BEN-ZION LINFIELD

**Espace discret paramétrique et non paramétrique**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1925

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__58__1_0>

N° D'ORDRE : 24
Série E

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

### LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR


**M. Ben-Zion LINFIELD,**
Ancien Élève et Instructor de l'University of Virginia,
Doctor of Philosophy in Mathematics de Harvard University.


---

1^re^ **THÈSE.** — ESPACE DISCRET PARAMÉTRIQUE ET NON PARAMÉTRIQUE.
2^e^ **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

**Soutenues le 31 Juillet 1925, devant la Commission d'examen.**

---

MM. M. FRÉCHET, *Président.*
E. ESCLANGON, P. FLAMANT *Examinateurs.*


PARIS
GAUTHIER-VILLARS et C^ie^, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1925

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

---

**Doyen :** M. P.-Th. MULLER, Professeur de Chimie générale et de Chimie physique.

**Doyen honoraire :** M. E. BATAILLON.

| | MM. | |
|---|---|---|
| | X............................ | Mathématiques générales. |
| | G. VALIRON.................. | Calcul différentiel et intégral. |
| | H. VILLAT.................... | Mécanique. |
| | M. FRÉCHET................. | Analyse supérieure. |
| | E. ESCLANGON.............. | Astronomie. |
| | P. WEISS..................... | Physique générale. |
| | H. OLLIVIER................ | Physique générale. |
| | E. ROTHÉ.................... | Physique du Globe. |
| | L. HACKSPILL.............. | Chimie minérale. |
| | H. GAULT.................... | Chimie organique. |
| **Professeurs :** | E. TOPSENT.................. | Zoologie et Anatomie comparée. |
| | C. HOUARD.................. | Botanique. |
| | E. TERROINE............... | Physiologie générale. |
| | J. DE LAPPARENT........... | Pétrographie. |
| | M. GIGNOUX................ | Géologie et Paléontologie. |
| | E. CHATTON................ | Biologie générale. |
| | E. BAUER.................... | Physique mathématique. |
| | E. CORNEC................... | Chimie appliquée. |
| | H. LABROUSTE............. | Physique du Globe. |
| | G. RIBAUD................... | Physique générale. |
| | F. VLÈS...................... | Physique biologique. |

**Secrétaire :** M. E. BONTEMS.

A LA MÉMOIRE

DE MON PÈRE

A

MONSIEUR WILLIAM ECHOLS

Hommage de profonde reconnaissance.

# PREMIÈRE THÈSE

# ESPACE DISCRET PARAMÉTRIQUE
## ET NON PARAMÉTRIQUE [1]

## INTRODUCTION.

Il y a au moins trois façons d'aborder l'étude des espaces discrets; chacune a son propre mérite et m'a servi à différents moments. Tout d'abord, les éléments (points) de l'espace euclidien, de même que ceux des espaces non euclidiens comme celui de Riemann ou de Lobatchewsky, forment un continuum et par suite il en existe un nombre infini dans le voisinage d'un élément quelconque de l'espace, quelque restreint que soit ce voisinage. Ils ne peuvent donc pas correspondre à des éléments concrets du domaine de l'expérience comme les molécules, atomes ou électrons puisque l'on admet que ces éléments ne forment pas un continuum et existent en nombre infini dans toute portion finie de l'espace. Nous nous proposons d'étudier un espace (que nous appellerons *espace discret*) formé d'une quantité dénombrable d'éléments (particules) tel qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments *touchant* un élément arbitraire, et nous ferons cette étude en prenant pour base la relation de *contact*. Notre but est, non pas de supplanter une géométrie existante, mais

(1) Des parties de cet ouvrage ont été présentées à l'*American Mathematical Society* le 28 octobre 1922 et le 27 décembre 1922 sous les titres *Particle Geometry* et *A contribution to particle geometry*. Elles constituent la thèse soutenue par l'auteur à l'Harvard University.

de voir où pourrait nous conduire l'étude d'un espace si radicalement différent des espaces familiers, où entreraient les plus importants concepts des mathématiques, et où s'en appliqueraient les méthodes. S'il fallait nous reporter à une image géométrique ou faire appel à l'intuition pour la vérification des assertions que nous ferons sur les espaces discrets, l'étude de ces espaces serait lente et fatigante. Car, même dans l'étude de la Géométrie ou de la Mécanique, on exprime généralement ses assertions par des formules algébriques ou vectorielles, et l'on fait les déductions grâce à la connaissance que l'on a des règles du calcul algébrique ou du calcul vectoriel. Si ces règles de calcul qui nous sont familières s'appliquaient aussi à l'étude des espaces discrets nous pourrions nous estimer heureux. Malheureusement, ce n'est pas le cas, et nous sommes forcés d'introduire deux nouvelles opérations $P \mid Q$ et $P / Q$ qui, jointes aux opérations *addition*, *soustraction* et *multiplication* de l'*Algèbre de la logique* (¹) convenablement étendues aux espaces, formeront un ensemble de cinq opérations semblable à celui de cinq opérations addition, soustraction, multiplication, division et élévation aux puissances de l'Algèbre des nombres réels et imaginaires. La signification intuitive des symboles $P \mid Q$ et $P / Q$ toutes les fois que P et Q sont des espaces discrets est la suivante : $P \mid Q$ désigne tous les éléments de P qui ne sont pas en même temps éléments de Q et dont chacun touche *au moins* un élément de Q ; $P / Q$ désigne tous les éléments de P qui ne sont pas en même temps éléments de Q et dont chacun touche *tous* les éléments de Q. Le premier est défini *implicitement* comme une opération binaire continue (²) satisfaisant aux six conditions suivantes :

Quand P, Q et R sont des espaces discrets, $P \mid Q$ est un espace

(¹) Pour le lecteur à qui ces trois opérations de l'*Algèbre de la logique* ne seraient pas familières, je les ai traitées dans l'Appendice à titre de renseignement. L'usage explicite de la soustraction m'a permis de définir cette opération d'une façon plus simple qu'il a été fait jusqu'à présent et de démontrer les théorèmes qui s'y rattachent dans un ordre plus naturel. Nous indiquons dans l'Appendice des références aux livres qui traitent de cette Algèbre.

(²) On trouvera dans l'Appendice la définition d'une opération *continue* ainsi que la définition de la *limite* d'une *suite d'espaces* dont elle dépend. Cependant, si nous nous bornons à des espaces d'un nombre fini d'éléments il n'est pas nécessaire de spécifier que les opérations envisagées sont continues. Quand P et Q sont des espaces, $P < Q$ veut dire P est contenu dans Q (voir l'Appendice).

discret, et

(1) $P \mid Q < P - PQ,$

(2) $P \mid (Q + R) < P \mid Q + P \mid R,$

(3) si $R < P \mid Q$, on a $R < R \mid Q$;

(4) si $R < P$, on a $R \mid Q < P \mid Q$;

(5) si $R < Q$, on a $P \mid R < P \mid Q + Q$;

(6) si $P \mid Q \equiv O$ et $PQ \equiv O$, on a $Q \mid P \equiv O$ (¹),

d'où nous tirons :

(*a*) $(P \mid Q) \mid Q \equiv (P \mid Q)\, P \equiv (P - PQ) \mid Q \equiv P \mid Q;$

(*b*) $(P \mid Q)\, Q \equiv P \mid P \equiv O \mid P \equiv O;$

(*c*) $(P + Q) \mid R \equiv P \mid R + Q \mid R;$

(*d*) $(P - Q) \mid R \equiv P \mid R - Q \mid R;$

(*e*) $(PQ) \mid R \equiv (P \mid R)(Q \mid R) \equiv (Q \mid R)\, P$ (²);

(*f*) $(P \mid Q)(P \mid R) < P \mid (Q + R);$

(*g*) si $P < Q < R$, on a $(R \mid P)\, Q \equiv Q \mid P;$

(*h*) $P \mid (Q + R) \equiv (P - PR) \mid Q + (P - PQ) \mid R$, etc.

Nous plaçant à ce point de vue nous donnons les définitions (explicites) suivantes : (*i*) deux *éléments* A et B d'un espace discret sont ou ne sont pas *conjugués* (³) suivant que $A \mid B \not\equiv 0$ ou $A \mid B \equiv 0$;

---

(¹) Le symbole O représentera, soit un *espace vide*, soit le nombre zéro suivant que, dans l'autre membre, figurera un espace ou un nombre.

(²) Cf. $(pq)^r = p^r q^r$ et $(pq)/r = (q/r)p$ où $p$, $q$ et $r$ sont des nombres.

(³) Nous emploierons l'expression très brève « éléments conjugués » au lieu de l'expression plus longue « éléments qui se touchent », non seulement à cause de la rapidité mais aussi parce qu'il n'est pas besoin que les éléments des espaces considérés soient des corps solides (comme ceux qui ont suggéré cette étude). Ils peuvent être, par exemple, des fonctions d'une certaine classe (ou des nombres d'un certain champ), où, si P et Q sont des ensembles de fonctions (ou de nombres) de cette classe (ou de ce champ), $P \mid Q$ désigne un sous-ensemble de $P - PQ$ qui satisfait aux six conditions ci-dessus. Pour de telles applications, l'expression choisie convient certainement davantage que l'autre que nous aurions aussi pu employer On trouvera au Chapitre V une application où les éléments sont des régions (dans un plan) aux frontières convexes (*voir* 15 *e*). Parmi les nombreuses assertions impliquées par la phrase « A est un *élément* (point) de l'espace S », il est seulement nécessaire, à notre connaissance, d'en prendre une seule comme définition : toutes les autres s'en déduisent. *Voir* dans l'Appendice la définition $C_{10}$ et les théorèmes suivants. Cf. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band $III_1$, Heft 1, AB p. 16-17.

(*ii*) P/Q est le sous-espace de P — PQ contenant tous les éléments conjugués chacun à *tous* les éléments de Q ; et nous *démontrons* (quand le second membre, Q ici, est dénombrable) que (*iii*) P⌋Q est le sous-espace de P — PQ qui contient tous les éléments conjugués chacun à au moins *un* élément de Q, et nous *démontrons* en particulier que

| | |
|---|---|
| (1°) | $P/Q < P - PQ$ ; |
| (2°) | $(P/Q)(P/R) < P/(Q + R)$ ; |
| (3°) | si $R < P/Q$, on a $R < R/Q$ ; |
| (4°) | si $R < P$, on a $R/Q < P/Q$ ; |
| (5°) | si $R < Q$, on a $P/Q < P/R$ [1] ; |
| (6°) | si $P/Q \equiv 0$ et $PQ \equiv 0$, on a $Q/P \equiv 0$. |

A partir de là, le développement de la théorie des espaces discrets qui consiste à les classer et à en étudier les propriétés est le même pour chacun des trois moyens d'approche.

Un second moyen d'aborder l'étude des espaces discrets, qui ne diffère que légèrement de celui que nous venons d'exposer, consiste à définir implicitement l'opération P/Q comme une opération binaire continue satisfaisant aux conditions 1°, 2°, ..., 6° ci-dessus. De ces six conditions on déduit sans difficulté que les six identités ci-dessus (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), (*g*) sont encore vraies si la *barre verticale* y est remplacée partout par la *barre inclinée* et que :

| | |
|---|---|
| (*f*°) | $(P/Q)(P/R) \equiv P/(Q + R) \equiv (P/Q)/R$ [2] ; |
| (*h*°) | $P/Q < P\vert Q$ ; et, si $\vert Q\vert = 1$, on a : $P/Q \equiv P\vert Q$. |

Nous plaçant à ce point de vue, nous donnons les définitions suivantes : (*i*) deux éléments A et B d'un espace discret sont ou ne

---

(1) Cette condition fait particulièrement songer à la *division*. Il faut remarquer que, à cause de (*f*) et de l'identité (*f*°) et de la définition (*iii*), qui vont suivre, cette condition et la condition (5) ci-dessus sont *essentiellement* les seules conditions qui différentient l'opération P/Q de l'opération P | Q.

(2) Cf. $p^q p^r = p^{q+r}$, $p^{qr} = (p^q)^r$ et $\log_p qr = \log_p q + \log_p r$. Les trois conditions (lois) $(pq)^r = p^r q^r$, $p^q p^r = p^{q+r}$ et $p^{qr} = (p^q)^r$ sont les conditions qui définissent les puissances en Algèbre. L'opération P/Q satisfait aux deux premières, mais au lieu de satisfaire à la troisième elle satisfait à $p^q p^r = p^{q+r}$. Elle satisfait cependant aux lois de distributivité du logarithme que nous venons de citer.

sont pas *conjugués* selon que $A/B \not\equiv 0$ ou $A/B \equiv 0$; (*ii*) $P|Q$ est le sous-espace de $P - PQ$ contenant tous les éléments conjugués chacun à au moins un élément de Q; et nous démontrons (quand le second membre est dénombrable) que (*iii*) $P/R$ est le sous-espace de $P - PQ$ contenant tous les éléments conjugués chacun à tous les éléments de Q, et nous *démontrons*, en particulier, les six assertions ci-dessus qui ont défini l'opération $P|Q$. Nous allons maintenant parler du troisième et dernier moyen d'approche.

Le concept « espace $n$-aire » ($n > 1$), c'est-à-dire un espace S avec une fonction [1] $S(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ qui fait correspondre un nombre à chaque ensemble de $n$ éléments (points) de S et qui satisfait à la condition

$$(1) \qquad S(X_1, X_2) + S(X_2, X_1) = 0,$$

si $n = 2$ et à diverses autres conditions si $n > 2$, un tel concept est une union naturelle des concepts d'espace et de fonction et est à la base de plusieurs théories mathématiques. Les plans euclidiens et non euclidiens, les espaces à trois ou à $n$ dimensions peuvent être définis comme des espaces binaires satisfaisant à certaines conditions qui viennent s'ajouter à celle que nous venons de donner. Les auteurs [2] qui ont employé la relation d'*entre* ou d'*ordre* en développant d'un point de vue moderne la géométrie euclidienne ou projective se sont servi, dans les assertions (axiomes, postulats, etc.) qui impliquent la définition du terme *droite*, de l'équivalent de l'espace *ternaire* S dont la fonction $S(X_1, X_2, X_3)$ satisfait, à la place de la condition (1) ci-dessus, aux conditions :

(1′) Si $S(X_1, X_2, X_3) = 0$, alors $X_1 = X_2$, et réciproquement;

(1″) Si $S(X_1, X_2, X_3) > 0$, alors :

(*a*) $S(X_3, X_2, X_1) > 0$; (*b*) $S(X_2, X_1, X_3) < 0$ et (*c*) $S(X_1, X_3, X_2) < 0$;

(1‴) A trois éléments $X_1$, $X_2$, $X_3$ quelconques de S il correspond un élément $X_j$ tel que $S(X_i, X_j, X_k) > 0$ $(i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3)$.

---

[1] Nous réservons le mot *fonctionnelle* introduit par M. Hadamard à la fonction d'un espace $n$-aire dans lequel les éléments sont *définis* comme des fonctions, des courbes, etc.

[2] *Encyklopädie, loc. cit.*, p. 23. *Voir* en particulier O. VEBLEN. *A system of American axioms for geometry, Transactions of the Mathematical Society*, vol. 5, 1904, p. 344. A propos des *espaces discrets* on pourra aussi consulter

Les auteurs [1], qui ont employé la relation de *séparation* dans les assertions qui impliquent la définition du terme droite, se sont servi (quoique, encore, sans l'expliciter en en donnant le nom ou la notation) de l'équivalent de l'espace *quaternaire* S dont la fonction $S(X_1, X_2, X_3, X_4)$ satisfait, au lieu de la condition (1), aux conditions :

(1′) Si $S(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$, alors on a, soit :

$$X_1 = X_3, \text{ soit } X_2 = X_4, \text{ soit } X_1 = X_3, \text{ et } X_2 = X_4, \text{ et réciproquement;}$$

(1″) Si $S(X_1, X_2, X_3, X_4) < 0$ [2], alors :

$$(a)\ S(X_2, X_1, X_3, X_4) < 0; \quad (b)\ S(X_3, X_4, X_1, X_2) < 0;$$
$$(c)\ S(X_1, X_3, X_2, X_4) > 0;$$

(1‴) A quatre éléments distincts $X_1, X_2, X_3, X_4$ quelconques de S il correspond au moins une permutation telle que

$$S(X_i, X_j, X_k, X_l) < 0 \qquad (i \neq j \neq k \neq l = 1, 2, 3, 4);$$

($1^{\text{IV}}$) Si $X_1, X_2, X_3, X_4$ sont quatre éléments de S qui satisfont à la condition $S(X_1, X_2, X_3, X_4) < 0$ et si $X_5$ est un élément de S distinct de ces quatre éléments, alors, soit $S(X_1, X_2, X_3, X_5) < 0$ et $S(X_1, X_2, X_4, X_5) > 0$, soit $S(X_1, X_2, X_3, X_5) > 0$ et $S(X_1, X_2, X_4, X_5) < 0$.

Maintenant, dans notre troisième moyen d'aborder l'étude des espaces discrets nous donnons les définitions suivantes : (*i*) deux éléments A et B d'un espace *binaire* S sont ou non *conjugués* selon que $S(A, B) \neq 0$ ou $S(A, B) = 0$ [3], (*ii*) un espace *discret* est un espace binaire dans lequel les éléments conjugués ou non conjugués sont définis comme on vient de le faire, et nous définissons P/Q

---

MM. Veblen et Bussey, *Finite projective geometries*, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 7, 1908, p. 241.

(1) *Encyklopädie*, *loc. cit.*, p. 63. *Voir* en particulier J. L. Coolidge, *The elements of non Euclidean Geometry*, Oxford Press.

(2) Le nombre peut être interprété comme le rapport anharmonique des quatre points $X_1, X_2, X_3, X_4$. Les nombres que fait correspondre la fonction de l'espace ternaire de Veblen ont aussi une interprétation géométrique simple.

(3) Il se peut que, dans un espace binaire, $S(A, B)$ soit égale à zéro, les éléments A et B étant cependant distincts. Un espace (E), d'abord défini par M. Fréchet, est un espace S binaire satisfaisant à la condition $S(A, B) \neq 0$ pour chaque couple d'éléments distincts de S.

et P | Q, au moyen des éléments conjugués comme nous les avons définis dans les premier et deuxième paragraphes. Nous démontrons alors que P | Q et P /Q satisfont aux conditions qui les définissaient dans les premier et deuxième paragraphes; et, ayant prouvé cela, nous avons montré que les conclusions que nous pouvions tirer des définitions dans le premier et le second paragraphe, au moins quand les espaces considérés sont dénombrables ([1]), sont identiques à celles que l'on peut tirer des définitions que nous venons maintenant de poser.

Quel que soit le procédé que nous choisissions pour définir un espace discret, nous pouvons définir un espace discret S *connexe* par la condition que, R étant un sous-espace quelconque de S tel que $S - R \not\leq 0$, on ait $S | R \not\leq 0$; l'interprétation physique d'espace discret connexe étant qu'il ne peut être divisé en deux parties P et Q telles qu'aucune particule de P ne touche une particule de Q, et inversement. Ou bien nous pourrions encore spécifier qu'un espace discret S est *connexe* par la condition qu'à tout couple de deux éléments A et B de S il corresponde un *arc discret* ayant sa signification évidente (*voir* $1_b$) ([2]), l'interprétation physique de cette définition d'un espace connexe discret étant évidemment que l'on peut aller à travers cet espace d'une *particule* quelconque à une autre particule sans avoir à faire des sauts ([3]). Comme on montre aisément

---

([1]) Pour qu'il en soit de même pour tous les espaces *ordonnables*, il faut modifier un peu la définition d'une opération continue, (*voir* $C_1)_5$.

([2]) Un nombre affecté d'un indice inférieur désigne une définition. Ainsi $1_b$ désigne la définition $1_b$. Un nombre affecté d'un indice supérieur désigne un théorème (ou un corollaire). Ainsi $1^a$ désigne le théorème $1^a$ et $1^a_2$ désigne le théorème $1^a$ corollaire 2. Un nombre sans indice désigne un lemme.

([3]) Comme les expressions que nous introduisons sont définies avec *brièveté* et *rigueur* au moyen des opérations P | Q et P/Q, nous pouvons adopter une certaine liberté de langage quand nous en donnons une interprétation physique, ce que nous n'aurions pas pu faire sans cela. Ces définitions d'un espace discret connexe sont *analogues* respectivement aux définitions d'un *continuum* par Jordan et Cantor. Cependant, bien que ces deux définitions d'un continuum ne soient pas équivalentes, les deux définitions que nous avons données d'un espace discret connexe le sont (*voir* $1^a$). Si (quand P et Q sont des espaces *binaires*) nous désignons par P | Q le sous-espace de $P - PQ$ dont chaque point est un *point d'accumulation* de Q dans $P + Q$, nous pouvons énoncer la définition d'un continuum par Jordan de la façon suivante : un espace (non vide) S est *un continuum* (*est connexe*) si pour tout sous-espace (non vide) R de S, $S - R \not\leq 0$, on a : $(S - R) | R + R | (S - R) \not\leq 0$. Il est facile de démontrer que si l'on prend cet énoncé pour la définition d'un que ces deux définitions sont équivalentes il n'importe pas particulièrement de savoir laquelle des deux assertions nous choisirons comme définition et laquelle nous démontrerons comme théorème. Ayant défini un espace discret *connexe* nous pouvons maintenant définir un espace discret de *connexité m* comme un espace formé de $m$ parties connexes et telles que la somme de deux quelconques d'entre elles ne le soit pas. Ce concept familier de la connexité, joint à l'opération $P/Q$ et au concept du nombre de dimensions, nous permettra de faire plus loin (Chapitre II) une large classification des espaces discrets, seule classification existante de ces espaces, à notre connaissance. Nous emploierons l'équation $C(S) = m$ pour spécifier que la connexité de l'espace discret S est $m$ [1].

Une transformation qui établit une correspondance biunivoque entre les éléments de deux espaces discrets S et S′ est appelée *transformation équivalence* si elle fait correspondre à deux éléments conjugués de S deux éléments conjugués de S′ et réciproquement (*voir* $2_a$). Deux espaces discrets sont *équivalents* s'ils possèdent une telle transformation. On peut dire, en gros, que, sans tenir compte de la nature des éléments ni de la nature de la *conjugaison*, deux espaces discrets équivalents sont essentiellement les mêmes et peuvent être superposés. Chacun sait que deux plans euclidiens (ou des droites, ou des espaces à trois dimensions) sont congruents (équivalents, égaux), et qu'ils peuvent être superposés d'une infinité de façons. Le même fait n'est presque jamais vrai pour deux espaces discrets équivalents pas plus que pour les espaces binaires, ternaires ou quaternaires généraux. En fait, nous pouvons aisément construire des espaces équivalents d'un nombre quelconque d'éléments qui soient équivalents d'une seule manière (*voir* $23^a$). Le nombre des transformations équivalence qui transforment un espace discret en lui-même est ce que l'on appelle *l'ordre* de cet espace, et nous pouvons construire des espaces discrets dont l'ordre soit égal à un entier positif quelconque donné à l'avance (*voir* $24^a$). Nous montrerons que l'ensemble de ces transformations des espaces discrets forment

---

*espace discret connexe*, elle est équivalente aux deux définitions déjà données. *Un espace de n-cellule* (*voir* 5*b*) *connexe* comme un espace *binaire* est aussi *connexe* comme un espace *discret*, et réciproquement.

(1) Nous ne nous occupons dans ce mémoire que d'espaces discrets de connexité finie.

un groupe (*voir* $10^a$) et par suite, si $m$ est *le degré* d'un espace discret fini S (si $m$ est le nombre des éléments que S contient), *l'ordre* de S est un facteur de $m!$ [1]. Nous nous servirons de l'équation $S = S'$ pour indiquer que les espaces discrets S et S' sont *équivalents*.

Nous dirons par définition qu'un espace discret est à *n dimensions* s'il contient $n+1$ éléments et pas davantage, tels que deux quelconques d'entre eux soient conjugués (*voir* $3_a$). Bien que cette définition puisse paraître à première vue un peu arbitraire, je pense que la suite la justifiera pleinement. Je rappelle ici seulement que le nombre *maximum* de points qui sont à la même distance l'un de l'autre est de 3 pour le *plan* euclidien, de 4 pour l'espace euclidien à trois dimensions, de $n+1$ pour l'espace euclidien à $n$ dimensions. Pour que deux espaces discrets soient équivalents, il faut que leurs *degrés*, *ordres*, *connexités* et nombre de *dimensions* soient respectivement égaux. Nous emploierons le symbole $S'_n$ pour désigner un ensemble de $n+1$ éléments tels que deux quelconques d'entre eux soient conjugués. L'importance de l'ensemble $S'_n$ tient à ce qu'il peut être défini aussi aisément au moyen de la seconde opération que nous avons introduite, et d'au moins deux façons, à savoir : ($a$) un ensemble discret S de degré $n+1$ est un $S'_n$ si, pour tout sous-ensemble R de S on a $S/(S-R) \equiv R$; ($b$) un ensemble discret S de degré $n+1$ est un $S'_n$ si, pour tout espace discret T contenant S et pour tout sous-ensemble R de S, on a $R < T/(S-R)$. Il est clair qu'un espace discret à $n$ dimensions contient un $S'_n$ et non un $S'_m$ $(m > n)$.

Nous allons étudier une généralisation des espaces discrets : l'espace discret *paramétrique* et une *spécialisation*, *l'hyperespace discret*.

Les espaces binaires *paramétriques* se divisent naturellement en deux espèces : ceux dans lesquels le nombre des éléments reste constant et où varient seules les distances mutuelles des éléments, et ceux dans lesquels le nombre des éléments ne reste pas constant. Les premiers sont étudiés tout au long en Mécanique et nous n'en parlerons

---

[1] Le terme *ordre* (d'un espace ou d'une transformation) et le terme *degré* sont empruntés à la théorie des Substitutions finies (groupes).

pas ici. Les derniers ont à peine été étudiés et nous leur réservons le Chapitre V.

Les *hyperespaces* sont des espaces dont les éléments ne sont pas arbitraires, mais sont *spécifiés* comme nombres, fonctions ou espaces, et on n'a commencé que récemment à les étudier. Les points du plan euclidien, de l'espace euclidien à 3 ou $n$ dimensions sont arbitraires; ils peuvent être des montagnes ou des microbes, cela importe peu en ce qui concerne la démonstration des théorèmes après que les termes figurant dans les énoncés ont été proprement définis; par suite les espaces euclidiens ne sont pas des hyperespaces. Avant que Plüker ait commencé l'étude de la *géométrie réglée* les hyperespaces, dont les éléments sont des *espaces* (droites dans le cas de Plüker), n'entraient pas effectivement dans les mathématiques, mais depuis lors s'est développée l'étude des hyperespaces dont les éléments sont des droites orientées, des cercles, des cercles orientés, des sphères, etc. (¹). De nombreux auteurs qui traitent de l'*Analysis situs* considèrent cet espace comme un hyperespace dont les éléments sont des ensembles de $n$ nombres, et l'on a récemment introduit dans l'étude du « fonction space » (un hyperespace dont les éléments sont des fonctions) des concepts géométriques comme la droite, le plan, l'orthogonalité des droites, etc.

Pour montrer comment les concepts de l'hyperespace peuvent être étendus à l'étude des espaces discrets, nous étudierons ici des hyperespaces discrets de deux sortes : ceux dont les éléments sont des sous-espaces d'un espace discret arbitraire, et ceux dont les éléments sont des *cellules fermées* à $n$ dimensions. Parmi les hyperespaces de la première sorte associés à un espace discret arbitraire S, nous étudierons : (*i*) l'hyperespace T(S), où T est une transformation *équivalence* de S; (*ii*) les hyperespaces complémentaires de T(S), et (*iii*) les hyperespaces $D^m$(S) (où $m$ est un entier positif quelconque au plus égal au nombre de dimensions de S), que nous appelons *le dérivé mième* de S (*voir* $2_c$, $2_d$, $5_a$). Dans le premier, T(S), les éléments sont les ensembles de S *cycliques* par rapport à la transformation T. Dans les seconds, les hyperespaces complémentaires de T(S), les éléments sont aussi déterminés par la transformation T.

(¹) Voir *The Circle and the Sphere*, par l'auteur des *Elements of non Euclidean Geometry* déjà cité.

Dans le premier, aussi bien que dans les seconds, deux éléments P et Q sont conjugués si, considérés comme des sous-espaces de S, ils satisfont à la condition $P \mid Q \not\equiv 0$. Dans le dernier, $D^m(S)$, les éléments sont les ensembles $S'_m$ contenus dans S et la condition pour que deux d'entre eux P et Q soient conjugués est : soit ($a$) que la somme $P + Q$, *considérée comme un sous-espace de* S (¹), soit un $S'_{m+1}$ ; soit ($b$) que le produit PQ, considéré comme un *sous-espace* de S, soit un $S'_{m-1}$. Il y a donc ainsi deux types d'hyperespaces $D^m(S)$ associés à un espace discret arbitraire S. Dans l'un, tous les couples d'éléments conjugués satisfont à la condition ($a$), dans l'autre ils satisfont à la condition ($b$). Ici nous nous intéresserons surtout aux hyperespaces $D^m(S)$. J'indique cependant en passant que l'étude des hyperespaces complémentaires de l'hyperespace T(S) est, à un certain point de vue, analogue à l'étude des droites d'un plan sous une transformation projective, et sera vraisemblablement poursuivie comme telle plus tard, pour des espaces discrets particuliers. Parmi les hyperespaces de la seconde sorte, ceux dont les éléments sont des *cellules fermées* à $n$ dimensions, nous n'étudierons que ceux que nous appelons *surfaces* et qui *sont* des surfaces à $n$ dimensions, du moins au point de vue de l'*Analysis situs*.

Une *cellule fermée* à $n$ *dimensions* (*closed n-cell* en anglais) (²) est ordinairement définie, dans les ouvrages d'*Analysis situs*, comme un sous-espace (d'un espace binaire) homéomorphe à une sphère fermée S à $n$ dimensions, et les points de cette cellule correspondant aux points sur la frontière de S constituent ce qu'on appelle la frontière de cette cellule. Nous avons pensé, cependant, qu'il serait plus dans l'esprit de cet ouvrage, d'avoir une définition d'une cellule fermée à $n$ dimensions basée sur celles de ses propriétés (³) dont il sera fait directement usage dans la démonstration de nos théorèmes. C'est pourquoi nous considérerons une cellule fermée à $n$ dimensions comme un espace binaire *connexe*, *fermé*, satisfaisant aux huit con-

(¹) Par somme (ou produit ou différence, etc.) de deux éléments d'un *hyperespace* nous désignerons toujours, même quand nous ne l'indiquerons pas explicitement comme ici, la somme ou le produit (ou la différence) des sous-espaces que ces deux éléments représentent.

(²) Nous emploierons aussi dans nos démontrastions le mot *n-cellule* à la place de l'expression « cellule à $n$ dimensions ».

(³) Les propriétés qu'implique la suite d'axiomes contenus dans l'*Encyklopädie*, *loc. cit.*, p. 168, ne suffisent pas pour le but que nous poursuivons.

ditions suivantes ($A'$ et $B'$ désignant les frontières [1] des cellules A et B) [2] :

1° Si le produit AB (tous les points communs à A et B) de deux cellules fermées A et B à $n$ dimensions ($n = 1, 2, \ldots$) est une cellule à $n - 1$ dimensions et que $AB \equiv A'B'$ : ($i$) $A + B$ est une cellule à $n$ dimensions fermée; ($ii$) $(AB)' \equiv (A + B)'AB$, et ($iii$) $A' + B' \equiv (A + B)' + AB$, où $(A + B)'$ et $(AB)'$ sont respectivement les frontières des cellules $A + B$ et AB, et où une cellule à zéro dimension est un point et n'a pas de frontière.

2° Si les cellules à $n$ dimensions A et B sont situées sur la frontière d'une cellule à $n + 1$ dimensions et si le produit AB est une cellule à $n - 1$ dimensions, on a $AB \equiv A'B'$.

3° Soient $a$ un point quelconque d'une cellule fermée, A et $b$ un point quelconque de $A - A'$ (distinct de $a$); alors, selon que $a$ est contenu ou non dans $A'$ il existe dans A une cellule B à 1 dimension contenant $a$ et $b$ et telle que $BA' \equiv a$ ou $BA' \equiv 0$ [3].

4° A toute cellule fermée A à $n - 1$ dimensions, située sur la frontière $C'$ d'une cellule C à $n$ dimensions, il correspond une cellule B, également à $n - 1$ dimensions, telle que : ($i$) $A + B \equiv C'$ et ($ii$) $AB \equiv A' \equiv B'$ [4].

5° A tout couple de cellules à $n - 2$ dimensions A et B satisfaisant

---

(1) La *frontière* d'une cellule fermée A est, bien entendu, un sous-espace de A déterminé par A d'une seule façon. Une *cellule ouverte* est une cellule fermée sans sa frontière. Le terme *cellule*, quand il n'est pas suivi de l'un des mots fermée ou ouverte, désigne soit une cellule fermée, soit une cellule ouverte.

(2) Pour la définition d'un espace binaire *connexe*, *voir* la note relative à la seconde définition d'un espace discret connexe. Un espace binaire S est *fermé* si toute suite convergente dans S a un *point limite* et *un seul*. Parmi les propriétés d'une suite convergente nous ferons seulement usage (*voir* 12*c*) de celle qui est presque identique à la condition ($ii$) dans la définition d'une (L) classe donnée par M. Fréchet dans sa Thèse, Paris, 1906, à savoir : Si une suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est convergente, toute suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre : $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots$ est convergente; et, si A est la limite de la première suite, c'est aussi limite de la seconde.

(3) Par suite, puisque toute cellule est connexe, à tout point P situé sur la frontiere $A'$ d'une cellule fermée A il correspond (au moins) une suite convergente $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ de points dans $A - A'$ telle que P soit le point limite de cette suite. De même, $A - A'$ est connexe.

(4) Par suite, la frontière d'une cellule fermée à 1 dimension est un couple de points (*voir* 8°). Et, à tout couple de points contenus dans une cellule fermée ou ouverte il correspond une cellule à 1 dimension dont la frontière est ce couple et qui est contenue dans la première cellule.

à $AB \equiv A' \equiv B'$ et contenues dans la frontière $A'_1$ d'une cellule fermée $A_1$ à $n$ dimensions ($n \geqq 2$) il correspond une cellule fermée $B_1$ à $n - 1$ dimensions contenue dans $A_1$ telle que $A'_1 B_1 \equiv B'_1 \equiv A + B$.

6° A toute cellule fermée à $n - 1$ dimensions B contenue dans une cellule fermée A à $n$ dimensions et satisfaisant à $A'B \equiv B'$, il correspond deux cellules fermées $A_1$ et $B_1$ à $n$ dimensions telles que : ($i$) $A_1 + B_1 \equiv A$ et ($ii$) $A_1 B_1 \equiv A'_1 B'_1 \equiv B$ (¹).

7° Si les frontières de deux cellules fermées A et B sont identiques et que A est contenue dans B, on a $A \equiv B$ (²).

8° Toute cellule à $n$ dimensions ($n \geqq 1$) contient au moins une cellule à $n - 1$ dimensions dans sa frontière.

De cette définition (implicite) d'une cellule à $n$ dimensions il résulte immédiatement que, pour les deux cellules à $n$ dimensions A et B de la condition 1°,

$$A' - A'B' \equiv (A + B)' - A'B' - B' \equiv (A + B)' - (A + B)'B' \equiv (A + B)'A' - (AB)'$$

et que $A' - A'B'$ est une cellule ouverte à $n - 1$ dimensions dont la frontière est $(AB)'$ (4°). Cela nous permet finalement de prouver que toute *surface* (*voir* $5_b$) connexe (*considérée comme un espace discret dont les éléments sont les cellules et dans lequel deux éléments sont conjugués s'ils ont une cellule à $n - 1$ dimensions en commun*) est un *espace normal* (discret) $S_n$ de classe 2 (*voir* $4_b$, $11^c$, $12^c$, $13^c$) (³).

---

(¹) Par suite, puisque A est fermée, $A - B$ est de connexité 2. *Voir* plus loin la définition d'un plan. Les définitions d'un espace binaire de connexité $m$ et d'un espace discret de connexité $m$ sont littéralement les mêmes. Seulement le mot connexe est pris avec un sens différent dans les deux cas. Plusieurs des théorèmes sur les espaces connexes, binaires ou discrets peuvent être énoncés (et aussi démontrés) de la même façon. Par exemple, si les espaces *connexes* (binaires ou discrets) P et Q satisfont soit à $PQ \not\equiv 0$, soit à $P \mid Q \not\equiv 0$, l'espace $P + Q$ est *connexe*, etc.

(²) Par suite, à toute couple de points $a$ et $b$ contenus dans une cellule A à 1 dimension, il correspond *une seule* cellule $(ab)$ dans A également à 1 dimension dont la frontière est $a + b$. Et, pour trois points $a$, $b$, $c$ quelconques de A on a $a(bc) + b(ca) + c(ab) \not\equiv 0$. Les théorèmes « d'ordre » pour les points sur un *segment* ou une *droite* sont donc les mêmes points sur une cellule de 1 dimension. *Voir*, plus loin, la définition d'un segment et d'une droite.

(³) En désignant par $S \mid A^d$ le sous-espace de l'espace *binaire* S dont chaque point est à une distance $d$ du point A, nous pouvons énoncer la définition de l'ana-

Il est clair, d'après le dernier théorème que toute caractéristique (*invariant*) d'une *surface* $W_n$, définie uniquement en fonction des cellules à $n$ dimensions de la surface, est nécessairement une caractéristique des espaces normaux discrets $S_n$ de classe 2. Et, proposition converse, toute caractéristique d'un espace normal $S_n$ de classe 2 *pour lequel il existe une surface* $W_n$ *équivalente à ce* $S_n$ est une caractéristique (sans être nécessairement un invariant) de cette surface. On peut montrer, sans grande difficulté, pour plusieurs surfaces à deux dimensions, sans frontières (Randen) [1], que si l'on trace sur elles un certain nombre de courbes, elles peuvent être découpées en cellules à 2 dimensions de façon à former des *surfaces* $W_2$. Il en est indubitablement de même pour toutes telles surfaces à 2 dimensions et peut-être aussi pour toutes telles surfaces à $n$ dimensions. Nous montrerons en détail, et avec quelque difficulté, qu'il correspond à tout espace normal $S_2$ de classe 2, fini, de connectivité 1 (*voir* $6_c$), une carte dans le plan (par suite une *surface* $W_2$) qui, considérée comme un espace discret de cellules à deux dimensions, est équivalente à l'espace $S_2$ donné (*voir* $8^e$, $9^e$, $15^e$, $6_b$). On peut certainement généraliser et prouver qu'il correspond à tout espace normal $S_2$ fini, de connectivité $m$, une surface $W_2$ (non plus dans le plan) équivalente à l'espace $S_2$ donné, bien qu'il puisse y avoir des difficultés à généraliser le théorème $8^e$. Cependant, il ne correspond sûrement pas à un espace normal $S_3$ (de classe 2), fini, de connectivité $(1, m)$ ou $m > 1$ (s'il existe un tel $S_3$) une *surface* $W_3$ qui lui soit équivalente. Il serait certainement très intéressant que tous les invariants d'*Analysis situs* d'une surface à $n$ dimensions (du

---

logue (pour les espaces binaires) d'un espace normal (discret) $S_n$ de classe 2 de la façon suivante :

Un espace binaire connexe, fermé S est un espace normal à $n$ dimensions ($n = 1, 2, 3, \ldots$), si pour tout point A de S il existe un voisinage $\varepsilon > 0$ tel que chaque sous-espace $S \mid A^d (0 < d < \varepsilon)$ de S contenu dans ce voisinage soit un espace normal à $n - 1$ dimensions, où un espace normal à zéro dimension est réduit à un couple de points.

Les espaces euclidiens et les espaces non euclidiens à $n$ dimensions, mentionnés dans le commencement de l'Introduction, sont des espaces binaires *normaux* à $n$ dimensions.

(1) Les surfaces avec des frontières correspondent aux espaces de $n$-cellules qui ne satisfont pas la première condition dans la définition d'une *surface* $W_n$. Ces derniers sont sous certaines conditions les espaces normaux $T_n$ (*voir* $6_a$).

moins ceux qui sont connus) fussent définis indépendamment de la nature des éléments qui constituent la surface. Cependant, considérant l'état actuel de l'*Analysis situs*, où il est fait si grand usage de l'intuition, il faut s'en remettre à l'avenir pour décider jusqu'à quel point cela est possible ([1]).

Nous montrerons dans le Chapitre II que l'ensemble $S'_n$ déjà défini est un espace normal à $n$ dimensions, de *classe* 1. Il apparaîtra souvent dans notre ouvrage un autre espace normal particulier, l'espace normal $S_1$ à $n$ dimensions ([2]) de *classe* 2; les $S_1$ finis ([3]) étant analogues aux courbes fermées (droite projective), et les $S_1$ infinis étant analogues aux courbes ouvertes (droite euclidienne). Il peut être défini comme un espace discret *connexe* dont chaque élément est de *degré* 2 (*voir* $3_c$). A tout couple d'éléments A et B d'un tel $S_1$ *infini* il correspond un *seul* arc discret de $S_1$ passant par A et B. Mais, si cet espace $S_1$ est *fini*, il correspond *deux* arcs discrets de S passant par A et B dont la somme est $S_1$ et dont le produit est $A + B$.

Un espace discret est *dégénéré* s'il ne contient aucun espace normal de classe supérieure à 1. Nous montrerons que tout espace discret qui ne contient pas un espace normal $S_1$ précédemment défini est un espace dégénéré (*voir* $14^c$). En faisant usage du théorème qui dit que *tout dérivé d'un espace normal est connexe* (*voir* $1^c$), nous montrerons aussi que *tout espace dégénéré fini, à n dimensions, est colorable* (*voir* $5_c$) *en* $n+1$ *couleurs* et que *tout espace normal, dégénéré, fini, à n dimensions, est colorable en* $n+1$ *couleurs d'une seule façon* (*voir* $3^c$, $17^c$, $18^c$). Il apparaîtra comme corollaire des théorèmes qui conduisent au théorème cité quelques lignes plus haut que tout *espace connexe fini* S, ($|S| \geqq 2$), *a au moins deux éléments* A *et* B *tels que ses sous-espaces* $S - A$ *et* $S - B$ *soient connexes*, théorème très facile à énoncer, mais plus difficile à prouver.

---

([1]) Le nombre des cellules à 0, 1, 2, ... dimensions d'une *surface* $W_n$ est le même que celui des éléments des dérivés $D^n(W_n)$, $D^{n-1}(W_n)$, $D^{n-2}(W_n)$, .... Chaque *dérivée* d'une *surface* $W_n$ est un *Komplexe* (*Voir Encyklopädie, loc. cit.*, p. 156) déterminé par cette surface (*Voir* $5_b$).

([2]) L'indice dont on affecte l'espace, lorsqu'il n'est pas pris dans une suite d'espaces, désigne presque toujours un nombre de dimensions (*voir* $4_b$).

([3]) Quand S est un espace, $|S|$ désigne le nombre d'éléments de S. Un espace S est fini ou infini selon que $|S|$ est fini ou infini.

Il est évidemment intéressant, dans toute étude systématique des espaces discrets, de savoir quel est le *plus petit nombre d'éléments nécessaires pour construire un espace discret de type donné*, et quel est le plus petit nombre d'éléments conjugués à un élément arbitraire d'un espace de ce type (*voir* $4_e$). Un *espace d'un type quelconque, comprenant le nombre minimum d'éléments sera appelé primitif*, et *un élément d'un espace* S, *conjugué au nombre minimum d'éléments sera appelé un élément primitif de* S. Nous démontrerons qu'*un espace normal* $S_n$ *primitif est un* $S'_n$ et qu'*un espace normal* $S_n$ (¹) *de classe* $m$ *contient* $m(n+1)$ *éléments*. Nous démontrerons également que *pour tout élément* A *primitif d'un espace normal* $S_n$ *de classe* $m$ $S_n|A$ *est un espace normal* $S_{n-1}$ *primitif de même classe*, que *deux espaces normaux primitifs de même classe et même nombre de dimensions sont équivalents*, et plusieurs autres théorèmes (*voir* Chapitre II). Le *nombre des éléments d'un espace au-dessus du minimum* et le *nombre des éléments conjugués à un élément au-dessus du minimum* sont appelés respectivement *degré* de l'espace et degré de l'*élément*. Ainsi, un espace normal $S_n$ de classe $m$ et de degré $k$ contient $m(n+1)+k$ éléments, et, *à un élément de degré* $k'$ dans un espace normal $S_n$ de classe $m$ correspondent $mn+k'$ éléments qui lui sont conjugués (²). Approximativement, l'étude de la colorabilité en quatre couleurs d'une carte dans un plan revient en grande partie à celle de la distribution relative des éléments de degré 1 et 2 dans un espace normal $S_2$ de classe 2 et de connectivité 1 (³).

Nous démontrerons que, pour *tout espace normal* $S_m$ *contenu dans un espace normal* $S_n$ $(n-m>1)$, $S_n-S_m$ et $S_n|S_m$ sont *toujours connexes* et que, pour *tout espace normal* $S_{n-1}$ *de classe* 2 contenu dans *un espace normal* $S_n$ de *classe* 2, $S_n-S_{n-1}$ et

(¹) L'indice désigne son nombre de dimensions (*voir* l'avant-dernière note). Pour plus d'unité nous ne parlerons, dans l'Introduction, que des espaces *normaux*, passant complètement sous silence les espaces *denses* et les espaces normaux $T_n$ (*voir* $4_a$, $6_a$).

(²) *Voir* la note relative à la définition 3.

(³) *Voir Encyklopädie, loc. cit.*, p. 177. Parmi les ouvrages parus depuis cette date, *voir* en particulier G. D. Birkhoff *The Reductibility of Maps* (*American Journal of Mathematics*, vol. 35, 1913, p. 116); et P. Franklin, *The four color problem*, même journal, vol. 44, 1922, p. 225.

$S_n \mid S_{n-1}$ sont soit connexes, soit de connexité 2 (*voir* $7^d$, $9^d$, $10^d$). Ce dernier théorème nous permet de définir *la connectivité* d'un espace normal de classe 2 analogue à la définition de *genre* (*geschlecht*) (¹) d'une surface, Ainsi, un espace normal $S_2$ de classe 2 est de *connectivité* 1 si, pour tout espace normal $S_1$ de classe 2 dans $S_2$, $S_2 - S_1$ est de connexité 2 (*voir* $6_c$) (²). De même, un espace normal $S_2$ est *unilatère* ou *bilatère* selon qu'il contient ou ne contient pas un espace normal $S_1$ (de classe 2) tel que $S_2 \mid S_1$ soit connexe. L'existence des espaces normaux $S_2$ qui ne sont pas de connectivité 1 ou ne sont pas bilatères se montre sans trop de difficulté.

Par exemple, l'*espace normal* $S_2$ *de classe* 2 *et de degré* 10 *dont chaque élément est de degré* 2 est de connectivité 2. L'espace normal $S_2$ de classe 2, de degré 4 et d'ordre 12 contenant quatre éléments de degré 2 et six éléments de degré 1 conjugués à un des éléments de degré 2 qui n'est pas conjugué aux trois éléments restants, est unilatère. Ces deux espaces sont, sans doute, respectivement un *espace normal* $S_2$ *primitif* de classe 2 et *de connectivité* 2 et un espace normal $S_2$ *primitif* de classe 2 unilatère.

Pour pouvoir étendre par induction les résultats auxquels nous sommes arrivés pour un espace primitif d'un certain type à un espace d'un nombre quelconque d'éléments du même type, il nous faut une transformation telle que, si on l'applique à un espace de ce type, le *transformé* de cet espace est encore du même type et a un élément de plus. Approximativement *un transformé* d'un espace discret P est l'espace résultant de P quand l'un de ses éléments s'est subdivisé en deux éléments (*voir* $6_b$). Un *transformé normal* d'un espace discret P est un transformé de P dans lequel l'élément qui s'est subdivisé en deux l'a fait de façon à satisfaire à certaines conditions. Nous démontrons qu'un *transformé normal d'un espace normal* $S_n$ *de classe* 2 *est un espace normal de même classe et même nombre de dimensions que* $S_n$ (*voir* $15^d$) (³). Par suite, puisqu'il

---

(¹) Voir *Encyklopädie, loc. cit.*, p. 182 et 184.

(²) Il est facile de démontrer qu'une *surface* $W_2$ de genre $m$ est de connectivité $m$ quand $m = 1$; c'est indubitablement vrai pour toute autre valeur de $m$ et la réciproque doit aussi être vraie. Néanmoins la démonstration détaillée est longue, même si $m = 1$.

(³) Nous faisons cette démonstration en nous servant de l'espace normal $T_n$ (*voir* existe des espaces normaux $S_n$ primitifs, il existe aussi des espaces normaux $S_n$ de classe 2 et de degré quelconque [1]. Nous démontrons que *si l'un des espaces normaux de classe 2 est un transformé de l'autre, il en est un transformé normal.* Pour deux tels espaces normaux P et Q, Q étant le transformé de P et en outre

$$Q/(Q - PQ) \equiv R,$$

on a les relations

$$\begin{aligned}
&|D^0(Q)| - |D^0(P)| = 1,\\
&|D^1(Q)| - |D^1(P)| = 1 + |D^0(R)|,\\
&|D^2(Q)| - |D^2(P)| = |D^0(R)| + |D^1(R)|,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&|D^n(Q)| - |D^n(P)| = |D^{n-2}(R)|.
\end{aligned}$$

Par suite, le nombre

$$|D^0(P)| - |D^1(P)| + |D^2(P)| - \ldots + (-1)^n |D^n(P)| \quad (^2)$$

est invariant dans la transformation normale.

Contrairement à la transformation normale *directe* qui peut être faite sur tout espace normal de classe 2, la transformation normale *inverse* (à savoir : étant donné un espace normal Q de classe 2, trouver un espace normal P tel que Q soit un transformé normal de P) n'est pas toujours possible et présente de nombreuses difficultés. Cela ne peut évidemment être fait dans le cas où Q est l'un quelconque des espaces primitifs déjà définis. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'à un espace normal* Q *de classe* 2 *et d'un nombre quelconque de dimensions on puisse faire correspondre un espace normal* P *tel que* Q *soit un transformé de* P, *c'est que* Q *contienne un couple d'éléments conjugués qui ne soient contenus dans aucun espace normal* $S_1$ (*de classe* 2) *primitif de* Q (*voir* $16^d$). Nous démontrons qu'*un espace normal* $S_2$ *de classe* 2 *et de connectivité* 1, *non primitif*, *contient deux tels*

---

$6_a$, $5^d$). Par une légère modification de la définition d'un *transformé normal* nous pouvons obtenir des transformations qui jouent — pour des espaces denses, normaux, et des espaces normaux $T_n$ — le rôle que joue la première pour des espaces normaux $S_n$ de classe 2.

(1) On peut montrer l'existence d'espaces normaux $S_n$ non primitifs de classe supérieure à 2 en prenant des dérivés de l'espace normal $S_n$ de classe 2.

(2) Voir *Encyklopädie, loc. cit.*, p. 182.

*éléments conjugués*, en montrant qu'*il correspond à tout élément* C *d'un tel espace normal* $S_2$ *au moins un* $S'_1$ *de* $C + S_2 \mid C$ *tel que* $S_2 \mid S'_1$ *soit un espace normal* $S_1$ (*voir* $8^e$). Nous ferons fréquemment usage de ce théorème dans l'étude de nos espaces *paramétriques*.

Nous considérerons dans le Chapitre V des espaces *paramétriques* $S^t$ qui pour tout entier positif d'un intervalle ($p \leqq t \leqq q$) sont des espaces discrets. Les espaces paramétriques auxquels nous nous intéressons particulièrement sont les espaces paramétriques $S^t_2$ qui sont des espaces normaux $S_2$ (de classe 2), primitifs pour $t = 6$ et tels que $S^{k+1}_2$ soit un transformé normal de $S^k_2$ pour $b \leqq k \leqq q - 1$. Il suit donc du dernier théorème et du théorème $17^d$ *qu'à tout espace normal* $S_2$ (*de classe* 2), *fini, de connectivité* 1, *il correspond un espace paramétrique* $S^t_2$ *tel que* $S^q_2$ *soit équivalent à l'espace* $S_2$ *donné* (*voir* $9^d$).

Il est clair que si l'on fait correspondre une coordonnée à chaque élément d'un espace discret fini de $n$ éléments, une fonction distance $s(m, k)$ de cet espace (*voir* $7_d$) est déterminée par un déterminant symétrique d'ordre $n$, d'après le procédé bien connu employé par Poincaré (¹) et d'autres auteurs. Elle peut aussi être déterminée par $n$ fonctions (polynomes) $f_1(m)$, $f_2(m)$, ..., $f_n(m)$ satisfaisant à la condition $f_k(m) = f_m(k) = s(m, k)$. On ne sait pas encore, du moins à notre connaissance, si une fonction distance d'un espace discret fini S arbitraire est déterminable par un nombre de fonctions (d'une seule variable) inférieur à $n$ et indépendant de $n$ ($n = |S|$). Nous montrerons par de *longues et soigneuses* considérations sur l'espace paramétrique orienté (*voir* $7_e$) et à l'aide du dernier théorème sur l'espace $S^t_2$ qu'une fonction distance d'un espace normal $S_2$ fini de connectivité 1 est déterminé par trois de ces fonctions et même par deux. Par suite, *à tout espace normal* S *fini de connectivité* 1, *il correspond au moins un couple de polynomes déterminant quel couple d'éléments de* $S_2$ *sont conjugués et lequel non conjugués* (*voir* $11^e$).

A un espace normal $S_2$ de classe 2 *primitif* il correspond une carte dans le plan (*une surface* $W_2$), dont chaque pays a une frontière convexe, et qui lui soit équivalente. Il suit donc (par induction) du

(¹) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol. 13, 1899, p. 285. *Voir* aussi *Encyklopädie*, *loc. cit.*, p. 179.

théorème sur l'espace normal $S_2^c$ déjà cité (*voir* $9_1^c$) et du lemme 15, qu'il en est de même pour tout $S_2$ fini, de classe 2 et de connectivité 1. Par suite, dans le problème du coloriage d'une carte en quatre couleurs [1] il suffit d'étudier les cartes dont les pays ont des frontières convexes (*voir* $15^e$).

La démonstration du dernier théorème, sur l'existence dans le plan d'une carte équivalente à un espace normal arbitraire $S_2$, fini, de classe 2 et de connexité 1, de même que celle du lemme 15, est évidemment tout à fait *indépendante des propriétés métriques* du plan, mais elle fait surtout appel à la propriété qu'a chaque droite de diviser le plan en deux parties. Nous avons également pensé qu'il serait intéressant et profitable de comparer les démonstrations des théorèmes sur les espaces discrets avec les démonstrations synthétiques des théorèmes de la géométrie euclidienne élémentaire, comme celle du théorème : *les côtés d'un triangle divisent le plan en deux parties*, etc. C'est pourquoi nous donnerons la définition d'un plan non métrique (et celles des termes qui y sont associés : segment, droite, etc.) pour lequel les théorèmes et les lemmes ci-dessus sont vrais aussi bien que les théorèmes non métriques de la géométrie élémentaire, et nous démontrerons dans l'Appendice quelques théorèmes élémentaires (et familiers) conduisant à la démonstration du lemme précité. Pour faciliter la comparaison, nous emploierons pour nos nouvelles définitions les trois opérations sur les espaces dont nous nous sommes déjà si souvent servis. Nous commencerons par les définitions du terme segment :

Soient X et Y deux points quelconques *d'une droite* $S_1$ ; le segment (XY) est un sous-espace de $S_1$ (déterminé par X et Y d'une seule façon) satisfaisant aux deux conditions (explicites) :

$$X + Y < (XY) \qquad \text{et} \qquad (XY) \dot{-} (X + Y) \not\equiv o \quad (^2)$$

---

(1) *Encyklopädie, loc. cit.*, p. 177.

(2) L'arc discret (XY) dans un espace normal $S_1$, discret infini, satisfait à toutes ces conditions, sauf à $(XY) - (X + Y) \not\equiv o$. On peut définir les segments d'une droite projective (orientée ou non) d'une façon semblable. En vue de certaines applications il est préférable d'omettre cette condition, ou, dans l'étude des espaces *binaires*, de lui substituer la condition que (XY) est *connexe*. Voir la définition d'une cellule à *n* dimensions donnée ci-dessus.

et aux trois conditions (implicites)

(*a*) $$(XY) \equiv (YX);$$

(*b*) Si les trois points A, B et C sont contenus dans S, on a

$$A(BC) + B(CA) + C(AB) \not\equiv 0;$$

(*c*) Si, en outre, $C(AB) \not\equiv 0$, on a

$$(AC) + (CB) \equiv (AB) \quad \text{et} \quad (AC)(CB) \equiv C \quad (^1).$$

Tout point d'un segment (AB) distinct de A et de B *est entre* A et B; les points A et B sont appelés les extrémités du segment (AB).

En appelant *espace primitif* un espace dans lequel à tout couple d'éléments A et B de cet espace correspond un *seul* segment (AB) ou pas du tout (²) nous pouvons donner d'un espace primitif *connexe* les définitions suivantes :

Un espace primitif (non vide) S est *connexe* si, à tout sous-espace (non vide) R de S, $(S - R) \not\equiv 0$, il correspond au moins un couple de points A et B, l'un dans R et l'autre dans S — R, tels que S contienne un segment (AB); ou bien :

Un espace primitif (non vide) S est *connexe* si, à tout couple de points A et B de S il correspond un ensemble de $n$ points $A_1$, $A_2, \ldots, A_n$ ($A_1 \equiv A$ et $A_n \equiv B$) de S tels que S contienne les segments $(A_iA_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ et ne contienne pas les segments $(A_iA_j)$ $(i - j < 1)$; ensuite :

Un espace primitif (non vide) S est *connexe* si, pour tout couple de points A et B de S il contient un segment (AB) (⁴).

(¹) En posant que, si A et B désignent le même point, (AB) désigne aussi ce point, il suit immédiatement que les conditions (*b*) et (*c*) sont toujours satisfaites, même quand A, B et C ne sont pas distincts.

(²) Les espaces droite, plan, $S_n$ que nous allons définir dans un instant et tout sous-espace de ces espaces sont des espaces primitifs.

(³) En appelant *conjugués* deux points A et B d'un espace primitif S si S contient un segment (AB), un espace primitif est un hyperespace discret; et ces deux définitions d'un espace primitif *connexe* sont identiques aux deux définitions d'un espace discret *connexe* données daus le cinquième paragraphe de l'Introduction. Par suite, puisque ceux-là sont équivalents (*voir* 1*a*), ceux-ci le sont aussi.

(⁴) *Cf.* la définition d'un $S'_n$ dans le septième paragraphe de l'Introduction.

**D.** Une *droite* (primitive) $S_1$ **est un espace primitif (non vide) qui satisfait aux deux conditions suivantes :**

*a.* A tout couple de points A et B contenus dans $S_1$ il correspond *un seul* segment (AB) de $S_1$ ;

*b.* A tout *point* C contenu dans $S_1$ il correspond deux sous-espaces P et Q (appelés couples de demi-droites) de S satisfaisant à

$$P + Q \equiv S_1, \qquad PQ \equiv C$$

tels que

$$P, \quad P - PQ, \quad Q, \quad Q - PQ$$

soient chacun *convexe*, et

$$P - PQ + Q - PQ$$

ne soit pas *connexe* [1].

**P.** Un plan (primitif) $S_2$ est un espace primitif (non vide et non réduit à un seul point) qui satisfait aux deux conditions suivantes :

*a.* A tout couple de points contenus dans $S_2$, il correspond *une seule* [2] droite $S_1$ de $S_2$ contenant ce couple.

*b.* A toute *droite* $S_1$ contenue dans $S_2$ il correspond deux sous-espaces P et Q (appelés couples de demi-plans) de $S_2$ satisfaisant à

$$P + Q \equiv S_2, \qquad PQ \equiv S_1,$$

tels que

$$P, \quad P - PQ, \quad Q, \quad Q - PQ$$

soient chacun *convexes* [3], et

$$P - PQ + Q - PQ$$

ne soit pas *connexe* [4].

---

[1] Par suite, il n'y a qu'un seul tel couple de demi-droites correspondant à un point dans $S_1$. Et, pour tout couple de points A et B contenus l'un dans P — PQ et l'autre dans Q — PQ, (AB)PQ est un seul point. Les deux théorèmes pour le plan qui correspondent à ces deux théorèmes pour la droite sont vrais et ils se démontrent exactement de la même façon. En vue d'études sur les espaces binaires il est parfois préférable d'entendre ici le mot *connexe* dans le sens où nous l'avons employé pour définir une cellule à $n$ dimensions et non pas dans le sens où nous venons de le définir. Cf., *Encyklopädie, loc. cit.*, p. 16-25.

[2] Par suite, si deux droites dans un plan $S_2$ ont deux points (distincts) en communs, ils sont identiques.

[3] *Cf.* les théorèmes $9^d$ et $10^d$.

[4] Un espace (primitif) $S_n$ (à $n$ dimensions) est un espace primitif qui contient

Soient maintenant $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $m$ points ordonnés (cycliquement) d'un plan, *tels que trois consécutifs* ne soient pas *alignés*, et soit $P_i, Q_i$ *le* couple de demi-plans correspondant à la droite contenant $A_i$ et $A_{i+1}$, alors si $P_i$ contient tous ces $m$ points ($i = 1, 2, \ldots, m$), le produit $P_1 P_2 \ldots P_m$ est un espace *convexe* contenant tous les segments $(A_i A_{i+1})$. Un tel produit $P_1 P_2 \ldots P_m$ est appelé un *polygone convexe* (1) (de $m$ côtés) dont les sommets sont les points $A_1$, $A_2, \ldots, A_m$ et dont les côtés sont les segments $(A_i, A_{i+1})$. C'est cette définition d'un polynome convexe que nous employons dans le lemme 15. *Le triangle* est donc un polynome convexe de trois côtés. *L'angle* $A_1 A_2 A_3$ est le produit $P_1 P_2$, et les côtés de cet angle sont les produits $P_1 P_2 Q_1$ et $P_1 P_2 Q_2$. Les côtés $R'$ d'un polygome $R$ dans un plan $S_2$ constituent la *frontière* de $R$ et de $S_2 - (R - R')$. Cette frontière est *convexe* si pour tout couple de points A et B de $R'$, $(AB)R'$ est identique soit à $(AB)$, soit à $A + B$. C'est cette définition d'une *frontière convexe* que nous employons dans le théorème $15^e$.

Dans tout le cours de ce travail nous admettrons comme expressions équivalentes (quand P et Q sont des espaces) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (*i*) | « P est contenu dans Q » (2) | et | « $P < Q$ », |
| (*ii*) | « P est identique à Q » | et | « $P \equiv Q$ », |
| (*iii*) | « P est vide » | et | « $P \equiv O$ ». |

---

un espace $S_{n-1}$ et qui satisfait aux deux conditions suivantes :

*a*. A tout ensemble de $m$ points de $S_n$ $(2 \leqq m \leqq n)$ qui ne sont pas tous contenus dans un $S_{m-2}$ de $S_n$ il correspond un seul $S_{m-1}$ de $S_n$ contenant cet ensemble de $m$ points.

*b*. A tout $S_{n-1}$ contenu dans $S_n$ il correspond deux sous-espaces P et Q (appelés couple de demi — $S_n$) de $S_n$ satisfaisant à

$$P + Q \equiv S_n, \qquad PQ \equiv S_{n-1},$$

tels que

$$P, \quad P - PQ, \quad Q, \quad Q - PQ$$

soient chacun *convexes*, et

$$P - PQ + PQ$$

ne soit pas *connexe*.

(1) *Voir* dans l'*Encyklopädie*, *loc. cit.*, p. 26, la référence à MM. Enriques et Amoldi.

(2) Et aussi « Q contient P », « Q renferme P », « P est un sous-espace de Q », « il existe un sous-espace P de Q », « il correspond un sous-espace P de Q », etc. Le grand nombre d'expressions équivalentes employées dans les mathématiques courantes est embarrassant. Je n'ai cependant pas pu, dans la circonstance, m'écarter beaucoup du langage mathématique maintenant employé, bien que dans les démonstrations je me sois restreint aux phrases les plus simples possibles.

La première est définie *implicitement* dans l'Appendice par les conditions $C_1$, $C_2$, $C_3$ ; la seconde y est définie *explicitement* ([1]) par $C_4$ ; et la troisième *implicitement* par $C_5$ et $C_{12}$.

Nous admettrons aussi comme expressions équivalentes (quand P et Q sont des espaces) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (*i*) | « la somme de P et Q » | et | « $P + Q$ », |
| (*ii*) | « le produit de P et Q » | et | « PQ » ([2]), |
| (*iii*) | « la différence de P et Q » | et | « $P - Q$ ». |

Les deux premières sont définies *explicitement* dans l'Appendice par les conditions $C_6$ et $C_7$ ; la dernière, *implicitement* par $C_8$, $C_9$. Toutes les assertions que nous faisons dans ce travail et qui ne contiennent que ces six expressions peuvent être déduites de ces dix assertions $C_1$ à $C_9$ et $C_{12}$ ([3]), et nous les démontrons dans l'Appendice. Toutes les assertions que nous faisons dans ce travail et qui, non seulement contiennent ces expressions, mais d'autres encore, peuvent être démontrées à partir de ces dix assertions et des définitions des autres expressions. La plupart sont démontrées dans le texte ([4]).

Quand, à l'époque actuelle, on compose un ouvrage de cette nature

---

([1]) Dans une définition *implicite* les conditions imposées à l'expression que définit cette définition contiennent cette expresion. Dans une définition *explicite* il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire que l'hypothèse et la conclusion ne contiennent pas toutes les deux l'expression que cette définition définit. Cf. *Eucyklopädie, loc. cit.*, p. 11. Les définitions des opérations et les définitions des fonctions par des équations fonctionnelles sont presque toujours implicites. La définition du *segment* que nous venons de donner est implicite: les définitions du *plan* et de la *droite* sont cependant explicites. La définition (due à M. Fréchet) des expressions *suite convergente* et *point limite d'une suite convergente* que nous employons *réellement est implicite. Voir* la Note relative au terme *fermée* dans la définition d'une *cellule à n dimensions.*

([2]) Ce sont les trois opérations de l'Algèbre de la logique.

([3]) L'expression *un élément* (*point*) *d'un espace* est définie explicitement par $C_{10}$, et quelques expressions qui lui sont associées sont définies par $C_{11}$. La condition $C_{12}$ peut être énoncée sans faire usage de l'expression « élément d'un espace ».

([4]) On peut définir implicitement l'expression « $a$ est inférieur à $b$ » (ou $a < b$) comme relation *binaire* entre les nombres réels qui satisfait aux trois conditions suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | | $a \not< a$, | |
| (2) | si $a < b$ | et $b < c$, | on a $a < c$, |
| (3) | si $a \not< b$ | et $b \not< c$, | on a $a \not< c$ |

pour trois nombres réels *quelconques* $a$, $b$, $c$. On peut ensuite définir *explicite-*

(où l'on insiste plus particulièrement sur la démonstration des conclusions que l'on veut tirer, et non pas sur les applications physiques possibles), on contracte une grande dette envers la « mathematisch logischen Schule » (1) d'Italie et de divers autres pays; car il faut lui être reconnaissant des exemples qu'elle a composés. En composant ce travail je me suis cependant écarté, pour diverses raisons que j'exposerai brièvement, et au moins sur quatre points, de la marche suivie par cette école.

Tout d'abord je n'ai pas commencé en faisant état des termes (ou symboles) indéfinis et des propositions non démontrées (axiomes, postulats, etc.). Il m'a paru, en effet, préférable d'*intégrer les conditions* imposées aux termes employés *en des définitions* (explicites ou implicites), aussi bien à cause des théorèmes concernés qu'à cause de l'unité de théorie. J'ai déjà signalé, dans ma thèse d'Harvard, qu'il n'y a pas de distinction définie entre les *définitions* et ce que M. Huntington (2) appelait *general laws postulates* (une fois intégrés). Depuis lors, je suis arrivé à la conclusion que les assertions qu'il appelait *existence postulates* sont (3) des conditions, dans une définition d'un espace, portant sur la nature des sous-espaces que contient cet espace. De même, qu'aucune sorte de postulats, d'axiomes, etc., n'est nécessaire à l'étude d'un *espace* dont les éléments sont arbitraires, ou à l'étude d'un *hyperespace* particulier. C'est pourquoi, comme il ne s'agit ici que de tels espaces et

---

ment $b = c$ comme dans $C_4$, à savoir : si $b \not< c$ et $c \not< b$ on a $b = c$, et réciproquement. (De même, explicitement, si $b < c$, on a $c > b$, et réciproquement.) De la dernière définition on déduit immédiatement (*voir* l'Appendice) et (*i*) $a = a$, (*ii*) si $b = c$ on a $c = b$, et (*iii*) si $a = b$ et $b = c$ on a $a = c$ (trois assertions qui sont ordinairement prises comme définition des égalités des nombres), et toutes les autres assertions liées aux expressions *inférieur à* et *égal à*. *Cf.* M. HUNTINGTON, *Transactions American Mathematical Society*, vol. 5, 1904, p. 289, et Vol. 6, 1905, p. 17. On y trouvera d'autres références relatives à de sujet et à des sujets qui en dépendent. Pour une discussion (classification) des définitions voir en particulier les mémoires de MM. PEANO et BURALI-FORTI dans la *Bibliothèque du Congrès international de Philosophie*, vol. 3, Paris, 1900. Je ne considère pas comme une généralisation trop hâtive l'assertion que les *mathématiques commencent nécessairement par des définitions implicites*.

(1) *Encyklopädie, loc. cit.*, p. 14.

(2) *A set of postulates for abstract geometry, expressed in terms of the simple relation of inclusion* (*Mathmatische Annalen*, vol. 73, 1912-13, p. 522-559).

(3) *L'Existentialaxiome* dans l'*Encyklopädie, loc. cit.*, p. 168, est aussi de même nature.

hyperespaces, je me suis écarté, par la forme, de la marche suivie dans ma thèse d'Harvard et je ne donne pas ici de postulats.

Deuxièmement, je n'ai qu'effleuré la question de la *compatibilité* de nos définitions, c'est-à-dire de savoir si aucun des espaces définis n'est nécessairement vide. Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, on peut facilement construire des espaces de n'importe quel nombre de dimensions et de n'importe quelle classe. Je n'ai pas pu construire cependant de tels espaces ayant toutes les connectivités définies. Ainsi, par exemple, il reste encore à montrer l'existence d'un espace normal à trois dimensions, de classe 2 et de connectivité (1, 2) [1].

Troisièmement, je n'ai du tout abordé la question de l'*indépendance* des conditions dans aucune de nos définitions. En fait, dans le choix des conditions pour une définition, je n'ai été guidé que par deux considérations : rendre l'énoncé de la définition le plus simple possible, et employer seulement les conditions qui serviront *directement* dans les théorèmes suivants. Car j'ai pensé que du moment qu'un théorème donnant des « conditions nécessaires et suffisantes » [2] est à sa place à un endroit quelconque de la théorie, il n'y a pas de raison que je m'embarrasse tout au commencement. De plus, dans une théorie nouvelle, les questions d'indépendance ne sont que d'importance secondaire.

Quatrièmement, je n'ai pas hésité, pendant tout le cours de ce travail, à me servir des *opérations géométriques* (opérations sur les espaces) soit des opérations, addition, soustraction et multiplication, de l'Algèbre de la Logique, soit des deux opérations introduites au début de l'Introduction. De nombreux auteurs font maintenant usage dans leurs ouvrages du symbolisme condensé de Peano. D'autres se servent de ce symbolisme mais ne l'utilisent pas dans leurs publications [3]. Nous avons pensé pouvoir donner une idée plus claire

---

(1) *Voir* la note à la définition 6.

(2) Et par suite une nouvelle définition.

(3) The logical symbolism of Peano, although not employed in the paper as prepared for the press, has been of almost indispensable value in working out the details of the demonstrations. Without some such symbolism, it is almost impossible, in a work of this sort, to avoid errors (HUNTINGTON, *Annalen*, *loc. cit.*, p, 525).

de l'étude des espaces discrets en publiant cet ouvrage dans la forme même où il a été élaboré ; d'où l'emploi des opérations géométriques. D'autre part il ne suffit en comparaison que d'un très faible effort pour les apprendre et elles sont très précieuses dans toute étude des espaces.

Ce travail n'a pas été entrepris comme étude des concepts mathématiques, ni pour obtenir une vue d'ensemble des mathématiques en se plaçant à un nouveau point de vue, ni dans aucun but utilitaire défini ; et pourtant il remplit remarquablemeni ces divers buts. Nous avons pu, dans l'ensemble, rendre plus clairs que dans tout autre livre, à notre connaissance, l'introduction et l'emploi des *opérations*, *transformations*, *définitions implicites*, *hyperespaces* et *espaces paramétriques*, concepts qui marquent la différence entre les mathématiques modernes et celles des Grecs et du Moyen Age. On peut certainement se faire une idée plus claire sur la structure et le développement d'une théorie mathématique en lisant un ouvrage de cette sorte qu'en lisant un traité sur un sujet qui a été étudié pendant des décades par de nombreux mathématiciens, où la familiarité même du sujet nous provoque peu et nous pousse à accepter sans examen critique et réflexions adéquates bien plus de points que nous n'aurions fait sans cela. Lorsque les opérations géométriques seront étudiées et enseignées parallèlement aux opérations algébriques, les théorèmes sur les espaces discrets (comme les théorèmes sur les espaces normaux à deux dimensions de classe 2) pourront être employés pour rendre familières les opérations géométriques, comme les théorèmes de géométrie euclidienne sont maintenant employés pour rendre familières les opérations algébriques ; ils pourront aussi être employés pour faire mieux comprendre la signification du mot « démonstration ». Pour ma part, je ne puis m'empêcher de croire que les espaces euclidiens (ou même des espaces moins restreints comme les espaces primitifs définis ci-dessus) sont de beaucoup trop restreints pour être d'un grand aide aux débutants en mathématiques. On trouve aisément dans l'étude des espaces discrets des théorèmes illustrant la signification des groupes de transformations, de dimensions, des démonstrations par induction, des théorèmes introduisant à des théorèmes fondamentaux comme celui de Jordan sur les courbes simplement fermées du plan (et son extension aux espaces à *n* dimensions). Néanmoins nous ne nous étendrons pas davantage ici sur ce sujet et nous ne ferons guère d'autre digression dans le courant de cet ouvrage.

Il me reste pour terminer cette Introduction, à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Lebesgue, qui a bien voulu prendre connaissance de ma thèse de Harvard et me faire part de ses observations, et à M. Fréchet, qui a bien voulu lire les pages manuscrites du présent travail et qui, par ses précieux conseils, m'a permis de faire plusieurs améliorations.

# CHAPITRE I.

## DÉFINITIONS FONDAMENTALES ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LA CONNEXITÉ, LE NOMBRE DE DIMENSIONS, LE DEGRÉ ET L'ORDRE D'UN ESPACE DISCRET.

---

Nous montrerons dans le théorème 1*a* que la seconde définition d'un espace discret connexe, sur laquelle nous avons appelé l'attention dans l'Introduction, est équivalente à celle que nous avons donnée. Nous répétons cette définition et nous en ajouterons de nouvelles.

Définition 1*a*. — Un espace discret S est *connexe* si, pour tout sous-espace R de S, $(S - R) \not\equiv 0$, on a $S \mid R \not\equiv 0$ (¹). Un espace discret S est de *connexité m* s'il consiste en *m* espaces connexes discrets, la somme de deux quelconques d'entre eux n'étant jamais un espace connexe, et nous écrirons alors $C(S) \doteq m$. Un sous-espace connexe R de S est *entier* si $S \mid R \equiv 0$. Selon que $P \mid Q$ est, ou n'est pas, non vide nous disons que P *est*, ou *n'est pas*, *connexe à* Q. Le sous-espace $P/Q$ de P est *le conjugué* de Q dans P. Si $P/Q \equiv P$ (et par suite, $Q/P \equiv Q$), P et Q sont *conjugués*.

*b*. Nous appellerons *arc discret* un ensemble de *n* éléments ordonnés d'un espace discret $S(n \geqq 2)$ dans lequel chaque élément, à l'exception du premier, est conjugué à celui qui le précède immédiatement et non à ceux qui viennent avant.

*c*. Si A est un élément de l'espace discret S, le sous-espace $(S - S \mid A^{n-1}) \mid (S \mid A^{n})$ de S est appelé le $(n+1)^{\text{ième}}$ voisinage de A dans S et est désigné par $S \mid A^{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, où $S \mid A^{0} \equiv A$, $S \mid A^{1} \equiv S \mid A$.

Lemme 1. — Si A et B sont respectivement des éléments des espaces discrets P et Q et si $P + Q$ contient un arc discret (AB) passant par A et B, P contient au moins un élément conjugué à un élément de Q.

---

(¹) Nous considérons un espace d'un seul élément comme connexe, mais nous ne considérons pas un espace vide comme connexe.

Le lemme est évidemment vrai pour $|(AB)| = 2$. Je suppose qu'il soit vrai pour $|(AB)| = 3, 4, \ldots, m$.

Soit $|(AB)| = m + 1$, et soit C l'élément de (AB) conjugué à A; alors, si C appartient à Q, le lemme est démontré. Si C appartient à P, (AB) — C est un arc discret contenant seulement $m$ éléments, pour lequel, par suite, le lemme est vrai. Puisque C ne peut appartenir qu'à P ou Q le lemme est démontré par induction.

Lemme 2. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément B d'un espace discret S soit dans le $n^{\text{ième}}$ voisinage d'un élément A dans S est que le plus petit nombre des éléments d'un arc discret allant de A en B dans S soit $n + 1$.

La démonstration est immédiate par induction.

Corollaire 1. — Si B est un élément dans le $n^{\text{ième}}$ voisinage de A dans S, S contient un arc discret de A en B ne renfermant aucun élément situé dans le $(n + k)^{\text{ième}}$ voisinage de A dans S $(k = 1, 2, \ldots)$.

Lemme 3. — Si A, B et C sont trois éléments d'un espace discret S contenant un arc discret passant par A et B et un autre arc discret passant par A et C, S contient un arc discret passant par B et C et dont les éléments sont des éléments des arcs discrets passant par A, B et A, C.

Corollaire 1. — Si un espace discret S contient trois éléments A, B, C tels que B et C soient respectivement dans les $m^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$ voisinages de A dans S, alors cet espace contient un arc discret passant par B et C et ne contenant pas plus de $m + n + 1$ éléments.

Corollaire 2. — Si B est un élément situé dans le $n^{\text{ième}}$ voisinage de A dans S et si C est un élément de S conjugué à B, alors C est un élément de l'un des trois sous-espaces $S \mid A^{n-1}$, $S \mid A^n$, $S \mid A^{n+1}$.

Lemme 4. — Si à un sous-espace R d'un espace discret S il correspond un élément A de S tel que

$$R \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S \mid A^n \equiv S \mid A^0 + S \mid A^1 + S \mid A^2 + \ldots,$$

à deux éléments quelconques B et C de R il correspond un arc discret de R passant par B et C.

Supposons que B et C soient respectivement dans les $m^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$ voisinages de A dans S : alors R contient des arcs discrets passant par A, B et B, C [$2_1$], et, par suite, R contient un arc discret passant par B, C [3].

Théorème 1*a*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret* S *soit connexe est qu'à chaque couple d'éléments quelconques* B, C *de* S *il corresponde dans cet espace un arc discret passant par* B *et* C.

Du lemme 1 on déduit immédiatement que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire il suffit de prouver que pour tout élément A de S on a $S \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S \mid A^n$.

En effet, soit $R \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S \mid A^n$ et supposons $S - R \equiv Q \not\equiv 0$; alors Q ne contient aucun élément de R et, puisque S est connexe, Q contient un élément B conjugué à un élément C de R. Soit, maintenant, C un élément de $S \mid A^n$, alors B est un élément de l'un des trois sous-espaces $S \mid A^{n-1}$, $S \mid A^n$, $S \mid A^{n+1}$, [$3_2$], et, par suite B est un élément de R, ce qui contredit l'hypothèse R et Q disjoints; par suite Q est vide.

Corollaire 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret S soit connexe est qu'il contienne un élément A tel que $S \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S \mid A^n$.

Corollaire 2. — Le nombre des éléments d'un espace direct S de connexité dénombrable, dans lequel le nombre des éléments de S conjugué à un élément quelconque de S est dénombrable, est un ensemble dénombrable.

Nous ne nous occupons dans ce Mémoire, comme nous l'avons déjà dit dans l'Introduction, que d'espaces discrets de connexité finie dans lesquels le nombre des éléments d'un espace S conjugué à un élément quelconque de S est fini. Par suite :

Corollaire 3. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret connexe soit fini est qu'il contienne un élément A auquel corresponde un entier positif $m$ tel que $S \equiv \sum_{n=0}^{m} S \mid A^n$.

Corollaire 4. — Pour tout espace discret S fini ou infini, il existe une fonction uniforme S(X) qui fait correspondre à chaque élément A de S un seul entier positif S(A) de telle façon qu'à tout entier positif $b$ qui n'est pas supérieur à $|S|$ il corresponde un seul élément B de S tel que $S(B) = b$.

[Le nombre S(A) qu'une telle fonction S(X) fait correspondre à l'élément A de S est appelé la *coordonnée* de l'élément A; et, par suite, la coordonnée d'un élément quelconque d'un espace discret S n'est jamais supérieure à $|S|$, et les coordonnées de deux éléments quelconques de S ne sont jamais égales. Il est clair qu'un entier positif qui n'est pas supérieur à $|S|$ quand S est infini peut être tout entier positif (*voir* Chap. V).]

Définition 2*a*. — Nous appellerons *transformation équivalence* de S en S′, une transformation qui établit une correspondance biunivoque entre les éléments des deux espaces discrets S et S′ et qui est telle que des éléments conjugués de S correspondent à des éléments conjugués de S′ et réciproquement. Deux espaces discrets S et S sont *équivalents* si l'ensemble des correspondances biunivoques de S en S′ contient au moins une transformation équivalence de S en S′; et l'équation $S = S'$ exprime que S et S′ sont équivalents. Une transformation équivalence de S en S est appelée une transformation équivalence de S en lui-même, et deux éléments A et B de S qui se correspondent dans une *transformation équivalence* de S sont appelés *équivalents;* S est *symétrique* si pour chaque couple d'éléments A et B on a $S/A = S/B$. L'*ordre* d'un espace discret S c'est le nombre des transformations équivalences distinctes qui transforment S en lui-même.

*b*. Un *ensemble* de $m$ éléments $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ $(m \geqq 0)$ d'un espace discret S est *cyclique* par rapport à une transformation équivalence (ou pseudo-équivalence) (1) $Y = T(X)$ de S en lui-même

(1) *Voir* la note relative au théorème 4*a*.

si $A_{i+1} = T(A_i)$ (mod $m$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$). Un élément invariant de S dans la transformation $Y = T(X)$ est un ensemble cyclique d'un seul élément.

*c*. Soit T une transformation équivalence (ou pseudo-équivalence) de l'espace discret S; alors, l'*hyperespace* (1) discret T(S) est l'*hyperespace*, dont les éléments sont les ensembles de S cycliques par rapport à T, et qui satisfait à la condition que deux éléments P et Q de T(S) sont conjugués si (et dans ce cas seulement) ces éléments considérés comme *sous-espaces de* S satisfont à $P \mid Q \not\equiv O$.

Définition 3*a*. — Un espace discret qui consiste en $n+1$ éléments conjugués deux à deux est appelé $S'_n$ (2); et, l'on appelle $\rho$ — fonction de S une fonction $\rho_n(m)$ qui désigne le nombre des $S'_n$ contenus dans un espace discret S et tels que $|S/S'_n| = m$. Un espace discret qui contient un $S'_n$, mais ne contient pas un $S'_{n+1}$ est un espace à *n dimensions*.

*b*. Un espace discret de connexité quelconque $m$ qui consiste en $m$ espaces $S'_{n_1}, S'_{n_2}, \ldots, S'_{n_m}$ (c'est-à-dire un espace discret dont chaque sous-espace connexe entier est *un espace normal* de classe un) est appelé un espace de *pseudo-dimension zéro*. *La pseudo-dimension* d'un espace discret S général est le moindre entier positif $n$ qui corresponde à S tel que pour tout $S'_{n-1}$ de S, $S/S'_{n-1}$ soit un espace de pseudo-dimension zéro.

*c*. *Le degré* d'un espace discret S est le nombre des éléments contenus dans S, et *le degré* d'un élément quelconque de S est le degré de S/A. Le pseudo-degré d'un espace à $n$ dimensions (3) est le nombre, diminué de $n+1$, des éléments qu'il contient.

Si nous employons l'expression « caractéristique intrinsèque » pour désigner un nombre associé à tout espace discret de telle sorte que les nombres associés à deux espaces équivalents soient égaux, nous voyons immédiatement que :

---

(1) C'est-à-dire un espace dans lequel les éléments sont définis; *voir* l'Introduction.

(2) Nous montrerons plus loin [$3\frac{b}{2}$] qu'un $S'_n$ est un espace normal de classe un.

(3) D'une façon plus générale, si $k$ est le plus petit nombre d'éléments que puisse avoir un espace du type $t$, le pseudo-degré de l'espace S du type $t$ est le nombre diminué de $k$, des éléments de S. Il est clair, que le plus petit nombre des éléments que puisse avoir un espace à $n$ dimensions est $n+1$. Nous supprimerons le mot *pseudo* dans pseudo-*degré* quand il n'y aura pas de confusion à craindre.

THÉORÈME 2*a*. — *Le degré, l'ordre, la connexité, le nombre de dimensions (ou pseudo-dimensions) et les valeurs entières d'une* $\rho$ — *fonction d'un espace discret* S *sont chacun une caractéristique intrinsèque de* S.

La démonstration de la dernière partie de ce théorème qui est le seul point qui peut ne pas paraître tout à fait évident peut se déduire facilement du lemme 7 suivant.

LEMME 5. — Si A′ et B′ sont les éléments d'un espace discret S′ qui correspondent aux éléments A et B d'un espace discret S dans une transformation équivalence de S en S′, A′ est, ou n'est pas conjugué à B′ suivant que A est, ou n'est pas conjugué à B.

COROLLAIRE 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation biunivoque de S en S′ soit équivalence est que si A, B sont deux éléments quelconques de S, B étant dans le $n^{\text{ième}}$ voisinage de A dans S, et si A′, B′ sont les éléments de S′ correspondant à A, B, alors B′ est dans le $n^{\text{ième}}$ voisinage de A′ dans S′.

COROLLAIRE 2. — Si A et B sont deux éléments équivalents d'un espace discret S, pour chaque entier positif $n$ on a

$$\sum_{m=0}^{n} S \mid A^m = \sum_{m=0}^{n} S \mid B^m \qquad \text{et} \qquad S \mid A^n = S \mid B^n.$$

COROLLAIRE 3. — Si les conjugués [1] respectifs des éléments A et B dans S — B et S — A sont identiques, A et B sont des éléments équivalents de S.

COROLLAIRE 4. — Si les degrés des éléments A et B d'un espace discret fini S sont tous deux $|S| - 1$, A et B sont des éléments équivalents de S.

COROLLAIRE 5. — Si un élément A de degré $m$ d'un espace discret S est invariant dans une transformation équivalence de S et, si parmi les $m$ éléments conjugués à A $m - 1$ sont aussi invariants dans la même transformation, tous les élément conjugués à A sont invariants.

---

[1] P/Q est appelé le conjugué de Q dans P [1 *a*].

Corollaire 6. — Si un élément A de degré *un* de S est un élément invariant dans une transformation équivalence de S, l'élément de S conjugué à A est aussi invariant dans la même transformation.

Lemme 6. — Si $P'$ et $Q'$ sont deux sous-espaces de $S'$ qui correspondent respectivement aux sous-espaces P et Q de S dans une correspondance biunivoque de S à $S'$, $P'+Q'$ et $P'Q'$ correspondent respectivement à $P+Q$ et à PQ dans cette correspondance.

Lemme 7. — Une condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces discrets à $n$ dimensions $W_n$ et $W'_n$ soient équivalents, est qu'il existe une correspondance biunivoque entre $W_n$ et $W'_n$ telle que si $m+1$ éléments de l'un de ces espaces constituent un

$$S'_m (m = 0, 1, 2, \dots n)$$

les $m+1$ éléments correspondants de l'autre espace constituent aussi un $S'_m$.

Corollaire 1. — Une transformation équivalence d'un espace discret est aussi une transformation équivalence de chacun de ses espaces dérivés [1].

De la définition des espaces discrets équivalents il suit immédiatement :

Théorème 3*a*. — Si P, Q et R sont des espaces discrets, alors $(i) P = P$, $(ii)$ si $P = Q$, $Q = P$ et $(iii)$ si $P = Q$ et $Q = R$, $P = R$.

Corollaire 1. — Si A et $A'$ sont des éléments correspondants de S et $S'$ dans une transformation équivalence de S en $S'$ et B un élément de S équivalent à A, il existe une transformation équivalence de S en $S'$ dans laquelle B et $A'$ se correspondent.

Corollaire 2. — Si $S \equiv \sum_{i=1}^{i=n} A_i$ (où $n$ est fini ou infini) [2] et

(1) Pour la définition de l'espace dérivé *voir* la définition 5*a*.

(2) Puisqu'un espace discret S contient un ensemble dénombrable d'éléments $[1^a_2]$ nous pouvons toujours écrire $S \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i$, car cela revient simplement à dire qu'une fonction *coordonnale* $[1^a_4]$ de S a été choisie et que $A_i$ désigne l'élément de S dont la coordonnée est $i$.

$S/A_i = S/A_{i+1}$, $A_i$ et $A_{i+1}$ étant des éléments de l'espace discret S, cet espace est *symétrique*.

Corollaire 3. — La somme de deux espaces symétriques équivalents et non connexes l'un à l'autre, est un espace symétrique.

Théorème 4*a*. — *Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que deux espèces à n dimensions* S *et* S′ *soient équivalents est qu'il existe une correspondance biunivoque entre* S *et* S′ *telle que si* A *et* A′ *sont deux éléments correspondants de* S *et* S′ *on ait* $S/A = S'/A'$ (1).

Il est clair, qu'une condition nécessaire pour que deux espaces discrets soient équivalents c'est que toutes leurs caractéristique intrinsèques soient égales. Il reste à montrer dans le cas des espaces généraux, que pour que deux espaces soient équivalents il suffit que l'on soit assuré seulement de l'égalité de certaines de leurs caractéristiques intrinsèques (2) en particulier, de l'égalité de celles qui sont mentionnées dans le théorème 2*a*. Cependant, il résulte immédiatement des définitions 3*a* et 3*c* le théorème suivant :

Théorème 5*a*. — *Une condition suffisante pour que deux espaces à zéro dimension soient équivalents c'est que leurs degrés soient égaux, et une condition suffisante pour que deux espaces à n dimensions soient équivalents c'est que leurs degrés (pseudo) soient nuls.*

Quant à l'expression de la connexité et de l'ordre de la somme de deux espaces discrets S et S′ en fonction de la connexité et de l'ordre de S et S′ elle résulte des quatre théorèmes très simples qui vont suivre. Le dernier donne une formule simple pour calculer l'ordre d'un espace non connexe lorsque les ordres de chacun de ses sous-espaces sont donnés et quand on sait lesquels de ces sous-espaces sont équivalents.

---

(1) Une transformation qui établit une telle correspondance entre les éléments de S et S′ est appelée une transformation pseudo-équivalence de S en S′ et les deux espaces sont appelés pseudo-équivalents.

(2) On peut construire des espaces pour lesquels le degré, la connexité, le nombre de dimenssions, les valeurs entières correspondantes de leurs $\rho$ — fonctions sont les mêmes, et qui cependant ne sont pas équivalents, mais je n'en connais que d'ordres différents.

THÉORÈME 6*a*. — *Si les espaces discrets* S *et* S′ *sont disjoints et satisfont à* $S \mid S' \equiv 0$, *alors* $C(S + S') = C(S) + C(S')$, *et réciproquement.*

THÉORÈME 7*a*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que les espaces* R, S *et* R′, S′ *qui satisfont aux conditions*

$$C(R) + C(S) = C(R' + S') \quad et \quad R = R'$$

*satisfassent aussi à la condition* $S = S'$ *est que* $R + S = R' + S'$ *et* $R'S' \equiv R' \mid S' \equiv 0$.

THÉORÈME 8*a*. — *Si les espaces discrets* S *et* S′ *sont équivalents dans la transformation* $X' = T(X)$, *alors* (*i*) *le sous-espace* R′ *de* S′ *qui correspond à* R *dans* $X' = T(X)$ *est, ou n'est pas connexe à* $S' - R'$ selon que R est, ou n'est pas connexe à $S - R$, (*ii*) $R = R'$ *et* (*iii*) $S - R = S' - R'$.

COROLLAIRE 1. — Si A et A′ sont des éléments correspondants de S et S′ dans une transformation équivalence de S en S′, le sous-espace connexe entier [1] de S qui contient l'élément A est équivalent au sous-espace connexe entier de S′ qui contient l'élément A′.

THÉORÈME 9*a*. — *Soient deux espaces discrets* S *et* S′ *d'ordres* $k$ *et* $k'$, S′ *étant connexe et la relation* $C(S + S') = C(S) + C(S')$ *étant satisfaite : l'ordre de* $S + S'$ *est* $(n + 1)kk'$ *si* S′ *est équivalent à* $n$ *sous-espaces de* S *tels que la somme de deux quelconques d'entre eux ne soit pas connexe, et réciproquement.*

COROLLAIRE 1. — Si les $n$ sous-espaces connexes d'un espace discret S de connexité $n$ sont tous équivalents et d'ordre $k$, l'ordre de S est $k^n n!$

COROLLAIRE 2. — Si $k$ et $k'$ sont respectivement les ordres de S et S′, si $C(S + S') = C(S) + C(S')$, et si enfin aucun sous-espace connexe de S n'est équivalent à un sous-espace connexe de S′, l'ordre de $S + S'$ est $kk'$.

Nous allons démontrer maintenant que si $m$ est le degré d'un espace discret S, l'ordre de S est un facteur de $m$!

En effet :

---

[1] Un *sous-espace entier* R de S est un sous espace de S qui satisfait $S \mid R \equiv 0$ [1*a*].

Théorème 10*a*. — *La totalité des transformations équivalences d'un espace discret* S *forment un groupe; et si* S *n'est ni un espace à zéro dimension, ni un espace à n dimensions de degré zéro, le groupe des transformations équivalences de* S *est un sous-groupe symétrique d'ordre* $m!$, *où* $m = |S|$.

Puisque les transformations équivalences de S sont biunivoques il est suffisant de montrer que le produit de deux quelconques des transformations équivalences de S est une transformation équivalence de S.

En effet, soient $A_{i_n} = T_1(A_n)$ et $A_{j_n} = T_2(A_n)$ (1) $(n = 1, 2, \ldots |S|)$ deux transformations équivalences de S, posons $i_n \equiv \varphi(n)$, et considérons deux éléments quelconques $A_m$ et $A_n$ de S; alors, suivant que $A_m$ est, ou n'est pas conjugué à $A_n$, $A_{\varphi(m)}$ est, ou n'est pas conjugué à $A_{\varphi(n)}$, et $A_{j_{\varphi(m)}}$ est, ou n'est pas conjugué à $A_{j_{\varphi(n)}}$. Par suite le produit des deux transformations $T_1$ et $T_2$, à savoir $A_{j_{\varphi(n)}} = T_2[T_1(A_n)]$ est une transformation équivalence de S.

De même nous démontrons :

Théorème 11*a*. — *La totalité des transformations pseudo-équivalences d'un espace discret* S *forment un groupe; et, si* S *n'est pas symétrique, le groupe des transformations pseudo-équivalences de* S *est un sous-groupe du groupe symétrique d'ordre* $m!$ *où* $m = |S|$.

Corollaire 1. — Le groupe des transformations équivalences d'un espace discret est, soit identique au groupe des pseudo-transformations équivalences du même espace, soit à un sous-groupe de ce groupe.

Corollaire 2. — L'ordre d'un espace discret S est un facteur du pseudo-ordre (2) de S.

---

(1) *Voir* note à $3_2^a$. On peut faire cette démonstration sans se servir des coordonnées, mais la marche suivie est plus concrète.

(2) Le speudo-ordre d'un espace discret S c'est le nombre des transformations pseudo-équivalences qui transforment S en lui-même, et le pseudo-ordre d'un espace symétrique, de même que l'ordre d'un espace à zéro dimension ou d'un espace à $n$ dimensions de degré zéro, est $m!$, où $m = |S|$.

THÉORÈME 12*a*. — *A toute transformation équivalence d'un espace discret* S *il correspond un ensemble dénombrable de sous-espaces disjoints, dont la somme est* S, *tels que chacun de ces sous-espaces soit une suite cyclique par rapport à cette transformation et telle que le plus petit commun multiple des degrés de ces sous-espaces soit égal à l'ordre de cette transformation* ([1]).

Les suites cycliques d'un espace discret jouent un rôle important dans la détermination des groupes des transformations équivalences de cet espace. Sans entrer dans les détails nous donnerons cependant quelques théorèmes simples sur ces suites. Nous commençons par quelques lemmes.

LEMME 8. — Si $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ est une $m$-suite de S cyclique par rapport à une transformation équivalence (pseudo-équivalence) $X' = T(X)$ de S la $k^{\text{ième}}$ puissance de cette transformation $X' = T^k(X)$ satisfait à $A_{n+k} = T^k(A_n)$ $(n = 0, 1, \ldots m-1$; mod $m)$.

COROLLAIRE 1. — Toute $m$-suite de S cyclique par rapport à une transformation équivalence (ou pseudo-équivalence) de S est aussi cyclique par rapport à toute puissance de cette transformation.

LEMME 9. — Si $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ est une $m$-suite de S cyclique par rapport à une transformation équivalence de S, $A_i$ est, ou n'est pas conjugué à $A_j$ selon que $A_{i+1}$ est, ou n'est pas conjugué à $A_{j+1}$ (mod $m$.).

COROLLAIRE 1. — Si $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ est une $m$-suite de S cyclique par rapport à une transformation équivalence de S, $A_i$ est, ou n'est pas conjugué à $A_{i+k}$ selon que $A_{i+k}$ est, ou n'est pas conjugué à $A_{i+2k}$ (mod $m$).

COROLLAIRE 2. — Le groupe des transformations équivalences d'une $m$-suite de S qui est cyclique par rapport à une transformation équivalence de S contient le groupe de substitutions qui trans-

---

(1) Si S est infini est si le nombre des sous-espaces est fini, l'un des sous-espaces doit être infini, et l'ordre de la transformation est alors évidemment infini. Par suite, il nous faut, dans la démonstration de la dernière partie du théorème, nous borner au cas où chaque sous-espace est fini.

forment un $m$-agone (1) régulier en lui-même, et par suite, l'ordre de la $m$-suite n'est pas inférieure à $2m$.

Lemme 10. — Soient P et Q deux sous-espaces disjoints d'un espace discret S dont la somme est S, soit $R \equiv P|Q + Q|P$, et soient $T_1$ et $T_2$ respectivement des transformations équivalences de P et Q : une transformation biunivoque T de S qui est identique à $T_1$ dans P (2) et à $T_2$ dans Q est une transformation équivalence de S si (et dans ce cas seulement), T est une transformation équivalence de R.

Corollaire 1. — Si $T_1$ et $T_2$ sont respectivement des transformations équivalences des espaces *conjugués* P et Q dont la somme est S, la transformation T de S identique à la transformation $T_1$ dans P et à $T_2$ dans Q est une transformation équivalence de S.

Corollaire 2. — Si un sous-espace R d'un espace discret S satisfait à la condition que les *conjugués* dans S — R de tout élément de R soient identiques, alors à toute transformation équivalence T de R il correspond une transformation équivalence T′ de S, dans laquelle chaque élément de S — R est invariant, et identique à T dans R.

Corollaire 3. — Si un espace discret contient deux espaces *conjugués* P et Q de somme S, l'ordre de S est égal au produit des ordres de P et Q si (et dans ce cas seulement) P (et par suite, aussi Q) est invariant (3) dans chaque transformation équivalence de S.

Corollaire 4. — Selon qu'un espace à $n$ dimensions de degré *un* contient ou non un élément de degré $k$ inférieur à $n$, l'ordre de cet espace est $k\,!\,(n - k + 1)\,!$ ou $2n\,!$.

Corollaire 5. — L'ensemble des espaces différents à $n$ dimensions de degré *un* est $n + 1$ ; et, de ces $n + 1$ espaces un seul n'est pas connexe.

**Lemme 11. — Si les éléments d'un hyperespace S′ sont sous-espaces du sous-espace *connexe entier* d'un espace discret S, et si deux**

(1) $m$-agone étant une simple abréviation de polygone de $m$-côtés.
(2) C'est-à-dire $T(A) \equiv T_1(A)$ pour tout élément A quelconque P.
(3) C'est-à-dire T(A) est un élément de P pour chaque transformation équivalence T de S et pour chaque élément A de P.

éléments P et Q de S′ sont conjugués quand (et dans ce cas seulement), considérés *comme sous-espaces de* S ils sont connexes l'un à l'autre, on a $C(S) = C(S')$.

THÉORÈME 13*a*. — *Toute suite d'éléments d'un espace discret* S *cyclique par rapport à une transformation équivalence de* S *est un espace symétrique.*

En effet, soient $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ une $m$-suite de S cyclique par rapport à une transformation équivalence de S, et soient $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ tous les éléments de cette $m$-suite conjugués à $A_i$; alors tous les éléments de cette suite conjugués à $A_{i+1}$ sont $A_{j_1+1}, A_{j_2+1}, \ldots, A_{j_k+1}$ [9] et $A_{j_m}$ est, ou n'est pas conjugué à $A_{j_n}$ selon que $A_{j_m+1}$ est ou n'est pas conjugué à $A_{j_n+1}$. Par suite $\sum_{n=0}^{m-1} A_n / A_i = \sum_{n=0}^{m-1} A_n / A_{i+1}$ et, par suite, cette $m$-suite est un espace symétrique [$3_2^a$].

COROLLAIRE 1. — Le nombre de dimensions d'une $m$-suite cyclique de S est le même que celui de tout sous-espace *connexe entier* de cette $m$-suite.

COROLLAIRE 2. — Une 3-suite cyclique est soit un $S_0^3$, soit un $S_2'$. Une 4-suite cyclique est soit un $S_0^4$, un $S_1^2$, un $S_3'$, ou 2 espaces $S_1'$. Une 5-suite cyclique est soit un $S_0^5$, un $S_1^2$ ou un $S_4'$. Une 6-suite cyclique est soit un $S_0^6$, un $S_1^2$, un $S_2^2$, un $U_2$, un $S_5'$, 2 espaces $S_2'$, ou 3 espaces $S_1'$. [Pour les définitions de ces espaces voir la définition suivante (4*c*)].

THÉORÈME 14*a*. — *Si* $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ *et* $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ *sont respectivement une m-suite et une n-suite d'un espace discret* S *cycliques par rapport à une transformation équivalence de* S, *alors* $A_i$ *est, ou n'est pas, conjugué à* $B_j$ *selon que* $A_{i+1}$ (mod $m$) *est, ou n'est pas, conjugué à* $B_{j+1}$ (mod $m$).

COROLLAIRE 1. — Si $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ et $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ sont deux $m$-suites de S cycliques par rapport à une transformation équivalence de S, $A_i$ est, ou n'est pas, conjugué à $B_j$ selon que $A_{i+1}$ est, ou n'est pas, conjugué à $B_{j+1}$.

COROLLAIRE 2. — Si deux $m$-suites de S cycliques par rapport à une transformation équivalence de S sont connexes l'une à l'autre, à tout élément A de ces $m$-suites, il correspond au moins un élément B de l'autre $m$-suite conjugué à A.

Corollaire 3. — Si R et R′ sont deux suites de S cycliques par rapport à une transformation équivalence de S le nombre des éléments de R′ conjugués à un élément de R est le même pour tous les éléments de R. (Ce nombre est appelé l'ordre de contact entre R, R′ et, par suite, si $k$ et $k'$ sont respectivement l'ordre de contact entre R, R′ et R′, R, alors $k|R| = k'|R'|$).

Corollaire 4. — Si P et Q sont deux suites de S cycliques par rapport à une transformation équivalence de S, le sous-espace P′ qui contient tous les éléments de P connexes à Q est *symétrique*.

Corollaire 5. — Si une $m$-suite et une $n$-suite de S cycliques par rapport à une transformation équivalence de S, $m$ et $n$ étant premiers entre eux, sont connexes l'un à l'autre, ils sont conjugués (1).

Théorème 15*a*. — *Si un espace discret* S *possède deux transformations équivalences, d'ordre m et n respectivement, telles que tous les éléments de* S *qui ne sont pas les éléments invariants dans une de ces deux transformations soient les éléments invariants dans l'autre, l'ordre de* S *est supérieur ou égal à mn.*

En effet, soit R les éléments non invariants de S dans $T_1$ et soit T la transformation biunivoque de S identique à $T_1^k$ dans R et à $T_2^l$ dans S — R ($k \leq m$; $l \leq n$). Alors T est une transformation équivalence dans R et dans S — R. Soient A et B respectivement deux éléments quelconques de R et de S — R, et soient A′ et B′ leurs transformés dans T; alors, puisque $T_1^k$ est une transformation équivalence de S [8, 14*a*] et que B est un élément invariant de S dans $T_1^k$ [8$_1$], A est, ou n'est pas, conjugué à B selon que A′ est, ou n'est pas, conjugué à B; et, puisque $T_2^l$ est une transformation équivalence de S et que A′ est un élément invariant de S dans $T_2^l$, A′ est, ou n'est pas, conjugué à B selon que A′ est, ou n'est pas, conjugué à B′. Par suite, T est une transformation équivalence de S [5] et, par suite, l'ordre de S est supérieur ou égal à $mn$.

(1) Deux espaces P et Q sont conjugués si $P/Q \equiv P$, et par suite, $Q/P \equiv Q$; *voir* l'Appendice.

Théorème 16*a*. — *Si un espace discret* S *contient une seule m-suite* R *cyclique par rapport à une transformation équivalence* $T_1$, *d'ordre* $k$, *de* S *et si les degrés de toutes les autres suites de* S *cycliques par rapport à* $T_1$ *et connexes à* R *sont premiers avec* $m$, *la transformation biunivoque de* S *identique à* T *dans* S — R *et identique à une « trantformation involutive » de la m-suite* R (¹) *dans* R *est une transformation équivalence de* S [$9_2$, $14_5^a$].

Corollaire 1. — L'ordre de l'espace discret S dans le dernier théorème est supérieur ou égal à $k + m(l - 1)$, où $l$ est le plus petit commun multiple de $k/m$ et 2.

Théorème 17*a*. — *A tout sous-espace connexe* R *de* S *qui consiste en m-suites cycliques par rapport à une même transformation équivalence* T *de* S *il correspond un sous-espace connexe* R′ *de* R, *qui contient un seul élément de chaque m-suite cyclique de* R.

En effet, soit T(R) un sous-espace de l'hyperespace T(S) dont les éléments sont les *m-suites cycliques dans* R; alors, puisque R est connexe T(R) est aussi connexe [11]. Soient P un élément de T(R) et $P_1^n$, $P_2^n$, ..., $P_k^n$, ... les $m$-suites de S qui sont les éléments de $T(R)|P^n$, soient $A_{k,1}^n$, $A_{k,2}^n$, ..., $A_{k,m}^n$ les éléments de la $m$-suite $P_k^n$, et soit R′ un sous-espace de R qui contient un élément A de P, les éléments $A_{1,j_1^1}^1$, $A_{2,j_2^1}^1$, ..., $A_{k,j_k^1}^1$, ... conjugués à A, et les éléments $A_{1,j_1^{n+1}}^{n+1}$, $A_{2,j_2^{n+1}}^{n+1}$, ..., $A_{k,j_k^{n+1}}^{n+1}$, ... conjugués chacun à au moins un élément de l'ensemble $A_{1,j_1^n}^n$, $A_{2,j_2^n}^n$, ..., $A_{k,j_k^n}^n$, ... ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Alors tous les éléments $A_{k,j_k^{n+1}}^{n+1}$ ($k = 1, 2, \ldots$) sont dans le $(n+1)^{\text{ième}}$ voisinage de A dans R, et R′ est connexe [$1_1^a$] et contient un seul élément de chaque $m$-suite cyclique dans R.

Corollaire 1. — A tout sous-espace connexe R de S qui consiste en $m$-suites de S cycliques par rapport à une transformation équivalence de S il correspond $m$ sous-espaces connexes équivalents et

---

(¹) C'est-à-dire une transformation, qui correspond à une rotation d'un $m$-agone régulier autour de l'un de ses axes de symétrie.

disjoints de R contenant chacun un seul élément de toute $m$-suite cyclique de R [2 $b$].

Corollaire 2. — Si R contient tous les éléments d'un espace discret S invariant dans une transformation équivalence involutive de S, alors S — R contient deux sous-espaces équivalents disjoints dont la somme est S — R et dont la connexité est inférieure ou au plus égale à $C(S-R)$.

Corollaire 3. — Si aucun élément d'un espace discret connexe S n'est invariant dans une transformation équivalence *involutive* de S, alors S contient deux sous-espaces équivalents, connexes et disjoints et dont la somme est S.

Le dernier théorème nous permet de définir un hyperespace S′ *complémentaire* à l'hyperespace T(S) [2 $c$], où les éléments de S′ contrairement à ceux de T(S), sont toujours sous-espaces connexes de l'espace discret S, et où la condition pour que deux éléments soient conjugués est, comme avant, que ces éléments considérés *comme sous-espaces* de S soient connexes l'un à l'autre.

Définition 2$d$. Soient :

1° T une transformation équivalence de l'espace discret S;

2° R$m$ le sous-espace de S consistant en toutes les $m$- suites de S cycliques par rapport à T;

3° $R^1_m, R^2_m, \ldots, R^n_m, \ldots$ les sous-espaces *connexes entiers* de R$m$. Alors, un *hyperespace complémentaire à l'hyperespace* T(S) est un hyperespace ($i$) dont les éléments sont

$$R^n_{m,1},\ R^n_{m,2},\ \ldots\ R^n_{m,m}\ (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

où $R^n_{m,1}$, $R^n_{m,2}$, ..., $R^n_{m,m}$ sont sous-espaces connexes, équivalents et disjoints de $R^n_m$ contenant chacun un seul élément de toute $m$- suite cyclique de $R^n_m$ [17 $^a_1$] (¹), et ($ii$) qui satisfait à la condition que deux quelconques de ses éléments, $R^n_{m,i}$ et $R^l_{k,j}$, soient conjugués si, *considérés* comme sous-espaces de S ils satisfont à $R^n_{m,i} \mid R^l_{k,j} \not\equiv 0$ (*voir* 2$c$).

Théorème 18$a$. — *Si* T *est une transformation équivalence d'un espace discret* S *et si* S′ *est un hyperespace complémentaire à* T(S), *alors* $C(S) = C(S')$, *et s'il n'y a pas dans* S *deux sous-espaces connexes entiers équivalents*, $C(S) = C[T(S)]$.

---

(¹) A tout $R^n_{m,i}$ il correspond un $R^n_{m,j}$ tel que $R^n_{m,j} = T\,(R^n_{m,i})$.

Corollaire 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret S soit connexe est que l'hyperespace T(S) (où T est une transformation équivalence de S), de même que chaque hyperespace complémentaire à T(S), soit connexe.

Corollaire 2. — Si T est la transformation identique de S, T(S) ≡ S et il existe un seul hyperespace à zéro dimension complémentaire à T(S) et dont le degré (pseudo-degré) est égal à la connexité de S diminué de 1.

Théorème 19*a*. — *Si* T *est une transformation équivalence d'un espace discret* S, *le degré de tout hyperespace complémentaire à* T(S) *n'est pas supérieur au degré de* S, *et n'est pas inférieur à l'ordre de* T, *et tous les hyperespaces complémentaires à* T(S) *ont le même degré.*

Corollaire 1. — Si T est une transformation équivalence de l'espace discret S et si un hyperespace complémentaire à T(S) consiste en deux éléments conjugués, S est connexe, T est involutive et aucun élément de S n'est invariant dans la transformation T.

Corollaire 2. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hyperespace complémentaire à T(S) soit identique à S (T étant une transformation équivalence de S) est qu'il n'y ait pas deux $m$-suites de S cycliques par rapport à T qui soient connexes l'un à l'autre.

Théorème 20*a*. — *Une transformation équivalence* T *de l'espace discret* S *est aussi une transformation équivalence de tout hyperespace complémentaire à* T(S).

Corollaire 1. — L'ordre d'un hyperespace complémentaire à T(S) est supérieur ou égal à l'ordre de T.

Théorème 21*a*. — *Soient* T *une transformation équivalence d'un espace discret* S *et* R *un ensemble connexe entier de m-suites cycliques par rapport à* T : *le sous-espace (correspondant à* R) *d'un hyperespace complémentaire à* T(S) *est symétrique et son nombre de dimensions n'est pas moindre que celui de chaque m-suite de* R ; *et, si le sous-espace correspondant à* R *d'un hyperespace complémentaire à* T(S) *est à zéro dimension, le sous-*

*espace correspondant à* R, *de n'importe quel autre espace complémentaire à* T(S) *est aussi à zéro dimension.*

Théorème 22*a*. — *Soient :*

T *une transformation équivalence de l'espace discret* S;

P *et* Q, *deux ensembles connexes entiers de m-suites et de n-suites de* S (*cycliques par rapport à* T) *connexes l'un à l'autre;*

P′ *et* Q′ *les sous-espaces correspondant à* P *et* Q *d'un hyperespace* S′ *complémentaire à* T(S).

*Le sous-espace* P″ *qui contient tous les éléments de* P′ *connexes à* Q′ *est symétrique et, si les degrés de* P′ *et* Q′ *sont premiers entre eux*, P′ *et* Q′ *sont conjugués.*

Corollaire 1. — Si les degrés des suites de S cycliques par rapport à T, ne sont pas supérieurs à *trois*, deux hyperespaces quelconques complémentaires à T(S) sont *équivalents*.

Corollaire 2. — Si T est une transformation équivalence involutive de S, deux hyperespaces quelconques complémentaires à T(S) sont équivalents.

Quand le degré $m$ d'un espace discret S est donné à l'avance, il n'est pas toujours possible de construire un espace de ce degré et dont le groupe de ses transformations équivalences soit un sous-groupe quelconque du groupe symétrique d'ordre $m!$ [$9_2$], mais il est facile de démontrer que cela est possible pour certains sous-groupes du groupe symétrique d'ordre $m!$

Théorème 23*a*. — *A tout entier positif m* ($m > 5$) *il correspond au moins un espace discret connexe* S, *à deux dimensions, d'ordre* 1 *et de degré m.*

En effet, soit (AB) un arc discret de degré $m - 1$ dont les extrémités sont A, B et soit E un élément extérieur de (AB) conjugué à deux éléments C, D de (AB) et à aucun autre élément de (AB), C étant conjugué à A. Alors $S \equiv (AB) + E$ est connexe et de dimension 2, et, puisque $S|A^2$ et $S|B^2$ sont respectivement de degré 2 et 1, A et B sont invariants dans toute transformation équivalence de S [$5_2$, $2^a$]. D'ailleurs, puisque E est de degré 2, C et D de degré 3,

$S|C^2$ de degré 1, et $S|D^2$ de degré 2 —, les éléments C, D et E sont des éléments invariants de S et, par suite, la seule transformation équivalence de S est la transformation identique [1].

Nous démontrons de la même façon :

Théorème 24*a*. — *A tout entier positif m* ($m > 1$) *il correspond un espace discret connexe à deux dimensions, de degré* $3m$ *et d'ordre m.*

Le nombre des espaces discrets *différents* (c'est-à-dire non équivalents) d'un degré quelconque $m$ n'est pas encore connu. Mais nous donnerons dans les théorèmes suivants une limite inférieure et une limite supérieure pour ce nombre.

Théorème 25*a*. — *Si* $\varphi_k(m)$ *est le nombre des espaces discrets différents de degré m de connexité k,* $\varphi_k(m+1) \geqq \sum_{i=k}^{i=m} \varphi_i(m)$.

En effet, soit S la totalité des espaces discrets différents de degré $m$ et de connexité supérieure ou égale à $k$, et soit S′ la totalité des espaces discrets dans laquelle un espace P′ de S′ consiste en un espace P de connexité $p$ ($p \geqq k$) de S et en un élément conjugué à un sous-espace P″ de P et à aucun autre élément de P — P″ où

$$(i)\, P'' = P_1 + P_2 + \ldots + P_{p-k+1} \qquad (ii)\, P = P_1 + P_2 + \ldots + P_p,$$
$$(iii)\, |P_i| \geqq |P_{i+1}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

et enfin

$$(iv)\, C(P_i) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Alors tout espace dans S′ est de degré $m + 1$ et de connexité $k$. Nous allons démontrer que S′ ne contient pas deux espaces équivalents et, par suite $\varphi_k(m+1) \geqq \sum_{i=k}^{i=m} \varphi_i(m)$.

Soient P′ et Q′ deux espaces quelconques de S′, P et Q les espaces correspondants de S, soient

$$A \equiv P' - P, \qquad B \equiv Q' - Q,$$
$$P'' \equiv P' | A, \qquad Q'' \equiv Q' | B,$$

---

[1] Cette démonstration s'étend à des cas plus généraux que celui que nous venons de considérer.

et supposons que $P' = Q'$. Alors

$$P'' + A + (P - P'') = Q'' + B + (Q - Q''), \qquad P \mid P'' \equiv Q \mid Q'' \equiv 0,$$
$$C(P'' + A) = C(Q'' + B) = 1$$

et le degré de tout sous-espace connexe de $Q - Q''$ est moindre que $| P'' + A |$. Par suite

$$P'' + A = Q'' + B, \qquad | P'' | = | Q'' |, \qquad P - P'' = Q - Q'' \qquad [2^a, 7^a].$$

Or l'élément A de $P'' + A$ et l'élément B de $Q'' + B$ sont tous deux de degré $| P'' |$, et chaque élément de $Q'' + B$ de degré $| P'' |$ est équivalent à B $[2c\, 5_4]$. Par suite, puisque les espaces $P'' + A$ et $Q'' + B$ sont équivalents, il existe une transformation équivalence de $P'' + A$ en $Q'' + B$ dans lequel les éléments A et B se correspondent $[3^a_1]$, et, par suite, $P'' = Q''$ $[8^a]$ et $P = Q$ $[7^a]$, ce qui contredit notre hypothèse.

Corollaire 1. — Le nombre des espaces discrets différents connexes de degré $m$ est plus grand que le nombre des espaces discrets différents connexes et non connexes de degré $m - 1$.

Du dernier théorème il suit :

Théorème 26$a$. — *Si $\varphi(m)$ est le nombre des espaces discrets différents de degré $m$,* $2^{m-1} \leqq \varphi(m) \leqq 2^{\frac{m!(m-1)}{2}}$.

On établit de la même façon :

Théorème 27$a$. — *Le nombre $\varphi(m)$ des espaces discrets différents de degré $m$ satisfait à*

$$2^{m-2} + \varphi_1^{(m)} \leqq \varphi(m+1) \leqq 2^m \varphi(m), \qquad \varphi_{m-k}^{(m)} = \varphi_k^{(2k)} \qquad (2k \leqq m),$$

$$\varphi_2^{(m)} = \varphi_1^{(m-1)}\varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(m-2)}\varphi_1^{(2)} + \ldots + \varphi_1\left(\frac{m+1}{2}\right)\varphi_1\left(\frac{m-1}{2}\right) \qquad (m \text{ impair})$$

$$\varphi_2^{(m)} = \varphi_1^{(m-1)}\varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(m-2)}\varphi_1^{(2)} + \ldots + \varphi_1\left(\frac{m}{2}\right)\left[\frac{\varphi_1\left(\frac{m}{2}\right)+1}{2}\right] \quad (m \text{ pair}), \text{ etc.}$$

Corollaire 1. — Il n'existe qu'un seul espace discret de degré $m$ et de connexité $m - 1$ (c'est-à-dire $\varphi^{m-1}(m) = 1$ dont l'ordre soit $2(m-2)!$.

Nous terminerons ce chapitre par quelques résultats relatifs aux espaces discrets de degré $m$ inférieur ou égal à $|S|$ et de connexité inférieure à $m - 1$.

THÉORÈME 28*a*. — Le nombre des espaces discrets connexes, différents, de degré 3 est deux : l'un d'ordre 2, l'autre d'ordre 6. Le nombre des espaces discrets, différents, de degré 4 et de connexité 2 est trois, d'ordres 2,6 et 8; et le nombre de ces espaces qui sont connexes est six : trois à une dimension, d'ordres 2,6 et 8, deux à deux dimensions d'ordres 2 et 4, et un à trois dimensions d'ordre 24. Le nombre des espaces discrets, différents, de degré 5 et la connexité 3 est trois, d'ordres 4,8 et 12; le nombre de ces espaces de connexité deux est huit : quatre à une dimension, d'ordres 2, 4, 6 et 8, trois à deux dimensions d'ordres 2,4 et 12, et un à trois dimensions d'ordre 24; et le nombre de ces espaces qui sont connexes est vingt et un : (*a*) six à une dimension dans lesquels trois sont d'ordre 2 et de pseudo-ordre 6 ou 12 et trois d'ordre 10, 12 et 24; (*b*) cinq à deux dimensions de pseudo-dimension, *un* dans lesquels trois sont d'ordre 2 et de pseudo-ordre 2 ou 4 et deux d'ordre 4 et 8; (*c*) six à deux dimensions également de pseudo-dimension dans lesquels trois sont d'ordre 2 et de pseudo-ordre 2 ou 4 et trois d'ordre 4,8 et 12; (*d*) trois à trois dimensions d'ordre 4, 6 et 12, et enfin (*e*) un à quatre dimensions d'ordre 120.

COROLLAIRE 1. — Deux espaces discrets de degré cinq ou moins, pour lesquels la connexité, le nombre de dimensions, le degré, l'ordre et les valeurs entières correspondantes de leur $\rho$ — fonctions sont les mêmes, sont équivalents (*voir* $5^a$ et note).

COROLLAIRE 2. — L'ordre de tout espace discret de degré $m\,(1 < m < 6)$ est pair (*voir* $23^a$).

# CHAPITRE II.

## ESPACES DISCRETS DENSES ET NORMAUX.

Jusqu'ici nous avons étudié les espaces discrets généraux et les nombres que nous avons définis pour ces espaces, comme la connexité, la dimension, la pseudo-dimension, le degré, l'ordre, le pseudo-ordre, existent pour tout espace discret. Nous allons maintenant donner une classification des espaces discrets en procédant comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction. Nous définirons la classe et la pseudo-classe qui sont des nombres n'existant pas pour tous les espaces discrets, mais qui existent cependant pour des espaces normaux qui nous intéressent et pour beaucoup des dérivés des espaces normaux.

Définition 4*a*. — Un espace discret, à $n$ dimensions est un espace *dense*, $V_n$, si pour tout $S'_m$ de $V_n$ ($m = 0, 1, \ldots n-1$) $V_n/S'_m$ *n'est pas vide.*

*b*) Un espace discret connexe à $n$ dimensions est un espace *normal*, $S_n$, si pour tout $S'_m$ de $S_n$ ($m = 0, 1, \ldots n-2$) $S_n/S'_m$ *est connexe* (¹);

*c*) Un espace discret $W_n$ (à $n$ dimensions) est de classe $m$, si pour tout $S'_{n-1}$ de $W_n$ on a $C(W_n/S'_{n-1}) = m$ (²).

(Nous emploierons souvent la phrase « un espace normal $S_n^m$ » pour la phrase « un espace normal à $n$ dimensions de classe $m$ »,

Nous emploierons aussi les phrases « un espace $V_n$ » et « un espace $S_n$ » pour les phrases « un espace dense à $n$ dimensions » et « un espace normal à $n$ dimensions ») (³);

(¹) Par suite, un espace *normal* est un espace *dense*, mais la réciproque n'est pas vraie.

(²) Le lecteur est prié de faire des figures au moins pour les cas $n = 2$.

(³) Les espaces $V_0$, $S_0$ et $S_0^m$ sont tous des espaces discrets à zéro dimension, le dernier contenant $m$ éléments.

*d*) Un espace discret S de pseudo-dimension $n$ est un espace de pseudo-classe $m$, si pour tout $S'_{n-1}$ de S on a $C(S/S'_{n-1}) = m$.

Théorème 1 *b*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret* S, *fini ou infini, soit un espace* $V_n (n \geqq 1)$ *est que pour tout* $S'_m$ *de* S $(m = 0, 1, \ldots l;\ l < n)$, $S/S'_m$ *ne soit pas vide et que pour tout* $S'_l$ *de* S, $S/S'_l$ *soit un espace* $V_{n-l-1}$.

Corollaire 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret S soit un espace $V_n$ $(n \geqq 1)$ est que pour tout élément A de S, S/A soit un espace $V_{n-1}$.

Corollaire 2. — Si $S_n^m$ contient $S'_{n-1}$, $S_n^m / S'_{n-1}$ est un $S_0^m$.

Corollaire 3. — Si pour tout $S'_{n-1}$ d'un espace $S_n$ on a

$$| S_n / S'_{n-1} | = m,$$

$S_n$ est un espace normal $S_n^m$.

Théorème 2 *b*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret connexe* S, *fini ou infini, soit un espace* $S_n$ $(n \geqq 1)$ *est que pour tout* $S'_m$ *de* S $(m = 0, 1, \ldots l;\ l < n - 2)$ $S/S'_m$ *soit connexe et que pour tout* $S'_l$ *de* S, $S/S'_l$ *soit un espace* $S_{n-l-1}$.

La condition est nécessaire. En effet, pour tout $S'_m$ de $S_n$ $(m \leqq l < n - 2)$ $S_n / S'_m$ est connexe [4*b*], et pour tout $S'_l$ de $S_n$, $S_n / S'_l$ est un espace $V_{n-l-1}$ connexe [1*b*]. Or pour tout $S'_k$ de $V_{n-l-1}$ $(k < n - l - 2)$, $V_{n-l-1} / S'_k$ est connexe car,

$$V_{n-l-1}/S'_k \equiv (S_n/S'_l)/S'_k \equiv S_n/(S'_k + S'_l)\ [f^0] \text{ et } C[S_n/(S'_k + S'_l)] = 1\ [4b],$$

et, par suite, $V_{n-l-1}$ est un espace $S_{n-l-1}$.

La condition est suffisante. En effet, à tout $S'_k$ de S $(l < k < n - 1)$ et à tout $S'_l$ de $S'_k$ il correspond un $S'_{k-l-1}$ identique à $S'_k - S'_l$ tel que $S/S'_l$ soit un espace $S_{n-l-1}$ contenant $S'_{-l-1}$. Donc, puisque

$$S_{n-l-1}/S'_{k-l-1}$$

est connexe, $S/S'_k$ est connexe, et, puisque S est connexe il est un espace $S_n$.

Corollaire 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret connexe S soit un espace $S_n$ $(n \geqq 1)$ est que pour tout élément A de S, S/A soit un espace $S_{n-1}$.

Corollaire 2. — Tout élément A d'un $S'_{n-1}$ contenu dans un espace $S_n$ $(n \geqq 1)$ est connexe à tout sous-espace connexe entier R de $S_n - S'_{n-1}$. (Puisque

$$S_n/(S'_{n-1}-A) \equiv R/(S'_{n-1}-A)+(S_n - S'_{n-1}-R)/(S'_{n-1}-A)+A$$

est connexe, et $(S_n - S'_{n-1} - R) | R \equiv 0)$.

Corollaire 3. — Si la pseudo-dimension d'un espace $S_n$ est différente de $n$, la pseudo-classe de $S_n$ existe et est égale à *un*; et, si la pseudo-dimension de $S_n$ est $n$ et si la pseudo-classe de $S_n$ existe, $S_n$ est un espace normal.

De même :

Théorème 3*b*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret connexe* S, *fini ou infini, soit un espace normal* $S^m_n$ $(n \geqq 1)$ *est que pour tout* $S'_k$ *de* S $(k = 0, 1, \ldots l;$ $l < n-1)$ $S/S'_k$ *soit connexe et que pour tout* $S'_l$ *de* S, $S/S'_l$ *soit un espace normal* $S^m_{n-l-1}$.

Corollaire 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret connexe S soit un espace normal $S^m_n (n \geqq 1)$ est que pour tout élément A de S, S/A soit un espace normal $S^m_{n-1}$.

Corollaire 2. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret S soit un espace normal à $n$ dimensions de *classe un* est que S soit un $S'_n$.

Corollaire 3. — La pseudo-dimension est la pseudo-classe d'un espace normal $S^m_n$ $(m > 1)$ sont respectivement égales à la dimension et à la classe de cet espace.

Corollaire 4. — Pour tout $S^m_{n-1}$ continu dans un $S^m_n$ on a

$$|S^m_n - S^m_{n-1}| \geqq m \, [1^b_2, \; 3_a].$$

Corollaire 5. — Pour tout $S^m_k$ contenu dans un $S^m_n (k < n)$, $S^m_n - S^m_k$ contient un $S^m_{n-k-1}$.

Théorème 4*b*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour* *qu'un espace discret* S *de pseudo-dimension n et de pseudo-classe m soit un espace* $V_k$ $(n \leq k)$ *est que pour tout* $S'_l$ *de* S $(l = 0, 1, \ldots n-1)$ $S/S'_l$ *ne soit pas vide et que pour tout* $S'_{n-1}$ *de* S *les m sous-espaces connexes de* $S/S'_{n-1}$ *soient équivalents et à* $k-n$ *dimensions.*

La condition est nécessaire. En effet, puisque S est à $k$ dimensions, pour tout $S'_{n-1}$ de S les $m$ espaces connexes de $S/S'_{n-1}$ sont chacun un $S'_l$ $(l \leq k-n)$, et, puisque S est un espace $V_k$, ces $m$ espaces ont tous même nombre de dimensions $k-n$ et, par suite sont équivalents.

La conditîon est suffisante. En effet, pour tout $S'_{n-1}$ de S, les $m$ espaces connexes de $S/S'_n$ sont à $k-n$ dimensions; $S/S'_{n-1}$ est donc un espace $V_{k-n}$. Or, puisque $S/S'_l$ n'est pas vide pour tout $S'_l$ de S $(l = 0, \ldots n-1)$, S est un espace $V_k$ [$1^b$].

Théorème 5*b*. — *Soit* R *un espace discret conjugué à un espace normal fini* $S^m_n$ : *la somme* $R + S^m_n$ *est un espace normal* $S^m_{n+1}$ *si* R *est un* $S^m_0$, *et réciproquement.*

Le théorème est évidemment vrai pour $n = 0$. Je le suppose vrai pour $n = 1, 2, \ldots p-1$.

Soient $S^m_p$ un espace normal fini et conjugué à $S^m_0$, et A un élément quelconque de $S^m_n$ : alors, puisque $S^m_p/A$ est un espace normal $S^m_{p-1}$ conjugué à $S^m_0$ [$3^b_1$], $S^m_p/A + S^m_0$ est un espace normal $S^m_p$, et, par suite, $S^m_p + S^m_0$ est un espace normal $S^m_{p+1}$ [$3^b_1$].

La réciproque se démontre de la même façon.

Théorème 6*b*. — *Le nombre des éléments de tout espace normal* $S^m_n$ *fini est supérieur ou égal à* $m(n+1)$, *et le nombre des éléments de tout espace* $V_n$ *ou* $S_n$ *fini est supérieur ou égal à* $n+1$ [$3^b_3$, $5^b$, $3_c$].

La définition 4*c* qui va suivre nous donne :

Corollaire 1. — Un espace normal $S^m_n$ primitif contient $m(n+1)$ éléments; et un espace $V_n$ ou $S_n$ primitif est un $S'_n$.

Corollaire 2. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace normal $S^m_n$ soit primitif est qu'il contienne un espace normal $S^m_{n-1}$ primitif tel que $|S^m_n - S^m_{n-1}| = m$ [$4_c$, $5^b$].

Corollaire 3. — Tout élément et tout espace normal $S_{n-1}^m$ contenus dans un espace normal $S_n^m$ primitif sont primitifs [$3_1^b$, $6^b$, $3_4^b$].

Corollaire 4. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément A d'un $S_n^m$ soit primitif est que $S_n^m/A$ soit un espace normal $S_{n-1}^m$ primitif.

Corollaire 5. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace $W_n$ connexe, qui est soit un espace $V_n$ soit un espace $S_n$, soit primitif, est qu'il contienne un $S'_n$ dont chacun des éléments soit primitif.

Pour tout $S'_{n-1}$ d'un $W_n$ qui est soit un espace $V_n$ soit un espace $S_n$, on a $|W_n/S'_{n-1}| \geqq 1$. Or en définissant un $S'_{n-1}$ d'un tel espace $W_n$ d'être primitif quand $|W_n/S'_{n-1}| = 1$, il résulte :

Corollaire 6. — Tout espace $W_n$ non primitif connexe qui est soit un espace $V_n$ soit un espace $S_n$, contient au moins un $S'_{n-1}$ non primitif (*voir* $15^c$).

De même :

Corollaire 7. — Tout espace $W_n$ non primitif (qui n'est pas un $S'_n$) connexe contient au moins un élément A tel que $W_n/A$ n'est pas un $S'_m$ (*voir* $16^c$).

Définition 4c. — *Le degré* (¹) d'un espace normal $S_n^m$ fini est le nombre $|S_n^m| - m(n+1)$, et *le degré* d'un élément A quelconque d'un $S_n^m$ est $|S_n^m/A| - mn$. De même, *le degré* d'un espace discret S qui est soit un espace $V_n$ soit un espace $S_n$ est $|S| - (n+1)$, et, *le degré* d'un élément quelconque de cet espace S est $|S/A| - n$. Un *espace* ou un *élément* de degré zéro est appelé *primitif*.

Les théorèmes 7b, 9b, 10b, 12b, 14b, qui vont suivre se démontrent par induction, et puisqu'ils sont vérifiés comme on le voit facilement pour les espaces à 1 dimension, je supposerai, dans les démonstrations, qu'ils sont vrais pour les espaces à $p$ dimensions ($p = 2, 3, \ldots, n-1$) et je montrerai qu'ils sont vrais pour les espaces à $n$ dimensions.

Théorème 7b. — *Si un espace* $S_n$ *contient deux éléments conjugués*, A *et* B, *qui sont primitifs*, $S_n$ est primitif (*voir* $13_1^b$).

(¹) *Voir* note à Définition 3c.

En effet, soient $B + S'_{n-2}$ et $A + S'_{n-2}$ identiques respectivement à $S_n/A$ et $S_n/B$, et soit C un élément quelconque de $S'_{n-2}$; alors A et B sont des éléments primitifs de l'espace normal à $n - 1$ dimensions $S_{n-1}$ qui est identique à $S_n/C$, et par suite, $S_n/C$ est un $S'_{n-1}$ [$6^b_1$] identique à $A + B + S'_{n-2} - C$. Or, puisque aucun élément de $A + B + S'_{n-2}$ n'est conjugué à un élément de $S_n - (A + B + S'_{n-2})$ et que $S_n$ est connexe, $S_n$ est identique à $A + B + S'_{n-2}$ et par suite est primitif [$6^b_1$].

Corollaire 1. — Un espace dense *connexe* $V_n$ contenant deux éléments conjugués qui sont *primitifs* est *primitif*.

Théorème 8*b*. — *Si le produit* PQ (*tous les éléments communs à* P *et* Q) *de deux espaces normaux* (*ou denses*) *à n dimensions*, P *et* Q, *est un espace normal* (*ou dense*) *à n* — 1 *dimensions satisfaisant* $(P - PQ) | (Q - PQ) = 0$, la somme $P + Q$ est un espace normal (ou dense) à $n$ dimensions [$2^b_1$, $1^b_1$].

Théorème 9*b*. — *Soient* $S_n$ *un espace normal à n dimensions contenant un* $S'_{n-1}$ *pour lequel* $S_n - S'_{n-1}$ *n'est pas connexe*, *et* R *un sous-espace connexe entier de* $S_n - S'_{n-1}$; *alors* $S_n - R$ *et* $S'_{n-1} + R$ *sont deux espaces normaux à n dimensions.*

En effet, A étant un élément quelconque de $S'_{n-1}$, $R/A$ n'est pas vide [$2^b_2$]. Soit $R'$ un sous-espace connexe entier de $R/A$; alors puisque $S_n/A$ est un espace normal à $n - 1$ dimensions [$2^b_1$] contenant un $S'_{n-2}$ (identique à $S'_{n-1}/A$) pour lequel $S_n/A - S'_{n-2}$ n'est pas connexe et $R'$ est un sous-espace connexe *entier* de $S_n/A - S'_{n-2}$, il en résulte que $S'_{n-2} + R'$ est un espace $S_{n-1}$. Par suite, $S'_{n-1}/A + R/A$ est aussi un espace $S_{n-1}$ [$8^b$] et $S'_{n-1} + R$ est un espace normal à $n$ dimensions [$2^b_1$]. Donc $S_n - R$ est aussi un espace normal à $n$ dimensions [$8^b$].

Corollaire 1. — Si un espace $S_n$ non primitif contient un élément A qui est primitif, A est un élément *réduisant* de $S_n$, c'est-à-dire $S_n - A$ est aussi un espace normal à $n$ dimensions [$2^b_1$, $6^b_1$].

Le dernier théorème n'est pas vrai pour tout espace dense $V_n (n > 1)$, et un espace normal $S^m_n$ même ne contient pas un $S'_{n-1}$ tel que $S^m_n - S'_{n-1}$ ne soit pas connexe [$11^d$]. Nous allons donner maintenant

**pour** les espaces normaux $S_n^m$, les théorèmes correspondants aux trois derniers théorèmes sur les espaces $S_n$.

Théorème 10*b*. — *Tout espace normal* $S_n^m$ *est irréduisant*, c'est-à-dire, si R est un sous-espace (non vide) d'un espace normal $S_n^m$, $S_n^m - R$ n'est pas un espace normal $S_n^m$.

En effet, soit R un sous-espace de $S_n^m$ (non vide et non identique à $S_n^m$); alors, puisque $S_n^m$ est connexe, $S_n^m - R$ contient un élément A connexe à R, et par suite, $R/A$ n'est pas vide. Or, puisque $S_n^m/A$ est un espace normal $S_{n-1}^m$ $[3_1^b]$ et que $R/A$ n'est pas vide, $S_n^m/A - R/A$ n'est pas un espace normal $S_{n-1}^m$, et, par suite, $S_n^m - R$ n'est pas un espace normal $S_n^m$ $[3_1^b]$.

Corollaire 1. — Si P et Q sont des espaces normaux de même dimension et de même classe, et si P *contient* Q, alors P est *identique* à Q.

Corollaire 2. — Si l'espace normal $S_n^m/A$ contient l'espace normal $S_{n-1}^m$, A étant un élément de $S_n^m$, $S_{n-1}^m \equiv S_n^m/A$.

Corollaire 3. — Si P et Q sont deux espaces normaux *distincts* quelconques de même dimension et de même classe, on a

$$|P| > |PQ| < |Q|.$$

Corollaire 4. — Si l'espace normal $S_n^m$ contient les $m$ éléments $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dont les *conjugués* dans $S_n^m$ sont identiques, $|S_n^m - S_n^m/A_i| = m$ $[3_c, 5^b]$.

Corollaire 5. — Si $|S_n^m - S_{n-1}^m| = m$, $S_n^m - S_{n-1}^m$ est un $S_0^m$ conjugué à $S_{n-1}^m$ $[3_5^b, 3_1^b]$.

Corollaire 6. — A tout élément A d'un $S_n^m$ *primitif* il correspond un seul $S_0^m$ contenant A et un seul $S_{n-1}^m$ conjugué à $S_n^m$, et l'on a $S_0^m + S_{n-1}^m \equiv S_n^m$ $[3_1^b, 1_2^b]$.

Corollaire 7. — Deux ensembles $S_0^m$ différents quelconques, contenus dans un $S_n^m$ primitif, sont *disjoints* et *conjugués*.

Corollaire 8. — Soient A, B, C trois éléments d'un $S_n^m$ primitif : (*i*) si A et B ne sont pas conjugués, C est, ou n'est pas, conjugué à B selon que C est, ou n'est pas, conjugué à A, et (*ii*) si A et B sont conjugués, C est conjugué à l'un au moins des éléments A et B.

Théorème 11 *b*. — *Si pour tout élément* A *d'un* $S^m_{n-1}$ *contenu dans un espace normal* $S^m_n$ *on a* $|S^m_n/A - S^m_{n-1}/A| = m$; $S^m_n - S^m_{n-1}$ *est un* $S^m_0$ *conjugué à* $S^m_{n-1}$.

En effet, puisque $|S^m_n/A - S^m_{n-1}/A| = m$, $S^m_n/A - S^m_{n-1}/A$ est un $S^m_0$ conjugué à $S^m_{n-1}/A$ [$10^b_3$]. Soit B un élément quelconque de $S^m_{n-1}$; alors, puisque $S^m_{n-1}$ est connexe, il contient un arc discret R passant par A, B [$1^a$]. Or, si le degré de R est 2, B est contenu dans $S^m_{n-1}/A$, donc conjugué à $S^m_0$, et par *induction* nous démontrons qu'il en est encore ainsi si le degré de l'arc discret R est un nombre quelconque. Donc $S^m_0$ est conjugué à $S^m_{n-1}$, et, par suite, $S^m_n$ est identique à $S^m_{n-1} + S^m_0$ [$5^b$, $10^b_1$].

Corollaire 1. — Si tout élément ou tout $S^m_{n-1}$ d'un $S^m_n$ est primitif, $S^m$ est primitif [$6^b_3$, $6^b_2$].

Corollaire 2. — Si tout élément d'un $S^m_{n-1}$ contenu dans un $S^m_n$ est un élément primitif de $S^m_n$, le dernier est primitif [$6^b_2$].

Corollaire 3. — Si tout $S^m_k$ (où *k* est un entier positif fixe) contenu dans $S^m_n$ est primitif, $S^m_n$ est aussi primitif [$11^b_1$].

Corollaire 4. — Si, pour tout $S'_k$ (où *k* est un entier positif fixe) d'un $S^m_n$, $S^m_n/S'_k$ est un $S^m_{n-k-1}$ primitif, $S^m_n$ est primitif [$3^b$, $11^b_1$].

Théorème 12 *b*. — *Une condition suffisante (et aussi nécessaire) pour qu'un espace* $S^m_n$ *soit primitif est que le conjugué dans* $S^m_n$ *d'un élément quelconque de* $S^m_n$ *soit le conjugué de* $m - 1$ *autres éléments de* $S^m_n$.

En effet, soient A un élément quelconque d'un $S^m_n$ répondant aux conditions de l'énoncé et B un élément quelconque de $S^m_n/A$, alors

$$S^m_n \equiv A + S^m_n/A + R_A \equiv B + S^m_n/B + R_B,$$

$R_A$ et $R_B$ étant des ensembles $S^{m-1}_0$ [$5^b$]. Or, puisque B est conjugué à $A + R_A$ et non conjugué à $R_B$, $S^m_n/A$ contient $R_B$, et, par suite, $S^m_n/A$ est identique à $B + (S^m_n/A)/B + R_B$, où tout élément de $R_B$ est conjugué à $(S^m_n/A)B$. Donc, $S^m_n/A$ est un $S^m_{n-1}$ primitif [$3^b_1$] et, par suite, $S^m_n$ est primitif [$11^b_1$].

Corollaire 1. — Si à tout $S^m_{n-1}$ d'un $S^m_n$ il correspond un $S^m_0$ de $S^m_n$ conjugué à $S^m_{n-1}$, $S^m_n$ est primitif [$3^b_1$].

**Théorème 13b.** — *Une condition suffisante pour qu'un espace normal* $S_n^m$ $(n \geqq 2)$ *soit primitif est que tout élément d'un* $S'_n$ *contenu dans* $S_n^m$ *soit un élément primitif de* $S_n^m$.

En effet, soit

$$S'_n \equiv A_0 + A_1 + \ldots + A_n, \quad \text{et} \quad S_n^m/(S'_n - A_i) \equiv R_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n);$$

alors, $R_i$ est un $S_0^m$ [$3^b$], et $A_j$ est conjugué à $R_i$ $(i \neq j)$ et contenu dans $R_i$. Par suite, les $n+1$ ensembles $R_0$, $R_1$, ..., $R_n$ sont distincts. Or, puisque $S_n^m/A_j$ est un $S_{n-1}^m$ primitif [$3_1^b$, $4e$] et contient $R_i$ et $R_k$ $(i \neq k,\ i,\ k \neq j)$, $R_i$ et $R_k$ sont disjoints et conjugués [$10_7^b$]. Donc les ensembles $R_0$, $R_1$, ..., $R_n$ sont conjugués l'un à l'autre et leur somme est $S_n^m$ [$5^b$, $10_1^b$]. Par suite $S_n^m$ est primitif [$6_1^b$].

**Corollaire 1.** — Si un $S_n^m$ $(n \geqq 2)$ contient trois éléments primitifs conjugués l'un à l'autre, il est primitif [$4_a$, $3_1^b$, $6_3^b$] (*voir* $7^b$).

**Corollaire 2.** — Si un $S_n^2$ $(n \geqq 2)$ contient deux éléments conjugués primitifs qui sont contenus dans un $S_1^2$ primitif de $S_n^2$ il est primitif.

**Corollaire 3.** — Si un $S_n^2$ non primitif contient deux éléments A et B conjugués qui sont primitifs, $S_n^2 | (A + B)$ est un $S_{n-2}^2$ primitif.

**Théorème 14b.** — *Tout espace normal contenu dans un espace normal* $S_n^m$ $(n \geqq 1)$ *primitif est primitif.*

En effet, soit $S_k^l$ contenu dans $S_n^m$ et soit un élément quelconque A de $S_k^l$; alors, puisque $S_n^m/A$ est un $S_{n-1}^m$ primitif [$3_1^b$, $6_3^b$] qui contient le $S_{k-1}^l$ identique à $S_k^l/A$, A est un élément primitif de $S_k^l$ [$6_4^b$], et, par suite, $S_k^l$ est primitif [$11_1^b$].

**Théorème 15b.** — *Si* $T_1$ *est une transformation de* R *en* R', R *et* R' *étant des ensembles* $S_0^m$ *contenus dans un* $S_n^m$ *primitif, et, si* $T_2$ *est une transformation équivalence de* $S_n^m - R$ *en* $S_n^m - R'$, *alors la transformation* T, *qui transforme* $S_n^m$ *en lui-même et qui est identique à* $T_1$ *dans* R *et à* $T_2$ *dans* $S_n^m - R$ *est une transformation équivalence de* $S_n^m$ [$10_6^b$].

**Corollaire 1.** — Tout espace normal *primitif* est symétrique, et, deux espaces normaux primitifs de même dimension et même classe sont équivalents.

Corollaire 2. — L'ordre et le pseudo-ordre d'un $S_n^m$ primitif sont respectivement $(m!)^{n+1}(n+1)!$ et $[m(n+1)]!$.

Corollaire 3. — Toute suite d'un $S_n^m$ primitif, cyclique par rapport à une transformation équivalence de $S_n^m$, est un espace normal primitif [$14^b$].

## CHAPITRE III.

### LES HYPERESPACES QUI SONT LES DÉRIVÉS D'UN ESPACE DISCRET QUELCONQUE ET LES HYPERESPACES DONT CHAQUE ÉLÉMENT EST UNE CELLULE A $n$ DIMENSIONS. COLORABILITÉ D'UN ESPACE DISCRET A $n$ DIMENSIONS EN $n+1$ COULEURS.

Définition 5 *a*. — Soient $D^m(W_n)$ un hyperespace discret dont les éléments sont $S'_m$ de $W_n$ (¹) $(n > 0)$ et soient P et Q deux éléments quelconques de cet hyperespace. Alors, selon que P et Q sont conjugués, si $(a)\, P+Q$ est un $S'_{m+1}$ ou si $(b)\, PQ$ est un $S'_{m-1}$, l'hyperespace $D^m(W_n)$ est appelé $(a)$ le dérivé $m^{\text{ième}}$ *propre* de $W_n$ ou $(b)$ le dérivé $m^{\text{ième}}$ *impropre* de $W_n$.

Les symboles $D_s^m(W_n)$ et $D_p^m(W_n)$ désignent respectivement les dérivés $m^{\text{ièmes}}$ *propre* et *impropre* de l'espace $W_n$ (²).

*b*. Nous appellerons *espace* de *n-cellules* un hyperespace discret dont chaque élément est une cellule fermée à $n$ dimensions (³) et qui satisfait aux deux conditions suivantes :

I. *Pour deux éléments quelconques* A *et* B *de cet espace*, *le*

(¹) Le symbole $W_n$ désigne comme toujours un espace discret à $n$ dimensions.

(²) Ainsi un espace discret à $n$ dimensions $W_n$ a $n$ dérivés propres $D_s^0(W_n)$, $D_s^1(W_n)$, ..., $D_s^{n-1}(W_n)$, et $n$ dérivés impropres $D_p^1(W_n)$, $D_p^2(W_n)$, ..., $D_p^n(W_n)$. Mais $D_s^0(W_n)$ est identique à $W_n$. Il est clair, que si les sous-espaces de P et Q de $W_n$ sont les éléments conjugués de $D^{m-1}(W_n)$, propre ou impropre, on a $|P+Q| = m+1$ et $|PQ| = m-1$, puisque $|P+Q| + |PQ| = |P| + |Q|$.

(³) Pour les définitions *d'une cellule fermée à n dimensions* et de la *frontière* de cette cellule *voir* l'Introduction p. 11.

*produit* (¹) AB (*tous les points communs à* A *et* B) *est sur la frontière de* A *et sur celle de* B.

II. *Deux éléments sont conjugués si* (*et dans ce cas seulement*) *le produit de leurs frontières contient une cellule $n - 1$ dimensions.*

Un espace de $n$-cellules $W_n$ est une *surfaee* (²) si :

I. *Tout point situé sur la frontière d'un élément de* $W_n$ *se trouve aussi sur la frontière d'un ou de plusieurs autres éléments de* $W_n$, *et si :*

II. *Pour tout ensemble de* $m+1$ *éléments* $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ *de* $W_n$, *tels que* (*le produit*) $A_1 A_2 \ldots A_{m+1} \neq 0$, $A_1 A_2 \ldots A_{m+1}$ *est une cellule* $n - m$ *dimensions* ($m = 1, 2, \ldots, n$).

La *dérivée* $m^{\text{ième}}$ d'une *surface* à $n$ dimensions est l'espace de ($n - m$) cellules (*voir* 11*e*), dont les éléments sont les cellules fermées à $n - m$ dimensions qui sont chacune le produit de $m + 1$ éléments conjugués de cette surface (³).

*c*. Une fonction uniforme S(X) qui fait correspondre à tout élément discret S un des $m$ nombres $1, 2, \ldots, m$ est *une fonction m-coloriante* de S, si les nombres que S(X) fait correspondre à deux éléments conjugués ne sont pas égaux.

Un espace discret qui a une fonction $m$-coloriante *est colorable en m couleurs* (⁴).

---

(¹) *Voir* l'Appendice

(²) La *surface* ainsi définie est une surface à $n$ dimensions du point de vue de l'*Analysis situs*.

(³) Nous montrerons plus loin que la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une surface $W_n$ est équivalente à $D_S^m(W_n)$.

(⁴) Le problème du coloriage d'une carte en quatre couleurs, qui a été étudié par de nombreux mathématiciens, se ramène au théorème suivant qui reste encore à démontrer. Un espace de 2-cellules contenu dans un plan est *colorable* en quatre couleurs. Pour références aux travaux sur ce problème, *voir Encyklopädie, loc. cit.*, p. 177. Une bibliographie complète se trouve dans la récente thèse de Alfred Errera « Du coloriage des cartes, etc. », Bruxelles, 1921.

Des travaux connus sur ce problème il résulte immédiatement que toute carte dans le plan est colorable en quatre couleurs si tout espace discret normal $S_2$ (de classe 2) est colorable en quatre couleurs. Il suit comme corollaire du théorème **15***e*, que nous démontrons dans le dernier Chapitre, que la *réciproque* est aussi vraie.

*d.* Un espace discret, qui ne contient aucun espace normal de classe supérieure à 1, est *dégénéré*.

**Théorème 1 c.** — *Tout dérivé d'un espace normal* $U_n$ (¹) *est connexe.*

En effet, soient A et B deux éléments quelconques d'un $D^1_p(U_n)$, et $a$ et $b$ deux éléments de $U_n$ *contenus* respectivement dans A et B(²). Alors, puisque $U_n$ est connexe, il existe un arc discret $(ab)$ allant de $a$ à $b$ dans $U_n$. Soit maintenant $|(ab)| = 2$ : alors, ou bien A est conjugué à B, ou bien à $(a+b)$ et $(a+b)$ est conjugué à B (³). De toutes façons il existe un arc discret (AB) dans $D^1_p(U_n)$. Supposons que (AB) de $D^1_p(U_n)$ existe dans le cas où $|(ab)| = 3, 4, \ldots, k-1$.

Soit $|(ab)| = k$, et soient $c$ un élément de $(ab)$ conjugué à $a$, C l'élément de $D^1_p(U_n)$ identique à $(a+c)$. Alors, puisque $|(bc)| = k-1$, $(bc) < (ba)$ il existe un arc discret (BC) dans $D^1_p(U_n)$, et si A et C sont distincts ils sont conjugués. Donc il existe un arc discret (AB) de $D^1_p(U_n)$.

Ainsi nous avons démontré notre théorème pour un espace normal à 1 dimension. Supposons qu'il soit vrai pour un espace normal à $m$ dimensions $(m = 2, 3, \ldots, n-1)$.

Soient A et B deux éléments quelconques d'un $D^m(U_n)$, où $m > 0$ si ce dérivé est *propre* et où $m > 1$ s'il est *impropre*, et soient $a$ et $b$ deux éléments de $U_n$ *contenus* respectivement dans A et B. Alors il existe un arc discret $(ab)$ de $U_n$. Si maintenant $|(ab)| = 2$, soit $C \equiv (a + b + S'_{m-2})$ (⁴), où $S'_{m-2}$ est contenu dans $U_n/(a+b)$. Nous allons démontrer maintenant qu'il existe un arc discret (AC) de $D^m(U_n)$.

Soit $S'_m$ l'ensemble de $U_n$ correspondant à l'élément A de $D^m(U_n)$, et soient A′ et C′ les éléments $S'_m - a)$ et $(b + S'_{m-2})$ de $D^{m-1}(U_n/a)$. Alors, puisque le théorème est vrai pour un espace normal à $n-1$,

---

(¹) Nous réserverons l'expression « un espace normal $S_n$ » dans le reste de cet Ouvrage pour désigner un espace normal *de classe* 2. « Un espace normal $S^m_n$ » désigne comme toujours *un espace normal à n dimensions de classe m*. (*Voir* 2ᵉ, $3^c_1$).

(²) Un élément A d'un $D^m(W_n)$ contient un élément $a$ de $W_n$ si A *considéré comme sous-espace de* $W_n$ contient $a$.

(³) Le symbole $(S'_m)$ désigne l'élément de $D^m(W_n)$ qui correspond à l'ensemble $S'_m$ de $W_n$. Ici $(a+b)$ désigne l'élément de $D^1_p(U_n)$ qui correspond à $a+b$ de $U_n$.

(⁴) Si $m < 2$, $S'_{m-2}$ est vide.

dimensions, un arc discret allant de A′ à C′ existe dans $D^{m-1}(U_n/a)$. Par suite, un arc discret (AC) existe dans $D^m(U_n)$. De même, puisque B et C *contiennent* l'élément $b$ de $U_n$, il existe un arc discret (BC) dans $D^m(U_n)$ s'ils sont distincts. Donc il existe un arc discret (AB) dans $D^m(U_n)$ quand $|(ab)| = 2$. Supposons maintenant qu'il en soit de même quand $|(ab)| = 3, 4, \ldots, k-1$.

Soit $|(ab)| = k$, et soient $c$ un élément de $(ab)$ conjugué à $a$, C un élément de $D^m(U_n)$ *contenant* l'élément $c$ de $U_n$. Alors, puisque $|(cb)| = k-1$, $(cb) < (ab)$, il existe un arc discret (CB) dans $D^m(U_n)$, et, si A et C sont distincts, il existe un arc discret (AC) dans $D^m(U_n)$, puisque $|(ac)| = 2$, $(ac) < (ab)$. Il existe donc un arc discret (AB) dans $D^m(U_n)$ et par suite $D^m(U_n)$ est connexe.

En appliquant ce théorème à un espace normal $S_n$ de classe 2, on obtient sans difficulté :

Théorème 2 c. — *Si une transformation équivalence d'un espace normal $S^n$ de classe 2 laisse invariant chacun des $n+1$ éléments d'un $S'_n$ contenu dans $S_n$, chaque élément de $S_n$ reste iuvariant dans cette transformation.*

De même :

**Théorème 3 c.** — ***Si un espace normal à n dimensions est colorable en $n+1$ couleurs, il est colorable en $n+1$ couleurs d'une seule manière*** (¹).

**Corollaire 1.** — ***Un espace normal $S_n^m$ primitif est colorable en $n+1$ couleurs d'une seule manière.***

Théorème 4c. — *L'ordre de tout dérivé (le $n^{ième}$ peut être excepté) d'un espace dense $V_n$ est supérieur ou égal à l'ordre de $V_n$.*

Puisque toute transformation équivalence d'un espace discret est

---

(¹) Un espace discret qui est colorable en $m$ couleurs est au moins colarable de $m!$ façons différentes en prenant les $m!$ permutations des $m$ couleurs. Mais quand nous dirons qu'un espace discret est colorable en $m$ couleurs d'une seule manière ces permutations sont exclues. D'après cette définition, un $S'_n$ est évidemment colorable en $n+1$ couleurs d'une seule manière. Nous montrerons, plus loin, qu'un espace discret dégénéré à $n$ dimensions est colorable en $n+1$ couleurs et, par suite, un tel espace normal est colorable en $n+1$ couleurs d'une seule manière.

aussi une transformation équivalence de tout dérivé de cet espace [$7_1$] il suffit de démontrer que deux transformations équivalences distinctes de $V_n$ sont aussi transformations distinctes de $D^m(V_n)$ $(m < n)$. Soient $y = y(x)$ et $z = z(x)$ deux transformations équivalences distinctes de $V_n$ ; alors $V_n$ contient un élément A de coordonnée $a_0$ tel que les éléments B et C de $V_n$ de coordonnées $b_0 = y(a_0)$ et $c_0 = z(a_0)$ soient distincts. Soient $b_1, b_2, \ldots b_m$ les coordonnées de $m$ éléments d'un $S'_m$ de $V_n$ contenant l'élément B, mais non l'élément C [$4a$], et soient $a_1, a_2, \ldots a_m$ les coordonnées satisfaisant aux conditions $b_j = y(aj)$ $(j = 1, 2 \ldots m)$. Alors l'élément $(S'_m)$ de $D_m(V_n)$ est distinct de l'élément C de $D^m(V_n)$ consistant en $m+1$ éléments dont les coordonnées sont $c_0, c_1, \ldots c_m$, où $c_j = z(a_j)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots m)$. Par suite, ces deux transformations distinctes de $V_n$ sont aussi transformations distinctes de $D^m(V_n)$.

Corollaire 1. — Si à tout couple d'élément — A, B de $V_n$ il correspond un $S'_n$ de $V_n$ contenant A et non B, l'ordre de tout dérivé, même le $n^{\text{ième}}$, de $V_n$ est supérieur ou égal à l'ordre de $V_n$.

Corollaire 2. — L'ordre de tout dérivé d'un espace normal $S_n^m$ $(m < 1)$ est, sans exception, supérieur ou égal à l'ordre de $S_n^m$.

Puisqu'un espace dense $V_n$ contient au moins $n+1$ éléments il en résulte :

Theoreme 5c. — *Le degré d'un dérivé $m^{\text{ième}}$ d'un espace dense $V_n$ est supérieur à $\frac{kn!}{(n-m)!\,(m+1)!}$ où $k = |V_n|$.*

Théorème 6. — *Le dérivé $n^{\text{ième}}$ d'un espace normal $S_n^{m+1}$ $(m > 0)$ est un espace dense à m dimensions de pseudo-classe $n+1$ et de pseudo-dimension 1.*

En effet, soient $A_0$ et $B_0$ deux éléments distincts d'un $S'_n$ continu dans $S_n^{m-1}$ ; alors $A_0$ et $B_0$ sont continus respectivement dans $S_n^{m+1}/(S'_n - A_0)$ et $S_n^{m+1}/(S'_n - B_0)$. Soient $A_0, A_1, \ldots, A_m$ et $B^0, B_1, \ldots B_m$ tous les éléments de $S_n/(S'_n - B_0)$ et $S_n/(S'_n - B_0$; alors

$$A_i(S'_n - A_0) \equiv B_i(S'_n - B_0) \equiv A_iA_j \equiv B_iB_j \equiv 0 \qquad (i \neq j = 0, 1 \ldots, m),$$

Par suite, puisque

$$A_i(S'_n - A_0) \equiv A_i S'_n - A_i A_0, \ldots,$$
$$A_i S'_n \equiv B_i S'_n \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad A_0(S'_n - B_0) \equiv A_0.$$

Or puisque aucun des éléments $A_1$, $A_2$, $A_m$ n'est conjugué à $A_0$ [$1_2^b$], et que tous les éléments $B_0, B_1, \ldots, B_m$ sont conjugués, les éléments $A_0, A_1, \ldots A_m$ sont différents des éléments $B_0. B_1, \ldots B_m$. Par suite,

$$A_i B_j \equiv 0 \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, m)$$

et les éléments $(S'_n - A_0 + A_i)$ et $(S'_n - B_0 + B_j)$ de $D^n(S_n^{m+1})$ sont distincts.
Maintenant puisque

$$|(S'_n - A_0 + A_i)(S'_n - B_0 + B_j)|$$
$$\equiv |(S'_n - A_0)(S'_n - B_0)| \equiv |(S'_n - A_0 - B_0| = n - 1,$$

les éléments $(S'_n - A_0 + A_i)$ et $(S'_n - B_0 + B_j)$ ne sont pas conjugués; et puisque

$$(S'_n - A_0 + A_i)(S'_n - A_0 + A_j) \equiv S'_n . (S'_n - A_0 + A_i) \equiv S'_n - A_0 \qquad (i \neq j),$$

les éléments $(S'_n - A_0 + A_i)$ et $(S'_n - A_0 + A_j)$ de $D^n(S_n^{m+1})$ sont conjugués l'un à l'autre et à $(S'_n)$. Par suite, le sous-espace $D^n(S_n^{m+1})/(S'_n)$ de $D^n(S_n^{m+1})$ est de connexité $n+1$, et tout sous-espace connexe entier de $D^n(S_n^{m+1})/(S'_n)$ est un $S'_{m-1}$. Donc, $D^n(S_n^{m+1})$ est un espace dense à $m$ dimensions [$4^b$] de pseudo-classe $n+1$ [$4_d$] et de pseudo-dimension 1 [$3_b$].

Corollaire 1. — La pseudo-dimension du dérivé $n^{\text{ième}}$ d'un espace normal $U_n$ non-primitif est 1.

Corollaire 2. — La pseudo-classe du dérivé $n^{\text{ième}}$ d'un espace normal $U_n$ tel que pour chacun de ses $S'_{n-1}$ on ait $|U_n/S'_{n-1}| \geqq 2$, est $n+1$.

Corollaire 3. — Le dérivé $n^{\text{ième}}$ d'un espace normal $S_n$ (de classe 2) est un espace normal à 1 dimension de classe $n+1$.

Théorème 7c. — *Si les sous-espaces* $P_1, P_2, \ldots P_{k+1}$ *de* $W_n$ *sont des éléments d'un* $S'_k$ *de* $D^m(W_n)$; $W_n$ *contient un sous-espace* $Q$ *tel que soit* (1) $P_i + P_j \equiv Q$ $(i \neq j = 1, 2, \ldots, m+1)$, *soit* (2) $P_i P_j \equiv Q$ $(i \neq j = 1, 2, \ldots m+1)$.

En effet, soit $Q \equiv P_1 P_2$ ; alors, si Q est contenu dans

$$P_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, k+1),$$

la deuxième condition est satisfaite. Supposons que Q ne soit pas contenus dans $P_3$. Alors, puisque $|P_1 P_2| = m - 1$, on a

$$|P_1 P_2 P_3| \leqq m - 2,$$

et, puisque

$$|(P_1 - P_1 P_2) P_3| = |P_1 P_3| - |P_1 P_2 P_3| \neq 0 \qquad \text{et} \qquad |P_1 - P_1 P_2| = 1,$$

on a

$$(P_1 - P_1 P_2) < P_3, \qquad \text{et} \qquad P_1 < P_2 + P_3.$$

Par suite, puisque $|P_i + P_j| = m + 1$,

$$P_1 + P_2 \equiv P_1 + P_3 \equiv P_2 + P_3.$$

Je dis, maintenant, que pour tout sous-espace $P_l$ $(l > 3)$ de $W_n$ au moins l'un de trois produits $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_1$ n'est pas contenu dans $P_l$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Alors

$$P_1 P_2 + P_2 P_3 < P_l,$$

et, puisque

$$P_1 P_2 + P_2 P_3 \equiv P_2(P_1 + P_3) \equiv P_2,$$

$P_2$ est contenu dans $P_l$, *ce qui n'est pas*. Donc la première condition est satisfaite.

Si nous prenons comme définition : Selon qu'un $S'_k$ de $D^{m-1}(W_n)$ satisfait à la première ou à la deuxième condition (de notre théorème) il est *propre* ou *impropre*, nous avons les résultats suivants :

Corollaire 1. — Tout $S'_k$ de $D^{m-1}(W_n)$ est, soit *propre*, soit *impropre*.

Corollaire 2. — Pour tout $S'_k$ *propre* de $D^{m-1}(W_n)$ $k$ est inférieur à $m+1$.

Corollaire 3. — La *dimension* de $D^m_s(W_n)$ est $n - m$ ou $m+1$ selon que $2m$ est, ou n'est pas, inférieur à $n$.

Théorème 8c. — *Le dérivé $(n-1)^{ième}$ propre d'un espace normal $S^m_n$ est un espace dense à n dimensions de pseudo-classe m et de pseudo-dimension* 1.

En effet, soit $S'_{n-1}$ contenu dans $S_n^m$, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les éléments de $S_n^m/S'_{n-1}$. Alors $D_s^{n-1}(S'_{n-1}+A_i)-(S'_{n-1})$ est un $S'_{n-1}$ de $D_s^{n-1}(S_n^m)$ et est conjugué à $(S'_{n-1})$. Or, puisque les éléments $A_i$ et $A_j$ de $S_n^m$ ne sont pas conjugués, aucun élément de

$$D_s^{n-1}(S'_{n-1}+A_i)-(S'_{n-1})$$

n'est conjugué à un élément de

$$D_s^{n-1}(S'_{n-1}+A_j)-(S'_{n-1}) \qquad (i \neq j = 1, 2 \ldots, m).$$

Par suite, la connexité du sous-espace $D_s^{n-1}(S_n^m)/(S'_{n-1})$ de $D_s^{n-1}(S_n^m)$ est $m$, et chacun de ses sous-espaces connexes entiers est un $S'_{n-1}$. Donc $D_s^{n-1}(S_n^m)$ est un espace dense à $n$ dimensions de pseudo-classe $m$ et de pseudo-dimension $1$.

Corollaire 1. — La dimension et la pseudo-dimension de $D_s^{n-1}(W_n)$ sont respectivement $n$ et $1$.

Théorème 9c. — *La pseudo-dimension et la pseudo-classe de* $D_s^{n-2}(S_n^m)$ $(m > 1, n > 2)$ *sont respectivement* $2$ *et* $m+1$.

En effet, soient A et B deux éléments distincts d'un $S'_{n-1}$ contenu dans $S_n^m$, et soient $C_1, C_2, \ldots C_m$ les $m$ éléments de $S_n^m/S'_{n-1}$. Alors $D_s^{n-2}(S'_{n-1})$ est un $S'_{n-1}$ propre de $D_s^{n-2}(S_n^m)$; et $(S'_{n-1}-A)$ et $(S'_{n-1}-B)$ sont conjugués respectivement à

$$D_s^{n-2}(S'_{n-1})-(S'_{n-1}-A)$$

et à $D_s^{n-2}(S'_{n-1})-(S'_{n-1}-B)$. Maintenant, puisque

$$S'_{n-1}-A+[S'_{n-1}-A-B+C_i]$$

est identique à $S'_{n-1}-A+C_i$, et puisque les éléments $C_i$ et $C_j$ de $S_n^m$ ne sont pas conjugués, les éléments $(S'_{n-1}-A)$ et

$$(S'_{n-1}-A-B+C_i)$$

de $D_s^{n-2}(S_n^m)$ sont conjugués et les éléments $(S'_{n-1}-A-B+C_i)$ et $(S'_{n-1}-A-B+C_j)$ de $D_s^{n-2}(S_n^m)$ ne sont pas conjugués. Par suite, la pseudo-dimension de $D_s^{n-2}(S_n^m)$ est supérieur à *un*. Or, puisque le sous-espace de $D_s^{n-2}(S_n^m)$ qui consiste en tous les éléments de $D_s^{n-2}(S_n^m)$ conjugués à $(S'_{n-1} - A)$ et à $(S'_{n-1} - B)$ est

$$D_s^{n-2}(S'_{n-1}) - (S'_{n-1} - A) - (S'_{n-1} - B) \\ + (S'_{n-1} - A - B + C_1) + \ldots + (S'_{n-1} - A - B + C_m)$$

la connexité de ce sous-espace est $m + 1$, et tous ces sous-espaces entiers sont des espaces normaux de classe 1. Donc la pseudo-dimension de $D_s^{n-2}(S_n^m)$ est 2, et la pseudo-classe $m + 1$.

Puisque le conjugué d'un élément quelconque de $D_s^1(S_3^2)$ dans $D_s^1(S_3^2)$ est connexe, il en résulte que :

Corollaire 1. — L'espace $D_s^1(S_3^2)$ est un espace normal $S_2^3$.

Théorème 10*c*. — *La dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une surface $W_n$ est équivalente à $D_s^m(W_n)$.*

En effet, soit S la dérivée $m^{\text{ième}}$ de $W_n$, et soit T une transformation qui fait correspondre à un élément [une $(n - m)$-cellule fermée] A de S, le $S'_m$ de $W_n$ dont le produit de ces éléments ($n$-cellules fermées) est identique à A [5 *b*]. Alors T est une transformation biunivoque de S en $D_s^m(W_n)$. Soient B et C deux éléments quelconques de S et $B_1, B_2, \ldots B_{m+1}$ et $C_1, C_2, \ldots, C_{m+1}$ les éléments correspondants de $W_n$ dans la transformation T; alors

$$B \equiv \prod_{i=1}^{m+1} B_i \quad \text{et} \quad C \equiv \prod_{j=1}^{m+1} C_j.$$

Maintenant si B et C sont conjugués, BC *est une cellule fermée* à $n - (m + 1)$ dimensions. Par suite, puisque BC n'est pas vide, $B_iC_j$ n'est pas vide, $B_i$ et $C_j$ sont conjugués, et la somme

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_{m+1} + C_1 + C_2 + \ldots + C_{m+1}$$

est un espace normal de classe 1. Et puisque BC est une cellule fermée à $n - (m + 1)$ dimensions, cette somme est un $S'_{m+1}$ de $W_n$. Donc les deux éléments de $D_s^m(W_n)$ correspondant à B et C dans T sont conjugués. Nous démontrons de même que si B et C ne sont pas conjugués, les deux éléments correspondants de $D_s^m(W_n)$ dans T ne sont pas conjugués. Par suite T est une transformation équivalence de S en $D_s^m(W_n)$.

Théorème 11*c*. — *Pour tout ensemble de $m + 1$ éléments*

*($n$-cellules), d'une surface* $W_n A_1, A_2, \ldots, A_m$ *conjugués deux à deux, la cellule* $A_1 A_2 \ldots A_{m+1}$ *à* $n-m$ *dimensions est contenue dans la frontière de la cellule* $A_1 A_2 \ldots A_m$ *à* $n-m+1$ *dimensions.*

Le théorème est vrai pour $m=1$. Je le suppose vrai pour $m=p-1$.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ $p$ éléments de $W_n$ conjugués deux à deux. Alors

$$A_1 A_2 \ldots A_p \equiv (A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_1)(A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_p),$$

$A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_1$ et $A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_p$ sont des cellules à $n-(p-2)$ dimensions et $A_2 A_3 \ldots A_{p-1}$ est une cellule à $n-(p-3)$ dimensions. Or puisque le théorème est vrai pour $m=p-1$,

$$A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_1 + A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_p < (A_2 A_3 \ldots A_{p-1})',$$

où $(A_2 A_3 \ldots A_{p-1})'$ est la frontière de la cellule $A_2 A_3 \ldots A_{p-1}$. Par suite, puisque la dimension de $A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_1$ et $A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_p$ est inférieure d'une unité à celle de $A_2 A_3 \ldots A_{p-1}$, et puisque la dimension de leur produit est $n-(p-1)$,

$$\begin{aligned}&(A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_1)\,(A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_p)\\ &\equiv (A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_1)'(A_2 A_3 \ldots A_{p-1} A_p)'\ [2^\circ]\quad (^1)\end{aligned}$$

où les deux termes à gauche dans la dernière identité sont respectivement les frontières des deux cellules à droite. Donc $A_1 A_2 \ldots A_p$ est contenu dans la frontière de la cellule $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{p-1}$.

Corollaire 1. — Si A et B sont deux cellules à $n-m$ dimensions correspondant à deux $S'_m$ d'une *surface* $W_n$ on a $AB \equiv A'B'$, où $A'$ et $B'$ sont respectivement les frontières de A et B.

Théorème 12*c*. — *Le sous-espace* R *de la dérivée première d'une surface* $W_n$ *dont les éléments (cellules à* $n-1$ *dimensions) sont sur la frontière d'un élément* A *quelconque de* $W_n$ *est une surface* $W_{n-1}$.

En effet, puisque la surface $W_n$ est un espace discret à $n$ dimensions, R est un espace de $(n-1)$-cellules à $n-1$ dimensions. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $m$ éléments de R tels que $a_1 a_2 \ldots a_m \not\equiv 0$, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les éléments de $W_n$ tels que $a_i \equiv AA_i (i=1,$

---

[1] Toutes les références indiquées dans les démonstrations de 11*e* et 12*e* se rapportent à la définition implicite de la $n$-cellule dans l'Introduction.

2, ..., $m$). Alors, puisque le produit $AA_1 \ldots A_m$ n'est pas vide, c'est une cellule à $n - m$ dimensions [5 *b*], et puisqu'il est identique au produit $a_1 a_2 \ldots a_m$, ce dernier produit est une cellule à $n - m$) dimensions. Par suite, R satisfait à la condition (*ii*) dans la définition d'une *surface* $W_{n-1}$.

Soient maintenant $a$ un élément quelconque de R et B l'élément de $W_n$ tel que $a \equiv AB$; alors $(AB)'$ est la frontière de la cellule à $n - 1$ dimensions $A' - A'B'$ [1°, 4°] où, comme avant, $A'$ et $B'$ sont respectivement les frontières des cellules A et B. Soient P un point de $(AB)'$ et $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ une suite convergente des points de $A' - A'B'$ ayant comme point limite le point P [3°]. Alors, puisque les points de cette suite sont sur $A'$ et que tout point sur $A'$ est sur la frontière d'un ou de plusieurs autres éléments de $W_n$, chacun des points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ sont sur la frontière d'un ou de plusieurs d'autres éléments de $W_n$ conjugués à l'élément A. Or, puisque le nombre des éléments de $W_n$ conjugués à A est fini, $W_n$ contient un élément C qui contient un nombre infini $P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, \ldots, (m_{n-1} < m_n)$ de points de la suite convergente $P_1, P_2, \ldots, P_{n1} \ldots$; et, puisque les points de la dernière suite ne sont pas des points de $B'$, C est différent de B. Maintenant, puisque la suite $P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, \ldots$ est convergente et a le point P comme limite, et, puisque C est une cellule fermée, le point P est contenu dans C. Par suite, P est contenu dans ABC, et, puisque

$$ABC \equiv (AB)(AC) \equiv (AB)'(AC)' \qquad [11_1^c]$$

où $(AC)'$ est la frontière de la cellule à $n - 1$ dimensions AC; P est contenu dans $(AC)'$. Par suite, tout élément situé sur la frontière de la cellule $a$ est sur la frontière d'au moins un autre élément de R, et par suite, la condition (*i*) dans la définition d'une *surface* $W_{n-1}$ est satisfaite. Donc R est une surface $W_{n-1}$.

Le dernier théorème avec le théorème 3 *b* nous donne immédiatement, *par induction*, l'important théorème suivant :

Théorème 13 *c*. — *Toute surface* $W_n$ *connexe est un espace discret normal de classe deux.*

Lemme 12. — *Si pour tout élément* X *d'un espace connexe* S *on a* $C(-X) = |S/X| \geqq 2$, S *n'est pas dégénéré.*

En effet, soient A un élément quelconque de S et B, C deux éléments quelconques de $S/A$; alors, puisque $C(S-A) = |S/A|$, il n'existe pas de sous-espace connexe de $S-A$ contenant les éléments B et C. Par suite, puisque le degré de B est supérieur à un $S|A^2$ n'est pas vide et B est conjugué à au moins un élément de $S|A^2$. Soit maintenant D un élément de $S|A^2$ conjugué à B; alors, puisque B et C sont contenus dans un sous-espace connexe, $A+B+C$, de $S-D$, les éléments C et D ne sont pas conjugués. Donc sous les hypothèses de notre lemme l'assertion suivante : $S|A^{m+1}$ n'est pas vide et tout élément de $S|A^m$ est conjugué à un seul élément de $S|A^{m-1}$ n'est conjugué à aucun élément de $S|A^m$ et est conjugué à au moins un élément de $S|A^{m+1}$ », est vrai au moins pour $m=1$. Supposons cette assertion vraie pour $m=2, 3, \ldots, n-1$.

Par hypothèse $S|A^n$ n'est pas vide. Soient D un élément quelconque de $S|A^n$ et B, C deux éléments quelconques de $S|A^{n-1}$; alors, puisque B et C sont contenus dans le sous-espace connexe $\sum_{i=0}^{n-1} S|A^i$ de $S-D$, ces éléments ne sont pas tous deux conjugués à l'élément D. Par suite, D est conjugué à un seul élément de $S|A^{n-1}$. Soient maintenant B l'élément de $S|A^{n-1}$ conjugués à D et E un élément quelconque de $S|A^n$. Alors, puisque B et E sont contenus dans le sous-espace connexe $E+\sum_{i=0}^{n-1} S|A^i$ de $S-D$, l'élément D n'est pas conjugué à l'élément E, et par suite, D n'est conjugué à aucun élément de $S|A^n$. Or, puisque le degré de D est supérieur à *un*, $S|A^{n+1}$ n'est pas vide et D est conjugué à au moins un élément de $S|A^{n+1}$. Donc, l'assertion mentionnée plus haut est vraie pour toute valeur de $m$, S est infini, et $|S|A^n| \leqq |S|A^{n+1}|$.

Soient maintenant $A_1$, $A_{-1}$ deux éléments distincts de $S|A$, soient $A_2$, $A_{-2}$ deux éléments de $S|A^2$ conjugués respectivement à $A_1$, $A_{-1}$ et $A_n$, $A_{-n}$ deux éléments de $P|A^n$ conjugués respectivement à $A_n$, $A_{-(n-1)}$ $(n=3, 4, \ldots)$. Alors $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n$, ou $A_0 \equiv A$, est un $S_1$ infini (de classe deux). Par suite, puisque S contient un espace normal de classe supérieur à *un*, il n'est pas dégénéré.

D'où par induction :

Corollaire 1. — *Tout espace connexe fini* ($|S| \geqq 2$) *contient au moins deux éléments*, A *et* B, *tels que* $C(S - A) = C(S - B) = 1$.

De même :

Corollaire 2. — Tout espace normal $S_1^m$ ($m > 2$) contient un espace normal $S_1$ (1).

Le dernier corollaire joint au théorème 3*b* nous donne :

Théorème 14*c*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret soit dégénéré est qu'il ne contienne pas d'espace normal* $S_1$.

Théorème 15*c*. — *Une condition necessaire et suffisante pour qu'un espace normal* $U_n$ *fini soit dégénéré est que pour tout* $S'_{n-1}$ *de* $U_n$ *on ait :*

$$C(U_n - S'_{n-1}) = |U_n/S'_{n-1}|.$$

La condition est évidemment nécessaire si $U_n$ est primitif. Supposons $U_n$ non primitif. Soit un $S'_{n-1}$ de $U_n$ non primitif et soit $A + B < U^n/S'_{n-1}$ ; pour prouver que la condition est nécessaire, il suffit de montrer qu'aucun sous-espace connexe de $U_n - S'_{n-1}$ ne contient A et B. Supposons qu'il existe un arc discret (AB) de $U_n - S'_{n-1}$, alors, puisque A et B ne sont pas conjugués, il existe un élément D de (AB) distinct de B et conjugué à A. Maintenant, puisque la dimension de $U_n$ est $n$, l'élément D ne peut pas être conjugué à tous les éléments de $S'_{n-1}$. Soit C un élément de $S'_{n-1}$ non conjugué à D ; puisque C n'est pas contenu dans (AB) et n'est pas conjugué à tous les éléments de (AB), mais est conjugué à l'extrémité de (AB), C + (AB) contient un espace normal $S_1$ (fini). Donc $U_n$ n'est pas dégénéré. Cette dernière conclusion contredit l'hypothèse d'après laquelle $U_n$ est dégénéré, et par suite aucun sous-espace connexe de $U_n - S'_{n-1}$ ne contient A et B.

Pour prouver que la condition de l'énoncé est suffisante, il suffit également de montrer que $U_n$ ne contient aucun $S_1$. La condition est

(1) Le symbole $S_n$ désigne toujours dans le reste de cet ouvrage un espace normal à $n$ dimensions *de classe* 2, même si cela n'est pas spécifié. Ainsi ici et dans le théorème suivant $S_1$ désigne un espace normal à 1 dimension de classe 2. *Voir* aussi 6*c*, 13, 8*d* et la note au théorème 1*c*.

évidemment suffisante pour un espace normal $U_n$ de degré zéro. Je la suppose suffisante pour un espace normal $U_n$ de degré inférieur à $m$.

Soit $U_n$ un espace normal de degré $m$, soit $S'_{n-1}$ de $U_n$ non primitif, et soient enfin $P_1, P_2, \ldots, P_k$ les sous-espaces entiers connexes de $U_n - S'_{n-1}$. L'espace $P_i + S'_{n-1}$ est fini, dégénéré, normal, et à $n$ dimensions $[9^b[$, par suite il n'existe aucun $S_1$ de $P_i + S'_{n-1}$. Supposons qu'il exisie un $S_1$ de $U_n$ contenant des éléments de $P_i$ et de $P_j$. Soient respectivement A et B des éléments de $S_1 P_i$ et $S_1 P_j$. Alors, puisque $S_1$ est fini, il contient deux arcs discrets, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ allant de A à B, tels que $(S^{(1)} - A)(S^{(2)} - B)$ soit vide, et tels qu'aucun élément de $S^{(1)} - A - B$ ne soit conjugué à un élément de $S^{(2)} - A - B$. Cette dernière conclusion est une contradiction, puisque les deux arcs discrets $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ doivent contenir chacun au moins un élément de $S'_{n-1}$ et par suite $U_n$ ne contient aucun $S_1$.

Corollaire 1. — Tout espace $U_n$ fini, dégénéré, a au moins deux éléments qui sont primitifs.

Théorème 16$c$. — *Tout espace $W_n$ non primitif, connexe et dégénéré, contient au moins un $S'_m$ $(m < n)$, tel que $W_n - S'_m$ ne soit pas connexe (voir $6^b_7$).*

Le théorème est vrai pour $n = 1$. Je le suppose vrai pour $n = 2, 3, \ldots, k - 1$.

Supposons que le théorème ne soit pas vrai pour tout $W_k$ satissant aux conditions de notre théorème. Soit $W_k$ un tel espace, et soit A un élément de $W_k$, tel que $W_k/A$ ne soit pas un $S'_m$ $[6^b_7]$. Alors $W_k/A$ est un $W_{k'}$ $(k' < k)$ non primitif, connexe et dégénéré. Par suite, puisque la dimension de $W_k/A$ est inférieure à celle de $W_k$, $W_k/A$ contient un $S'_l$ $(l < k - 1)$ tel que $W_k/A - S'_l$ ne soit pas connexe. Or, puisque A est conjugué à $S'_l$, $A + S'_l$ est un $S'_{l+1}$ et $W_k/A - S'_l$ est identique à $(W_k - S'_l)/A$. Par suite $(W_k - S'_l) - A$ est connexe [puisque $W_k - (S'_l + A) \equiv (W_k - S'_l) - A$], et $(W_k - S'_l)/A$ n'est pas connexe. Donc $W_k - S'_l$ contient un $S_1$ fini, ce qui n'est pas vrai, puisque $W_k$ est dégénéré.

Théorème 17$c$. — *Si un espace discret S est colorable en $m$ couleurs, et si un sous-espace* **R** *de S est colorable en $m$ couleurs « d'une seule manière », à toute fonction $R(X)$ $m$-coloriante* *de* R, *il correspond une fonction* S(X) *m-coloriante de* S *identique à* R(X) *dans* R [*c'est-à-dire, telle que* S(A) = R(A) *pour tout élément* A *de* R].

En effet, puisque S est colorable en $m$ couleurs, il existe une fonction $S_1(X)$ $m$-coloriante de S. Or, puisque le sous-espace R de S est colorable en $m$ couleurs *d'une seule manière*, il existe une permutation $p = p(x)$ des $m$ nombres 1, 2, 3, ..., $m$ telle que $R(A) = p[S_1(A)]$ pour tout élément A de R. Par suite, la fonction coordonnale S(X) de S satisfaisant à $S(B) = p[S_1(B)]$ pour tout élément B de S est une fonction $m$-coloriante de S et elle satisfait aux conditions de l'énoncé.

Maintenant, il est clair que : « Si P(X) et Q(X) sont respectivement des fonctions $m$-coloriantes des espaces discrets P et Q satisfaisant à la condition $(P - PQ) | (Q - PQ) \equiv 0$ et si $P(A) = Q(A)$ pour tout élément A de PQ, la fonction coordonnale R(X) de $P + Q$ qui est identique à P(X) dans P et à Q(X) dans Q est une fonction $m$-coloriante de $P + Q$ », et, « si un espace discret S est colorable en $m$ couleurs de telle façon que $k$ seulement de ces $m$ couleurs (nombres 1, 2, ..., $m$) soient sur les éléments d'un sous-espace R de S, à toute fonction R(X) $k$-coloriante de R il correspond une fonction S(X) $m$-coloriante de S, telle que S(X) soit identique à R(X) dans R ». Il suit donc du dernier théorème :

Corollaire 1. — Soit le produit PQ de deux espaces discrets P et Q, satisfaisant à la condition $(P - PQ) | (Q - PQ) \equiv 0$, colorable en $k$ couleurs *d'une seule manière;* alors, si P et Q sont chacun colorables en $m$ couleurs ($k \leqq m$) d'une telle façon que $k$ seulement de ces $m$ couleurs soient sur les éléments de PQ, $P + Q$ est colorable en $m$ couleurs.

Or, puisque un $S'_n$ est colorable en $n + 1$ couleurs d'une seule manière, il suit par induction du dernier corollaire et des théorèmes **16***c* et **3***c* :

Théorème **18***c*. — *Tout espace discret, dégénéré, fini, est colorable en $n + 1$ couleurs, $n$ étant la dimension de cet espace.* ***Et*** *tout espace normal $U_n$ dégénéré, fini, est colorable en* $n + 1$ *couleurs « d'une seule manière ».*

On sait bien ([1]) que l'on peut décomposer l'espace euclidien en cellules à 3 dimensions, de façon qu'il contienne un nombre $m$ aussi grand que l'on veut de cellules à 3 dimensions, deux quelconques d'entre elles étant conjuguées. Il semble qu'il reste encore à chercher s'il existe ou non un nombre $W_{(n)}$ ne dépendant que de $n$, et représentant le nombre de couleurs nécessaire et suffisant pour colorier un $W_n$ fini arbitraire. Même dans le cas où $W_n$ est un espace de $n$-cellules, l'existence du nombre correspondant $W_{(n)}$ n'a pas, à notre connaissance, encore été établie. Sauf dans les cas où $n = 1$ et $n = 2$ la question de l'existence du nombre $S_{(n)}$, qui représente le nombre de couleurs nécessaire et suffisant pour colorier un $S_n$ fini arbitraire, paraît ne pas avoir été du tout étudiée ([2]).

Nous allons maintenant entreprendre, avec plus de détails que nous n'avons fait jusqu'ici, l'étude des espaces normaux $S_n$ (de classe 2), en définissant tout d'abord un $T_n$ légèrement plus général que l'espace $S_n$, espace dont nous aurons à nous servir dans l'étude de *transformés* d'un $S_n$.

# CHAPITRE IV.

## ESPACES DISCRETS $T_n$. TRANSFORMÉS ET TRANSFORMÉS NORMAUX D'UN ESPACE DISCRET. CONNECTIVITÉ D'UN ESPACE NORMAL $S_2$.

DÉFINITION 6 *a*. — Un espace normal à $n$ dimensions est un espace $T_n$ si pour tout $S'_{n-1}$ de $T_n$ on a $|T_n/S'_{n-1}| \leq 2$.

Un élément A d'un espace $T_n$ est un élément de la *frontière* de $T_n$ si $T_n/A$ n'est pas un espace normal $S_{n-1}$ (de classe 2). La totalité de ces éléments constitue la frontière de $T_n$. Si la frontière de $T_n$ est un espace normal $S_{n-1}$ (de classe 2) elle est normale.

---

([1]) *Encyclopädie* (*loc. cit.*), p. 177-178. — P. STÄCKEL, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 42, 1897, p. 275. — H. TIETZE, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 16, 1905, p. 211.

([2]) *Cf.* P.-J. HEAWOOD, *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 24, 1890, p. 332.

*b.* Soient P et Q deux espaces discrets satisfaisant aux deux conditions :

1° $P - PQ$ *consiste en un seul élément;*

2° $Q - PQ$ *consiste en deux éléments conjugués tels que* $Q|(Q - PQ) \equiv P|(P - PQ)$, alors Q est un *transformé* de P.

Soit Q un transformé de P satisfaisant aux deux conditions :

1° $P|(P - PQ)$ *est un espace normal de classe* 2;

2° $Q/(Q - PQ)$ *est un espace normal de classe* 2 *tel que* (¹) $Q|(Q - PQ) - Q/(Q - PQ)$ *soit un espace de connexité* 2, *et tel que chaque élément de* $Q - PQ$ *est conjugué à un seul sous-espace connexe entier de* $Q|(Q - PQ) - Q/(Q - PQ)$, alors Q est un *transformé normal* de P.

*c.* Un espace normal $S_2$ (fini ou infini) est de *connectivité* 1, si pour tout $S_1$ contenu dans $S_2$ on a $C(S_2 - S_1) = 2$.

Un espace normal $S_2$ est de *connectivité* $m+1$, si $m$ est le nombre maximum d'espaces disjoints $R_1, R_2, \ldots, R_m$, qui sont chacun un $S_1$ de $S_2$ satisfaisant à $R_i - R_i|R_j \neq 0$ $(i \neq j = 1, 2, \ldots, m)$, et pour lesquels $S_2 - \sum_{i=1}^{m} R_i$ est connexe (²).

Théorème 1*d*. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret connexe* S *soit un* $T_n$ *est que pour tout* $S'_k$ *de* S

---

(¹) Il est suffisant de dire ici : tel que $C[P/(P - PQ) - Q/(Q - PQ)] > 1$, etc. [9*d*]. Il suit du théorème 7*d* que le nombre de dimensions de $Q|(Q - PQ)$ excède d'une unité celui de $Q/(Q - PQ)$. Nous montrerons [$9^d_2$] que la somme de $Q/(Q - PQ)$ et d'un sous-espace connexe *entier* de $P/(P - PQ) - Q/(Q - PQ)$ est un espace $T_n$ avec une frontière normale, où $n$ est la dimension de $P/(P - PQ)$. Dans le cas où $Q|(Q - PQ)$ est un espace normal à 1 dimension il faut lire « $Q/(Q - PQ)$ consiste de deux éléments tels que, etc. ».

(²) On peut facilement étendre cette définition aux espaces à $n$ dimensions de la façon suivante :

Un espace normal $S_3$ est de *connectivité* $(1, m)$, si pour tout $S_2$ contenu dans $S_3$ on a $C(S_3 - S_2) = 2$ et si, pour tout élément A de $S_3$ l'espace normal (à 2 dimensions) $S_3|A$ est de connectivité $m$; etc. (Ainsi pour un $S_n$ il y aura $n+1$ nombres de sa connectivité); mais il est difficile alors à démontrer pour $n > 2$ qu'il existe des espaces pour chacune de ces connectivités.

*on ait* $C(S/S'_k) = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, l;\ l < n-1)$ *et que pour tout* $S'_l$ *de* S l'espace $S/S'_l$ soit un $T_{n-l-1}$.

Corollaire 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace discret connexe S soit un $T_n$ est que pour tout élément A de S l'espace $S/A$ soit un $T_{n-1}$.

Corollaire 2. — Si un $S'_{n-m}$ de $T_n$ $(0 < m \leqq n)$ contient au moins un élément qui n'est pas sur la frontière de $T_n$, alors $T_n/S'_{n-m}$ est un $S_{m-1}$.

Corollaire 3. — Un espace discret $T_n$ qui a une frontière *normale* n'a aucun $S'_{n-m}$ primitif (¹) $(m = 2, 3, \ldots, n)$. Mais tout tel $T_n$ a au moins un $S'_{n-1}$ primitif.

Corollaire 4. — Tout élément A d'un $S'_{n-1}$ primitif de $T_n$ est un élément de la frontière de $T_n/(S'_{n-1} - A)$.

Théorème 2*d*. — *Si* $S'_m$ *est contenu dans la frontière de* $T_n$ $(m < n-1)$, *alors* $(T_n/S'_m)' < (T_n)'/S'_m$, *où* $(T_n/S'_m)'$ *et* $(T_n)'$ *sont les frontières de* $T_n/S'_m$ et $T_n$ (²).

En effet, soit A un élément de $(T_n/S'_m)'$; alors

$$(T_n/S'_m)/A \equiv T_n/(S'_m + A)$$

n'est pas un espace normal et, par suite, A est un élément de $(T_n)'$ [$1_2^d$] et $(T_n/A)' < (T_n)'$. Or, puisque $(T_n/S'_m)' < T_n/S'_m$ et

$$(T_n/S'_m)\,(T_n)' \equiv (T_n)'/S'_m$$

on a $(T_n/S'_m)' < (T_n)'/S'_m$ [$g$].

Théorème 3*d*. — Si P est un $S'_{n-1}$ primitif d'un $T_n$ avec une frontière normale, et si Q est un $S'_{n-1}$ contenu dans cette frontière tel que PQ soit un $S'_{n-2}$, alors Q est un $S'_{n-1}$ primitif de $T_n$.

En effet, $T_n/(PQ)$ est un $T_1$ non primitif [$1_3^d$] qui n'est pas un $S_1$ [$1_4^d$]. Par suite, $T_n/(PQ)$ a une frontière contenant deux éléments A et B, contenus dans $(T_n)'$ [$2^d$]. Or, puisque $(T_n)'$ est un $S_{n-1}$ et que A, B sont conjugués à PQ, les éléments A et B sont $(T_n)'/(PQ)$.

---

(¹) C'est-à-dire tel que $|T_n/S'_{n-m}| = m$.

(²) Nous emploierons la même notation dans les deux théorèmes qui suivent.

Par suite, puisque $Q - PQ$ est un élément de $(T_n)'/(PQ)$, c'est un élément de la frontière de $T_n/(PQ)$. Donc $T_n/Q$ est réduit à un seul élément, puisque $(T_n/(PQ))/(Q - PQ) \equiv T_n/Q$.

Maintenant, puisque tout $T_n$ contient un $S'_{n-1}$ primitif [$1_3^d$] et que $D_{n-1}^{n-2}(S_{n-1})$ est connexe, il en résulte :

Corollaire 1. — *Tout* $S'_{n-1}$ *contenu dans une frontière normale d'un* $T_n$ *est un* $S'_{n-1}$ *primitif de* $T_n$.

Corollaire 2. — Si A et B sont deux éléments conjugués contenus dans une frontière normale d'un $T_n$, alors $B < (T_n/A)'$.

En effet, supposons que le corollaire ne soit pas vrai. Soient

$$T_n/(A + B) \equiv S_{n-2}$$

et $S'_{n-1}$ contenu dans $(T_n)'$ et contenant $A + B$. Alors $T_n/S'_{n-1}$ est identique à $S_{n-2}/(S'_{n-1} - A - B)$, ce qui est une contradiction, puisque $|T_n/S'_{n-1}| = 1$ et $|S_{n-2}/(S'_{n-1} - A - B)| = 2$.

Le dernier corollaire joint au théorème $2d$ nous donne :

Théorème $4d$. — *Si* $T_n$ *a une frontière normale contenant l'élément* A *de* $T_n$, $(T_n/A)' \equiv (T_n)'/A$.

Nous démontrons par induction :

Théorème $5d$. — *Si* P *et* Q *sont des espaces* $T_n$ *dont* PQ *est un* $S_{n-1}$, *frontière de* P *et de* Q, *et dont* $(P - PQ) | (Q - PQ)$ *est vide*, $P + Q$ *est un* $S_n$.

Corollaire 1. — Si $R \equiv A + S_{n-1}$ et $R/A$ est un $S_{n-1}$, R est un $T_n$ avec une frontière normale; si $R \equiv A + B + S'_{n-1}$, $A | B \not\equiv 0$ et $R/A$, $R/B$ sont chacun un $S_{n-1}$, R est encore un $T_n$ avec une frontière normale.

Théorème $6d$. — *Si* R *est un sous-espace (non vide) d'un espace* $T_n$, *alors* $T_n - R$ *n'est pas un espace normal* $S_n$.

Corollaire 1. — Si $S'_{n-m}$ et $S_{m-1}$ sont contenus respectivement dans $T_n$ et $T_n/S'_{n-m}$, alors $S_{m-1} \equiv T_n/S'_{n-m}$.

Théorème $7d$. — *Pour tout espace normal* $U_m$ (*à m dimensions*) *contenu dans un espace normal* $U_n$ (*à n dimensions*) *des sous-*

*espaces* $U_n | U_m$ *et* $U_n - U_m$ *de* $U_n$ *soient connexes sûrement quand* $m$ *est inférieur à* $n - 1$.

Le théorème est vrai quand $m = 0$ pour toute valeur de $n$ supérieure à *un*. Par suite il est vrai pour $n = 2$. Je le suppose vrai pour $n = 3, 4, \ldots, k - 1$.

Soient A′, B′ deux éléments quelconques de

$$U_k | U_m \qquad (0 < m < k - 1),$$

et A, B deux éléments de $U_m$ conjugués respectivement à A′, B′. Alors puisque $U_m$ est connexe, il contient un arc discret (AB) allant de A à B. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_l$ les éléments d'un tel arc discret, où $A_1$ est identique à A et $A_{i+1}$ est conjugué à $A_i$, et soit $C_i$ un élément quelconque de

$$U_k/(A_i + A_{i+1}) - U_m/(A_i + A_{i+1}) \quad . \quad (i = 1, 2, \ldots, l - 1).$$

Alors aucun des éléments $C_i$ n'est contenu dans $U_m$. Maintenant, puisque A′ et $C_1$ sont des éléments de $U_k/A_1 - U_m/A_1$ et que le théorème est vrai pour $n = k - 1$, il existe un sous-espace connexe de $U_k/A_1 - U_m/A_1$ contenant A′ et $C_1$. Par suite, puisque

$$U_k/A_1 - U_m/A_1$$

est contenu dans $U_k | U_m$, il existe un sous-espace connexe de $U_k | U_m$ contenant A′ et $C_1$. Or, puisque $C_{i-1}$ et $C_i$ sont des éléments de $U_k/A_i - U_m/A_i$, il existe un sous-espace connexe du dernier espace les contenant. Par suite il existe un sous-espace connexe de $U_k | U_m$ qui les contient. Nous démontrons de même qu'il existe un sous-espace connexe de $U_k | U_m$ contenant $C_{p-1}$ et B′. Par suite il existe un sous-espace connexe de $U_k | U_m$ contenant A′ et B′. Donc, puisque A′ et B′ sont des éléments quelconques de $U_k | U_m$, le dernier sous-espace de $U_k$ est connexe et, par suite, $U_k - U_m$ est connexe.

Lemme 13. — *Si* $B < S_{n-1} < S_n$ $(n > 1)$ *et* $A < S_n - S_{n-1}$, *il existe un arc discret* (AB) *de* $S_n$ *qui ne contient aucun autre élément de* $S_{n-1}$ *que* B.

Le lemme est vrai pour un $S_1$ fini. Je suppose qu'il est vrai pour un $S_n$ fini ($n = 2, 3, \ldots, m$).

Soient $B < S_m < S_{m+1}$ et $A < S_{m+1} - S_m$, où $S_{m+1}$ est fini ou infini; alors il existe un arc discret $(AB)$ de $S_{m+1}$. Si $(AB)$ et $S_m$ ont plus qu'un élément en commun, soit $B_1$, le *premier* élément de $(AB)$ qui est aussi un élément de $S_m$ en allant de A à B. Alors il existe un arc discret $(B_1B)$ de $S_m$. Comme avant, soient $B_1, B_2, \ldots, B_k$ les éléments de cet arc $(B_k \equiv B)$, et soit $A_1$ l'élément de l'arc $(AB_1)$ conjugué à $B_1$, où $(AB_1) < (AB)$. Alors, A et $A_1$ sont continus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1} - S_m$, et, puisque

$$B_2 < S_m/B_1 < S_{m+1}/B_1 \quad \text{et} \quad A_1 < S_{m+1}/B_1 - S_m/B_1,$$

un arc discret $(A_1B_2)$ de $S_{m+1}/B_1$ existe qui ne contient aucun autre élément de $S_m/B_1$ que $B_2$. Par suite $S_{m+1}/(B_1 + B_2)$ contient un élément $A_2$ (identique à $(A_1B_2)/B_2$) tel que $A_1$ et $A_2$ sont contenus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1}/B_1 - S_m/B_1$, et par suite ils sont contenus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1} - S_m$. De même

$$B_{i+1} < S_m/B_i < S_{m+1}/B_i \quad \text{et} \quad A_i < S_{m+1}/B_i - S_m/B_i.$$

Par suite $A_{i+1}$ de $S_{m+1}/(B_i + B_{i+1})$ existe tel que $A_i$ et $A_{i+1}$ sont contenus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1}/B_i - S_m/B_i$ et de $S_{m+1} - S_m$ $(i = 2, 3, \ldots, k-1)$. Donc il existe un élément $A_k$ de $S_{m+1}/B_k$ $(B_k \equiv B)$ tel que A et $A_k$ sont contenus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1} + S_m$ et le lemme est démontré.

Corollaire 1. — Si $B < S_{n-1} < S_n$ $(n > 1)$ et $A < S_n | S_{n-1}$, il existe un arc discret $(AB)$ tel que $(AB) - B < S_n | S_{n-1}$.

Théorème 8*d*. — *Si* $S'_{n-1} < S_{n-1} < S_n$ $(n > 1)$ *et* $A < S_n - S_{n-1}$, *il existe un élément* B *de* $S_n/S'_{n-1}$ *tel que* A *et* B *sont contenus dans un sous-espace connexe de* $S_n - S_{n-1}$.

Le théorème est évidemment vrai pour un $S_1$ fini. Je suppose qu'il est vrai pour $S_n$ fini $(n = 2, 3, \ldots, m)$.

Soient $D < S'_m < S_m < S_{m+1}$ et $A < S_{m+1} - S_m$, où $S_{m+1}$ est fini ou infini. Alors d'après le dernier lemme, il existe un élément C de $S_{m+1} - S_m$ conjugué à D tel que A et C sont contenus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1} - S_m$. Or puisque

$$S'_m/D < S_m/D < S_{m+1}/D \quad \text{et} \quad C < S_{m+1}/D - S_m/D,$$

il existe un élément B de $(S_{m+1}/D)/(S'_m/D) \equiv S_{m+1}/S'_m$ tel que C et B sont contenus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1}/D - S_m/D$.

Par suite C et B sont contenus dans un sous-espace connexe de $S_{m+1} - S_m$, et par suite A et B sont contenus dans un sous-espace connexe $S_{m+1} - S_m$.

Le dernier théorème nous donne immédiatement le théorème qui est à la base de la définition de la connectivité d'un espace normal (*voir* 6 *c*).

Théorème 9*d*. — *Pour tout espace normal* $S_{n-1}$ (*de classe* 2) *contenu dans un espace normal* $S_n$ (*de classe* 2) *le sous-espace* $S_n - S_{n-1}$ *de* $S_n$ *est soit connexe, soit de connexité* 2.

Corollaire 1. — A tout espace normal $S_{n-1}$ (1) (de classe 2) contenu dans un espace normal $S_n$ pour lequel $S_n - S_{n-1}$ n'est pas connexe il correspond (d'une seule façon) deux sous-espaces P et Q de $S_n$ (appelés demi-$S_n$) tels que

$$P + Q \equiv S_n, \qquad PQ \equiv S_{n-1},$$
$$P,\ P|(PQ),\ P - PQ,\ Q,\ Q|(PQ),\ Q - PQ$$

soient chacun connexes (*voir* la définition d'une *droite* et d'un *plan* dans l'Introduction).

En définissant deux tels sous-espaces d'un $S_n$ *un couple de demi*-$S_n$ il résulte :

Corollaire 2. — Tout demi-$S_n$ ($n > 1$) est un $T_n$ avec une frontière normale.

Corollaire 3. — Soient P et Q deux espaces normaux de classe 2; alors, si Q est un transformé de P, les espaces P et Q sont de même dimension [$3^b_1$] et $C[Q|(Q-PQ) - Q/(Q-PQ)] \leqq 2$ (*voir* $15^d$).

Théorème 10 *d*. — *Pour tout espace normal* $S_{n-1}$ *contenu dans un espace normal* $S_n$ ($n > 1$) *le sous-espace* $S_n | S_{n-1}$ *de* $S_n$ *est de connexité pas plus grande que* 2 [$14_1$, $8^d$, $9^d$].

Nous démontrons d'une façon analogue :

---

(1) Quand $n = 1$ il faut dire à tout élément contenu dans un $S_1$ infini il correspond, etc.

THÉORÈME 11*d*. — *Pour tout* $S'_m$ *contenu dans un* $S_n$ $(m \leqq n \geqq 2)$ (1) *les sous-espaces* $S_n - S'_m$ *et* $S_n \mid S'_m$ *de* $S_n$ *sont toujours connexes.*

THÉORÈME 12*d*. — *Soient* $P_1$, $Q_1$ *et* $P_2$, $Q_2$ *deux couples des demi-*$S_n$ *d'un espace normal* $S_n$; *alors, si* $Q_1 - P_1Q_1 < Q_2 - P_2Q_2$, *on a* $P_2 - P_2Q_2 < P_1 - P_1Q_1$.

En effet, supposons que $(P_2 - P_2Q_2)P_1Q_1 \not\equiv 0$, et soit A un de ses éléments. Puisque A est contenu dans $P_1Q_1$, $Q_1 - P_1Q_1$ contient un élément B conjugué à A [$8^d$], et, puisque A est contenu dans $P_2 - P_2Q_2$ et B est un élément de $Q_2 - P_2Q_2 + P_2$ conjugué à A, l'élément B est contenu aussi dans $P_2$. Par suite $(Q_1 - P_1Q_1)P_2 \not\equiv 0$ ce qui contredit notre hypothèse, à savoir $Q_1 - P_1Q_1$ est contenu dans $Q_2 - P_2Q_2$. Donc $(P_2 - P_2Q_2)P_1Q_1 \equiv 0$.

Or, puisque $P_2 - P_2Q_2$ est contenu dans $P_1 + Q_1$ et

$$\begin{aligned} P_1 + Q_1 \equiv P_1 - P_1Q_1 + P_1Q_1 + Q_1 &\equiv P_1 - P_1Q_1 + Q_1 \\ &\equiv (P_1 - P_1Q_1) + (Q_1 - P_1Q_1) + P_1Q_1, \end{aligned}$$

il est contenu dans $(P_1 - P_1Q_1) + (Q_1 - P_1Q_1)$. Par suite, puisque $P_2 - P_2Q_2$ est connexe et le dernier espace n'est pas connexe, $P_2 - P_2Q_2$ est contenu soit dans $P_1 - P_1Q_1$ soit dans $Q_1 - P_1Q_1$. Mais $(P_2 - P_2Q_2)(Q_2 - P_2Q_2)$ est vide et par hypothèse $Q_1 - P_1Q_1$ est contenu dans $Q_2 - P_2Q_2$. Donc $P_2 - P_2Q_2$ est contenu dans

$$P_1 - P_1Q_1.$$

COROLLAIRE 1. — Si $Q_1 - P_1Q_1 \equiv Q_2 - P_2Q_2$ on a

$$P_1 - P_1Q_1 \equiv P_2 - P_2Q_2, \qquad S_n - P_1Q_1 \equiv S_n - P_2Q_2,$$

et les deux couples de demi-$S_n$ sont identiques, aussi :

COROLLAIRE 2. — Si $P_1 \equiv P_2$, les deux couples de demi-$S_n$ sont identiques.

COROLLAIRE 3. — Si $P_2 + Q_2 - P_2Q_2 < P_1Q_1$ on a

$$P_1 + Q_1 - P_1Q_1 < P_2Q_2.$$

(1) Pour tout $S_0^2$ d'un $S_1$, $S_1 - S_0^2$ est de connexité 2 ou 3 selon que $S_1$ est fini ou infini; pour tout $S'_1$ d'un $S_1$, $S_1 - S'_1$ est de connexité 1 ou 2 selon que $S_1$ est fini ou infini. Pour tout $S_{n-1}$ d'un $S_n$, $S_n/S_{n-1}$ est (quand il n'est pas vide) de connexité 1 ou 2.

Théorème 13*d*. — *Soient* $P_1$, $Q_1$ *et* $P_2Q_2$ *deux couples de demi*-$S_n$ *d'un espace normal* $S_n$; *alors, si* $P_1Q_1P_2Q_2 \equiv o$ *deux, et deux seulement, des quatre produits* $P_1Q_1P_2$, $P_1Q_1Q_2$, $P_2Q_2P_1$, $P_2Q_2Q_1$ *sont vides.*

En effet, puisque $P_1Q_1$ est continu dans $P_2 + Q_2$ et que

$$P_1Q_1P_2Q_2 \equiv o,$$
$$P_1Q_1 < (P_2 - P_2Q_2) + Q_2 - P_2Q_2).$$

Or, puisque $P_1Q_1$ est connexe et que $(P_2 - P_2Q_2) + (Q_2 - P_2Q_2)$ n'est pas connexe, on a soit $P_1Q_1(P_2 - P_2Q_2) \equiv o$ soit

$$P_1Q_1(Q_2 - P_2Q_2) \equiv o.$$

Par suite l'un des espaces $P_1Q_1P_2$ et $P_1Q_1Q_2$ est vide et l'autre n'est pas vide.

Nous démontrons de même que l'un des espaces $P_2Q_2P_1$ et $P_2Q_2Q_1$ est vide et que l'autre n'est pas vide.

Corollaire 1. — Si l'un des produits $P_1Q_1P_2$, $P_1Q_1Q_2$, $P_2Q_2P_1$, $P_2Q_2Q_1$ est vide, un seul autre de ces produits est vide.

Théorème 14*d*. — *Soient* $P_1$, $Q_1$ *et* $P_2$, $Q_2$ *deux couples de demi*-$S_n$ *d'un espace normal* $S_n$; *alors, si l'un des quatre produits* $P_1Q_1P_2$, $P_1Q_1Q_2$, $P_2Q_2P_1$, $P_1Q_2Q_1$ *est vide, un seul des quatre produits* $P_1P_2$, $P_1Q_2$. $Q_1P_2$, $Q_1Q_2$ *est vide.*

En effet, soit $P_1Q_1P_2 \equiv o$. Alors, comme plus haut, puisque $P_2$ est connexe et continu dans $P_1 + Q_1$, ou bien $P_2(P_1 - P_1Q_1) \equiv o$ ou bien $P_2(Q_1 - P_1Q_1) \equiv o$. Par suite l'un des produits $P_2P_1$ et $P_2Q_1$ est vide et l'autre n'est pas vide. Soit $P_2P_1 \equiv o$; alors $P_2Q_1$ et $P_1Q_2$ ne sont pas vides. *Supposons* maintenant que $Q_1Q_2 \equiv o$. Alors, puisque $P_1P_2 \equiv o$, on a $P_1 < Q_2 - P_2Q_2$, et puisque $Q_1Q_2 \equiv o$ on a $Q_1 < P_2 - P_2Q_2$. Par suite $P_1 + Q_1 < (P_2 - P_2Q_2) + (Q_2 - P_2Q_2)$, ce qui n'est pas. Donc $Q_1Q_2$ n'est pas vide.

Lemme 14. — Soient P et Q deux espaces normaux, Q étant un transformé de P; alors, si P est de classe 2, Q est de classe 2; et réciproquement [$3^b_1$].

Théorème 15*d*. — *Soit* P *un espace normal de classe* 2 *et* Q *un* *transformé de* P; *alors, si* Q *est un espace normal,* Q *est un transformé normal de* P, *et réciproquement.*

En effet, soit

$$B_1 + B_2 \equiv Q - PQ, \qquad R \equiv Q/(B_1 + B_2),$$
$$R_1 \equiv Q/B_2 - R - B_1, \qquad R_2 \equiv Q/B_1 - R - B_2.$$

Alors, puisque

$$R(B_1 + B_2) \equiv o,$$

$$R_1 R_2 \equiv (Q/B_2)(Q/B_1) - (R + B_1)Q/B_1 - (R + B_2)[Q/B_2 - (R + B_1)]$$
$$\equiv Q/(B_1 + B_2) - R - (R - R) \equiv o,$$

$$Q \mid (B_1 + B_2) \equiv Q \mid B_1 - B_2 + Q \mid B_2 - B_1 \equiv R_1 + R + R_2,$$

$$R^1/B_1 \equiv R_2/B_2 \equiv o.$$

Soit C un élément de $R_1$; alors, puisque $C/B_1 \equiv o$,

$$(Q/B_2)/C < [Q \mid (B_1 + B_2)]/C.$$

Or, puisque les deux derniers espaces sont tous deux des espaces normaux de mêmes classe et dimension [$8^d_3$], ils sont identiques. Par suite,

$$R_1/C + R/C \equiv R_1/C + R/C + R_2/C,$$

et puisque

$$R_1 R_2 \equiv RR_2 \equiv o,$$
$$R_2/C(R_1/C + R/C) \equiv o.$$

Donc $R_2/C \equiv o$ et, puisque C était un élément quelconque de $R_1$, on a $R_2 \mid R_1 \equiv o$.

Démontrons la réciproque. Soient $R'_1$ et $R'_2$ les deux sous-espaces connexes entiers de $Q \mid (Q - PQ) - Q/(Q - PQ)$ conjugués à $B_2$ et $B_1$, où comme plus haut, $B_1 + B_2 \equiv Q - PQ$. Alors

$$R'_1 + Q/(B_1 + B_2) \quad \text{et} \quad R'_2 + Q/(B_1 + B_2)$$

sont chacun un espace $T_n$ avec une frontière normale $Q/(B_1 + B_2)$ et

$$R'_1 \mid B_1 \equiv R'_2 \mid B_2 \equiv o.$$

Or, puisque $B_1 + Q/(B_1 + B_2)$ et $B_2 + Q/(B_1 + B_2)$ sont chacun un $T_n$ [$5^d_1$], $R'_1 + Q/(B_1 + B_2) + B_1$ et $R'_2 + Q/(B_1 + B_2) + B_2$ sont chacun un $S_n$ [$5^d$]. Par suite $Q \mid (Q - PQ) + (Q - PQ)$ est un $T_{n+1}$

avec une frontière normale $Q \mid (Q - PQ)$. Or, puisque

$$P - (P - PQ) \equiv PQ$$

est aussi un $T_{n+1}$ avec la même frontière et qu'aucun élément de $Q - PQ$ n'est conjugué à un élément non sur la frontière de $PQ$, la somme $Q - PQ + PQ = Q$ est un espace normal de classe 2 [$5^d$].

Corollaire 1. — Soient P et Q deux espaces normaux de classe 2, Q étant un transformé de P; alors, si A est un élément de PQ conjugué à $Q - PQ$, $Q/A$ est transformé normal de $P/A$.

De même :

Théorème 16*d*. — *Soient* Q *un espace normal de classe* 2 *et un transformé de* P; *alors, si* P *est un espace normal,* Q *ne contient aucun* $S_1$ *primitif contenant* $Q - PQ$; *et réciproquement.*

On déduit sans difficulté des deux derniers théorèmes le théorème suivant :

Théorème 17*d*. — *Soient* P *et* Q *deux espaces normaux* $S_2$, Q *étant un transformé de* P; *alors, si* P *est de connectivité* 1, Q *est de connectivité* 1, *et réciproquement.*

Nous allons maintenant étudier les transformés des espaces $S_2$ et de connectivité 1.

# CHAPITRE V.

ESPACES PARAMÉTRIQUES $S^t$ ORIENTÉS. DÉTERMINATION D'UN $S_2$ DE CONNECTIVITÉ 1 PAR DEUX POLYNOMES. EXISTENCE D'UNE CARTE DONT CHAQUE PAYS A UNE FRONTIERE CONVEXE ET QUI EST ÉQUIVALENTE A UN $S_2$ DE CONNECTIVITÉ 1.

Nous considérerons ici des espaces paramétriques $S^t$ qui pour tout entier positif d'un intervalle $(p \leqq t \leqq q)$ sont des espaces discrets. Nous supposerons que les éléments des derniers espaces ont chacun une coordonnée $[1_t^q]$ et que, pour un élément A commun à $S^k$ et $S^{k+1}$ $(p \leqq k < q)$ la coordonnée de A dans $S^{k+1}$ est la même que dans $S^k$.

DÉFINITION 7. — *a*. Une fonction coordonnale ([1]) $S(x)$ d'un espace discret S est une *fonction d'orientation* de S si pour tout élément A de coordonnée $a$ contenu dans S,

$$S(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_r), \qquad r = |S / A|,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sont les coordonnées des $r$ éléments de S conjugués à A.

*b*. Un espace discret S est *orientable* s'il existe une fonction d'orientation $S(x)$ de S telle que :

(*i*) *Si les coordonnées, de deux éléments* B *et* C *conjugués à un élément quelconque* A *de* S, *sont adjacents* ([2]) dans $S(a)$, B *et* C *sont conjugués;*

(*ii*) *Si* $a$, $b$, $c$ *sont les coordonnées de trois éléments* A, B, C *quelconques conjugués l'un à l'autre et si* $b$ *précède* $c$ *dans la suite* $S(a)$, $c$ *précède* $a$ *dans* $S(b)$ *et* $a$ *précède* $b$ *dans* $S(c)$ ;

S avec une telle $S(x)$ est appelé un *espace discret orienté.*

*c*. Un espace discret paramétrique $S^t$ $(p \leqq t \leqq q)$ est *orientable* s'il existe une fonction d'orientation $S^t(x)$ telle que :

(*i*) $S^k$ *avec* $S^k(x)$ *est un espace discret orienté* $(k = p, p+1, \ldots, q)$;

(*ii*) *Si* $a$, $b$, $c$ sont les coordonnnées des éléments A, B, C *de* $S^k S^{k+1}$ *conjugués l'un à l'autre et si* $b$ *précède* $c$ *dans* $S^k(a)$, *il précède également* $c$ *dans* $S^{k+1}(a)$ $(k = p, p+1, \ldots, q-1)$.

$S^t$ avec une telle fonction $S^t(x)$ est appelé un espace paramétrique *orienté*.

Deux espaces paramétriques (orientés ou non) $S^t$ et $R^t$ $(p \leqq t \leqq q)$

---

([1]) Une fonction *coordonnale* $S(X)$ d'un espace S est une fonction qui fait correspondre à chaque élément de S *un* ou plusieurs nombres. La fonction $S(X)$ a ici pour effet d'ordonner tous les éléments de S conjugués à un élément quelconque A de S. *Voir* la démonstration du théorème 2*e*.

([2]) Deux nombres $a_i$ et $a_j$ sont *adjacents* dans la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_r)$, si $|i - j| = 1$. Le nombre $a_i$ *précède* ou *suit* $a_j$ dans cette suite selon que $i - j = -1$ ou $i - j = 1$. Les nombres $a_1$ et $a_r$ sont adjacents et $a_1$ suit $a_r$.

sont *équivalents*, si $S^k = R^k$ ($k = p, p+1, \ldots, q$), et nous écrivons alors $S^t = R^t$.

*d*) Une fonction $s^t(x, y)$ est une *fonction distance* d'un espace paramétrique $S^t$ ($p \leqq t \leqq q$) si, *pour tout entier* $k$ *de l'intervalle* $(p, q)$ *et pour tout couple d'éléments* A *et* B *de* $S^k$ *de coordonnées* $a$ et $b$, $s^k(a, b)$ est nul ou *différent* de zéro selon que $S^k(A, B)$ est nul ou *différent* de zéro (c'est-à-dire selon que A et B ne sont pas, ou sont, conjugués).

*e*. Le symbole $[a_r]$ désigne une suite de $r$ nombres $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, et les inégalités $a < [a_r]$ et $a \not< [a_r]$ signifient respectivement que le nombre $a$ est ou n'est pas un nombre de la suite $[a_r]$.

Si $a_i < [a_r]$ et $a_j \not< [a_r]$, les « produits » $(a_i, a_j)[a_r]$, et $(a_j, a_i)[a_r]$ désignent respectivement les suites $(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_r)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_i, \ldots, a_r)$, et $(a_i \rightarrow a_j)[a_r]$ désigne la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_r)$.

Si $a_i < [a_r]$, $a_j < [a_r]$ et $a_k \not< [a_r]$, le « produit » $(a_i, a_j)[a_r]$ désigne la suite $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j)$ et le « produit » $(a_i, a_j)\{[a_r] + a_k\}$ désigne la suite $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_k)$ (¹).

Définition 8*a*. — Un espace paramétrique *orienté* est un espace *paramétrique canonique* (à deux dimensions) $S_2$ ($6 \leqq t \leqq q$) si :

(*i*) $S_2^6$ *est un espace normal* $S_2$ *de classe deux primitif* (*de connectivité* 1);

(*ii*) *Il existe une fonction distance* $s^t(x, y)$ *de* $S_2^t$ *satisfaisant à* $s^6(1, 6) = s^6(2, 5) = s^6(3, 4) = 0$ (²);

(*iii*) $S_2^k$ *est un transformé normal de* $S_2^{k-1}$ ($k = 7, 8, \ldots, q$) (³); $S_2^t$ *est positivement ou négativement orienté selon que* 2 *précède ou suit* 3 *dans la suite* $S_2^6(1)$ (⁴).

---

(¹) L'équation $[a_r] = [b_r]$ signifie qu'il existe une permutation cyclique des nombres de la suite $[a_r]$ telle que les nombres de la nouvelle suite soient égaux aux nombres correspondants de $[b_r]$.

(²) Par suite, $S_2^6(1) = (2, 3, 5, 4)$, $S_2^6(2) = (3, 1, 4, 6)$, etc., ou $S_2^6(1) = (3, 2, 4, 5)$, etc. [7$b_i$], et il n'y a que ces deux possibilités. Aussi, *une* telle fonction $s^6(x,y)$ est le polynome $(x-6y)(2x-5y)\ldots(6x-y)(x-y)$.

(³) Par suite, $S_2^k = k$ et la coordonnée d'un des éléments de $S_2^k - S_2^k S_2^{k-1}$ est $k$.

(⁴) Par suite, tout $S_2^t$ canonique est orienté soit positivement, soit négativement.

*b*. Soient $S_2^t\,(6 \leqq t \leqq q)$ un espace paramétrique canonique (orienté positivement ou négativement) et $a$, $b$, $c$, les coordonnées de trois éléments A, B, C conjugués l'un à l'autre dans $S_2^k\,(6 \leqq k \leqq q)$ ; alors, selon que $c$ précède ou suit $b$ dans la suite $S_2^k(a)$, l'élément C est le premier ou second conjugué dans $S_2^k$ du couple A, B.

On déduit immédiatement des deux dernières définitions :

Théorème 1*e*. — *A tout espace paramétrique canonique* $S_2^t\,(6 \leqq t \leqq q)$ *il correspond un seul* [1] ensemble de trois fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ *tel que pour tout entier* $k$ *de l'intervalle* $(6, q)$ *on ait :*

($i$) $f_0(k)$ *et* $k$ *sont respectivement les coordonnées des éléments* A *et* B *de* $S_2^k - S_2^k S_2^{k-1}$ ;

($ii$) $f_1(k)$ *et* $f_2(k)$ *sont respectivement les coordonnées du premier et second conjugué du couple* A *et* B.

*c*. Un tel ensemble de fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ est appelé *le* triple (de fonctions) canonique de $S_2^t$ et *un* triple canonique de tout espace discret équivalent à $S_2^k\,(6 \leqq k \leqq q)$ [2]. Par suite :

Théorème 2*e*. — *Soient* $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ *le triple canonique d'un espace paramétrique canonique* $S_2^t\,(6 \leqq t \leqq q')$ *et* $S_2^t(x)$ *la fonction d'orientation de* $S_2^t$; *alors, si* $a$ *est la coordonnée de l'élément* A *de* $S_2^k$ *on a :*

$$
\begin{aligned}
S_2^k(a) &= S_2^{k-1}(a)\ \textit{sauf quand}\ a < [f_1(k), f_2(k)]\, S_2^{k-1}[f_0(k)],\ \text{et}\ a = k, f_0(k),\\
&= [f_1(k), f_2(k)] \{ S_2^{k-1}[f_0(k)] + f_0(k) \} && \textit{quand} \quad a = k,\\
&= [f_2(k), f_1(k)] \{ S_2^{k-1}[f_0(k)] + k \} && \text{»} \quad a = f_0(k),\\
&= [k, f_0(k)]\, S_2^{k-1}[f_1(k)] && \text{»} \quad a = f_1(k),\\
&= [f_0(k), k]\, S_2^{k-1}[f_2(k)] && \text{»} \quad a = f_2(k),\\
&= [f_0(k) \rightarrow k]\, S_2^{k-1}(a) && \textit{quand} \quad a < [f_1(k), f_2(k)]\, S_2^{k-1}[f_0(k)]\\
& && \text{et que} \quad a \neq f_1(k), f_2(k),
\end{aligned}
$$

pour tout entier de l'intervalle $(6, q')$ (*voir* 7*e*).

---

[1] C'est-à-dire si $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f'_0(x)$, $f'_1(x)$, $f'_2(x)$ sont deux triples de fonctions satisfaisant aux conditions ($i$) et ($ii$), on a

$$f_i(k) = f'_i(k) \qquad (i = 0, 1, 2,\ k = 6, 7, \ldots, q).$$

[2] Il est un triple *positif* ou *negatif* selon que $S_2$ est orienté positivement ou négativement.

En effet, soit

$$S_2^{k-1}[f_1(k)] = (a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_p). \qquad f_0(k) \doteq a_r.$$

Alors, puisque $S_2^i$ est orienté,

$$(1) \qquad S_2^{k-1}[f_0(k)] = [b_1, b_2, \ldots, a_{r+1}, f_1(k), a_{r-1}, \ldots, b_{q-1}, f_2(k), b_{q+1}, \ldots, bs] \quad [7\,b\,ii],$$

et, puisque $S_2^k$ est un transformé normal de $S_2^{k-1}$,

$$S_2^k[f_1(k)] = (a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, x, y, a_{r+1}, \ldots, p) \quad [7\,c\,ii],$$

où le couple $(x, y)$ est identique soit à $[f_0(k), k]$, soit à $[k, f_0(k)]$. Or, puisque $f_1(k)$ est le premier conjugué dans $S^k$ du couple $[f_0(k), k]$,

$$S_2^k[f_0(k)] = [\ldots, f_1(k), k, \ldots] \quad [8\,b].$$

Par suite

$$S_2^k[f_1(k)] = [\ldots, k, f_0(k), \ldots].$$

Donc $k$ précède $f_0(k)$ dans $S_2^k[f_1(k)]$, et

$$(2) \qquad S_2^k[f_1(k)] = [a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, k, f_0(k), a_{r+1}, \ldots, a_p] = [k, f_0(k)]\, S_2^{k-1}[f_1(k)] \quad [7\,e]$$

De même

$$S_2^k[f_2(k)] = [f_0(k), k]\, S_2^{k-1}[f_2(k)].$$

Soient, maintenant, $B_1$ et $B_2$ les éléments de $S_2^{k-1}$ dont les coordonnées sont $f_1(k)$ et $f_2(k)$, et soient $R_1$ et $R_2$ les deux sous-espaces connexes entiers de

$$S_2^{k-1} \mid (S_2^{k-1} - S_2^k S_2^{k-1}) - (B_1 + B_2),$$

où $R_1$ et $R_2$ contiennent respectivement les éléments dont les coordonnées sont $a_{r-1}$ et $a_{r+1}$. Alors, d'après l'équation (1), les éléments de $R_1$ sont les éléments dont les coordonnées sont les nombres de la suite $(a_{r-1}, \ldots, b_{q-1})$, et les eléments de $R_2$ sont les éléments dont les coordonnées sont les nombres de la suite $(b_{q+1}, \ldots, b_s, b_1, b_2, \ldots, a_{r+1})$. D'autre part d'après l'équation (2) l'élément de $S_2^k$ de coordonnée $k$ est conjugué à $R_1$ et l'élément de $S_2^k$ de coordonnée $f_0(k)$ est conjugué à $R_2$. Par suite

$$S_2^k(a) = S_2^{k-1}(a),$$

sauf quand $a$ est un nombre de la suite $[f_1(k), f_2(k)]\ S_2^{k-1}\ [f_0(k)]$, et les autres équations du théorème sont satisfaites.

THÉORÈME 3e. — *A tout espace paramétrique canonique (normal) $S_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$ il correspond une* seule [1] *fonction distance $s^t(x, y)$* de $S_2^t[s^k(x,y)] = -s^k(y,x)$ *satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$(i)\quad \left.\begin{aligned} s^6(1, n) &= n - 1 \\ s^6(6, n) &= n + 3 \end{aligned}\right\} (n = 2, 3, 4, 5) \quad \text{et} \quad \left.\begin{aligned} s^6(2, n) &= n + 6 \\ s^6(5, n) &= n + 8 \end{aligned}\right\} (n = 3, 4);$$

$$(ii)\qquad s^k(x, y) = s^{k-1}(x, y)$$

sauf quand

$$x = k,\ y < [f_1(k), f_2(k)]\ S_2^{k-1}\ [f_0(k)] \quad \text{et} \quad y = f_0(k);$$

$$(iii)\qquad s^k(k, y) = s^{k-1}[f_0(k), y]$$

quand

$$y < [f_1(k), f_2(k)]\ S_2^{k-1}\ [f_0(k)], \quad \text{et que} \quad y \neq f_1(k), f_2(k);$$

$$(iv)\qquad s^k[f_i(k), k] = 3(k-2) - i$$

quand

$$i = 0, 1, 2,\ k = 7, 8, \ldots, q),$$

où $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ est le triple canonique de $S_2^t$.

*d*. Une telle fonction distance $s^t(x, y)$ est appelée la *fonction distance canonique* de $S_2^t$; et un couple de fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$ satisfaisant à $g_i(k) = s^{k-1}[f_i(k), f_0(k)]$ $(i = 1, 2; k = 7, 8, \ldots, q)$ est appelé le *couple canonique* de $S_2^t$. Par suite :

THÉORÈME 4e. — *Si $s^t(x, y)$ est la fonction distance canonique d'un espace paramétrique canonique* $S_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$, *à tout entier positif $k'$ inférieur ou égal à* $3(k-2)$ ou $(6 \leqq k \leqq q)$ *il correspond un seul couple d'entiers positifs $a$, $b$ tel que $s^k(a, b) = k'$.*

Par suite, puisque $g_i(k) \leqq 3(k-1)$,

THÉORÈME 5e. — *Si $s^t(x, y)$ est la fonction distance canonique*

---

[1] C'est-à-dire si $s^t(x, y)$ et $s_1^t(x, y)$ sont deux telles fonctions, on a

$$s^k(x,y) = s_1^k(x, y) \qquad (k = 6, 7, \ldots, q;\ x, y = 1, 2, \ldots, k).$$

*Voir* note à 1e.

*d'un espace paramétrique canonique* $S_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$ *et si* $g_1(x)$, $g_2(x)$ *est le couple canonique de* $S_2^t$, *la fonction* $s^t(x, y)$ *et le couple* $g_1(x)$, $g_2(x)$ *déterminent chacun le triple canonique* $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ *de* $S_2^t$.

THÉORÈME 6*e*. — *Si* $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ *sont un triple canonique de chacun des espaces paramétriques canoniques* $S_2^t$ et $R_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$ *qui sont tous deux orientés positivement ou négativement, la transformation biunivoque de* $R_2^t$ *en* $S_2^t$, *dans laquelle les éléments correspondants ont leurs coordonnées égales, est une transformation équivalence de* $R_2^t$ *en* $S_2^t$. (*Par suite :* $R_2^t = S_2^t$).

Le même théorème est vrai pour le couple canonique $g_1(x)$, $g_2(x)$. Par suite :

THÉORÈME 7*e*. — *Le triple canonique* $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ *ou le couple canonique* $g_1(x)$, $g_2(x)$ *d'un espace paramétrique canonique* $S_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$ *orienté posivement (ou négativement) déterminent chacun quel couple d'éléments de* $S_2^k$ *est conjugué et lequel n'est pas conjugué* $(6 \leqq k \leqq q)$.

Nous allons montrer maintenant que pour tout espace normal $S_2$ de classe 2 et de connectivité 1 il existe un espace paramétrique canonique $S_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$ tel que $S_2 = S_2^q$. Par suite pour un tel $S_2$ il existe un couple de fonctions (le couple canonique de $S_2^t$) qui détermine quel couple de ses éléments est conjugué et lequel n'est pas conjugué.

THÉORÈME 8*e*. — *A tout élément* C *contenu dans un espace normal* $S_2$ *de classe* 2 *non primitif de connectivité* 1, *il correspond au moins un* $S'_1$ *contenu dans* $C + S_2 | C$ *tel que* $S_2 | S'_1$ *soit un* $S_1$.

**En effet, soient :**

**1° $A_1, A_2, \ldots, A_m$ tous les éléments (distincts) de**

$$S_2 | C \quad (A_i | A_{i+1} \not\equiv 0).$$

**2° $(S_2 - C) / (A_i + A_{i+1}) \equiv B_i$ (les éléments B ne sont pas tous nécessairement distincts).**

***a.*** **Si trois éléments B successifs (ou davantage) coïncident $S_2 | C$**

contient un $S'_1$ dont chacun des éléments est primitif, et par suite, $S_2 \mid S'_1$ est un $S_1$ primitif [$13_3^b$]. Supposons que ce ne soit pas le cas.

*b*. Si deux éléments $B_{i-1}$ et $B_i$ coïncident, mais ne sont pas conjugués à aucun autre élément de $S_2 \mid C$ que $A_{i-1}$, $A_i$, $A_{i+1}$, on a

$$S_2 \mid A_i - A_{i-1} - C - A_{i+1} \equiv B \qquad \text{et} \qquad B_i \mid (S_2 \mid C - A_{i-1} - A_i - A_{i+1}) \equiv 0.$$

Par suite $S_2 \mid (C + A_i)$ est un $S_1$. Supposons que ce ne soit pas le cas.

*c*. Si $S_2 \mid C^2$ ne contient pas des éléments *entrelacés* (¹), tous les éléments B sont distincts, et pour tout élément $A_i$ de $S_2 \mid C$ on a

$$(S_2 \mid C - A_{i-1} - A_i - A_{i+1}) \mid (S_2 \mid A_i - A_{i-1} - C - A_{i+1}) \equiv 0.$$

Par suite $S_2 \mid (C + A_i)$ est encore un $S_1$. Supposons que ce ne soit pas non plus le cas.

*d*. Soit D un élément entrelacé de $S_2 \mid C^2$ conjugué à $A_i$ et $A_j\,(j - i > 1)$ et à aucun autre élément $A_k$ entre (²) $A_i$ et $A_j$ tel qu'aucun autre élément (entrelacé) de $S_2 \mid C^2$ ne soit conjugué à un couple d'éléments de $S_2 \mid C$ compris entre $A_i$ et $A_j$. Alors, puisque

$$A_i \mid A_j \equiv C \mid D \equiv 0$$

et C, D sont chacun conjugués à $A_i$ et $A_j$, l'ensemble

$$A_i + C + A_j + D$$

est un $S_1$ de $S_2$ et puisque $S_2$ est de connectivité 1, $S_2 - S_1$ n'est pas connexe. Par suite, puisque l'hypothèse dans (*a*) et (*b*) n'est pas satisfaite, les éléments $B_i$, $B_{i+1}$, ..., $B_{j-1}$ sont distincts. Or, soit $A_k$ un élément entre $A_i$ et $A_j\,(j - k > 0,\ k - i > 0)$. Alors $B_{k-1}$, $B_k$ sont distincts et

$$(S_2 \mid A_k - A_{k-1} - C - A_{k+1}) \mid (S_2 \mid C - A_{k-1} - A_k - A_{k+1}) \equiv 0.$$

Donc $S_2 \mid (C + A_k)$ est un $S_1$, et le théorème est démontré.

---

(¹) C'est-à-dire un élément conjugué à $A_i$ et $A_j$, $|i - j| > 1$, mais non conjugué à tous les éléments $A_{i+1}$ ... $A_{j-1}$ ni à tous les éléments $A_{j+1}$, ..., $A_{i-1}$.

(²) C'est-à-dire $j - k > 0$ et $k - i > 0$.

Corollaire 1. — Si un espace $S_2$ de connectivité 1 contient un élément A tel que $S_2 \equiv A + S_2 | A + S_2 | A^2$ et tel que chaque élément de $S_2 | A^2$ soit conjugué à deux éléments conjugués de $S_2 | A$, on a : $|S_2 | A^2| \leqq |S_2 | A|$ et il existe un $S'_1$ de $S_2$ contenant au moins un élément de $S_2 | A^2$ et tel que $S_2 | S'_1$ soit un $S_1$.

Soit maintenant cet espace $S_2$ un transformé d'un espace discret P, pour lequel $S_2 | (S_2 - S_2 P)$ est un $S_1$. Alors $S_2$ est un transformé normal de P [$6^b$] et par suite, P est un espace normal de mêmes dimension, classe et connectivité que $S_2$ [$16^d$, $17^d$]. Par suite, par induction :

Théorème 9e. — *A tout espace normal* $S_2$ (*de classe* 2) *fini de connectivité* 1, *il correspond au moins un espace paramétrique* $S_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$ *tel que* (*i*) $S_2^6$ *soit un espace* $S_2$ (*de classe* 2) *primitif*, (*ii*) $S_1^{k+1}$ *soit un transformé normal de* $S_2^k$ *et* (*iii*) $S_2^q$ *soit identique à l'espace* $S_2$ *donné* ($k = 6, 7, \ldots, q - 1$).

Corollaire 1. — Soit A un élément quelconque d'un espace $S_2$ fini de connectivité 1 ; alors il existe un espace paramétrique

$$S_2^t \quad (p \leqq t \leqq q)$$

tel que

$$(i)\ |S_2^p| = |S_2 | A| + 2,$$

(*ii*) $S_2^{k+1}$ soit un transformé normal de $S_2^k$

$$(iii)\ S_2^q = S_2 \quad \text{et} \quad (iv)\ A < [S_2^{k+1} - S_2^{k+1} | (S_2^{k+1} - S_2^k S_2^{k+1})] S_2^p,$$
$$(k = p, p+1, \ldots q - 1).$$

Or, puisque un espace $S_2$[1] primitif est orientable (positivement ou négativement) de façon qu'il existe une fonction distance $s(x, y)$ de $S_2$ satisfaisant à $s(1,6) = s(2,5) = s(3,4) = 0$; et puisque un transformé normal d'un espace normal $S_2$ orientable est orientable de façon que la seconde condition dans la Définition 7*c* soit satisfaite, il suit :

Théorème 10e. — *A tout espace normal* $S_2$ *fini de connectivité* 1

(1) Tous les espaces normaux $S_2$ que nous considérerons dans ce Chapitre (sauf dans le Théorème 16*e*) sont *de classe* 2. Aussi nous omettrons presque toujours, pour plus de rapidité, l'expression « de classe 2 » à la suite de « un espace normal $S_2$ ».

*il correspond au moins un espace paramétrique canonique*

$$S_2^t \quad (6 \leqq t \leqq q)$$

*orienté positivement (ou négativement) tel que* $S_2^q \equiv S_2$.

Or, puisque $|S_2^6| - |D^1(S_2^6)| + |D^2(S_2^6)| = 2$ et le nombre à droite est invariant dans la transformation normale (*voir* l'Introduction)

Corollaire 1. — Pour tout espace normal $S_2$ fini de connectivité 1 on a

$$|S_2| - |D^1(S_2)| + |D^2(S_2)| = 2 \quad (^1) \quad \text{(formule de Euler).}$$

Théorème 11*e*. — *A tout espace normal* $S_2$ *fini de connectivité* 1 *il correspond au moins un couple de polynomes* $g_1^{(X)}$, $g_2^{(X)}$ *(le couple canonique d'un* $S_2^t$ *orienté positivement satisfaisant à* $S_2^q \equiv S_2$*) qui permet de distinguer parmi les couples d'éléments de* $S_2$ *ceux qui sont conjugués.*

On déduit facilement du théorème 8*e* qu'à tout espace normal $S_2$ fini de connectivité 1 il correspond un $S_2^t$ qui satisfait, en outre des conditions du théorème 9*e*, à la condition

$$S_2^k - S_2^k S_2^{k-1} < (S_2^k - S_2^{k+1} S_2^k) + S_2^k \,|\, (S_2^k - S_2^{k+1} S_2^k) \qquad (k = 7, 8, \ldots, q-1).$$

Or, les coordonnées (dans $S_2^k$) du couple $S_2^k - S_2^k S_2^{k-1}$ sont $k$, $f_0^{(k)}$ [1*e*], et la coordonnée de l'élément $S_2^k - S_2^{k+1} S_2^k$ est $f_0(k+1)$. Par suite, si $S_2^k - S_2^{k+1} S_2^k$ est contenu dans $S_2^k - S_2 S_2^{k-1}$, le nombre $f_0(k+1)$ est égal soit à $k$ soit à $f_0^{(k)}$; et si $S_2^k - S_2^k S_2^{k-1}$ est contenu dans

$$S_2^k \,|\, (S_2^k - S_2^{k+1} S_2^k),$$

l'élément $S_2^k - S_2^{k+1} S_2^k$ est un des conjugués du couple

$$S_2^k - S_2^k S_2^{k-1} \quad [1e]$$

et par suite, $f_0(k+1)$ est égal soit à $f_1^{(k)}$ soit à $f_2^{(k)}$.

Théorème 12*e*. — *A tout espace normal* $S_2$ *fini de connectivité* 1, *il correspond au moins un triple canonique* $f_0^{(X)}$, $f_1^{(X)}$, $f_2^{(X)}$ *tel*

---

(1) On déduit aussi facilement que le degré de l'élément $S_2^k - S_2^k S_2^{k+1}$ est égal à la somme des degrés du couple $S_2^{k+1} - S_2^k S_2^{k+1}$, etc.

*que $f_0^{(k+1)}$ soit égal à un de quatre nombres $k$, $f_0^{(k)}$, $f_1^{(k)}$, $f_2^{(k)}$ pour tout entier compris dans l'intervalle* $(7,\ q-1)$, *où* $q = |S_2|$, (*voir* 8*c*).

Nous avons vu dans le théorème 6*e* que deux espaces paramétriques canoniques $S_2^t$ et $R_2^t$ également orientés qui ont le même triple canonique sont équivalents. La réciproque n'est pas vraie ainsi que le montre le théorème suivant :

Théorème 13*e*. — *Soient :*

1° $f_0^{(X)}$, $f_1^{(X)}$, $f_2^{(X)}$ *le triple canonique d'un espace paramétrique canonique* $S_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$;

2° A *et* B *l'élément de* $S_2^k$ *de coordonnées* $k$ *et* $f_0^{(k)}$, A *étant primitif ;*

3° $c$ *la coordonnée de l'élément* $S_2^k/A - (S_2^k/(A+B)+B)$. *Alors les trois fonctions* $f_0'^{(X)}$, $f_1'^{(X)}$, $f_2'^{(X)}$ *satisfaisant à*

$$f_i'^{(X)} = f_i^{(X)}\ (X \neq k,\ i = 0,\ 1,\ 2) \quad \text{et} \quad f_0'^{(k)} = c, \quad f_1'^{(k)} = f_2^{(k)}, \quad f_2'^{(k)} = f_1^{(k)},$$

*sont un triple canonique d'un espace* $R_2^t$ $(6 \leqq t \leqq q)$ *équivalent à* $S_2^t$.

Nous donnons maintenant pour les espaces normaux $S_2$ de classe 2, le théorème analogue au théorème 28*a* pour les espaces discrets arbitraires.

Théorème 14*e*. — Tous les espaces normaux $S_2$ de degré 1 sont équivalents et d'ordre 20. Le nombre des espaces normaux $S_2$ non équivalents de degré 2 est deux : un d'ordre 24 et un d'ordre 8. Le nombre des espaces normaux $S_2$ non équivalents de degré 3 est quatre, un d'ordre 28 et trois d'ordre 4 (un contenant deux éléments de degré 2, un contenant un élément de degré 2, et un ne contenant aucun élément de degré 2). Tous les espaces normaux $S_2$ de degré 3 et d'ordre 4 sont chacun un transformé normal de l'espace normal $S_2$ de degré 2 et d'ordre 8. Tous les espaces normaux $S_2$ de degré 3, sauf les espaces qui ne contiennent aucun élément de degré 2, sont chacun un transformé normal de l'espace normal $S_2$ de degré 2 et d'ordre 24, etc.

Nous appliquerons maintenant les théorèmes 8*e* et 9*e* pour démontrer l'existence d'un hyperespace discret dans le plan (primitif ou Euclidien) équivalent à un espace normal quelconque $S_2$ fini de connectivité 1.

Théorème 15e. — *A tout espace normal* $S_2$ (*de classe* 2) *fini de connectivité* 1, *il correspond une carte dans le plan dont chaque pays a une frontière convexe et qui* (*considérée comme un espace discret de* 2- *cellules*) *est équivalente à l'espace* $S_2$(¹).

Le théorème est évidemment vrai quand $S_2$ est primitif. On déduit, par induction des théorèmes que nous venons de citer et du lemme suivant qu'il en est de même pour tout espace normal $S_2$ fini de connectivité 1.

Lemme 15. — Soient dans un plan trois polygones convexes A, B, $B'$ disposés de la façon suivante : A et B ont un côté commun $b_1 b_2$ et sont respcctivement dans les deux demi-plans qu'il détermine, de même A et $B'$ ont un côté commun $b'_1 b'_2$ ($b_1 b_2$ et $b'_1 b'_2$ n'ayant aucun point commun) et sont placés de part et d'autre de ce côté.

Prenons un point $a$ entre $b_1$ et $b_2$, et un point $a'$ entre $b'_1$ et $b'_2$. Dans le polygone B les deux côtés qui aboutissent au côté $a_1 b_1$ déterminent quatre demi-plans dont deux $P_1$ et $P_2$ contiennent le polygone B. De même on peut associer au polygone $B'$ deux demi-plans $P'_1$ et $P'_2$ qui le contiennent. Soit $c$ un point entre $a$ et $a'$ dans le produit $P_1 P_2 A$ et $c'$ un point entre $c$ et $a'$ dans le produit $P'_1 P'_2 A$. Cela posé :

1° B et le triangle $b_1 c b_2$ constituent un polygone convexe, il en est de même de $B'$ et du triangle $b'_1 c' b'_2$ ;

2° Si l'on retranche du polygone A les deux triangles $b_1 c b_2$ et $b'_1 c' b'_2$ on obtient deux polygones convexes ayant en commun le côté $cc'$ et situés de part et d'autre de ce côté.

Or, puisqne le problème de la colorabilité de toutes les cartes (dans le plan) en quatre couleurs est équivalent au problème de la colorabilité en autant de couleurs de tous les espaces normaux $S_2$ fini de connectivité 1 [13^e^, 16^c^], il résulte donc du dernier théorème

(¹) On peut même exiger que chaque pays sauf un, soit une région *convexe*. Le pays excepté est celui qui contient le « point infini ».

qu'il faut seulement considérer les cartes dans lesquelles chaque pays a une frontière convexe. En d'autres termes, si toute carte (dans un plan) dont chaque pays a une frontière convexe et qui est un $S_2$ fini [1] est colorable en quatre couleurs, toute carte avec des pays quelconques est colorable en quatre couleurs.

Nous terminons par un théorème illustrant de l'opération *inverse*, de l'opération $D_p^m(W_n)$, et une application de ce théorème.

THÉORÈME 16e. — *Soit* S *un hyperespace discret dont les éléments sont les sous-espaces normaux* $S_1$ *fini d'un espace normal* $S_1^3$ *(de classe* 3) *qui satisfont chacun à* $C(S_1^3 - S_1) = 1$, *deux éléments quelconques* P *et* Q *de* S *étant conjugués si (considérés comme sous-espaces de* $S_1^3$) $PQ \not\equiv 0$. *Alors* S *est un espace normal* $S_2$ *satisfaisant à* $D_p^2(S_2) = S_1^3$, *si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(*i*) *A tout couple d'éléments conjugués* $a$ *et* $b$ *de* $S_1^3$ *il correspond un seul élément de* S *contenant* $a + S_1^3 \mid a - b$;

(*ii*) *Le produit* PQ *de deux éléments conjugués de* S *est (considéré comme un sous-espace de* $S_1^3$) *toujours connexe;*

(*iii*) *Si trois éléments* $P_1$, $P_2$, $P_3$ *de* S *satisfont à* $P_iP_j \not\equiv 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$, *ils satisfont aussi à* $P_1P_2P_3 \not\equiv 0$.

En effet, soient P et Q deux éléments conjugués de S et soit $a$ un élément de $S_1^3$ contenu dans PQ. Alors, puisque

$$|P/a| = |Q/a| = 2, \qquad |S_1^3/a| = 3 \qquad \text{et} \qquad P/a + Q/a < S_1^3/a,$$

on a $|PQ| \geqq 2$. *Supposons* que $|PQ| > 2$. Alors, puisque PQ est connexe, il contient un élément $b$ tel que $|(PQ)/b| = 2$. Soit $c$ l'élément $S_1^3 \mid b - (PQ) \mid b$. Alors S contient deux éléments (P et Q) contenant les éléments $b + S_1^3 \mid b - c$ de $S_1^3$, ce qui n'est pas. Donc $|PQ| = 2$.

Soient P, Q et R, trois éléments de S conjugués l'un à l'autre, et *supposons* que $|PQR| = 2$. Alors puisque $|PQ| = 2$, on a $PQR \equiv PQ$. Soient $a$ et $b$ les éléments de PQ. Alors les élément $P/a - b$,

[1] On peut même exiger que tout $S_1$ dans cet $S_2$ ne soit pas primitif et d'autres restrictions, de cette nature; *voir* G. D. BIRKHOFF et P. FRANKLIN, *loc. cit.*

$Q/a - b$, $R/a - b$ et $b$ sont distincts, ce qui n'est pas, puisque

$$|S_1^3/a| = 3.$$

Par suite $|PQR| = 1$, et S contient deux (et deux seulement) éléments conjugués à P et à Q, et ces deux éléments ne sont pas conjugués. Et à tout couple d'éléments de $S_1^3$ contenus dans P il correspond un seul élément de S conjugué à P et contenant ce couple. Donc S est un espace normal $S_2$ (de classe 2).

Or, puisque à tout élément de $S_1^3$ il correspond trois éléments (conjugués) de S contenant cet élément de $S_1^3$, la transformation qui fait correspondre à tout élément de $S_1^3$ les trois éléments de S contenant cet élément est une transformation biunivoque entre les éléments de $S_1^3$ et les ensembles $S_2'$ de S. Il suit aussi de ce que nous avons déjà dit que cette transformation est une transformation équivalence de $S_1^3$ en $D_p^2(S)$. Le théorème est donc démontré.

Il faut rattacher au problème du coloriage d'une carte dans le plan en quatre couleurs le problème qui consiste à chercher à quelles conditions un espace normal $S_1^3$ doit satisfaire pour qu'il existe dans le plan un « graph » (*complex* à 1 dimension) [1] C qui (considère comme un hyperespace discret dont les éléments sont les sommets de C et dans lequel deux éléments sont conjugués si C contient une ligne qui les joint) soit équivalent à $S_1^3$.

Les deux derniers théorèmes nous donnent immédiatement :

Théorème 17*e*. — *Une condition suffisante pour qu'il existe dans le plan un « graph » C équivalent à un espace normal* $S_1^3$, *est que* $S_1^3$ *satisfasse aux trois conditions* (*i*), (*ii*) *et* (*iii* *du dernier théorème et que l'hyperespace normal* $S_2$ *associé avec cet* $S_1^3$ *soit de connectivité* 1.

(Le « graph » déterminé par la carte équivalente à l'hyperespace normal $S_2$ associé avec $S_1^3$ est le graph désiré).

Il n'est pas besoin d'ajouter que nos définitions et nos théorèmes sont susceptibles de plusieurs généralisations et extensions. Je n'indiquerai qu'une généralisation des transformations équivalences.

En appelant une transformation équivalence une transformation de *genre zéro*, nous pouvons définir une transformation du $n^{\text{ième}}$ genre

(1) *Encyklopädie loc. cit.* p. 177.

comme une transformation biunivoque d'un espace S en lui-même (ou S en S′) satisfaisant à la condition que si A et A′ sont deux éléments quelconques correspondants dans cette transformation, S|A et S|A′ sont équivalents dans une transformation du $(n-1)^{\text{ième}}$ genre. La transformation pseudo-équivalence est alors une transformation du $1^{\text{ième}}$ genre. Il est clair, qu'une transformation du $n^{\text{ième}}$ genre est aussi une transformation de chaque genre supérieur à $n$, et que la totalité des transformations du $n^{\text{ième}}$ genre d'un espace discret S forment un groupe qui est un sous-groupe du groupe symétrique d'ordre $|S|!$ et qui contient comme sous-groupe le groupe des transformations de S de $(n-1)^{\text{ième}}$ genre. Un problème qui n'est pas résolu même pour les espaces symétriques définis [3*a*] en fonction de la transformation équivalence est le suivant : si A est un élément d'un espace symétrique S, le sous-espace S|A de S est-il un espace symétrique ?

Dans un travail qui est maintenant en préparation je reviens à l'étude des espaces $n$— aires (plus particulièrement à celles des espaces binaires) que j'ai définis dans l'Introduction et je les traite en suivant une marche semblable à celle que j'ai employée ici. Mais tandis que j'ai étudié les espaces discrets du point de vue des opérations géométriques qui ne font aucun usage du concept de nombre quantité ou grandeur, je me placerai surtout dans le nouveau travail du point de vue des opérations algébriques où le concept de nombre est de toute première importance. Et tandis que le présent travail nous a conduits à des espaces presque tous nouveaux, le travail en préparation sera presque entièrement consacré à la coordination des espaces déjà familiers. Entre autres j'apporterai quelques restrictions aux termes *segment*, *droite*, *plan*, espace à $n$ dimensions; que j'ai définis dans l'Introduction de façon à obtenir les termes euclidiens correspondants, et j'aborderai quelques points délicats que je n'ai pu qu'effleurer ici.

# APPENDICE [1].

Les cinq conditions

$C_1$. $P < P$,

$C_2$. Si $P < Q$ et $Q < R$, on a $P < R$,

$C_3$. $Q$ et $R$ satisfait soit à $Q < R$, soit à $Q \nless R$,

$C_4$. Si $Q < R$ et $R < Q$, on a $Q \equiv R$, et réciproquement

$C_5$. $O < P$,

sont évidemment satisfaites quand P, Q et R sont des espaces quelconques [2] si nous les interprétons ainsi : (*i*) $P < Q$ ou $P \nless Q$ veut dire que P est, ou n'est pas, un sous-espace de Q ; (*ii*) $Q \equiv R$ veut dire que Q et R représentent le même espace, c'est-à-dire que tous les éléments de Q sont éléments de R, et réciproquement et (*iii*) O représente un espace vide, c'est-à-dire un espace qui n'a aucun

(1) Pour une bibliographie étendue sur l'Algèbre de la logique, *voir* SCHRÖDER, *Algebra der Logik*, vol. 1, 1890. Dans SCHRÖDER, *voir* vol. 1, § 5, 13, et vol. 2, § 44, 47. Parmi les travaux qui ont été publiés sur ce sujet depuis cette date, on pourra consulter avec fruit : E. V. HUNTINGTON, *Sets of independent postulates for the Algebra of Logic* (*Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 5, 1904, p. 288-309); H. M. SHEFFER, *A set of five independent postulates*, etc. (vol. 4, p. 481-488); L. COUTURAT, *L'Algèbre de la logique*.

(2) Dans le cas des espaces *binaires*, nous posons aussi $C_0$. : Si $Q < R$ et si A et B sont des éléments de l'espace Q (et, par suite aussi, de l'espace R [C|0]), on a

$$Q(A, B) = R(A, B).$$

Pour les espaces discrets définis comme dans le premier et second paragraphe de l'Introduction, nous démontrons (*voir* C|$\frac{1}{3}$) que, « si A et B sont deux éléments d'un sous-espace Q de R, ils sont (ou ne sont pas) conjugués dans Q selon qu'ils sont (ou ne sont pas) conjugués dans R ». (La condition correspondante à $C_0$ pour les espaces ternaires ou quaternaires est immédiate.)

élément. De ces cinq conditions on déduit immédiatement :

$$C_4^1.\ P \equiv P \qquad [C_1, C_4],$$

$C_4^1$. Si $Q \equiv R$, on a $R \equiv Q$ $[rC_4, C_4]$ (¹),

$C_4^2$. Si $P < Q$ et $Q \equiv R$, on a $P < R$ $[rC_4, C_2]$,

$C_4^3$. Si $Q < P$ et $Q \equiv R$, on a $R < P$,

$C_4^4$. Si $P \equiv Q$ et $Q \equiv R$, on a $P \equiv R$, $[rC_4, C_4^2, C_4]$,

$C_5^1$. Si $P < O$, on a $P \equiv O$ $[C_5, C_4]$ et réciproquement $[rC_4]$.

Les quatre conditions qui définissent les trois opérations *addition*, *multiplication* et *soustraction*,

$C_6$. Si $Q < P$ et $R < P$, on a $Q + R < P$, et réciproquement,

$C_7$. Si $P < Q$ et $P < R$, on a $P < QR$, et récriproquement,

$C_8$. Si $P < R - Q$, on a $(P + Q) < R$ et $PQ \equiv o$, et réciproquement,

$C_9$. Si $P < R + Q$ on a $P - PQ < R$, et réciproquement,

sont évidemment satisfaites quand P, Q et R sont des espaces quelconques si nous les interprétons ainsi : (*i*) $Q + R$ est l'espace qui contient tous les éléments de Q et R et ceux-là seuls, (*ii*) $QR$ est l'espace qui contient tous les éléments communs à Q et R et ceux-là seuls et (*iii*) *quand* Q *est un sous-espace de* R, $R - Q$ est le sous-espace de R contenant tous les éléments de R qui ne sont pas éléments de Q. Il est clair, *que pour deux espaces* Q *et* R *quelconques* (²) *les espaces* $Q + R$ *et* $QR$ *existent et que pour tout sous-espace* Q *d'un espace* R *quelconque*, *le sous-espace* $R - Q$ *de* R *existe.*

Alors, puisque

$$Q + R < Q + R \quad \text{et} \quad QR < QR \qquad [C_1]$$

---

(¹) $rC_4$ veut dire, la réciproque de la condition $C_4$.

(²) Dans le cas des espaces binaires il faut que, pour tout couple d'éléments A et B communs à Q et R, on ait

$$Q(A, B) = R(A, B).$$

Pour les espaces discrets définis comme dans le premier et le second paragraphe de l'Introduction, il faut que pour tout couple d'éléments A et B communs à Q et R, ils soient (ou ne soient pas) conjugués dans Q selon qu'ils sont (ou ne sont pas) conjugués dans R.

on a

$$C_6^1 \quad Q < Q + R \quad \text{et} \quad R < Q + R \qquad [rC_6],$$
$$C_7^1 \quad QR < Q \quad \text{et} \quad QR < R \qquad [rC_7] \ (^1).$$

Par suite

$$C_6^2 \quad P + P \equiv P \qquad [C_6, C_6^1, C_4],$$
$$C_6^3 \quad \text{Si } Q < R,$$

on a

$$Q + R \equiv R \qquad [C_6, C_6^1, C_4]$$

et réciproquement $[rC_4, rC_6]$,

$$C_6^4 \quad \text{Si } Q < R,$$

on a

$$P + Q < P + R,$$

parce que puisque $Q < R$ et $R < P + R$ $[C_6^1]$, $Q < P + R$ $[C_2]$, et par suite

$$P + Q < P + R \qquad [C_6^1, C_6].$$

Donc

$$C_6^5 \quad \text{Si } Q \equiv R, \quad \text{on a} \quad P + Q \equiv P + R \qquad [rC_4, C_6^4, C_4],$$
$$C_6^6 \quad Q + R \equiv R + Q \qquad [C_6', C_6, C_4],$$
$$C_6^7 \quad (P + Q) + R \equiv P + (Q + R).$$

D'abord, puisque $P < P + (Q + R)$ et $Q < Q + R < P + (Q + R)$, $[C_6^1]$,

$$P + Q < P + (Q + R) \qquad [C_2, C_6].$$

Et puisque

$$R < (Q + R) < P + (Q + R),$$

on a

$$(P + Q) + R < P + (Q + R).$$

En suite, puisque

$$R < (P + Q) + R$$

---

(1) Pour le lecteur scrupuleux nous donnons les trois theoremes .

$C_7^0$. *Deux espaces vides sont identiques* $[C_4]$.

$C_6^0$ *Deux espaces* $P_1$ *et* $P_2$ *qui sont chacun la somme de* Q *et* R **sont identiques.** (En effet, puisque $Q < P_1$ et $R < P_1$ $[C_6^1]$ $P_2 < P_1$ $[C_6]$, et, puisque $Q < P_2$ et $R < P_2$, $P_1 < P_2$ par suite $P_1 \equiv P_2$ $[C_4]$).

$C_7^0$. *Deux espaces* $P_1$ *et* $P_2$ *qui sont chacun le produit de* Q *par* R *sont identiques.*

et

$$Q < (P + Q) < (P + Q) + R$$

on a

$$(Q + R) < (P + Q) + R,$$

et, puisque

$$P < (P + Q) < (P + Q) + R,$$

on a

$$P + (Q + R) < (P + Q) + R.$$

Donc

$$(P + Q) + R \equiv P + (Q + R).$$

Nous démontrons de la même façon les corrélatifs des six derniers théorèmes

$C_7^1$ $PP \equiv P$.

$C_7^4$ Si $Q < R$, on a $PQ < PR$.

$C_7^6$ $QP \equiv RQ$.

$C_7^3$ Si $R < Q$, on a $QR \equiv R$ et réciproquement.

$C_7^5$ Si $Q \equiv R$, on a $PQ \equiv PR$.

$C_7^7$ $(PQ)R \equiv P(QR)$.

Nous allons démontrer maintenant quelques théorèmes concernant la soustraction, théorèmes qui nous permettront de démontrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction [$C_9^1$, $C_9^2$].

Puisque l'espace $R - Q$ existe toujours quand $Q$ est un sous-espace de $R$, et puisque $R - Q < R - Q$ [$C_1$], il en résulte :

$C_8^1$ Si $Q < R$

on a

$$R - Q < R \quad \text{et} \quad Q(R - Q) \equiv O \qquad [C_8],$$

$C_8^2$ Si $P < Q < R$

on a

$$P(R - Q) \equiv O, \qquad R - Q < R - P \qquad \text{et} \qquad Q - P < R \quad (^1).$$

En effet, puisque $P < Q$, $P(R - Q) < Q(R - Q)$ [$C_7^4$], et par suite, puisque

$$Q(R - Q) \equiv O, \quad P(R - Q) \equiv O \qquad [C_4^2, C_5'].$$

---

(1) Par suite $Q - P < R - P$, puisque $(Q - P) + P < R$ et $P(Q - P) \equiv o$; et, si $P < Q \equiv R$, $Q - P \equiv R - P$.

Or, puisque

$$R - Q + P < R \qquad [C'_8, C_6]$$

et

$$P(R - Q) \equiv O, \quad R - Q < R - P \qquad [rC_8];$$

et, puisque

$$Q - P < Q < R, \quad Q - P < R.$$

Du dernier théorème on déduit :

$$C_8^3. \text{ Si } P \equiv Q < R,$$

on a

$$R - P \equiv R - Q \qquad [rC_4, C_8^2, C_4] (^1)$$

$$C_8^4. \text{ Si } P \equiv R - Q$$

on a

$$R \equiv P + Q \quad \text{et} \quad PQ \equiv O;$$

et réciproquement (²).

En effet, puisque

$$P < R - Q \,[rC_4], \ P + Q < R \quad \text{et} \quad PQ \equiv O;$$

Et, puisque

$$R - RQ \equiv R - Q < P \qquad [C_7^3, C_8^3], \qquad R - RQ < P$$

par suite,

$$R < P + Q \qquad [rC_9].$$

Donc

$$R \equiv P + Q \quad \text{et} \quad PQ \equiv O.$$

Pour démontrer la réciproque on a

$$P + Q < R \quad \text{et} \quad PQ \equiv O.$$

Par suite

$$P < R - Q \qquad [rC_8].$$

Or, puisque

$$R < P + Q \quad \text{et} \quad R - RQ \equiv R - Q$$

on a

$$R - Q < P \qquad [C_9],$$

Donc

$$P \equiv R - Q.$$

---

(¹) Si l'on n'a pas vu au moment des définitions que « $C_8^0$, si $P_1$ et $P_2$ sont chacun la différence R moins Q, ils sont identiques » cela est maintenant évident d'après le dernier théorème.

(²) Par suite, puisque $O + P \equiv P$ et $OP \equiv O$, $P - P \equiv O$ ; et, puisque $R - Q \equiv R - Q$ et $Q(R - Q) \equiv O$, $R - Q + Q \equiv R$.

Du dernier théorème résulte encore :

$C_8^5$. Si $P \equiv R - Q$, on a $Q \equiv R - P$,

$C_8^6$. $R - (R - Q) \equiv Q$ [$C_1$, $C_8^5$], (1)

$C_8^7$. Si $P < R - Q$ on a $Q < R - P$ [$C_8$, $r\,C_8$];

et si $P < R - RQ$ on a $PQ \equiv o$ [$C_7$, $C_8$].

$C_8^8$. Si $(P + Q) < R$ et $P(R - Q) \equiv o$, on a $P < Q$.

En effet, puisque

$$P + (R - Q) < R\,[C_8^1, C_6] \text{ et } P(R - Q) \equiv o,\ P < R - (R - Q).$$

Or, puisque

$$R - (R - Q) \equiv Q\,[C_8^6]\ P < Q.$$

Nous sommes, maintenant, prêts à démontrer les lois de distributivité dont nous avons parlé plus haut. D'abord,

Lemme $C_9^0$. Si $PQ \equiv PR \equiv o$,

on a

$$P(Q + R) \equiv PQ + PR \equiv o.$$

En effet, soit

$$S \equiv P + Q + R;$$

alors, puisque

$$P + Q < S \text{ et } PQ \equiv o,\ Q < S - P\,[r\,C_8].$$

De même

$$R < S - P,$$

et par suite,

$$Q + R < S - P\,[C_6]$$

et,

$$P(Q + R) \equiv o\,[C_8].$$

$C_9^1$. $P(Q + R) \equiv PQ + PR$ (2).

En effet si $PQ \equiv PR \equiv o$, le théorème est vrai.

Supposons que si $PQ$ et $PR$ ne sont pas tous deux identiques à zéro le théorème ne soit pas vrai. Soit $S \equiv P + Q$ ; alors puisque

$$PQ + PR < P(Q + R)\,[C_6^1,\ C_7^1,\ C_6], \qquad P(Q + R) \not< PQ + PR\,[C_3,\ C_4].$$

(1) Par suite, la réciproque de $C_8^3$ est vraie, c'est-à-dire, si $R - P = R - Q$, on a $P \equiv Q$. La réciproque de $C_8^5$ et $C_8^7$ n'est pas toujours vraie.

(2) *Cf.* Huntington, *loc. cit.*, p. 301.

Par suite

$$T \equiv P(Q+R)[S-(PQ+PR)] \not< o[oC_8^8] \quad (^1),$$

(puisque $P(Q+R) < S$ et $PQ+PR < S$), donc :

$$T < P[C_7^1] \quad \text{et} \quad T(PQ+PR) \equiv o\,[C_7^1, C_8].$$

Or, puisque

$$T(PQ)+T(PR) < T(PQ+PR),$$

$$O \equiv T(PQ) \equiv (TP)Q \equiv PQ \quad \text{et} \quad O \equiv T(PR) \equiv (TP)R \equiv PR\,[C_7^7, C_7^3, C_7^5],$$

ce qui contredit notre hypothèse.

$C_9^2$. Si $Q < R$, on a $P(R-Q) \equiv PR - PQ$.

En effet, soit

$$R - Q \equiv S,$$

alors

$$R \equiv Q + S, QS \equiv o,$$

et

$$PR \equiv P(Q+S) \equiv PQ + PS.$$

Par suite,

$$PS \equiv P(R-Q) \equiv PR - PQ\,[r\,C_8^4],$$

puisque

$$(PQ)(PS) \equiv QS \equiv o.$$

Maintenant, puisque

$$P \equiv P - PQ + PQ < P - PQ + P,$$

il en résulte que

$$P - PQ + Q \equiv P + Q\,[C_6^1, C_6, C_4];$$

et à cause du dernier théorème $R(Q-QR) \equiv o$. Donc

$C_9^3$. Si $R \equiv P + Q$,

on a

$$P - PQ \equiv R - Q\,[r\,C_8^4],$$

par suite,

$C_9^4$. Si $(P-Q) < R$

on a

$$P < R - Q + PQ\,[r\,C_9] \quad (^2).$$

Or, puisque

$$(R-P)+(R-Q)-PQ < R$$

(1) $oC_8^8$ veut dire l'obvers du théorème $C_8^8$.

(2) De même, si $PQ \equiv O$, on a $Q + P - P \equiv Q$, et si $P + R \equiv Q + R$ et $PR \equiv QR$, on a $P \equiv Q$, puisque

$$P + R - R \equiv Q + R - R \equiv P - PR \equiv Q - QR.$$

et

$$R \equiv (R - P) - P < (R - P) + (R - Q) + PQ,$$
$$R \equiv (R - P) + (R - Q) + PQ,$$

ce qui nous donne l'important théorème :

$C^5_9$. Si $(P + Q) < R$

on a

$$(R - P) + (R - Q) \equiv R - PQ \equiv R - [R - (R - P)][R - (R - Q)].$$

Maintenant, à cause de l'identité de théorème $C'_9$ on a :

$$\begin{aligned}(S - P)((S - Q) + (S - R)) &\equiv (S - P)(S - Q) + (S - P)(S - R)\\ \equiv (S - P)(S - QR) \qquad &\equiv S - (P + Q) + S - (P + R)\\ \equiv S - (P + QR) \qquad &\equiv S - (P + Q)(P + R).\end{aligned}$$

Par suite, on a pour trois espaces P, Q et R quelconques

$C^6_9$. $P + QR \equiv (P + Q)(P + R)$.

On peut employer le même raisonnement pour démontrer le corrélatif de tout théorème qui n'est relatif qu'aux sommes et aux produits.

$C^7_9$. Si $P < Q < R$

on a

$$(R - Q) - P \equiv R - (Q - P)$$

En effet, puisque

$$R \equiv R - Q + Q \equiv R - Q + (Q - P) + P \equiv (R - Q + P) + (Q - P)$$

et

$$(Q - P)(R - Q + P) \equiv o$$

on a

$$R - Q + P \equiv R - (Q - P)$$

$C^8_9$. Si $(P + Q) < R$ et $PQ \equiv o$

on a

$$(R - Q) - P \equiv R - (Q + P)$$

En effet, puisque

$$R - (Q + P) + P \equiv R - (Q + P - P) \equiv R - Q \qquad \text{et} \qquad P[R - (Q + P)] \equiv o$$

on a

$$R - (Q + P) \equiv (R - Q) - P.$$

$C_{10}$. *Un sous-espace* A *d'un espace* S $(A \not< o)$ *est un élément* *de* S *si* (*et dans ce cas seulement*) [1] *pour tout sous-espace* R *de* S *qui satisfait à* AR $\not<$ o *on a* A $<$ R.

$C_{11}$. Si un espace S contient *m* éléments distincts $A_1$, $A_2 \ldots A_m$ (c'est-à-dire, $A_i A_j \equiv o$) [2] et ne contient aucun autre élément, S est un espace *fini* de *m* éléments, et nous écrirons alors $|S| = m$. Si l'ensemble des éléments distincts de S est infini mais qu'on puisse les mettre en correspondance biunivoque avec l'ensemble des nombres *entiers positifs* 1, 2, 3,..., S contient une infinité dénombrable d'éléments. Le nombre des éléments d'un espace S est *dénombrable* si le nombre de ses éléments est soit *fini* soit *infini* (*dénombrable*).

$C_{12}$. Pour tout espace S qui satisfait à $|S| = o$ on a $S < o$ [3].

$C_{12}^1$. Pour tout espace S qui satisfait à $|S| \neq o$ on a $S \not< o$.

En effet, puisque $|S| \neq o$, S contient au moins un élément, soit A un élément de S; alors $A \not< o$ et $S - A + A \not< o$. Par suite, puisque

$$S \equiv S - A + A,$$

on a

$$S \not< o.$$

$C_{10}^1$. Soit $A < R < S$; alors A est un élément de l'espace R s'il est un élément de l'espace S, et reciproquement.

En effet, soit R' un sous-espace quelconque de R tel que $AR' \not< o$; alors, puisque $R' < R < S$, on a $R' < S$. Par suite, puisque A est un élément de S on a $A < R'$. Donc A est un élément de R [$C_{10}$].

Maintenant, soit A un élément de R et soit R' un sous-espace

---

(1) Dans une assertion qui est une définition (et non seulement une condition dans une définition exprimée ou impliquée) on pose que la réciproque de cette assertion est vraie même si ce n'est pas explicitemeut indiqué. Nous l'avons posé explicitement ici, mais non dans la définition suivante pas plus que dans les définitions en dehors de l'Appendice, comme c'est l'habitude chez beaucoup d'auteurs.

(2) Deux espaces P et Q sont *différents* si l'on n'a pas $P \equiv Q$, et P et Q sont distincts (ou disjoints) si $PQ \equiv o$. Par suite il peut arriver que deux espaces ne soient pas distincts et soient différents mais deux *éléments* d'un espace quelconque *qui ne sont pas distincts* sont toujours *identiques*. Nous emploierons la notation $P \not\equiv Q$ pour indiquer que P et Q sont différents.

(3) Cette condition jointe à la condition $C_5$ définit un espace vide ainsi que suit : *Un espace qui n'a aucun élément est vide, et un espace vide est contenu dans tout espace.*

quelconque de S tel que $AR' \not< o$. Alors, puisque

$$A(R'R) \equiv (AR)R' \equiv AR' \not< o$$

et $RR' < R$, on a $A < RR'$ [$rC_{10}$]. Par suite $A < R'$ et A est un élément de S [$C_{10}$].

Du dernier théorème il suit immédiatement :

$C_{10}^2$. Soit A un élément de l'espace P; alors pour tout espace Q, A est un *élément* de $P+Q$, et pour tout espace Q qui satisfait à $A < PQ$ (ou $A < P\,Q$, ou $A < P/Q$, ou $A < P - Q$) A est un *élément* de PQ (ou $P\,Q$, ou $P/Q$, ou $P - Q$ respectivement).

$C_{10}^3$. Si A est un *élement* de $P+Q$, il est un elément d'au moins un des espaces P et Q. Si A est un élément de PQ, il est un élément de P et de Q. Si A est un élément de $P - Q$, il est un élément de P et non de Q, etc.

$C_{10}^4$. Si $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont les éléments d'un espace fini P de $m$ éléments $P \equiv \sum_{i=1}^{m} A_i$ [$C_{12}$, $C_{10}^1$]; et, si A est un élément de P, il existe un (et un seul) entier positif $k$ tel que $A \equiv A_k$ ($k < m$).

$C_{10}^5$. Si les espaces finis R et S satisfont à la condition $R < S$ alors $|R| \leq |S|$; si $R \equiv S$, alors $|R| \equiv |S|$; et, si $R < S$ et $|R| = |S|$, $R \equiv S$.

$C_{10}^6$. Si $|P+Q| = |P|$, on a $P+Q \equiv P$; et, si $|PQ| = |P|$, $PQ \equiv P$.

$C_{11}^1$. Pour deux espaces finis P et Q on a

$$|P+Q| + |PQ| = |P| + |Q|.$$

En effet, soit

$$P \equiv \sum_{i=1}^{p} A_i, \qquad Q \equiv \sum_{i=1}^{q} B_i,$$

$$A_m \not< Q\,(m = 1, 2 \ldots k), \qquad A_n < Q\,(n = k+1, k+3 \ldots p)$$

Alors, puisque $A_m$ est un élément de P, c'est un élément de

$$P\;\;Q\,[C_{10}^2],$$

et par suite $A_m\,Q < o$ [$C_{10}$], $A_m\,B_i < o$ [$C_7^5$], et les éléments $A_m$ et $B_i$ de $P+Q$ ($m = 1, 2, \ldots k; i = 1, 2, \ldots q$) sont distincts. Donc

$$R \equiv A_1 + A_2 + \ldots + A_k + B_1 + B_2 + \ldots + B_q < P+Q$$

et

$$|P + Q| \geqq k + q.$$

Or, soit A un élément de $P + Q$; A est soit un élément de P soit de Q $[C_{10}^3]$. Si A est un élément de Q, il est identique à l'un des éléments $B_1, B_2, \ldots B_q$ $[C_{10}^1]$ et par suite $A < R$. Si A n'est pas un élément de Q, il est identique à un des éléments $A_1, A_2 \ldots A_k$ $[C_{10}^1]$, et par suite il est encore un élément de R. Donc $P + Q < R$, et par suite $|P + Q| = k + q$.

Nous démontrons de la même façon que $|PQ| = p - k$, et que par suite $|P + Q| + |PQ| = |P| + |Q|$.

$C_{11}^2$. Pour deux espaces finis P et Q qui satisfont à la condition $P < Q$ on a $|P - Q| = |P| - |Q|$.

$C_{11}^3$. Soit S un espace fini de $n$ éléments; alors ($i$) si A est un élément de S, $|S - A| = n - 1$; ($ii$) si $R_1, R_2, \ldots R_m$ sont des sous-espaces non vides de S qui satisfont à $R_i R_j \equiv 0$, $m$ est inférieur ou au plus égal à $n$, ($iii$) si $m$ est égal à $n$, $R_i$ est un élément de S.

$C_{11}^4$. $|PQR| \geqq |PQ| + |PR| - P$.

Nous allons maintenant définir l'expression : opération continue [1] que nous avons employée dans l'Introduction à propos des définitions des opérations $P|Q$ et $P/Q$, et démontrer quelques théorèmes où figure cette expression.

$C_{13}$. Un espace S est la *limite* [2] d'un ensemble de ses sous-espaces $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$, si, à tout espace fini R de S, il correspond un entier positif $m$ tel que $R < S_n$ $(n \geqq m)$, et nous écrirons alors

$$S \equiv \lim_{n=\infty} S_n.$$

**$C_{14}$.** Une série des espaces $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$ est *convergente* s'il existe un espace S tel que $S \equiv \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} S_m$, et nous écrirons alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{m=1}^{n} S_m.$$

---

(1) Cette dénomination, ainsi que la note suivante, m'a été suggérée par M. M. Fréchet.

(2) Cette limite est la limite restreinte définie par M. E. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris, Gauthier-Villars.

$C_{15}$. *Une opération binaire* $F(X, Y)$ *est continue (dans* $Y$*) si pour deux espaces* R et S *quelconques qui satisfont aux conditions :*

$$S \equiv \lim_{n=\infty} S_n, \qquad Q \equiv F(R, S_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a

$$Q \equiv F(R, S).$$

La définition $C_{14}$ nous donne immédiatement :

$C^1_{14}$. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont tous des éléments d'un espace S,

$$S \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{m=1}^{n} A_m.$$

Lemme $C^2_{14}$. Si chaque élément d'un espace R est contenu dans un espace S, R est contenu dans S.

En effet, soit $R - RS \equiv Q$; alors, si Q *n'est pas vide*, il contient au moins un élément $[oC_{12}]$. Soit A un élément de Q; puisque $Q < R - RS$, c'est un élement de $R - RS[C'_{10}]$ et, par suite, c'est un élement de $R[C^3_{10}]$. Or, puisque chaque élément de R est contenu dans S, on a $A < S$ et $AS \not\equiv o[C_{10}]$; et, puisque A est un élément de $R - RS$, on a $A < R - RS$ et $AS \equiv o[C^7_8]$. Donc Q est *vide*; et, par suite. $R \equiv RS[C^4_8]$ et $R < S[C^3_7]$.

$C^3_{14}$. Les trois opérations : *addition*, *multiplication*, *soustraction* sont continues.

En effet, $(a)$ soit R et S deux espaces quelconques satisfaisant aux conditions $S \equiv \lim\limits_{n=\infty} S_n$ et $Q \equiv R + S_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; alors, puisque $S_n < S[C_{13}]$, on a $R + S_n < R + S$, et, par suite, $Q < R + S$. Maintenant, soit A un élement de $R + S$; si A est un élément de R, il est contenu dans Q et, s'il est un élément de S, il existe un entier positif $m$ tel que $A < S_m[C_{13}]$. Par suite, A est encore contenu dans Q. Ainsi chaque élément de $R + S$ est contenu dans $Q[C^3_{10}]$ et, par suite, $R + S < Q$. Donc $Q \equiv R + S$.

$(b)$. Soit R et S deux espaces quelconques satisfaisant aux conditions $S \equiv \lim\limits_{n=\infty} S_n$ et $Q \equiv RS_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Puisque $S_n < S$, on a $RS_n < RS$ et, par suite, $Q < RS$. Soit A un élément de RS; A est un élément de R et de S. Par suite, il existe un entier positif $m$ tel que $A < S_m$; et, puisque $A < R$, on a $A < Q$. Or, chaque élément de RS est contenu dans Q, par suite $RS < Q$. Donc $Q \equiv RS$.

(*c*). Soient R et S deux espaces quelconques satisfaisant aux conditions $S \equiv \lim_{n=\infty} S_n$ et $Q \equiv R - S_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; alors $R \equiv Q + S_n$ et $QS_n \equiv o[C_8^4]$. Par suite, puisque les opérations addition et multiplication sont continues, on a $R \equiv Q + S$, et $QS \equiv o$. Donc $Q \equiv R - S$.

Demontrons maintenant le théorème que nous avons annoncé dans le premier paragraphe de l'Introduction : « $P|Q$ est le sous-espace de $P - PQ$ qui contient tous les éléments conjugués chacun à au moins un élément de Q ». D'abord :

$C_{15}^0$. Si $P \equiv Q$, on a

$$P/R \equiv Q/R[4^\circ],\ P|R \equiv Q|R[4],\ R/P \equiv R/Q[5^\circ] \text{ et } R|P \equiv R|Q[5, C_6^5, C_9']$$

$C_{15}^1$. *Si* P *et* Q *sont des espaces,* Q *étant dénombrable, à tout élément* A *de* $P|Q$ *il correspond au moins un élément* B *de* Q *tel que* $A|B \not< o$.

En effet, puisque $A < P|Q$, on a $A < A|Q < P|Q[3, 4]$ et par suite $A|Q \not< o[C_{12}']$. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tous les éléments de Q, et *supposons* que $A|A_n \equiv o$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Soient $Q_1 \equiv A_1$, $Q_2 \equiv Q_1 + A_2, \ldots, Q_n \equiv Q_{n-1} + A_n, \ldots$; alors, puisque $A|Q_1 \equiv o$, $A|A_2 \equiv o$ et $A|(Q_1 + A_2) < A|Q_1 + A|A_2[2]$, on a $A|Q_2 \equiv o$. Nous démontrons par induction que $A|Q_n \equiv o$. Donc, puisque l'opération dont il s'agit est *continue* $A|Q \equiv o[C_{14}^1]$ ce qui contredit ce que nous avons déjà démontré, à savoir $A|Q \not< o$.

$C_{15}^2$. Si A est un élement de $P - PQ$ et si B est un élément de Q tel que $A|B \not< o$, alors $A < P|Q$.

En effet, puisque $A|B$ n'est pas vide et est contenu dans $A[3]$, on a $A|B \equiv A[C_{10}']$. Or puisque $A|B < P|B[4]$, on a $A < P|B$; et, par suite, $A < P|Q + Q[5]$. Maintenant, puisque $A < P - PQ$, on a $A < P$ et $o \equiv A(PQ) \equiv (AP)Q \equiv AQ$. Donc $A(P|Q) \equiv A[C_9^1]$ et $A < P|Q$.

Ces deux théorèmes démontrent le theorème de l'Introduction que nous venons de rappeler. Demontrons maintenant le théorème *correspondant* du deuxieme paragraphe de l'Introduction.

$C_{15}^3$. Si A et B sont respectivement des éléments de $P/Q$ et Q, $A/B \not< o$.

En effet, puisque $A < P/Q$, on a $A < A/Q$ [3°], et, puisque $B < Q$, on a $A/Q < A/B$. Donc $A < A/B$.

Lemme $C_{15}^4$. $(P/Q)(P/R) \equiv P/(Q+R)$.

En effet
$$P/(Q+R) < P/Q \quad \text{et} \quad P/(Q+R) < P/R\,[5°].$$
Par suite
$$P/(Q+R) < (P/Q)(P/R).$$
Or, puisque
$$(P/Q)(P/R) < P/(Q+R)\,[2°],$$
on a
$$(P/Q)(P/R) \equiv P/(Q+R).$$

$C_{15}^5$. Si A est un élément de P et, si pour tout élément B de Q, on a $A/B \not< o$ (où Q est dénombrable), alors $A < P/Q$.

En effet, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tous les éléments de Q; alors, puisque $A/A_n$ n'est pas vide et est contenu dans A, on a $A \equiv A/A_n$. Soit $Q_n \equiv \sum_{m=1}^{n} A_m$; puisque $A \equiv A/Q_1 \equiv A/A_2$, on a $A \equiv (A/Q_1)(A/A_2)$, et, puisque $(A/Q_1)(A/A_2) \equiv A/(Q_1 + A_2)$ [2°], on a $A \equiv A/Q_2$. Nous démontrons par induction que
$$A \equiv A/Q_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, ),$$
et que, par suite, $A \equiv A/Q$. Donc $A < P/Q$, puisque $A/Q < P/Q$ [4°].

Nous n'entrerons pas maintenant dans le détail des demonstrations de tous les théorèmes de l'Introduction relatifs aux deux operations que nous avons introduites. Cependant nous démontrerons rapidement les théorèmes ($f$), ($g$) et ($f^0$).

$C_{15}^6$. $(P|Q)(P|R) < P|(Q+R)$.

En effet, $(P|Q)(P|R) < P|(Q+R) + Q + R$ [1, 5] et, par suite, puisque
$$(P|Q)Q \equiv (P|R)R \equiv o \quad [1],$$
on a
$$(P|Q)(P|R) < P|(Q+R) \quad [C_9].$$

$C_{15}^7$. Si $P < Q < R$ on a
$$(R|P)Q \equiv Q|P \quad \text{et} \quad (R/P)Q \equiv Q/P.$$

En effet, soit $S \equiv (R \mid P)Q$; alors $S < R \mid P$ et $S < Q$. Par suite $S < S \mid P < Q \mid P$ [3, 4]. Or, puisque $Q \mid P < R \mid P$ [4] et

$$Q \mid P < Q \quad [1],$$

on a $Q \mid P < S$. Donc $S \equiv Q \mid P$.

Maintenant, puisque les conditions 1°, 3°, 4° sont identiques aux conditions 1, 3, 4, la seconde partie de ce théorème est aussi démontrée.

$C_{15}^8$. $P/(Q+R) \equiv (P/Q)/R$.

En effet, soit A un élément quelconque de $P/(Q+R)$; alors

$$A < A/(Q+R) < A/Q < P/Q \quad [3°, 5°, 4°].$$

Soit B un élément quelconque de R; alors, puisque B est un élément de $Q+R$, on a $A/B \not< 0$ [$C_{15}^3$]. Par suite, $A < (P/Q)/R$ [$C_{15}^5$]. Donc $P/(Q+R) < (P/Q)/R$ [$C_{14}^2$].

Or, soient A, B et C respectivement des éléments quelconques de $(P/Q)/R$, Q et R; alors $A/C \not< 0$ [$C_{15}^3$], $A < P/Q$ [1°] et

$$A/B \not< 0 \quad [C_{15}^3].$$

Par suite, $A < P/(Q+R)$ [$C_{15}^4$]. Donc $(P/Q)/R < P/(Q+R)$.

Jusqu'à présent nous n'avons pas encore défini les opérations $P \mid Q$ et $P/Q$ dans le cas où Q est vide. Si nous voulons le faire il faut évidemment s'arranger de telle sorte que les theorèmes déjà démontrés relativement à ces opérations subsistent quand on suppose que le « dénominateur » est zéro. Une telle définition s'exprime par les identités $P \mid 0 \equiv P/0 \equiv P$.

Nous terminerons en démontrant que la proposition *corrélative* de $C_{15}^6$, à savoir, $P \mid (QR) < P \mid Q + P \mid R$, est vraie et que la proposition *corrélative* de $C_1^4$, ne l'est pas. Démontrons d'abord les propositions suivantes :

$C_9^9$. Si $P < Q$ et $QR \equiv 0$, alors $(R+Q) - P \equiv R + (Q-P)$.

En effet, soit $S \equiv (R+Q) - P$; alors $SP \equiv 0$ et $S \equiv SR + SQ$. Or, puisque $SR < R$, on a $SR < R + (Q-P)$; et puisque $SQ < Q$ et $SQP \equiv 0$, on a $SQ < Q - P < R + (Q-P)$. Par suite,

$$SR + SQ < R + (Q-P).$$

Donc $(R+Q) - P < R + (Q-P)$.

Maintenant, puisque $PQR \equiv PR \equiv o$, on a $RS \equiv R$. Par suite,

$$R < (R + Q) - P.$$

Or, puisque

$$Q - P < (R + Q) - P,$$

on a

$$R + (Q - P) < (R + Q) - P.$$

Donc

$$(R + Q) - P \equiv R + (Q - P).$$

$C_9^{10}$. $P - PQR \equiv (P - PQ) + (P - PR)$.

Puisque

$$P - PQR \equiv P - PQ + PQ - PQR \equiv (P - PQ) + Q(P - PR).$$

$C_{15}^{9}$. $P \mid (QR) < P \mid Q + P \mid R$.

En effet, soit A un élément de $P \mid (QR)$; alors QR contient un élément B tel que $A \mid B \not< o$, et puisque $A < P - PQR$, on a

$$A < (P - PQ) + (P - PR).$$

Par suite, A est soit un élément de $P \mid Q$ soit de $P \mid R$. Donc chaque élément de $P \mid (QR)$ est contenu dans $P \mid Q + P \mid R$ et par suite $P \mid (QR)$ est contenu dans $P \mid Q + P \mid R$.

En rapprochant ce dernier théorème du théorème $C_{15}^{6}$ on conclut :

$C_{15}^{10}$. $P \mid (Q + R) + P \mid (QR) < P \mid Q + P \mid R$.

$C_{15}^{11}$. Soit $(A + B) < P < Q$. Si $A < P \mid B$, on a $A < Q \mid B$, et réciproquement.

En effet, soit $A < P \mid B$; alors, puisque $P < Q$, on a $P \mid B < Q \mid B$. Par suite, $A < Q \mid B$. Soit maintenant $A < Q \mid B$; alors, puisque $A < P$, on a $A < (Q \mid B) P$. Or, puisque $(Q \mid B) P \equiv (PQ) \mid B \equiv (P \mid B) Q$, on a $A < P \mid B$.

Nous avons ainsi démontré que si A et B sont deux éléments d'un espace P contenus dans un espace discret Q, ils sont, ou ne sont pas, conjugués dans P selon qu'ils sont, ou ne sont pas, conjugués dans Q.

## QUELQUES THEORÈMES ELÉMENTAIRES SUR LES SEGMENTS ET LES DROITES.

Théoreme 1. — *Si le point* C *est entre les points* A *et* B, A *n'est pas entre* B *et* C,

En effet, *supposons* que A soit entre B et C, Alors

(1) $$(BA) + (AC) \equiv (BC),$$
(2) $$(BA)(AC) \equiv A,$$

et puisque C est entre A et B,

(3) $$(AC) + (CB) \equiv (AB),$$
(4) $$(AC)(CB) \equiv C.$$

Par suite, puisque

(1) $$(AC) < (BC)$$

et

$$(BC) \equiv (CB),$$

on a :

(3) $$(CB) \equiv (AB).$$

Donc

(2), (4) $$A \equiv C,$$

ce qui n'est pas.

Corollaire 1. — Quand trois points distincts A, B, C sont alignés (sur une ligne droite) sur $S_1$, un de ces points et un seul est entre les deux autres.

Corollaire 2. — Soient A, B, C trois points *distincts;* alors, si $C(AB) \not\equiv O$, on a $A(BC) + B(CA) \equiv o$.

Corollaire 3. — Si $A(BC) \not\equiv o$ et $B(AC) \not\equiv o$, les points AC et B ne sont pas distincts.

Corollaire 4. — Une condition nécessaire et suffisante pour que trois points A, B, C dans un plan soient alignés est que

$$A(BC) + B(CA) + C(AB) \not\equiv o.$$

Corollaire 5. — Si C est sur le côté $(AB)$ du triangle $(ABD)$ et est entre A et B, ce n'est pas un point de la droite $\overline{AD}$ et $(BC)\overline{AD} \equiv o$ (puisque tout point entre C et B est entre A et B).

Théorème 2. — *Soient* A, B, C *et* D *quatre points sur une droite satisfaisant à* $(A + B + C)D = o$ *et* $(AB)D \not\equiv o$; *alors, si* $(AC)D \not\equiv o$, *on a :* $(BC)D \equiv o$, *et réciproquement.*

Corollaire 1. — Si $C + D < (AB)$, on a $(CD) < (AB)$.

Corollaire 2. — Si les segments $(AB)$ et $(CD)$ sont identiques, $A + B \equiv C + D$.

Théorème 3. — *Soient* A, B, C *et* $\overline{DE}$ *trois points et une droite dans un plan satisfaisant* $(A + B + C)\overline{DE} \equiv o$ *et* $(AB)\overline{DE} \not\equiv o$; *alors, si* $(AC)\overline{DE} \not\equiv o$, *on a* $(BC)\overline{DE} \equiv o$, *et réciproquement.*

Théorème 4. — *Tout produit de demi-plans qui n'est pas vide est convexe.*

Les trois théorèmes suivants sont les analogues des théorèmes $12^d$, $13^d$ et $14^d$ du texte. Les démonstrations des deux dernières sont identiques aux démonstrations des $13^d$ et $14^d$; et la démonstration du premier est presque identique à celle de $12^d$.

Théoreme 5. — *Soient* $P_1$, $Q_1$ *et* $P_2$, $Q_2$ *deux couples de demi-plans d'un plan* $S_2$; *alors, si* $Q_1 - P_1Q_1 < Q_2 - P_2Q_2$, *on a* $P_2 - P_2Q_2 < P_1 - P_1Q_1$.

Corollaire 1. — Si $Q_1 - P_1Q_1 \equiv Q_2 - P_2Q_2$, on a

$$P_1 - P_1Q_1 \equiv P_2 - P_2Q_2,$$

$S_2 - P_1Q_1 \equiv S_2 - P_2Q_2$, et les deux couples de demi-plans sont identiques; aussi

Corollaire 2. — Si $P_1 \equiv P_2$, les deux couples de demi-plans sont identiques.

THÉORÈME 6. — *Soient* $P_1$, $Q_1$ *et* $P_2$, $Q_2$ *deux couples de demi-plans d'un plan* $S_2$; *alors, si les lignes* $P_1Q_1$ *et* $P_2Q_2$ *ne se coupent pas, deux (mais pas plus) des quatre produits* $P_1Q_1P_2$, $P_1Q_1Q_2$, $P_2Q_2P_1$ *et* $P_2Q_2Q_1$ *sont vides, et réciproquement.*

COROLLAIRE 1. — Si l'un des produits $P_1Q_1P_2$, $P_1Q_1Q_2$, $P_2Q_2P_1$ et $P_2Q_2Q_1$ est vide, un seul autre est vide.

THÉORÈME 7. — *Soient* $P_1$, $Q_1$ *et* $P_2$, $Q_2$ *deux couples de demi-plans d'un plan* $S_2$; *alors, si l'un des produits* $P_1Q_1P_2$, $P_1Q_1Q_2$, $P_2Q_2P_1$, $P_2Q_2Q_1$ *est vide, un seul des produits* $P_1P_2$, $P_1Q_2$, $Q_1P_2$, $Q_1Q_2$ *est vide.*

THÉORÈME 8. — *Soient* $P_1$, $Q_1$ *et* $P_2$, $Q_2$ *deux couples de demi-droites correspondant aux deux points (distincts)* A *et* B *sur la droite* AB; *alors, si* $P_1$ *contient* B *et* $P_2$ *contient* A, *on a :*

$$(AB) \equiv P_1P_2, \qquad Q_1Q_2 = 0, \qquad \text{et} \qquad \overline{AB} \equiv Q_2 + P_1P_2 + Q_1.$$

En effet, puisque $P_1$ contient B et $A \equiv P_1Q_1$, on a : $(A + B) < P_1$. De même $(A+B) < P_2$. Par suite $(A+B) < P_1P_2$. Donc, puisque $P_1P_2$ est convexe, $(AB) < P_1P_2$.

*Supposons* maintenant que $P_1P_2 - (AB) \not\equiv o$, et soit C un de ses points. Alors, puisque $P_1P_2$ est contenu dans la droite $\overline{AB}$, C est un point de $\overline{AB} - (AB)$. Par suite, puisque $C(AB) \equiv o$, C est différent de A et B, et

$$A(BC) + B(AC) \not\equiv o.$$

Soit $A(BC) \not\equiv o$; alors, puisque B est contenu dans $P_1 - A$, C est contenu dans $Q_1 - A$, ce *qui n'est pas*. De même, si $B(AC) \not\equiv o$, C est contenu dans $Q_2 - B$, *ce qui n'est pas*. Donc $P_1P_2 \equiv (AB)$.

Or, puisque $P_1Q_1P_2Q_2 \equiv AB \equiv o$, un des quatre produits $P_1P_2$, $P_1Q_2$, $Q_1P_2$ et $Q_1Q_2$ est vide [6, 7]. Mais les trois premiers contiennent respectivement $A + B$, B et A. Donc, $Q_1Q_2 \equiv o$.

Or, puisque la droite $\overline{AB}$ est identique à $(P_1 + Q_1)(P_2 + Q_2)$, elle est identique à $P_1Q_2 + P_1P_2 + Q_1P_2$. Et, puisque

$$Q_2 \equiv Q_2(P_1 + Q_1) \equiv Q_2P_1$$

et $Q_1 \equiv Q_1(P_2 + Q_2) \equiv Q_1P_2$, $\overline{AB}$ est identique à $Q_2 + P_1P_2 + Q_1$.

Les « demi-droites » $Q_2 - B$ et $Q_1 - A$ sont respectivement appelées les prolongations du segment $(AB)$ dans les directions $AB$ et $BA$; et nous les désignerons quelquefois par $(\overline{AB}) - B$ et $(\overline{BA}) - A$. Par suite $\overline{AB} \equiv (\overline{AB}) + (AB) + (\overline{BA})$, $A \equiv (\overline{AB})(AB)$, $B \equiv (\overline{BA})(AB)$ et $(\overline{AB})(BA) \equiv o$; et selon qu'un point $C$ contenu dans $(\overline{AB})$ ou dans $\overline{AB} - (\overline{AB})$, on a : $B(AC) \not\equiv o$ ou $B(AC) \equiv o$.)

Soient $P_1$, $Q_1$ et $P_2$, $Q_2$ deux couples (différents) de demi-plans d'un plan $S_2$, et $C$ le point d'intersection des droites $P_1Q_1$ et $P_2Q_2$; alors :

Corollaire 1. — Si $A < P_1 - P_1Q_1$ et $B < P_1Q_1$, on a $(\overline{AB}) < Q_1$ et $(AB) + (\overline{BA}) < P_1$;

Corollaire 2. — Si $D$ est un point de l'angle $P_1P_2$ distinct de $C$, on a $(CD) + (\overline{CD}) < P_1P_2$ et $(\overline{DC}) < Q_1Q_2$ et, tout segment $(AB)$, dont les extrémités $A$ et $B$ sont sur les deux côtés de l'angle $P_1P_2$, coupe ou coïncide avec la demi-droite $(CD) + (\overline{CD})$ [3].

Corollaire 3. — Si $A$ et $B$ sont deux points sur les deux côtés de l'angle $P_1P_2$ distincts du point $C$, l'angle $P_1P_2$ est identique à l'ensemble des points $(CD) + (\overline{CD})$ où $D$ est tout point du segment $(AB)$; et, pour un point quelconque $D$ (fixé) du segment $(AB)$ la somme des angles $ACD$ et $BCD$ est identique à l'angle $ACB$, et le produit de ces angles est identique à $(CD) + (\overline{CD})$.

Théorème 9. — *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *les sommets d'un polygone convexe* $R$; *alors*, $\overline{A_iA_{i+1}}R \equiv (A_iA_{i+1})$ *et il n'y a pas trois sommets en ligne droite.*

En effet, puisque $R$ contient les sommets $A_i$ et $A_{i+1}$, il contient le segment $(A_iA_{i+1})$ [42]. *Supposons* que $\overline{A_iA_{i+1}}R - (A_iA_{i+1}) \not\equiv o$ et soit $C$ un de ses points. Alors $C$ est un point de la prolongation du côté $(A_iA_{i+1})$, soit dans la direction $A_{i+1}A_i$, soit dans la direction $A_iA_{i+1}$. Si $C < (\overline{A_{i+1}A_i}) - A_i$, le point $A_i$ est entre $C$ et $A_{i+1}$ et $(CA_{i+1})$ coupe la droite $\overline{A_{i-1}A_i}$. Par suite, $C$ et $A_{i+1}$ ne sont pas contenus dans le même demi-plan de deux demi-plans correspondant à la droite $\overline{A_{i-1}A_i}$, *ce qui n'est pas*. Nous démontrons de même que l'hypothèse $C < (\overline{A_iA_{i+1}}) - A_{i+1}$ conduit à une contradiction.

Donc $\overline{A_i A_{i+1}}\, R \equiv (A_i A_{i+1})$.

*Supposons* maintenant que $(A_i A_{i+1})$ contienne un sommet $A_k$ et ne contienne pas le sommet $A_{k+1}$. Alors $A_k$ est entre $A_i$ et $A_{i+1}$ et le segment $(A_i A_{i+1})$ coupe la droite $\overline{A_{k+1} A_k}$. Par suite $A_i$ et $A_{i+1}$ ne sont pas contenus dans le même demi-plan des deux demi-plans correspondant à la droite $\overline{A_{k+1} A_k}$, ce *qui n'est pas*. Donc il n'y a pas trois sommets de R en ligne droite.

Corollaire 1. — Le produit des deux côtés de R est soit un sommet de R, soit vide.

Corollaire 2. — Pour tout couple de points A et B sur deux côtés du polygone R, on a $\overline{AB}\, R \equiv (AB)$ [3].

Corollaire 3. — La frontière d'un *polygone convexe est convexe* [1]. Ce corollaire avec la réciproque est pris par quelques auteurs pour la définition d'un polygone convexe.

Théorème 10. — *Si* D *et* E *sont des points situés respectivement sur les côtés* (BC) *et* (AC) *du triangle* (ABC), D *étant entre* B *et* C et E entre A et C, *le segment* (AD) *coupe le segment* (BE) (¹).

En effet, puisque D est un point du côté (BC) du triangle (EBC) et est entre B et C, on a $(CD)\overline{BE} \equiv 0$ [$1_5$]. Et puisque E est entre A et C on a $(AC)\overline{BE} \not\equiv 0$. Par suite, puisque $(A + C + D)\overline{BE} \equiv 0$, on a $(AD)\overline{BE} \not\equiv 0$ [$r\,3$]. Or, puisque

$$(AD)(ABC) \equiv (AD) \qquad \text{et} \qquad \overline{BE}(ABC) \equiv (BE)\ [9_2],$$

on a

$$(AD)\overline{BE} \equiv (AD)(ABC)\overline{BE} \equiv (AD)(BE) \not\equiv 0.$$

Donc le segment (AD) coupe le segment (BE) [$9_3$, $2_2$].

Corollaire 1. — Si D est entre B et C et si E est sur la prolongation du côté (AC) dans la direction CA, le côté (AB) coupe le segment (ED); et :

---

(¹) Ce théorème ou un des corollaires qui suivent est pris par la plupart des auteurs comme une condition dans la définition d'un plan à la place de la condition $P_6$. (*Voir* l'Introduction.)

Corollaire 2. — Si D est entre B et C et si E est sur la prolongation du côté (AC) dans la direction AC, le côté (AB) coupe la prolongation du segment (ED) dans la direction ED [$8_2$].

Théorème 11. — *Soient* A, B, C *les sommets d'un triangle* (ABC) *dans le plan* $S_2$; *alors, si* $P_1$, $Q_1$; $P_2$, $Q_2$; $P_3$, $Q_3$ *sont les demi-plans correspondant aux trois droites contenant les côtés du* (ABC), *où* $AQ_1 \equiv BQ_2 \equiv CQ_3 \equiv o$, *on a* $Q_1 Q_2 Q_3 \equiv o$ *et*

$$S_2 \equiv P_1P_2P_3 + P_1P_2Q_3 + P_2P_3Q_1 + P_3P_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3Q_1 + Q_1Q_2.$$

En effet, supposons que $Q_1 Q_2 Q_3 \not\equiv o$ et soit D un de ses points. Puisque $(A + B + C) Q_1 Q_2 Q_3 \equiv o$, le point D n'est pas un sommet du triangle (ABC). Et puisque $A < P_1$ et $D < Q_1$, on a $(AD) P_1 Q_1 \not\equiv o$. Par suite, puisque $AP_1Q_1 \equiv o$, $(\overline{DA}) P_1 Q_1 \equiv o$ et $(\overline{DA})(BC) \equiv o$, *ce qui n'est pas*, puisque D est un point de l'angle $Q_2Q_3$ distinct de A [$8_2$].

Soit maintenant D un point quelconque de $P_1P_2P_3$; alors si $E < P_1P_2Q_3$ il est facile de démontrer que $(DE)(AB) \not\equiv o$ et si $E < Q_2Q_3$ il est facile de démontrer que soit $(DE)(AB) \not\equiv o$, soit $(DE)(AC) \not\equiv o$ (1). Donc du dernier développement de $S_2$, il suit :

Théorème 12. — *Si* R′ *est la frontière d'un triangle* R (*la somme de côté de* R) *dans un plan* $S_2$, $S_2 - R'$ *n'est pas connexe, mais consiste en deux espaces connexes dont l'un est* $R - R'$ *et l'autre* $S_2 - R$.

Du dernier théorème et de quelques théorèmes auxiliaires on déduit qu'il en est de même pour tout « polygone » (connexe ou non) dans $S_2$; on en déduit encore la propriété suivante :

*Soient* $R_1$ *et* $R_2$ *deux polygones dans un plan* $S_2$ *satisfaisant à* $R_1R_2 \equiv R'_1R'_2$ *où* $R'_1R'_2$ *sont les frontières des* $R_1$ *et* $R_2$; *alors, si* $R'_1R'_2$ *n'est pas connexe*, $S_2 - R_1R_2$ *n'est pas connexe; et si tout sous-espace connexe entier de* $R'_1R'_2$ *n'est pas un point, la connexité de* $R'_1R'_2$ *est égale à la connexité de* $S_2 - R_1R_2$.

---

(1) Par suite, *à tout point* D *de ce plan il correspond* (*au moins*) *un sommet du triangle* (ABC) *tel que la droite déterminée par ce sommet et* D *coupe la droite déterminée par les deux autres sommets*. Ce théorème est aussi pris par plusieurs auteurs comme une condition dans la définition d'un plan.

Nous avons vu dans le théorème 9 qu'une condition nécessaire pour que trois droites différentes $P_1Q_1$, $P_2Q_2$ et $P_3Q_3$ correspondant à trois couples de demi-plans $P_1$, $Q_1$ ; $P_2$, $Q_2$ et $P_3$, $Q_3$ contiennent les côtés d'un triangle est qu'un des huit produits

$$P_1P_2P_3,\ P_1P_2Q_3,\ P_2P_3Q_1,\ P_3P_1Q_2,\ P_1Q_2Q_3,\ P_2Q_3Q_1,\ P_3Q_1Q_2,\ Q_1Q_2Q_3$$

soit vide. Cette condition n'est pas seulement nécessaire mais elle est aussi suffisante et toute relation *topologique* entre ces droites est complètement caractérisée par les nombres de ces huit produits qui sont vides ou qui sont réduits à un seul point. En particulier, une condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites se coupent en même point est que l'un de ces huit produits soit un point; et l'on obtient beaucoup de théorèmes intéressants quand on étend cette étude aux $2^n$ produits correspondant à $n$ droites.