t) \psi(m) \right] m dm.$$

Si l'on tient compte maintenant des équations (6') et (7), on trouve :

$$\sum \int_0^{\infty} \cos mx f(m, t) dm \\ = \sum \left[ \int_0^{\infty} \cos mx \left\{ e^{-\sqrt{m}t} \xi(m) + \cos \sqrt{m}t \varphi(m) + \sin \sqrt{m}t \psi(m) \right\} \right] dm.$$

L'identification des valeurs de Q conduit à prendre

$$f(m, t) = e^{-\sqrt{m}t} \xi(m) + \cos \sqrt{m}t \varphi(m) + \sin \sqrt{m}t \psi(m).$$

Eu égard à l'équation (5), on voit que l'on a

$$f(m, t) = -e^{-\sqrt{m}t} \xi(m) + \cos \sqrt{m}t \varphi(m) + \sin \sqrt{m}t \psi(m).$$

La comparaison des deux valeurs de  $f(m, t)$  montre que l'on a

$$\xi(m) = 0$$

et

$$f(m, t) = \cos(\sqrt{m}t) \varphi(m) + \sin(\sqrt{m}t) \psi(m).$$

Dans ces conditions, les expressions de  $q$  et  $Q$  peuvent s'écrire

$$(9) \quad \begin{cases} q = \sum \int_0^{\infty} \cos mx e^{-mz} [\cos(\sqrt{m}t) \varphi(m) + \sin(\sqrt{m}t) \psi(m)] dm, \\ Q = \sum \int_0^{\infty} \cos mx [\cos(\sqrt{m}t) \varphi(m) + \sin(\sqrt{m}t) \psi(m)] dm. \end{cases}$$

Si l'on se borne aux ondes par émergence, on sait que les conditions initiales sont définies par les équations  $\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{t=0, z=0} = F(x)$  fonction connue représentant la dénivellation initiale du fluide, et  $Q_{t=0} = 0$ .

Les fonctions  $\varphi(m)$  et  $\psi(m)$  seront alors déterminées par les équations

$$(10) \quad \begin{cases} F(x) = \sum \int_0^{\infty} \cos mx \psi(m) \sqrt{m} dm, \\ 0 = \sum \int_0^{\infty} \cos mx \varphi(m) dm. \end{cases}$$

En tenant compte de ce que la seconde équation du système (10) est satisfaite avec  $\varphi(m) = 0$ , et en éliminant  $\psi(m)$  entre la première équation (10) et la première équation (9), on trouve (*voir Note XI du Mémoire de Cauchy*),

$$q = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \sin(\sqrt{\mu}t) \cos \mu(\varpi - x) e^{-\mu z} F(\varpi) d\varpi \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}},$$

qui est l'intégrale cherchée.

Cauchy suppose que  $F(\varpi)$  n'a de valeur sensible qu'entre des limites très étroites, et pour de petites valeurs de  $\varpi$ ; il pose

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varpi) d\varpi,$$

et est conduit à transformer la valeur précédente de  $q$  qui devient

$$q = \frac{G}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\sqrt{\mu}t) \cos \mu x e^{-\mu z} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}.$$

Dans le cas où le milieu est indéfini (cas de trois dimensions), Cauchy en employant une méthode analytique, en tous points identique à celle qui vient d'être exposée, trouve pour le potentiel des vitesses :

$$q = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\sqrt{\mu\nu} \cdot t) \sin\nu \cos \frac{[(\varpi - x)^2 + (\rho - y)^2]\mu}{4} e^{-\sqrt{\mu\nu}z} \\ \times F(\varpi, \rho) d\varpi d\rho \frac{d\mu d\nu}{\sqrt{\mu\nu}},$$

où  $F(x, y)$  est l'équation représentative de la dénivellation de la surface libre.

En supposant que  $F(\varpi, \rho)$  n'a de valeur sensible que pour de très petites valeurs de  $\varpi$  et  $\rho$ , et que l'on représente par

$$G = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} F(\varpi, \rho) d\varpi d\rho,$$

on constate que le potentiel  $q$  a alors pour expression

$$(11) \quad q = \frac{G}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin\sqrt{\mu\nu} t \sin\nu \cos \frac{(x^2 + y^2)\mu}{4} e^{-\sqrt{\mu\nu}z} \frac{d\mu d\nu}{\sqrt{\mu\nu}}.$$

Dans la troisième Partie de son Mémoire, Cauchy a déduit les conséquences suivantes de ses formules :

Au début, les vitesses sont nulles, mais elles atteignent rapidement une valeur sensible; la surface se couvre de petites ondes dont les sommets sont déterminés par les points dont l'élévation ou l'abaissement est maximum.

L'examen des formules montre que les vitesses initiales sont nulles, que le mouvement s'évanouit aux grandes profondeurs et que les vitesses sont indépendantes de la densité.

La vitesse de chaque onde est indépendante de la portion du liquide

soulevée ou déprimée à l'origine du mouvement, et est aussi indépendante de la forme de cette portion du fluide; elle est proportionnelle au temps.

Les hauteurs des ondes décroissent comme l'inverse du carré du temps (dans le cas de deux dimensions), et comme l'inverse de sa quatrième puissance (dans le cas de trois dimensions).

La hauteur de chaque onde est proportionnelle au volume de la portion du liquide soulevée ou déprimée à l'origine du mouvement.

Cauchy dans son *Mémoire* n'a étudié que le mouvement à la surface; il ne s'est point préoccupé de ce qui se produit à l'intérieur du liquide.

*Analyse du Mémoire de Poisson.* — Après avoir renvoyé le lecteur à son *Traité de mécanique*, Poisson rappelle les équations indéfinies du problème :

$$(1) \quad \frac{p}{\rho} - gz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

où  $\varphi$  désigne le potentiel des vitesses,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $t$  le temps,  $p$  la pression. Le plan  $xOy$  est horizontal et confondu avec celui du niveau général du fluide,  $Oz$  est vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Poisson fait les mêmes hypothèses en ce qui concerne les déplacements et les vitesses d'une particule, et en néglige les carrés et les produits; il a étudié le cas d'un fluide de profondeur  $h$ , et a appliqué ses résultats aux cas de  $h$  petit et de  $h$  infini.

En supposant la profondeur  $h$  finie, et constante, les conditions aux limites sont :

$$(3) \quad g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } z = 0),$$

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (\text{pour } z = h).$$

Après avoir ainsi formé les équations du problème (1), (2), (3)

et (4), Poisson étudie tout d'abord le cas afférent à deux dimensions  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\right)$ , et cherche à satisfaire à ces équations; il est ainsi conduit à l'expression suivante de  $\varphi$  :

$$(5) \quad \varphi = \sum B [e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}] \cos(ax + a') \sin ct \\ + \sum B' [e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}] \cos(ax + a') \cos ct,$$

dans laquelle les sommes  $\sum$  s'étendent à toutes les valeurs possibles des constantes B, B', a et a', et où la constante c est définie par

$$c^2 = ga \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}}.$$

Si l'on suppose connues les valeurs de la fonction  $\varphi$  et de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , répondant à  $z = 0$ ,  $t = 0$ ,

$$\varphi = F(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x),$$

on voit de suite que l'on a, en partant de (5) :

$$(\varphi) = F(x) = \sum B' [e^{ah} + e^{-ah}] \cos(ax + a'), \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = f(x) = \sum Bc [e^{ah} + e^{-ah}] \cos(ax + a');$$

faisant état pour la représentation des fonctions  $f(x)$  et  $F(x)$  de l'intégrale de Fourier, on trouve immédiatement pour a, a' et B les valeurs suivantes :

$$a' = -a\alpha, \\ B' = \frac{F(\alpha) da d\alpha}{\pi(e^{ah} + e^{-ah})}, \quad B = \frac{f(\alpha) da d\alpha}{\pi c(e^{ah} + e^{-ah})}.$$

On trouve en définitive que  $\varphi$  est représentée par :

$$(6) \quad \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} f(\alpha) \left[ \frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \right] \cos(ax - a\alpha) \frac{\sin ct}{c} da d\alpha \\ + \frac{1}{\pi} \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} F(\alpha) \left[ \frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \right] \cos(ax - a\alpha) \cos ct da d\alpha.$$

Si l'on ne considère que le phénomène relatif aux ondes par émer-sion, il y a lieu de supprimer dans l'expression de  $\varphi$  la deuxième inté-grale double.

En supposant dans cette dernière hypothèse la profondeur du canâl infinie, on trouve en partant de (6) :

$$(6') \quad \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} f(\alpha) e^{-az} \cos(ax - a\alpha) \frac{\sin t\sqrt{ag}}{\sqrt{ag}} da d\alpha.$$

Si l'on admet enfin que  $f(\alpha)$  n'a de valeur sensible que pour de très petites valeurs de  $\alpha$ , et que l'on pose

$$A = \int_{\alpha=-}^{\alpha=+l} f(\alpha) d\alpha,$$

après avoir remplacé  $f(x)$  par  $gf(x)$ , on constate que l'expression du potentiel peut se mettre sous la forme

$$(7) \quad \varphi = \frac{A\sqrt{g}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-az} \cos ax \sin(t\sqrt{ag}) \frac{da}{\sqrt{a}},$$

qui ne diffère pas de celle trouvée par Cauchy.

On peut remarquer, avec Poisson, que l'expression (6) de  $\varphi$  satis-fait à l'équation (3), non seulement pour  $z = 0$ , mais pour une valeur quelconque de  $z$ , ce qui prouve que cette équation (3) est une équation *indéfinie* du problème.

Après avoir intégré les équations du problème, Poisson étudie les premières, puis les dernières vitesses des particules fluides, en se ser-vant de développements en série, qu'il obtient par des transformations assez complexes, transformations qui ont été un peu simplifiées par Plana (*voir* Tome XXV des *Mémoires de l'Académie de Turin*), et plus tard par Résal (*voir* Tome VII, *Traité de Mécanique générale*).

Poisson étudie le mouvement des ondes à la surface, puis à une grande distance du centre d'ébranlement, et arrive aux mêmes conclu-sions que Cauchy, à savoir que le mouvement de propagation des ondes est uniformément accéléré; il étudie aussi le mouvement sur Oz,

remarque que les excursions verticales des molécules situées au-dessous de l'ébranlement primitif sont en raison inverse de la profondeur  $z$ , que les vitesses de ces molécules, à l'instant du maximum, varient suivant  $z^{-\frac{3}{2}}$ . Poisson a appliqué les mêmes procédés analytiques pour le cas de trois dimensions et a trouvé, pour valeur du potentiel dans l'hypothèse où l'on ne fait intervenir que les ondes d'émerision,

$$(8) \quad \varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \cos(ax - a\alpha) \cos(by - b\beta) \\ \times \frac{\sin(t\sqrt{g^4\sqrt{a^2+b^2}})}{\sqrt{g^4\sqrt{a^2+b^2}}} da db d\alpha d\beta$$

(voir pages 137 et 138 du Mémoire de Poisson).

Supposons que  $f(\alpha, \beta)$  n'ait de valeur sensible que pour de petites valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , posons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = A;$$

nous voyons immédiatement que, s'il s'agit d'un point  $(x, y, z)$  tel que  $\alpha$  et  $\beta$  soient respectivement très petits par rapport à  $x$  et  $y$ , le potentiel peut s'écrire sous une forme simple :

$$(9) \quad \varphi = \frac{A}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \cos ax \cos by \frac{\sin(t\sqrt{g^4\sqrt{a^2+b^2}})}{\sqrt{g^4\sqrt{a^2+b^2}}} da db.$$

Cette expression du potentiel  $\varphi$  peut être ramenée à la forme (11) donnée par Cauchy (voir plus haut p. 121), grâce à une transformation indiquée par Cauchy lui-même dans la Note XI de son Mémoire. Poisson a étudié la propagation du mouvement à la surface et sur la verticale du centre d'ébranlement; dans la propagation des ondes à la surface du fluide, il a distingué deux époques différentes : celle où le temps n'est pas encore très considérable, et celle où la quantité  $gt^2$  est devenue très grande par rapport à  $r$  [ $r$ , distance du centre d'ébranlement au point  $(xy)$ ], de manière que  $\frac{gt^2}{r}$  soit du même ordre de grandeur



que  $\frac{r}{l}$  et  $\frac{r}{l'}$  [ $l$  et  $l'$  étant les axes de la section par  $z = 0$ , du paraboloidé osculateur  $z = h \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l'^2} \right)$  à la surface d'émerision].

Poisson a comparé les résultats de sa théorie avec quelques expériences faites antérieurement par Biot, qui ne semblent pas très susceptibles de servir d'épreuve à la théorie.

Des expériences plus nombreuses et plus précises sur les ondes d'émerision ont été faites par Bidone en 1819, en vue de la vérification de la théorie de Poisson; les résultats ont été consignés dans la deuxième Partie d'un Mémoire intitulé : *Expériences sur le remous et la propagation des ondes*, publié en 1820, dans les *Mémoires de l'Académie de Turin*. Les ondes par émerision étaient produites en immergeant très peu profondément dans un canal en maçonnerie des segments cylindriques en bois tourné dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe en longueur du canal, attendant que le liquide revienne au repos et soulevant ensuite rapidement les segments.

Si l'on note les temps mis par les deux premières ondes pour passer du centre d'ébranlement à des points dont les distances à ce centre sont inférieures à 30 pieds, et si, d'autre part, on prend leurs différences avec les temps calculés, on constate que ces différences ne dépassent guère  $\frac{1}{10}$  de seconde; la concordance est moins satisfaisante pour des points situés au delà de 30 pieds du lieu d'émerision.

Bidone, grâce à un dispositif fort simple, a montré que les ondes se propagent à une profondeur sensible; il a de plus constaté, dans deux expériences afférentes à un milieu indéfini, que l'accord entre les résultats fournis respectivement par l'expérience et le calcul est remarquable. Le problème de la théorie des ondes liquides par émerision et par impulsion a été repris par M. Boussinesq, dans les deux cas envisagés (2 et 3 dimensions), par une méthode absolument différente de celles utilisées par Poisson et Cauchy, et aussi plus simple qui permet une étude plus détaillée du phénomène; c'est ainsi que M. Boussinesq a pu analyser le mouvement dans le voisinage du centre d'ébranlement,

dans le cas de deux dimensions, ce qui est absolument impossible avec les méthodes de Poisson et Cauchy.

Ses résultats ont été publiés intégralement dans un Ouvrage intitulé : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'analyse*, et partiellement dans le Tome II (fasc. II), de son *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*; nous exposerons, dans le prochain Chapitre, la méthode de M. Boussinesq.

M. Rousier, dans sa Thèse soutenue en 1908 devant la Faculté des Sciences de Paris, a, dans le cas de deux dimensions, déterminé la dénivellation initiale dans toute la masse fluide, et étudié le mouvement sur une droite d'inclinaison quelconque partant du centre d'ébranlement. Utilisant comme expression du potentiel  $\varphi$ , celle indiquée par M. Boussinesq, M. Rousier, grâce à une intégration le long d'un certain contour dans le plan de la variable complexe, trouve la valeur de la dénivellation  $h$  :

$$(10) \quad h = \frac{S}{\pi r} \left[ \cos \theta - \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\cos(n+1)2\theta}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)} - \frac{\cos(2n+3)\theta}{\gamma^{2n+2} 1.3.5 \dots (4n+3)} \right\} \right],$$

dans laquelle  $S$  représente l'aire de la section droite du cylindre immergé,  $r$  la distance du centre d'ébranlement  $O$  au point  $M(x, z)$ ,  $\theta$  l'angle de la verticale  $Oz$  avec  $OM$ ,  $t$  désigne le temps avec  $\frac{t}{\gamma} = \frac{t^2}{2r}$ ; il montre ainsi, en ayant recours à la forme même du développement de  $h$ , que le mouvement est uniformément accéléré dans toute direction et applique ses résultats aux particules fluides situées en des points  $(O, z)$  et  $(x = z, z)$ .

M. Vergne, dans sa Thèse soutenue en 1909 devant la Faculté des Sciences de Paris, a étudié les ondes d'émergence ou d'impulsion, produites dans un milieu indéfini, dans le cas de deux et trois dimensions; il a identifié, dans les deux cas, le potentiel des vitesses obtenu par

M. Boussinesq avec celui de Poisson. M. Vergne a d'ailleurs trouvé par une voie beaucoup plus courte et plus élégante, que celles utilisées jusqu'à ce jour, le potentiel  $\varphi$  des vitesses et la dénivellation  $h$ , dans l'hypothèse d'une *surface d'émerision ou d'impulsion* infiniment petite et d'un bassin indéfini en tous sens.

Il a mis alors le potentiel  $\varphi$  sous la forme suivante :

$$(11) \quad \varphi = \frac{dq}{2\pi} \left[ \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(m+2)(m+3)\dots(2m+1)r^{m+2}} P_{m+1}(\cos\theta) \right],$$

$r$  étant la distance du centre d'ébranlement au point  $(x, y, z)$ ,  $P_{m+1}$ , le polynome de Legendre d'ordre  $(m+1)$ , apparaissant dans le développement de

$$(1 - 2x \cos\theta + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n P_n(\cos\theta),$$

et  $t$  le temps; quant à l'angle  $\theta$ , il est défini par la relation

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ce même auteur a ensuite abordé l'étude des oscillations d'un liquide pesant, dans un vase de forme quelconque et en a fait l'application à quelques cas particuliers.

Dans un Mémoire intitulé : *Sur une importante simplification de la théorie des ondes que produisent à la surface d'un liquide l'émerision d'un solide ou l'impulsion d'un coup de vent*, publié dans les *Annales de l'École Normale supérieure* en 1910, M. Boussinesq a dégagé les points intéressants des travaux de MM. Rousier et Vergne, et a mis en évidence par des procédés élégants les formules (10) et (11) indiquées ci-dessus; il a de plus signalé une manière de traiter, au moins dans certains cas, le même problème des ondes, pour des bassins horizontalement limités.

Avant de passer aux études plus récentes, nous devons — comme nous l'a fait remarquer M. Fichot — signaler spécialement les travaux

de M. Lamb<sup>(1)</sup> qui a, en 1906, mis en lumière d'une manière élégante les formes du potentiel des vitesses signalées ultérieurement par M. Rousier dans le cas de deux dimensions, et par M. Vergne dans le cas d'un milieu indéfini.

*Cas des ondes cylindriques.* — M. Lamb écrit immédiatement la dénivellation élémentaire  $\eta = \cos \sigma t \cos kx$ , et le potentiel correspondant des vitesses

$$\Phi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx \quad (\text{avec } \sigma^2 = gk),$$

en prenant l'axe vertical OY dirigé vers le haut.

Se conformant à la méthode préconisée par Poisson, M. Lamb, remplaçant  $f(x)$  par

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha,$$

et faisant état des conditions initiales afférentes aux ondes d'émergence  $\eta = f(x)$ ,  $\Phi_0 = 0$ , donne la dénivellation globale et le potentiel des vitesses :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \sigma t dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha, \\ \Phi &= \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Choisissant l'unité de longueur de manière que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha = 1$ , et utilisant la relation

$$\int_0^{\infty} e^{ky} \cos kx k^n dx = \frac{n!}{r^{n+1}} \cos(n+1)\theta,$$

il retrouve pour  $\Phi$  l'expression

$$\Phi = \frac{gt}{\pi} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} gt^2 \right) \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{3 \cdot 5} \left( \frac{1}{2} gt^2 \right) \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\}.$$

<sup>(1)</sup> Voir *Hydrodynamics*, third édition, 1906, p. 364, 406 et 407.

Si M. Lamb avait remarqué avec M. Boussinesq que  $\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  représente la dénivellation de la masse fluide, il aurait obtenu immédiatement pour cette dénivellation la formule de M. Rousier.

*Cas de trois dimensions.* — En supposant que le fluide s'étend indéfiniment horizontalement et vers le bas, M. Lamb étudie en premier lieu l'effet d'une *perturbation locale initiale à la surface, dans le cas d'une symétrie autour de l'origine*, et est conduit, après avoir choisi l'axe positif des  $z$  dirigé de bas en haut, aux expressions suivantes du potentiel des vitesses et de la dénivellation, dans le cas des ondes d'émergence :

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{g}{\sigma} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} \mathfrak{J}_0(k\varpi), \\ \zeta &= \cos \sigma t \mathfrak{J}_0(k\varpi) \quad (\text{avec } \sigma^2 = gk),\end{aligned}$$

où  $\mathfrak{J}_0$  est la fonction classique de Bessel. Ce géomètre utilisant la forme de représentation suivante de  $f(\varpi)$

$$f(\varpi) = \int_0^\infty \mathfrak{J}_0(k\varpi) k dk \int_0^\infty f(\alpha) \mathfrak{J}_0(k\alpha) \alpha d\alpha,$$

et tenant compte des conditions initiales trouve que le potentiel des vitesses peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\Phi = \frac{g}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} \mathfrak{J}_0(k\varpi) k dk,$$

après avoir choisi l'unité de longueur de manière que

$$\int_0^\infty f(\alpha) 2\pi\alpha d\alpha = 1.$$

Posant  $z = -r \cos \theta$ ,  $\varpi = r \sin \theta$ , on voit, après avoir remarqué que

$$\int_0^\infty e^{kz} \mathfrak{J}_0(k\varpi) dk = \frac{1}{r}, \quad \int_0^\infty e^{kz} \mathfrak{J}_0(k\varpi) k^n dk = \left( \frac{\partial^n}{\partial z} \right) \frac{1}{r} = \frac{n!}{r^{n+1}} P_n(\mu),$$

$P_n$  étant le polynome de Legendre d'ordre  $n$  par rapport à  $\mu = \cos\theta$ . Ce géomètre obtient alors pour  $\Phi$  l'expression signalée par M. Vergne

$$\Phi = \frac{gt}{2\pi} \left\{ \frac{P_1(\mu)}{r^2} - \frac{gt^2}{3!} 2! \frac{P_2(\mu)}{r^3} + \frac{(gt^2)^2}{5!} 3! \frac{P_3(\mu)}{r^4} - \dots \right\}.$$

Je me propose maintenant de rappeler toute une série d'études sur la théorie des ondes par émerision, et compléter ainsi mon essai, où j'ai analysé les travaux de Poisson, Cauchy, et de M. Boussinesq, et abordé un certain nombre de questions.

M. Hadamard reprenant une indication qui figurait dans son beau Mémoire présenté à l'Académie en 1908 (<sup>1</sup>), et qui concernait la propagation des petits mouvements à la surface d'un liquide parfait, rappelle que pour un vase de forme quelconque, on avait dû jusqu'à ce moment, avec Poincaré, tourner la difficulté en se bornant à considérer les solutions périodiques de la forme  $f(x, y) \cos \lambda t$  (<sup>2</sup>).

L'équation générale à laquelle doit satisfaire le mouvement dans les conditions initiales quelconques n'est pas une équation aux dérivées partielles, mais une équation intégral-différentielle.

Si l'on pose  $\psi = \frac{d\varphi}{dt}$  ( $\varphi$ , potentiel des vitesses), on sait que l'on a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z};$$

la fonction  $\psi$  est définie par les conditions aux limites suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dn} = 0 & \text{(sur la paroi mouillée } \Sigma), \\ \psi = -gz & \text{(sur la surface libre } S \text{ du liquide)}. \end{cases}$$

La détermination de cette fonction harmonique par de telles conditions est appelée par M. Hadamard un problème mixte (voir ses *Leçons sur la théorie des ondes*), qui peut être résolu si l'on connaît la fonction de Green correspondante  $G(M, P)$ .

(<sup>1</sup>) *Mémoires des savants étrangers*, n° 4, p. 37 (fin du Chapitre II).

(<sup>2</sup>) Communication de M. HADAMARD, *Sur les ondes liquides* (*Comptes rendus*, 7 mars 1910).

En supposant les mouvements assez petits pour pouvoir négliger les carrés des déplacements et des vitesses, il est conduit à évaluer  $G$  comme si le liquide était à l'état de repos, et la surface libre réduite à  $z = 0$ , et trouve

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{1}{4\pi} g \frac{\partial}{\partial z} \iint z \frac{\partial G}{\partial n} dS,$$

où l'intégrale double est étendue à la surface libre et  $z$  qui figure dans cette  $\iint$  est la dénivellation à l'époque  $t$ .

M. Hadamard, en envisageant le cas du liquide indéfini tant en profondeur que dans ses dimensions transversales, trouve

$$(3) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{g}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint \frac{z_M}{r} dS_M \quad (\text{avec } MP = r),$$

dans laquelle  $z$  est la cote d'un point de la surface liquide,  $M$  un point du plan  $S(z = 0)$ ,  $P$  un point inférieur au fluide.

M. Boussinesq avait dans ce cas abouti à une équation qui se ramène à la précédente. M. Hadamard s'est demandé si l'équation (3) donne l'équation de Cauchy

$$(4) \quad \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + g^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + \Delta z = 0,$$

et a fait observer que si l'équation (3) a pour conséquence l'équation (4), l'inverse n'a pas lieu. Il remarque que la substitution de  $-g$  à  $g$  ne modifie pas l'équation (4) alors qu'elle modifie l'équation (3); de plus, il signale qu'alors que dans (4), on peut se donner arbitrairement  $z$  et ses trois premières dérivées par rapport à  $t$  pour  $t = 0$ , en vertu de (3), la connaissance de  $z$  et de  $\frac{\partial z}{\partial t}$  détermine celle de  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  et  $\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}$ . M. Hadamard a ensuite envisagé le cas d'un liquide contenu dans un milieu limité par des parois  $\Sigma$  <sup>(1)</sup>; tenant compte de la forme

---

(1) Voir sa Note aux *Comptes rendus* du 21 mars 1910.

plane de la surface libre, il ramène la résolution du problème mixte à celle d'un problème hydrodynamique, dans lequel « les données sont de même nature en tous les points de la frontière ».

Si  $V$ , est le volume obtenu en adjoignant au volume occupé par le liquide, son symétrique par rapport au plan  $S$ ,  $\gamma(M, P)$  la fonction de Neumann correspondante, on aura

$$G(M, P) = |\gamma(M, P)| = \gamma(M, P) - \gamma(M, P'),$$

où  $P'$  est le point symétrique de  $P$  par rapport au plan  $S$ .

M. Hadamard ajoute de plus que la fonction  $G$  relative au liquide limité ne diffère de celle afférente au cas d'un milieu liquide indéfini que par l'adjonction d'un terme représenté par une fonction analytique et holomorphe des coordonnées de  $M$  et de  $P$ , même dans le cas où ceux-ci coïncident, à condition toutefois de ne point appartenir à la courbe  $C$  (section de  $\Sigma$  par le plan  $S$ ).

En faisant  $g = 1$ , on trouve que la cote  $z$  d'un point de la surface liquide vérifie l'équation

$$2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta \int \int_S \frac{z_M}{MP} dS_M + \int \int_S z_M F(M, P) dS_M,$$

avec

$$F(M, P) = \frac{\partial^2 H(M, P)}{\partial z \partial \zeta_{z=\zeta=0}} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$(\xi, \eta, \zeta = 0)$ ,  $(x, y, z)$  représentant les coordonnées respectives de  $M$  et  $P$ .

M. Hadamard, en prenant le cas d'un liquide remplissant un vase hémisphérique, a reconnu que  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  est logarithmiquement infini au voisinage de  $C$  (courbe de section par le plan  $S$ ), même lorsque  $z$  est fini.

Prenant les solutions  $z$  qui sont telles qu'au temps  $t$   $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  soit régulier le long de  $C$ , il a constaté que  $z$  vérifiait l'équation

$$(5) \quad 4\pi \left( \frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} + \Delta z_P \right) = \int \int_S z_M K(M, P) dS_M,$$



$K(M, P)$  étant une certaine fonction symétrique des coordonnées de  $M$ . et  $P$ .

$M$ . Bouligand <sup>(1)</sup>, s'inspirant de l'esprit des très intéressantes communications de  $M$ . Hadamard, et s'appuyant sur les résultats analytiques afférents au cas du vase hémisphérique, est arrivé avec  $M$ . Hadamard aux conclusions suivantes :

1° Si  $\frac{dz}{dn}$  n'est pas nul sur  $(C)$ , c'est-à-dire si la condition  $\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_\Sigma = 0$  n'est pas remplie, sur la frontière  $(C)$  de  $(\Sigma)$ , la valeur de  $\frac{d\psi}{dz}$  calculée en un point du plan  $S$  devient logarithmiquement infinie, quand ce point s'approche du contour  $C$ ; de plus, aux points où  $\frac{\partial z}{\partial n}$  est nulle,  $\frac{d\psi}{dz}$  reste finie;

2° Si  $K(P, Q)$  n'est pas identiquement nulle, le calcul montre qu'on ne peut pas déduire de l'équation (5) celle de Cauchy, et par suite l'équation de Cauchy n'est pas en général vérifiée par les petits mouvements de surface d'un liquide contenu dans un vase de forme quelconque.  $M$ . Bouligand a vérifié que, dans le cas d'un fluide indéfini, l'équation (5) se ramène à l'équation de Cauchy, et montré que si le vase est hémisphérique, la fonction

$$K(P, Q) = \Delta_P \Delta_Q \int_S \int_S \frac{dS_M}{MPMQ} + \Delta_P \int_S \int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M \\ - \Delta_Q \int_S \int_S \frac{F(M, P)}{MQ} dS_M + \int_S \int_S F(M, P) F(Q, M) dS_M$$

n'est pas identiquement nulle.

$M$ . Hadamard est revenu sur cette question des ondes liquides <sup>(2)</sup>; il rappelle tout d'abord que l'altitude  $z$  de la surface au-dessus de la position d'équilibre en fonction des coordonnées horizontales  $x$  et  $y$  est définie par l'équation

$$(1) \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \int \int \frac{z'}{r} dx' dy' + \int \int z' \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial z'} dx' dy',$$

<sup>(1)</sup> *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1912, p. 149 à 180.

<sup>(2)</sup> Communication du 4 juin 1916, Reale Academia dei Lincei.

où  $x', y', z'$  sont les coordonnées d'un point quelconque de la surface libre,  $r$  la distance  $(x, y, z; x', y', z')$  et  $r_1$  la distance de l'un de ces points à l'image de l'autre point par rapport au plan  $z = 0$ ; par  $G$  la fonction de Green du problème mixte consistant à déterminer une fonction harmonique au moyen de ses valeurs sur la surface libre et de celles de sa dérivée normale le long de la paroi mouillée :

$$(2) \quad G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + H(x, y, z, x', y', z').$$

Il étudie alors le cas d'un fluide indéfini dans le sens horizontal et de profondeur  $h$ , et grâce à l'emploi de la méthode des images, il est amené à faire apparaître l'expression

$$(3) \quad \Gamma = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2 + 4n^2 h^2}},$$

grâce à laquelle l'équation (1) s'écrit

$$\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \int \int \Gamma(x, y, x', y') \Delta z' dx' dy'.$$

L'expression de  $\Gamma$ , grâce à l'emploi du calcul des résidus est ramenée à l'intégration de

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(u) du \frac{\pi}{\sin \pi u} \quad \left( \text{avec } f(u) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4u^2 h^2}} \right),$$

prise suivant le contour entourant l'axe réel; elle a pour valeur

$$\Gamma = 2 \int_{\frac{i}{2h}}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{4v^2 h^2 - r^2} \mathfrak{S}(\pi v)},$$

où  $\mathfrak{S}$  désigne un sinus hyperbolique.

M. Hadamard a donc substitué à la manière d'opérer qui avait été employée jusqu'alors, et qui soulevait de graves objections, un processus analytique où l'hypothèse de la petitesse de  $h$  n'est introduite qu'en dernière analyse, « le calcul fournissant tout d'abord des formules rigoureuses quel que soit  $h$  ».

Il aboutit alors à la conclusion suivante :

Si  $h$  est petit,  $\Delta z'$  peut être identifié avec  $\Delta z$ , à condition que les variations de  $\Delta z$  ne soient pas très rapides, et la solution de (1) se ramène à celle de

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = gh \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

Supposant  $h$  fini et  $z$  indépendant de  $y$ , puis admettant une propagation de vitesse constante  $V$ , de telle sorte que  $z = f(x - vt)$ , il trouve une équation intégrale de la forme

$$V^2 f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(\xi) \log \left| T \left( \frac{x - \xi}{2} \right) \right| d\xi,$$

où  $T$  désigne une tangente hyperbolique.

Nous allons analyser maintenant les Notes de M. Cisotti (1). On peut dire que les idées qui ont guidé M. Cisotti dans la préparation de ses intéressantes Notes sont en genèse dans une étude de M. Levi-Civita : *Sur les ondes progressives du type permanent* (2), où le potentiel des vitesses est lié à la fonction de courant, et où l'idée de réflexion analytique de Schwarz conduit presque immédiatement à une équation différentielle et aux différences finies qui caractérise les ondes.

M. Cisotti, supposant que dans tous les plans parallèles aux parois du canal, le mouvement est le même, est par suite ramené à un problème à deux dimensions; il représente le fond du canal par l'axe  $OX$ , et prend  $OY$  de sens contraire à celui de la pesanteur. La surface libre  $l$ , à l'état naturel, est horizontale et se trouve à une distance  $h$  du fond.

Si  $\varphi(t, x, y)$  est le potentiel des vitesses et  $\psi(t; x, y)$  la fonction de courant qui est la fonction harmonique associée, on a

$$(1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u.$$

(1) Voir *Atti delle Reale Accademia dei Lincei*, vol. XXVII, 3 et 17 novembre 1918; vol. XXVII, 2 mars 1919; vol. XXIX, 15 février, 7 mars et 11 avril 1920.

(2) Voir *Atti delle Reale Accademia dei Lincei*, 15 décembre 1907.

La vitesse  $v$  de la particule fluide est liée à la pression  $p$  et à la densité  $\rho$  du liquide par l'équation

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + gy = \text{fonction de } t.$$

Comme on ne considère que de petits mouvements, on remarque que l'équation précédente se réduit à

$$(2) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gy = f(t),$$

et que l'on a enfin

$$(3) \quad \Delta_2 \varphi = 0.$$

*Condition au fond.* — La section du fond du canal par un plan parallèle aux parois étant une ligne de flux, on a

$$(4) \quad \psi = 0 \quad (\text{pour } y = 0 \text{ et } t \text{ quelconque}).$$

*Condition concernant la surface libre.* — L'équation de la surface libre est définie par

$$(5) \quad y = h + \eta(t, x),$$

en supposant  $\frac{\eta}{h}$  du premier ordre.

En vertu de (2), on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (\text{sur la surface libre } l).$$

Cette dernière équation peut encore être écrite, eu égard à l'hypothèse faite sur  $\eta$ ,

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (\text{pour } y = h \text{ et } t \text{ quelconque}).$$

Cette dernière équation dérivée par rapport à  $t$  donne

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

*Équation caractéristique.* — Introduisons maintenant la fonction

$$f = \varphi + i\psi, \quad \text{de } z = x + iy \text{ et de } t,$$

qui doit, en vertu des hypothèses faites sur  $\varphi$  et  $\psi$ , se maintenir régulière, et être réelle sur l'axe réel.

Si l'on considère le champ  $S$  d'une section définie par le fond et la courbe  $l$  (surface libre), et si l'on fait usage de la réflexion analytique de Schwarz, on remarque que  $f$  est prolongeable analytiquement dans le champ  $S'$ , défini par

$$-h \leq y \leq 0 \quad \text{et} \quad -\infty \leq x \leq \infty;$$

on a alors

$$\begin{aligned} f(t, x + iy) &= \varphi(t, x, y) + i\psi(t, x, y), \\ f(t, x - iy) &= \varphi(t, x, y) - i\psi(t, x, y). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement de là, en tenant compte de (7),

$$(7') \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f(t, x + ih) + f(t, x - ih)\} + ig \frac{\partial}{\partial x} \{f(t, x + ih) - f(t, x - ih)\} = 0.$$

Comme  $f$  est une fonction analytique, on voit qu'à (7'), on peut substituer

$$(8) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f(t, z + ih) + f(t, z - ih)\} + ig \frac{\partial}{\partial z} \{f(t, z + ih) - f(t, z - ih)\} = 0.$$

*Cas d'un canal peu profond.* — Développant les fonctions

$$f(t, z + ih), \quad f(t, z - ih),$$

d'après la formule de Taylor, et ne conservant que les termes du premier ordre en  $h$ , l'équation (8) se transforme en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

qui a pour solution

$$f = f_1(z + ct) + f_2(z - ct) \quad (\text{avec } c = \sqrt{gh}).$$

M. Cisotti trouve que

$$\varphi = f_1(z + ct) + f_2(x - ct)$$

et

$$\eta = -\frac{c}{g} [f'_1(x + ct) - f'_2(x - ct)] \quad (\text{pour } y = h).$$

Si l'on a en vue que *les ondes d'émerision* qui correspondent à

$$\varphi = 0 \quad (\text{pour } t = 0),$$

on voit que

$$f_1(x) + f_2(x) = 0, \quad \text{d'où} \quad \eta = -\frac{c}{g} [f'_1(x + ct) + f'_1(x - ct)].$$

Quant à la fonction  $f_1$ , on en voit immédiatement la signification; en effet, si l'on désigne par  $\eta_0$  la dénivellation initiale, on trouve que

$$\eta_0 = -\frac{c}{g} \times 2f'_1(x), \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{1}{2} [\eta_0(x + ct) + \eta_0(x - ct)].$$

*Canal infiniment profond.* — Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point  $x = 0$ ,  $y = h$ , c'est-à-dire si l'on change  $z$  en  $z + ih$ , l'équation caractéristique (8) devient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f(t, z + 2ih) + f(t, z)\} + ig \frac{\partial}{\partial z} \{f(t, z + 2ih) - f(t, z)\} = 0.$$

Ceci posé, supposons que  $f$  ainsi que sa dérivée par rapport à  $z$  (qui comme on le sait définit la vitesse) s'annulent à l'infini, et faisons croître  $h$  indéfiniment, nous obtenons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, z) - ig \frac{\partial}{\partial z} f(t, z) = 0,$$

qui est, ainsi que l'a fait remarquer M. Levi-Civita, l'équation caractéristique des ondes de Poisson-Cauchy (1).

(1) Voir M. TONOLO, *Résolution du problème des ondes de Poisson-Cauchy* (*Atti del R. Ist. Veneto di Scienze Lettere et Arti*, t. LXXIII, 1913, p. 545).

*Canal très profond.* — Le cas d'un canal dont la profondeur est très grande, sans être infinie, a été étudié par M. Palatini (1).

L'hypothèse spécifiée se traduit analytiquement par

$$(9) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial y} + g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{pour } y = h).$$

Cette équation, en tenant compte de ce que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

peut se transformer ainsi qu'il suit :

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial x} + g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{pour } y = h),$$

qui, en vertu des valeurs de  $\varphi$  et  $\psi$ ,

$$\varphi(t, x, y) = \frac{1}{2} \{ f(t, x + iy) + f(t, x - iy) \},$$

$$\psi(t, x, y) = \frac{1}{2} \{ f(t, x + iy) - f(t, x - iy) \},$$

devient

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \{ f(t, x + ih) - f(t, x - ih) \} + ig \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ f(t, x + ih) + f(t, x - ih) \} = 0;$$

$f$  étant une fonction analytique, la condition relative à  $y = h$  peut être transformée par la substitution de  $z$  à  $x$  :

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} \{ f(t, z + ih) - f(t, z - ih) \} + ig \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ f(t, z + ih) + f(t, z - ih) \} = 0,$$

dans le champ S.

Ceci posé, dérivant deux fois par rapport à  $t$  l'équation caracté-

(1) *Sulla Influenza del fondo. nella propagazione delle onde dovute a perturbazioni locali* (*Rend. del Circ. Math. de Palermo*, t. XXXIX, 1915); *Studio asintotico del pelo libero* (*Ibidem*, t. XL, 1915).

ristique (8),

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \{ f(t, z + ih) + f(t, z - ih) \} + ig \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} \{ f(t, z + ih) - f(t, z - ih) \} = 0;$$

du fait de l'élimination de  $\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z}$ , entre les dernières équations, on trouve

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \{ f(t, z + ih) + f(t, z - ih) \} + g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ f(t, z + ih) + f(t, z - ih) \} = 0.$$

En transportant les axes au point  $x = 0$ ,  $y = h$ , c'est-à-dire en changeant  $z$  en  $z + ih$ , on remarque que l'équation précédente se transforme en la suivante :

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \{ f(t, z + 2ih) + f(t, z) \} + g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ f(t, z + 2ih) + f(t, z) \} = 0.$$

Si l'on admet que pour  $h$  très grand,  $f$  ainsi que ses deux premières dérivées par rapport à  $z$  s'annulent pour  $t$  quelconque, cette dernière équation prend la forme

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} f(t, z) + g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(t, z) = 0,$$

qui n'est autre que celle trouvée par M. Palatini.

*Canal de profondeur  $h$ .* — On a vu que dans un canal à fond plat de profondeur  $h$ , le problème des petits mouvements est défini par l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ f(t, z + ih) + f(t, z - ih) \} + ig \frac{\partial}{\partial z} \{ f(t, z + ih) - f(t, z - ih) \} = 0.$$

Cette fonction  $f$  est holomorphe dans le champ de la variable complexe entre  $y = -h$  et  $y = +h$ , et doit être réelle sur l'axe  $y = 0$ . Si l'on fait  $h = 1$ , on voit de suite, après développement de la fonction  $f(t, z)$  suivant la formule de Mac-Laurin, que l'équation (8) peut s'écrire :

$$(10) \quad \sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} \{ f_{n+2}(z + i) + f_{n+2}(z - i) + ig \frac{\partial}{\partial z} [f_n(z + i) - f_n(z - i)] \} = 0,$$



avec

$$f(t, z) = \sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(z).$$

L'équation (10) devant être satisfaite quel que soit  $t$ , on en déduit

$$(11) \quad f_{n+2}(z+i) + f_{n+2}(z-i) + ig \frac{\partial}{\partial z} [f_n(z+i) - f_n(z-i)] = 0$$

(avec  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Cette équation (11), linéaire aux différences finies, permet de calculer  $f_n$  où  $n > 2$ , lorsque l'on se donne  $f_0$  et  $f_1$ .

La fonction  $f_n(z) = \varphi_n(x, y) + i\psi_n(x, y)$  doit être réelle pour  $y = 0$ .

En se reportant aux points de  $y = 1$ , on remarque que

$$\varphi_n = \frac{1}{2} [f_n(x+i) + f_n(x-i)] \quad \text{et} \quad \psi_n = \frac{1}{2i} [f_n(x+i) - f_n(x-i)].$$

Si l'on fait  $z = x$  dans (11), on trouve

$$(12) \quad \varphi_{n+2} = g \frac{\partial}{\partial x} \psi_n \quad (\text{pour } y = 1).$$

Comme on a

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \log \operatorname{cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) dx_1 \quad (1),$$

on remarque, en admettant que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  soit une fonction de point qui, pour  $y = 1$ , soit continue et dotée d'une limite supérieure finie, alors que l'on fait croître l'argument indéfiniment, on trouve que (12) peut s'écrire

$$(13) \quad \varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \log \operatorname{cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) dx_1 \quad (\text{pour } y = 1),$$

où  $\operatorname{cth}$  désigne une cotangente hyperbolique.

(1) Voir Note de M. LEVI-CIVITA, *Transformation d'une relation fonctionnelle due à Dini* [*Rendiconti*, vol. XX, 1911, p. 293 et 381 (hypothèse  $\alpha$ )].

La fonction  $f_{n+2}(z)$ , dans le champ intérieur —  $1 \leq y \leq 1$ , étant définie par

$$(14) \quad f_{n+2}(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+2} \frac{dx}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}(x-z)} \quad (1),$$

il en résulte définitivement que les coefficients  $f_n(z)$  du développement de  $f(t, z)$  sont déterminés au moyen des formules (13) et (14), lorsque l'on se donne les valeurs de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ , pour les différents points de  $y = 1$ .

Si l'on étudie le problème des ondes d'émergence qui correspond à  $\varphi_0 = 0$ , on reconnaît que toutes les  $f_{2n}$  sont nulles et que l'expression de  $f(t, z)$  se réduit à

$$f(t, z) = \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{2n+1}(z),$$

dans laquelle les  $f_{2n+1}$  dépendent de  $\varphi_1$  pour  $y = 1$ .

*Équation de la surface libre l.* — Soit  $y = 1 + \eta(t, x)$  l'équation de cette surface à l'instant  $t$  ( $1$  étant la profondeur du canal); on a

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{pour } y = 1)$$

et

$$\varphi = \sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} \varphi_n.$$

Dans ces conditions,

$$\eta = -\frac{1}{g} \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n!} \varphi_{2n+1} + \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi_{2n+2} \right\} \quad (\text{pour } y = 1).$$

L'expression de  $\varphi_{n+2}$  déterminée au moyen de la relation (13), étant intégrée par parties, conduit à

$$\varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x_1) \log \operatorname{cth}^2(x_1 - x) dx_1.$$

---

(1) Voir PALATINI, *Rend. del Cir. Palermo*, vol. XXIX, 1915, p. 373.

M. Cisotti introduit une fonction  $\lambda$  de  $x$  qu'il suppose finie et continue à distance finie et finie pour  $x = \pm \infty$ , ainsi que ses dérivées, et considère l'expression

$$I[\lambda] = \frac{g}{2\pi} \int \lambda(x_1) \operatorname{Log} \operatorname{cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x) dx_1,$$

puis

$$I^2[\lambda] = I[I[\lambda]], \quad I^3[\lambda] = I[I^2[\lambda]], \dots$$

d'où il déduit

$$\frac{d^r}{dx^r} I[\lambda] = I\left[\frac{d^r \lambda}{dx^r}\right].$$

Si l'on convient de prendre  $I^0[\lambda] = \lambda$ , il en résulte que

$$\varphi_{2n} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} I^n[\varphi_0] \quad \text{et} \quad \varphi_{2n+1} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} I^n[\varphi_1],$$

et

$$(15) \quad \eta = -\frac{1}{g} \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} I^n[\varphi_1] + \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} I^{n+1}[\varphi_0] \right\};$$

$\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont les expressions respectives de  $\varphi$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  pour  $t = 0$ , et  $\eta_0$  est la dépression initiale au-dessous de la surface à l'état de repos  $\gamma = 1$ .

$\varphi_1$  étant égal à  $(-\eta_0)$ , il résulte des équations d'itération que l'on a

$$I^n[\varphi_1] = -g I^n[\eta_0].$$

Si l'on traite le problème des ondes d'émergence  $\varphi_0 = 0$ , et l'on a pour expression de  $\eta$

$$(16) \quad \eta = \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} I^n[\eta_0],$$

qui donne le profil de l'onde, lorsque l'on se donne le profil initial.

M'inspirant tout spécialement du dernier Mémoire de M. Boussinesq, j'ai abordé dans mon modeste essai l'étude des maxima et des minima au point  $(x, z)$ , en supposant que l'on ne considère que les ondes

cylindriques, après avoir repris au point de vue numérique le mouvement propre d'une particule-fluide dans un cas concret.

Dans la deuxième Partie concernant un milieu indéfini en tous sens, j'ai tenté l'étude du mouvement dans le voisinage du centre d'ébranlement, étude qui n'avait été faite jusqu'alors que dans le cas des ondes cylindriques. En assimilant le corps immergé à son parabolôide osculateur, j'ai montré que si l'on voulait serrer le problème de près, il y avait lieu d'introduire des termes secondaires auxquels se rattachent des polynomes dérivés des polynomes de Legendre. Revenant sur l'expression initiale du potentiel des vitesses donnée par M. Boussinesq :

$$\varphi = 2 \int_0^{\infty} f\left(\frac{x^2}{2}, x, y, z\right) \varphi\left(\frac{t^2}{2x^2}\right) dx,$$

j'ai fait voir que la méthode dont ce savant géomètre avait fait l'application au cas de deux dimensions, pouvait donner l'expression des différents termes de  $\varphi$ . Je signale aussi un rapprochement des formules de Cauchy et de M. Boussinesq, au sujet de la dénivellation à la surface, en partant d'une transformation indiquée par M. Boussinesq dans son Traité des potentiels, et enfin une détermination rapide du potentiel des vitesses dans le cas du parabolôide de révolution. Après avoir justifié la théorie des images, en suivant l'esprit du dernier Mémoire de M. Boussinesq, j'ai, dans la troisième Partie, en étudiant le cas d'un canal de largeur limitée et de profondeur infinie, donné les formules caractéristiques de la dénivellation à la surface et en un point  $x, y, z$ , et montré qu'en première approximation, la dénivellation est indépendante de  $y$ ; j'ai complété cette partie spéciale par une application numérique. M'appuyant sur les résultats d'un beau Mémoire de M. Appell, j'ai donné la valeur du potentiel dans le cas où le corps est immergé dans un bassin parallélépipédique  $\left(x = \pm \frac{a}{2}, y = \pm \frac{b}{2}, z = c\right)$ , et montré qu'une telle méthode peut être utilisée dans le cas où l'on suppose  $a$  fini, avec  $b$  infini, et  $c$  fini ou infini.

Choisissant pour le potentiel des vitesses une fonction  $\varphi_1(x, y, t) \cdot \varphi_2(z)$ , ainsi que l'a fait Poincaré dans un certain cas de l'étude des marées, j'ai, en supposant le bassin parallélépipédique, trouvé pour le potentiel des vitesses une forme, dont il est possible de déduire, en supposant la longueur et la profondeur infinies, la forme classique relative au milieu indéfini.

J'ai enfin, dans une Note complémentaire, esquissé une étude du mouvement des particules autour de leur position d'équilibre dans l'hypothèse des ondes, cylindriques, en considérant le mouvement afférent à l'un quelconque des potentiels partiels, et analysé le phénomène résultant, alors que le temps écoulé depuis l'origine était petit ou très considérable.

---

**PREMIÈRE PARTIE.**  
**ÉQUATIONS DU PROBLÈME.**

---

Supposons un liquide incompressible contenu dans un vase à parois fixes; ce liquide étant primitivement au repos, nous le mettons en mouvement par une cause agissant sur une partie de sa surface libre et pendant un temps très court; dans ces conditions, on sait que le phénomène dépend d'un potentiel des vitesses. Prenons, pour étudier le mouvement des ondes, trois axes de coordonnées rectangulaires; le plan  $xOy$  est confondu avec le plan de la surface libre au repos, et l'axe  $Oz$  vertical dirigé vers le bas. Nous désignerons par  $\varphi$  le potentiel des vitesses, par  $u, v, w$  les composantes de la vitesse d'une particule et par  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Nous savons que l'on a

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Le fluide étant incompressible, l'équation de conservation des volumes (ou équation de continuité) donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

équation indéfinie que vérifie la fonction  $\varphi$  en tous les points du fluide et à toute époque.

Les parois du vase étant fixes, la dérivée du potentiel, prise suivant la normale, est nulle aux parois. Les équations d'Euler conduisent de plus à la relation

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

qui est également vérifiée à toute époque en tous les points du fluide, relation où  $p$  représente la pression en un point  $(x, y, z)$  et  $\rho$  la densité du fluide.

En vue de simplifier les formules, nous choisissons avec M. Boussinesq les unités de façon à rendre égales à 1 la densité  $\rho$  et l'accélération  $g$  de la pesanteur; si donc l'on admet que les carrés des composantes de la vitesse sont négligeables, l'équation précédente devient

$$(1) \quad p = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

L'action d'une pression constante s'exerçant en tous les points d'un fluide n'a aucune action sur ses mouvements; nous pouvons donc supposer nulle la pression qui règne au dessus du fluide. Dans ces conditions, nous aurons à la surface libre

$$(2) \quad z - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Soit  $h = f(x, y, t)$  la dénivellation de la surface libre au temps  $t$ ; l'équation (2) s'écrit

$$h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Dans cette équation,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  est prise pour des valeurs de  $z$  un peu variables, mais  $h$  étant toujours très petit et  $\varphi$  continu, nous pouvons au second membre remplacer  $z$  par zéro.

À la surface libre  $z=h$ ; on en déduit, en suivant une même particule dans son mouvement,

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Nous avons admis primitivement que  $u, v, h$  étaient des quantités très petites; admettons qu'il en est de même pour  $\frac{\partial h}{\partial x}$  et  $\frac{\partial h}{\partial y}$ , ou les pentes à la surface. On a alors :

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Nous avons dit aussi que, pour les points qui sont à la surface, nous pouvons, dans  $\varphi$  et ses dérivées, prendre  $z=0$ ; tenant compte d'une part de la valeur de  $\omega$  donnée ci-dessus, de  $\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , et de la relation  $h = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}$  on obtient immédiatement l'équation de condition à la surface

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0}$$

Pour achever de déterminer  $\varphi$ , nous avons les données d'état initial, qui caractérisent, soit les ondes par émergence, soit les ondes d'impulsion.

Dans le premier cas, le mouvement sera produit par l'enlèvement brusque d'un solide : pendant le court espace de temps (de  $t = -\varepsilon$  à  $t = 0$ ) que durera l'enlèvement du solide, les ordonnées de la surface libre du fluide ne seront pas modifiées d'une manière sensible; nulles hors de la région que touchait le solide, elles seront, dans cette région, égales à celles de la surface qui limitait inférieurement ce corps, et nous les supposons données en fonction de  $x$  et  $y$ . De plus, la pression exercée à la surface qui, pour  $t = -\varepsilon$ , était égale à  $h$  d'après

l'équation (1), variera de  $h$  à 0 dans l'intervalle de temps  $\varepsilon$ ; la même formule (1) montre que la dérivée  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , comparable à  $h$  seulement, ne pourra, durant ce même temps  $\varepsilon$ , faire prendre à la fonction  $\varphi$ , initialement nulle, que des valeurs de l'ordre de  $h\varepsilon$ , négligeables dans les calculs où paraîtront au premier degré  $h$  ou ses dérivées partielles. Les *données initiales caractéristiques des ondes d'émerision*, exprimant l'état du fluide à l'époque  $t = 0$  (fin de la période préparatoire durant laquelle s'engendrent ces ondes), consisteront à poser

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{et} \quad h = f(x, y) \quad (\text{pour } t = 0),$$

$\varphi_0$  étant la valeur de  $\varphi$  à la surface libre, et  $f(x, y)$  désignant les petites ordonnées primitives connues de la surface.

Dans le cas des ondes par impulsion, le mouvement résulterait de pressions variables exercées à la surface libre de  $t = -\varepsilon$  à  $t = 0$ ; les conditions initiales caractérisant ces ondes seraient définies par

$$[\varphi_0 = F(x, y) \quad \text{et} \quad h = 0] \quad (\text{pour } t = 0)$$

$F(x, y)$  étant une fonction connue. Si l'on faisait intervenir simultanément les deux systèmes d'ondes, les conditions initiales seraient définies ainsi qu'il suit :

$$\varphi_0 = F(x, y) \quad \text{et} \quad h = f(x, y) \quad (\text{pour } t = 0).$$

(voir *Application des potentiels* de M. BOUSSINESQ, p. 580 et 648, 649, 650).

Ce géomètre a d'ailleurs montré que si, dans l'expression du potentiel des ondes par émerision, l'on remplace  $f(x, y)$  par  $F(x, y)$  et que l'on prenne  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , cette dernière dérivée n'est autre que le potentiel  $\varphi$ , afférent aux ondes par impulsion, qui répond aux conditions énoncées.

Nous allons étudier maintenant les ondes par émerision dans le cas



où la profondeur du liquide, ainsi que ses dimensions horizontales, peuvent être regardées comme infiniment grandes. Dans ces hypothèses, il faut substituer à la condition  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  (dérivée normale de  $\varphi$  à la paroi du vase), la condition pour  $\varphi$  de s'annuler asymptotiquement lorsqu'on s'éloigne indéfiniment de l'origine des coordonnées. Pour  $t$  très grand, le mouvement s'éteint ou encore  $\varphi$  et ses dérivées s'annulent; cette dernière hypothèse n'est d'ailleurs qu'une déduction des conditions précédentes. En effet, le problème est déterminé sans elle, et si c'était une condition nouvelle, elle rendrait le problème impossible. Or le fait même que nous obtiendrons sa solution montre qu'il ne l'est pas.

Posons

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

$\tau$  est une fonction harmonique puisque  $\varphi$  en est une; elle est nulle à la surface libre et nulle aussi pour tous les points très éloignés de l'origine, où  $\varphi$  tend partout vers zéro. Il en résulte que  $\tau$  est nulle en tous les points de la surface fluide, par suite que l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

est une équation indéfinie.

M. Boussinesq a d'ailleurs montré (*Application des potentiels*, p. 583) que les équations

$$\tau = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0$$

sont équivalentes, eu égard aux relations qui les accompagnent.

D'autre part, dans tout le fluide l'on a

$$p = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

dérivant cette équation par rapport à  $t$ , en suivant une même particule

fluide, nous aurons en négligeant les quantités du second ordre

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \tau = 0,$$

ce qui revient à dire qu'une particule fluide supporte la même pression pendant tout le mouvement.

Désignons par  $Z$  l'ordonnée de la particule à l'état final de repos, nous aurons

$$p = Z;$$

comme à tout instant,

$$p = z - \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

on en déduit

$$z - Z = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

cette différence  $(z - Z)$ , qui se nomme la dénivellation de la particule à l'époque  $t$ , est désignée par  $h$ . Il en résulte que, à chaque instant dans toute la masse fluide, on a  $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , relation trouvée ci-dessus pour la surface libre.

Nous avons vu que, dans toute la masse fluide, on a l'équation indéfinie

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0,$$

qui devient, en tenant compte de la valeur de  $\tau$ ,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = 0.$$

Il y a lieu d'observer qu'à l'époque  $t = 0$ , où  $\varphi$  s'annule partout, et où il en est de même de  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , la relation  $\tau = 0$  se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } t = 0).$$

**Intégration des équations obtenues dans le cas où l'on fait abstraction  
d'une des dimensions horizontales du fluide.**

Supposons le liquide dans un canal et mis en mouvement par l'émergence d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à la longueur du canal. Le liquide étant primitivement au repos, et le cylindre très peu enfoncé, soit  $z = f(x)$  l'équation de la section droite du cylindre immergé.

Les équations du problème sont :

$$(1) \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,$$

$$(2) \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0} = f(x) \quad (\text{pour } t = 0), \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{pour } t, x \text{ ou } z \text{ très grands}). \end{aligned}$$

Nous remarquerons que les équations indéfinies (1) et (2) ne contiennent que des dérivées d'ordre pair; alors que la première fait intervenir une dérivée d'ordre 4 en  $t$  et une dérivée d'ordre 2 en  $x$ , dans la deuxième, il n'apparaît pas de dérivée par rapport à  $t$ . On est donc conduit à chercher comment  $\varphi$  dépend de  $x$  et de  $t$ , sans se préoccuper de  $z$ .

En suivant la méthode de M. Boussinesq (*Application des potentiels*, p. 593), prenons la fonction

$$\varphi = \int_0^\infty \left[ \chi \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \chi \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha,$$

dans laquelle  $\alpha$  est une variable d'intégration,  $x$  et  $t$  sont considérés comme des paramètres, et où les fonctions arbitraires  $\chi$  et  $\psi$  sont assujetties seulement à donner à l'intégrale et à ses dérivées des valeurs finies et déterminées. Il nous faut choisir ces fonctions  $\chi$  et  $\psi$ , de telle manière

que  $\varphi$  vérifie les équations du problème et tout d'abord (1). Calculons  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^\infty \left[ \chi \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \gamma \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \frac{t}{\alpha^2} d\alpha;$$

posons

$$\beta = \frac{t}{\alpha}, \quad \text{d'où} \quad d\beta = -\frac{t}{\alpha^2} d\alpha.$$

Il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^\infty \left[ \chi \left( x + \frac{t^2}{2\beta^2} \right) + \gamma \left( x - \frac{t^2}{2\beta^2} \right) \right] \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Calculons de même  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ , et revenons aux anciennes notations :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int_0^\infty \left[ \chi' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \gamma' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

on voit immédiatement que l'on a

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \gamma'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi'' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \gamma'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha.$$

L'équation (1) devient donc

$$(3) \quad \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \gamma'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \left[ \psi'' \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) + \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) \right] d\alpha = 0.$$

Nous choisissons  $\psi$  de façon que la quantité sous le signe somme soit une différentielle exacte; pour cela nous posons  $\frac{t^2}{2\alpha^2} = \gamma$  et nous prenons

$$(4) \quad \psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} = \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\gamma}.$$

L'équation (3) s'écrit alors

$$\frac{1}{t\sqrt{2}} \int_0^\infty \left[ \chi'' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \gamma'' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] d \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) = 0;$$

le premier membre s'intégrant immédiatement, cette équation s'écrit

$$\left[ \chi' \left( x + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \chi' \left( x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right]_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} = 0.$$

Pour  $\alpha = 0$  la quantité entre crochets est nulle;  $x$  étant fini, il reste à vérifier

$$\chi'(+\infty) - \chi'(-\infty) = 0.$$

Comme  $\varphi$  doit être nul pour  $x = \pm \infty$ , on est conduit à prendre

$$\chi(\pm \infty) = 0,$$

condition qui entraîne la précédente.

Il faudra donc choisir pour  $\chi$  une fonction qui s'annule pour les valeurs infinies de la variable.

Revenons à l'équation (4) que doit vérifier  $\psi(\gamma)$  avec les conditions

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0,$$

qui entraîneront les conditions d'état initial

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{pour } t = 0):$$

Cette fonction  $\psi(\gamma)$  a été étudiée par M. Boussinesq (*Application des potentiels*, p. 594 et 604; *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, fasc. II, p. 266). Nous nous bornerons à mentionner les résultats.

On a

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - \mu^2) d\mu;$$

cette fonction  $\psi$ , qui se réduit pour les très grandes valeurs de  $\gamma$  à

$$\psi(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right),$$

peut encore s'écrire

$$\psi(\gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin \gamma - \cos \gamma) + \int_0^{\infty} e^{-2m\sqrt{\gamma}} \cos m^2 dm.$$

Signalons enfin le développement en série de  $\psi(\gamma)$ ,

$$\psi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(\sqrt{2}\gamma)^3}{1.3} - \frac{(\sqrt{2}\gamma)^7}{1.3.5.7} - \dots \pm \frac{(\sqrt{2}\gamma)^{4n+3}}{1.3.5\dots(4n+3)} - \dots \right],$$

et rappelons la valeur de l'intégrale définie suivante :

$$(5) \quad \int_0^\infty \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la fonction  $\chi$ .

On doit avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x) \quad (\text{pour } z = 0 \text{ et } t = 0);$$

eu égard à l'expression de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  pour  $t = 0$ , on trouve

$$f(x) = 2\chi(x) \int_0^\infty \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta \quad (\text{pour } z = 0, t = 0),$$

soit, en vertu de (5),

$$f(x) = \frac{\chi(x)\pi}{2\sqrt{2}}$$

ou

$$\chi(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} f(x) \quad (\text{pour } z = 0).$$

En réalité,  $\chi$  dépend aussi de la variable  $z$  qui a été traitée jusqu'ici comme une constante.

Considérons avec M. Boussinesq la fonction

$$\varphi = \int_0^\infty \left[ \chi \left( x + \frac{\alpha^2}{2}, z \right) + \chi \left( x - \frac{\alpha^2}{2}, z \right) \right] \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha;$$

regardée comme fonction de  $x$  et de  $z$ , cette fonction  $\varphi$  doit être harmonique. Elle le sera si l'on choisit

$$\Delta_2(\chi) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0.$$

Si la fonction  $\chi$  s'annule pour  $x$  ou  $z$  infini, il en sera de même de  $\varphi$ .

La fonction  $\chi(x, z)$  doit être harmonique, s'annuler à l'infini, et prendre à la surface des valeurs données en raison de ce que

$$\chi(x, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} f(x).$$

Nous sommes par suite conduit à la représenter par un potentiel d'une double couche de densité  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} f(x)$ , étalée sur l'axe des  $x$ .

Nous prendrons

$$\chi(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi)}{z^2 + (x - \xi)^2} d\xi,$$

ce qui nous donne pour la valeur du potentiel des vitesses

$$(6) \quad \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi)}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2} - \xi\right)^2} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zf(\xi)}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2} - \xi\right)^2} d\xi \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

La fonction ainsi trouvée vérifie toutes les conditions du problème; elle est bien déterminée, et admet des dérivées partielles que l'on peut calculer par les procédés indiqués ci-dessus. Pour les démonstrations relatives à ces divers points, nous renvoyons le lecteur à l'un ou l'autre des deux ouvrages déjà cités de M. Boussinesq.

#### Étude du mouvement.

*Propagation du mouvement dans le sens vertical.* — Nous allons étudier la propagation du mouvement dans le sens vertical, en nous plaçant dans l'hypothèse où  $\xi$  est négligeable devant  $x$  ou  $z$ . Si l'on désigne par S l'expression  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi$  ou l'aire de la section droite du

cylindre immergé, on voit de suite, eu égard à l'hypothèse faite sur  $\xi$ , que l'on a pour la valeur du potentiel

$$(7) \quad \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} S \int_0^\infty \left[ \frac{z}{z^2 + \left(x + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} + \frac{z}{z^2 + \left(x - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

On remarque ainsi que la forme du corps n'intervient pas et que le mouvement est indépendant de cette forme.

Si l'on suppose que le point considéré soit sur la verticale  $x = 0$ , la dénivellation pour ce point sera définie par  $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ou

$$h = \frac{4\sqrt{2} S z}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{z^2 + \frac{\alpha^2}{4}} \psi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \frac{t}{\alpha^2} d\alpha.$$

Faisons le changement de variable  $\beta = \frac{t}{\alpha}$  et posons  $z = \frac{1}{2}\gamma t^2$ ; il vient ainsi, après un calcul simple,

$$(7') \quad h = \frac{4\sqrt{2} S \gamma^2}{\pi^2 z} \int_0^\infty \frac{\beta^4}{1 + \gamma^2 \beta^4} \psi'\left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta.$$

Pour un observateur, se déplaçant sur la verticale de haut en bas d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération  $\gamma$ , les dénivellations de la particule fluide sont données par l'expression définitive de  $h$ , où n'apparaissent que  $z$  et  $\gamma$ , et sont inversement proportionnelles à  $z$ , ou encore à  $t^2$ ; pour une valeur donnée de  $z$ ,  $h$  n'est fonction que de  $\gamma$ . On peut donc dire que le mouvement de propagation dans le sens vertical est uniformément accéléré; il en est d'ailleurs de même sur toute droite partant de l'origine des coordonnées.

En suivant une méthode inspirée par M. Boussinesq, M. Rousier a calculé  $h$  en écrivant la formule précédente ainsi qu'il suit :

$$h = \frac{S}{\pi r} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \gamma^2 \beta^4} \psi'\left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta \right],$$



et en remplaçant l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \gamma^2 \beta^4} \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta$$

par

$$\mathfrak{J} = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{d\nu}{1 + (2\gamma\nu^2)^2} \int_0^\nu \cos(\nu^2 - \mu^2) d\mu,$$

après le changement de variable  $\frac{\beta}{\sqrt{2}} = \nu$ , et la substitution de

$$\int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \cos \left( \frac{\beta^2}{2} - \mu^2 \right) d\mu \quad \text{à} \quad \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right);$$

grâce au nouveau changement de variable  $\nu = \rho \cos \omega$ ,  $\mu = \rho \sin \omega$ , l'expression de  $\mathfrak{J}$  prend la forme

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2\sqrt{2}\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\lambda)}{1 + \alpha^2} d\alpha, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\cos 2\omega}{2\gamma \cos^2 \omega}.$$

Tenant compte de ce que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\lambda)}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda},$$

et remplaçant  $\tan \omega$  par  $p$ , on trouve finalement

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi q}{2\sqrt{2}} e^{-q} \int_0^1 e^{p^2 q} dp, \quad \text{avec} \quad q = \frac{1}{2\gamma},$$

d'où, pour  $h$ ,

$$(8) \quad h = \frac{2S}{\pi r} \left[ \frac{1}{2} - qe^{-q} \left( 1 + \frac{q}{1.3} + \frac{q^2}{1.2.5} + \dots + \frac{q^n}{n!(2n+1)} + \dots \right) \right]$$

(voir Thèse de M. Rousier, p. 26 à 29).

*Étude du mouvement sur toute droite partant de l'origine des coordonnées.* — L'emploi de la formule (7) et de la relation  $h = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  donnant

la dénivellation conduit à

$$h = \frac{8\sqrt{2}S\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{\beta^4}{4\beta^4 z^2 + (2\beta^2 x + t^2)^2} + \frac{\beta^4}{4\beta^4 z^2 + (2\beta^2 x - t^2)^2} \right] \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta$$

(avec  $\frac{t}{\alpha} = \beta$ ).

En posant  $z = r \cos \theta$ ,  $x = r \sin \theta$  et  $r = \frac{1}{2} \gamma t^2$ , l'expression de  $h$  prend la forme

$$(9) \quad h = \frac{2\sqrt{2}S\gamma^2 \cos \theta}{\pi^2 r} \int_0^\infty \left( \frac{\beta^4}{\beta^4 \gamma^2 + 2\beta^2 \gamma \sin \theta + 1} + \frac{\beta^4}{\beta^4 \gamma^2 - 2\beta^2 \gamma \sin \theta + 1} \right) \psi' \left( \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Le développement en série de l'expression donnant la dénivellation en un point quelconque de la masse fluide a été obtenu par M. Rousier en calculant les deux intégrales constitutives de  $h$ , par la méthode des résidus, et est représenté par :

$$(10) \quad h = \frac{S}{\pi r} \left\{ \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos(n+1)2\theta}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)} - \frac{\cos(2n+3)\theta}{\gamma^{2n+2} 1.3.5 \dots 4n+3} \right] \right\}.$$

Cette série, étant uniformément convergente, peut être intégrée terme à terme par rapport à  $t$  et donne pour  $\varphi$  l'expression suivante :

$$\varphi = \frac{S t}{\pi} \left[ \frac{z}{x^2 + z^2} - \frac{(z^2 - x^2)t^2}{6(x^2 + z^2)^2} + \frac{(z^3 - 3zx^2)t^4}{60(x^2 + z^2)^3} - \dots \right],$$

qui n'est autre que le potentiel des vitesses de Poisson et Cauchy.

En raison de la convergence uniforme de la série (9), on peut faire  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et l'on obtient suivant les cas la dénivellation en un point  $(0, z)$ , ou en un point  $(x, 0)$ .

En faisant  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dans la formule (10), on trouve

$$(10') \quad h = \frac{S}{\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\gamma^{2n+1} 1.3.5 \dots (4n+1)},$$

ou encore, après remplacement de  $\frac{1}{\gamma}$  par  $\frac{t^2}{2r}$ ,

$$h = \frac{S}{\pi r} \left[ \frac{t^2}{2r} - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots \right],$$

qui n'est autre que la formule obtenue par Poisson, Cauchy et M. Boussinesq (voir *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. BOUSSINESQ, t. II, fasc. II, p. 504).

La dénivellation afférente à un point  $(0, z)$ , a pour valeur

$$(10'') \quad h = \frac{S}{\pi r} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 \cdot 3 \gamma^2} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \gamma^3} + \dots \right),$$

qui correspond à  $\theta = 0$  dans la formule (10').

L'étude de l'équation (10''), montre que la particule fluide qui, au temps 0, avait une dénivellation égale à  $\frac{S}{\pi r}$ , va s'élever à un certain niveau, en passant au-dessus de son niveau final; elle redescendra ensuite pour atteindre sa position d'équilibre finale au bout d'un temps très long, mais ne repassera jamais au-dessous, et n'oscillera point autour de ladite position.

Si l'on étudie maintenant ce qui se passe pour une particule ( $x = z$ ), on constate que le mouvement commence de bas en haut en partant de la dénivellation  $\frac{S}{\pi r \sqrt{2}}$ , puis, après un maximum, le mouvement est descendant, et enfin ascendant pour aboutir à  $h = 0$ ; il y a donc un maximum et un minimum pour  $h$ .

Il était intéressant de montrer qu'un tel phénomène se produit en tout point  $x, z$ ; or il a été vérifié pour la valeur  $\frac{\pi}{4}$  de  $\theta$ ; il était donc utile de le constater pour une valeur de  $\theta$  comprise entre  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , soit  $\frac{\pi}{3}$  par exemple.

Si l'on pose  $\frac{1}{\gamma} = \lambda$ , on voit de suite que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{t}{r} \quad \left( \text{car } \lambda = \frac{t^2}{2r} \right),$$

et encore

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{S}{\pi r} \cdot \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \cos \theta - \sum \left( \frac{\lambda^{2n+1} \cos(2n+2)\theta}{4n+1} - \frac{\lambda^{2n+2} \cos(2n+3)\theta}{4n+3} \right) \right];$$

dans cette expression on a remplacé les produits

$$1.3.5 \dots (4n+1), \quad 1.3.5 \dots (4n+3)$$

par les symboles  $\overline{4n+1}$ ,  $\overline{4n+3}$

L'expression de  $\frac{\partial h}{\partial t}$  a pour valeur

$$(11) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{St}{\pi r^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \frac{(2n+1)\lambda^{2n} \cos(2n+2)\theta}{\overline{4n+1}} - \frac{(2n+2)\lambda^{2n+1} \cos(2n+3)\theta}{\overline{4n+3}} \right].$$

Or si l'on fait  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , on voit que l'expression  $\sum$  se réduit à la série

$$(12) \quad -\frac{1}{2} + \frac{2\lambda}{3} - \frac{\frac{3}{2}\lambda^2}{5} - \frac{\frac{4}{2}\lambda^3}{7} + \frac{5\lambda^4}{9} - \frac{\frac{6}{2}\lambda^5}{11} - \frac{\frac{7}{2}\lambda^6}{13} \\ + \frac{8\lambda^7}{15} - \frac{\frac{9}{2}\lambda^8}{17} - \frac{\frac{10}{2}\lambda^9}{19} + \frac{11\lambda^{10}}{21} - \dots$$

Les maxima et les minima de  $h$  correspondent aux zéros de cette série.

Pour aborder l'étude des racines, nous ne prendrons tout d'abord que les sept premiers termes et considérerons l'équation

$$\frac{\frac{7}{2}\lambda^6}{13} + \frac{\frac{6}{2}\lambda^5}{11} - \frac{5\lambda^4}{9} + \frac{2\lambda^3}{7} + \frac{\frac{3}{2}\lambda^2}{5} - \frac{2\lambda}{3} + \frac{1}{2} = 0,$$

qui présente quatre variations et par suite peut avoir 0, 2 ou 4 racines positives, racines qui sont les seules intéressantes au point de vue mécanique.

Cette équation peut s'écrire

$$F(\lambda) = \frac{1}{10^4} (0,259\lambda^6 + 2,886\lambda^5 - 52,91\lambda^4 + 190,46\lambda^3 \\ + 1000\lambda^2 - 6.666,66\lambda + 5000) = 0,$$

Considérons l'équation dérivée

$$\frac{6.7}{13} \lambda^5 + \frac{5.3}{11} \lambda^4 - \frac{4.5}{9} \lambda^3 + \frac{3.2}{7} \lambda^2 + \frac{3\lambda}{5} - \frac{2}{3} = 0,$$

qui peut encore être mise sous la forme  $Y_1 = Y_2$  après avoir posé

$$Y_1 = \frac{\lambda^3}{13} (21\lambda^2 + 195\lambda - 2860) \quad \text{et} \quad Y_2 = - \frac{\left(2\lambda^2 + 7\lambda - \frac{70}{3}\right)}{35}.$$

Les équations  $Y_1 = 0$  et  $Y_2 = 0$  ont respectivement pour racines :

$$\begin{aligned} (\text{pour } Y_1) & \quad -17,20, \quad 0, \quad 7,91; \\ (\text{pour } Y_2) & \quad -5,59, \quad 2,09. \end{aligned}$$

Il est facile de voir en construisant les courbes

$$Y_1 = \frac{\lambda^3}{13} (21\lambda^2 + 195\lambda - 2860), \\ Y_2 = - \frac{\left(2\lambda^2 + 7\lambda - \frac{70}{3}\right)}{35},$$

qu'il n'y a qu'un point dans la région positive des  $\lambda$ , répondant à la condition  $Y_1 = Y_2$ , et correspondant à  $\lambda = \mu$ . La dérivée  $F'(\lambda)$  étant négative de  $\lambda = 0$  à  $\lambda = \mu$  et positive au delà, il en résulte que  $F(\lambda)$  décroît jusqu'à un certain minimum, puis croît jusqu'à  $+\infty$ .

Comme  $F(0) = 0,5$  et  $F(6) = 0,809$ , on en déduit, eu égard aux considérations qui précèdent, que l'équation  $F(\lambda) = 0$  a deux racines comprises entre 0 et 6.

Les substitutions des nombres 1, 4 et 5 fournissent les résultats suivants :

$$F(1) = -0,0525, \quad F(4) = -0,301, \quad F(5) = +0,047,$$

et permettent de trouver immédiatement les valeurs approchées des racines

$$\lambda_1 = 0,90 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 4,87.$$

Adjoignons maintenant aux sept premiers termes de la série les trois termes qui suivent, et considérons la nouvelle équation

$$G(\lambda) = Y_3 + Y_4,$$

avec

$$Y_3 = F(\lambda),$$

$$Y_4 = \frac{\frac{10}{2}\lambda^9}{19} + \frac{\frac{9}{2}\lambda^8}{17} - \frac{8\lambda^7}{15}.$$

Les solutions de  $G(\lambda) = 0$  correspondent à  $Y_3 = -Y_4$ . Or comme l'équation  $Y_4(\lambda) = 0$ , en plus de la racine 0 d'ordre 7 et d'une racine négative, n'a qu'une racine positive comprise entre 1 et 5 et inférieure à la plus grande racine de  $Y_3(\lambda) = 0$ , on voit de suite, grâce à la construction des courbes  $Y_3(\lambda) = 0$  et  $Y_4(\lambda) = 0$ , que  $G(\lambda) = 0$  n'a que deux racines positives qui sont très peu inférieures à celles de  $F(\lambda) = 0$ . Cette même méthode, qui peut être suivie de proche en proche, montrera que la série n'a que deux zéros relatifs à des valeurs positives de  $\lambda$ .

Soit  $h_0$  la dénivellation au temps 0 qui n'est autre que

$$\frac{S}{\pi r} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \frac{S}{\pi r}.$$

La dénivellation correspondant à la valeur  $\lambda_1 = 0,90$  nous donne

$$h_1 = \frac{S}{\pi r} \times \frac{1}{2} + \frac{S}{\pi r} \times 0,21.$$

d'où

$$h_1 - h_0 = 0,21 \frac{S}{\pi r}.$$

Comme on a  $\frac{1}{\gamma} = \lambda = \frac{t^2}{2r}$ , le temps  $t_1$  mis par la particule pour passer

de la position  $h_0$  à  $h_1$ , est égal à

$$t_1 = \sqrt{2r\lambda_1} = 1,34\sqrt{r}.$$

On se rend parfaitement compte du mouvement de descente de la particule dans l'intervalle  $(0, t_1)$ , puisque dans le champ  $(0, \lambda_1)$  la série (12) constituée sous le signe  $\Sigma$  dans l'expression de  $\frac{\partial h}{\partial t}$  est négative et que  $\frac{\partial h}{\partial t}$  est positive. La dénivellation  $h_2$  relative à la valeur de  $\lambda_2 = 4,87$  est égale à

$$h_2 = \frac{S}{\pi r} \times \frac{1}{2} - \frac{S}{\pi r} \times 1,10 = -\frac{S}{\pi r} \times 0,60;$$

à cette même valeur  $\lambda_2$  correspond le temps

$$t_2 = \sqrt{2r \times 4,87} = 3,13\sqrt{r}.$$

En définitive, une particule qui était en A, alors que le solide *n'était pas introduit*, vient prendre place en B à partir du moment où le corps qui avait été immergé est complètement enlevé, c'est-à-dire à la fin de la

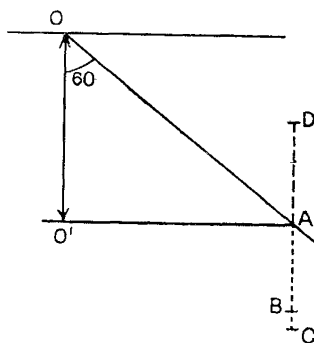


Fig. 1.

période  $(-\varepsilon, 0)$  considérée au début de cette étude (établissement des équations du mouvement); la particule passe de B en C au bout du temps  $t_1$ , puis remonte jusqu'en D avec  $AD = -0,60 \frac{S}{\pi r}$ , et enfin rejoint la position A au bout d'un temps extrêmement long.

Il n'est point sans intérêt de rappeler que Poisson avait prévu le mouvement au début qui est une élévation pour tous les points qui se trouvent en dessous des deux plans inclinés sous l'horizon de  $45^\circ$  et passant par la génératrice immergée du solide  $x = \xi$  dont l'enlèvement donne naissance aux ondes ; pour tous les points situés au-dessus de ces plans, le mouvement débute par un abaissement de la particule, comme nous venons de le vérifier ici.

*Du mouvement des particules situées initialement dans le plan  $z = z_0$ .*  
 — Poisson, Cauchy et M. Boussinesq ont déterminé pour un instant donné les points les plus élevés et les plus abaissés de la surface fluide, qui sont les sommets des ondes apparentes qui se propagent à cette surface.

Si l'on pouvait distinguer les particules fluides situées dans le plan  $z_0$  (en les colorant par exemple), on verrait également apparaître des ondes, et l'on discernerait les points les plus hauts et les plus bas de cette surface  $z_0$  ; nous allons tenter ici un essai de recherche de ces points pour de telles ondes.

On a vu que la dénivellation  $h$  est définie par l'équation (10) qui peut encore s'écrire

$$(10) \quad h = \frac{S}{\pi l} (\cos \theta) - \frac{S}{\pi} \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n+2} \cos(2n+2)\theta}{2^{2n+1} \cdot r^{2n+2} \cdot \overline{4n+1}} - \frac{t^{2n+4} \cos(2n+3)\theta}{2^{2n+2} \cdot r^{2n+3} \cdot \overline{4n+3}} \right\},$$

en tenant compte de ce que l'expression symbolique

$$\overline{4n+1} = 1.3.5 \dots (4n+1).$$

Pour toutes les particules appartenant à la droite  $O'A$  (*voir* figure ci-contre), on obtient la valeur de la dénivellation, en faisant  $z = z_0$  ; de plus les sommets et les creux des ondes apparentes correspondent à  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$  pour  $z = z_0$ .



Or cette valeur de  $\frac{\partial h}{\partial x}$  est égale à

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{r^2} \cos \theta - \sum_0^{\infty} \left( \frac{-(2n+2) t^{4n+2} \cos(2n+2)\theta}{2^{2n+1} \cdot r^{2n+3} \cdot 4n+1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(2n+3) t^{4n+4} \cos(2n+3)\theta}{2^{2n+2} \cdot r^{2n+4} \cdot 4n+3} \right) \right] \frac{dr}{dx} \\ & + \left[ -\frac{1}{r} \sin \theta + \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2n+2)\theta \cdot (2n+2) t^{4n+2}}{2^{2n+1} \cdot r^{2n+2} \cdot 4n+1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sin(2n+3)\theta \cdot (2n+3) t^{4n+4}}{2^{2n+2} \cdot r^{2n+3} \cdot 4n+3} \right] \frac{d\theta}{dx}. \end{aligned}$$

On voit de suite, puisque  $\cos \theta = \frac{z}{r}$ , que l'on a

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{r^2} \frac{dr}{dx},$$

et par suite  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{r^2}$ ; il en résulte que l'équation de condition  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r^2} \left[ \cos \theta - \sum_0^{\infty} \frac{(2n+2) t^{4n+2} \cos(2n+2)\theta}{2^{2n+1} \cdot r^{2n+1} \cdot 4n+1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(2n+3) t^{4n+4} \cos(2n+3)\theta}{2^{2n+2} \cdot r^{2n+2} \cdot 4n+3} \right] \sin \theta \\ & - \frac{1}{r^2} \left[ \sin \theta - \sum_0^{\infty} \frac{(2n+2) t^{4n+2} \sin(2n+2)\theta}{2^{2n+1} \cdot r^{2n+2} \cdot 4n+1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(2n+3) t^{4n+4} \sin(2n+3)\theta}{2^{2n+2} \cdot r^{2n+2} \cdot 4n+3} \right] \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

qui, après suppression du facteur  $\frac{1}{r^2}$ , et un calcul simplé, prend la forme

$$(13) \quad \sin 2\theta - \sum_0^{\infty} \left[ \frac{(2n+2) \sin(2n+3)\theta}{r^{2n+1} \cdot 4n+1} - \frac{(2n+3) \sin(2n+4)\theta}{r^{2n+2} \cdot 4n+3} \right] = 0.$$

Nous avons développé le premier membre de (13) d'abord suivant les puissances successives de  $z$ , et ensuite suivant les puissances de  $x$ ,

après avoir au préalable remplacé  $\sin m\theta$  par

$$\begin{aligned} \sin m\theta &= m \cos^{m-1}\theta \sin \theta - m \frac{(m-1)(m-2)}{3!} \cos^{m-3}\theta \sin^3\theta \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!} \cos^{m-5}\theta \sin^5\theta \dots, \end{aligned}$$

$\sin\theta$  et  $\cos\theta$  par  $\frac{x}{r}$  et  $\frac{z}{r}$ .

Ces développements sont les suivants :

$$\begin{aligned} (14) \quad & 2 \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right) \frac{x^2}{r^2} \left[ 1 - \frac{2}{5} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^2 + \frac{3}{9} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^4 - \dots \right] \\ & + \frac{zx}{r^2} \left[ \frac{1 \cdot 2}{1} - \frac{3 \cdot 4}{3} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^2 + \frac{5 \cdot 6}{7} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^4 - \frac{7 \cdot 8}{11} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^6 \dots \right] \\ & - \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right) \frac{z^2}{r^2} \left[ \frac{2 \cdot 3}{1} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{6}{9} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^4 \right. \\ & \quad \left. - \frac{8}{13} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7!} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^6 + \dots \right] \\ & + \frac{t^2 x}{2r^2} \frac{z^3}{x r^2} \left[ \frac{3 \cdot 4}{3} - \frac{5}{7} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^2 + \dots \right] + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou

$$(14') \quad 2 \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right) \frac{x^2}{r^2} f_1 + \frac{zx}{r^2} f_2 - z^2 \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right) \frac{1}{r^2} f_3 + z^3 \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right) \frac{1}{x r^2} f_4 - \dots = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} (15) \quad & \frac{xz}{r^2} \left[ 2 - \frac{2 \cdot 3}{1} \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right) + \frac{3 \cdot 4}{3} \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{4 \cdot 5}{5} \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^3 + \frac{5 \cdot 6}{7} \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^4 - \dots \right] \\ & + \frac{x^3}{3! z r^2} \left[ \frac{2}{1} (3 \cdot 2 \cdot 1) \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right) - \frac{3}{3} (4 \cdot 3 \cdot 2) \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{5} (5 \cdot 4 \cdot 3) \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^3 - \frac{5 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4)}{7} \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^4 + \dots \right] \\ & - \frac{x^5}{5! z^3 r^2} \left[ \frac{4}{5} (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^3 \right. \\ & \quad \left. - \frac{5}{7} (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^4 + \dots \right] \\ & + \frac{x^7}{7! z^5 r^2} \left[ \frac{6}{7} \cdot 7! \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^5 \right. \\ & \quad \left. - \frac{7}{11} (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \left( \frac{t^2 z}{2r^2} \right)^6 + \dots \right] - \dots = 0, \end{aligned}$$

où

$$(15') \quad \frac{xz}{r^2} A + \frac{x^3}{3! z r^2} B - \frac{x^5}{5! z^3 r^2} C + \frac{x^7}{7! z^5 r^2} D - \dots = 0.$$

*Premier cas.* — Dans le cas où  $z = 0$ , la quantité  $\frac{t^2 x}{2r^2}$  se réduit à  $\frac{t^2 x}{2x^2}$  ou  $\frac{t^2}{2r}$ ; si donc l'on pose  $\left(\frac{t^2 x}{2r^2}\right)^2 = p$ , conformément aux notations de Poisson, et si l'on fait  $z = 0$ , dans l'équation (14'), on retrouve l'équation  $f_1 = 0$ , ou

$$1 - \frac{2p}{5} + \frac{3p^2}{9} - \frac{4p^3}{13} + \dots = 0,$$

qui donne les points les plus bas et les plus hauts de la surface fluide (voir page 113 du Mémoire de Poisson sur la *Théorie des ondes*).

Toutefois il y a lieu de rejeter les très grandes valeurs de  $p$ , puisque, dans l'établissement de l'équation caractéristique de la dénivellation, Poisson suppose que l'expression  $g \frac{t^2}{x}$  (ou  $\frac{t^2}{x}$  dans le cas où les unités choisies correspondent à  $g = 1$ ) n'est pas très grande.

Si avec Poisson nous prenons  $f(x) = H \frac{(l^2 - x^2)}{l^2}$ , et si de plus nous faisons  $g = 1$ , l'expression de la dénivellation — afférente à la représentation du potentiel des vitesses donnée par ce géomètre — devient :

$$(16) \quad h = \frac{H}{\pi l^2} \int_{-l}^{+l} \int_0^\infty (l^2 - x^2) \cos a(x - \sigma) \cos t\sqrt{a} e^{-az} dx du.$$

Or on peut calculer facilement l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos(ax - a\alpha) \cos t\sqrt{a} e^{-az} d\alpha,$$

en suivant, soit la méthode de Cauchy, soit en faisant état du procédé de M. Rousier qui utilise le développement de  $\cos t\sqrt{a}$  (pages 7 et 8 de sa Thèse).

Cette intégrale a pour valeur

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \int_0^{\infty} \cos(ax - a\alpha) \cos t\sqrt{a} e^{-az} da \\
 &= \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_1}{x - \alpha} - \frac{t^2 \sin^2\theta_1 \cos 2\theta_1}{2! (x - \alpha)^2} + \dots \\
 & \pm \frac{(t^2)^n n! \sin^{n+1}\theta_1 \cos(n+1)\theta_1}{(2n)! (x - \alpha)^{n+1}} \mp \dots,
 \end{aligned}$$

avec

$$\sin\theta_1 = \frac{x - \alpha}{r_1}, \quad \cos\theta_1 = \frac{z}{r_1} \quad \text{et} \quad r_1 = \sqrt{(x - \alpha)^2 + z^2};$$

elle peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \cos(ax - a\alpha) \cos t\sqrt{a} e^{-az} da \\
 &= \frac{z}{r_1^2} - \frac{t^2 (x - \alpha)^2 \cos 2\theta_1}{2! r_1^2} + \dots \pm \frac{(t^2)^n n! \cos(n+1)\theta_1}{(2n)! r_1^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

On est donc conduit, pour déterminer la dénivellation  $h$ , à calculer les intégrales

$$\int_{-l}^{+l} \frac{z(l^2 - \alpha^2)}{r_1^2} d\alpha \quad \text{et} \quad \int_{-l}^{+l} \frac{(l^2 - \alpha^2) \cos(n+1)\theta_1}{r_1^{n+1}}.$$

Comme

$$\begin{aligned}
 \cos(n+1)\theta_1 &= \cos^{n+1}\theta_1 - \frac{(n+1)n}{2!} \cos^{n-1}\theta_1 \sin^2\theta_1 \\
 &+ \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{4!} \cos^{n-3}\theta_1 \sin^4\theta_1 - \dots
 \end{aligned}$$

et

$$\frac{\cos(n+1)\theta_1}{r_1^{n+1}} = \frac{z^{n+1} - C_{n+1}^2 z^{n-1} (x - \alpha)^2 + C_{n+1}^4 z^{n-3} (x - \alpha)^4 - \dots}{r_1^{2n+2}},$$

on remarque en définitive que l'on est ramené au calcul des deux intégrales :

$$\int_{-l}^{+l} \frac{(l^2 - \alpha^2) d\alpha}{[(x - \alpha)^2 + z^2]^{n+1}} \quad \text{et} \quad \int_{-l}^{+l} \frac{(x - \alpha)^{2p} d\alpha}{[(x - \alpha)^2 + z^2]^{n+1}}.$$

La première d'entre elles peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \int \frac{[(l^2 - x^2) + x^2 - \alpha^2] d\alpha}{r_1^{2n+2}} = (l^2 - x^2) \int \frac{d\alpha}{r_1^{2n+2}} + \int \frac{(x - \alpha)(x + \alpha) d\alpha}{[(x - \alpha)^2 + z^2]^{n+1}}, \\ \mathfrak{J}_1 &= (l^2 - x^2) I_{n+1} - \left[ \frac{(x + \alpha)}{2n[(x - \alpha)^2 + z^2]^n} \right] + \int \frac{d\alpha}{2n[(x - \alpha)^2 + z^2]^n}. \end{aligned}$$

ou

$$\mathfrak{J}_1 = (l^2 - x^2) I_{n+1} + \frac{1}{2n} I_n - \left[ \frac{x + \alpha}{2n r_1^{2n}} \right],$$

avec

$$I_{n+1} = \int \frac{d\alpha}{r_1^{2n+2}} \quad \text{et} \quad I_n = \int \frac{d\alpha}{r_1^{2n}}.$$

Si, dans  $I_{n+1}$ , on fait le changement de variable  $x - \alpha = zX$ , on remarque qu'elle s'écrit

$$I_{n+1} = \frac{1}{z^{2n+1}} \int_{\frac{x-l}{z}}^{\frac{x+l}{z}} \frac{dX}{(1+X^2)^{n+1}}.$$

Or on sait que l'intégrale classique  $\int \frac{dX}{(1+X^2)^{n+1}}$  a pour valeur

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \dots 4 \cdot 2} \text{arc tang } X + R(X),$$

où  $R(X)$  est une fonction rationnelle de  $X$ , dont il serait facile d'avoir l'expression; le dénominateur de  $R(X)$  est  $(1+X^2)^n$ , et le numérateur est de degré inférieur à  $2n$  (voir *Cours d'Analyse mathématique* de M. GOURSAT, p. 236). Connaissant les expressions de  $I_{n+1}$  et  $I_n$ , on peut donc déterminer la valeur de  $\mathfrak{J}_1$ ; il nous reste à calculer

$$\mathfrak{J}_2 = \int_{-l}^{+l} \frac{(x - \alpha)^{2p} d\alpha}{[(x - \alpha)^2 + z^2]^{n+1}}.$$

Considérons spécialement l'intégrale indéfinie

$$I_{2p, 2n+2} = \int \frac{(x - \alpha)^{2p} d\alpha}{[(x - \alpha)^2 + z^2]^{n+1}} = \int \frac{(x - \alpha)^{2p} d\alpha}{r_1^{2n+2}} = \int \frac{(x - \alpha) d\alpha}{r_1^{2n+2}} (x - \alpha)^{2p-1};$$

une intégration simple met en évidence la relation de récurrence

suivante :

$$I_{2p, 2n+2} = \frac{-(x - \alpha)^{2p-1}}{2n r_1^{2n}} + \frac{2p-1}{2n} I_{2p-2, 2n},$$

grâce à laquelle on peut écrire

$$\begin{aligned} I_{2p-2, 2n} &= \frac{-(x - \alpha)^{2p-3}}{(2n-2) r_1^{2n-2}} + \frac{2p-3}{2n-2} I_{2p-4, 2n-2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ I_{4, 2n-2p+6} &= \frac{-(x - \alpha)^3}{(2n-2p+4) r_1^{2n-2p+4}} + \frac{3 I_{2, 2n-2p+4}}{2n-2p+4}, \\ I_{2, 2n-2p+4} &= \frac{-(x - \alpha)}{(2n-2p+2) r_1^{2n-2p+2}} + \frac{1}{2n-2p+2} I_{0, 2n-2p+2}. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie les deux membres de la 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, ..., p<sup>ème</sup> relation de récurrence, par les quantités

$$1, \quad \frac{2p-1}{2n}, \quad \frac{(2p-1)(2p-3)}{2n \cdot (2n-2)}, \quad \dots, \quad \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3}{2n(2n-2)\dots(2n-2p+2)},$$

et si l'on ajoute, on trouve :

$$\begin{aligned} I_{2p, 2n+2} &= - \left[ \frac{(x - \alpha)^{2p-1}}{2n r_1^{2n}} + \frac{2p-1}{2n} \frac{(x - \alpha)^{2p-3}}{(2n-2) r_1^{2n-2}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3}{2n(2n-2)\dots(2n-p+2)} \frac{x - \alpha}{r_1^{2n-2p+2}} \right] \\ &\quad + \frac{(2p-1)\dots 3}{2n(2n-2)\dots(2n-2p+2)} I_{0, 2n-2p+2}; \end{aligned}$$

comme nous avons donné ci-dessus l'expression de l'intégrale

$$I_{0, 2n-2p+2} = \int \frac{d\alpha}{[(x - \alpha)^2 + z^2]^{n-p+1}},$$

il en résulte que nous pouvons donner celle de  $I_{2p, 2n+2}$ , qui n'est autre que  $\mathfrak{J}_p$ . On est donc en mesure de déterminer les différents éléments de la dénivellation.

Revenons maintenant à l'étude des maxima et des minima de  $h$ , pour les particules situées sur la droite  $z = z_0$  dans le plan  $zOx$ , et supposons que  $\frac{t^2}{2r}$  soit petit.

*Deuxième cas.* — Si la particule envisagée correspond à une valeur

de  $x$ , qui tout en étant petite, est supérieure aux valeurs des abscisses de la zone d'ébranlement ou d'émergence, il suffit de se reporter à l'équation (15') :

$$\frac{xz}{r^2} \left[ A + \frac{Bx^2}{3!z^2} - \frac{Cx^4}{5!z^4} + \dots \right] = 0,$$

et de définir l'équation caractéristique des maxima et des minima par  $A = 0$ .

Or pour  $x$  petit et  $z$  fini, l'équation en question se réduit à

$$(18) \quad z - \frac{2.3}{1} \left( \frac{t^2}{2z} \right) + \frac{3.4}{3} \left( \frac{t^2}{2z} \right)^2 - \frac{4.5}{5} \left( \frac{t^2}{2z} \right)^3 + \dots = 0.$$

*Troisième cas.* — Supposons maintenant  $x$  fini, avec  $\frac{t^2}{2r}$  petit et  $z_0$  fini;  $\frac{t^2 x}{2r^2}$  est une quantité ayant le même ordre de grandeur que  $\frac{t^2}{2r}$ .

L'équation (14') devient, après division par le facteur  $\frac{x^2}{r^2}$  :

$$\frac{2t^2 x}{2r^2} f_1 + \frac{z}{x} f_2 - \frac{z^2}{x^2} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right) f_3 + \frac{z^3}{x^3} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right) f_4 - \dots = 0.$$

Eu égard à l'hypothèse faite, et en raison de la présence du facteur  $\frac{t^2 x}{2r^2}$  dans tous les termes sauf le second, l'équation peut être réduite à

$$f_2 = \frac{1.2}{1} - \frac{3.4}{3} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^2 + \frac{5.6}{5} \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^4 - \dots = 0,$$

ou

$$(19) \quad \frac{1.2}{1} - \frac{3.4}{3} \rho + \frac{5.6}{5} \rho^2 - \frac{7.8}{9} \rho^3 + \dots = 0, \quad \text{avec } \rho = \left( \frac{t^2 x}{2r^2} \right)^2.$$

Si l'on considère la particule fluide  $(x, z_0)$ , il se produira en ce point un maximum ou un minimum pour une valeur du temps

$$t = \frac{2r^2}{x} \sqrt{\rho} - \frac{2(z_0^2 + x^2) \sqrt{\rho}}{x}.$$

Si pour cette valeur de  $\rho$ ,  $\frac{d^2 h}{dx^2} < 0$ , nous nous trouverons en présence d'un maximum.

En remplaçant  $\cos n\theta$  par son expression, en fonction des puissances de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  dans l'équation (10) représentative de  $h$ , et développant

la dénivellation par rapport aux puissances successives de  $z$ , on trouve :

$$(20) \quad h = \frac{x}{r^2} \left[ \frac{(p)^{\frac{1}{2}}}{1} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{5} + \frac{p^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{p^{\frac{5}{2}}}{13} + \dots \right] \\ + \frac{z}{r^2} \left[ 1 - \frac{C_3^2}{3} p + \frac{C_4^4}{7} p^2 - \frac{C_7^6}{11} p^3 + \dots \right] \\ - \frac{t^2 z^2}{2r^4} \left[ 1 - \frac{C_4^2}{5} p + \frac{C_6^4}{9} p^2 - \dots \right] \dots;$$

dans cette équation, les quantités  $C_m^n$  représentent les combinaisons de  $m$  objets  $n$  à  $n$  et  $p$  n'est autre qu'une des racines de l'équation (19).

On déduit de  $\sqrt{p} = \frac{t^2 x}{2r^2}$

$$t^2 = \frac{2r^2 \sqrt{p}}{x} \quad \text{et} \quad \frac{t^2}{2r^4} = \frac{\sqrt{p}}{x r^2},$$

et par suite

$$h = \frac{1}{x^2 + z_0^2} L_1(p) + \frac{z_0}{x^2 + z_0^2} L_2(p) - z_0^2 \frac{\sqrt{p}}{x(x^2 + z_0^2)} L_3(p) + \dots$$

ou

$$h = \frac{x}{x^2 + z_0^2} \left[ x L_1(p) + z_0 L_2(p) - z_0^2 \frac{\sqrt{p}}{x} L_3(p) + \dots \right],$$

valeur de la dénivellation (maximum ou minimum) se produisant en un point  $x, z$  au bout d'un temps  $t$ , tel que  $\sqrt{p} = \frac{t^2 x}{2r^2}$ .

*Quatrième cas.* — Supposons maintenant que  $z_0$  étant fini,  $x$  soit très grand, tout en gardant à  $\frac{t^2}{2r}$  une valeur petite;  $\frac{x}{r}$  est alors voisin de 1 et  $\frac{t^2 x}{2r^2}$  est comparable à  $\frac{t^2}{2r}$ .

Si  $\frac{z_0}{r}$  est très petit par rapport à  $\frac{t^2}{2r}$ , l'équation (14') se réduit à  $f_1 = 0$  qui caractérise alors les maxima et les minima :

$$(21) \quad f_1 = 1 - \frac{2}{5} p + \frac{3p^2}{9} - \frac{4p^3}{13} + \dots = 0, \quad \text{avec } p = \left( \frac{t^2}{2r} \right)^2.$$

Nous venons de passer en revue les divers cas qui correspondent à une faible valeur de  $\frac{t^2}{2r}$ ; nous allons tenter l'étude du phénomène dans l'hypothèse où  $\frac{t^2}{2r}$  a une grande valeur.



Comme toujours, nous admettrons que les petites valeurs de  $x$  correspondent néanmoins à des points situés en dehors de la zone d'ébranlement initial; elles pourront être telles qu'elles rendront l'expression  $\frac{t^2 x}{2r^2}$  petite ou finie.

Si  $\frac{t^2 x}{2r^2}$  est petit, on aura recours à l'équation (15'), qui après division par  $\frac{xz}{r^2}$  devient

$$A + \frac{x^2}{3!z^2}B - \frac{x^4}{5!z^4}C + \dots = 0;$$

et l'on est conduit à la recherche des racines de l'équation  $A = 0$ , qui, dans le cas actuel puisque  $x$  est petit, n'est autre que l'équation (18) en  $\frac{t^2}{2z}$ .

Si  $\frac{t^2 x}{2r^2}$  est fini, il est évident que  $\frac{t^2 z}{2r^2}$  a une grande valeur, très voisine de  $\frac{t^2}{2r}$ , on aura encore recours pour définir les maxima et les minima à l'équation  $A = 0$ .

Supposons maintenant  $x$  fini  $< z$ ; nous ne considérerons que les deux premiers termes de l'équation (15'), c'est-à-dire

$$(15'') \quad A + \frac{x^2}{3!z^2}B = 0,$$

que l'on va résoudre ainsi qu'il suit.

Soit  $\lambda_0$  une racine de l'équation  $A(\lambda) = 0$  et prenons

$$\lambda = \lambda_0 + k \frac{x^2}{z^2};$$

en remplaçant dans l'équation (15''), et en négligeant les termes en  $k^2$ ,  $k^3$ , on trouve

$$k \frac{x^2}{z^2} A'(\lambda_0) + \frac{x^2}{6z^2} \left[ B(\lambda_0) + k \frac{x^2}{z^2} B'(\lambda_0) \right] = 0,$$

$$\frac{x^2}{z^2} k \left[ A'(\lambda_0) + B'(\lambda_0) \frac{x^2}{6z^2} \right] + \frac{x^2}{6z^2} B(\lambda_0) = 0,$$

$$k = - \frac{B(\lambda_0)}{6A'(\lambda_0) + B'(\lambda_0) \frac{x^2}{z^2}}.$$

De la relation  $\lambda_0 = \frac{t^2 z_0}{2r^2}$ , on déduit

$$r^2 = \frac{t^2 z_0}{2\lambda_0} \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{z_0^2} = \frac{t^2}{2\lambda_0 z_0} - 1;$$

on peut calculer  $k$  en fonction de  $\lambda_0$ ,  $z_0$  et  $t$  et par suite  $\lambda$ , valeur approchée d'une racine de l'équation (15'').

En un point  $x$ ,  $z$  donné apparaît une onde au bout d'un temps  $t = \sqrt{\frac{2r^2 \lambda_0}{z_0}}$ , pour laquelle les éléments  $(h, x, z_0)$  correspondent soit à un relief, soit à un creux; la quantité  $h$  s'exprime alors en fonction de  $(\lambda, x, z_0)$ .

Dans l'hypothèse où  $x > z$ , il faut alors faire appel à l'équation (14')

$$2\lambda f_1 - \frac{z}{x} f_2 - \frac{z^2}{x^2} \lambda f_3 + \frac{z^3}{x^3} \lambda f_4 - \dots = 0;$$

la quantité  $\lambda = \frac{t^2 x}{2r^2}$  étant très grande et  $z < x$ , on peut ne considérer tout d'abord que l'équation  $f_1 = 0$ .

Soient  $\lambda_0$  une racine de cette équation, et  $\lambda$  une racine du système

$$2f_1 - \frac{z^2}{x^2} f_3 = 0,$$

que nous supposons être de la forme  $\lambda_0 + k \frac{z^2}{x^2}$ ; dans ces conditions, on pourra rattacher à la racine  $\lambda_0$  la racine

$$\lambda_0 + \frac{2f_1'(\lambda_0) - f_3(\lambda_0)}{f_3'(\lambda_0) - 2f_1''(\lambda_0)},$$

que l'on obtiendra en suivant la méthode préconisée plus haut.

*Remarque.* — Les séries entières  $f_2, A$  ont comme  $f_1$  une infinité de racines positives distinctes; les termes additionnels aux racines  $\lambda_0$  que nous avons fait apparaître ci-dessus (dans les hypothèses  $x \geq z$  avec  $\frac{t^2}{2r}$  très grand) existent bien, et peuvent être calculés.

Si maintenant nous rattachons à une très grande valeur de  $\frac{t^2}{2r}$ , un point très éloigné, sur  $z = z_0$  dans la direction  $Ox$ , on voit immédiatement qu'il faut encore pour faire apparaître les maxima et les minima résoudre l'équation  $f_t = 0$ , qui est en ce cas une équation en  $\frac{t^2}{2r}$ .

---

## DEUXIÈME PARTIE.

### ÉTUDE DES ONDES PAR ÉMERSION DANS LE CAS D'UN BASSIN INDÉFINI A TROIS DIMENSIONS.

---

Alors que dans le précédent Chapitre, nous avons procédé à l'intégration des équations obtenues dans le cas où l'on fait abstraction d'une des dimensions horizontales du fluide, nous allons faire une étude analogue, après avoir restitué au fluide ses trois dimensions et supposé que le corps immergé est de forme quelconque.

Ces équations sont les suivantes :

$$(22) \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0} = F(x, y) \quad (\text{pour } t = 0), \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \\ (\text{pour } t, x, y \text{ ou } z \text{ très grands}), \end{aligned}$$

$F(x, y)$  désignant les petites ordonnées primitives connues de la surface.

Nous suivrons là encore la méthode de M. Boussinesq (*Application*

des potentiels, p. 640; *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, fasc. 2, p. 505). Cette méthode consiste à prendre

$$(24) \quad \varphi = \int_0^{\infty} \left[ f\left(T + \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) + f\left(T - \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha;$$

elle fait intervenir une fonction  $f$  de  $\left(T, \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)$  et la fonction  $\psi$  identique à la fonction  $\psi$  introduite déjà dans le potentiel relatif au cas de deux dimensions (*voir* précédent Chapitre): Il y a lieu de remarquer que le potentiel afférent aux ondes d'émergence produites par l'émergence d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe du canal était défini par l'expression

$$\varphi = \int_0^{\infty} \left[ \chi\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + \chi\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

L'expression (24) de  $\varphi$ , d'après sa forme même, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} = 0,$$

pourvu que l'on ait

$$(24') \quad f'_T(\infty, x, y, z) = f'_T(-\infty, x, y, z).$$

L'équation (22) sera donc vérifiée si l'on a

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Grâce à l'introduction de cette variable complémentaire  $T$ , l'intégration de l'équation du quatrième ordre (22) est ramenée à celle de l'équation (25) du second ordre. La fonction  $\varphi$  satisfera à l'équation (25), si chacun des éléments de l'intégrale (24), représentative de  $\varphi$ , y satisfait, c'est-à-dire si la fonction  $f(T, x, y, z)$  (où  $T$  désigne la première variable) vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 f(T, x, y, z)}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 f(T, x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(T, x, y, z)}{\partial y^2},$$

qui n'est autre que l'équation du son dans le cas de deux dimensions,

et peut être intégrée au moyen d'un potentiel sphérique, ou plutôt ici au moyen de la dérivée  $\frac{\partial}{\partial T}$  d'un semblable potentiel (voir *Cours d'Analyse* de M. BOUSSINESQ, t. II, fasc. 2, p. 443 et 507).

On prendra donc

$$(26) \quad f(T, x, y, z) \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T \cos \mu \, d\mu \int_0^{2\pi} \chi(x + T \cos \mu \cos \theta, y + T \cos \mu \sin \theta, z) \, d\theta,$$

où la fonction  $\chi$ , qui représente la densité de la matière potentiante, reste arbitraire, et où l'on voit apparaître la dérivée d'un potentiel et non ce potentiel, en raison de ce que ce potentiel est une fonction impaire de  $T$ .

En faisant dans l'équation (24) représentative de  $\varphi$ , la variable complémentaire  $T$  égale à zéro, nous réduisons l'expression entre crochets

$$f\left(\frac{x^2}{2}, x, y, z\right) + f\left(-\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)$$

à une fonction paire de la première variable  $\frac{\alpha^2}{2}$ .

La fonction  $f$ , définie par (26), étant une fonction paire de sa première variable  $T$ , on en déduit

$$f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) = f\left(-\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right);$$

dans ces conditions, l'équation (24) peut s'écrire

$$(27) \quad \varphi = 2 \int_0^{\infty} f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

où  $f$  est la fonction représentée par (26).

La détermination de la fonction  $\chi$  est possible, en faisant état de l'équation indéfinie (23) où  $\Delta_2 \varphi = 0$ ; or cette dernière équation sera satisfaite, si chacun des éléments de l'intégrale (27) satisfait à l'équation de Laplace, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

équation qui d'après (26) se ramène à

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0.$$

Calculons maintenant  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}$  et tenons compte de la condition aux limites :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0} = F(x, y) \quad (\text{pour } t = 0).$$

Or

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2 \int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}, x, y, z\right) \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$$

et, par suite,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 2 \int_0^\infty f(0, x, y, z) \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

En vertu de l'équation (26), on a immédiatement :

$$f(0, x, y, z) = \chi(x, y, z)$$

et

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = 2\chi(x, y, z) \int_0^\infty \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \chi(x, y, z);$$

comme  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0} = F(x, y)$  pour  $t = 0$ , il en résulte que

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \chi(x, y, 0) = F(x, y).$$

La fonction  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}$  doit s'annuler pour  $x, y$  ou  $z$  infinis, et prendre pour  $z = 0$  la valeur donnée  $F(x, y)$ .

La fonction  $\chi(x, y, z)$  est la fonction harmonique définie dans tout l'espace au dessous du plan  $z = 0$ , s'annulant à l'infini, et prenant pour  $z = 0$  les valeurs

$$\chi(x, y, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x, y).$$

La considération des potentiels de double couche permet de mettre

en évidence immédiatement la fonction  $\chi$  :

$$(28) \quad \chi(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

par suite la fonction  $f$ ,

$$f(T, x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T \cos \mu d\mu \\ \times \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[z^2 + (x + T \cos \mu \cos \theta - \xi)^2 + (y + T \cos \mu \sin \theta - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

et enfin le potentiel  $\varphi$ , dont l'expression vérifie bien toutes les conditions du problème.

On s'assure d'ailleurs que l'équation (24') est bien vérifiée.

En supposant le corps immergé réduit à un seul élément  $dq$  placé à l'origine des coordonnées, M. Vergne a identifié le potentiel de M. Boussinesq avec celui donné par Poisson, et a étendu au cas de trois dimensions les développements en série et les résultats de M. Rousier. Il a en effet trouvé pour valeur du potentiel des vitesses l'expression

$$(29) \quad \varphi = \frac{dq}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z\sqrt{m^2+n^2}} \cos mx \cos ny \frac{\sin t(\sqrt{m^2+n^2})}{\sqrt{m^2+n^2}} dm dn,$$

qui n'est autre que celle de Poisson.

Si l'on se reporte à la valeur de  $\varphi$  (p. 140 du Mémoire de Poisson),

$$\varphi = \frac{\sqrt{g}}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) e^{-zu} \cos(u\rho \cos \omega) \sin(t\sqrt{gu}) \sqrt{u} du d\omega d\alpha d\beta$$

et que l'on assimile le corps immergé à un élément, après avoir pris des unités correspondant à  $g = 1$ , on voit que le potentiel des vitesses est égal à

$$(29') \quad \varphi = \frac{dq}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-zu} \cos(u\rho \cos \omega) \sin(t\sqrt{u}) \sqrt{u} du d\omega;$$

or si dans (29) on fait les changements de variables

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta; \quad m = \rho \cos \omega, \quad n = \rho \sin \omega,$$

on retrouve l'expression (29').

M. Vergne, reprenant le mode de développement de Poisson (p. 144 du Mémoire de la *Théorie des Ondes*), donne pour  $\varphi$  le développement suivant :

$$(30) \quad \varphi = -\frac{dq}{\pi^2} \left[ \frac{t \partial Z}{\partial z} + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{n+1} Z}{\partial z^{n+1}} \dots \right],$$

avec

$$Z = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad \text{et} \quad R^2 = x^2 + y^2.$$

Si, dans l'azimut considéré, on prend des coordonnées polaires au lieu des coordonnées rectangulaires en posant

$$z = r \cos \theta, \quad R = r \sin \theta,$$

on aura

$$Z = \frac{\pi}{2} \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial^n Z}{\partial z^n} = \frac{\pi}{2} \frac{\partial^n \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial z^n}.$$

M. Vergne, s'appuyant d'une part sur le développement classique

$$\frac{1}{(1 + 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \alpha P_1(\cos \theta) + \alpha^2 P_2(\cos \theta) + \dots + \alpha^n P_n(\cos \theta) + \dots,$$

où les coefficients des diverses puissances de  $\alpha$  sont les polynomes de Legendre, et d'autre part sur la relation de récurrence entre deux polynomes de Legendre,

$$(n+1) P_{n+1}(\cos \theta) = (n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta),$$

a montré que l'on a

$$\frac{\partial^n Z}{\partial z^n} = \frac{\pi}{2} (-1)^n \frac{n!}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

(voir p. 44 et 45 de sa Thèse).



Si nous revenons à la formule (30), nous voyons que  $\varphi$  peut s'écrire

$$(31) \quad \varphi = \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{t}{r^2} P_1(\cos\theta) - \frac{t^2}{3r^3} P_2(\cos\theta) + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(n+2)(n+3)\dots(2n+1)r^{n+2}} P_{n+1}(\cos\theta) + \dots \right].$$

Il est intéressant de remarquer que la convergence de cette série est aussi rapide que celle afférente au cas de deux dimensions, en raison de ce que  $P_n(\cos\theta)$  a pour valeur absolue maxima l'unité, lorsque  $\cos\theta$  varie entre  $-1$  et  $+1$ , comme l'on s'en rend compte par l'examen du développement de  $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

Quant à la dénivellation  $h = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ , elle a pour valeur :

$$(32) \quad h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[ P_1(\cos\theta) - \frac{t^2}{r} P_2(\cos\theta) + \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(n+2)\dots(2n)r^{2n}} P_{n+1}(\cos\theta) + \dots \right],$$

ou, en posant  $r = \frac{\gamma t^2}{2}$ ,

$$(32') \quad h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[ P_1(\cos\theta) - \frac{2P_2(\cos\theta)}{\gamma} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n 2^n}{(n+2)(n+3)\dots 2n} \frac{P_{n+1}(\cos\theta)}{\gamma^n} + \dots \right], \\ h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[ P_1 \cos\theta - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{2n! \gamma^n} P_{n+1}(\cos\theta) \right]$$

Rappelons enfin que le polynome  $P_n$  peut être défini par la relation

$$P_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

que  $P_n$  est un polynome de Legendre de degré  $n$ , où tous les exposants de  $x$  sont de même parité que  $n$ .

Les polynomes  $X_{n-1}$ ,  $X_n$  et  $X_{n+1}$  de Legendre sont liés par la relation de récurrence

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0,$$

qui montre que la suite  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  jouit des propriétés d'une

suite de Sturm. Tenant compte des deux relations

$$X_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad X_n(-1) = (-1)^n,$$

on voit que  $X_n$  a toutes ses racines réelles et distinctes, comprises entre  $(-1)$  et  $(+1)$ . (Voir *Cours d'Analyse*, de M. GOURSAT, t. I, p. 193.)

Si dans la formule (32') nous faisons  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , nous retrouvons le développement de la dénivellation à la surface, en tenant compte de ce que

$$P_{2m+1} = 0 \quad \text{et} \quad P_{2m+2} = (-1)^{m+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2)}, \quad \frac{1}{\gamma} \frac{t^2}{2r},$$

$$h = \frac{dg}{2\pi r^2} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2 \cdot 5} \frac{1}{\gamma^3} + \dots \right)$$

$$\pm \frac{1}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m] (2m+3) (2m+5) \dots (4m+1)} \frac{1}{\gamma^{2m+1}} \mp \dots,$$

qui n'est autre que celui donné par Poisson (*Mémoire sur la Théorie des ondes*, p. 153) et celui de M. Boussinesq (*Cours d'Analyse*, t. II, fasc. 2, p. 513).

M. Vergne a intégré d'une manière élégante le problème des ondes d'émergence dans le cas d'un liquide indéfini, en cherchant à satisfaire aux équations indéfinies :

$$\Delta_2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

à la condition aux limites (à l'infini  $\varphi = 0$ ), et aux conditions initiales (pour  $t = 0$  et  $z = 0$ )

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(x, y),$$

par le développement de Taylor du potentiel des vitesses :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{t}{1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 + \dots + \frac{t^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right)_0 + \dots$$

M. Vergne fait observer d'une part que la fonction harmonique  $\varphi_0$ , définie dans tout l'espace au-dessous du plan des  $xy$ , s'annulant à l'infini et à la surface, est nulle identiquement, et d'autre part que la fonction

harmonique  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0$  définie dans tout l'espace au-dessous du plan des  $xy$ , s'annulant à l'infini, et prenant à la surface la valeur  $F(x, y)$ , est représentée par l'expression

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zF(\xi, \eta) d\xi d\eta}{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}^{\frac{1}{2}}$$

qui, dans le cas d'une solution simple naturelle, s'écrit :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 = \frac{dq}{2\pi} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dérivant  $(n - 2)$  fois par rapport à  $t$  la deuxième équation indéfinie et faisant ensuite  $t = 0$ , on a

$$\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{2n-2} \varphi}{\partial t^{2n-2}}\right)_0.$$

L'examen de cette dernière équation montre que l'on a

$$\left(\frac{\partial^{2m} \varphi}{\partial t^{2m}}\right)_0 = 0 \quad (\text{pour } m = 1, 2, \dots),$$

et

$$\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 \dots \left(\frac{\partial^{2m+1} \varphi}{\partial t^{2m+1}}\right)_0 = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0,$$

et conduit par suite au développement (31) de la fonction  $\varphi$  (voir pages 47, 48, 49 de la Thèse de M. Vergne).

Nous reviendrons ultérieurement sur cette démonstration, et sur l'extension qui lui a été donnée par M. Boussinesq dans le cas de bassins indéfinis en profondeur, mais latéralement limités par certaines parois verticales.

*Dénivellation à la surface. Rapprochement des formules de Cauchy et de M. Boussinesq.* — Nous allons maintenant montrer que l'expression de la dénivellation à la surface, indiquée par M. Boussinesq, peut, grâce à un changement de variable signalé par lui (voir note de la page 644 de son traité *Application des potentiels*), être transformée en celle donnée par Cauchy.

M. Boussinesq a donné pour dénivellation à la surface

$$(33) \quad h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \times \psi' \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right) F(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) dr;$$

or, si dans cette intégrale triple, on fait les changements de variables

$$x + r \cos \theta = \xi, \quad y + r \sin \theta = \eta, \quad \text{et} \quad \frac{t^2 \cos \mu}{4r} = \gamma,$$

elle s'écrit ainsi qu'il suit :

$$(33') \quad h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^{\frac{3}{2}} \psi'(\gamma) F(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r}.$$

La fonction  $\psi'(\gamma)$  n'est autre que celle dont il a été fait état au cours de cette étude (intégration dans les cas de deux et trois dimensions) (voir page 42 de ce travail); elle a pour dérivée

$$\psi'(\gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos \gamma + \sin \gamma) - \int_0^\infty e^{-2m\sqrt{\gamma}} \sin m^2 dm.$$

Remplaçons  $\psi'$  par sa valeur dans (33'), nous trouvons

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos \gamma + \sin \gamma) - \int_0^\infty e^{-2m\sqrt{\gamma}} \sin m^2 dm \right\} \frac{F(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta,$$

où  $h = h_1 - h_2$ , avec

$$h_1 = \frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^{\frac{3}{2}} (\cos \gamma + \sin \gamma) \frac{F(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta \\ = \frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^{\frac{3}{2}} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \gamma \right) \frac{F d\xi d\eta}{r}, \\ h_2 = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^{\frac{3}{2}} \left( \int_0^\infty e^{-2m\sqrt{\gamma}} \sin m^2 dm \right) \frac{F(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta.$$

Or si l'on pose

$$m = \sqrt{\nu}, \quad \text{d'où} \quad dm = \frac{d\nu}{2\sqrt{\nu}},$$

on remarque que

$$\int_0^\infty e^{-2m\sqrt{\gamma}} \sin m^2 dm = \int_0^\infty e^{-2\sqrt{\nu\gamma}} \sin \nu \frac{d\nu}{2\sqrt{\nu}} = \int_0^\infty \sin \nu \frac{1}{2\sqrt{\nu\gamma}} \frac{d}{d\nu} (e^{-2\sqrt{\nu\gamma}}) d\nu,$$

et en intégrant par parties

$$\int_0^\infty e^{-2m\sqrt{\gamma}} \sin m^2 dm = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} [-\sin \nu e^{-2\sqrt{\nu\gamma}}]_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \int_0^\infty \cos \nu e^{-2\sqrt{\nu\gamma}} d\nu;$$

il en résulte que  $h_2$  peut s'écrire

$$h_2 = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\nu\gamma}} \frac{F d\xi d\eta}{r} \int_0^\infty \cos \nu e^{-2\sqrt{\nu\gamma}} d\nu,$$

ou

$$h_2 = \frac{2}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma}{r} F(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_0^\infty \cos \nu e^{-2\sqrt{\nu\gamma}} d\nu.$$

Remplaçons maintenant  $\gamma$  par  $\frac{t^2 \cos \mu}{4r}$  avec  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  dans  $h_1$  et  $h_2$ , on trouve

$$h_1 = \frac{1}{4\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \left( \frac{t^2 \cos^3 \mu}{r} \right)^{\frac{1}{2}} t^2 \left( \cos \frac{t^2 \cos \mu}{4r} + \sin \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right) \frac{F(\xi, \eta)}{r^2},$$

et

$$h_2 = \frac{1}{2\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty t^2 \cos \mu \cos \nu e^{-\left[ \frac{t^2 \nu \cos \mu}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right]^{\frac{1}{2}}} d\mu d\xi d\eta d\nu.$$

Si dans l'expression de la dénivellation à la surface [formule (148), page 231, Note XVI, vol. I, Mémoires de Cauchy], on fait  $g = 1$ , on voit que cette expression se réduit à  $(h_1 - h_2)$ , c'est à dire celle donnée par M. Boussinesq.

*Oscillations dans le voisinage du lieu d'émerision.* — On a vu primitivement que le potentiel des vitesses donné par Poisson (p. 144 de son *Mémoire de la Théorie des ondes*) où l'on faisait  $g = 1$ ,

$$\varphi = -\frac{t}{\pi^2} \iint \left( \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{t^2}{3!} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{t^3}{5!} \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} + \dots \right) F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\left( \text{avec } Z = \frac{\pi}{2\sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right),$$

était identique à celui donné par M. Boussinesq.

Or on remarque que la série entre parenthèses sera d'autant plus convergente que le rapport  $\frac{t^2}{\sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$  sera plus petit. Mais, comme le fait observer Poisson, « quelque petit que soit le temps  $t$ , si l'on considère un point de la surface fluide, pris dans l'étendue de l'ébranlement primitif, cette série sera toujours en défaut, ... » (*voir* *Mémoire précité*, p. 145); il y a donc lieu de chercher ce qui se passe en réalité aux points de la surface dont les coordonnées  $(x, y)$  sont respectivement comparables à  $(\xi, \eta)$ . Nous avons été guidé en cela par la méthode préconisée par M. Boussinesq dans le cas de deux dimensions (cylindre immergé dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe du canal).

On sait que la dénivellation  $h$  est définie par

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty t^2 \cos \mu,$$

$$\times F\left(x + \frac{t^2 \cos \mu}{2\alpha^2} \cos \theta, y + \frac{t^2 \cos \mu}{2\alpha^2} \sin \theta\right) \psi' \left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$$

[*voir* formule (238), page 644, *Traité des potentiels* de M. BOUSSINESQ]; si dans cette expression on fait le changement de variable,

$$r = \frac{t^2 \cos \mu}{2\alpha^2}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{t\sqrt{\cos \mu}}{\sqrt{2r}} \quad \text{et} \quad d\alpha = -\frac{t\sqrt{\cos \mu} dr}{2r\sqrt{2r}},$$

on trouve la formule (33) :

$$(33) \quad h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \times \psi' \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right) F(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) dr.$$

En égard aux hypothèses faites, on peut remplacer le corps par son parabolôide osculateur; dans ces conditions, on est conduit à substituer à la fonction F

$$H \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right],$$

et à la section à fleur d'eau l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La fonction F, figurant dans l'expression (33) de  $h$ , n'a de valeur que si

$$(34) \quad \begin{cases} -a < x + r \cos \theta < a, \\ -b < y + r \sin \theta < b. \end{cases}$$

Si l'on remarque que l'on peut diviser l'intervalle d'intégration  $(0, 2\pi)$  pour  $\theta$  en quatre intervalles  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ , et si, dans l'intervalle  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , on fait le changement  $\theta = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ , on trouve que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} F \psi' dr \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \int_0^{\infty} \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' F(x - r \sin \theta_1, y + r \cos \theta_1) dr;$$

par un procédé analogue, on arrive définitivement à considérer que l'intervalle  $(0, \frac{\pi}{2})$  pour  $\theta$ , et l'on trouve que l'expression de  $h$  peut se

mettre sous la forme

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^2 \psi' \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} F(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) + F(x - r \sin \theta, y + r \cos \theta) \\ + F(x - r \cos \theta, y - r \sin \theta) + F(x + r \sin \theta, y - r \cos \theta) \end{array} \right\} dr.$$

L'ensemble des quatre fonctions  $F$  entre accolades peut être représenté symboliquement par

$$F(x \pm r \cos \theta, y \pm r \sin \theta) + F(x \mp r \sin \theta_1, y \pm r \cos \theta_1),$$

où, dans chaque fonction  $F$ , on associe tout d'abord les signes supérieurs, puis les signes inférieurs. Or si dans la seconde fonction  $F$ , on fait  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$ , on constate que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x \mp r \sin \theta_1, y \pm r \cos \theta_1) d\theta_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x \mp r \cos \theta, y \pm r \sin \theta) d\theta.$$

Dans ces conditions, il apparaît qu'à  $y \pm r \sin \theta$ , il y a lieu d'associer tout d'abord  $x \pm r \cos \theta$ , puis  $x \mp r \cos \theta$ .

Ceci revient en définitive à écrire  $h$  de la manière suivante :

$$(35) \quad h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ \times \int_0^{\infty} [F(x \pm r \cos \theta, y + r \sin \theta) \\ + F(x \pm r \cos \theta, y - r \sin \theta)] \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' dr$$

Or si l'on observe que le point  $M(x, y, z)$  peut occuper les positions correspondant à

$$(x > a, y > b), \quad (x > a, y < b), \quad (x < a, y > b) \quad \text{et} \quad (x < a, y < b),$$

tout en étant dans le voisinage de la section à fleur d'eau du solide immergé, on est conduit à déterminer la valeur de  $h$  dans les quatre cas envisagés.



*Premier cas* :  $x > a, y > b$ . — Pour que la fonction  $F$  ait une valeur sensible, il faut que les conditions (34) soient réalisées. Comme  $x + r \cos \theta < a$  n'est pas réalisable, puisque  $r > 0$ , que  $\theta$  varie entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  et que l'on a supposé  $x > a$ , on ne peut pas associer  $x + r \cos \theta$  à  $y + r \sin \theta$ ; pour la même raison, la combinaison afférente à  $y + r \sin \theta$  est à rejeter.

Il en résulte qu'une seule des quatre combinaisons, convenant à la formation  $F$ , subsiste

$$\begin{aligned} - a < x - r \cos \theta < a, \\ - b < y - r \sin \theta < b, \end{aligned}$$

et l'examen de ce groupe d'inégalités montre que  $r$  doit être compris entre  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  et  $\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}$ .

*Deuxième cas* :  $x > a, y < b$ . — Comme dans le cas précédent, on doit rejeter les fonctions  $F$ , où interviennent  $(x + r \cos \theta)$ , et ne conserver que

$$F(x - r \cos \theta, y + r \sin \theta) \quad \text{et} \quad F(x - r \cos \theta, y - r \sin \theta).$$

Pour l'utilisation de  $F(x - r \cos \theta, y + r \sin \theta)$ , il faut que l'on ait

$$- a < x - r \cos \theta < a, \quad - b < y + r \sin \theta < b,$$

ce qui exige que l'on prenne comme champ d'intégration pour  $r$   $(0, \sqrt{(x+a)^2 + (b-y)^2})$ .

On verrait, en employant le même processus de calcul, que le champ d'intégration correspondant à l'emploi de la deuxième fonction  $F(x - r \cos \theta, y - r \sin \theta)$  est défini par la limite inférieure  $\sqrt{(x-a)^2 + (b-y)^2}$  et la limite supérieure  $\sqrt{(x+a)^2 + (b+y)^2}$ .

*Troisième cas* :  $x < a, y > b$ . — Ce cas se traite comme le précédent, et conduit aux deux associations  $F(x \pm r \cos \theta, y - r \sin \theta)$ .

*Quatrième cas* :  $x < a, y < b$ . — Il y a lieu ici d'associer à  $(x \pm r \cos \theta$

l'expression  $(y + r \sin \theta)$ , puis  $y - r \sin \theta$ , et à rechercher les limites des quatre intégrales relatives à la variable  $r$ , en suivant une méthode analogue à celle qui a été préconisée ci-dessus.

Le tableau suivant donne les expressions de  $h$  dans les quatre hypothèses envisagées :

$x > a, y > b$  :

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\times \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} F(x - r \cos \theta, y - r \sin \theta) \psi' \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right) dr,$$

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2};$$

$x > a, y < b$  :

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\times \left\{ \int_0^{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}} F(x - r \cos \theta, y + r \sin \theta) \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' dr \right.$$

$$\left. + \int_{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}^{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}} F(x - r \cos \theta, y - r \sin \theta) \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' dr \right\};$$

$x < a, y > b$  :

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\times \left\{ \int_0^{\sqrt{(a-x)^2 + (y+b)^2}} F(x + r \cos \theta, y - r \sin \theta) \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' dr \right.$$

$$\left. + \int_{\sqrt{(a-x)^2 + (y-b)^2}}^{\sqrt{(a+x)^2 + (y+b)^2}} F(x - r \cos \theta, y - r \sin \theta) \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' dr \right\};$$

$x < a, y < b$  :

$$h = \frac{4}{\pi^2 t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\{ \int_0^{r'_1} + \int_0^{r'_2} + \int_0^{r'_3} + \int_0^{r'_4} \right\}.$$

## L'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{r'_1} & \text{ correspond à } F(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta), & \text{ avec } r'_1 &= \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}; \\
\int_0^{r'_2} & \text{ » } F(x-r\cos\theta, y+r\sin\theta), & \text{ » } r'_2 &= \sqrt{(x+a)^2+(b-y)^2}; \\
\int_0^{r'_3} & \text{ » } F(x+r\cos\theta, y-r\sin\theta), & \text{ » } r'_3 &= \sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2}; \\
\int_0^{r'_4} & \text{ » } F(x-r\cos\theta, y-r\sin\theta), & \text{ » } r'_4 &= \sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}.
\end{aligned}$$

Si l'on s'en tient à une première approximation, et si l'on prend pour valeur approchée de  $F$  que l'on représente par

$$(F) = \frac{\text{volume du corps immergé}}{\pi ab},$$

on voit que, dans le premier cas, l'expression de  $h$  s'écrit

$$(x > a, y > b) \quad h = \frac{4}{\pi^2 t} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r_1}^{r_3} \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right) dr,$$

ou

$$(36) \quad h = \frac{2}{\pi t} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_{r_1}^{r_3} \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4r} \right)^{\frac{3}{2}} \psi' dr.$$

Si l'on revient à la variable  $\alpha$  définie par

$$\frac{t^2 \cos \mu}{2r} = \alpha^2 \quad \left( \text{avec } \alpha_1^2 = \frac{t^2 \cos \mu}{2r_1} \quad \text{et} \quad \alpha_2^2 = \frac{t^2 \cos \mu}{2r_2} \right),$$

on voit que  $h$  s'écrit

$$(36') \quad h = \frac{1}{\pi t \sqrt{2}} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \cdot t^2 \cos \mu \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \psi' \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha.$$

Considérons maintenant la fonction

$$\varpi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \psi' \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha,$$

et cherchons-en une valeur approchée, dans le cas actuel, où  $\alpha$  est un nombre positif assez considérable. Une intégration par parties, après substitution de  $\frac{1}{\alpha} d\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$  à  $\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$ , donne

$$\varpi(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) + \int_{\alpha}^{\infty} \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \frac{d\alpha}{\alpha^2}.$$

Le dernier terme de cette relation est négligeable à côté du précédent, quand  $\alpha$  atteint une certaine grandeur, en raison de ce que cette intégrale, à cause des changements de signe de  $\psi$  pour de faibles accroissements de  $\alpha$ , est infiniment moindre que  $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$ , il en résulte que l'on peut substituer  $-\frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$  à  $\varpi(\alpha)$ .

Comme

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha_1} \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha &= \int_0^{\alpha_1} - \int_0^{\alpha} = \left(\int_0^{\alpha} - \int_{\alpha_1}^{\alpha}\right) - \left(\int_0^{\infty} - \int_{\alpha}^{\infty}\right) = \int_{\alpha_2}^{\alpha} - \int_{\alpha_1}^{\alpha}, \\ \int_{\alpha}^{\alpha_1} \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha &= \frac{1}{\alpha_1} \psi\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right) - \frac{1}{\alpha_2} \psi\left(\frac{\alpha_2^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Utilisant l'expression approchée de  $\varpi(\alpha)$  donnée par M. Boussinesq [ formule (177), page 594, *Application des potentiels* ],

$$\varpi(\alpha) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \sin\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

on trouve que l'expression de  $h$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} h &= \frac{(F)}{\sqrt{2\pi t}} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos \mu \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha_1} \sin\left(\frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha_2} \sin\left(\frac{\alpha_2^2}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] d\mu, \\ (36'') \quad h &= \frac{(F)}{2\sqrt{\pi t}} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sqrt{\cos \mu} \left[ \sqrt{r_1} \sin\left(\frac{t^2 \cos \mu}{4r_1} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{r_2} \sin\left(\frac{t^2 \cos \mu}{4r_2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] d\mu. \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse envisagée ( $x > a, y > b$ ),  $r_2$  est plus grand que  $r_1$ , et la dénivellation peut être considérée comme la résultante des

dénivellations dues à deux trains partiels d'onde, eu égard à la formule constitutive de  $h$ .

Si l'on désigne par  $A(\mu, t)$  l'expression multiplicatrice de  $t\sqrt{\cos \mu}$  sous le signe  $\int$ , on remarque que

$$h = \frac{(F)}{2\sqrt{\pi}t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sqrt{\cos \mu} A(\mu, t) + t\sqrt{\cos \mu} \frac{dA}{dt} \right] d\mu.$$

Or la différentiation n'est possible que si la fonction  $A(\mu, t)$  est continue ainsi que sa dérivée, pour toute valeur du paramètre  $t$ , et cela quel que soit  $\mu$  entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et si dans les mêmes conditions la valeur de  $A''(\mu, t)$  est déterminée.

En raison de l'apparition des fonctions sinus et cosinus, multipliées ou non par le facteur  $t$ , on remarque que tant que  $t$  n'est pas infini les conditions exigées se trouvent réalisées, et par suite la différentiation peut être légitimement effectuée.

D'ailleurs  $h$  est certainement plus petit que

$$\frac{(F)}{2\sqrt{\pi}t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sqrt{\cos \mu} (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}) d\mu,$$

ou

$$h = \frac{(F)\sqrt{\pi}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})}{4t} \sqrt{\cos \mu_0},$$

$\mu_0$  étant une valeur de  $\mu$  comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

En revenant à l'expression de  $h$ , on voit que le maximum et le minimum de  $h$  répondent à

$$-\frac{1}{t^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \mu} \left( A + t \frac{dA}{dt} \right) d\mu + \frac{1}{t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \mu} (2A' + tA'') d\mu = 0,$$

ou encore à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \mu} [t^2 A'' + tA' - A] d\mu = G(t) = 0.$$

Les racines de  $G(t) = 0$  seront les valeurs de  $t$  correspondant aux dénivellations maximum et minimum.

Si, dans l'expression de  $h$ , on pose  $t\sqrt{\cos\mu} = \lambda$ , on voit que la dénivellation peut s'écrire

$$h = \frac{(F)}{2\sqrt{\pi t}} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \sqrt{r_1} \sin \frac{\lambda^2}{4r_1} - \sqrt{r_2} \sin \frac{\lambda^2}{4r_2} \right] - \left[ \sqrt{r_1} \cos \frac{\lambda^2}{4r_1} - \sqrt{r_2} \cos \frac{\lambda^2}{4r_2} \right] \right\} d\mu,$$

et l'intégrale peut être calculée d'une manière approchée en recourant à la formule de Cotes, afférente à la division de l'intervalle  $(0, \frac{\pi}{2})$  en trois intervalles égaux (aire =  $\frac{b-a}{8} [y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4]$ ) :

$$\begin{aligned} \mu = 0, & \quad \lambda_1 = t; \\ \mu = \frac{\pi}{6}, & \quad \lambda_2 = t\sqrt{\cos \frac{\pi}{6}}; \\ \mu = \frac{2\pi}{6}, & \quad \lambda_3 = t\sqrt{\cos \frac{\pi}{3}}; \\ \mu = \frac{3\pi}{6}, & \quad \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

En développant les sin et cos en série et en posant :

$$\begin{aligned} \sqrt{r_2} - \sqrt{r_1} = a, \quad \frac{\sqrt{r_1}}{4r_1} - \frac{\sqrt{r_2}}{4r_2} = b, \quad \frac{\sqrt{r_1}}{4r_1^2} - \frac{\sqrt{r_2}}{4r_2^2} = c, \\ \frac{\sqrt{r_1}}{4r_1^3} - \frac{\sqrt{r_2}}{4r_2^3} = d, \quad \frac{\sqrt{r_1}}{4r_1^4} - \frac{\sqrt{r_2}}{4r_2^4} = e, \quad \dots, \end{aligned}$$

on remarque que

$$y = \frac{\pi}{16} \frac{t}{\sqrt{2}} \left[ a + b\lambda^2 + c \frac{(\lambda^2)^2}{2!} + d \frac{(\lambda^2)^3}{3!} + e \frac{(\lambda^2)^4}{4!} + \dots \right];$$

le calcul conduit immédiatement à l'expression de  $h$  :

$$h = \frac{F}{2\sqrt{\pi t}} \times \frac{\pi}{16} \frac{d}{dt} (4,19at + 3,15t^3 + 1,28t^5 - 0,36t^7 - 0,08t^9 + \dots).$$

Les maxima et minima de  $h$  sont les racines de la série

$$4,19a - 9,45bt^2 - 19,20ct^4 + 12,60dt^6 + 5,04et^8 - \dots = 0.$$

On emploiera la méthode déjà exposée plus haut pour l'étude des zéros de cette série et l'on constatera qu'il y a deux valeurs de  $t_1$  et  $t_2$  répondant à la question.

Si la particule fluide considérée est relativement approchée de la particule  $m(a, b, o)$ ,  $r_1$  serait négligeable par rapport à  $r_2$  dont la valeur principale serait assimilable à  $2\sqrt{a^2 + b^2}$  et la dénivellation  $h$  afférente à ladite particule serait en première approximation équivalente à

$$(37) \quad h = -\frac{(F)}{t\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sqrt{\cos \mu} \sin\left(\frac{t^2 \cos \mu}{8\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{\pi}{4}\right) d\mu.$$

Revenons pour un instant à la formule (36') et remarquons qu'elle peut s'écrire

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos \mu |\varpi(\alpha_2) - \varpi(\alpha_1)| d\mu,$$

avec

$$\varpi(\alpha_2) = \varpi\left(\frac{t\sqrt{\cos \mu}}{\sqrt{2r_2}}\right), \quad \varpi(\alpha_1) = \varpi\left(\frac{t\sqrt{\cos \mu}}{\sqrt{2r_1}}\right);$$

on a vu plus haut, en utilisant la formule (36'), que la différentiation sous le signe  $\int$  est possible, et donne un procédé de calcul permettant de déterminer les maxima et minima de  $h$ . On peut enfin dire que les ondes peuvent, dans la région envisagée, être considérées comme la résultante de deux systèmes d'ondes correspondant respectivement à  $\varpi(\alpha_2)$  et  $-\varpi(\alpha_1)$ , dont l'action est d'autant plus faible que  $\frac{2(r_{1,2})}{t^2 \cos \mu}$  est petit.

Envisageons maintenant le cas relatif à une particule fluide placée

en un point  $x < a$ ,  $y < b$ , qui nous donne pour valeur de la dénivellation en ce point

$$h = \frac{2}{\pi t} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \left( \int_0^{r'_1} + \int_0^{r'_2} + \int_0^{r'_3} + \int_0^{r'_4} \right),$$

ou encore

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\pi t} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos \mu d\mu \left( \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} + \int_{\alpha_5}^{\alpha_6} + \int_{\alpha_7}^{\alpha_8} \right),$$

expression dans laquelle  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}$  représente  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi' \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha$ .

Si l'on suppose que le point  $x, y$  est extrêmement près du centre de la section à fleur d'eau, les longueurs  $r'_1, r'_2, r'_3, r'_4$  ont pour valeur principale  $\mathfrak{R} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , et tous les  $\alpha_{(1, 2, 3, 4)}$  peuvent être assimilés à  $\alpha' = \frac{t \sqrt{\cos \mu}}{\sqrt{2\mathfrak{R}}}$ .

Dans ces conditions,

$$h = \frac{4}{\pi t \sqrt{2}} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos \mu d\mu \int_{\alpha'}^{\alpha''} \psi' \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha$$

ou

$$h = \frac{4(F)}{\pi t \sqrt{2}} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos \mu \left[ -\frac{1}{\alpha'} \psi' \left( \frac{\alpha'^2}{2} \right) + \int_{\alpha'}^{\alpha''} \psi' \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha \right] d\mu.$$

En admettant maintenant que la section à fleur d'eau soit une ellipse de dimensions très petites, on pourrait, à partir du moment où le temps est appréciable, réduire la dénivellation à sa partie principale :

$$h = \frac{4(F)}{\pi t \sqrt{2}} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos \mu \left[ -\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha'} \sin \left( \frac{\alpha'^2}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] d\mu$$

ou

$$\begin{aligned} h &= -\frac{\sqrt{2}(F)}{\pi t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2 \cos \mu}{2\alpha'} \sin \left( \frac{\alpha'^2}{2} - \frac{\pi}{4} \right) d\mu \\ &= -\frac{\sqrt{2}\mathfrak{R}}{\pi} (F) \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sqrt{\cos \mu} \sin \left( \frac{t^2 \cos \mu}{4\mathfrak{R}} - \frac{\pi}{4} \right) d\mu, \end{aligned}$$



qui se présente sous une *forme analogue* à celle définie par (37) (voir page précédente).

*Remarque.* — Suivant que la particule fluide M occupe dans l'angle YOX des axes de la section à fleur d'eau les positions

$$x > a, y > b; \quad x > a, y < b, \quad \text{ou} \quad x < a, y > b; \quad x < a, y < b;$$

elle peut être — suivant les cas — considérée comme soumise à un, deux ou quatre trains absolus d'onde.

Si la particule fluide est dans l'une des positions ( $x > a, y < b$ ), ( $x < a, y > b$ ), les deux trains sont distincts.

Si la particule fluide est à l'intérieur de la section, les quatre trains sont distincts toutes les fois qu'elle n'est pas sur l'un des axes; si elle est sur l'un des axes, les quatre trains se réduisent à deux trains doubles distincts et enfin, si elle est au centre, les quatre trains d'onde sont identiques.

Si la section à fleur d'eau est circulaire, toutes les fois que la particule est à l'intérieur de la section, les quatre trains se réduisent à deux trains doubles distincts.

Cette remarque particulière incite donc à penser que les calculs doivent se simplifier d'une manière considérable toutes les fois que le corps immergé sera de révolution; elle a été justifiée au cours de cette étude.

*Observation.* — Les remarques faites ci-dessus au sujet de la particule M s'appliquent aux particules  $M_1, M_2, M_3$ , symétriques de M par rapport à OX, OY et au centre de la section.

DU POTENTIEL DES VITESSES DANS LE CAS OÙ LE CORPS IMMERGÉ EST UN PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE. — Nous avons vu que le potentiel des vitesses a pour valeur

$$\varphi = -\frac{t}{\pi^2} \iint \left( \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{t^2}{3!} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \dots \right) F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

avec

$$F = H \left( 1 - \frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\eta^2}{l'^2} \right), \quad \rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad Z = \frac{\pi}{2\sqrt{x^2 + \rho^2}}.$$

Il nous faut donc calculer

$$\int \int Z F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{\pi}{2} \int \int \frac{F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{x^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = \frac{\pi}{2} Z_1.$$

Faisons les changements de variables

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \xi = ls \cos \psi, \quad \eta = l's \sin \psi;$$

l'intégrale double  $Z_1$  se présente alors sous la forme

$$Z_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-s^2) l' s ds d\psi}{\sqrt{R^2 - 2rs(l \cos \theta \cos \psi + l' \sin \theta \sin \psi) + s^2(l^2 \cos^2 \psi + l'^2 \sin^2 \psi)}} \\ (\text{où } R^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

Si l'on divise le champ  $\psi(0, 2\pi)$  en quatre intervalles  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  et que l'on désigne par  ${}_i Z_1$ , l'intégrale correspondant au quadrant  $i$ , on voit que

$$Z = \sum_{i=1}^4 ({}_i Z_1).$$

Si l'on change

$$\begin{array}{llll} l \text{ en } -l', & l' \text{ en } -l, & \theta \text{ en } \theta + \frac{\pi}{2} & \text{dans } {}_1 Z_1, & \text{on forme } {}_2 Z_1, \\ l \text{ en } -l, & l' \text{ en } -l', & \dots\dots\dots & \text{»} & {}_3 Z_1, \\ l \text{ en } -l', & l' \text{ en } -l, & \theta \text{ en } \frac{\pi}{2} - \theta & \text{»} & {}_4 Z_1; \end{array}$$

il en résulte qu'il suffit de calculer  ${}_1 Z_1$ , pour pouvoir obtenir la valeur de l'intégrale demandée.

En faisant la substitution classique

$$\sin \psi = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \cos \psi = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

à laquelle correspond  $d\psi = \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2}$ , on remarque que  $Z_1$  s'écrit

$$2ll' \int_0^1 (1-s^2) s ds \int \frac{d\lambda}{\sqrt{M\lambda^4 + N\lambda^3 + P\lambda^2 + N\lambda + T}} = 2ll' \int_0^1 A(1-s^2) s ds$$

avec

$$M = R^2 + 2ars + s^2l^2,$$

$$N = -4rsb,$$

$$P = 2|R^2 - s^2(l^2 - 2l'^2)|,$$

$$T = R^2 - 2a1s + s^2l^2, \quad a = l\cos\theta, \quad b = l'\sin\theta.$$

On a donc ramené A à la forme classique des intégrales elliptiques, mais il ne semble point que cette transformation, comme nous l'a montré l'étude de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-s^2) s ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 + s^2l^2 - 2r l s \cos\psi}},$$

qui correspond à  $\theta = 0$  et  $l' = l$ , puisse facilement faire apparaître les éléments principaux du développement.

*Cas du paraboloidé de révolution.* — Si l'on suppose que le corps soit de révolution, l'intégrale  $Z_1$  devient

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-s^2) s ds d\psi l^2}{\sqrt{R^2 - 2rsl\cos(\theta - \psi) - s^2l^2}},$$

ou encore, après une rotation  $\theta$  des axes  $Ox, Oy$ ,

$$Z_1 = l^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-s^2) s ds d\psi}{\sqrt{R^2 - 2rsl\cos\psi + s^2l^2}}.$$

Posons  $\frac{sl}{R} = m$ ,  $\frac{r}{R} \cos\psi = \cos\lambda$ , et remarquons d'abord que

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} = \int_0^1 \left[ \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} \right],$$

et aussi que la deuxième intégrale double

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{+\pi} = \int_0^1 (1-s^2)s ds \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 + 2rs l \cos \psi + s^2 l^2}};$$

dans ces conditions, l'expression  $Z_1$  devient

$$Z_1 = l^2 \int_0^1 (1-s^2)s ds \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{\dots}} + l^2 \int_0^{-1} (1-s^2)s ds \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{\dots}}.$$

Or l'expression  $\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rs l \cos \psi + s^2 l^2}}$  peut être développée en série de polynomes de Legendre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rs l \cos \psi + s^2 l^2}} &= \frac{1}{R \sqrt{1 - 2m \cos \lambda + m^2}} \\ &= \frac{1}{R} [1 + m P_1(\cos \lambda) + \dots + m^q P_q(\cos \lambda) + \dots], \end{aligned}$$

puisque le point  $x, y, z$ , pour lequel on veut déterminer la dénivellation, est tel que  $\sqrt{x^2 + y^2} = r > l$  et que  $s$  varie entre 0 et 1.

Comme

$$\begin{aligned} m^{2p} P_{2p} &= m^{2p} \left( A \frac{r^{2p}}{R^{2p}} \cos^{2p} \psi + B \frac{r^{2p-2}}{R^{2p-2}} \cos^{2p-2} \psi + \dots + K \right), \\ m^{2p+1} P_{2p+1} &= m^{2p+1} \left( A' \frac{r^{2p+1}}{R^{2p+1}} \cos^{2p} \psi + B' \frac{r^{2p-1}}{R^{2p-1}} \cos^{2p-2} \psi + \dots + K' \right) \cos \psi, \end{aligned}$$

on constate de suite que l'on est conduit à faire les intégrations des deux types suivants :

$$\int_0^\pi \cos^{2q} \psi d\psi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2q} \psi d\psi,$$

qui se calcule par la formule de Wallis, et que

$$\int_0^\pi \cos^{2q} \psi \cdot \cos \psi d\psi = 0.$$

Si donc le corps immergé est de révolution et si dans la région d'émerision il est assimilé à un paraboloïde de révolution, on constate

que les deux termes constitutifs de  $Z_1$  peuvent être calculés en faisant appel aux polynômes de Legendre comme nous venons de le voir.

INTRODUCTION D'ÉLÉMENTS SECONDAIRES, DANS LE POTENTIEL. — *Apparition de polynômes dérivés des polynômes de Legendre.* — Nous serons conduit dans la troisième Partie de cette étude à considérer les ondes produites dans un canal par l'émergence d'un cylindre dont les génératrices ne sont pas perpendiculaires à l'axe de ce canal ou par l'émergence d'un corps quelconque, et par suite à faire intervenir non seulement le corps, mais ses images par rapport aux parois; dans ces conditions, la largeur du canal joue un rôle capital, et par suite la coordonnée  $y$  peut varier en valeur absolue entre 0 et la demi-largeur du canal. On ne peut donc pas, si le corps n'est pas infiniment petit, négliger  $\eta$  par rapport à  $y$ .

En définitive, il semble donc utile, puisque l'étude des ondes d'émergence dans un canal se trouve ramenée à celle des ondes dans un milieu indéfini, d'examiner pour un tel milieu l'influence perturbatrice motivée par l'intervention d'une coordonnée  $\eta$  de la zone d'émergence non négligeable par rapport à la coordonnée  $y$  du point, pour lequel on veut, à un instant donné, évaluer la grandeur de la dénivellation.

En supposant  $\xi$  négligeable devant  $x$ , et  $\eta$  non négligeable devant  $y$ , on est conduit à calculer l'intégrale

$$\iint \frac{F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{z^2 + x^2 + (y - \eta)^2}} = \iint \frac{F d\xi d\eta}{\sqrt{R^2 - 2y\eta + \eta^2}}.$$

En substituant au dénominateur le développement en série

$$\frac{1}{R} \left[ 1 - \eta \frac{(2y - \eta)}{R^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} \left[ 1 + \frac{\eta}{2} \frac{(2y - \eta)}{R^2} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} \eta^2 \left( \frac{2y - \eta}{R^2} \right)^2 - \dots \right],$$

et en assimilant la portion du corps immergé à son paraboloïde osculateur, de telle façon que

$$F(\xi, \eta) = H \left( 1 - \frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\eta^2}{l'^2} \right),$$

on trouve que l'intégrale ci-dessus, après le changement de variables

$$\xi = ls \cos \psi, \quad \eta = l' s \sin \psi,$$

devient

$$Z_1 = H l l' \int_0^1 \frac{(1-s^2)s ds}{R} \int_0^{2\pi} d\psi \left[ 1 + \frac{\eta}{2} \left( \frac{2\gamma - \eta}{R^2} \right) + \dots \right].$$

Si l'on fait abstraction des termes du développement en série apparaissant dans la parenthèse, où figurent  $\frac{1}{R^4}$ ,  $\frac{1}{R^6}$ , ..., on constate que l'on n'a à évaluer que les intégrales simples suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-s^2)s ds}{R} 2\pi &= \frac{\pi}{2R}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} \eta \gamma d\psi &= \frac{\gamma s l'}{R^2} (\cos \psi)_0^{2\pi} = 0, \\ -\frac{1}{2R^2} \int_0^{2\pi} \eta^2 d\psi &= -\frac{l'^2 s^2}{2R^2} \pi \end{aligned}$$

et enfin

$$-\int_0^1 (1-s^2)s^3 \frac{l'^2 \pi}{2R^2} ds = -\frac{l'^2 \pi}{6R^2}.$$

Il en résulte pour  $Z_1$ ,

$$(38) \quad Z_1 = H l l' \left[ \frac{\pi}{2R} - \frac{l'^2 \pi}{6R^3} \right],$$

ou en désignant  $H l l'$  par  $V$  (expression d'un volume),

$$Z_1 = V \left( \frac{\pi}{2R} - \frac{l'^2 \pi}{6R^3} \right).$$

Rappelons à ce propos que dans le cas où l'on ne considère qu'un petit élément de volume, le corps étant immergé dans un milieu indéfini, l'expression de  $Z_1$  était égale à  $\alpha q \frac{\pi}{2R}$ , et que le potentiel faisait apparaître les dérivées successives par rapport à  $z$  de  $\frac{1}{R}$ , alors qu'ici il y a lieu de tenir compte non seulement de ces dérivées, mais encore de toutes les dérivées de  $\frac{1}{R^3}$  par rapport à  $z$ . En définitive, l'intervention des dérivées  $\frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{R^3} \right)$  met en évidence l'influence du premier terme complémentaire.

D'ailleurs, si l'on voulait étudier l'influence du terme complémentaire résultant de  $\tau_1^p \frac{(\gamma - \tau_1)^p}{R^{2p}}$ , on devrait calculer les intégrales

$$\int_0^1 (1-s^2)s \, ds \int_0^{2\pi} \tau_1^{p+q} \gamma^{p-q} \, d\psi,$$

ou encore, en faisant abstraction des constantes,

$$\int_0^1 (1-s^2)s^{p+q+1} \, ds \int_0^{2\pi} \sin^{p+q} \psi \, d\psi,$$

où  $q$  peut prendre l'une quelconque des valeurs  $(0, 1, \dots, p)$ .

Or, si  $p+q = 2\lambda+1$ ,

$$\int_0^{2\pi} \sin^{p+q} \psi \, d\psi = 0,$$

et si  $p+q = 2\lambda$ ,

$$\int_0^{2\pi} \sin^{p+q} \psi \, d\psi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\lambda} \psi \, d\psi$$

(intégrale qui se ramène à l'intégrale classique de Wallis).

Cette remarque montre que  $Z_1$  peut s'écrire :

$$Z_1 = V \left( \frac{\pi}{2R} - \frac{A}{R^3} - \frac{B}{R^5} - \dots - \frac{N}{R^{2n+1}} - \dots \right).$$

Nous allons maintenant mettre en évidence l'influence du terme en  $\frac{1}{R^3}$  dans le potentiel des vitesses  $\varphi$ ; la méthode exposée ci-dessous pourra être appliquée sans variante dans le calcul afférent à l'introduction du terme en  $\frac{1}{R^{2n+1}}$ .

Le potentiel des vitesses a pour valeur

$$\varphi = -\frac{V}{\pi^2} \left[ t \frac{\partial Z_2}{\partial z} + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{n+1} Z_2}{\partial z^{n+1}} + \dots \right]$$

avec

$$V = Hl \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{\pi}{2R} - \frac{l^2 \pi}{6R^3};$$

les dérivées  $\frac{d^n \left( \frac{1}{R^3} \right)}{dz^n}$ , faisant apparaître les polynomes de Legendre, et conduisant à ce que l'on peut appeler la partie principale de  $\varphi$ , il nous faut considérer les développements correspondant à  $\frac{d^n \left( \frac{1}{R^3} \right)}{dz^n}$ .

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{R^3} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dR^2} \left[ \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dR^2} \left[ (-1)^n \frac{n! P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}} \right], \\ \frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{R^{n+1}} P_n \right] &= - \frac{(n+1)}{R^{n+2}} P_n + \frac{1}{R^{n+1}} P'_n \frac{d}{dR} \left( \frac{z}{R} \right) = - \frac{(n+3)P_n}{R^{n+4}} - \frac{zP'_n}{R^{n+3}}, \\ \frac{d^2}{dR^2} \left[ \frac{1}{R^{n+1}} P_n \right] &= \frac{(n+1)(n+2)P_n}{R^{n+3}} + \frac{(n+1)P'_n z}{R^{n+4}} + \frac{(n+3)zP'_n}{R^{n+4}} + \frac{z^2}{R^{n+3}} P''_n \\ &= \frac{(n+1)(n+2)P_n(\cos \theta) + 2(n+2)\cos \theta P'_n(\cos \theta) + \cos^2 \theta P''_n(\cos \theta)}{R^{n+3}}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation

$$(39) \quad Q_n = (n+1)(n+2)P_n + 2(n+2)\cos \theta P'_n + \cos^2 \theta P''_n;$$

le terme de degré  $n$  dans  $Q_n$  existe certainement, car il a pour coefficient

$$\Lambda[(n+1)(n+2) + 2n(n+2) + n(n-1)] = 2\Lambda(2n^2 + 3n + 1) = 2\Lambda(2n+1)(n+1).$$

L'équation  $Q_n = 0$  est de degré  $n$  en  $\cos \theta$ , et ne renferme que des termes ayant la parité de  $n$ ; elle a, comme  $P_n = 0$ , toutes ses racines réelles distinctes, comprises entre  $-1$  et  $+1$ .

On sait, en effet, que si une équation  $f(x) = 0$  de degré  $n$  a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation  $\alpha f(x) + x f'(x) = 0$ , où  $\alpha$  est une constante positive, a toutes ses racines réelles et inégales [voir LAGUERRE, *Sur quelques points de la théorie des équations numériques* (*Acta mathematica*, t. IV, p. 115)].

Il suffit en effet d'écrire cette dernière équation de la manière suivante :

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{f'}{f} = 0,$$

et d'y substituer les racines de  $f = 0$ .



Désignons par  $S = 0$  l'équation  $\alpha f + x f' = 0$ , et formons

$$\beta S + x S' = 0$$

ou

$$(40) \quad \alpha \beta f(x) + x f'(x)(\alpha + \beta + 1) + x^2 f''(x) = 0;$$

cette équation est comme la précédente de degré  $n$ , et, en vertu de ce qui a été exposé plus haut, a toutes ses racines réelles et inégales.

Si  $f(x) = 0$  a toutes ses racines comprises entre  $-1$  et  $+1$ , il en sera de même de  $\beta S + x S' \equiv 0$ ; dans ces conditions, si l'on remplace dans (39)  $P_n$  par  $f(x)$ , on voit que  $Q_n$  s'écrit

$$\begin{aligned} Q_n &= (n+1)(n+2)f(x) + 2(n+2)xf'(x) + x^2f''(x) = 0, \\ \beta S + x S' &= \alpha\beta f(x) + (\alpha + \beta + 1)xf'(x) + x^2f''(x) = 0. \end{aligned}$$

L'identification entre  $Q_n$  et  $(\beta S + x S')$  sera possible, si l'on peut déterminer des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  positives, répondant à

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (n+1)(n+2), \\ \alpha + \beta + 1 &= 2(n+2); \end{aligned}$$

or on trouve que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines d'une équation du second degré ( $\alpha = n+1$ ,  $\beta = n+2$ ).

Le terme en  $\frac{1}{R^3}$  de  $Z_1$ , introduit dans le potentiel des polynomes, qui dérivent d'une manière simple des polynomes de Legendre, et ont, comme ceux-ci, toutes leurs racines réelles et inégales, comprises entre  $-1$  et  $+1$ .

Si l'on voulait étudier l'influence du terme  $\frac{1}{R^{2p+1}}$ , on serait amené à calculer  $\frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{R^{2p+1}} \right)$ . Tenant compte de ce que

$$\frac{d^{2p}}{dR^{2p}} \left( \frac{1}{R} \right) = (-1)^{2p} \frac{2p!}{R^{2p+1}},$$

on voit que

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{R^{2p+1}} \right) &= \frac{d^{2p}}{dR^{2p}} \left[ \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] \frac{1}{2p!} = \frac{(-1)^n n!}{2p!} \frac{d^{2p}}{dR^{2p}} \left[ \frac{P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}} \right] \\ &\quad \left( \text{avec } \cos \theta = \frac{z}{R} \right). \end{aligned}$$

On trouverait comme précédemment une équation analogue à  $Q_n$ , du type ci-dessus

$${}_i Q_n = AP_n + BxP_n' + Cx^2P_n'' + \dots + Lx^{2p}P_n^{(2p)},$$

et l'on emploierait le même procédé pour démontrer que  ${}_i Q_n = 0$  de degré  $n$  en  $\cos\theta$  (ayant tous ses termes de même parité), a toutes ses racines réelles et distinctes.

*Retour sur l'expression du potentiel des vitesses.* — La méthode de M. Boussinesq pour la recherche du potentiel des vitesses consiste tout d'abord à exprimer la fonction

$$(41) \quad \gamma(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

où  $F(x, y)$  représente la section à fleur d'eau du corps immergé, puis, comme nous l'avons exposé, à calculer la fonction

$$(42) \quad f(T, x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\pi T \cos \mu \, d\mu \\ \times \int_0^{2\pi} \chi(x + T \cos \mu \cos \theta, y + T \cos \mu \sin \theta, z) \, d\theta,$$

et enfin

$$(43) \quad \varphi = 2 \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

Supposons le solide réduit à un élément  $dm$ ; il en résulte que la fonction

$$\gamma(x + T \cos \mu \cos \theta, y + T \cos \mu \sin \theta, z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{dm}{[R_1^2 + 2T \cos \mu (x \cos \theta + y \sin \theta)]^{\frac{3}{2}}},$$

où

$$R_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 + T^2 \cos^2 \mu = R^2 + T^2 \cos^2 \mu.$$

Cette fonction  $\chi$  peut encore s'écrire

$$\chi(x + T \cos \mu \cos \theta, \dots) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{dm}{R_1^2} \left[ 1 + \frac{2T \cos \mu (x \cos \theta + y \sin \theta)}{R_1^2} \right]^{-\frac{3}{2}},$$

et peut être développée en série puisque  $2T \cos \mu (x \cos \theta + y \sin \theta) < R_1^2$  :

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{dm}{R_1^3} \left[ 1 - \frac{3T \cos \mu (x \cos \theta + y \sin \theta)}{R_1^2} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^p \frac{3 \cdot 5 \dots (2p+1)}{p!} (T \cos \mu)^p (x \cos \theta + y \sin \theta)^p + \dots \right].$$

M étant la projection du point  $(x, y, z)$  sur le plan de la surface libre,  $\omega$  l'angle de OM avec  $Ox$ , on remarque que

$$x \cos \theta + y \sin \theta = OM \cos(\omega - \theta) = r \cos(\omega - \theta).$$

Comme on peut faire tourner les axes  $(xOy)$  d'un angle  $\omega$ , on voit que, de ce fait, on ramène le terme général de  $\gamma$  à la forme

$$\frac{(-1)^p}{p!} 3 \cdot 5 \dots (2p+1) (T \cos \mu)^p (r \cos \theta)^p.$$

A l'intérieur du cercle de convergence, la série est absolument convergente et l'on peut l'intégrer terme à terme; par suite,  $f$  se calcule ainsi qu'il suit :

$$f(T, x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^3} dm \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (T \cos \mu)^{p+1} d\mu \int_0^{2\pi} \Sigma (-1)^p \\ \times \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p+1)}{p!} \frac{(r \cos \theta)^p}{R_1^{p+3}} d\theta.$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^p d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^p] (\cos \theta)^p d\theta,$$

on voit qu'il ne faut faire intervenir que les valeurs paires de  $p$ ; d'où

$$f(T, x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^3} dm \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (T \cos \mu)^{2q+1} d\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \Sigma (-1)^{2q} \\ \frac{1 \cdot 3 \dots (4q+1)}{R_1^{2q+3} (2q)!} r^{2q} \cos^{2q} \theta d\theta.$$

Tenant compte de ce que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2q} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2q-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q},$$

on trouve pour  $f$

$$f(\mathbf{T}, x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} dm \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathbf{T} \cos \mu)^{2q+1} \frac{r^{2q}}{R_1^{2q-1}} \Lambda d\mu,$$

avec

$$\Lambda = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2q-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2q} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4q-1)}{(2q)!}.$$

Posons

$$\mathbf{T} \sin \mu = \lambda, \quad \text{d'où} \quad d\mu = \frac{d\lambda}{\mathbf{T} \cos \mu}$$

et

$$(\mathbf{T} \cos \mu)^{2q-1} = \mathbf{T} \cos \mu \mathbf{T}^{2q} \left( \frac{\mathbf{T}^2 - \lambda^2}{\mathbf{T}^2} \right)^q;$$

on constate que  $f$  peut s'écrire

$$(14) \quad f(\mathbf{T}, x, y, z) = dm \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \sum \int_0^1 r^{2q} \frac{(\mathbf{T}^2 - \lambda^2)^q}{(\mathbf{R}^2 + \mathbf{T}^2 - \lambda^2)^{2q + \frac{1}{2}}} \Lambda d\lambda.$$

On est donc conduit à calculer

$$\delta = \int_0^1 \frac{(\mathbf{T}^2 - \lambda^2)^q d\lambda}{(\mathbf{R}^2 + \mathbf{T}^2 - \lambda^2)^{2q + \frac{1}{2}}},$$

qui, après les changements de variable  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{R}$ ,  $\lambda = \lambda_1 \mathbf{R}$  devient

$$\delta = \frac{1}{\mathbf{R}^{2q+2}} \int_0^1 \frac{(\mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2)^q d\lambda_1}{(1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2)^{2q + \frac{1}{2}}}.$$

Or

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2}{1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2} \right)^q &= \left( 1 - \frac{1}{1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2} \right)^q = 1 - \frac{q}{1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2} + \dots \\ &+ (-1)^p \frac{q!}{p!(q-p)!} \frac{1}{(1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2)^p} + \dots + (-1)^q \frac{1}{(1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2)^q}. \end{aligned}$$

En raison de ce développement,  $\delta$  peut être défini au moyen de la somme

$$\delta = \frac{1}{\mathbf{R}^{2q+2}} \sum_{p=0}^{p=q} (-1)^p \frac{q!}{p!(q-p)!} \int_0^1 \frac{d\lambda_1}{(1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2)^{p+q+\frac{1}{2}}}.$$

Or l'intégrale

$$I_{n+\frac{3}{2}} = \int_0^1 \frac{d\lambda_1}{(1 + \mathbf{T}_1^2 - \lambda_1^2)^{n+\frac{3}{2}}}$$

s'intègre facilement ainsi qu'il suit :

$$I_{n+\frac{3}{2}} = \left[ \frac{\lambda_1(1+T_1^2-\lambda_1^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1+T_1^2-\lambda_1^2)^n(1+T_1^2)} \right]_0^{1_1} - \frac{2n}{1+T_1^2} \int_0^{1_1} \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{(1+T_1^2-\lambda_1^2)^{n+\frac{3}{2}}},$$

$$I_{n+\frac{1}{2}} = \frac{T_1}{1+T_1^2} + \frac{2n}{1+T_1^2} \int_0^{1_1} \frac{d\lambda_1}{(1+T_1^2-\lambda_1^2)^{n+\frac{1}{2}}} - 2n \int_0^{1_1} \frac{d\lambda_1}{(1+T_1^2-\lambda_1^2)^{n+\frac{3}{2}}},$$

soit

$$(2n+1)I_{n+\frac{3}{2}} = B + \frac{2n}{C} I_{n+\frac{1}{2}},$$

en posant

$$B = \frac{T_1}{1+T_1^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{1+T_1^2};$$

on a donc les relations

$$I_{n+\frac{3}{2}} = \frac{B}{2n+1} + \frac{2n}{(2n+1)C} I_{n+\frac{1}{2}},$$

$$I_{n+\frac{1}{2}} = \frac{B}{2n-1} + \frac{2n-2}{(2n-1)C} I_{n-\frac{1}{2}},$$

.....

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{B}{3} + \frac{1}{3C} I_{\frac{1}{2}}.$$

Multiplions la deuxième relation de récurrence par  $\frac{2n}{(2n+1)C}$ , la troisième par  $\frac{2n}{2n+1} \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{C^2}$ , l'avant dernière par  $\frac{2n(2n-2)\dots 6}{(2n+1)\dots 5} \frac{1}{C^{n-1}}$ , et la dernière par  $\frac{2n(2n-2)\dots 4}{(2n+1)(2n-1)\dots 5} \frac{1}{C^{n-1}}$ , puis ajoutons, nous trouvons ainsi

$$I_{n+\frac{1}{2}} = \frac{B}{2n+1} \left( 1 + \frac{2n}{2n-1} + \frac{1}{C} \right. \\ \left. + \frac{2n}{2n-1} \frac{2n-2}{2n-3} \frac{1}{C^2} + \dots + \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1} \frac{1}{C^n} \right),$$

et pour  $\delta$  l'expression

$$\delta = \frac{1}{R^{2q-2}} \sum_{p=0}^{p=q} (-1)^p \frac{q!}{p!(q-p)!} I_{p+\frac{1}{2}}.$$

On peut donc maintenant définir la fonction  $f(T, x, y, z)$

$$f = dm \frac{\sqrt{z}}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial T} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{r^{2q}}{R^{2q+2}} \frac{1.3.5 \dots (2q-1) 1.3.5 (4q+1)}{2.4.6 \dots 2q (2q)!} \sum_{p=0}^q (-1)^p \frac{q!}{p!(q-p)!} I_{p+q+\frac{1}{2}}$$

qui, ainsi que l'a démontré M. Boussinesq, dans le cas où la particule fluide se trouve au point  $(0, 0, z)$  a pour valeur

$$f(T, 0, 0, z) = \frac{z}{\pi} \frac{dm}{\partial T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T \cos \mu d\mu}{(z^2 + T^2 \cos^2 \mu)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dm}{\pi} \frac{z^2 - T^2}{(z^2 + T^2)^2}$$

(voir pages 30, 31, 32 de son Mémoire : *Sur une importante simplification de la théorie des ondes que produisent à la surface d'un liquide l'émergence d'un solide ou l'impulsion d'un coup de vent.*)

On peut calculer les fonctions  $I_{p+q+\frac{1}{2}}$  et par suite les intégrales  $\lambda$ ; on trouve ainsi que  $\lambda_0 = B$ .

$\lambda_1$ , correspondant à  $q = 1$  et aux valeurs  $p = (0, 1)$ , a pour expression

$$\frac{Br^2}{2R^4} \left( 1 + \frac{3}{C} - \frac{2}{C^2} \right);$$

$\lambda_2$ , correspondant à  $q = 2$  et  $p = (0, 1, 2)$ ,

$$\lambda_2 = \frac{Br^4}{R^6} \left( \frac{3}{1.2^3} + \frac{3}{2^2 C} + \frac{3^3}{2^3 C^2} - \frac{84}{2^3 C^3} + \frac{6}{C^4} \right);$$

$\lambda_3$ , correspondant à  $q = 3$  et  $p = (0, 1, 2, 3)$ ,

$$\lambda_3 = \frac{Br^6}{R^8} \left( \frac{5}{1.3.2^3} + \frac{3}{2^2 C} + \frac{23}{3 \times 2^3 C^2} + \frac{7^2}{2^3 C^3} - \frac{31}{2^2 C^4} + \frac{55}{3 \times 2 C^5} - \frac{5 \times 2}{3 C^6} \right),$$

On remarque que si l'on fait  $C = 1$ , c'est-à-dire si l'on rend  $T_1$  nul, on voit de suite que les multiplicateurs de  $\frac{Br^2}{R^4}, \frac{Br^4}{R^6}, \dots$  sont nuls; on peut s'en rendre compte facilement en revenant à la forme initiale de  $\lambda$ .

En définition,  $f$  peut s'écrire

$$f = \frac{dm \sqrt{z}}{\pi^2} \frac{dM}{dT},$$

toutefois cette méthode de calcul de l'expression  $M$  ne met pas en évidence la loi de formation des coefficients de  $\frac{1}{C^2}, \frac{1}{C^3}, \dots$  et ne fait pas apparaître le moyen de sommer les coefficients de  $\frac{B}{C^2}, \frac{B}{C^3}, \dots$

Comme  $B = \frac{T_1}{1+T_1^2} = \frac{RT}{R^2+T^2}$ ,  $C = 1+T_1^2 = \frac{R^2+T^2}{R^2}$ , il en résulte que  $M$  peut être représenté par

$$M = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{B r^n}{R^{n+2}} \left( \beta_0 + \beta_1 \frac{R^2}{R^2+T^2} + \dots + \beta_n \frac{R^{2n}}{(R^2+T^2)^n} \right);$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial T} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{r^n}{R^{n+1}} \frac{R^2-T^2}{(R^2+T^2)^2} \left( \beta_0 + \dots + \beta_n \frac{R^{2n}}{(R^2+T^2)^n} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{2 r^n}{R^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{p \beta_p R^{2p} T^2}{(R^2+T^2)^{p+2}}. \end{aligned}$$

On constate ainsi que l'on a les différents termes de  $f_i$  et que l'on est ramené pour déterminer le potentiel  $\varphi$  des vitesses à calculer les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{R^2-T^2}{(R^2+T^2)^p} \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha,$$

où  $T$  est remplacé par  $\frac{\alpha^2}{2}$ ;

$$\int_0^{\infty} \frac{T^2}{(R^2+T^2)^p} \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha.$$

Le potentiel  $\varphi$  est formé par la somme des potentiels partiels  $\varphi_p$

$$\varphi_p = \int_0^{\infty} \frac{R^2 - \frac{\alpha^2}{4}}{\left( R^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^p} \psi \left( \frac{t^2}{2\alpha^2} \right) d\alpha,$$

et que la dénivellation totale de la particule fluide au point  $x, y, z$

$$\text{résulte de } \Sigma h_p = \sum \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}.$$

Or si l'on pose  $\frac{2R}{t^2} = \gamma$ , on voit que  $h_p$  peut s'écrire, en remplaçant  $\frac{t}{\alpha}$  par  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} h_p &= \tilde{f}(R, r) \int_0^\infty \frac{R^2 - \frac{t^2}{4\beta^2}}{\left(R^2 + \frac{t^2}{4\beta^2}\right)^p} \psi' \left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta \\ &= \tilde{f}(R, r) \int_0^\infty \frac{(\gamma^2 \beta^2 - 1)(4\beta^2)^{p-1}}{(\gamma^2 \beta^2 + 1)^p \left(\frac{4R^2}{\gamma^2}\right)^{p-1}} \psi' \left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta, \\ h_p &= \tilde{f}(R, r) \int_0^\infty \frac{(\gamma^2 \beta^2 - 1)(\beta^2 \gamma^2)^{p-1}}{(\gamma^2 \beta^2 + 1)^p R^{2p-2}} \psi' \left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta. \end{aligned}$$

Le calcul de  $h_p$  est ramené au calcul de

$$\tilde{f}(R, r) \int_0^\infty \frac{(Y-2)(Y-1)^{p-1}}{Y^p R^{2p-2}} \psi' \left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta \quad (\text{où } Y = \gamma^2 \beta^2 + 1),$$

et par suite à celui des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\psi' \left(\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta}{(\gamma^2 \beta^2 + 1)^q}.$$

Or M. Boussinesq a montré dans le Mémoire signalé ci-dessus (p. 32 et 33) que cette dernière intégrale était identique à

$$\frac{1}{2\gamma\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} \int_0^\infty \frac{\cos(X\alpha) d\alpha}{(1 + \alpha^2)^q}.$$

Comme  $\int_0^\infty \frac{\cos(X\alpha) d\alpha}{(1 + \alpha^2)^q}$ , où le paramètre  $X$  est essentiellement positif entre les limites 0 et  $\frac{\pi}{4}$  de  $\omega$ , se déduit par  $(q - 1)$  différentiations en  $X$  de la formule de Laplace :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(X\alpha) d\alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2} e^{-X},$$

où l'on remplace  $X\alpha$  par la variable  $u$ .



On trouve ainsi que

$$\frac{1}{2^{\gamma} \sqrt{1-\gamma}} \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} \int_0^{\omega} \frac{\cos(X\alpha) d\alpha}{(1-\alpha^2)^{\gamma}} = \frac{1}{2^{\gamma} \sqrt{1-\gamma}} \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} e^{-\lambda} \left( \sum_{p=0}^{p=\gamma} \lambda^p \lambda^p \right),$$

avec  $\lambda = \frac{1}{2^{\gamma}} (1 - \tan^2 \omega)$ .

Si nous faisons maintenant le nouveau changement de variable  $\tan \omega = \psi$ , on voit que l'intégrale précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{2^{\gamma} \sqrt{1-\gamma}} \int_0^1 e^{-\left(\frac{1-\psi^2}{2^{\gamma}}\right)} \left[ \Sigma A_p \left( \frac{1-\psi^2}{2^{\gamma}} \right)^p \right] d\psi.$$

On peut développer l'exponentielle suivant les puissances de  $\frac{1-\psi^2}{2^{\gamma}}$ , et l'on doit alors procéder à l'intégration d'expressions analogues à  $\int_0^1 (1-\psi^2)^m d\psi$ , ou encore écrire notre intégrale

$$\frac{e^{-\frac{1}{2^{\gamma}}}}{2^{\gamma} \sqrt{1-\gamma}} \int_0^1 e^{\frac{\psi^2}{2^{\gamma}}} \left[ \Sigma A_p \left( \frac{1-\psi^2}{2^{\gamma}} \right)^p \right] d\psi,$$

et développer l'exponentielle suivant les puissances de  $\frac{\psi^2}{2^{\gamma}}$ .

En définitive, nous avons, au cours de cet essai, montré que la représentation du potentiel préconisée par M. Boussinesq qui a le grand avantage de permettre l'étude dans le voisinage du lieu d'émergence, peut aussi conduire aux développements classiques, pour la recherche de la dénivellation d'une particule fluide  $(o, o, z)$ ; si nous avons pu passer de  $\gamma$  à  $f$  et de  $f$  à  $\varphi$  dans le cas le plus général, et par suite montrer comment on calculait  $h$ , nous devons reconnaître que le processus adopté par nous n'a pas mis en évidence le développement caractéristique en  $\frac{l^{2n}}{r^n} P_{n+1}(\cos \theta)$ .

Il est bon de remarquer qu'en ce qui concerne l'étude de la propagation des ondes apparentes, les termes en  $B$ ,  $\frac{B}{C}$  et  $\frac{B}{C^2}$  suffisent pour donner les éléments approximatifs.

MAXIMA ET MINIMA DE LA DÉNIVELLATION. — Nous avons abordé primitivement l'étude des maxima et minima de la dénivellation pour les particules fluides distribuées sur la droite  $z = z_0$ , dans le cas de deux dimensions; nous allons faire la même recherche, en considérant les particules situées primitivement dans le plan  $z = z_0$ , et en supposant les ondes produites dans un milieu indéfini.

La dénivellation de la particule fluide, ayant pour coordonnées initiales  $(x, y, z)$ , est définie par l'équation

$$h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[ P_1(\cos\theta) - \frac{t^2}{r} P_2(\cos\theta) + \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(n+1)\dots nr^n} P_{n+1}(\cos\theta) + \dots \right],$$

en supposant le corps réduit à un volume très petit  $dq$ .

On voit de suite que  $\frac{dh}{dx}$  a pour valeur

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} = & - \frac{dq}{2\pi r^3} \frac{dr}{dx} \left[ 2P_1 - \frac{3t^2}{r} P_2 + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}(n+2)}{r^n \Delta_n} P_{n+1} \dots \right] \\ & - \frac{dq}{2\pi r^2} \sin\theta \frac{d\theta}{dx} \left[ P_1' - \frac{t^2}{r} P_2' + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{r^n \Delta_n} P_{n+1}' \dots \right] \\ & \text{avec } \Delta_n = (n+2) \dots n. \end{aligned}$$

En égard à  $z$  constant, on a

$$-r \sin\theta \frac{d\theta}{dr} + \cos\theta \frac{dr}{dx} = 0, \quad \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r},$$

et par suite

$$\sin\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta}{r} \frac{dz}{dx} = \cos\theta \frac{x}{r^2};$$

il en résulte pour  $\frac{dh}{dx}$  l'expression suivante :

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{dq \cdot x}{2\pi r^3} \left[ \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+2)}{\Delta_n} P_{n+1} + \cos\theta P_{n+1}' \left( \frac{t^2}{r} \right)^n \right].$$

On peut transformer la quantité sous le signe  $\Sigma$ , en tenant compte de la relation classique

$$(n+1)P_{n+1}(\cos\theta) - (n-1)\cos\theta P_n - \sin^2\theta P_n' = 0,$$

qui, par le changement de  $n$  en  $(n + 1)$ , donne

$$P'_{n+1} = \frac{(n+2)P_{n+2} - (n+2)\cos\theta P_{n+1}}{\sin^2\theta};$$

si l'on remplace  $P'_{n+1}$  par cette valeur dans  $\frac{dh}{dx}$ , on trouve immédiatement

$$(45) \quad \frac{dh}{dx} = -\frac{dq.r}{2\pi r'} \left[ \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{(n+2)\{P_{n+2} - \cos^2\theta P_{n+1}\}}{\sin^2\theta \Delta_n} \left(\frac{t^2}{r}\right)^n \right].$$

Les maxima et les minima sont donc les racines de l'équation

$$(45') \quad \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+2)P_{n+1} + \cos\theta P'_{n+1}}{\Delta_n} \left(\frac{t^2}{r}\right)^n = 0.$$

On sait que  $P_{n+1}$  a pour valeur

$$\frac{1}{2.4.6 \dots (2n+2)} \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} [(\lambda^2 - 1)^{n+1}] \quad (\text{avec } \lambda = \cos\theta);$$

et peut par suite s'écrire

$$P_{n+1} = \frac{1}{A} \left[ (2n+2) \dots (n+2) \cos^{n+1}\theta + \sum_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}} (-1)^p C_{n+1}^p \right. \\ \left. \times (2n+2-2p) \dots (n+2-2p) \cos^{n+1-2p}\theta \right]$$

avec

$$A = 2.4.6 \dots (2n+2);$$

on déduit de là

$$P'_{n+1} = \frac{1}{A} [(2n+2) \dots (n+1) \cos^n\theta + \sum (-1)^p C_{n+1}^p \\ \times (2n+2-2p) \dots (n+1-2p) \cos^{n-2p}\theta].$$

On trouve que l'expression (45') prend la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{(2n+2) \dots (n+2)}{A} \cos^{n+1}\theta + \sum_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}} (-1)^p C_{n+1}^p \right. \\ \left. \times \frac{(2n+2-2p) \dots (n+2-2p)}{A} \cos^{n+1-2p}\theta \right\} \left[ \frac{t^2}{2r} \right]^n (-1)^n \frac{1}{\Delta_n} = 0.$$

En développant on constate, après avoir posé  $\frac{t^2}{2r} = \sqrt{p}$ , que l'équation de condition s'écrit :

$$(46) \quad \begin{aligned} & \sqrt{p} \left[ \frac{C_2^1 \cdot 3!}{2 \cdot 2! \Delta_1} - \frac{C_4^2 \cdot 5!}{2 \cdot 4! \Delta_3} p + \frac{C_6^3 \cdot 7!}{2 \cdot 6! \Delta_5} p^2 \dots \right] \\ & + \frac{\cos \theta}{2 \cdot 1!} \left[ 3 - \frac{C_3^1 \cdot 5!}{3! \Delta_2} p + \frac{C_5^2 \cdot 7!}{5! \Delta_4} p^2 - \frac{C_7^3 \cdot 9!}{7! \Delta_6} p^3 + \dots \right] \\ & - \sqrt{p} \frac{\cos^2 \theta}{2 \cdot 2!} \left[ \frac{5!}{2! \Delta_4} - \frac{C_4^1 \cdot 7!}{4! \Delta_3} p + \frac{C_6^2 \cdot 9!}{6! \Delta_5} p^2 \dots \right] \\ & + \frac{p \cos^3 \theta}{2 \cdot 3!} \left[ \frac{7!}{3! \Delta_2} - \frac{6_3^1 \cdot 9!}{5! \Delta_4} p - \frac{C_7^2 \cdot 11!}{7! \Delta_6} p^2 \dots \right] \\ & - p \sqrt{p} \frac{\cos^4 \theta}{2 \cdot 4!} \left[ \frac{9!}{4! \Delta_1} - \frac{C_6^1 \cdot 11!}{6! \Delta_5} p + \frac{C_8^2 \cdot 13!}{8! \Delta_7} p^2 \dots \right] + \dots, \end{aligned}$$

ou encore

$$\sqrt{p} f_1(p) + \frac{\cos \theta}{2 \cdot 1!} f_2(p) - \sqrt{p} \frac{\cos^2 \theta}{2 \cdot 2!} f_3(p) + p \frac{\cos^3 \theta}{2 \cdot 3!} f_4(p) - \dots = 0;$$

on remarque que  $f_1, f_2, f_3 \dots$  sont des séries entières, d'un type analogue à celui étudié dans le cas de deux dimensions. Il est évident que si  $\xi$  et  $\eta$  sont négligeables devant  $x$  et  $y$ , et si de plus  $\frac{t^2}{r}$  est fini, l'équation qui fournit les maxima et les minima afférents au cas où  $z_0$  est petit, n'est autre que  $f_1 = 0$ .

Si l'on remarque que  $f_1 = 0$  peut s'écrire

$$3 - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{2^2 \cdot 2! \cdot 9} - \frac{p^3}{2^3 \cdot 3! \cdot 11 \cdot 13} + \dots + \frac{p^n}{2^n n! (2n+5) \dots (4n+1)} + \dots = 0,$$

on remarque que cette équation n'est autre que celle donnée par Poisson page 154 de son Mémoire).

Comme nous venons de le dire, cette équation ne convient que si  $\frac{t^2}{r}$  est fini; si  $\frac{t^2}{r}$  est très grand et comparable à  $\frac{r}{l}$  ou  $\frac{r}{l'}$  ( $l$  et  $l'$  étant les axes de la section à fleur d'eau du paraboloidé immergé), il est absolument nécessaire de faire intervenir les termes complémentaires dans le développement de  $\varphi$ , termes provenant de  $\frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{r^2 r^{-1}} \right)$ .

Le calcul montre que pour un parabolôide de révolution

$$z = H \left[ 1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2} \right],$$

le développement de  $\varphi$  est représenté par

$$\varphi = -\frac{Hl^2}{4} t \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{R} - \frac{l^2}{6R^3} + \dots \right] + \frac{l^2}{3!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{l^2}{6R^3} + \dots \right] + \dots \right].$$

Il est intéressant de remarquer que dans ce cas  $\left(\frac{l^2}{r}\right)$  très grand, l'étude de ce qui se passe à la surface effectuée par Poisson et Cauchy, grâce à l'emploi d'artifices multiples de calcul, a été au contraire faite de la manière la plus élégante (*Application des potentiels*, p. 646-647) par M. Boussinesq.



## TROISIÈME PARTIE.

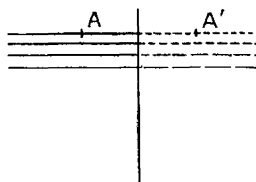
### ÉTUDE DES ONDES POUR DES BASSINS HORIZONTALEMENT LIMITES.

---

Au cours de la deuxième Partie, on s'est occupé tout d'abord des ondes produites par l'émergence d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au grand axe d'un canal, puis de celles résultant de l'émergence d'un corps dans un milieu indéfini (cas de trois dimensions).

Si le canal, au lieu d'être indéfini dans les deux sens des  $x$ , tant négatifs que positifs, a une section  $x = a$ , occupée par une paroi verticale s'étendant depuis la surface libre jusqu'aux plus grandes

Fig. 3.



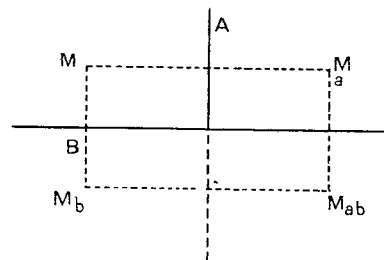
profondeurs, il suffit en s'inspirant de la théorie des images de Kelvin, d'imaginer le canal ou le bassin, prolongés de nouveau indéfiniment

de l'autre côté de la paroi, avec une région et un volume d'émergence qui seraient exactement symétriques, de la région et du volume d'émergence réels par rapport au plan de la paroi ; cette symétrie, comme va nous le montrer l'analyse, maintient à toute époque dans le plan de la paroi les particules fluides qui y étaient accolées initialement, ou encore rend nulle la composante normale à la paroi de la vitesse des dites particules.

Là encore, comme l'indique M. Boussinesq (*voir son Mémoire : Sur une importante simplification de la théorie des ondes, que produisent à la surface d'un liquide l'émergence d'un solide ou l'impulsion d'un coup de vent*, p. 37), le problème pourra se traiter comme dans le cas où le canal était sans extrémités, et le bassin horizontalement indéfini en tous sens, mais avec surfaces et volumes totaux d'émergence comprenant, outre les surfaces et volumes d'émergence vrais, leur image à travers le plan de la paroi comme miroir. Il en résultera que la réflexion du mouvement par la paroi se trouvera ainsi remplacée par la propagation directe effective, dans le canal ou bassin réels, des mouvements censés issus de l'image, qui se superposent aux mouvements directs analogues émanés de la vraie région d'émergence et non encore sortis du canal ou du bassin effectifs.

Il est évident que si le bassin, au lieu d'être indéfini en tous sens, est limité par deux parois rectangulaires A et B, il y a lieu en ce cas de considérer non seulement la surface S et le volume d'émergence V,

Fig. 4.



mais encore les images de S et V par rapport à A et B (soient  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $V_a$  et  $V_b$ ), et aussi les images  $S_{ab}$ ,  $V_{ab}$  de  $S_a$  et  $V_a$  par rapport au plan B.

Nous allons montrer, en utilisant les formules de Poisson et de Cauchy, que ces adjonctions de surfaces fictives et de volumes fictifs conduisent à des valeurs nulles de  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  pour un point quelconque de la paroi simple, ou de l'une quelconque des parois à angle droit.

On sait que l'étude des ondes par émerision produites dans un bassin indéfini en tous sens conduit d'après Poisson à un certain potentiel des vitesses

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ &\times \cos \alpha(x-z) \cos \beta(y-\beta) \frac{\sin ct}{c} da db d\alpha d\beta \\ &\text{(avec } c = \sqrt{g^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \text{).} \end{aligned} \right.$$

Or si l'on suppose que le liquide s'étende à droite de la paroi  $y, O, z$ , parallèle à  $x = 0$ , on doit en ce cas faire intervenir l'image du volume

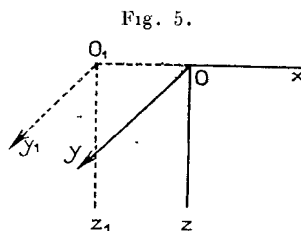


Fig. 5.

par rapport à cette paroi, et admettre que la masse fluide couvre alors tout l'espace au-dessous du plan  $z = 0$ , si l'on veut se trouver dans les conditions du problème étudié dans la seconde Partie.

En désignant  $O, O$  par  $X$ , on voit en passant du système  $O,xyz$  au système  $O,xy_1z_1$  que le potentiel du système est défini par

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ f(\alpha - \lambda, \beta) \cos [a(x_1 - X) - az] \\ + f(-\alpha - \lambda, \beta) \cos [-a(x_1 + X) + a\alpha] \} P da db d\alpha d\beta$$

avec  $P = e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cos \beta(y-\beta) \frac{\sin ct}{c}$ .

Or si dans la deuxième partie de cette intégrale afférente à



$f = \alpha = \lambda, \beta$ , on change  $\alpha$  en  $-\alpha$ , on remarque que  $\varphi$  s'écrit

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\sigma - \lambda, \beta) P \{ \cos \{ a x_1 - a \lambda + \alpha \} + \cos \{ a x_1 - a (\lambda + \alpha) \} \} da db d\alpha d\beta,$$

ou

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f P \{ \cos a x_1 \cos a (\lambda + \alpha) \} da db d\alpha d\beta$$

expression dont la dérivée par rapport à  $x_1$  est égale à

$$-\frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2f(\sigma - \lambda, \beta) P \sin a x_1 \cos a (\lambda + \alpha) da db d\alpha d\beta,$$

qui est nulle pour  $x_1 = 0$  quels que soient  $\alpha$ , et  $\beta$ .

*Cas de deux parois rectangulaires.* — En opérant comme ci-dessus, on voit qu'au volume  $f(x_1 = X, y_1 = Y)$ , il faut adjoindre les volumes fictifs

$$f(-x_1 - \lambda, y_1 - \gamma), f(x_1 - \lambda, -y_1 - \gamma), f(-x_1 - \lambda, -y_1 - \gamma)$$

En l'occurrence, il y aurait lieu de considérer quatre intégrales quadruples; si l'on prend les deux premières qui font intervenir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \{ f(\sigma - \lambda, \beta - \gamma) \cos [a(x_1 - \lambda) - a\sigma] \cos [b(y_1 - \gamma) - b\beta] \\ & + f(-\sigma - \lambda, \beta - \gamma) \cos [-a(x_1 + \lambda) - a\sigma] \cos [b(y_1 - \gamma) - b\beta] \} \\ & \times P_1 da db d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

on remarque que l'ensemble peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} P_1 f(\sigma - \lambda, \beta - \gamma) \cos [b(y_1 - \gamma) - b\beta] \\ & \times \{ \cos [a(x_1 - \lambda) - a\sigma] + \cos [a(x_1 + \lambda) + a\sigma] \} da db d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

En définitive le potentiel des vitesses a pour valeur :

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\sigma - \lambda, \beta - \gamma) e^{-z \sqrt{a^2 + b^2}} \frac{\sin ct}{c} Q da db d\alpha d\beta,$$

avec

$$Q = 4 \cos a x_1 \cos b y_1 \cos a (\lambda + \alpha) \cos b (\gamma + \beta),$$

et l'on constate immédiatement que les dérivées

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \end{array} \right\} \text{s'annulent bien pour } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \quad \text{quels que soient } y_1, z_1 \text{ et } t, \\ y_1 = 0 \quad \quad \quad \text{»} \quad \quad \quad x_1, z_1 \text{ et } t. \end{array} \right.$$

L'introduction des volumes fictifs est donc parfaitement légitimée

Montrons maintenant que l'emploi de la formule de Cauchy, pour le potentiel des vitesses en un point quelconque de la masse fluide, permet de faire les mêmes vérifications, après introduction des volumes fictifs, de manière à se placer dans le cas d'un milieu indéfini.

On a vu que ce potentiel s'exprime au moyen de l'intégrale

$$(47) \quad q = \frac{\sqrt{g}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{\mu\nu} g^2 t) \sin \nu \cos \frac{[(\varpi - x)^2 + (\rho - y)^2] \mu}{4} \\ \times e^{-\sqrt{\nu} z} F(\varpi, \rho) d\varpi d\rho \frac{d\mu d\nu}{\sqrt{\mu\nu}}.$$

Or si l'on veut étudier le mouvement des ondes produites par l'émerision d'un corps dans un bassin de profondeur infinie, limité par deux parois rectangulaires que l'on prend pour plans  $x = 0$  et  $y = 0$ , il faut en ce cas substituer  $\mathcal{F}$  à la fonction  $F$ ,  $\mathcal{F}$  n'étant autre chose que la somme

$$\mathcal{F} = F(\varpi, \rho) + F(-\varpi, \rho) + F(\varpi, -\rho) + F(-\varpi, -\rho).$$

Quant au potentiel des vitesses il serait défini par

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4,$$

$q_1$  ayant la valeur défini par (47),

$$q_2 = \frac{\sqrt{g}}{2\pi^2} \delta \int \int \int \sin(\sqrt{\mu\nu} g^2 t) \sin \nu \frac{e^{-z\sqrt{\mu\nu}}}{\sqrt{\mu\nu}} F(\varpi, \rho) \\ \times \cos \frac{[(-\varpi - x)^2 + (\rho - y)^2] \mu}{4} d\varpi d\rho d\mu d\nu.$$

$q_3$  résultant de  $q_1$  par la substitution de  $(\rho + y)$  à  $(\rho - y)$ , de  $(\varpi + x)$  à  $(\varpi - x)$  et de  $F(\varpi, -\rho)$  à  $F(-\varpi, \rho)$ ;

$q_1$  résultant de  $q_i$  par la substitution de  $(\rho + \gamma)$  à  $(\rho - \gamma)$ , de  $(\varpi + x)$  à  $(\varpi - x)$  et de  $F(-\varpi, -\rho)$  à  $F(\varpi, \rho)$ .

Ceci revient en définitive à prendre pour le potentiel

$$q = \frac{\sqrt{g}}{2\pi^2} \delta \int \int \int \int \sin(t\sqrt{\mu\nu}g^2) \sin\nu \frac{e^{-z\sqrt{\mu\nu}}}{\sqrt{\mu\nu}} \\ \times F(\varpi, \rho) [\cos(\alpha - \beta - \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) \\ + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)] d\varpi d\rho d\gamma d\nu$$

avec

$$\alpha = \frac{\varpi^2 + x^2 + \gamma^2 + z^2}{4}, \quad \beta = \frac{\varpi x}{2}, \quad \gamma = \frac{\rho \gamma}{2}.$$

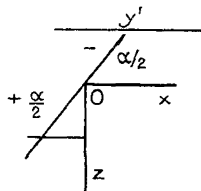
Du fait que la somme des quatre cosinus a pour valeur  $4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ , on voit de suite que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0, \quad \text{quels que soient } \gamma, z \text{ et } t,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = 0 \quad \text{pour } \gamma = 0, \quad \text{» } x, z \text{ et } t.$$

Si la seconde paroi OB, au lieu d'être perpendiculaire à la première OA, fait avec celle-ci un angle  $\frac{2\pi}{n}$ , et que le volume d'émersion soit symétrique par rapport au plan bissecteur de cet angle, il suffira d'introduire  $n$  volumes d'émersion, le premier de ces volumes étant le volume vrai, et les autres étant distribués comme l'est le premier dans les  $(n - 1)$  secteurs, formés par des parois verticales faisant entre elles l'angle  $\frac{2\pi}{n}$  à partir de OB.

Fig. 6.



Supposons maintenant que les deux parois verticales deviennent parallèles et constituent deux sections normales (à une distance  $\alpha$  l'une

de l'autre), la région cylindrique d'émergence étant d'ailleurs quelconque entre elles. On est donc conduit, eu égard à la considération des volumes fictifs présentée ci-dessus, à faire intervenir  $2k$  images de l'aire effective d'émergence; les deux premières images sont symétriques de cette aire d'émergence par rapport aux deux parois, puis les deux suivantes, symétriques de ces deux premières, chacune relativement à la paroi par rapport à laquelle son image n'a pas encore été formée.

Il suffira ensuite de rendre le canal indéfini des deux côtés des  $\gamma$ , et l'étude de ce qui se passera au sein du fluide indéfini, différera aussi peu qu'on voudra des phénomènes réels qu'y ferait apparaître le canal limité, à condition de faire croître  $k$  de plus en plus.

Il faut toutefois reconnaître qu'en introduisant la surface symétrique du corps immergé dans le cas d'une nappe liquide de profondeur infinie limitée par une paroi, puis trois surfaces ou trois images dans le cas de deux parois à angle droit, nous avons simplement vérifié que les dérivées  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  étaient nulles à un moment quelconque et en un point quelconque de la paroi.

Il reste à montrer analytiquement que l'on est conduit à l'introduction des images; nous allons à cet effet revenir au cas des ondes cylindriques et supposer le canal limité à droite par une paroi verticale.

On a vu que le potentiel des vitesses, à l'intérieur de la masse fluide, est défini par les formules de Cauchy :

$$q = \int_0^{\infty} \cos mx e^{-mz} f(m, t) dm + \int_0^{\infty} \sin mx e^{-mz} f_1(m, t) dm$$

avec

$$\begin{aligned} f(m, t) &= \cos(t\sqrt{mg}) \varphi(m) + \sin(t\sqrt{mg}) \psi(m), \\ f_1(m, t) &= \cos(t\sqrt{mg}) \varphi_1(m) + \sin(t\sqrt{mg}) \psi_1(m). \end{aligned}$$

Quant au potentiel à la surface, il a pour valeur  $q_{(z=0)}$ .

La paroi ayant été prise pour plan des  $YOZ$ , si l'on veut que la vitesse suivant la direction normale à la paroi soit nulle, il faut que

$u_{x=0}$  et  $U_{x=0}$  soient nulles quels que soient  $y$  et  $t$ , ou encore

$$u_{(t=0)} = -\frac{1}{g} \int_0^\infty | e^{-mz} \cos(t\sqrt{mg}) \varphi_1(m) + \sin(t\sqrt{mg}) \psi_1(m) | m dm = 0,$$

$$U_{(t=0)} = -\frac{1}{g} \int_0^\infty | \cos(t\sqrt{mg}) \varphi_1(m) + \sin(t\sqrt{mg}) \psi_1(m) | m dm = 0.$$

Puisque nous ne nous occupons que des ondes produites par émergence, il faut écrire la condition correspondante, qui n'est autre que  $Q = 0$  pour  $t = 0$  :

$$Q_{(t=0)} = 0 = \int_0^\infty | \cos mx \varphi_1(m) + \sin mx \psi_1(m) | dm,$$

et cela quel que soit  $x$ ; cette condition n'est réalisée que si  $\varphi = \varphi_1 = 0$  (voir Note XII, Mémoire de Cauchy).

L'autre condition à la surface revient à exprimer que  $\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{(z=0, t=0)}$  représente une certaine fonction  $f(x)$  connue.

Or, si l'on choisit maintenant  $\psi_1(m) = 0$ , on constate que  $u_{x=0}$  et  $U_{x=0}$  sont nulles; de plus, la valeur de la dénivellation à la surface, qui avait pour expression générale :

$$z = \frac{1}{\sqrt{g} \delta} \left( \int_0^\infty | \cos mx [ \cos(t\sqrt{mg}) \psi_1(m) - \sin(t\sqrt{mg}) \varphi_1(m) ] \right. \\ \left. + \sin mx [ \cos(t\sqrt{mg}) \psi_1(m) - \sin(t\sqrt{mg}) \varphi_1(m) ] \sqrt{m} dm \right),$$

se réduit, eu égard à  $\varphi = \varphi_1 = \psi_1 = 0$ , à l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{g} \delta} \int_0^\infty | \cos mx \cos(t\sqrt{mg}) | \psi_1(m) \sqrt{m} dm,$$

qui est une fonction paire en  $x$ , qui pour  $t = 0$  devient

$$\frac{1}{\sqrt{g} \delta} \int_0^\infty \cos mx \psi_1(m) \sqrt{m} dm.$$

On doit donc se trouver toujours en présence d'une fonction paire en  $x$ , ce qui ne peut avoir lieu d'une manière générale que si l'on adjoint à la fonction  $f(x)$  sa transformée en  $(-x)$ , ce qui revient en définitive à adjoindre à  $z = f(x)$  son image par rapport à l'axe OZ.

Nous avons vu que le potentiel des vitesses peut être représenté par la série de Mac Laurin

$$(48) \quad \varphi = th_0 + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial h_0}{\partial z} + \frac{t^5}{5!} \frac{\partial^2 h_0}{\partial z^2} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^n h_0}{\partial z^n} + \dots,$$

où  $h_0$  désigne la valeur initiale au point quelconque  $(x, y, z)$  de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , ou de la dénivellation  $h$ , laquelle se déduit de la valeur donnée  $f(x, y)$ , relative à la surface libre (voir Mémoire de M. Boussinesq, ci-dessus cité, 1910, p. 18).

Or on sait que la dénivellation initiale  $h_0$ , dans le cas d'un bassin horizontalement indéfini en tous sens, et de profondeur infinie, qui s'exprime au moyen d'un potentiel newtonien  $\int \frac{dm}{r}$ , étendu à tous les éléments  $dm = f(\xi, \eta) d\xi d\eta$  du volume d'émerision contigus à  $z = 0$ , satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial z^2} = 0.$$

De plus, la dérivée en  $z$  de ce potentiel

$$-\int \frac{z dm}{r^3} = -\int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

peut encore s'écrire, après avoir posé

$$\xi - x = R \cos \omega, \quad \eta - y = R \sin \omega,$$

$$-\int \frac{z dm}{r^3} = -\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\infty \frac{z f(x + R \cos \omega, y - R \sin \omega) R dR}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si dans cette dernière intégrale, on remplace  $R$  par  $zq$ , et que l'on fait tendre  $z$  vers zéro, on trouve immédiatement que

$$-\int \frac{z dm}{r^3} \text{ a pour } z = 0 \text{ la valeur } -2\pi f(x, y).$$

La fonction  $h_0$ , qui doit pour  $z = 0$  se réduire à  $f(x, y)$ , aura

pour valeur l'expression

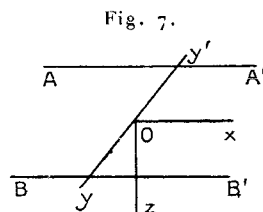
$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{z \, dm}{r^3};$$

comme elle tend vers zéro, aux grandes distances de l'origine, elle répond bien aux conditions posées.

Si l'on se trouve maintenant en présence du cas d'un canal limité par deux parois verticales parallèles, il faut choisir la fonction  $h_0$ , satisfaisant à  $\Delta_2 h_0 = 0$ ,  $\frac{dh_0}{dn} = 0$  sur les parois, et telle que pour  $z = 0$ , elle se réduise à  $f(x, y)$ .

$h_0$  étant déterminée, on peut alors, grâce à la formule (48), calculer  $\varphi$  et enfin la dénivellation en un point quelconque  $x, y, z$  à l'époque  $t$ .

*Cas d'un canal de largeur  $\alpha$ .* — Nous ferons d'abord remarquer que l'on peut évaluer la dénivellation dans un canal de largeur  $\alpha$ , en



introduisant le corps réel et  $2k$  images, et adoptant comme aire totale d'émerision l'ensemble de l'aire vraie et de ses  $2k$  images.

Les images à droite de AA' sont représentées par

$$f[x, (2k-1)\alpha - y] \quad \text{et} \quad f(x, 2k\alpha + y), \quad \text{avec } k \text{ entier positif,}$$

ou encore par

$$f[x, (-1)^k y + k\alpha].$$

Les images à gauche de BB' sont définies par  $f[x, (-1)^{k'} y + k'\alpha]$ , avec  $k'$  entier négatif.

En définitive, si au corps l'on fait correspondre  $f(x, y)$ , il y a lieu

d'adjoindre les images

$$f(x, (-1)^k y + k\alpha], \quad k \text{ entier positif ou négatif.}$$

Alors que l'on ne faisait apparaître que

$$Z_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau_1) d\xi d\tau_1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\tau_1)^2 + z^2}}$$

pour un seul corps, dans l'hypothèse d'un canal indéfini, il faut maintenant considérer

$$Z_1 + \sum_{-k}^{+k} \int \int \frac{f[(\xi, (-1)^k \tau_1 + k\alpha] d\xi d\tau_1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + [y - k\alpha - (-1)^k \tau_1]^2 + z^2}},$$

l'expression  $\sum'$  s'étendant à toutes les valeurs entières  $k$  de  $-K$  à  $+K$ , sauf 0.

Nous allons nous placer maintenant dans le cas d'une solution simple naturelle, c'est-à-dire d'un corps réduit à un élément  $dm$ .

Dans cette hypothèse, la fonction  $h_0$  répondant à la question est définie par

$$dm \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \sum' \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - k\alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 \alpha^2}} \right\} \right],$$

$$h_0 = dm \left[ \frac{1}{r} + \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - k\alpha)^2}} - \frac{1}{k\alpha} \right) \right. \\ \left. + \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y + k\alpha)^2}} - \frac{1}{k\alpha} \right) \right].$$

Cette série est convergente, car, pour  $k$  infiniment grand, le terme général est de l'ordre de  $\frac{1}{k^2}$  (voir *Traité de Mécanique rationnelle* de M. APPELL, t. III, p. 382 et 383, et *Mémoires de M. Appell dans les Acta mathematica*, t. VIII).

Les termes qui suivent  $\frac{1}{r}$  dans la parenthèse constituent une fonction



harmonique uniforme, car chacun d'eux étant à une constante près l'inverse de la distance du point  $x, y, z$  au point  $o, (\pm k\alpha)$ , est une fonction harmonique; il en résulte que la fonction

$$\sum' \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - k\alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 \alpha^2}} \right)$$

est finie dans le canal.

Les dérivées partielles de la fonction  $h_0$  sont nulles à l'infini dans le canal, et ses dérivées  $\frac{\partial h_0}{\partial y}$  pour  $y = \pm \frac{\alpha}{2}$  sont nulles.

On a en effet

$$\frac{\partial h_0}{\partial y} = -dm \left[ \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - k\alpha}{|x^2 + z^2 + (y - k\alpha)^2|^{\frac{3}{2}}} \right],$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de  $k$ ,  $o$  comprise :

$$\left( \frac{\partial h_0}{\partial y} \right)_{y = \pm \frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha dm}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2k - 1}{|4(x^2 + z^2) + \alpha^2(2k - 1)^2|^{\frac{3}{2}}}.$$

Or si l'on fait correspondre dans cette sommation les éléments afférents respectivement à

$$k' = p \quad \text{et} \quad k'' = -(p - 1),$$

on remarque qu'ils se détruisent. Le même procédé de calcul permet de voir que  $\left( \frac{\partial h_0}{\partial h} \right)_{y = \pm \frac{\alpha}{2}} = 0$ , quels que soient  $x$  et  $z$ .

Rappelons que l'expression ci-dessus de  $h_0$ , ainsi que d'autres apparaissant dans divers problèmes de physique mathématique, ont été étudiées par M. Appell dans un beau Mémoire : *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation  $\Delta F = 0$*  (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1<sup>re</sup> série, t. III, 1887).

Reprenons les notations de M. Appell, substituons  $a$  à  $\alpha$ , et écrivons avec lui :

$$e_1(x, y, z; a) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \sum \left[ \frac{1}{\sqrt{(y - ka)^2 + x^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 a^2}} \right],$$

ou

$$\varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{y^2 + u}} + \sum' \left( \frac{1}{\sqrt{(y - ka)^2 + u}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 a^2}} \right).$$

En tous les points de l'espace, autres que les points de l'axe  $Oy$  ( $x = 0, y = ka, z = 0$ ), cette fonction  $\varrho_1$  et toutes ses dérivées pourront être développées en séries trigonométriques procédant suivant les cosinus des multiples de  $\frac{2\pi y}{a}$ ; on aura en tous ces points

$$\varrho_1 = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi y}{a} + \dots + A_\nu \cos \frac{2\nu\pi y}{a} + \dots$$

avec

$$A_0 = -\frac{1}{a} \log u + B_0, \quad u = x^2 + z^2,$$

$$A_\nu = \frac{2}{a} \int_0^\infty e^{-tu - \frac{\pi^2 \nu^2}{a^2 t}} \frac{dt}{t} + B_\nu,$$

où  $B_0$  et  $B_\nu$  sont des constantes indépendantes de  $u$ .

M. Appell montre (p. 13, 14, 15 du Mémoire précité) que toutes les constantes  $B_\nu$  sont nulles, sauf  $B_0$  qui est égale à

$$\frac{2}{a} (\log 2a - C),$$

$C$  désignant la constante d'Euler 0,577215 ...

Il s'appuie sur ce que

$$\varrho_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \cos \frac{2\nu\pi y}{a}$$

vérifie l'équation  $\Delta \varrho_1 = 0$ ; or comme  $A_\nu$  est fonction de  $u = x^2 + z^2$ , il en résulte que l'on a

$$\frac{u d^2 A_\nu}{du^2} + \frac{dA_\nu}{du} - \frac{\nu^2 \pi^2}{a^2} A_\nu = 0.$$

Or l'intégrale

$$I_\nu = \frac{2}{a} \int_0^\infty e^{-tu - \frac{\pi^2 \nu^2}{a^2 t}} \frac{dt}{t}$$

vérifiant l'équation différentielle précédente, on en déduit que

$$A_\nu = I_\nu + B_\nu,$$

$B_\nu$  étant indépendant de  $u$ .

Substituant cette valeur de  $A_v$  dans ladite équation différentielle, on trouve

$$\frac{\nu^2 \pi^2}{a^2} B_\nu = 0,$$

d'où  $B_\nu = 0$  pour toutes les valeurs de  $\nu$  autres que zéro.

Quant à la valeur de  $A_0$ , on l'obtient en utilisant la relation classique

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a \varpi_1 dy.$$

Si l'on suppose que l'on substitue au canal un parallélépipède dont les parois sont définies par  $x = \pm \frac{a}{2}$ ,  $y = \pm \frac{b}{2}$ , et qui s'étend à l'infini du côté des  $Z$  positifs, on est amené, en s'en tenant comme précédemment, à une solution simple naturelle (masse  $dm$  située à l'origine), à introduire les images de la masse  $dm$ , par rapport aux quatre plans  $x = \pm \frac{a}{2}$ ,  $y = \pm \frac{b}{2}$ .

M. Appell utilise un développement dérivant de celui apparaissant dans l'étude d'une fonction  $F(x, y, z)$ , satisfaisant à l'équation  $\Delta F = 0$ , et possédant trois groupes de périodes, c'est-à-dire le nombre maximum de groupes de périodes que puisse posséder une fonction uniforme de trois variables réelles (voir *Acta mathematica*, t. IV, p. 347 et suiv.). Ce développement est basé sur l'emploi de la fonction  $Z(x, y, z)$  et de ses dérivées

$$Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \sum' \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos \varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos \varphi) \right]$$

avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{a_v^2 + b_v^2 + c_v^2};$$

$$R = \sqrt{(x - a_v)^2 + (y - b_v)^2 + (z - c_v)^2};$$

$$\cos \varphi = \frac{x a_v + y b_v + z c_v}{r \rho};$$

$$a_v = m a + m' a' + m'' a''; \quad b_v = m b + m' b' + m'' b''; \quad c_v = m c + m' c' + m'' c'';$$

$P_1$  et  $P_2$  étant les deux premiers polynomes de Legendre.

Dans le cas qui nous intéresse, le potentiel  $h_0$  serait défini

par  $dm \cdot \varrho_2(x, y, z; a, b)$  et

$$\varrho_2(x, y, z; a, b) = \frac{1}{r_{00}} + \sum' \frac{1}{r_{m,n}} - \frac{1}{\rho_{m,n}} - \frac{amx + bny}{\rho_{m,n}^3},$$

où  $r_{00}$ ,  $r_{m,n}$  et  $\rho_{m,n}$  ont les valeurs suivantes :

$$r_{00} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_{m,n} = \sqrt{(x - ma)^2 + (y - nb)^2 + z^2}, \quad \rho_{m,n} = \sqrt{m^2 a^2 + n^2 b^2};$$

quant à la sommation  $\sum'$ , elle s'étend à toutes les valeurs de  $m, n$  autres que zéro. Cette fonction  $\varrho_2$  vérifie l'équation  $\Delta \varrho_2 = 0$ ; elle est régulière en tous les points de l'espace, sauf ceux définis par

$$x = ma, \quad y = nb, \quad z = 0,$$

et est telle que

$$\varrho_2(x + a, y, z) = \varrho_2(x, y + b, z) = \varrho_2(x, y, z);$$

de plus, les dérivées  $\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)_{x=\pm \frac{a}{2}}$ ,  $\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right)_{y=\pm \frac{b}{2}}$  sont nulles.

La fonction  $\varrho_2$  est paire par rapport à chacune des variables  $x, y, z$ .

Pour toutes valeurs de  $z > 0$ , la fonction  $\varrho_2$  est développable en une double série trigonométrique de la forme

$$\varrho_2 = \sum_{\mu=0, \nu=0}^{\mu=\infty, \nu=\infty} A_{\mu, \nu} \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi y}{b}$$

(voir Mémoire de M. APPELL, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, t. III, 1887, p. 21, 22, 23, 24 et 25), où les coefficients  $A_{\mu, \nu}$  sont des fonctions de  $z$ .

En procédant comme pour la fonction  $\varrho_1$ , on trouve que

$$\frac{dA_{\mu, \nu}}{dz} = -\frac{8z\sqrt{\pi}}{ab} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-tz^2 - \frac{\pi^2}{t} \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right)}$$

où le facteur 8 est remplacé par 4, lorsque l'un des éléments  $\mu, \nu$  est nul, et par 2 quand ces entiers sont tous deux nuls. Cette expression

de  $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dz}$  peut être calculée en utilisant l'intégrale classique de Legendre,

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(1-x^2)}{2n}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{n\pi} e^{-\frac{1}{n}};$$

on trouve ainsi

$$\frac{dA_{\mu,\nu}}{dz} = -\frac{8\pi}{ab} e^{-2\pi z \sqrt{\frac{\mu}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}}},$$

d'où

$$A_{\mu,\nu} = -\frac{2\pi z}{ab} + B_{\mu,\nu},$$

$$V_{\mu,\nu} = \frac{4}{ab \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} e^{-2\pi z \sqrt{\frac{\mu}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}}} + B_{\mu,\nu},$$

$B_{\mu,0}$  et  $B_{\mu,\nu}$  désignant des constantes.

M. Appell montre que tous les  $B_{\mu,\nu}$  sont nulles, sauf  $B_{0,0}$  qui a pour valeur

$$B_{0,0} = \mathfrak{E}_2(0, 0, z; a, b) + \frac{2\pi z}{ab} - \sum' \frac{e^{-2\pi z \sqrt{\frac{\mu}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}}}}{ab \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}},$$

formule dans laquelle  $z$  a une valeur positive correspondant au  $z$  de la particule fluide envisagée.

Si maintenant l'on suppose que le corps soit immergé dans un milieu limité par les parois

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}, \quad z = c,$$

on doit, en vertu du principe des images, faire apparaître non seulement toutes les images du corps réel par rapport aux plans  $x = \pm \frac{a}{2}$ ,  $y = \pm \frac{b}{2}$ , mais encore l'image du corps par rapport à  $z = c$ , et les images nouvelles de ce dernier corps fictif par rapport aux parois verticales.

Dans l'hypothèse d'une solution simple naturelle, correspondant à un corps réduit à une masse  $dm$ , on prendra pour le potentiel  $h_0$

$$dm \{ \mathfrak{E}_2(x, y, z; a, b) + \mathfrak{E}_2(x, y, 2c - z; ab) \},$$

avec

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_2(x, \gamma, z; a, b) &= \Lambda_{0,0} + \Sigma \Lambda_{\mu,\nu} \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi\gamma}{b}, \\ \mathfrak{E}_2(x, \gamma, 2c - z; a, b) &= \mathfrak{A}_{0,0} + \Sigma \mathfrak{A}_{\mu,\nu} \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi\gamma}{b}, \\ \Lambda_{0,0} &= -\frac{2\pi z}{ab} + B_{0,0} \quad (B_{0,0} \text{ indépendant de } x, \gamma), \\ \mathfrak{A}_{0,0} &= -\frac{2\pi(2c - z)}{ab} + \mathfrak{B}_{0,0} \quad (\mathfrak{B}_{0,0} \text{ indépendant de } x, \gamma).\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}} = \lambda,$$

on remarque que  $B_{0,0}$  et  $\mathfrak{B}_{0,0}$  s'écrivent ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}B_{0,0} &= \mathfrak{E}_2(0, 0, z; a, b) + \frac{2\pi z}{ab} - \sum' \frac{4e^{-2\pi z\lambda}}{ab\lambda}, \\ \mathfrak{B}_{0,0} &= \mathfrak{E}_2(0, 0, 2c - z; a, b) + \frac{2\pi(2c - z)}{ab} - \sum' \frac{4e^{-2\pi(2c - z)\lambda}}{ab\lambda},\end{aligned}$$

avec

$$\mathfrak{E}_2(0, 0, z; a, b) = \frac{1}{z} + \sum' \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2}} \right)$$

et

$$\mathfrak{E}_2(0, 0, 2c - z; a, b) = \frac{1}{2c - z} + \sum' \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (2c - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2}} \right).$$

Quant aux coefficients  $\Lambda_{\mu,\nu}$  et  $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}$ , ils ont respectivement pour valeur :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu,\nu} &= \frac{ab\lambda}{4} e^{-2\pi z\lambda} + B_{\mu,\nu}, \\ \mathfrak{A}_{\mu,\nu} &= \frac{ab\lambda}{4} e^{-2\pi(2c - z)\lambda} + \mathfrak{B}_{\mu,\nu},\end{aligned}$$

tous les  $B_{\mu,\nu}$  et  $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$  étant nuls, sauf  $B_{0,0}$  et  $\mathfrak{B}_{0,0}$ .

La dérivée  $\frac{dh_0}{dz}$  est, au multiplicateur  $dm$  près, égale à

$$\frac{d}{dz} [\mathfrak{E}_2(x, \gamma, z; a, b) + \mathfrak{E}_2(x, \gamma, 2c - z; a, b)],$$

avec

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{dz}(x, y, z; a, b) = \frac{dA_{0,0}}{dz} + \sum \frac{dA_{\mu,\nu}}{dz} \cos \frac{2\mu\pi x}{a} \cos \frac{2\nu\pi y}{b},$$

$$\frac{dA_{0,0}}{dz} = -\frac{2\pi}{ab} + \frac{dB_{0,0}}{dz},$$

et des expressions analogues provenant de  $\mathcal{E}_2(x, y, 2c - z; a, b)$ .

On constate facilement que pour  $z = c$ , les dérivées  $\frac{dA_{0,0}}{dz}$  et  $\frac{dB_{0,0}}{dz}$  sont égales et de signe contraire, et qu'il en est de même de  $\frac{dA_{\mu,\nu}}{dz}$  et  $\frac{dB_{\mu,\nu}}{dz}$ ; dans ces conditions, la dérivée  $\left(\frac{dh_0}{dz}\right)_{z=c}$  est nulle quels que soient  $x$  et  $y$ .

Les fonctions  $\mathcal{E}_2(x, y, z; a, b)$  et  $\mathcal{E}_2(x, y, 2c - z; a, b)$  étant telles que leurs dérivées respectives par rapport à  $(x, y)$  s'annulent pour  $x = \pm \frac{a}{2}$ ,  $y = \pm \frac{b}{2}$ , il en résulte que  $h_0$ , qui jouit de la propriété  $\frac{\partial h_0}{\partial x} = 0$  aux parois et qui satisfait à l'équation  $\Delta_2 h_0 = 0$ , répond à toutes les conditions exigées.

Grâce à la fonction  $h_0$ , on peut, au moyen de la formule (48), page 115, déterminer le potentiel des vitesses de la masse fluide et par suite calculer la dénivellation.

On peut étudier le problème des ondes par émergence dans le cas d'un bassin parallélépipédique limité dans toutes les directions, en faisant état, ainsi qu'a bien voulu me le signaler M. Fichot, ingénieur en chef hydrographe de la marine, d'une étude de Poincaré au problème des marées (voir *Théorie des marées*, 1910, p. 77 et 78).

Choisissons avec Poincaré une fonction  $\varphi(x, y, z, t)$  se mettant sous la forme  $\varphi_1(x, y, t)\varphi_2(z)$ , vérifiant les conditions

$$(1) \quad \Delta \varphi = 0,$$

$$(2) \quad \varphi = 0 \quad \text{pour } t = 0;$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  sur les parois verticales  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$  et sur le fond  $z = c$ ;

$$(3) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=t=0} = f(x, y);$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}$$

L'équation  $\Delta \varphi = 0$  peut s'écrire

$$\varphi_1 \Delta \varphi_2 + \varphi_2 \Delta \varphi_1 = 0,$$

ou

$$\frac{\varphi_1}{\Delta \varphi_1} = - \frac{\varphi_2}{\Delta \varphi_2} = -k^2,$$

après avoir pris  $k^2$  comme valeur commune des rapports; ceci étant, nous sommes ramené à résoudre les équations

$$(5) \quad \varphi_1 + k^2 \Delta \varphi_1 = 0;$$

$$(6) \quad \varphi_2 - k^2 \Delta \varphi_2 = 0.$$

La dernière (6) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{k^2} \varphi_2 = 0,$$

qui a pour solution

$$\varphi_2 = A e^{\frac{z}{k}} + B e^{-\frac{z}{k}},$$

d'où il résulte

$$\varphi = \varphi_1(x, y, t) \left( A e^{\frac{z}{k}} + B e^{-\frac{z}{k}} \right).$$

De cette dernière, on déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_1(x, y, t) \frac{1}{k} \left( A e^{\frac{z}{k}} - B e^{-\frac{z}{k}} \right),$$

et comme  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  pour  $z = c$  doit être nul, on voit que

$$A e^{\frac{c}{k}} - B e^{-\frac{c}{k}} = 0, \quad \text{d'où} \quad B = A e^{\frac{2c}{k}}$$

et

$$\varphi = \varphi_1 A \left( e^{\frac{z}{k}} + e^{\frac{2c-z}{k}} \right).$$

La condition (4) peut, grâce à l'hypothèse faite sur  $\varphi$ , être remplacée par

$$\frac{1 - e^{\frac{2c}{k}}}{k \left( 1 + e^{\frac{2c}{k}} \right)} \varphi_t = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

ou, en posant  $\frac{e^{\frac{2c}{k}} - 1}{k \left( 1 + e^{\frac{2c}{k}} \right)} = m^2$ ,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + m^2 \varphi_1 = 0,$$



qui a pour solution

$$\varphi_1(x, y, t) = M \sin mt + N \cos mt.$$

Comme  $\varphi$  est nul pour  $t = 0$ , on voit de suite que  $\varphi_1$  se réduit à  $M \sin mt$  et

$$\varphi = MA \sin mt \left( e^{\frac{z}{k}} + e^{-\frac{z}{k}} \right).$$

Il nous faut maintenant tenir compte de l'équation de condition (3'), qui peut être remplacée par

$$\Sigma M m A \left( 1 - e^{\frac{2c}{k}} \right) = f(x, y).$$

On doit choisir  $\varphi_1$  de façon que l'équation (5) soit satisfaite, et que les conditions relatives aux parois verticales soient réalisées; il suffit pour cela de prendre pour  $\varphi_1$  une somme de termes tels que

$$\begin{aligned} {}_1c_{\mu, \nu} \cos \frac{\mu \pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b}, & \quad {}_2c_{\mu, \nu} \cos \frac{\mu \pi x}{a} \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi y}{b}, \\ {}_3c_{\mu, \nu} \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b}, & \quad {}_4c_{\mu, \nu} \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi y}{b}, \end{aligned}$$

où  $\mu$  et  $\nu$  prennent toutes les valeurs entières de 0 à  $\infty$ ; de plus, si l'on ne considère que les termes en  ${}_1c_{\mu, \nu}$ , on remarque immédiatement à cause de (5) que

$$k_i^2 = \frac{1}{\pi^2 \left( \frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} \right)}.$$

Il est évident qu'à  ${}_i c_{\mu, \nu}$ , il faut associer une valeur  $k_i^2$  avec  $i = (1, 2, 3, 4)$ , à laquelle correspond  $m_i$  et  $A_i$ , et que, pour  $i = 1$ , on aura

$$(7) \quad m M A_1 \left( 1 + e^{\frac{2c}{k_1}} \right) = {}_1c_{\mu, \nu} \cos \frac{\mu \pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b}.$$

Or les  ${}_i c_{\mu, \nu}$  peuvent se calculer facilement au moyen de la formule de

Fourier, en développant  $f(x, y)$  sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu} {}_{\mu, \nu} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix},$$

$${}_{1, \nu} {}_{\mu, \nu} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{-b} f(\xi, \eta) \cos \frac{\mu \pi \xi}{a} \cos \frac{\nu \pi \eta}{b} d\xi d\eta,$$

$${}_{2, \nu} {}_{\mu, \nu} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{-b} f(\xi, \eta) \cos \frac{\mu \pi \xi}{a} \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi \eta}{b} d\xi d\eta,$$

$${}_{3, \nu} {}_{\mu, \nu} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{-b} f(\xi, \eta) \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi \xi}{a} \cos \frac{\nu \pi \eta}{b} d\xi d\eta,$$

$${}_{4, \nu} {}_{\mu, \nu} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{-b} f(\xi, \eta) \sin \frac{2\mu + 1}{2} \frac{\pi \xi}{a} \sin \frac{2\nu + 1}{2} \frac{\pi \eta}{b} d\xi d\eta.$$

En vertu de (7), on voit de suite, en ne considérant que la première des quatre séries constituant le potentiel  $\phi$ , que cette série peut s'écrire

$$\Phi_1 = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sin m_1 t {}_{\mu, \nu} \cos \frac{\mu \pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b} \frac{e^{\frac{\pi}{k_1} x} + e^{-\frac{\pi}{k_1} x}}{m(1 + e^{k_1})},$$

en ayant soin de choisir pour  $k_1$  la valeur  $-\frac{1}{\pi \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}$ , et en remplaçant  ${}_{\mu, \nu}$  par l'expression donnée plus haut :

$$(8) \quad \Phi_1 = \frac{1}{ab} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\sin \sqrt{\pi^2 \left( \frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} \right)} t}{\sqrt{\pi^2 \left( \frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} \right)}} \frac{e^{-\pi z \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}} + e^{-2(1-z)\pi \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}{1 + e^{-2\pi z \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}}$$

$$\times \cos \frac{\mu \pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{-b} f(\xi, \eta) \cos \frac{\mu \pi \xi}{a} \cos \frac{\nu \pi \eta}{b} d\xi d\eta.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que si l'on substituait à  $(a, b)$  les quantités  $\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}$ , on verrait apparaître les exponentielles :

$$e^{-2\pi z \sqrt{\frac{\mu^2}{a'^2} + \frac{\nu^2}{b'^2}}}, \quad e^{-2\pi(1-z) \sqrt{\frac{\mu^2}{a'^2} + \frac{\nu^2}{b'^2}}}, \quad \text{et} \quad e^{-\pi z \sqrt{\frac{\mu^2}{a'^2} + \frac{\nu^2}{b'^2}}};$$

de plus, si l'on fait croître  $c$  indéfiniment, on voit que  $\Phi_1$  se réduit à

$$\Phi_1 = \frac{1}{ab} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} \frac{\sin \sqrt{\pi^2 \left( \frac{\nu^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} \right) t}}{\sqrt{\pi^2 \left( \frac{\nu^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} \right)}} e^{-\pi z \sqrt{\frac{\nu^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2}}} \cos \frac{\mu \pi x}{a} \cos \frac{\nu \pi y}{b}.$$

Si dans  $\varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$ , on remplace  $\frac{\mu \pi}{a}$  par  $\alpha$ ,  $\frac{\nu \pi}{b}$  par  $\beta$ , et si l'on fait croître  $a$  et  $b$  indéfiniment, on remarque que  $\varphi$  a pour valeur

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(\xi, \eta) \frac{\sin \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} t}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ &\quad \times e^{-\alpha(x-\xi)} \cos \alpha(x-\xi) \cos \beta(\eta-\eta_1) d\xi d\eta d\xi d\eta_1, \end{aligned}$$

qui n'est autre que l'intégrale trouvée par Poisson, dans le cas d'un fluide indéfini.

Nous retrouvons ainsi, en particulierisant la formule (8), un résultat signalé par M. Vergne dans sa Thèse (p. 78), mais nous devons observer que nous avons admis dès le début que le potentiel des vitesses était représenté par un produit  $\varphi_1(x, y, t) \varphi_2(z)$ , la fonction  $\varphi_2$  ne dépendant exclusivement que de  $z$ . Une telle hypothèse revient à supposer que le phénomène physique se passe de la même façon à toutes les profondeurs; elle est en réalité une conséquence analytique de la nature du fond du vase.

La forme (8) du potentiel partiel  $\varphi$ , et celle du potentiel global  $\varphi$  montrent que le phénomène ne se passe pas de la même façon dans des plans parallèles aux parois; cette observation est corroborée par l'étude du potentiel des vitesses mis sous la forme analytique

$$dm[\varphi_2(x, y, z; a, b) + \varphi_2(x, y, z, 2c - z; a, b)].$$

*Observation.* — L'examen du potentiel des vitesses et de la dénivellation dans le cas d'un bassin parallélépipédique de profondeur finie montre que la dénivellation ne peut pas être considérée comme indépendante de  $y$ , si l'on suppose que le corps immergé n'est pas

constitué par un cylindre dont les génératrices, perpendiculaires à l'axe du canal, en embrassent toute la largeur.

On conçoit de plus que les résultats donnés au Chapitre suivant (dans le cas d'un corps placé à l'intérieur d'un canal et réduit à l'élément  $dm$ ), en faisant état tout d'abord de la théorie des images, puis de la formule de Wallis à la suite de sommations, ne peuvent fournir qu'une première approximation.

De la forme même de  $h_0$  et de celle de  $\varphi$  dans le cas d'un parallélépipède, on peut déduire la dénivellation, en laissant la largeur ( $a$ ) finie, et en donnant à ( $b$  et  $c$ , longueur et profondeur) des valeurs infinies.

On remarque enfin que si l'on veut — dans un canal illimité en longueur —, en supposant la profondeur très grande sans être considérable, étudier le potentiel et la dénivellation en un point ( $x, y, z$ ) tel que  $\frac{z}{c}$  soit petit, on peut dans l'expression de  $\mathfrak{A}_v$ , remplacer  $e^{-\mu z}$  par  $e^{-(\mu^2 + 4c^2)z}$  et encore par  $e^{-4c^2 z}$  en première approximation.

On voit aussi que l'on pourrait de même, dans le cas d'un vase ayant la forme d'un parallélépipède de grande profondeur et dans l'hypothèse de  $\frac{z}{c}$  petit, introduire à la place de  $\mathfrak{A}_{\mu, \nu}$  l'expression

$$\frac{4e^{-\mu z} \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}{ab \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}}$$

Ces considérations pourraient encore trouver leur application si la particule considérée était voisine du fond.

**Retour sur l'étude des ondes par émergence dans un canal de largeur  $a$ , limité par deux parois verticales parallèles.**

On a vu que le potentiel dans le cas d'un milieu indéfini, en supposant que l'on s'en tienne à un seul élément  $dq$  immergé à l'origine des coordonnées, et en supposant  $\xi$  et  $\eta$  négligeables devant

$x, y, z$ , a pour valeur la série

$$\varphi_0 = \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{t}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{t^3}{3r^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(n+2)(n+3)\dots(2n+1)r^{n+2}} P_{n+1}(\cos \theta) \dots \right].$$

Dans le cas d'un canal de largeur  $a$ , il suffit, comme on l'a vu précédemment, d'introduire les images du corps réel par rapport aux parois, pour ramener l'étude envisagée à celles des ondes d'émergence dans un milieu indéfini ; on associe en l'occurrence au potentiel  $\varphi_0$  les potentiels  $\varphi_{-k}, \varphi_{-k+1}, \dots, \varphi_{-1}, \varphi_1, \dots, \varphi_k$  afférents aux différentes images, avec

$$\varphi_k = \frac{t dq}{2\pi} \sum \frac{t^{2n}}{(n+2)\dots(2n+1)r_k^{n+2}} P_{n+1}.$$

Si l'on veut avoir la valeur du potentiel total, il suffira de grouper tous les termes de rang  $n$  dans les potentiels partiels, et de faire croître  $n$  indéfiniment, c'est-à-dire de prendre

$$A_n = \sum (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(n+2)(n+3)\dots(2n+1)r_k^{n+2}} P_{n+1} \cos(\theta_k).$$

Comme  $|P_{n+1}(\cos \theta_k)| \leq 1$ , l'expression  $A_n$  en valeur absolue est plus petite que

$$\frac{t^{2n+1}}{(n+2)\dots(2n+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{r_k^{n+2}} \quad \text{avec } r_k = \sqrt{x^2 + z^2 + (y - ka)^2}$$

En égard au changement de variable

$$y - ka = R\lambda, \quad \text{avec } R = \sqrt{x^2 + z^2},$$

cette dernière intégrale peut s'écrire

$$\frac{t^{2n+1}}{(n+2)\dots(2n+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{a(R^2 + z^2)^{\frac{n+1}{2}} (1 + \lambda^2)^{\frac{n+2}{2}}}$$

et en remplaçant  $\lambda$  par  $\text{tang } \psi$ , on trouve de suite qu'elle a pour valeur

$$\frac{2 t^{2n+1}}{(n+2)(n+3)\dots(2n+1)aR^{n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \psi d\psi.$$

Grâce à la formule de Wallis, on remarque que, pour  $n = 2p + 1$ , cette intégrale s'exprime ainsi qu'il suit :

$$\text{pour } n = 2p, \quad \frac{2t^{2p+1}}{\Delta a R^{2p+2}} \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1},$$

$$\frac{2t^{2p+1}}{\Delta a R^{2p+1}} \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \frac{\pi}{2},$$

avec  $\Delta = (n+2)(n+3)\dots(2n+1)$ .

La dénivellation aura pour valeur

$$h = h_{-k} + h_{-k+1} + \dots + h_0 + \dots + h_k,$$

avec

$$h_k = \frac{dq}{2\pi r_j^2} \left[ P_1(\cos \theta_k) + \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(n+2)\dots 2n!} P_{n+1}(\cos \theta_k) + \dots \right],$$

à condition de faire croître indéfiniment le nombre des images.

Tout se passe comme si la particule fluide située en M subissait d'abord l'influence du corps, puis celle de chacune de ses images; il est évident que le mouvement, en vertu de ce qui a été dit précédemment, est uniformément accéléré, sur toute droite joignant M au corps et à ses images.

Si donc on faisait intervenir des mobiles partant du corps et des images  $k$ , avec la même accélération finie  $\gamma$ , on remarquerait que le premier mobile partant du corps à l'origine des temps arriverait en M au bout du temps  $t$ , alors que celui issu de l'image  $k$  n'y passerait qu'au temps  $t_k$  tel que

$$r_0 = \frac{1}{2} \gamma t^2, \quad r_k = \frac{1}{2} \gamma t_k^2,$$

$$\frac{t_k}{t_0} = \sqrt{\frac{r_k}{r_0}}.$$

On conçoit fort bien que l'on peut répéter pour la dénivellation ce que l'on a dit au sujet du potentiel des vitesses représenté par  $\Sigma \varphi_k$ , et par suite étudier la dénivellation en un point de la surface, et la dénivellation en un point de la masse quelconque, toujours dans l'hypothèse particulière du corps réduit à un élément  $dq$ .

*Dénivellation à la surface.* — Cette dénivellation dans le cas d'un milieu indéfini, de profondeur infinie, est représentée par

$$\frac{dq}{2\pi r^2} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2.5\gamma^3} + \dots \pm \frac{1}{(2.4.6 \dots 2m)(2m+3)(2m-5) \dots (4m+1)} \frac{1}{\gamma^{2m+1}} \mp \dots \right),$$

avec  $\frac{1}{\gamma} = \frac{t^2}{2r}$ , ou encore

$$\frac{dq}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^{3m+2} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{2m+1}}{(2.4 \dots 2m)(2m+3) \dots (4m+1) r^{2m+3}}.$$

La dénivellation de la particule fluide  $(x, y, z)$ , située dans un canal, aura pour valeur une série dont le terme de rang  $m$  sera représenté par l'expression

$$\frac{dq}{2\pi} \frac{(-1)^{3m+2} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{2m+1}}{(2.4 \dots 2m)(2m+3) \dots (4m+1)} \sum_{l=-h}^{l=+h} \frac{1}{r_l^{2m+3}},$$

où l'on fera  $K$  infini.

Si l'on remplace

$$\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \frac{1}{r_l^{2m+3}}$$

par sa valeur approchée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh}{|x^2 + z^2 + (y - ka)^2|^{\frac{2m+3}{2}}},$$

qui n'est autre que

$$\frac{2}{a R^{2m+2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} \psi \, d\psi,$$

comme on le voit en se reportant aux calculs de la page 130, il en résulte que le coefficient du  $m^{\text{ième}}$  terme de  $h$  a pour valeur

$$\frac{dq}{2\pi} \frac{(-1)^{3m+2} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{2m+1}}{(2.4.6 \dots 2m)(2m+3) \dots (4m+1)} \frac{2}{a R^{2m+2}} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \dots \frac{2}{3}$$

ou encore

$$\frac{dq}{\pi a R} (-1)^{3m+2} \left(\frac{2R}{t^2}\right)^{2m+1} \frac{1}{4m+1} = \frac{dq}{\pi a R} (-1)^{3m+2} \left(\frac{t^2}{2R}\right)^{2m+1} \cdot 2^{2m} \frac{2m!}{(4m+1)!}.$$

Or la formule trouvée par Cauchy, Poisson et M. Boussinesq dans le cas de deux dimensions, et que M. Rousier a déduit de la formule (15 bis) (voir page 40 de sa Thèse)

$$h = \frac{S}{\pi t} \left[ \frac{\frac{t^2}{2R}}{1} - \frac{\left(\frac{t^2}{2R}\right)^2}{1.3.5} + \frac{\left(\frac{t^2}{2R}\right)^3}{1.3.5.7.9} - \dots \right],$$

diffère de celle que nous venons de trouver par la substitution de  $\frac{S}{\pi R}$  à  $\frac{dq}{\pi R a}$ ; comme  $\frac{dq}{\pi R a}$  et  $\frac{S}{\pi R}$  sont assimilables à une longueur, on peut dire que les deux formules se correspondent.

Le cas relatif à  $\theta = \frac{\pi}{2}$  conduit en définitive, après le changement de  $\frac{S}{\pi R}$  en  $\frac{dq}{\pi R a}$ , à une formule identique pour la dénivellation, à celle produite par l'émergence d'un cylindre dont les génératrices\* sont perpendiculaires à l'axe du canal et qui occupe toute la largeur du canal, et cela toutes les fois que l'on considère des particules fluides situées à la surface du canal loin du corps réel et par suite aussi des corps fictifs.

*Dénivellation en un point x, y, z.* — Nous avons vu d'une part que la dénivellation avait pour valeur

$$h = \sum_{\iota=-k}^{\iota=+k} h_{\iota}, \quad \text{avec } h_{\iota} = \frac{dq}{2\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{t'^{n+2}} \frac{(n+1)!}{2n!} P_{n+1} \cos(\theta_{\iota}),$$

et d'autre part que le polynôme de Legendre d'ordre  $(n+1)$  est représenté par l'expression

$$\frac{1}{2.4.6 \dots (2n+2)} \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} [(\lambda^2 - 1)^{n+1}].$$



Il s'ensuit que  $P_{n+1}$  peut s'écrire

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \Sigma (-1)^p C_{n+1}^p [(2n+2-2p) \dots (n+2-2p)] \cos^{n+1-2p} \theta_i,$$

avec  $\cos \theta_i = \frac{\bar{z}}{r_i}$ ,

ou encore

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \Sigma (-1)^p C_{n+1}^p A \frac{\bar{z}^{n+1-2p}}{r_i^{n+1-2p}},$$

où  $A$  n'est autre que le produit  $[(2n+2-2p) \dots (n+2-2p)]$ .

L'élément figuratif de  $t^{2n}$ , dans l'expression de la dénivellation totale, est donc défini par

$$(-1)^n t^{2n} \frac{(n+1)!}{2n!} \sum_{p=0}^{\frac{n+1}{2}} \sum_{i=-k}^{i=+k} (-1)^p C_{n+1}^p A \frac{\bar{z}^{n+1-2p}}{r_i^{2n+3-2p}}.$$

Si l'on substitue à la deuxième sommation correspondant aux différentes valeurs de  $i$ , une valeur approchée représentée par un terme constant multiplié par une intégrale simple,

$$(-1)^p C_{n+1}^p A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[x^2 + \bar{z}^2 + (\gamma - ka)^2]^{\frac{2n+3-2p}{2}}},$$

on remarque que l'on peut transformer la valeur de l'élément figuratif de  $t^{2n}$  ci-dessus envisagé.

Comme l'intégrale proprement dite a pour valeur

$$\frac{2}{\alpha R^{2n+2-2p}} \cdot \frac{2n-2p}{2n-2p+1} \dots \frac{2}{3}, \quad \text{avec } R = \sqrt{x^2 + \bar{z}^2},$$

on voit en définitive que le terme afférent à  $t^{2n}$  a pour valeur

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} (-1)^n t^{2n} \frac{(n+1)!}{2n!} \\ \times \sum_{p=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^p C_{n+1}^p A \frac{\bar{z}^{n+1-2p}}{\alpha R^{2n+2-2p}} \cdot 2^{n-p+1} \frac{(n+p)!}{2n-2p+1}$$

Si l'on pose  $\cos \theta = \frac{\bar{z}}{R}$ , on constate que l'expression précédente

s'écrit ainsi qu'il suit :

$$\frac{1}{(n+2)\dots 2n} \cdot \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\dots (2n+2)} (-1)^n \left(\frac{t^2}{R}\right)^n \frac{2}{aR} \\ \times \Sigma (-1)^p C_{n+1}^p A (\cos \Theta)^{n+1-2p} 2^{n-p} \frac{(n-p)!}{2n-2p+1}.$$

Tenant compte de ce que le produit des nombres impairs de 1 à  $2n-2p+1$ , peut s'écrire

$$\frac{1}{2n-2p+1} = \frac{1}{2n-1} \cdot 2^p \frac{n!}{(n-p)!} \frac{(2n-2p+1)!}{2n!},$$

et aussi de ce que la quantité A peut être remplacée par

$$2(n+1-2p) \frac{(2n+1-2p)!}{(n+1-2p)!},$$

on constate que

$$\frac{1}{(n+2)\dots 2n} \cdot \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\dots (2n+2)} C_{n+1}^p A 2^{n-p} \frac{(n-p)!}{2n-2p+1}$$

est équivalent à

$$\frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{p!} (n+1) \frac{(n-p)!}{(n+1-2p)!}.$$

La forme générale du développement de la dénivellation est la suivante :

$$h = \frac{dq}{2\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{t^2}{R}\right)^n \frac{2}{aR} \frac{n+1}{2n-1} \sum_{p=0}^{p=\frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \frac{1}{p!} \frac{(n-p)!}{(n+1-2p)!} \cos^{n+1-2p} \Theta,$$

alors que dans un milieu indéfini elle était représentée par

$$\frac{dq}{2\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{r^{n+2}} \frac{(n+1)!}{2n!} P_{n+1}(\cos \Theta), \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La sommation afférente aux valeurs entières de  $p$  de 0 à l'entier  $\frac{n+1}{2}$  (ou à l'entier le plus rapproché de  $\frac{n+1}{2}$ ) remplace donc le polynome de Legendre d'ordre  $(n+1)$ .

*Remarque.* — La méthode qui réside dans la substitution d'intégrales à certaines expressions  $\Sigma$ , [calcul de la dénivellation à la surface et en un point quelconque (p. 130 à 135)], ne peut donner qu'une première approximation, car elle conduit à cette conséquence, que, pour toutes les particules fluides, la dénivellation est indépendante de leur coordonnée  $y$ , alors que la méthode qui réside dans la détermination de  $h_0$  par les conditions  $\Delta h_0 = 0$ ,  $\frac{dh_0}{dn} = 0$  aux parois, et ensuite dans le développement de  $\varphi$  en série, est la seule qui mette nettement en évidence l'influence de la largeur du canal, et qui tienne compte de la position de la particule fluide.

Il nous a semblé utile de faire une application des formules donnant la valeur de la dénivellation en un point  $(x, y, z)$  à l'intérieur : 1° d'une nappe indéfinie ; 2° d'un canal de largeur  $\alpha$ .

Nous avons supposé que, dans le premier cas, la particule fluide se trouvait initialement placée sur une droite inclinée de 60° sur la verticale.

On sait qu'en l'occurrence on a :

$$h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[ P_1 - \frac{t^2}{r} P_2 + \frac{t^4}{r^2} \frac{P_3}{4} - \frac{t^6}{r^3} \frac{P_4}{5 \cdot 6} + \frac{t^8}{r^4} \frac{P_5}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots \right],$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos \theta, & P_2 &= \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2}, & P_3 &= \frac{\cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)}{2}, \\ P_4 &= \frac{35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 5}{8}, & P_5 &= \frac{\cos \theta (315 \cos^4 \theta - 350 \cos^2 \theta + 75)}{40}, \\ P_6 &= \frac{3465 \cos^6 \theta - 4725 \cos^4 \theta + 1575 \cos^2 \theta - 75}{240}, & & \dots \end{aligned}$$

En posant  $\frac{t^2}{r} = \frac{1}{\gamma} = \lambda$ , et en calculant les valeurs de  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \dots$ , pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , on trouve pour la dénivellation

$$h = \frac{dq}{2\pi r^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{7\lambda^3}{6} + \frac{37\lambda^5}{5 \cdot 6 \cdot 16} + \frac{23\lambda^7}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 16} + \dots \right];$$

quant à la dérivée  $\frac{\partial h}{\partial t}$ , elle a pour valeur :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dq}{2\pi r^2} \frac{t}{4r} \left[ 1 - 7\lambda + \frac{37\lambda^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{23\lambda^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right].$$

Les zéros de la série entre parenthèses (afférente à  $\frac{\partial h}{\partial t}$ ) correspondent à

$$\lambda_1 = 0,31, \quad \lambda_2 = 2,82,$$

pour lesquels on trouve

$$h_1 = \frac{dq}{\pi r^2} \times 0,269, \quad t_1 = 0,79\sqrt{r} \quad (\lambda_1 = 0,31),$$

$$h_2 = -\frac{dq}{\pi r^2} \times 0,139, \quad t_2 = 2,37\sqrt{r} \quad (\lambda_2 = 2,82).$$

Supposons maintenant que nous opérons dans un canal de largeur  $\alpha = 2$ , toujours dans l'hypothèse où le corps serait réduit à un élément  $dm$ , la particule fluide étant située sur une droite inclinée de  $60^\circ$  sur la verticale avec

$$(z = 1, \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}).$$

On fera en ce cas usage pour la détermination de la dénivellation de la formule approchée

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\alpha l} \left(\frac{t^2}{l}\right)^n \sum_{p=0}^{p \leq \frac{n+1}{2}} (-1)^p \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{\Delta} \frac{1}{p!} (n-1) \frac{(n-p)!}{(n+1-2p)!} (\cos \Theta)^{n+1-2p},$$

avec

$$\Delta = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) = \overline{2n-1}, \quad \alpha = 2, \quad l = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \cos \Theta = \frac{z}{l}.$$

On pourrait faire prendre à  $x$  toutes les valeurs comprises entre 0 et  $\sqrt{3}$ , avec  $x^2 + y^2 = 3$ ; nous n'avons effectué les calculs que dans les hypothèses  $x = 0$  et  $x = \sqrt{3}$ , correspondant à deux azimuts rectangulaires 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

*Première hypothèse :*

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad y = \sqrt{3}, \quad z = 1, \quad \alpha = 2, \quad l = 1, \quad \Theta_1 = 0, \\
 h = \frac{dq}{\pi \alpha l} \left\{ \cos \Theta - \frac{t^2}{l} \left( \cos^2 \Theta - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{t^2}{l} \right)^2 \left( \frac{\cos^3 \Theta}{1 \cdot 3} - \frac{\cos \Theta}{2^2} \right) \right. \\
 \quad - \frac{1}{5} \left( \frac{t^2}{l} \right)^3 \left( \cos^4 \Theta - \cos^2 \Theta + \frac{1}{2^3} \right) \\
 \quad + \frac{1}{7} \left( \frac{t^2}{l} \right)^4 \left( \cos^5 \Theta - \frac{5 \cos^3 \Theta}{2^3} + \frac{5 \cos \Theta}{2^4} \right) \\
 \quad \left. - \frac{1}{9} \left( \frac{t^2}{l} \right)^5 \left( \cos^6 \Theta - \frac{6 \cos^4 \Theta}{2^2} + 6 \cdot 3! \frac{\cos^2 \Theta}{2^6} - \frac{1}{2^5} \right) + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

En ce cas,

$$h = \frac{dq}{2\pi l} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{(t^2)^2}{12} - \frac{(t^2)^3}{120} + \frac{(t^2)^4}{105 \times 16} - \frac{(t^2)^5}{945 \times 32} + \dots \right\}.$$

Alors que dans le cas d'un milieu indéfini, on trouve pour  $r = 2$  :

$$\begin{aligned}
 (\text{avec } \lambda_1 = 0,31) \quad h_1 &= \frac{dq}{\pi} \times 0,0673, \quad t_1^2 = 1,24; \\
 (\text{avec } \lambda_2 = 2,82) \quad h_2 &= -\frac{dq}{\pi} \times 0,0348, \quad t_2^2 = 11,28,
 \end{aligned}$$

les valeurs de la dénivellation dans un canal de largeur 2, au bout des temps  $\sqrt{1,24}$  et  $\sqrt{11,28}$ , sont égales à

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_1 &= \frac{dq}{\pi} \times 0,247, \quad \text{avec } t_1 = \sqrt{1,24}; \\
 \mathcal{H}_2 &= \frac{dq}{\pi} \times 0,176, \quad \text{avec } t_2 = \sqrt{11,28}.
 \end{aligned}$$

la particule fluide étant située au point  $x = 0, y = \sqrt{3}, z = 1$ ; on fera remarquer que pour le calcul de  $\mathcal{H}_2$ , on a dû pousser les calculs jusqu'au terme en  $\left(\frac{t^2}{l}\right)^{11}$ , en raison de la faible convergence de la série.

*Deuxième hypothèse.* — Si l'on fait maintenant  $y = 0, x = \sqrt{3}$ , on voit que  $l = 2$ , et  $\cos \Theta = \frac{1}{2}$ ; les calculs conduisent assez vite pour les

dénivellations de la particule aux valeurs

$$\begin{aligned}
 {}_2\mathcal{H}_1 &= \frac{dq}{\pi} \times 0,156, & \text{avec } t_1 &= \sqrt{1,24}; \\
 {}_2\mathcal{H}_2 &= \frac{dq}{\pi} \times 0,035, & \text{avec } t_2 &= \sqrt{11,28}.
 \end{aligned}$$

**Note complémentaire au sujet du mouvement des particules  
autour de leur position d'équilibre, dans le cas des ondes cylindriques.**

Je me propose dans cette Note de donner une image du mouvement des particules fluides autour de leur position d'équilibre, dans le cas classique des ondes cylindriques.

On a vu précédemment que le potentiel des vitesses est représenté en l'occurrence par l'expression

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=-l}^{\alpha=+l} \int_{a=0}^{a=+\infty} f(\alpha) e^{-az} \cos a(x-\alpha) \frac{\sin(t\sqrt{a})}{a} da d\alpha,$$

en prenant  $g = 1$ .

Or si l'on choisit pour  $f(\alpha)$  la fonction  $\mathbf{H}\left(1 - \frac{\alpha^2}{l^2}\right)$ , on peut, après le changement de variable  $\alpha = \frac{ly}{\pi}$ , développer  $f$  entre  $-\pi$  et  $+\pi$  en une série de cosinus

$$1 - \frac{y^2}{\pi^2} = \frac{A_0}{2} + \sum_1^{\infty} A_m \cos my$$

avec

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) dy, \quad A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \cos my dy,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad A_m = (-1)^{m+1} \frac{4}{\pi^2 m^2}.$$

On peut par suite remplacer  $\varphi$  par

$$\frac{2}{3} \mathbf{H}t + \frac{4\mathbf{H}}{\pi^2} \sum_1^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{e^{-mz} \cos mx \sin(t\sqrt{m})}{m^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on est conduit à rechercher les caractéristiques du mouvement défini par un potentiel partiel des vitesses égal à

$$\varphi_m = \frac{4H}{\pi^2} \frac{e^{-mz} \cos mx \sin(t\sqrt{m})}{m^{\frac{5}{2}}};$$

à ce potentiel correspondent les composantes de la vitesse

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = -\frac{4H}{\pi^2} \frac{e^{-mz} \sin mx \sin(t\sqrt{m})}{m^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dz_m}{dt} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = -\frac{4H}{\pi^2} \frac{e^{-mz} \cos mx \sin(t\sqrt{m})}{m^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right) = \frac{4H}{\pi^2} \frac{e^{-mz} \cos mx \cos(t\sqrt{m})}{m^2}$$

qui, pour  $t = z = 0$ , devient  $\frac{4H}{\pi^2} \frac{\cos mx_0}{m^2}$ .

L'équation du mouvement de la particule, qui, au temps  $t = 0$  après que l'on aura enlevé le corps, occupera la position  $(x_0, z_0 + \eta_0)$ , sera définie par

$$\frac{dz}{e^{-mz} \sin mx} = \frac{dz}{e^{-mz} \cos mx} = -\frac{4H}{\pi^2 m^{\frac{3}{2}}} \sin(t\sqrt{m}) dt = \frac{4H}{\pi^2 m^2} \frac{d}{dt} \cos(t\sqrt{m}).$$

Or, si l'on pose  $e^{-mz} \sin mx = \lambda$ , on a immédiatement

$$d\lambda = m e^{-mz} (\cos mx dx - \sin mx dz) = 0,$$

en vertu de l'égalité des deux premiers rapports, d'où  $\lambda = \lambda_0$ ; si la particule à l'instant  $t$  occupe la position  $x_0 + \xi$ ,  $z_0 + \eta$ , on a par suite

$$e^{-m(z_0+\eta)} \sin m(x_0 + \xi) = e^{-m(z_0+\eta_0)} \sin mx_0,$$

ou encore

$$e^{-m\eta} = e^{-m\eta_0} \frac{\sin mx_0}{\sin m(x_0 + \xi)},$$

qui représente la trajectoire de la particule, afférente au potentiel partiel envisagé, avec une dénivellation initiale au-dessous de  $z_0$  définie par  $\frac{4H}{\pi^2 m^2} e^{-mz_0} \cos mx_0$ .

Ce mode de représentation du mouvement peut à son tour être remplacé par un autre plus simple qui met en évidence des trajectoires circulaires.

En effet, écrivons

$$\varphi_m = A_m e^{-mz} \frac{\cos mx \sin(t\sqrt{m})}{\sqrt{m}} = \frac{A_m}{2} \frac{e^{-mz}}{\sqrt{m}} [\sin(t\sqrt{m} + mx) + \sin(t\sqrt{m} - mx)]$$

avec  $A_m = (-1)^{m+1} \frac{4H}{\pi^2 m^2}$ , et remplaçons-y  $x$  par  $x_1 - \frac{\pi}{2m}$ ; nous voyons alors que

$$\varphi_m = (-1)^{m+1} \frac{2H}{\pi^2 m^{\frac{3}{2}}} e^{-mz} [\cos(mx_1 - t\sqrt{m}) - \cos(mx_1 + t\sqrt{m})].$$

M. Nau a montré que la trajectoire d'un point matériel, dont le mouvement est censé dépendre du potentiel des vitesses

$$\phi = a e^{-az} \cos(ax - bt),$$

est donnée par l'équation

$$\frac{dx}{dz} = \pm \frac{b}{a \sin} \frac{z e^{a(z+z_0)}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 \sin^2} z^2 e^{2a(z+z_0)}}},$$

où  $z_0$  est l'ordonnée initiale du point mobile, positive vers le bas, et les axes ayant été transportés parallèlement à eux-mêmes de façon que pour  $t = 0$ ,  $x$  et  $z$  soient nuls (<sup>1</sup>).

En négligeant  $\eta$  à côté de  $z_0$ , M. Nau retrouve les lois de Gerstner et constate que chaque particule fluide décrit, avec une vitesse angulaire constante égale à  $b$ , un cercle de rayon  $\frac{a \sin}{b e^{az_0}}$ ; en seconde

(<sup>1</sup>) Voir *Thèse*, 1897 (*Formation et extinction du clapotis*, p. 16) et *Compte rendu du IV<sup>e</sup> Congrès scientifique international des catholiques à Fribourg*, août 1897 (*Recherche des trajectoires dans le mouvement régi par le potentiel des vitesses*

$$\phi = a e^{-az} \cos(ax - bt).$$



approximation, le mouvement est représenté par le système

$$\eta = \frac{h}{e^{az_0}} \sin \lambda, \quad \pm \xi = \frac{h}{e^{az_0}} (1 - \cos \lambda) - \frac{ah^2}{2e^{2az_0}} \sin \lambda \cos \lambda + \frac{ah^2}{2e^{2az_0}} \lambda, \quad \text{avec } h = \frac{b}{a\lambda}.$$

Faisant état de ces résultats, on remarque qu'au potentiel  $\varphi_{1m}$

$$\varphi_{1m} = A_m e^{-mz} \cos(mx_1 - t\sqrt{m})$$

correspond un cercle, et à  $\varphi_{2m}$

$$\varphi_{2m} = -A_m e^{-mz} \cos(mx_1 + t\sqrt{m})$$

correspond un deuxième cercle, symétrique du précédent par rapport à l'axe des  $x_1$ .

Revenons maintenant à l'expression du potentiel des vitesses

$$\varphi = \frac{St}{\pi r} \left\{ \cos \theta - \sum_0^{\infty} \left[ \frac{t^{4n+2} \cos(2n+2)\theta}{4n+3(2r)^{2n+1}} - \frac{t^{4n+4} \cos(2n+3)\theta}{4n+5(2r)^{2n+2}} \right] \right\}$$

et formons  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ; on voit de suite que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = & \frac{St}{\pi r} \left\{ -\sin \theta + \sum \left[ \frac{t^{4n+2}(2n+2) \sin(2n+2)\theta}{4n+3(2r)^{2n+1}} - \frac{t^{4n+4}(2n+3) \sin(2n+3)\theta}{4n+5(2r)^{2n+2}} \right] \right\} \frac{d\theta}{dx} \\ & - \frac{St}{\pi r^2} \left\{ \cos \theta - \sum \left[ \frac{t^{4n+2} \cos(2n+2)\theta}{4n+3(2r)^{2n+1}} - \frac{t^{4n+4} \cos(2n+3)\theta}{4n+5(2r)^{2n+2}} \right] \right\} \frac{dr}{dx} \\ & + \frac{St}{\pi r} \left\{ + \sum \left[ \frac{(2n+1)t^{4n+2} \cos(2n+2)\theta}{4n+3 \cdot 2^{2n+1} r^{2n+2}} - \frac{(2n+2)t^{4n+4} \cos(2n+3)\theta}{4n+5 \cdot 2^{2n+2} r^{2n+3}} \right] \right\} \frac{dr}{dx}. \end{aligned}$$

Tenant compte de ce que  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{r^2}$ ,  $\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$ , on voit après quelques réductions que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{St}{\pi r^2} \left\{ \sin 2\theta - \sum_0^{\infty} \left[ \left( \frac{t^2}{2r} \right)^{2n+1} \frac{(2n+2) \sin(2n+3)\theta}{4n+3} - \left( \frac{t^2}{2r} \right)^{2n+2} \frac{\sin(2n+4)\theta}{4n+5} \right] \right\},$$

et de même

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{St}{\pi r^2} \left\{ \cos 2\theta - \sum_0^{\infty} \left[ \left( \frac{t^2}{2r} \right)^{2n+1} \frac{(2n+2) \cos(2n+3)\theta}{4n+3} - \left( \frac{t^2}{2r} \right)^{2n+2} \frac{\cos(2n+4)\theta}{4n+5} \right] \right\}.$$

Or si l'on suppose la particule fluide suffisamment éloignée de la zone d'ébranlement, et que l'on soit au début du mouvement, on peut en première approximation, dans les expressions des composantes de la vitesse, ne considérer que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} &= - \frac{St}{\pi r^2} \sin 2\theta, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d\eta}{dt} &= - \frac{St}{\pi r^2} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

En ce cas l'équation caractéristique du mouvement est définie par

$$\frac{dx}{\sin 2\theta} = \frac{dz}{\cos 2\theta}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{2xz} = \frac{dz}{z^2 - x^2},$$

qui s'intègre immédiatement en posant  $x = \mu z$ ; en effet, l'équation précédente devient

$$d\mu \frac{(1 - \mu^2)}{\mu(1 + \mu^2)} = \frac{dz}{z} \quad \text{ou} \quad d\mu \left( \frac{1}{\mu} - \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \right) = \frac{dz}{z}.$$

On en déduit

$$\text{Log} \frac{1}{1 + \mu^2} = \text{Log} Cz$$

et

$$C(x^2 + z^2) = x,$$

équation représentative d'un cercle.

On trouve immédiatement la valeur de la constante C, en se rappelant qu'au temps  $t = 0$

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad z = z_0 + \eta_0.$$

Si nous supposons que le temps écoulé depuis l'origine du mouvement ne soit pas petit, de telle façon que l'on ne puisse plus négliger les puissances successives de  $\frac{t}{r}$ , on peut, en employant la méthode des approximations successives, intégrer les équations du mouvement.

La valeur de  $r^2$ , qui est égale à  $x_0^2 + z_0^2 + 2(\xi x_0 + \tau_1 z_0) + \xi^2 + \tau_1^2$ , peut, en ne faisant intervenir que les termes finis et les termes du premier ordre (si l'on admet que  $\xi$  et  $\tau_1$  sont petits devant  $x_0$  et  $z_0$ ), être représentée en première approximation par

$$r_0^2 + 2(\xi x_0 + \tau_1 z_0) \quad \text{ou} \quad r_0^2 \left[ 1 + \frac{2(\xi x_0 + \tau_1 z_0)}{r_0^2} \right].$$

Ceci étant, on résoudra d'abord le système

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{St}{\pi r^2} \left\{ \sin 2\theta - \sum_0^\infty \left[ \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^{2n+1} (2n+2) \sin(2n+3)\theta}{4n+3} - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^{2n+2} (2n+3) \sin(2n+1)\theta}{4n+5} \right] \right\}_{r_0, \theta_0}$$

ou

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{St}{\pi r^2} \{A(\theta_0, r_0, t^2)\},$$

$$\frac{d\tau_1}{dt} = -\frac{St}{\pi r^2} \{B(\theta_0, r_0, t^2)\};$$

en prenant

$$r^2 = r_0^2 \left[ 1 + \frac{2(\xi_1 x_0 + \tau_1 z_0)}{r_0^2} \right],$$

et en faisant le changement de variable  $t^2 = T$ , le système précédent se ramène au suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dT} &= -\frac{S}{\pi r_0^2 \left[ 1 + \frac{2(\xi_1 x_0 + \tau_1 z_0)}{r_0^2} \right]} \{A(\theta_0, r_0, T)\}, \\ \frac{d\tau_1}{dT} &= -\frac{S}{\pi r_0^2 \left[ 1 + \frac{2(\xi_1 x_0 + \tau_1 z_0)}{r_0^2} \right]} \{B(\theta_0, r_0, T)\}. \end{aligned}$$

La deuxième approximation sera obtenue en résolvant le système

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{dT} &= - \frac{S}{\pi r_0^2 \left[ 1 + \frac{2(\xi_2 x_0 + \tau_{12} z_0)}{r_0^2} \right]} A(\theta_1, r_1, T), \\ \frac{d\tau_{12}}{dT} &= - \frac{S}{\pi r_0^2 \left[ 1 + \frac{2(\xi_2 x_0 + \tau_{12} z_0)}{r_0^2} \right]} B(\theta_1, r_1, T) \end{aligned}$$

avec

$$\text{tang } \theta_1 = \frac{x_1}{z_1}, \quad (x_1 = x_0 + \xi_1, z_1 = z_0 + \tau_{11}) \quad \text{et} \quad r_1^2 = x_1^2 + z_1^2,$$

et ainsi de suite.

Montrons maintenant comment l'on peut résoudre l'un quelconque de ses systèmes ; posons à cet effet

$$\frac{2x_0}{r_0^2} = p, \quad \frac{2z_0}{r_0^2} = q \quad \text{et} \quad \frac{-S}{2\pi r_0^2} A = A_1, \quad \frac{-S}{2\pi r_0^2} B = B_1;$$

on voit alors que les équations s'écrivent :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dT} (1 + p\xi + q\tau) = A_1, \\ \frac{d\tau}{dT} (1 + p\xi + q\tau) = B_1. \end{cases}$$

En dérivant la première par rapport à T, on trouve

$$(2) \quad \xi''(1 + p\xi + q\tau) - \xi'(p\xi' + q\tau') = A_1'$$

cette dernière équation se transforme ainsi qu'il suit en tenant compte de (1) :

$$\xi'' \frac{A_1}{\xi'} + \xi'^2 \left[ p + q \frac{B_1}{A_1} \right] = A_1'$$

ou

$$A_1^2 \xi'' + \xi'^3 (pA_1 + qB_1) = A_1 A_1' \xi'.$$

Si l'on substitue à  $\xi$  la variable définie par  $\frac{1}{\xi'^2} = U$ , on remarque que l'équation précédente se réduit à

$$A_1^2 \frac{\xi''}{\xi'^3} + pA_1 + qB_1 = A_1 A_1' \frac{1}{\xi'^2}$$

ou

$$-\frac{1}{2} A_1^2 \frac{dU}{dT} + (\rho A_1 + q B_1) = A_1 A_1' U,$$

soit

$$\frac{dU}{dT} + 2 \frac{A_1'}{A_1} U - \frac{2(\rho A_1 + q B_1)}{A_1} = 0,$$

équation linéaire qui donne U.

On en déduit  $\xi = \int \frac{1}{\sqrt{U}} dT$  et  $\eta$ ; les constantes seront calculées en tenant compte de ce que, pour  $T = 0$ ,  $\xi = 0$  et  $\eta = \eta_0$ ; on n'a d'ailleurs intégré le premier système et les suivants qu'en supposant  $\xi_i$  et  $\eta_i$  petits devant  $x_0$  et  $z_0$ .

Or, lorsque le mouvement est sur le point de s'éteindre, on peut, en utilisant une forme du potentiel donnée par Poisson, correspondant à un développement suivant les puissances successives de  $\frac{1}{t}$  (où l'on fait  $g = 1$ ):

$$\varphi = \frac{2S}{\pi t} \left[ 1 + \frac{z}{t^2} + \frac{1^2}{t^4} (z^2 - r^2) \dots \right],$$

étudier la nature du mouvement.

En effet, on a

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{48Sx}{\pi t S},$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{4S}{\pi t^3};$$

l'intégration de ce système donne

$$z - z_0 = -\frac{2S}{\pi t^2}$$

et

$$\text{Log} \left[ \frac{x}{x_0} \right] = \frac{3\pi(z - z_0)^2}{S}.$$

car, pour  $t$  infini,  $x = x_0$  et  $z = z_0$ .

Or, en revenant aux notations habituelles  $x = x_0 + \xi$ ,  $z = z_0 + \eta$ ,

on remarque que l'équation précédente peut encore s'écrire

$$\frac{\xi}{x_0} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{x_0^2} + \dots = \frac{3\pi}{S} \eta^2,$$

c'est-à-dire en ne conservant que les termes du premier et du second ordre

$$\frac{3\pi\eta^2}{S} + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{x_0^2} - \frac{\xi}{x_0} = 0;$$

la courbe représentative du mouvement est une ellipse dont les dimensions sont finies.

