ANDRÉ ROUSSEL

Recherches sur le calcul des variations

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1926

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1926__65__1_0>

N° D'ORDRE :
1914

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. André ROUSSEL

1re THÈSE. — Recherches sur le calcul des variations.
2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté : Le problème de Pfaff.

Soutenues le 1926 devant la Commission d'Examen.

MM. GOURSAT, *Président.*
VESSIOT, MONTEL, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, EDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1926

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen	MOLLIARD, Professeur, Physiologie végétale.	
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX, V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH.	
Professeurs	E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	JANET	Électrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	HAUG	Géologie.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	ÉMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE	Physiologie générale.
	VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	C. PÉREZ	Zoologie.
	A. LEDUC	Physique théorique et physique céleste.
	LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et géologie régionale.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	C. MAURAIN	Physique du globe.
	P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. JOB	Chimie générale.
	N.	Géographie physique.
	N.	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	HEROUARD	Zoologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC	Physique théorique et physique céleste.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	V. AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	A. GUILLET	Physique.
	C. MAUGUIN	Minéralogie.
	L. BLARINGHEM	Botanique.
	A. MICHEL-LEVY	Pétrographie.
Secrétaire	D. TOMBECK.	

76414 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

A

MONSIEUR ÉDOUARD GOURSAT

A

MONSIEUR GEORGES BOULIGAND

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES

SUR

LE CALCUL DES VARIATIONS.

INTRODUCTION.

Dans ce Travail, nous nous proposons d'abord d'étudier les principes de la théorie connue sous le nom de *Méthode directe du calcul des variations*. Dans les trois premiers Chapitres, nous serons ainsi amené à indiquer une démonstration nouvelle et simple du théorème fondamental d'Ascoli sur les ensembles de fonctions également bornées et également continues, permettant de la généraliser; puis nous étudierons la *semi-continuité*, propriété que possède une vaste classe d'intégrales. A l'aide d'une méthode très simple, nous démontrerons le théorème obtenu par M. Tonelli sur ce sujet, et nous en donnerons certaines extensions. Enfin, dans un dernier Chapitre, dont la lecture pourra se faire indépendamment, nous exposerons, sous le nom de *méthode d'adjonction*, un procédé auquel nous a conduit la méthode employée pour démontrer le théorème de M. Tonelli, et qui constitue une méthode nouvelle et autonome du Calcul des Variations, permettant de trouver facilement les conditions pour qu'une extrémale fournisse un minimum fort, et cela, non seulement dans le cas où l'intégrale étudiée porte sur une fonction des coordonnées du point courant d'une courbe et de leurs dérivées premières, mais encore lorsqu'elle dépend de dérivées d'ordre plus élevé.

Avant de commencer cet exposé dont une partie des résultats a été communiquée à l'Académie des Sciences [1], qu'il me soit permis d'adresser tous mes remerciements à MM. Goursat, Hadamard et Lebesgue pour l'intérêt bienveillant qu'ils ont accordé à mes recherches, ainsi qu'à M. Villat qui a bien voulu faciliter la publication de ce travail.

Rappel des définitions. — Rappelons les définitions fondamentales qui interviennent à chaque instant dans le cours de cet exposé.

Nous considérons seulement des courbes *continues et rectifiables*.

Soit s la longueur de l'arc qui va de la première extrémité A d'une courbe C à son point courant M. D'après le théorème de M. Lebesgue, les dérivées $x'(s)$, $y'(s)$ existent dans l'intervalle (O, L), sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, et sont en valeur absolue inférieures à 1.

Soit alors $F(x, y, x', y')$ une fonction continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres et *positivement homogène* par rapport à l'ensemble des deux nombres x' et y', c'est-à-dire que l'on ait pour k positif

$$kF(x, y, x', y') = F(x, y, kx', ky').$$

Considérons l'intégrale (au sens de M. Lebesgue)

$$\mathfrak{I}_c = \int_0^L F[x(s), y(s), x'(s), y'(s)]\, ds,$$

on lui donne le nom d'intégrale de *forme paramétrique* par opposition aux intégrales de *forme ordinaire*

$$\mathfrak{I}' = \int_a^b f(x, y, y')\, dx.$$

Si les coordonnées de M sont exprimées au moyen d'un paramètre t,

---

[1] Les 16 février, 11 mai, 19 octobre 1925.

par des fonctions $x(t)$, $y(t)$ *absolument continues*, on aura

$$\mathfrak{I}_c = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{F}[x(t), y(t), x'(t), y'(t)]\, dt \qquad (t_1 > t_0).$$

Dans les trois premiers Chapitres de ce travail, nous étudierons les intégrales de forme paramétrique, les propositions à établir se présentant sous une forme souvent plus simple que pour les intégrales de forme ordinaire auxquelles nous reviendrons dans le Chapitre IV.

Nous allons maintenant définir une fonction qui joue un rôle important dans l'étude de $\mathfrak{I}_C$. A tout système de valeurs $(\overline{x}, \overline{y})$, faisons correspondre la nappe du cône ayant pour équation dans son système trirectangle $Ox'y'u$

$$u = \mathrm{F}(\overline{x}, \overline{y}, x', y'),$$

on donne à cette surface le nom de *figurative*.

Or, en vertu de l'homogénéité de F, on a

$$\frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x'^2} = -\frac{1}{x'y'}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x'\,\partial y'} = \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y'^2} = \mathrm{F}_1(x, y, x', y')$$

et la fonction F_1 ainsi définie a une propriété remarquable.

En effet, si en un point $(\overline{x}, \overline{y}, x', y')$ on a

$$\mathrm{F}_1(\overline{x}, \overline{y}, x', y') \geqq 0,$$

la figurative en ce point tourne sa concavité vers les u positifs, ou se réduit à un plan.

Domaine (ρ) *d'une fonction ou d'une courbe*. — Soient $f_0(x)$ une fonction définie dans un intervalle (a, b) et $f(x)$ une autre fonction définie dans (c, d). On dit que $f(x)$ appartient au domaine (ρ) de $f_0(x)$, si l'on a

$$|a - c| \leqq \rho; \qquad |b - d| \leqq \rho,$$
$$|f(x) - f_0(x)| \leqq \rho \qquad [\text{pour les } x \text{ communs à } (a, b) \text{ et } (c, d)],$$
$$|f(x) - f_0(a)| \leqq \rho \quad \text{pour } x \leqq a, \qquad |f(x) - f_0(b)| \leqq \rho \quad \text{pour } x \geqq b.$$

De la même façon, soit une courbe C_0. On dira qu'un point P appartient au domaine (ρ) de C_0 s'il existe sur C_0 un point M tel que la distance MP soit inférieure à ρ. Une courbe C appartiendra alors au domaine (ρ) de C_0 si tous ces points appartiennent au domaine (ρ) de C_0 et si ses extrémités sont respectivement intérieures aux cercles de rayons ρ décrits des extrémités correspondantes de C_0 comme centres.

Fonctions et courbes d'accumulation. — Soit W un ensemble formé avec une infinité de fonctions $f(x)$. On dira qu'une fonction $f_0(x)$ est une fonction d'accumulation de cet ensemble, si dans tout domaine (ρ) de $f_0(x)$ il existe toujours une infinité de fonctions de W.

De même, une courbe C_0 sera une courbe d'accumulation d'un ensemble U de courbes C, si, dans tout domaine (ρ) de C_0 il existe une infinité de courbes de U.

CHAPITRE I.

PRINCIPE DE LA MÉTHODE DIRECTE DU CALCUL DES VARIATIONS. ROLE DE LA SEMI-CONTINUITÉ.

Position du problème. — Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agit des intégrales

$$\mathfrak{J}_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds.$$

Le problème à résoudre est le suivant :

Étant donnée une classe K *de courbes* C, *existe-t-il dans* K *une courbe* C_0 *telle que l'on ait*

$$\mathfrak{J}_C \geqq \mathfrak{J}_{C_0}$$

pour toutes les courbes C *de* K ?

C'est le problème de l'extremum absolu ; les méthodes classiques du Calcul des Variations ne sont pas, en général, capables de le résoudre entièrement. En effet, les méthodes de M. Weierstrass et de Darboux permettent bien d'affirmer la valeur de $\mathfrak{J}_C$ relative à un arc d'extrémale C_0 et, dans des cas étendus, plus petite que les valeurs de cette intégrale prises le long des courbes ayant mêmes extrémités que C_0 ; par contre, on n'en peut déduire l'existence d'une extrémale pour laquelle la valeur de $\mathfrak{I}_C$ serait inférieure aux valeurs prises par cette intégrale sur chacune des autres courbes. La question devient encore plus difficile si, au lieu de prendre comme classe K l'ensemble de toutes les courbes continues et rectifiables du plan, on ne prend que certaines courbes particulières, par exemple, celles qui font prendre la même valeur à une fonction de ligne donnée (problèmes isopérimétriques).

La méthode directe. Point de vue d'Hilbert. — La nécessité de nouvelles méthodes se fait donc sentir. Ce furent Arzela et Hilbert qui, les premiers, eurent l'idée de rechercher directementles cas où un problème donné de Calcul des Variations admet une solution. Nous allons maintenant exposer leurs idées.

Soit K une *classe complète*, c'est-à-dire renfermant les courbes d'accumulation des courbes qui la composent (par exemple, la classe formée avec toutes les courbes joignant deux points donnés), et soit i la borne inférieure des valeurs de $\mathfrak{I}_C$ relatives aux courbes de K (i pouvant égaler $-\infty$). On peut toujours former une suite (Σ)

$$(\Sigma) \qquad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

telle que, quand i est finie, on ait

$$\mathfrak{I}_{C_n} \leqq i + \frac{1}{n}$$

et quand $i = -\infty$,

$$\mathfrak{I}_{C_n} \leqq -n,$$

ce point résulte de la définition même de la borne inférieure.

On donne à (Σ) le nom de *suite minimisante* pour $\mathfrak{I}$ dans la classe K.

Hilbert cherchait alors les cas où (Σ) admettait une courbe limite C_0, et il posait, par définition,

$$\mathfrak{I}_{C_0} = i.$$

En étendant ainsi le sens du mot solution, il pouvait donc dire que tout problème de Calcul des Variations admet une solution, pourvu que la suite minimisante ait une courbe d'accumulation.

Ceci appelle la remarque suivante :

Critique des idées de Hilbert. — Les problèmes de Calcul des Variations sont des problèmes objectifs pour lesquels on ne saurait en général se contenter d'une solution purement formelle. Donc, pour que la méthode ait une portée véritable, on devra pouvoir définir directement $\mathfrak{I}_C$ sur C_0. Mais cela ne sera pas suffisant, et il faudra encore montrer que la valeur de $\mathfrak{I}_C$ prise sur la courbe C_0 est bien égale à i; c'est encore ce qu'il faudrait faire, sous peine d'une véritable contradiction, même si l'on se contentait d'une solution formelle, dans le cas où la définition directe de $\mathfrak{I}_{C_0}$ serait possible.

Pour ce qui est de la première difficulté, on fait en sorte, dans la pratique, d'avoir les longueurs des courbes de la suite minimisante (Σ) toutes inférieures à un nombre fixe. Alors, en vertu d'un théorème d'Hilbert, (Σ) admet au moins une courbe d'accumulation C_0, continue et rectifiable. Or, en vertu du théorème de M. Lebesgue sur l'existence de la tangente à une courbe rectifiable, théorème qui joue, dans toute sa théorie, un rôle absolument essentiel, on pourra définir, sur C, l'intégrale (au sens de M. Lebesgue)

$$\mathfrak{I}_{C_0} = \int_{C_0} F(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\, ds.$$

Quant à la seconde difficulté, elle paraît d'abord insurmontable. On aurait bien $\mathfrak{I}_{C_0} = i$ si $\mathfrak{I}_C$ était continue, c'est-à-dire si, étant donnée une courbe C_1, à tout nombre positif ε, on pouvait faire correspondre un $\rho > 0$ tel que, pour toutes les courbes C_2 appartenant au domaine (ρ) de C_1, on aurait

$$|\mathfrak{I}_{C_2} - \mathfrak{I}_{C_1}| \leqq \varepsilon.$$

Or, sauf dans le cas particulier des intégrales curvilignes, $\mathfrak{I}_C$ *n'est pas continue*. Il semble donc que la méthode directe doive être abandonnée. Mais c'est à ce moment qu'une idée simple de M. Lebesgue se révèle décisive. Nous allons insister un peu sur ce point, car nous croyons qu'il n'a pas toujours été suffisamment mis en lumière.

Travaux de M. Lebesgue. Rôle de la semi-continuité. — On connaît, dans la théorie des fonctions de variables réelles, la notion de *semi-continuité* dont voici la définition :

L'inégalité bien connue qui sert à définir la continuité

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \varepsilon$$

est équivalente aux deux suivantes

$$f(x+h) \geqq f(x)-\varepsilon, \qquad f(x+h) \leqq f(x)+\varepsilon$$

et l'on peut se proposer l'étude des fonctions $f(x)$ qui satisfont seulement à l'une des deux inégalités précédentes. Si la première est satisfaite, on dira que $f(x)$ est *semi-continue inférieure*.

Si c'est la seconde qui est vérifiée, nous dirons au contraire que $f(x)$ est *semi-continue supérieure*.

M. Baire avait introduit ces notions dans le but de systématiser des hypothèses simples, se présentant avec une certaine fréquence, sans toutefois en tirer des résultats d'une portée essentielle.

Au contraire, M. Lebesgue, en l'étendant aux fonctionnelles, est parvenu à lui donner une portée considérable.

Nous dirons donc que $\mathfrak{I}_C$ est *semi-continue inférieure* si, étant donnée une courbe C_1, à tout $\rho > 0$ tel que l'on ait

$$\mathfrak{I}_{C_2} \geqq \mathfrak{I}_{C_1} - \varepsilon$$

pour toutes les courbes C_2 appartenant au domaine (ρ) de C_1.

Définition analogue pour la semi-continuité supérieure.

Or, et c'est ici que se révèle l'importance de cette notion, pour que sur l'élément d'accumulation C_0 de la suite minimisante, on ait bien

$$\mathfrak{I}_{C_0} = i,$$

il suffit que l'intégrale $\mathfrak{I}_C$ soit semi-continue inférieure (ce serait bien entendu le contraire s'il s'agissait d'un maximum). En effet, nous avons

$$i \leqq \mathfrak{I}_{C_0} \leqq \mathfrak{I}_{C_n} + \varepsilon \leqq i + \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

ce qui entraîne l'égalité annoncée, n et ε étant arbitraires.

Partant de là, M. Lebesgue a cherché des exemples de fonctions de ligne semi-continues, et c'est ainsi qu'il a établi la semi-continuité inférieure de la longueur d'une courbe, de l'aire d'une surface [1], des intégrales

$$\int_C \varphi(x, y)\, ds, \qquad \iint_{(S)} f(x, y, z)\, d\sigma$$

ou

$$\varphi > 0, \qquad f > 0$$

de l'intégrale double du problème de Dirichlet, et a obtenu ainsi des résultats très remarquables en traitant ce problème par la méthode directe.

Recherches de MM. Tonelli et Goursat. — A la suite des travaux de M. Lebesgue, M. Tonelli est parvenu à montrer que les intégrales

$$\int_C F(x, y, x', y')\, ds$$

sont semi-continues moyennant des conditions d'un caractère très général [2] et il a entrepris systématiquement, pour ces intégrales, l'étude du Calcul des Variations par la méthode directe.

Enfin, M. Goursat, étudiant le cas des courbes ayant des tangentes variant d'une façon continue, simplifie notablement la démonstration de M. Tonelli, et étudie en outre, dans le même Mémoire [3], les fonctions de surface et de ligne gauche.

Conclusion. — En résumé, la méthode directe, d'après M. Lebesgue, consiste :

---

(1) Dans le même ordre d'idées, nous renvoyons le lecteur à un important Mémoire de M. M. Fréchet : *Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et l'aire des surfaces courbes* (*Fundamenta Mathematicæ*, t. VII) dans lequel l'auteur approfondit les notions de longueur, d'aire et de prolongement fonctionnel.

(2) Dans le Chapitre IV, nous étendrons le domaine d'existence de cette propriété, en donnant les conditions suivant lesquelles l'intégrale

$$\int_C f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

est semi-continue.

(3) E. Goursat, *Sur quelques fonctions de ligne semi-continues* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. 43, 1915, p. 118-130.

1° A former une suite minimisante (Σ);

2° A montrer que (Σ) admet une courbe d'accumulation rectifiable faisant partie de la classe considérée (K);

3° A démontrer enfin la semi-continuité inférieure de $\mathfrak{J}_c$ dans (K).

On peut remarquer que, dans tout ce qui précède, il n'est nullement question de la notion de variation, ce qui marque bien l'indépendance de la méthode directe avec les procédés classiques du Calcul des Variations.

Dans le Chapitre suivant, nous allons nous occuper des théorèmes fondamentaux qui permettent d'affirmer l'existence des courbes et de fonctions d'accumulation, et fournissent par suite les éléments nécessaires à la solution du (2°); puis dans le Chapitre III, nous établirons l'existence de la semi-continuité dans les cas étendus, ce qui nous permettra de résoudre le (3°).

CHAPITRE II.

ENSEMBLES DE FONCTIONS ET ENSEMBLES DE COURBES.

Comme nous l'avons dit à la fin du Chapitre précédent, nous allons passer à l'étude des ensembles de fonctions et des ensembles de courbes au point de vue de l'existence des éléments d'accumulation. Cette théorie présente avec celle des ensembles de points des analogies tirant leur origine des propriétés communes aux ensembles abstraits pour lesquels on peut, par un procédé quelconque, définir la notion de distance de deux éléments, et celle de limite d'une suite infinie d'éléments. Cette étude a été développée systématiquement par M.M. Fréchet (*Circolo Mathematico di Palermo*, 1905), mais malgré ces analogies, des différences profondes séparent les ensembles de points des ensembles de fonctions : c'est ainsi que tout ensemble borné, renfermant une infinité de points, admet nécessairement un point d'accumulation; au contraire, on sait qu'une infinité de fonctions bornées dans leur ensemble peuvent ne pas admettre de fonctions d'accumulation, comme le montre l'exemple classique des fonctions

$$y = \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Pour distinguer les ensembles abstraits ayant des éléments limites de ceux qui n'en ont pas, M. Fréchet a introduit la notion de *compacité*.

Un ensemble sera *compact* si l'on peut en extraire une suite d'éléments ayant un élément limite.

On voit donc que les ensembles formés d'une infinité de fonctions ne sont pas toujours compacts. Cependant on peut trouver une condition très générale moyennant laquelle une infinité de fonctions, bornées dans leur ensemble, formeront un ensemble compact : c'est la condition d'ÉGALE CONTINUITÉ dont voici la définition :

ÉGALE CONTINUITÉ. — *On dit que les fonctions $f(x)$ (définies dans un même intervalle) d'un ensemble* W *sont également continues, si, à tout nombre positif* ε, *on peut faire correspondre un nombre positif* δ *tel que l'inégalité*

$$|x_2 - x_1| \leqq \delta$$

entraîne

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \varepsilon$$

pour toutes les fonctions de W.

Critère d'Arzela. — Une condition suffisante pour l'égale continuité est qu'il existe un nombre positif M tel que l'on ait pour toutes les fonctions de l'ensemble

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqq \mathrm{M}.$$

Dans le cas où les fonctions ont des dérivées, ceci aura lieu si l'on a

$$|f'(x)| \leqq \mathrm{M}.$$

Nous allons maintenant démontrer à l'aide d'une méthode très simple un théorème fondamental dû à Ascoli en renvoyant pour une étude plus complète de cette théorie aux travaux de M. Paul Montel, à sa thèse en particulier.

EXISTENCE DES FONCTIONS D'ACCUMULATIONS ; THÉORÈME D'ASCOLI. — *Tout ensemble d'une infinité de fonctions également continues et également bornées admet au moins une fonction d'accumulation continue.*

On dit, pour abréger, que les fonctions d'un ensemble W sont également bornées s'il existe un nombre positif M tel que l'on ait

$$|f(x)| < M$$

pour toutes les fonctions de W.

Supposons les fonctions de W définies dans l'intervalle $(0, 1)$ et représentons-les dans un système (Oxy) d'axes rectangulaires par des équations de la forme

$$y = f(x) \qquad (0, 1).$$

Nous pouvons, dans le cas actuel, parler indifféremment de courbe ou de fonction d'accumulation.

La démonstration du théorème se divise en deux parties :

1° *Étant donné un* $\varepsilon > 0$, *il existe dans* W *un ensemble* $W_\varepsilon(\varepsilon)$ *renfermant une infinité de courbes telles que la différence des ordonnées de deux quelconques de ces courbes, correspondant à une même valeur de l'abscisse x, reste en valeur absolue inférieure à* ε.

En effet, on peut trouver un entier n assez grand pour que, si l'on divise l'intervalle $(0, 1)$ en n intervalles égaux, on ait pour chaque $f(x)$ de W

$$(1) \qquad |f(x'') - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

x' et x'' étant pris dans un même intervalle partiel.

Soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ les parallèles à Oy menées par les points de division successifs. Sur Oy, l'ensemble des courbes représentant les fonctions détermine au moins un point d'accumulation P_0. Soit A_0B_0 un segment de Oy de centre P_0, tel que

$$(2) \qquad A_0B_0 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit W_0 l'ensemble des courbes de W ayant un point entre A_0 et B_0. W_0 renferme une infinité de courbes qui déterminent sur Δ_1 au moins un point d'accumulation P_1. Soit A_1B_1 le segment de Δ_1 de centre P_1, de longueur $\frac{\varepsilon}{2}$. Il existe dans W_0 une infinité de courbes formant un ensemble W_1, ayant chacune un point entre A_0, B_0 et un autre entre A_1, B_1. En vertu des relations (1) et (2), il est clair que les portions des courbes de W_1 comprises entre Oy et Δ_1 sont contenues dans un même rectangle R_1, de hauteur ε.

Les courbes W_1 déterminent sur Δ_2 au moins un point d'accumulation P_2. Soit A_2B_2 le segment de Δ_2, de centre P_2, de longueur égale à $\frac{\varepsilon}{2}$. Il existe dans W_1 une infinité de courbes, formant un ensemble W_2, qui ont un point situé sur Δ_2 entre A_2 et B_2, et les portions des courbes de W_2 comprises entre Δ_1 et Δ_2 sont intérieures à un rectangle R_2 de hauteur ε. Les côtés de R_1 et R_2 situés sur Δ_2 ont en commun un segment contenant les points d'intersection des courbes de W_2 avec Δ_2.

On voit que, au bout de n opérations, on obtiendra un ensemble $W(\varepsilon)$ renfermant une infinité de courbes et qui sera tout entier contenu dans une suite $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de rectangles de bases parallèles à Ox, et de hauteurs égales à ε, ce qui établit la proposition que nous avions en vue.

2° Ceci posé, soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

une suite décroissante de nombres positifs qui tendent vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

Formons $W(\varepsilon_1)$. Nous pouvons effectuer, sur cet ensemble, les opérations que nous avons effectuées sur W pour obtenir $W(\varepsilon_1)$, le nombre ε_1 étant remplacé par ε_2. On formera ainsi un ensemble $W(\varepsilon_2)$ dont on peut, par le même procédé, extraire un ensemble $W(\varepsilon_3)$, et ainsi de suite. Finalement, on obtient une suite

$$W(\varepsilon_1), \quad W(\varepsilon_2), \quad \ldots, \quad W(\varepsilon_n) \quad \ldots$$

d'ensembles renfermant chacun une infinité d'éléments et tels que :

α. Tous les éléments de $W(\varepsilon_p)$ appartiennent à $W(\varepsilon_{p-1})$;

β. La valeur absolue de la différence des valeurs, pour un même x, de deux fonctions quelconques de $W(\varepsilon_p)$, est inférieure à ε_p.

Coupons la suite d'ensemble de courbes représentatives par une parallèle D à Oy. Soient I_p et $\mathfrak{Z}_p$ les points de D dont les ordonnées sont respectivement égales à la borne inférieure et à la borne supérieure des ordonnées sur D des courbes de $W(\varepsilon_p)$. On a

$$I_p \mathfrak{Z}_p \leqq \varepsilon_p$$

et $I_p \mathfrak{Z}_p$ est tout entier intérieur à $I_{p-1} \mathfrak{Z}_{p-1}$. Donc quand p tend vers l'infini, I_p et $\mathfrak{Z}_p$ tendent vers un même point K.

Soit Γ le lieu de K quand D varie. On peut représenter Γ par une équation de la forme

$$y = F(x) \qquad (0, 1),$$

$F(x)$ est une fonction d'accumulation pour les fonctions de W. En effet, K est intérieur à tous les $I_p \mathfrak{Z}_p$. Soit α un nombre positif. Il existe un entier i tel que

$$\alpha \geqq \varepsilon_i \geqq \varepsilon_{i+1} \geqq \ldots.$$

Or $I_i \mathfrak{Z}_i \leqq \varepsilon_i$, donc $I_i \mathfrak{Z}_i \leqq \alpha$, quelle que soit l'abscisse de la droite D. Portons de part et d'autre de K sur D une longueur égale à α. Le segment obtenu contient $I_i \mathfrak{Z}_i$. Quand D varie, nous définissons ainsi le domaine (α) de $F(x)$ et à l'intérieur de ce domaine sont contenues toutes les courbes de $W(\varepsilon_i)$. Il est clair, en outre, que $F(x)$ est continue. On a en effet, $f(x)$ étant une fonction quelconque de $W(\varepsilon_i)$,

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leqq |f(x_2) - f(x_1)| + 4\alpha.$$

Etant donné un nombre ε, on prendra $\alpha \leqq \frac{\varepsilon}{6}$ et un nombre δ tel que

$$|x_2 - x_1| \leqq \delta$$

entraîne pour toutes les fonctions de W

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura donc aussi

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leqq \varepsilon$$

et le théorème est établi.

Nous allons maintenant démontrer le théorème d'Arzela, qui est pour les ensembles de courbes ce que le théorème d'Ascoli est pour les ensembles de fonctions.

Théorème d'Arzela. — *Un ensemble d'une infinité de courbes continues pour lesquelles il existe une représentation analytique simultanée*

$$x=f(t), \qquad y=g(t) \qquad (0, 1),$$

les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ étant également continues et également bornées, admet au moins une courbe d'accumulation continue.

Il suffit de montrer que l'on peut trouver deux fonctions $F(t)$ et $G(t)$ qui soient respectivement des fonctions d'accumulation pour les $f(t)$ et les $g(t)$ et telles qu'il existe dans tout domaine (ε) de $F(t)$ une infinité de fonctions $f(t)$ ayant les $g(t)$ qui leur sont associées, contenues dans le domaine (ε) de $G(t)$.

Soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

la suite considérée dans la démonstration du théorème d'Ascoli. Formons avec les $f(t)$ un ensemble analogue à celui que nous avons désigné par $W(\varepsilon_1)$. Ici nous le désignerons par U_1. Soit V_1' l'ensemble des $g(t)$ qui correspondent aux $f(t)$ de U_1. Nous pouvons extraire de V_1' un ensemble V_1, de propriétés analogues à U_1; les $f(t)$ correspondant à ses $g(t)$ appartiendront toutes à U_1 et formeront un ensemble U_1'. De U_1' nous pouvons extraire, en remplaçant ε_1 par ε_2, un nouvel ensemble U_2. Soit V_2' l'ensemble des g de V_1 qui correspondent aux f de U_2. Formons avec V_2' l'ensemble V_2, ε_1 étant toujours remplacé par ε_2. Toutes les fonctions de V_2 auront leurs associées f contenues dans U_2. Procédons ainsi indéfiniment, nous obtiendrons deux suites

$$\begin{array}{llllll} U_1, & U_2, & \ldots, & U_n, & \ldots, & [f(t)], \\ V_1, & V_2, & \ldots, & V_n, & \ldots, & [g(t)], \end{array}$$

telles que :

1° U_i renferme une infinité de fonctions appartenant toutes à U_{i-1} (propriétés analogues pour V_i);

2° Une infinité de fonctions U_i ont leurs correspondantes dans V_i;

3° Les U_i et les V_i possèdent les propriétés des ensembles W_i du théorème d'Ascoli.

Il en résulte que les U_i et les V_i convergent respectivement vers deux fonctions continues $F(t)$ et $G(t)$ qui répondent manifestement à la question.

Courbes à longueurs bornées : théorème d'Hilbert. — Nous démontrerons enfin le théorème d'Hilbert pour ne pas créer de discontinuités dans cet exposé, quoique la démonstration que nous allons donner soit classique. En voici l'énoncé :

Un ensemble formé d'une infinité de courbes continues, toutes contenues dans un espace limité, et dont les longueurs sont inférieures à un nombre fixe, admet au moins une courbe d'accumulation, continue et rectifiable.

Soient

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad (0, L), \qquad L \leqq M$$

les équations d'une de ces courbes, s désignant l'abscisse curviligne du point courant, L sa longueur.

Posons

$$t = \frac{s}{L},$$

toutes les courbes considérées ont alors une représentation analytique simultanée

$$x = \bar{x}(t), \qquad y = \bar{y}(t) \qquad (0, 1),$$

Il est clair que les $\bar{x}$ et les $\bar{y}$ sont bornées dans leur ensemble. De plus,

$$\left|\frac{\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)}{t_2 - t_1}\right| = L\left|\frac{x(s_2) - x(s_1)}{s_2 - s_1}\right| \leqq L \leqq M.$$

Donc, en vertu du critère d'Arzela, les fonctions $\bar{x}(t)$ sont également continues, il en est de même des $\bar{y}(t)$; et la démonstration s'achève en appliquant le théorème d'Arzela. La courbe d'accumulation C_0 est rectifiable, car on voit facilement que la longueur de toute ligne polygonale inscrite dans C_0 est inférieure ou au plus égale à M.

Nous avons mis ainsi en évidence un mode de paramétrage remarquable des courbes de longueurs inférieures à un nombre fixe qui joue un rôle important dans cette théorie.

Fonctions et courbes de pseudo-accumulation. — Le procédé que nous avons employé pour démontrer le théorème d'Ascoli va nous permettre de faire une étude plus approfondie des ensembles de fonctions également bornées.

Posons d'abord une définition préliminaire :

Soit W un ensemble formé d'une infinité de fonctions $f(x)$ définies dans un même intervalle (a, b). Nous dirons qu'une fonction $F(x)$ est une fonction de PSEUDO-ACCUMULATION *de cet ensemble si, à tout nombre positif ρ et à tout entier k, on peut faire correspondre au moins une fonction $f(x)$ de W et p valeurs de x $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

1°
$$p \geqq k,$$
2° *Les inégalités*
$$|f(x_i) - F(x_i)| \leqq \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$
sont vérifiées;

3° *Étant donné un intervalle quelconque (α, β) appartenant à (a, b), il y aura toujours au moins un (x_i) intérieur à cet intervalle, pourvu que k soit assez grand.*

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Tout ensemble formé d'une infinité de fonctions également bornées admet au moins une fonction de pseudo-accumulation.

Nous pouvons toujours prendre l'intervalle $(0, 1)$ comme intervalle de définition des fonctions de W.

Divisons b en p intervalles partiels égaux et, par leurs extrémités, menons les parallèles
$$\Delta_0 \equiv Oy, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_p$$

à Oy; Δ_p étant menée par le point (1, 0) est fixe. Soit alors ε un nombre positif arbitraire. En nous reportant à la démonstration du théorème d'Ascoli, nous voyons que l'on peut former un ensemble $W(\varepsilon)$ renfermant une infinité d'éléments et jouissant de la propriété suivante :

La différence des ordonnées *qui correspondent à l'abscisse d'une* Δ_i *quelconque*, *mais provenant d'une division donnée de* (0, 1), de deux fonctions arbitraires de $W(\varepsilon)$ est, en valeur absolue, inférieure à ε.

Pour abréger, nous donnerons à l'opération qui permet de passer de W à $W(\varepsilon)$ le nom de

FILTRAGE (ε) de W sur les Δ_0^p.

Ceci posé, soit (σ)

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots \tag{1}$$

une suite décroissante de nombres positifs ayant pour limite zéro.

Soient W_1 le résultat du filtrage (ε_1) de W sur les Δ_0^1; W_2 le résultat du filtrage (ε_n) de W_1 sur les Δ_0^2; ..., W_n le résultat du filtrage (ε_n) de W_{n-1} sur les Δ_0^n, et ainsi de suite.

Nous formons une suite d'ensembles

$$W_1, \quad W_2, \quad \ldots, \quad W_n, \quad \ldots$$

dans laquelle chaque W_i renferme une infinité de fonctions appartenant toutes à W_{i-1}.

Soit alors Δ une parallèle à Oy d'abscisse x.

Considérons l'ensemble des points déterminés sur Δ par les fonctions de W_i. Cet ensemble est borné inférieurement et supérieurement. Soient I_i et $\mathfrak{I}_i$ respectivement sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Nous représenterons par la même lettre, I_i ou $\mathfrak{I}_i$ l'ordonnée des I_i ou points $\mathfrak{I}_i$. On a

$$I_1 \leqq I_2 \leqq \ldots I_i \leqq \ldots \leqq M,$$
$$\mathfrak{I}_1 \geqq \mathfrak{I}_2 \geqq \ldots \mathfrak{I}_i \geqq \ldots \geqq -M,$$

M étant un nombre positif fixe supérieur à toutes les $|f(x)|$.

Les I_i et les $\mathfrak{I}_i$ tendent donc respectivement vers des limites I et $\mathfrak{I}$ quand i tend vers $+\infty$. Le segment $I\mathfrak{I}$ est intérieur à tous les segments $I_i \mathfrak{Z}_i$. Soit y l'ordonnée de I. Nous poserons, pour chaque valeur de x,

$$F(x) = y \qquad (0, 1).$$

Il est clair que $F(x)$ est une fonction de pseudo-accumulation de W. En effet, prenons un $\alpha > 0$ et soit k un nombre entier quelconque. Il existe un entier p tel que pour $n \geqq p$, on ait

$$\alpha \geqq \varepsilon_n,$$

ε_n étant un des nombres de la suite (1).

Soit alors n un entier plus grand à la fois que p et que k. Considérons l'ensemble W_n et soit Δ_i une quelconque des droites $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ que nous avons définies plus haut. Les lettres I et $\mathfrak{Z}$ gardant la même signification, nous avons, d'après la façon dont on a formé W_n,

$$I_n \mathfrak{Z}_n \leqq \varepsilon_n,$$

I_n et $\mathfrak{Z}_n$ étant relatifs à la droite Δ_i. Le point I étant intérieur au segment $I_n \mathfrak{Z}_n$, si de part et d'autre de ce point nous portons sur Δ_i des longueurs égales à α, nous obtenons un nouveau segment à l'intérieur duquel toutes les fonctions de W_n ont chacune un point, et cela pour toutes les valeurs de i, de 0 à n, ce qui établit la proposition, car on peut en outre choisir n assez grand pour que chacun des intervalles partiels obtenus en divisant (0, 1) en n parties égales soit inférieur à un nombre δ donné à l'avance.

Exemple. — Considérons l'ensemble formé par les fonctions

$$y = \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \qquad (0, \pi);$$

cet ensemble n'a pas de fonction d'accumulation ; par contre, toute courbe

$$y = \sin n_0 x \qquad (0, \pi)$$

est une courbe de pseudo-accumulation, n_0 désignant un entier arbitraire [1].

---

[1] En effet, à chaque entier n, on peut associer les (x_i), abscisses des points d'intersection des courbes $y = \sin nx$, $y = \sin n_0 x$. Il est clair que l'on pourra prendre n assez grand pour que les (x_i) satisfassent aux conditions (1), (2), (3) de la définition (*voir* p. 410).

Courbes de pseudo-accumulation. — On définit d'une manière analogue ce qu'il faut entendre par courbe de pseudo-accumulation d'un ensemble de courbes

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a, b).$$

En raisonnant comme nous l'avons fait pour établir le théorème d'Arzela, on démontre sans peine, dans tout ensemble de courbes contenues dans un domaine borné, l'existence d'au moins une courbe de pseudo-accumulation.

Nous donnerons à la fin du Chapitre suivant, une application de ces notions au Calcul des Variations.

Pour le moment, nous allons donner un critère qui permet d'affirmer l'existence dans un ensemble W d'une fonction de pseudo-accumulation continue et à une variation bornée, c'est-à-dire représentée graphiquement par une courbe rectifiable. Voici la proposition que nous avons en vue :

Soit un ensemble W *renfermant une infinité de fonctions continues, bornées dans leur ensemble et définies dans un même intervalle* (a, b). *Supposons que les trois conditions suivantes soient satisfaites :*

1° *A chaque* $f(x)$, *il est possible d'associer une division bien déterminée de* (a, b) *en intervalles partiels* (x_i, x_{i+1}) *tels que l'on ait pour la fonction considérée*

$$\left|\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right| \leq \mathrm{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

p désignant le nombre de ces intervalles, et M *étant un nombre fixe, le même pour toutes les fonctions ;*

2° *La borne supérieure de l'ensemble des p associés aux fonctions de* W *est infinie ;*

3° *Étant donné un intervalle quelconque* (α, β) *appartenant à* (a, b), *il y aura toujours à son intérieur au moins un des nombres* (x_i) *définis au* 1° *pourvu que p soit assez grand.*

Nous pouvons extraire de W une suite Σ

$$(\Sigma) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

telle que la suite formée avec les p correspondants

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad \ldots$$

augmente indéfiniment.

A chaque fonction de (Σ), associons la ligne polygonale bien déterminée, inscrite dans la courbe $y = f(x)$, dont les sommets ont respectivement pour abscisses celles des points de division de (a, b) en les p intervalles partiels (x_i, x_{i+1}) qui correspondent à cette fonction en vertu du 1°. Cette ligne polygonale définit une fonction continue

$$y = \varphi(x)$$

et nous pouvons former ainsi une nouvelle suite

$$(\Sigma') \qquad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x),$$

de fonctions continues, bornées dans leur ensemble, et satisfaisant quel que soit n à l'inégalité

$$\left| \frac{\varphi_n(\xi) - \varphi_n(\eta)}{\xi - \eta} \right| \leqq \mathrm{M},$$

(ξ, η) désignant deux nombres quelconques de (a, b). Ce dernier point résulte immédiatement de la façon dont on a formé les $\varphi(x)$.

Donc les fonctions de Σ' sont également continues.

Elles ont donc au moins une fonction d'accumulation continue

$$y = \mathrm{F}(x)$$

qui satisfait à l'inégalité

$$\left| \frac{\mathrm{F}(\xi) - \mathrm{F}(\eta)}{\xi - \eta} \right| \leqq \mathrm{M}$$

et qui est donc à variation bornée [autrement dit, la courbe $y = \mathrm{F}(x)$ est rectifiable]. Il est clair que $\mathrm{F}(x)$ est une fonction de *pseudo-accumulation* pour les $f(x)$. En effet, de Σ' on peut extraire une nouvelle suite, que nous désignerons par

$$(\Sigma'') \qquad \varphi^{(1)}(x), \quad \varphi^{(2)}(x), \quad \ldots$$

qui converge uniformément vers $\mathrm{F}(x)$. Considérons la suite Σ_1 formée avec les $f(x)$ qui correspondent aux fonctions de (Σ'')

$$(\Sigma_1) \qquad f^{(1)}(x), \quad f^{(2)}(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x), \quad \ldots.$$

Soit alors un nombre positif ρ, il existe un entier $\overline{n}$, tel que pour $n \geqq \overline{n}$ on ait pour toutes les valeurs de x

$$|\varphi^{(n)}(x) - \mathrm{F}(x)| \leqq \rho.$$

Considérons la fonction $f^{(n)}(x)$ et soit $p^{(n)}$ le nombre p qui lui est relatif. On aura

$$|f^{(n)}(x_i) - \mathrm{F}(x_i)| \leqq \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^{(n)}),$$

quel que soit $n \geqq \overline{n}$, car

$$f^{(n)}(x_i) = \varphi^{(n)}(x_i),$$

ce qui entraîne bien la conclusion annoncée, en vertu des hypothèses faites dans l'énoncé au sujet de la distribution des (x_i) sur (a, b).

Exemple. — Considérons les fonctions

$$y = \sin nx \qquad (0, \pi) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty);$$

l'une d'elles

$$f_k(x) = \sin kx,$$

où k est quelconque, décompose $(0, \pi)$ par les points d'abscisses

$$0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{k-1}, \quad \pi$$

ou

$$x_i = \frac{i\pi}{k}$$

en k intervalles partiels égaux, et l'on a

$$\left| \frac{f_k(x_{i+1}) - f_k(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| = 0,$$

et nous nous trouvons dans un cas où s'applique le théorème précédent. On a ici $\mathrm{M} = 0$, le nombre p associé à chaque fonction est égal à son rang k, et l'on a identiquement

$$\varphi_n(x) = 0;$$

la fonction de pseudo-accumulation obtenue est la fonction

$$y = 0 \qquad (0, \pi).$$

CHAPITRE III.

SEMI-CONTINUITÉ ET RECHERCHE DIRECTE DES MINIMA.

Dans ce qui va suivre, nous ne parlerons que de la semi-continuité inférieure, les résultats obtenus s'étendant d'eux-mêmes, avec des modifications évidentes au cas de la semi-continuité supérieure.

Nous nous proposons de démontrer un théorème fondamental dû à M. Tonelli qui permet d'affirmer la semi-continuité d'une vaste classe d'intégrales. Ce géomètre l'avait obtenu sans mettre en évidence la véritable raison de l'existence de cette propriété qui apparaissait ainsi d'une manière tout à fait imprévue. Nous allons montrer, au contraire, que la semi-continuité de certaines fonctions de lignes est une conséquence immédiate de l'existence d'une *forme privilégiée de* $\mathfrak{J}_C$, qui est continue dans la classe des courbes de longueurs bornées. Ce Chapitre sera ainsi consacré à l'étude de la semi-continuité et des conséquences qu'on en tire relativement à l'existence de l'extremum absolu. La méthode que nous allons employer nous fournira d'ailleurs certaines généralisations des résultats connus, et nous montrerons dans le Chapitre suivant qu'elle conduit à une méthode nouvelle de Calcul des Variations.

LEMME FONDAMENTAL. — *L'intégrale curviligne*

$$\mathfrak{J}_C = \int_C \{ P(x, y)x' + Q(x, y)y' \} \, ds,$$

où P *et* Q *sont des fonctions continues, est continue dans la classe des courbes dont les longueurs sont inférieures à un nombre fixe* Λ, *d'ailleurs quelconque.*

Soit

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a, b)$$

une représentation analytique des courbes considérées. Donnons-nous un nombre positif ε. Je dis qu'il existe un nombre $\rho > 0$, tel que les inégalités

$$|x(t)-x_0(t)|\leqq\rho,\qquad |y(t)-y_0(t)|\leqq\rho\qquad (a,b)$$

entraînent

$$|\mathfrak{J}_C-\mathfrak{J}_{C_0}|\leqq\varepsilon$$

pour toutes les courbes C de longueurs inférieures à Λ.

En effet, étant donné un nombre positif α, nous pouvons toujours trouver un $\rho_1>0$ et une division de C_0 en $\bar{n}$ arcs partiels

$$\widehat{A_0K_1},\quad \widehat{K_1K_2},\quad \ldots,\quad \widehat{K_{n-1}B_0},$$

tels que, si

$$(a,t_1),\quad \ldots,\quad (t_i,t_{i+1}),\quad \ldots,\quad (t_{\bar{n}-1},b)$$

est la division correspondante de (a,b) en intervalles partiels, les inégalités

$$|x(t)-\xi_i|\leqq\rho,\qquad |y(t)-\eta_i|\leqq\rho\qquad (t_i,t_{i+1}),$$
$$\rho\leqq\rho_1$$

où l'on a posé

$$\xi_i=x_0(\theta_i),\qquad \eta_i=y_0(\theta_i),$$

θ_i étant une valeur de t choisie arbitrairement dans (t_i,t_{i+1}), entraînent dans tous ces intervalles partiels

$$|P(x,y)-P(\xi_i,\eta_i)|\leqq\alpha,\qquad |Q(x,y)-Q(\xi_i,\eta_i)|\leqq\alpha.$$

Ce point résulte immédiatement de la continuité de P et Q. Posons alors

$$P(\xi_i,\eta_i)=p_i,\qquad Q(\xi_i,\eta_i)=q_i,$$
$$\mathfrak{J}'_C=\sum\int_{C^i}(p_i x'+q_i y')\,ds,$$

C^i étant sur chaque courbe C l'arc qui correspond à l'intervalle (t_i,t_{i+1}). On a

$$|\mathfrak{J}'_C-\mathfrak{J}_C|\leqq\Sigma\, 2 \text{ longueur de } C^i\times\alpha\leqq 2\Lambda\alpha;$$

par suite,

$$|\mathfrak{J}'_{C_0}-\mathfrak{J}_{C_0}|\leqq 2\Lambda\alpha.$$

Or, en vertu de la continuité de P et de Q, il existe un nombre M tel que

$$|p_i|\leqq M,\qquad |q_i|\leqq M,$$

et l'intégrale curviligne

$$\int p_1\,dx + q_1\,dy$$

prise le long d'un contour fermé est nulle.

Il en résulte

$$|\mathfrak{J}'_C - \mathfrak{J}'_{C_0}| \leqq \Sigma 4 M\rho = 4 M \bar{n}\rho,$$

et enfin

$$|\mathfrak{J}_C - \mathfrak{J}_{C_0}| \leqq 4\Lambda\alpha + 4 M \bar{n}\rho,$$

$\bar{n}$ dépendant seulement de α. Si nous prenons

$$\alpha \leqq \frac{\varepsilon}{8\Lambda}, \qquad \rho \leqq \frac{\varepsilon}{8 M \bar{n}},$$

on aura bien

$$|\mathfrak{J}_C - \mathfrak{J}_{C_0}| \leqq \varepsilon,$$

et la proposition est établie. Remarquons que l'on peut l'énoncer ainsi : *Toutes les fois que la figurative* Γ *relative à l'intégrale* $\mathfrak{J}_C$ *est un plan, cette intégrale est continue dans la classe des courbes dont les longueurs sont inférieures à un même nombre* Λ.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de M. Tonelli, dont voici l'énoncé :

Théorème de Tonelli. — *Si*

$$F_1(x, y, x', y') \geqq 0,$$

l'intégrale

$$\mathfrak{J}_C = \int_C F(x, y, x', y')\,ds$$

est semi-continue inférieure dans la classe des courbes de longueurs bornées.

Rappelons que la condition $F_1 \geqq 0$ signifie que la figurative Γ est située au-dessus de son plan tangent, ou exceptionnellement est plane. On a d'ailleurs

$$F_1 = \frac{1}{y'^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = -\frac{1}{x'\,y'} = \frac{1}{x'^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}.$$

Soit C_0 une courbe donnée. Supposons d'abord que sur C_0 la tangente varie d'une façon continue. Soient M_0 le point courant de C_0,

Π_0 le plan tangent à la figurative Γ_0, relative au point M_0, qui correspond aux valeurs (x'_0, y'_0) des dérivées en M_0. A chaque Γ on peut faire correspondre un plan tangent particulier Π, variant d'une façon continue avec (x, y) et tendant vers Π_0 quand (x, y) tend vers (x_0, y_0), et cela d'une infinité de manières. En effet, on prendra comme plan Π le plan tangent à Γ au point

$$[\varphi(x, y), \psi(x, y)],$$

φ et ψ étant deux fonctions continues telles que l'on ait sur C_0

$$x'_0(s) = \varphi[x_0(s), y_0(s)], \qquad y'_0(s) = \psi[x_0(s), y_0(s)].$$

On peut toujours trouver une infinité de fonctions φ et ψ qui satisfont aux conditions précédentes. En effet, prenons la fonction $\varphi(x, y)$. La détermination de cette fonction revient à trouver une surface continue

$$z = \varphi(x, y)$$

passant par la courbe continue

$$x = x_0(s), \qquad y = y_0(s), \qquad z = x'_0(s),$$

et il est clair que le problème a une infinité de solutions.

Ceci posé, soit $\mathfrak{I}'_C$ l'intégrale obtenue en prenant le plan Π comme figurative. Elle est de la forme

$$\mathfrak{I}'_C = \int_{C'} F_{x'}[x, y, \varphi, \psi]\, dx + F_{y'}[x, y, \varphi, \psi]\, dy$$

et l'on a, en vertu de nos hypothèses,

$$\mathfrak{I}'_{C_0} = \mathfrak{I}_{C_0}. \tag{1}$$

D'autre part, Γ étant au-dessus de Π, nous avons sur toute la courbe C

$$\mathfrak{I}_C \geqq \mathfrak{I}'_C. \tag{2}$$

D'autre part, étant donné un nombre positif M quelconque, à un $\varepsilon > 0$ on pourra faire correspondre un $\rho > 0$ tel que, pour toutes les courbes de longueurs inférieures à M, et appartenant au domaine (ρ) de C_0, on ait

$$|\mathfrak{J}'_C - \mathfrak{J}'_{C_0}| \leqq \varepsilon,$$

d'où

$$\mathfrak{J}'_C \geqq \mathfrak{J}'_{C_0} - \varepsilon,$$

et, en vertu de (1) et de (2),

$$\mathfrak{J}_C \geqq \mathfrak{J}_{C_0} - \varepsilon.$$

On peut passer maintenant au cas général, grâce à un procédé souvent employé. La seule hypothèse faite sur C_0 est que cette courbe est continue et rectifiable. Nous nous appuierons sur la propriété suivante, bien connue et facile à démontrer :

La valeur $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{J}_C$ relative à une ligne polygonale C'_0 inscrite dans C_0 tend vers $\mathfrak{J}_{C_0}$ quand C'_0 tend vers C_0.

Soit alors ε un nombre positif donné. Inscrivons dans C_0 une ligne polygonale C'_0 de n côtés, telle que

$$|\mathfrak{J}_{C_0} - \mathfrak{J}'_{C_0}| \geqq \frac{\varepsilon}{3},$$

et désignons par $C^i_0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ les arcs partiels déterminés sur C_0 par les sommets successifs de C'_0.

Nous supposons que les courbes étudiées ont une représentation analytique simultanée

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a, b),$$

de sorte que, sur toute courbe C, aux arcs C^i_0 correspondent des arcs C^i bien déterminés. Posons

$$\mathfrak{J}'_C = \sum_1^n \int_{C^i} \{ F_{x'}(x, y, \alpha_i, \beta_i) x' + F_{y'}(x, y, \alpha_i, \beta_i) y' \} \, ds,$$

où

$$\alpha_i = \cos\theta_i, \qquad \beta_i = \sin\theta_i,$$

θ_i étant l'angle de direction de la corde sous-tendue par l'arc C^i_0. Il est clair que l'on a sur toute courbe C

$$\mathfrak{J}_C \geqq \mathfrak{J}'_C,$$

car, dans chacune de n intégrales partielles, la quantité sous le signe intégral est la valeur de u en (x', y') relative au plan Π, tangent à Γ au point (α_i, β_i). Or

$$\mathfrak{J}'_{C'_0} = \mathfrak{J}_{C'_0},$$

donc

$$|\mathfrak{J}_{C_0} - \mathfrak{J}'_{C'_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, on peut toujours choisir C'_0 assez voisine de C_0 pour que l'on ait de plus

$$|\mathfrak{J}'_{C_0} - \mathfrak{J}'_{C'_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

En effet, étant donné un nombre positif arbitraire μ, on peut, en vertu de la continuité de F, trouver une division de C_0 en n arcs partiels C^i_0 telle que, en désignant par (ξ_i, η_i) les coordonnées d'un point arbitraire de C^i_0, on ait pour toutes les valeurs de i, entre 1 et n et pour tous les (x, y) relatifs à un point quelconque de C^i_0 et de la corde sous-tendue par cet arc,

$$|F_{x'}(x, y, \alpha_i, \beta_i) - F_{x'}(\xi_i, \eta_i, \alpha_i, \beta_i)| \leqq \mu,$$
$$|F_{y'}(x, y, \alpha_i, \beta_i) - F_{y'}(x, y, \alpha_i, \beta_i)| \leqq \mu.$$

On a alors, en désignant par C'_0 le polygone formé des cordes sous-tendues par les C^i_0 successifs et sa longueur par L'_0,

$$|\mathfrak{J}'_{C_0} - \mathfrak{J}'_{C'_0}| \leqq 2 L_0 \mu + 2 L_0 \mu \leqq 4 L_0 \mu.$$

Il suffit, pour établir ce point, de répéter le raisonnement qui nous a servi plus haut pour établir la continuité de $\int_C P\,dx + Q\,dy$, en posant

$$p_i = F_{x'}(\xi_i, \eta_i, \alpha_i, \beta_i), \qquad q_i = F_{y'}(\xi_i, \eta_i, \alpha_i, \beta_i)$$

et en observant que les valeurs de chaque $\int_{C^i} p_i\,dx + q_i\,dy$, prises respectivement le long de C^i_0 et le long de la corde sous-tendue par cet arc, sont égales. Ceci posé, nous aurons donc

$$|\mathfrak{J}'_{C'_0} - \mathfrak{J}_{C_0}| \leqq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Or $\mathfrak{J}'_C$, somme d'un nombre bien déterminé de fonctionnelles continues dans la classe des courbes de longueur bornée, est continue dans cette classe; par suite, il existera un nombre ρ tel que, pour toutes les C intérieures au domaine (ρ) de C_0, on ait

$$|\mathfrak{J}'_C - \mathfrak{J}'_{C_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où

$$\mathfrak{J}_C \geqq \mathfrak{J}'_C \geqq \mathfrak{J}'_{C_0} - \frac{\varepsilon}{3} \geqq \mathfrak{J}_{C_0} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2\varepsilon}{3};$$

et le théorème est établi.

Applications des modes précédents de raisonnement.

I. *Semi-continuité large.* — Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Soit l'intégrale

$$\mathfrak{J}_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds$$

la fonction F *satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x'} = 0$$

et la figurative

$$u = F(\bar{x}, \bar{y}, x', y')$$

tournant sa concavité vers les u positifs.

Étant donnée une infinité de courbes C *possédant une représentation analytique simultanée*

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a, b),$$

soit C_0 *l'une d'elles, à tout nombre positif* ε, *on peut faire correspondre deux autres nombres positifs,* ρ *et* δ, *tels que si l'on divise* (a, b) *en n intervalles partiels* (t_i, t_{i+1}) *tous inférieurs à* δ, *les inégalités*

$$|x(a) - x_0(a)| \leqq \rho, \quad \ldots, \quad |x(t_i) - x_0(t_i)| \leqq \rho, \quad \ldots, \quad |x(b) - x_0(b)| \leqq \rho,$$
$$|y(a) - y_0(a)| \leqq \rho, \quad \ldots, \quad |y(t_i) - y_0(t_i)| \leqq \rho, \quad \ldots, \quad |y(b) - y_0(b)| \leqq \rho$$

entraînent

$$\mathfrak{I}_C \geqq \mathfrak{I}_{C_0} - \varepsilon.$$

Nous dirons alors que $\mathfrak{I}_C$ possède la semi-continuité large.

Revenons à l'intégrale

$$\mathfrak{I}'_C = \sum_1^n \int_{C^i} F_{x'}(x, y, \alpha_i, \beta_i)\, dx + F_{y'}(x, y, \alpha_i, \beta_i)\, dy,$$

que nous avons définie à la page 420.

D'après ce que nous avons vu plus haut, il existe un nombre δ_1 tel que, pour toutes les lignes polygonales inscrites dans C_0 dont les n côtés sont tous inférieurs à δ, on ait

(3) $$|\mathfrak{I}_{C_0} - \mathfrak{I}'_{C_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, la corde sous-tendue par l'arc C_0^i a pour longueur

$$l_i = \sqrt{[x_0(t_{i+1}) - x_0(t_i)]^2 + [y_0(t_{i+1}) - y_0(t_i)]^2}.$$

En vertu de la continuité de $x_0(t), y_0(t)$, on pourra trouver un nombre δ tel que, pour toute division de (a, b) en intervalles moindres que δ, on ait pour les l_i correspondantes

$$l_i \leqq \delta_1.$$

L'inégalité (3), où $\mathfrak{I}'$ correspond à une de ces divisions, sera alors toujours satisfaite. Soit donc

(S) $$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n$$

une des divisions de (a, b) en intervalles partiels que nous venons de définir. Les Δ_i sont tous inférieurs à δ et n'empiètent pas les uns sur les autres. Désignons par $\overline{\Delta}_1$ le nouvel intervalle obtenu en prenant les k premiers intervalles de (S). On a

$$\overline{\Delta}_1 = \Delta_1 + \ldots \Delta_k,$$

le nombre k étant tel que les inégalités

$$\overline{\Delta}_1 \leqq \delta < \overline{\Delta}_1 + \Delta_{k+1}$$

soient satisfaites.

Désignons de même par $\overline{\Delta}_2$ l'intervalle $\Delta_{k+1}+\ldots+\Delta_{k+p}$, où

$$\overline{\Delta}_2 \leqq \delta \leqq \overline{\Delta}_2 + \Delta_{k+p+1},$$

et ainsi de suite. Nous formons une division

$$(\overline{\mathrm{S}}) \qquad \overline{\Delta}, \quad \overline{\Delta}_2, \quad \ldots, \quad \overline{\Delta}_{\overline{n}}$$

de (a, b) en $\overline{n}$ intervalles inférieurs à δ. On peut remarquer que les extrémités des $\overline{\Delta}_i$ font partie des points de division déterminés sur (a, b) par les intervalles de S. *Je dis alors que $\overline{n}$ reste inférieur à un nombre fixe* K. Posons en effet

$$\Delta'_i = \overline{\Delta}_i + (\Delta)_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \overline{n}-1),$$

$(\Delta)_i$ désignant l'intervalle de (S) qui suit le dernier intervalle de cette suite faisant partie de $\overline{\Delta}_i$. On a

$$\delta < \Delta'_i < \overline{\Delta}_i + \overline{\Delta}_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \overline{n}-1),$$

d'où

$$(n-1)\delta < \Delta'_i \leqq \Sigma(\overline{\Delta}_i + \overline{\Delta}_{i+1}) \leqq 2(b-a).$$

Considérons maintenant une courbe C dont les coordonnées courantes satisfont aux inégalités

$$|x(t_i) - x_0(t_i)| \leqq \rho, \qquad |y(t_i) - y_0(t_i)| \leqq \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

chaque intervalle (t_i, t_{i+1}) étant inférieur à δ. Prenons comme suite (S) la suite

$$(a, t_1), \quad \ldots, \quad (t_i, t_{i+1}), \quad \ldots, \quad (t_{p-1}, b).$$

Formons la suite $(\overline{\mathrm{S}})$. Les intervalles qui la composent seront

$$(a, \overline{t}_1), \quad \ldots, \quad (\overline{t}_j, \overline{t}_{j+1}), \quad \ldots, \quad (\overline{t}_{\overline{p}-1}, b)$$

et nous aurons

$$|x(\overline{t}_j) - x_0(\overline{t}_j)| \leqq \rho, \qquad |y(\overline{t}_j) - y_0(\overline{t}_j)| \leqq \rho.$$

Formons alors l'intégrale $\overline{\mathfrak{I}}'$ qui correspond aux intervalles de $(\overline{\mathrm{S}})$. Observons que toute intégrale de la forme

$$\int \mathrm{F}_{x'}(x, y, \alpha_i, \beta_i)\,dx + \mathrm{F}_{y'}(x, y, \alpha_i, \beta_i)\,dy$$

porte sur une différentielle exacte, d'après l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x'} = 0.$$

Or, en vertu de la continuité de $F_{x'}$ et de $F_{y'}$, et des inégalités

$$|\alpha_i| \leqq 1, \qquad |\beta_i| \leqq 1,$$

il existe un nombre M tel que l'on ait

$$|F_{x'}(x, y, \alpha_i, \beta_i)| < M, \qquad |F_{y'}(x, y, \alpha_i, \beta_i)| < M$$

pour tous les (x, y) de la portion du plan renfermant les courbes considérées.

On aura alors

$$|\bar{\mathfrak{I}}'_{C^i} - \bar{\mathfrak{I}}'_{C_0^i}| < 8M\rho$$

et

$$|\bar{\mathfrak{I}}'_{C} - \bar{\mathfrak{I}}'_{C_0}| < 8MK\rho.$$

Nous avons d'autre part

$$|\bar{\mathfrak{I}}'_{C_0} - \mathfrak{I}_{C_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où, en prenant $\rho < \frac{\varepsilon}{16MK}$,

$$\mathfrak{I}_C \geqq \mathfrak{I}'_C \geqq \mathfrak{I}_{C_0} - \varepsilon.$$

II. *Semi-continuité faible des intégrales*

$$\mathfrak{I}_C = \int_a^b F(x, y, x', y', x'', y'')\,dt$$

dans la classe des courbes dont les dérivées secondes par rapport à t des coordonnées du point courant sont bornées dans leur ensemble. — Soit (K) l'ensemble des courbes possédant les propriétés suivantes :

1° Les courbes de (K) ont une représentation analytique simultanée

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a, b).$$

2° Sur chacune d'elles, les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ existent partout et sont absolument continues. Elles sont donc aussi à variation bornée, et par suite les dérivées $x''(t)$, $y''(t)$ existent, sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de t de mesure nulle.

3° Il existe un nombre positif M tel que

$$|x''(t)| \leqq M, \qquad |y''(t)| \leqq M. \tag{4}$$

On convient de poser, en tout point t_1 où l'une des dérivées secondes, x'' par exemple, manque :

$$x''(t_1) = 0.$$

De ces hypothèses résulte l'existence de l'intégrale (au sens de M. Lebesgue), sur chaque courbe C de (K),

$$\mathfrak{J}_C = \int_a^b F(x, y, x', y', x'', y'')\, dt.$$

Ceci posé, prenons un système d'axes rectangulaires $Ox''y''u$ et à chaque système de nombres

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')$$

associons une *figurative* Γ définie par l'équation

$$u = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}', x'', y''). \tag{5}$$

Nous supposerons que Γ *tourne sa concavité vers les* u *positifs.*

On a alors le théorème suivant :

Soit C_0 *une courbe de* (K). *Étant donné un* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\rho > 0$ *tel que l'on ait*

$$\mathfrak{J}_C \geqq \mathfrak{J}_{C_0} - \varepsilon$$

pour toutes les courbes C *de* (K) *qui satisfont aux inégalités*

$$\left\{ \begin{array}{ll} |x(t) - x_0(t)| \leqq \rho, & |x'(t) - x'_0(t)| \leqq \rho; \\ |y(t) - y_0(t)| \leqq \rho, & |y'(t) - y'_0(t)| \leqq \rho. \end{array} \right. \tag{6}$$

Pour établir cette proposition, nous suivrons une marche analogue à celle que nous avons employée pour démontrer le théorème de M. Tonelli.

Démontrons d'abord la continuité faible dans la classe (K) de l'intégrale

$$\mathfrak{J}'_C = \int_a^b \{ P(x, y, x', y')\, x'' + Q(x, y, x', y')\, y'' + R(x, y, x', y') \}\, dt,$$

les fonctions P, Q, R étant continues par rapport à (x, y, x', y'). Le raisonnement est le même que celui employé pour établir la continuité de l'intégrale curviligne

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

dans la classe des courbes de longueurs bornées. Reprenons-le rapidement pour plus de clarté. Soit μ un nombre positif fixe. Nous supposerons

$$\rho \leqq \mu.$$

Alors, pour les courbes satisfaisant aux inégalités (6), nous aurons, en vertu de la continuité de $x'_0(t)$ et de $y'_0(t)$,

$$|x'(t)| \leqq A, \qquad |y'(t)| \leqq B,$$

A et B étant les mêmes pour toutes.

Il en résulte l'existence d'un nombre positif M_1 tel que l'on ait pour ces courbes

$$|P| \leqq M_1, \qquad |Q| \leqq M_1, \qquad |R| \leqq M_1.$$

Étant donné un nombre positif α, nous pouvons trouver une division de l'intervalle (a, b) en $\overline{n}$ intervalles partiels, et un nombre ρ_1 $(0 < \rho_1 \leqq \mu)$ tels que, en posant

$$\xi_i = x_0(\theta_i), \qquad \xi'_i = x'_0(\theta_i);$$
$$\eta_i = y_0(\theta_i), \qquad \eta'_i = y'_0(\theta_i),$$

où θ_i est une valeur de t prise dans (t_i, t_{i+1}), les inégalités (6), où l'on a fait $\rho \leqq \rho_1$, entraînent, pour toutes les valeurs de i ne dépassant pas $\overline{n}$,

$$|P(x, y, x', y') - P(\xi_i, \eta_i, \xi'_i, \eta'_i)| \leqq \alpha \qquad (t_i \leqq t \leqq t_{i+1}),$$

et deux autres inégalités analogues en Q et R. Il en résulte immédiatement la continuité faible de

$$\int_a^b R(x, y, x', y')\,dt.$$

Pour démontrer la continuité faible de

$$\int_a^b (P x'' + Q y'')\,dt,$$

nous poserons

$$\mathfrak{I}''_C = \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} (p_i x'' + q_i y'')\, dt$$

ou

$$p_i = P(\xi_i, \eta_i, \xi'_i, \eta'_i), \qquad q_i = Q(\xi_i, \eta_i, \xi'_i, \eta'_i).$$

On démontre facilement que $\mathfrak{I}''_C$ tend uniformément vers

$$\int_C \{ P(x, y, x', y')x'' + Q(x, y, x', y')y'' \} dt$$

quand α tend vers zéro.

Or, et c'est ici qu'intervient l'absolue continuité des dérivées $x'(t)$, $y'(t)$, on a

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (p_i x'' + q_i y'')\, dt = p_i[x'(t_{i+1}) - x'(t_i)] + q_i[y'(t_{i+1}) - y(t_i)].$$

On a d'autre part

$$|p_i| < M_1, \qquad |q_i| < M_1.$$

Donc $\mathfrak{I}''_C$ tend vers $\mathfrak{I}''_{C_0}$ quand ρ tend vers zéro, et il en résulte que $\mathfrak{I}'_C$ tendra aussi vers $\mathfrak{I}'_{C_0}$, ce qui établit la proposition que nous avions en vue.

Cas général. — Passons maintenant à l'étude de l'intégrale

$$\mathfrak{I}_C = \int_a^b F(x, y, x', y', x'', y'')\, dt$$

dans la classe (K).

Soit C_0 une courbe de cette classe; supposons d'abord que $x''_0(t)$ et $y''_0(t)$ existent partout et sont continues. Il est alors possible de trouver deux fonctions continues

$$\varphi(x, y), \qquad \psi(x, y),$$

telles que l'on ait sur C_0

$$x''_0(t) = \varphi[x_0(t), y_0(t)], \qquad y''_0(t) = \psi[x_0(t), y_0(t)].$$

Considérons l'intégrale

$$\mathfrak{I}'_C = \int_a^b \{ F_x[x, y, x', y', \varphi, \psi]x'' + F_y(\ldots)y'' + F[\ldots] - \varphi F_x[\ldots] - \psi F_y[\ldots] \} dt,$$

obtenue en prenant pour figurative le plan Π tangent à Γ au point $[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$. D'après la façon dont on a choisi φ et ψ, on aura

$$\mathfrak{I}_{C_0} = \mathfrak{I}'_{C_0}$$

et, en vertu de l'hypothèse que Γ tourne sa concavité vers les u positifs,

$$\mathfrak{I}_C \geqq \mathfrak{I}'_C.$$

Or $\mathfrak{I}'_C$ possède la continuité faible dans la classe (K). $\mathfrak{I}_C$ possèdera donc la semi-continuité inférieure faible dans cette classe.

Examinons maintenant le cas où $x''_0(t), y''_0(t)$ sont discontinues. Ces fonctions, du moins, restent toujours *quasi continues;* c'est-à-dire qu'étant donné un entier n, on peut faire correspondre à $x''_0(t)$ un ensemble fermé E_n, constitué par des valeurs de t dans l'intervalle (a, b), et à $y''_0(t)$ un autre ensemble fermé E'_n tels que $x''_0(t)$ soit continue dans E_n, $y''_0(t)$ dans E'_n, et que l'on ait de plus :

$$\text{mesure } E_n > (b-a) - \frac{1}{n},$$

$$\text{mesure } E'_n > (b-a) - \frac{1}{n}.$$

On peut alors former une fonction continue $x''_{n_0}(t)$ qui coïncide avec $x''_0(t)$ dans E_n. D'après la façon dont s'obtient cette fonction, on aura

$$|x''_{n_0}(t)| \leqq M.$$

De même, on peut former une fonction continue $y''_{n_0}(t)$ dans tout (a, b) coïncidant avec $y''_0(t)$ dans E'_n et vérifiant l'inégalité

$$|y''_{n_0}(t)| \leqq M,$$

M étant le nombre qui figure dans les inégalités (4) [1].

Déterminons alors deux fonctions continues

$$\varphi_n(x, y), \quad \psi_n(x, y)$$

---

[1] Pour plus de détails sur les fonctions quasi continues, *cf.* L. TONELLI *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, (Bologne, Zanichelli, éditeur), t. I, p. 131, 132, 140.

par les conditions

$$x''_{n_0}(t) = \varphi_n[x_0(t), y_0(t)], \qquad y''_{n_0}(t) = \psi_n[x_0(t), y_0(t)],$$

et soit Π_n le plan tangent à Γ au point (φ_n, ψ_n). Désignons par $\mathfrak{I}'_{n_C}$ l'intégrale obtenue en prenant Π_n comme figurative. Cette intégrale ne surpasse jamais $\mathfrak{I}_C$ sur toute courbe C de (K) et possède de plus la continuité faible dans cette classe. Pour démontrer le théorème, il suffira donc maintenant de démontrer que, étant donné un nombre positif arbitraire α, on peut trouver un entier n tel que

$$|\mathfrak{I}'_{n_{C_0}} - \mathfrak{I}'_{C_0}| \leqq \alpha.$$

Le premier membre de l'inégalité précédente est de la forme

$$\Delta = \left| \int_a^b \Phi(t, x''_0, y''_0)\, dt - \int_a^b \Phi(t, x''_{n_0}, y''_{n_0})\, dt \right|,$$

Φ restant en valeur absolue inférieure à un nombre positif fixe M. En posant

$$\Delta_1 = \left| \int_a^b \Phi(t, x''_0, y''_0)\, dt - \int_a^b \Phi(t, x''_0, y''_{n_0})\, dt \right|,$$

$$\Delta_2 = \left| \int_a^b \Phi(t, x''_0, y''_{n_0})\, dt - \int_a^b \Phi(t, x''_{n_0}, y''_{n_0})\, dt \right|,$$

on a

$$\Delta \leqq \Delta_1 + \Delta_2.$$

Or, on voit immédiatement que

$$\Delta_1 \leqq \frac{2M}{n}, \qquad \Delta_2 \leqq \frac{2M}{n}.$$

Donc

$$\Delta \leqq \frac{4M}{n}$$

et le théorème est démontré; on peut observer que nous ne supposons nullement l'homogénéité de F, ni par rapport à (x', y'), ni par rapport à (x'', y'').

Recherche directe des minima des intégrales

$$\mathfrak{I}_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds.$$

— Cette question se trouvant traitée d'une façon très détaillée dans le Tome II de l'Ouvrage de M. Tonelli, *Fundamenti di Calcolo delle Variazioni*, nous nous bornerons à en indiquer ici le principe. Il consiste à établir que les longueurs des courbes de la suite minimisante sont bornées dans leur ensemble. Elles ont alors au moins une courbe d'accumulation rectifiable C_0, faisant partie de la classe des courbes considérées, si celle-ci est une *classe complète*, ce qu'on suppose toujours, et l'on a bien, en désignant par i la borne inférieure des $\mathfrak{I}_C$,

$$\mathfrak{I}_{C_0} = i,$$

en vertu de la semi-continuité de cette intégrale. Or l'étude d'une propriété quelconque des courbes d'une suite minimisante est, en général, très difficile. On la simplifie un peu, dans le cas actuel, au moyen du lemme suivant :

« Si, pour une classe complète (K) de courbes contenues dans une région limitée du plan, on peut trouver une fonction $\Phi(\alpha)$, définie et continue pour toutes les valeurs réelles de α, jamais négative et jamais décroissante, telle que, C étant une courbe quelconque de (K), de longueur L, on ait

$$L \leqq \Phi(\mathfrak{I}_C). \text{ »}$$

Les longueurs des courbes de la suite minimisante sont bornées dans leur ensemble.

Montrons d'abord qu'on ne peut avoir $i = -\infty$. Soit

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

la suite minimisante. On devrait avoir

$$\mathfrak{I}_{C_n} < -n,$$

d'où

$$L_n \leqq \Phi(\mathfrak{I}_{C_n}) \leqq \Phi(-n) \leqq \Phi(-1).$$

Mais on a toujours une inégalité de la forme

$$\mathfrak{I}_{C_n} \geqq -ML_n,$$

où M désigne un nombre tel que

$$|F(x, y, x', y')| \leqq M$$

pour tous les (x, y) de la région du plan considéré et pour les x' et y' inférieurs à 1 en valeur absolue. Il en résulte

$$\mathfrak{J}_{C_n} \geqq -M\Phi(-n) \geqq -M\Phi(-1),$$

i ne pourrait donc égaler $-\infty$; i est donc finie et par suite

$$\mathfrak{J}_{C_n} \leqq i + \frac{1}{n},$$

$$L_n \leqq \Phi\left(i + \frac{1}{n}\right) \leqq \Phi(i+1),$$

ce qui établit la proposition.

Application. — Montrons que si l'on a

$$F > 0, \qquad F_1 \geqq 0,$$

le minimum de $\mathfrak{J}_C$ existe dans toute classe complète de courbes contenues dans une portion bornée du plan. En effet, en vertu de la continuité de F, il existe un nombre M tel que

$$F(x, y, x', y') > m > 0 \qquad (x'^2 + y'^2 = 1),$$

d'où

$$\mathfrak{J}_C \geqq m L,$$

$$L \leqq \frac{1}{m} \mathfrak{J}_C.$$

Posons donc

$$\Phi(\alpha) = \frac{\alpha}{m} \qquad \text{pour} \quad \alpha \geqq 0,$$

$$\Phi(\alpha) = 0 \qquad \text{pour} \quad \alpha < 0.$$

Le lemme précédent montre que les longueurs des courbes de la suite minimisante sont bornées dans leur ensemble. Or, de l'inégalité $F_1 \geqq 0$ résulte la semi-continuité inférieure de $\mathfrak{J}_C$ dans tout ensemble de courbes de longueurs inférieures à un nombre fixe. La suite minimisante aura donc une courbe d'accumulation C_0 fournissant le minimum cherché.

Minimum de l'intégrale $\int_0^1 F(x, y, x', y', x'', y'')\,dt$. — Considérons une classe [K] de courbes renfermant :

1° Une infinité de courbes Σ dont les longueurs sont toutes inférieures à un même nombre M, telles que les inégalités

$$(7) \qquad \left|\frac{x'(t_2)-x'(t_1)}{t_2-t_1}\right| \leqq M_1, \qquad \left|\frac{y'(t_2)-y'(t_1)}{t_2-t_1}\right| \leqq M_1,$$

où t désigne le rapport $\frac{s}{L}$ de l'arc à la longueur de la courbe, soient satisfaites.

2° Les courbes d'accumulation des courbes Σ sous réserve qu'elles jouissent des propriétés indiquées plus haut au 1°.

Il en résulte que chaque fonction $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ est *absolument continue*, puisque son rapport incrémental est borné en valeur absolue; elle est donc aussi à *variation bornée*, et par conséquent les dérivées $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ relatives à chaque courbe existent, sauf sur un ensemble de mesure nulle, et restent en valeur absolue inférieures à M_1 en vertu de (7). Remarquons, pour fixer les idées, qu'on peut prendre comme courbes Σ des courbes ayant une courbure en chaque point inférieure à un nombre donné M' et des longueurs plus petites qu'un autre nombre M.

Nous avons en effet, en désignant par α l'angle de la tangente avec l'axe des x,

$$\frac{dx}{dt} = L\cos\alpha, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -L^2\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = -L^2\rho\sin\alpha.$$

D'après les hypothèses

$$|\rho| \leqq M', \qquad L \leqq M,$$

on a

$$\left|\frac{d^2x}{dt^2}\right| \leqq M^2M', \qquad \left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| \leqq M^2M',$$

d'où deux inégalités du type (7).

Ceci posé, montrons que l'intégrale

$$\mathfrak{J}_C = \int_0^1 F(x, y, x', y', x'', y'')\,dt$$

atteint son minimum dans la classe [K], *pourvu que la figurative* Γ *définie par l'équation* (5) *de la page* 426 *tourne sa concavité vers les* u *positifs.*

Soit $[K_1]$ un ensemble extrait de $[K]$.

Considérons les $x'(t)$ associés aux courbes de $[K_1]$. On a

$$|x'(t)| = L\,|x'(s)| \leqq M.$$

Ces fonctions sont donc également bornées; d'après (7), elles sont aussi également continues. Elles admettront donc au moins une fonction d'accumulation continue $x'_0(t)$ qui satisfait en outre à l'inégalité

$$\left|\frac{x'_0(t_2) - x'_0(t_1)}{t_2 - t_1}\right| \leqq M_1.$$

Les $y'(t)$ ont, de même, une fonction d'accumulation $y'_0(t)$ vérifiant l'inégalité analogue et l'on peut toujours déterminer $x'_0(t)$, $y'_0(t)$ de manière qu'il existe deux suites

$$(8)\qquad \begin{cases} x'_1(t), & x'_2(t), & \ldots, & x'_n(t), & \ldots, \\ y'_1(t), & y'_2(t), & \ldots, & y'_n(t), & \ldots, \end{cases}$$

convergeant respectivement vers $x'_0(t)$ et $y'_0(t)$, et dans lesquelles les termes de mêmes indices sont relatifs à la même courbe de $[K_1]$. Or on a

$$x(t) = a + \int_0^t x'(t)\,dt,$$

$$y(t) = b + \int_0^t y'(t)\,dt.$$

Les courbes considérées étant contenues dans une région limitée du plan, l'ensemble des nombres a est borné; il en est de même de celui des nombres b. Les a et les b ont donc respectivement des valeurs d'accumulation a_0 et b_0 que l'on peut toujours déterminer de telle sorte que des suites (8) on puisse extraire deux nouvelles suites qui convergent, l'une vers $x'_0(t)$, l'autre vers $y'_0(t)$, tandis que les a associés convergent vers a_0, les b vers b_0. Posons alors

$$x_0(t) = a_0 + \int_0^t x'_0(t)\,dt,$$

$$y_0(t) = b_0 + \int_0^t y'_0(t)\,dt;$$

il est alors clair que la courbe C_0, dont les équations paramétriques sont

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t) \qquad (0, 1),$$

est une courbe d'accumulation des courbes de $[K_1]$. De plus, on a bien

$$t = \frac{s_0}{L_0}.$$

En effet, l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{x_i'^2(t) + y_i'^2(t)}\, dt = L_i$$

tend vers

$$\int_0^1 \sqrt{x_0'^2(t) + y_0'^2(t)}\, dt = L_0.$$

Or

$$ds_0 = \sqrt{x_0'^2(t) + y_0'^2(t)}\, dt$$

et $\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}$ tend vers $\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}$. Mais

$$\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} = L_i \qquad [\text{car } x_i'(t) = L_i x_i'(s)].$$

Il en résulte

$$\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2} = L_0;$$

d'où

$$ds_0 = L_0\, dt.$$

Pour $t = 0$, nous sommes à la première extrémité de C_0. On aura donc

$$s_0 = L_0 t.$$

Considérons maintenant une suite minimisante pour $\mathfrak{J}_C$ dans $[K]$. D'après ce que nous venons de voir, cette suite a au moins une courbe d'accumulation C_0 faisant partie de $[K]$, et sur cette courbe $\mathfrak{J}_C$ sera semi-continue inférieurement dans l'ensemble des courbes de la suite minimisante. L'intégrale $\mathfrak{J}_C$ atteint donc bien son minimum sur C_0.

Minimum d'une classe particulière d'intégrales. — Si l'on cherche à exprimer d'une façon abstraite et le plus généralement possible le principe de la Méthode directe du Calcul des Variations, on est amené à formuler ainsi le problème :

1° Étant donnée une courbe C_0, prenons un nombre positif ε arbitraire. Quelles sont les conditions (α) à imposer à C_0 et les conditions (β) à imposer aux courbes C pour que l'on ait

$$\mathfrak{I}_C \geqq \mathfrak{I}_{C_0} - \varepsilon,$$

les conditions (α) ne dépendant pas de ε?

2° Étant donnée une classe (K) de courbes et une suite minimisante (Σ) pour $\mathfrak{I}_C$, existe-t-il dans (K) une courbe C_0 satisfaisant à (α), et telle qu'il y ait toujours des courbes de (Σ) satisfaisant à (β) quel que soit ε?

Dans l'affirmative, C_0 fournit le minimum absolu de $\mathfrak{I}_C$ dans (K), car i désignant toujours la borne inférieure de $\mathfrak{I}_C$, on aura bien pour les C_n de (Σ)

$$i \leqq \mathfrak{I}_{C_0} \leqq \mathfrak{I}_{C_n} + \varepsilon \leqq i + \frac{1}{n} + \varepsilon.$$

Ainsi, dans la méthode de MM. Hilbert et Lebesgue, les conditions (α) consistent à imposer aux courbes C d'être continues et rectifiables. Quant aux conditions (β) elles imposent, en supposant toujours $F_1 \geqq 0$, aux courbes C d'avoir leurs longueurs inférieures à un même nombre A et d'être intérieures à un domaine (ρ) convenablement petit de C_0. (Théorème de M. Tonelli.)

Étant donnée la suite minimisante (Σ) relative à une intégrale $\mathfrak{I}_C$ dans une classe (K) de courbes, on doit donc chercher s'il existe dans cette classe une courbe C_0 telle que, dans tout domaine (ρ) de cette courbe, il y ait des courbes de (Σ) de longueurs inférieures à un nombre fini A. La courbe C_0 ainsi déterminée fournira, quand elle existe, le minimum de $\mathfrak{I}_C$. Pratiquement, on considère une classe renfermant ces courbes d'accumulations (classe complète) et l'on cherche les conditions à imposer à $\mathfrak{I}_C$ pour que les longueurs des courbes de (Σ) soient bornées dans leur ensemble.

Nous allons maintenant donner une autre application des considérations générales développées plus haut. Considérons la fonction de ligne

$$\mathfrak{I}_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds,$$

où

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x'} = 0, \qquad F_1 \geqq 0.$$

On peut prendre, par exemple, l'intégrale

$$\int_C F(x', y')\, ds,$$

qui rentre dans le type étudié. Nous avons vu que $\mathfrak{I}_C$ possède alors la *semi-continuité large*.

Soient (K) une classe de courbes et (Σ) la suite minimisante relative à $\mathfrak{I}_C$. Si (Σ) admet une courbe de *pseudo-accumulation* C_0 continue et rectifiable, on voit immédiatement que, si C_0 fait partie de (K), cette courbe fournit le minimum absolu de $\mathfrak{I}_C$ dans (K).

Par exemple, prenons comme classe (K) celle qui est formée avec les courbes

$$y = \sin nx\ (0, \pi) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Toute courbe de (K) étant en même temps une courbe de pseudo-accumulation, il en résulte que le minimum absolu de $\mathfrak{I}_C$ existe toujours dans (K).

Plus généralement, prenons une classe (K_1) formée d'une infinité de courbes continues et rectifiables, situées dans une région bornée du plan, *et renfermant ses courbes de pseudo-accumulation, et d'accumulation quand elles sont continues et rectifiables*. On peut prendre par exemple pour K_1 l'ensemble des courbes joignant deux points donnés.

D'après ce que nous avons démontré à la fin du Chapitre II, la suite minimisante (Σ) a toujours au moins une courbe de pseudo-accumulation ou d'accumulation C_0. Soit i la borne inférieure de $\mathfrak{I}_C$ dans (K). Posons

$$\mathfrak{I}_{C_0} = i.$$

Si C_0 n'est pas continue ou n'est pas rectifiable, cette égalité servira de définition à ce qu'il faut entendre par valeur de l'intégrale

$$\int_C F(x, y, x', y')\, ds$$

prise sur C_0.

Au contraire, si C_0 est continue et rectifiable, on aura bien

$$\mathfrak{I}_{C_0} = i,$$

$\mathfrak{I}_{C_0}$ ayant cette fois sa signification habituelle.

Nous pouvons donc dire, en résumé, que les intégrales du type étudié atteignent toujours leur minimum dans toute classe qui renferme les courbes d'accumulation et de pseudo-accumulation de ses éléments.

Il était intéressant de remarquer en passant l'existence d'une forme d'intégrales auxquelles on peut appliquer les idées de Hilbert sans risques de contradiction. C'est ce que la notion de courbe de pseudo-accumulation et celle de semi-continuité large nous ont permis de faire.

CHAPITRE IV.

LA MÉTHODE D'ADJONCTION DU CALCUL DES VARIATIONS.

Position du problème. — Dans le Chapitre précédent nous avons exposé une méthode qui nous a déjà permis de démontrer simplement le théorème de M. Tonelli et de donner en quelque sorte les raisons intuitives de la semi-continuité, ainsi que certaines extensions de ce théorème. Mais il y a plus, et notre attention se portera sur le point suivant : l'idée même qui nous a conduit à établir la semi-continuité peut devenir le principe d'une méthode autonome du *Calcul des Variations*, méthode déjà rencontrée dans des cas particuliers par un grand nombre d'auteurs [1], mais dont l'étude systématique n'avait pas encore été faite, et dont on peut formuler ainsi le principe :

Étant donnée une courbe C_0, *pour comparer les valeurs d'une*

[1] *Voir* surtout HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations*, et E. VESSIOT, *Essai sur la propagation par ondes* (*Annales de l'École Normale*, t. 26, 1909); *Sur la propagation par ondes et le problème de Mayer* (*Journal de Mathématiques*, t. 9, 1913). On trouvera dans le second de ces Mémoires une étude complète (p. 66 et suiv.) du problème de Mayer interprété physiquement comme la recherche des courbes le long desquelles la durée de propagation d'un ébranlement est minimum, et une méthode qui permet, grâce notamment à l'introduction d'une intégrale portant sur une différentielle totale d'établir que chaque trajectoire obtenue fournit bien le minimum cherché, pourvu qu'on impose aux courbes considérées un voisinage convenable avec elles.

fonction de ligne I_C, *prise par* C_0, *avec les valeurs qu'elle prend sur d'autres courbes* C, *nous nous servirons d'un intermédiaire et à* I_C *nous cherchons à adjoindre une intégrale curviligne* I'_C *telle que*

$$I_{C_0} = I'_{C_0}; \qquad I_C \geqq I'_C.$$

Nous ferons l'étude de I'_C : *à toute égalité de la forme*

$$I'_C = I'_{C_0} + A$$

correspond pour I_C *l'inégalité*

$$I_C \geqq I_{C_0} + A.$$

C'est ainsi, par exemple, que de la continuité de I'_C on a déduit la semi-continuité inférieure de I_C : dans la démonstration du théorème de M. Tonelli, nous avons adjoint à I_C l'intégrale

$$I'_C = \int_C F_{x'}(x, y, \varphi, \psi)\,dx + F_{y'}(x, y, \varphi, \psi)\,dy,$$

où l'on a, sur C_0,

$$x'_0 = \varphi(x_0, y_0); \qquad y'_0 = \psi(x_0, y_0).$$

Nous donnerons le nom de *Méthode d'adjonction* au procédé qui vient d'être décrit pour rappeler l'idée qui en est à la base, et nous raisonnerons pour plus de simplicité sur des intégrales de forme ordinaire ([1]),

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y')\,dx \qquad (b > a).$$

Dans tout ce qui va suivre, on considérera seulement des fonctions admettant des dérivées premières et secondes, ou plus généralement des dérivées d'ordre assez élevé pour que soient valables nos raisonnements ultérieurs.

Ceci posé, il y a deux façons principales d'adjoindre à I_C une intégrale curviligne I'_C suivant que l'on fait ou non entrer la fonction inconnue y parmi les variables indépendantes de l'équation qui définit la figurative. Occupons-nous d'abord du dernier cas.

([1]) C'est de l'extremum fort de ces intégrales qu'il s'agit dans ce qui suit.

Étude des intégrales $\int_a^b f(x, y, y')dx$. — Considérons la figuration définie dans un système d'axes $Oy'u$ par l'équation

$$u = f(\bar{x}, \bar{y}, y'),$$

et supposons qu'elle tourne sa concavité vers les u positifs, ou qu'elle se réduise à une droite. C'est ce qui aura lieu si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geqq 0.$$

A l'intégrale

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

adjoignons l'intégrale curviligne

$$I'_C = \int_a^b [f(x, y, \varphi) - \varphi f_\varphi(x, y, \varphi)]\, dx + f_\varphi(x, y, \varphi)\, dy,$$

la fonction continue $\varphi(x, y)$ étant astreinte à la condition

$$y'_0(x) = \varphi[x, y_0(x)].$$

On aura bien, en vertu de nos hypothèses,

$$I_{C_0} = I'_{C_0}, \qquad I_C \geqq I'_C,$$

cette dernière relation résultant de ce que $f(x, y, y')$ l'emporte sur $f(x, y, \varphi) + (y' - \varphi) f_\varphi(x, y, \varphi)$ d'après le sens de la concavité. Appliquons alors à I'_C la formule de Green. On a, en supposant que C et C_0 ont les mêmes extrémités,

$$I'_C = I'_{C_0} + \iint_{(A)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial \varphi} - \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial \varphi} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\} dx\, dy,$$

d'où

$$(1) \quad I_C \geqq I_{C_0} + \iint_{(A)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial \varphi} - \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial \varphi} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\} dx\, dy.$$

L'intégrale double est étendue à l'aire (A) comprise entre les deux courbes $y = y_0(x)$ et $y = y(x)$, avec les conventions de signe bien connues. On doit remplacer dans l'expression des dérivées secondes de f, y' par φ. Étudions l'inégalité précédente.

Cherchons d'abord à annuler identiquement la quantité sous le signe intégral. On aura alors

$$I_C \geqq I_{C_0},$$

pour toutes les courbes C ayant les mêmes extrémités que C_0.

Or, en tenant compte de la condition imposée à φ,

$$y'_0(x) = \varphi[x, y_0(x)], \tag{2}$$

on trouve que C_0 doit être une courbe intégrale de l'équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

car on a sur C_0

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + \varphi_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \frac{dy_0}{dx} = \frac{d\varphi_0}{dx} = y''_0.$$

Or, on peut trouver en général une famille de courbes extrémales Σ dont la génératrice coïncide initialement avec C_0, telle que, en posant en chaque point (x, y),

$$\varphi(x, y) = y',$$

y' étant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ prise en (x, y) sur l'extrémale passant par ce point, la fonction φ soit définie et continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre; φ sera alors une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial \varphi} - \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial \varphi} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

satisfaisant à la condition (2), d'où le résultat annoncé.

Il y a une analogie évidente entre le raisonnement qui précède et la manière dont Weierstrass obtient les conditions suffisantes pour qu'un arc d'extrémale fournisse effectivement le minimum de l'intégrale étudiée; nous renvoyons pour l'étude de cette théorie au Tome III du *Cours d'analyse* de M. Goursat, à partir de la page 605. Notons toutefois que la méthode d'adjonction nous y a amené d'une manière toute naturelle; nous verrons qu'elle nous permet d'aller plus loin, et de traiter le cas où, dans les fonctions de ligne étudiées, la quantité sous le signe intégral dépend non seulement de la fonction inconnue y

et de sa dérivée première, mais encore de dérivées d'ordre supérieur.

Revenons pour le moment à l'étude de l'inégalité (1) dont nous allons tirer encore une conséquence.

Variations unilatérales. — Prenons comme expression de φ celle qui est la plus simple possible, c'est-à-dire posons

$$\varphi(x, y) = y'_0(x).$$

L'inégalité (1) devient

$$I_C \geqq I_{C_0} + \int_a^b dx \int_{y_0}^{y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y'_0} - y'_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'_0} - y''_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2_0} \right\} dy;$$

supposons que l'intégrale qui figure au second membre de l'inégalité précédente soit positive. On en tirera alors

$$I_C \geqq I_{C_0}.$$

Soit une courbe C_0 sur laquelle $y''_0(x)$ est continue, et qui satisfait à la relation

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_0}\right) > 0.$$

Il existera alors un domaine $(\mathcal{D})$ englobant C_0, tel que si (x, y) désigne un point intérieur à $(\mathcal{D})$ on ait

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y'_0} - y'_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'_0} - y''_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2_0} \geqq 0$$

[on suppose toujours dans l'expression de ces dérivées y' remplacée par $y'_0(x)$]. Soit C une courbe intérieure à $(\mathcal{D})$ et ayant les mêmes extrémités que C_0, ne la traversant pas, et telle que le sens de parcours du contour $(C_0 - C)$ soit le sens direct (sens dont il faut faire tourner Ox pour l'amener sur Oy par une rotation moindre que π). On aura pour toutes ces courbes

$$I_C \geqq I_{C_0}.$$

Remarquons que, quand $f(x, y, y')$ a la forme remarquable

$$y\,F(x) + \Phi(x, y'),$$

on a

$$I_C \geqq I_{C_0} + \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_0}\right) \right] (y - y_0)\, dx.$$

Les considérations précédentes s'appliquent sans peine aux intégrales de forme paramétrique

$$I_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds.$$

On les étend facilement aux intégrales doubles, comme nous allons le voir.

Intégrales doubles. — Nous nous proposons de comparer la valeur de

$$I_S = \iint_{(A)} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

prise sur une surface donnée S_0 limitée par un contour C_0 avec celles qu'elle prend sur toutes les autres surfaces limitées par C_0.

Ici, la méthode d'adjonction consistera à adjoindre à I_S une intégrale de surface

$$I'_S = \iint_{(S)} \{ A(x, y, z)\cos\alpha + B(x, y, z)\cos\beta + C(x, y, z)\cos\gamma \}\, d\sigma,$$

telle que, sur une surface donnée S_0, on ait $I_S = I'_{S_0}$, et sur toute autre surface, $I_S \geqq I'_S$.

A chaque point $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de l'espace associons la figurative ayant pour équation

$$u = F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, p, q)$$

dans un système trirectangle $(Opqu)$. *Supposons qu'elle tourne sa concavité vers les u positifs*, ce qui aura lieu si l'on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} < 0.$$

A l'intégrale I_S adjoignons alors

$$I'_S = \iint_{(A)} \{ pF_\varphi(x, y, z, \varphi, \psi) + qF_\psi(x, y, z, \varphi, \psi) \\ + F(\ldots) - \varphi F_\varphi(\ldots) - \psi F_\psi(\ldots) \}\, dx\, dy.$$

Les fonctions φ et ψ satisfaisant aux conditions

$$\varphi(x, y, z_0) = p_0(x, y), \qquad \psi(x, y, z_0) = q_0(x, y),$$

$p_0(x, y)$ et $q_0(x, y)$ étant les dérivées partielles $\frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}$. On a bien alors

$$I_{S_0} = I'_{S_0} \qquad \text{et} \qquad I_S \geqq I'_S.$$

Or nous pouvons écrire

$$-p\, dx\, dy = \cos\alpha\, d\sigma, \qquad -q\, dx\, dy = \cos\beta\, d\sigma, \qquad dx\, dy = \cos\gamma\, d\sigma.$$

D'où

$$I'_S = \iint_{(S)} [-F_\varphi \cos\alpha - F_\psi \cos\beta + (F - \varphi F_\varphi - \psi F_\psi)\cos\gamma]\, d\sigma.$$

Dans l'expression des dérivées partielles de F, on a remplacé p et q respectivement par φ et ψ. Considérons alors toutes les surfaces S limitées par le contour C_0 de S_0. La formule de Green nous permet de mettre la différence $I'_S - I'_{S_0}$ sous forme d'intégrale triple étendue, avec les conventions habituelles, au volume V compris entre S_0 et S. On aura alors

$$(3) \quad I_S \geqq I_{S_0} + \iiint_{(V)} \left[-\frac{\partial}{\partial x}(F_\varphi) - \frac{\partial}{\partial y}(F_\psi) + \frac{\partial}{\partial z}(F - \varphi F_\varphi - \psi F_\psi) \right] dx\, dy\, dz.$$

Un calcul facile nous permet d'écrire de la façon suivante la quantité sous le signe intégral :

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi\, \partial x} - \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi\, \partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi\, \partial \psi}$$
$$- \frac{\partial^2 F}{\partial \psi\, \partial y} - \psi \frac{\partial^2 F}{\partial \psi\, \partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi\, \partial \psi} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2}.$$

Pour définir φ et ψ on peut prendre par exemple une famille de surfaces engendrée par une surface variable Σ qui coïncide initialement avec S_0, et poser, en chaque point de l'espace,

$$\varphi(x, y, z) = p(x, y), \qquad \psi(x, y, z) = q(x, y),$$

p et q étant les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ prises en (x, y) sur la surface Σ passant par le point (x, y, z). L'expression précédente devient alors

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right),$$

en vertu des relations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

et des relations analogues en ψ.

On tire de ce que nous venons d'exposer des conclusions analogues à celles obtenues dans l'étude des intégrales simples. Ainsi, *supposons qu'on ait sur* S_0 :

$$\frac{\partial F}{\partial z_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p_0}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q_0}\right) > 0; \tag{4}$$

on en tire, en supposant toujours que la figurative tourne sa concavité vers les u positifs, que l'on a pour toutes les surfaces S, *contenues dans un certain domaine, limitées par le contour de* S_0 *et situées au-dessus de cette dernière, l'inégalité*

$$I_S \geqq I_{S_0}.$$

En effet nous pouvons poser

$$\varphi(x, y, z) = p_0(x, y), \qquad \psi(x, y, z) = q_0(x, y),$$

et dans l'inégalité (3) la quantité sous le signe intégral est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial p_0\,\partial x} - p_0\frac{\partial^2 F}{\partial p_0\,\partial z} - \frac{\partial p_0}{\partial x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial p_0^2} - \frac{\partial q_0}{\partial x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial p_0\,\partial q_0}\\ - \frac{\partial^2 F}{\partial q_0\,\partial y} - q_0\frac{\partial^2 F}{\partial q_0\,\partial z} - \frac{\partial p_0}{\partial y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial p_0\,\partial q_0} - \frac{\partial q_0}{\partial y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q_0^2}.\end{aligned}$$

En vertu de (4) il existe autour de S_0 un domaine (ω_0) tel que la quantité précédente soit positive. Alors, dans l'inégalité (3), l'intégrale triple sera positive pour toutes les surfaces situées au-dessus de S_0 et intérieures à (ω'), d'où la conclusion annoncée. Remarquons enfin que si l'on a

$$F(x, y, z. p, q) = z F(x, y) + \Phi(x, y, y, q),$$

l'inégalité (3) devient

$$I_S \geqq I_{S_0} + \iint_{(A)} \left[\frac{\partial F}{\partial z_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p_0}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q_0}\right) \right] (z - z_0)\, dx\, dy.$$

Application de la méthode d'adjonction aux intégrales

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y', y'')\, dx \qquad (b > a).$$

A chaque système de nombres $(\overline{x}, \overline{y})$ associons une *figurative* Γ définie par l'équation

$$u = f(\overline{x}, \overline{y}, y', y'')$$

dans un système trirectangle $(O y' y'' u)$.

Notre hypothèse fondamentale est encore que cette surface tourne sa concavité vers les u positifs. C'est ce qui aura lieu si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y''}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial f}{\partial y''^2} < 0.$$

Soit C_0 une courbe donnée, représentée par la relation

$$y = y_0(x),$$

et soient $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ deux fonctions continues satisfaisant aux relations

$$(5) \qquad y'_0(x) = \varphi_1[x, y_0(x)], \qquad y''_0(x) = \varphi_2[x, y_0(x)].$$

Considérons l'intégrale

$$I_C^{(1)} = \int_a^b \{ y'' f_{\varphi_2}(x, y, \varphi_1, \varphi_2) + y' f_{\varphi_1}(\ldots) + f(\ldots) - \varphi_2 f_{\varphi_2}(\ldots) - \varphi_1 f_{\varphi_1}(\ldots) \}\, dx$$

(on a remplacé partout dans l'expression de f et de ses dérivées y' et y'' respectivement par φ_1 et φ_2).

Nous avons

$$I_C \geqq I_C^{(1)}, \qquad I_{C_0} = I_{C_0}^{(1)}.$$

Avant d'aller plus loin, fixons certaines notations que nous retrouverons dans la suite. Soit $u[x, y, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ une fonction de $x, y, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ qui est par l'intermédiaire des n fonctions $\varphi_i(x, y)$ une fonction de x, y, que nous désignerons par $U(x, y)$. La notation $\frac{\partial u}{\partial x}$ représentera la dérivée partielle de u par rapport à x, y et les φ_i étant traités comme des constantes. Au contraire $\frac{\partial}{\partial x} u$ désigne $\frac{\partial U}{\partial x}$. De même pour les dérivées par rapport à y.

Intégrons alors par parties le terme en y'' dans l'intégrale $I_C^{(1)}$. Nous obtenons

$$(6)\quad I_C^{(1)} = A + \int_a^b \left\{ -y'^2 \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_2} + y' \left[f_{\varphi_1} - \frac{\partial}{\partial x} f_{\varphi_2} \right] + f - \varphi_2 f_{\varphi_2} - \varphi_1 f_{\varphi_1} \right\} dx,$$

où

$$A = y'(b) f_{\varphi_2}[b, y(b), \varphi'_1(b), \varphi''_2(b)] - y'(a) f_{\varphi_2}[a, y(a), \varphi_1(a), \varphi_2(a)].$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode d'adjonction à la nouvelle intégrale qui figure au second membre de (6) et qui est de la forme

$$\int_a^b f^{(1)}(x, y, y')\, dx.$$

Pour cela, considérons la figurative qui a pour équation dans un système $O_1 y' u_1$

$$u_1 = -y'^2 \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_2} + y' \left(f_{\varphi_1} - \frac{\partial}{\partial x} f_{\varphi_2} \right) + f - \varphi_2 f_{\varphi_2} - \varphi_1 f_{\psi_1};$$

elle tournera sa concavité vers les u_1 positifs, ou se réduira à une droite si l'on a

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_1}(x, y, \varphi_1, \varphi_2) \leqq 0.$$

Nous formerons alors l'intégrale

$$I_C^{(2)} = \int_a^b \{ y' f_{\varphi_1}^{(1)}(x, y, \varphi_1) + f(x, y, \varphi_1) - \varphi_1 f_{\varphi_1}(x, y, \varphi_1) \} dx$$

ou encore

$$I_C^{(2)} = \int_a^b \left[\varphi_1^2 \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_2} + f - \varphi_2 f_{\varphi_2} - \varphi_1 f_{\varphi_1} \right] dx + \left[-2\varphi_1 \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_2} - \frac{\partial}{\partial x} f_{\varphi_2} + f_{\varphi_1} \right] dy.$$

On a alors, pour toutes les courbes C *ayant les mêmes extrémités* *que* C_0 *et qui lui sont tangentes en ces points*,

$$\mathrm{I}_C - \mathrm{I}_{C_0} = \mathrm{I}_C - \mathrm{I}_{C_0}^{(1)} \geqq \mathrm{I}_C^{(1)} - \mathrm{I}_{C_0}^{(1)} = \int_a^b f^{(1)}\,dx - \int_a^b f_0^{(1)}\,dx$$
$$= \int_a^b f^{(1)}\,dx - \mathrm{I}_{C_0}^{(2)} \geqq \mathrm{I}_C^{(2)} - \mathrm{I}_{C_0}^{(2)},$$

ou finalement

$$\mathrm{I}_C - \mathrm{I}_{C_0} \geqq \mathrm{I}_C^{(2)} - \mathrm{I}_{C_0}^{(2)}, \tag{8}$$

$\mathrm{I}_C^{(2)}$ est une intégrale curviligne

$$\int_C \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy.$$

Formons la quantité

$$\mathrm{E}(x, y) = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y},$$

elle est de la forme

$$\mathrm{E}(x, y) = \mathrm{F}\left(x, y, \varphi_p, \frac{\partial^{i+j}\varphi_p}{\partial x^i\,\partial y^j}\right) \qquad \begin{pmatrix} p = 1, 2 \\ i + j \leqq 2 \end{pmatrix}.$$

Soit alors Σ une famille de courbes renfermant la courbe C_0 et balayant une certaine portion du plan. En chaque point (x, y) posons

$$\varphi_1(x, y) = y'(x), \qquad \varphi_2(x, y) = y''(x), \tag{9}$$

y' et y'' étant les dérivées prises en (x, y) sur la courbe de Σ passant par ce point. Nous supposerons que φ_1 et φ_2 sont bien déterminées, ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres. Nous allons alors établir la relation

$$\mathrm{E}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right). \tag{10}$$

Considérons la fonction

$$f^{[1]}(x, y, y'),$$

on a, d'après ce que nous avons vu à propos des intégrales

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

la relation suivante :

$$\mathrm{E}(x, y) = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y'}\right); \tag{11}$$

montrons donc l'identité des seconds membres de (10) et de (11). Les quantités figurant dans $f^{(1)}$ devant être prises sur une courbe donnée de (Σ), en vertu de (9), on peut, une fois les dérivations effectuées, remplacer φ_1 et φ_2 par y' et y'', ou faire l'inverse. L'expression de $f^{(1)}$ étant

$$f^{(1)}(x, y, y') = \left(f_{\varphi_1} - \frac{d}{dx} f_{\varphi_2}\right) y' + f - \varphi_2 f_{\varphi_2} - \varphi_1 f_{\varphi_1},$$

un calcul facile nous donne

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - y'' \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_2} - y' \left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f_{\varphi_2} + y' \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{\varphi_2}\right),$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y'} = \left[f_{\varphi_1} - \frac{d}{dx} f_{\varphi_2}\right] - y' \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_2},$$

d'où l'on tire immédiatement le résultat annoncé.

Supposons donc que parmi les courbes intégrales de l'équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) = 0,$$

il existe une famille de courbes Σ dont fasse partie C_0 (faisceau spécial). On aura alors

$$E(x, y) = 0,$$

d'où

$$I_C^{(2)} = I_{C_0}^{(2)}$$

et

$$I_C \geqq I_{C_0},$$

pour toutes les courbes C ayant mêmes extrémités que C_0 qui lui sont tangentes en ces points, pourvu que l'inégalité (7) soit satisfaite.

Il existe en général de telles courbes Σ. On peut toujours, en particulier, s'en assurer quand on sait intégrer l'équation d'Euler. Observons que si I_C est de la forme

$$I_C = \int_a^b \{ y F(x) + \Phi(x, y, y', y'') \} \, dx,$$

on peut prendre comme courbes Σ celles obtenues en imprimant à une courbe intégrale particulière de l'équation d'Euler une translation parallèle à Oy, car si $y_0(x)$ est une solution de cette équation, $y_0 + h$ en sera aussi une dans le cas actuel.

Exemple. — Soit l'intégrale

$$I_C = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-y^2 + y''^2)\, dx.$$

L'équation d'Euler relative à cette intégrale est

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0,$$

et son intégrale générale est

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sh} x + C_4 \operatorname{ch} x.$$

La figurative relative à I_C a pour équation dans $Oy'y''u$

$$u = -\bar{y}^2 + y''^2;$$

c'est un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à Oy' et qui tourne donc sa concavité vers les u positifs.

Considérons l'extrémale C_0 ayant pour équation

$$y = \sin x, \qquad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

Nous pouvons prendre comme courbes Σ les courbes

$$y = C \sin x,$$

d'où

$$y' = C \cos x; \qquad y'' = -C \sin x.$$

Par suite

$$\varphi_1(x, y) = y \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \varphi_2(x, y) = -y.$$

L'inégalité (7) s'écrit ici

$$\frac{\partial}{\partial y} 2\varphi_2 \leqq 0 \qquad \text{ou} \qquad -2 \leqq 0;$$

elle est toujours satisfaite. On aura donc, dans le cas actuel,

$$I_C \geqq I_{C_0}$$

pour toutes les courbes ayant les mêmes extrémités que C_0 et qui lui sont tangentes en ces points.

Variations unilatérales. — THÉORÈME. — *Soit* C_0 *une courbe satisfaisant à l'inégalité*

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_0}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''_0}\right) > 0, \tag{12}$$

on aura

$$I_C \geqq I_{C_0},$$

pour toutes les courbes C *d'un certain domaine englobant* C_0 *qui ont les mêmes extrémités que cette courbe et lui sont tangentes en ces points, pourvu qu'elles restent au-dessus de* C_0, *que la figurative tourne sa concavité vers les u positifs, et que l'on ait en outre*

$$f_{y''_0 y_0}(x, y_0, y'_0, y''_0) < 0. \tag{13}$$

En effet, nous poserons ici

$$\varphi_1(x, y) = y'_0(x), \qquad \varphi_2(x, y) = y''_0(x);$$

l'inégalité (7) deviendra

$$f_{y''_0 y}[x, y, y'_0(x), y''_0(x)] \leqq 0. \tag{7'}$$

Si (12) et (13) sont satisfaites, il existera un domaine englobant C_0, à l'intérieur duquel les inégalités (7') et $E(x, y) > 0$ seront satisfaites, d'où

$$I_C^{(2)} - I_{C_0}^{(2)} \geqq 0$$

et la conclusion annoncée.

Semi-continuité de $\int_a^b f(x, y, y', y'')\,dx$. — En s'appuyant sur la continuité de $I_C^{(2)}$ on en déduit les conditions de la semi-continuité de I_C. D'une façon précise, supposons que la figurative tourne sa concavité vers les u positifs et que l'inégalité (13) soit satisfaite. Si $y = y_0(x)$, (a, b) est l'équation d'une courbe C_0, la fonction $y_0(x)$ admettant des dérivées continues des quatre premiers ordres, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un $\rho > 0$ tel que, pour toutes les fonctions y intérieures au domaine (ρ) de C_0 et satisfaisant aux inégalités

$$|y'(a) - y'_0(a)| \leqq \rho, \qquad |y'(b) - y'_0(b)| \leqq \rho,$$

on ait

$$I_C \geqq I_{C_0} - \varepsilon.$$

Remarque sur les intégrales $\mathrm{I}_{\mathrm{C}} = \int_a^b f[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx$. — On peut se proposer d'étendre les considérations précédentes aux intégrales de ce type. A chaque système $(\bar{x}, \bar{y})$ nous associerons encore une figurative ayant pour équation dans un système fondamental $[\mathrm{O}y', \ldots, y^{(n)}u]$

$$u = f[\bar{x}, \bar{y}, y', \ldots, y^{(n)}];$$

soit alors C_0 une courbe donnée, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, n fonctions de (x, y) satisfaisant aux conditions

$$(9') \qquad y'_0 = \varphi_1(x, y_0), \qquad \ldots, \qquad y_0^{(n)} = \varphi_n(x, y_0).$$

Considérons l'intégrale $\mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(1)}$ obtenue en remplaçant la figurative par la multiplicité linéaire à n dimensions qui lui est tangente au point $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$. On a

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(1)} = \int_a^b \{ y^{(n)} f_{\varphi_n}(x, y, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) + \ldots y' f_{\varphi_1} + f - \varphi_n f_{\varphi_n} \ldots - \varphi_1 f_{\varphi_1} \}\,dx;$$

en intégrant par parties le terme en $y^{(n)}$, on met $\mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(1)}$ sous la forme d'une somme d'un terme tout intégré et d'une intégrale

$$\int_a^b f^{(1)}[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]\,dx,$$

où

$$\begin{aligned} f^{(1)} = &- \left(f_{\varphi_n y} + f_{\varphi_n \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \ldots f_{\varphi_n \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) y' y^{(n-1)} \\ &+ \left(f_{\varphi_{n-1}} - f_{\varphi_n \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \ldots - f_{\varphi_n \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) y^{(n-1)} \\ &+ f_{\varphi_{n-2}} y^{(n-2)} + \ldots f_{\varphi_1} y' + f - \varphi_n f_{\varphi'_n} \ldots - \varphi_1 f_{\varphi_1}. \end{aligned}$$

Appliquons à $f^{(1)}$ le procédé que nous avons appliqué à f, c'est-à-dire remplaçons $f^{(1)}$ par l'équation de la multiplicité linéaire à $n - 1$ dimensions tangente en $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ à la figurative relative relative à $f^{(1)}$, on obtient ainsi une intégrale $\mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(2)}$ que l'on mettra sous la forme d'une somme de deux termes, dont le premier provient de l'intégration par parties du terme en $y^{(n-1)}$, et dont l'autre peut s'écrire

$$\int_a^b f^{(2)}[x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}]\,dx;$$

en continuant à procéder ainsi nous finirons par arriver à une intégrale curviligne

$$I_C^{n} = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Considérons, comme plus haut, la quantité

$$E(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y};$$

elle est de la forme

$$E(x, y) = F\left(x, y, \varphi_p, \frac{\partial^{i+j}\varphi_p}{\partial x^i \partial y^j}\right) \qquad \begin{pmatrix} p = 1, 2, \ldots, n \\ i+j \leqq n \end{pmatrix}.$$

Soit alors Σ une famille de courbes dont fait partie C_0. Nous poserons en chaque point (x, y)

$$\varphi_1(x, y) = y'_1(x), \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(x, y) = y^{(n)}(x).$$

Alors, si les φ sont bien déterminées et continues ainsi que leurs dérivées de n premiers ordres, on aura

$$(14) \qquad E(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right].$$

Nous avons déjà vu que cette relation était vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$. Pour l'établir dans le cas général, il suffit de montrer que si elle est vraie pour $n - 1$ elle est vraie pour n. Considérons alors $f^{(1)}[x, y, \ldots, y^{(n-1)}]$, comme elle ne dépend pas de dérivées d'ordre supérieur à $n - 1$, la proposition est vraie pour elle, par hypothèse. Or, d'après ce qui a été dit plus haut, la fonction $E(x, y)$ relative à f et celle qui est relative à $f^{(1)}$ sont identiques. Or nous avons supposé que l'on a

$$(15) \quad E(x, y) = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y'}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(n-1)}}\right),$$

et la proposition que nous avons en vue sera établie si nous montrons l'identité des seconds membres des relations (14) et (15), en tenant compte des équations (9'). Revenons à l'expression de $f^{(1)}$. Les quantités figurant dans $f^{(1)}$ devant être prises sur une courbe donnée de Σ, on peut encore, une fois les dérivations effectuées, remplacer φ_1, φ_2, ..., φ_n, par $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ respectivement, ou faire l'inverse. Un calcul facile nous permet alors d'écrire

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - y^{(n)} \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_n} - y^{(n-1)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f_{\varphi_n} + y' \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{\varphi_n} \right],\\
\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y'} &= - y^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial y} f_{\varphi_n} + f_{\varphi_1},\\
\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y''} &= f_{\varphi_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(n-2)}} &= f_{\varphi_{n-2}},\\
\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(n-1)}} &= f_{\varphi_{n-1}} - \frac{d}{dx} f_{\varphi_n}.
\end{aligned}
$$

D'où l'on tire immédiatement le résultat annoncé.

Ceci posé, nous avons, d'après la façon dont on a formé les $\mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(i)}$,

$$
\mathrm{I}_{\mathrm{C}_0}^{(1)} = \mathrm{I}_{\mathrm{C}_0}, \qquad \mathrm{I}_{\mathrm{C}_0}^{(2)} = \int_a^b f^{(1)}[x, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}]\, dx, \qquad \ldots,
$$
$$
\mathrm{I}_{\mathrm{C}_0}^{(n)} = \int_a^b f^{(n-1)}(x, y_0, y'_0)\, dx.
$$

Soit alors $y(x)$ une fonction satisfaisant aux relations

$$
(16) \quad y^{(i)}(a) - y_0^{(i)}(a) = 0, \qquad y^{(i)}(b) - y_0^{(i)}(b) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).
$$

On alors

$$
\mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(i)} - \mathrm{I}_{\mathrm{C}_0}^{(i)} = \int_a^b f^{(i)}\, dx - \int_a^b f_0^{(i)}\, dx,
$$

car les termes tout intégrés disparaissent dans la différence.

Supposons que l'on ait

$$
(17) \qquad \int_a^b f^{(i)}[x, y, y'_1, \ldots, y^{(n-i)}]\, dx \geqq \mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(i+1)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),
$$

il est clair que l'on aura ainsi

$$
\mathrm{I}_{\mathrm{C}} - \mathrm{I}_{\mathrm{C}_0} \geqq \mathrm{I}_{\mathrm{C}}^{(n)} - \mathrm{I}_{\mathrm{C}_0}^{(n)}.
$$

En effet

$$\mathrm{I_C - I_{C_0} = I_C - I_{C_0}^{(1)} \geqq I_C^{(1)} - I_{C_0}^{(1)}} = \int_a^b f^{(1)}\,dx - \int_a^b f_0^{(1)}\,dx = \int_a^b f^{(1)}\,dx - \mathrm{I}_{C_0}^{(2)}$$

$$\geqq \mathrm{I}_C^{(2)} - \mathrm{I}_{C_0}^{(2)} = \int_a^b f^{(2)}\,dx - \int_a^b f_0^{(2)}\,dx = \int_a^b f^{(2)}\,dx - \mathrm{I}_{C_0}^{(3)}$$

$$\geqq \mathrm{I}_C^{(3)} - \mathrm{I}_{C_0}^{(3)} = \ldots \geqq \mathrm{I}_C^{(n)} - \mathrm{I}_{C_0}^{(n)}.$$

Or nous avons vu que l'intégrale $\mathrm{I}_C^{(n)}$ est une intégrale curviligne. Si elle porte sur une différentielle totale, on aura *pour toutes les courbes satisfaisant aux égalités* (16) *et aux inégalités* (17)

$$\mathrm{I_C \geqq I_{C_0}}.$$

C'est ce qui aura lieu si, parmi les courbes intégrales de l'équation d'Euler il existe une famille de courbes Σ et si $\mathrm{C_0}$ est une intégrale de cette équation, car on aura alors

$$\mathrm{E}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0,$$

d'où

$$\mathrm{I}_C^{(n)} = \mathrm{I}_{C_0}^{(n)}.$$

Il existe, en général, de telles courbes Σ. On peut toujours, en particulier, s'en assurer quand on sait intégrer l'équation d'Euler. Observons que si $\mathrm{I_C}$ est de la forme

$$\mathrm{I_C} = \int_a^b \{ y\mathrm{F}(x) + \Phi[x, y', \ldots, y^{(n)}] \} \, dx,$$

on peut prendre comme courbes Σ celles obtenues en imprimant à une courbe intégrale particulière de l'équation d'Euler une translation parallèle à Oy, car si $y_0(x)$ est une solution de cette équation, $y_0 +$ const. en sera aussi une dans le cas actuel.

Revenons maintenant à l'étude de l'inégalité (17). On a

$$\mathrm{I}_C^{(i+1)} = \int_a^b [y^{(n-i)} f^{(i)}_{\varphi_{n-i}}(x, y, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-i}) + \ldots y' f^{(i)}_{\varphi_1}(\ldots)$$
$$+ f^{(i)} - \varphi_{n-i} f^{(i)}_{\varphi_{n-i}}(\ldots) \ldots - \varphi_1 f^{(i)}_{\varphi_1}]\,dx;$$

nous allons calculer la différence $\Delta^{(i)}$ entre $f^{(i)}[x, y', y', \ldots, y^{(n-i)}]$ et la quantité sous le signe intégral. Si l'on a

$$\Delta^{(i)} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les inégalités (9) seront satisfaites.

Supposons $\Delta^{(0)} \geqq 0$, c'est-à-dire que la figurative

$$u = f[\bar{x}, \bar{y}, y', \ldots, y^{(n)}]$$

tourne, dans l'hyperespace à $n+1$ dimensions, sa concavité vers les u positifs. Par contre $i \geqq 1$ les figuratives ne tournent plus leur concavité dans un sens donné. En effet, on a pour $1 \leqq i \leqq n-1$

$$f^{(i)} = a_1^{(i)}(x, y) y^{n-i} y' + a_2^{(i)}(x, y) y^{(n-i)} + a_3^{(i)}(x, y) y^{(n-i-1)} + \ldots$$
$$+ a_{n-i+1}^{(i)}(x, y) y' + b^{(i)}(x, y).$$

Un calcul facile nous donne

$$\Delta^{(i)} = a_1^{(i)} [y^{(n-i)} - \varphi_{n-i}] (y' - \varphi_1).$$

On voit que cette quantité ne gardera pas en général un signe constant; cela ne pourra avoir lieu que si l'on a

$$i = n - 1,$$

alors en effet

$$\Delta^{(i)} = a_1^{(i)} (y' - \varphi_1)^2.$$

Mais si $n > 2$, les Δ précédant $\Delta^{(n-1)}$ ne conserveront pas de signe constant. Au contraire, si $n = 2$, il n'y aura qu'une seule Δ; on aura $i = 1$, et

$$\Delta^{(1)} = a_1 (y' - \varphi_1)^2.$$

On voit donc que pour $n > 2$ nous ne pouvons pas tirer de conclusions générales; il faudra dans chaque cas étudier le signe des $\Delta^{(i)}$, ou d'une manière plus générale le signe des intégrales

$$\int_a^b a_1^{(i)} [y^{(n-i)} - \varphi_{n-i}] (y' - \varphi_1)\, dx.$$

Si elles sont positives ou nulles, et si la figurative tourne sa concavité vers les u positifs, on aura $I_C \geqq I_{C_0}$ pourvu que les courbes C vérifient les équations (16). Au contraire, si $n = 2$, il suffira, pour que la conclusion précédente soit valable, que l'on ait simplement, comme on l'a vu au paragraphe précédent [1],

$$a_1^1 \geqq 0.$$

Seconde méthode d'adjonction. — Nous avons dit au début de ce Chapitre qu'il y avait deux façons principales d'adjoindre à une intégrale I_C une intégrale curviligne I'_C. Jusqu'à présent nous n'avons étudié qu'une seule de ces méthodes, celle qui consiste à faire entrer comme variables dans l'équation de la figurative uniquement les dérivées de la fonction y. Nous allons maintenant y faire rentrer y elle-même. On aura ainsi, n étant le degré le plus élevé des dérivées figurant dans f, une figurative à $n+1$ dimensions, définie dans un espace à $n+2$ dimensions. Notre hypothèse fondamentale sera encore que cette multiplicité ne descend jamais au-dessous de sa multiplicité linéaire tangente à $n+1$ dimensions. On voit donc que, pour exprimer ce fait, nous serons conduits à des inégalités plus restrictives que celles que nous avons rencontrées dans la théorie précédente; mais pour $n \geqq 2$, cette dernière supposait en outre satisfaites d'autres inégalités qui par leurs formes ne permettaient pas de tirer des conclusions générales. Au contraire, la nouvelle méthode nous permettra, avec une extrême simplicité, de traiter les cas que la première n'avait pu étudier.

1° *Intégrales* :

$$I_C = \int_a^b f[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\, dx \qquad (b > a).$$

A chaque valeur $\bar{x}$ de x, faisons correspondre la figurative Γ ayant pour équation dans un système fondamental $Oyy' \ldots y^{(n)} u$

$$u = f[\bar{x}, y, y', \ldots, y^{(n)}],$$

[1] a_1^1 en effet est égal au premier membre changé de signe de l'inégalité (7).

et *supposons que, dans l'hyperespace à $n+2$ dimensions elle tourne sa concavité vers les u positifs.*

Soit Π la multiplicité linéaire à $n+1$ dimensions, tangente à Γ au point

$$[y_0(\bar{x}),\quad y'_0(\bar{x}),\quad \ldots,\quad y_0^{(n)}(\bar{x})].$$

Désignons par I'_C l'intégrale obtenue en prenant Π comme figurative. On a

$$\begin{aligned} I'_C = \int_a^b \{ & y^{(n)} f_{y_0^n}[x, y_0, \ldots, y_0^{(n)}] + \ldots + y f_{y_0}(\ldots) \\ & + f(\ldots) - y_0^{(n)} f_{y_0^n}(\ldots) \ldots - y_0 f_{y_0}(\ldots) \} \, dx, \end{aligned}$$

et d'après nos hypothèses,

$$I_C \geqq I'_C, \qquad I_{C_0} = I'_{C_0}, \qquad \text{d'où} \qquad I_C - I_{C_0} \geqq I'_C - I'_{C_0}.$$

Or I'_C est la somme de deux intégrales; l'une est

$$I''_C = \int_a^b \{ y^{(n)} f_{y_0^{(n)}}(\ldots) + \ldots + y' f_{y'_0}(\ldots) + y f_{y_0} \} \, dx,$$

l'autre porte sur une expression de la forme $\varphi(x)\,dx$, où φ est bien déterminée, et disparaîtra dans la différence $I'_C = I'_{C_0}$. On aura donc

$$I_C - I_{C_0} \geqq I''_C - I'_{C_0}.$$

Soit alors C_0 une extrémale, et C une courbe telle que

$$y^{(i)}(a) - y_0^{(i)}(a) = 0, \qquad y^{(i)}(b) - y_0^{(i)}(b) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Je dis que l'on a

$$I_C \geqq I_{C_0}.$$

En effet, intégrons par parties le terme en $y^{(n)}$. On a

$$I''_C = A^{(1)} + \int_a^b \{ [f_{y_0^{n-1}} - \frac{d}{dx} f_{y_0^n}] \, y^{(n-1)} + \ldots y f_{y_0} \} \, dx,$$

en intégrant par parties le terme en $y^{(n-1)}$ de la nouvelle intégrale, et ainsi de suite, on a finalement

$$\mathrm{I}''_{\mathrm{C}} = \mathrm{A}^{(1)} + \mathrm{A}^{(2)} + \ldots \mathrm{A}^{(n)} + \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_0}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial f}{\partial y_0^{(n)}}\right] \right\} (y - y_0)\, dx;$$

d'où

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C}} - \mathrm{I}_{\mathrm{C}_0} \geqq \mathrm{A}^{(1)} - \mathrm{A}_0^{(1)} + \mathrm{A}^{(2)} - \mathrm{A}_0^{(2)} + \ldots + \mathrm{A}^{(n)} - \mathrm{A}_0^{(n)} + \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_0}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_0^{(n)}}\right) \right\} (y - y_0)\, dx.$$

Or, d'après nos hypothèses, toutes les différences $\mathrm{A}^{(i)} - \mathrm{A}_0^{(i)}$ sont nulles ainsi que l'intégrale du second membre de l'inégalité précédente, d'où le résultat annoncé.

Semi-continuité de $\int_a^b f[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\, dx$. — L'analyse précédente permet de trouver les conditions qui doivent être remplies pour assurer la semi-continuité inférieure de cette intégrale. Nous supposons toujours que la figurative Γ tourne sa concavité vers les u positifs.

Étant donné un nombre positif ε, on voit immédiatement qu'il existe un $\rho > 0$ tel que si $y_0(x)$ admet des dérivées continues des $2n$ premiers ordres, on ait pour les courbes C intérieures au domaine (ρ) de C_0 et satisfaisant à

$$|y^{(i)}(a) - y_0^{(i)}(a)| \leqq \rho, \qquad |y^{(i)}(b) - y_0^{(i)}(b)| \leqq \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

l'inégalité de semi-continuité

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C}} \geqq \mathrm{I}_{\mathrm{C}_0} - \varepsilon \quad [1].$$

Intégrales $\int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\, dx$. — Considérons la

---

[1] On voit que dans des cas très étendus ces intégrales posséderont même la semi-continuité large. Il suffit, pour le voir, de reprendre les raisonnements des pages 422 et suiv., en remplaçant la ligne polygonale inscrite, par la ligne formée de morceaux d'extrémales ayant avec C_0 un contact d'ordre $n-1$ en chacun de ses points d'intersection avec cette dernière, et de tenir compte de la semi-continuité inférieure de I_{C}.

figurative

$$u = f(\bar{x}, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots y'_n),$$

et supposons que dans l'espace à $2n+1$ dimensions elle tourne sa concavité vers les u positifs. Soit $y_1^{(0)}(x), y_2^{(0)}(x), \ldots, y_n^{(0)}(x)$, n fonctions données que l'on peut considérer comme définissant une courbe C_0 dans l'espace à $n+1$ dimensions. A l'intégrale

$$I_C = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\, dx \qquad (b > a),$$

adjoignons l'intégrale I'_C obtenue en remplaçant la figurative par son plan tangent au point $[y_1^0(x), \ldots, y_n^0, y_1'^0, \ldots, y_n'^0]$. On peut scinder I'_C en $n+1$ intégrales, la première portant sur une fonction de x bien déterminée, et par suite disparaissant dans la différence $I'_C - I'_{C_0}$, les n autres étant de la forme

$$\int_a^b \left(y_i \frac{\partial f}{\partial y_i^0} + y' \frac{\partial f}{\partial y_i'^0} \right) dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et nous aurons, en intégrant par parties les termes en y'_i, une inégalité de la forme

$$I_C - I_{C_0} \geqq \sum_1^n [A^{(i)} - A_0^{(i)}] + \sum_1^n \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_i^0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'^0} \right) \right] (y_i - y_i^0)\, dx.$$

Si C a les mêmes extrémités que C_0, on a $A^{(i)} = A_0^{(i)}$. Il en résulte que si C_0 satisfait aux équations

$$\frac{\partial f}{\partial y_i^0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'^0} \right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura bien

$$(18) \qquad I_C \geqq I_{C_0}.$$

Les inégalités exprimant que la figurative tourne sa concavité vers les u positifs sont plus restrictives que celles de la théorie classique. Mais tandis que dans cette dernière l'inégalité (18) a lieu pour les courbes C appartenant à un certain domaine de C_0, dans le cas actuel elle est satisfaite pour toutes les courbes C (on suppose bien entendu que ces courbes ont les mêmes extrémités que C_0). Remarquons, de plus, que la méthode s'étendrait sans peine au cas où f dépendrait des n fonctions inconnues $y_1, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées jusqu'à un ordre quelconque p.

Intégrales doubles. — Soit l'intégrale

$$I_S = \int\int_{(A)} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy.$$

A chaque $(\bar{x}, \bar{y})$ faisons correspondre une figurative ayant pour équation dans un système fondamental $Ozpqu$

$$u = F(\bar{x}, \bar{y}, z, p, q),$$

et supposons qu'elle tourne sa concavité vers les u positifs. A I_S adjoignons l'intégrale

$$I'_S = \int\int_{(A)} \left\{ z \frac{\partial F}{\partial z_0} + p \frac{\partial F}{\partial p_0} + q \frac{\partial F}{\partial q_0} + \varphi(x, y) \right\} dx\, dy,$$

où

$$\varphi(x, y) = F(x, y, z_0, p_0, q_0) - p_0 \frac{\partial F}{\partial p_0} - q_0 \frac{\partial F}{\partial q_0},$$

les quantités z_0, p_0, q_0 étant relatives à une surface donnée S_0, limitée par un contour C_0. Nous avons bien

$$I_{S_0} = I'_{S_0}, \qquad I_S \geqq I'_S.$$

Dans la différence $I'_S - I'_{S_0}$ l'intégrale double $\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$ disparaîtra. En posant

$$I''_S = \int\int_{(A)} \left(\frac{\partial F}{\partial z_0} + p \frac{\partial F}{\partial p_0} + q \frac{\partial F}{\partial q_0} \right) dx\, dy,$$

il vient

$$I_S - I_{S_0} \geqq I''_S - I''_{S_0}.$$

Appliquons à I''_S le théorème de Green ; nous obtenons

$$I''_S - I''_{S_0} = \int\int_{(A)} \left[\frac{\partial F}{\partial z_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p_0} \right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q_0} \right) \right] (z - z_0)\, dx\, dy.$$

En particulier si

$$\frac{\partial F}{\partial z_0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p_0}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q_0}\right) = 0,$$

on aura bien

$$I_S \geqq I_{S_0}$$

(on suppose toujours que les S sont limitées par C_0).

Vu et approuvé :

Paris, le 25 juin 1926

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer .

Paris, le 25 juin 1926.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. LAPIE.