LOUIS LONG

Sur certaines transformations par polaires réciproques relativement au complexe linéaire et à la sphère

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1926

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1926__67__3_0>

N° D'ORDRE
1911

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. LOUIS LONG
Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée de Rennes.

1re THÈSE. — SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS PAR POLAIRES RÉCIPROQUES RELATIVEMENT AU COMPLEXE LINÉAIRE ET A LA SPHÈRE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 16 novembre 1926, devant la Commission d'examen.

MM. E. CARTAN, *Président*
E. VESSIOT, Paul MONTEL, *Examinateurs*

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1926

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.

DOYEN	M. MOLLIARD, professeur	Physiologie végétale.
DOYEN HONORAIRE	P. APPELL.	
PROFESSEURS HONORAIRES	P. PUISEUX.	
	V. BOUSSINESQ.	
	A. JOANNIS.	
	H. LE CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
PROFESSEURS	Emile PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	G. KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET	Electrotechnique générale.
	F. WALLERANT	Minéralogie.
	H. ANDOYER	Astronomie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	E. HAUG	Géologie.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	Emile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	H. ABRAHAM	Physique.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	E. VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	A. LEDUC	Physique théorique et physique céleste.
	Léon BERTRAND	Géologie appliquée et géologie régionale.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	É. BLAISE	Chimie organique.
	P. A. DANGEARD	Botanique.
	C. MAURAIN	Physique du globe.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. JOB	Chimie générale
	N	Géographie physique.
	N	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	E. HÉROUARD	Zoologie.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	G. SAGNAC	Physique théorique et physique céleste.
	E PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	V. AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	A. GUILLET	Physique.
	C. MAUGUIN	Minéralogie.
	L. BLARINGHEM	Botanique.
	A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
	A. DEREIMS	Géologie.
	R. DONGIER	Physique du globe.
SECRÉTAIRE	Daniel TOMBECK.	

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A LA MÉMOIRE DE M. LE PROFESSEUR CLAUDE GUICHARD

A M. LE PROFESSEUR CARTAN, HOMMAGE RECONNAISSANT

TABLEAU D'ERRATA

Page 14, 2e équation (1)	*lire* $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ *au lieu de* $\frac{\partial x_i}{\partial u}$.
Page 15, 2e équation (2)	*lire* l'_u *au lieu de* l'_v.
Page 21, 5e et 6e lignes en descendant. .	*lire « à* r_1 *et* r_2 *» au lieu de « à* R_1 *et* R_2 *».*
Page 22, fin de la 5e ligne en descendant.	*lire « les directions* α, ξ, η, *sont parallèles à un même plan ».*
Page 25, 8e ligne en remontant.	*lire* RL *au lieu de* RL'.
Page 45, 13e ligne en remontant	*lire* $K \sin \lambda \, sh\nu'$, $-K \cos \lambda \, sh\nu'$, $K\psi$,
Page 105, 11e ligne en descendant . . .	*lire « c'est-à-dire que de* O ».

PREMIÈRE THÈSE

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS PAR POLAIRES RÉCIPROQUES RELATIVEMENT AU COMPLEXE LINÉAIRE ET A LA SPHÈRE

INTRODUCTION

Rappel des méthodes de M. Guichard et leur adaptation à l'étude des congruences planes et des réseaux plans

M. Guichard appelle réseau, dans l'espace à n dimensions, la figure décrite par un point M de coordonnées x_i ($i=1, 2, \ldots, n$,), les x_i, fonctions de deux variables u, v, satisfaisant à une équation de Laplace de la forme :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Il appelle première tangente du réseau, la droite MR de paramètres directeurs $\frac{\partial x_i}{\partial u}$, c'est-à-dire la tangente à la courbe que parcourt M quand v reste constant (courbe u); et deuxième tangente, la droite MS de paramètres directeurs $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ (tangente à la courbe v).

Il montre (Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1897, première partie, Chapitre I, n° 2) que, pour tout réseau, on peut trouver des paramètres directeurs ξ_i de MR (définis à un facteur près fonction de u), et η_i de MS (définis à un facteur près fonction de v) tels que l'on puisse écrire les équations :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial v}=n\eta_i\\[2mm]\dfrac{\partial\eta_i}{\partial u}=m\xi_i\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial h}{\partial v}=lm\\[2mm]\dfrac{\partial l}{\partial u}=hn\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial x_i}{\partial u}=h\xi_i\\[2mm]\dfrac{\partial x_i}{\partial v}=l\eta_i,\end{array}\right.$$

où h et l sont les coefficients figurant dans l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

admettant pour solutions les x_i.

Les ξ_i, η_i sont appelés paramètres normaux du réseau. Les quantités m, n, sont les rotations du réseau.

On dit que, dans un espace à n dimensions, une droite engendre une congruence, quand cette droite dépend de deux paramètres u, v, et demeure tangente à une courbe quand u ou v reste fixe. Les points de contact de la droite et de ces deux courbes sont les foyers de la congruence.

Chacun des foyers décrit un réseau dont l'une des tangentes est la droite qui engendre la congruence.

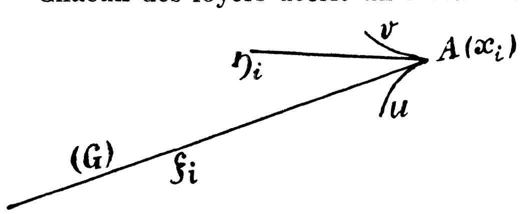

Fig. 1

Soit, inversement, M un point décrivant un réseau : chacune des tangentes du réseau décrit une congruence dont M est l'un des foyers.

Ceci posé, soient (fig. 1) A (x_i) le premier réseau focal d'une congruence (G) (celui dont (G) est tangente à la courbe u), et ξ_i $(i=1,2,\ldots,n,)$ des paramètres directeurs de (G) qui soient paramètres normaux pour le réseau A, η_i les paramètres normaux de la deuxième tangente du réseau A. On a les équations :

$$(1)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial x_i}{\partial u}=h\xi_i\\[2mm]\dfrac{\partial x_i}{\partial v}=l\eta_i\end{array}\right.\qquad(2)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial v}=n\eta_i\\[2mm]\dfrac{\partial\eta_i}{\partial u}=m\xi_i\end{array}\right.\qquad(3)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial h}{\partial v}=lm\\[2mm]\dfrac{\partial l}{\partial u}=hn\end{array}\right.$$

En dérivant par rapport à u la première équation (2), on a, en tenant compte des relations (2), l'équation suivante :

$$\xi''_{uv}=\frac{1}{n}n'_u\,\xi'_v+mn\xi \tag{4}$$

à laquelle satisfont les n quantités ξ_i. On en déduit que des paramètres directeurs quelconques de (G), qui sont des quantités de la forme $\lambda\xi_i$, satisfont à une équation de Laplace qui est en général de la forme :

$$\theta''_{uv}=a\theta'_u+b\theta'_v+c\theta.$$

Remarque. — En général, des paramètres directeurs d'une droite (G) d'une congruence ne sont paramètres normaux pour aucun de ses réseaux focaux. D'ailleurs, des paramètres directeurs de (G) qui sont paramètres normaux pour l'un de ses réseaux focaux, ne sont généralement pas paramètres normaux pour l'autre réseau focal.

Nous allons établir à ce sujet la proposition suivante :

Etant donnée, dans un espace à n dimensions ($n \geq 3$), *une congruence* (G) *de paramètres directeurs* α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$,), *la condition nécessaire et suffisante pour que les* α_i *soient paramètres normaux pour le premier réseau focal de* (G), *est que :*

$$\theta''_{uv} = \frac{a'_v}{a}\,\theta'_u + \frac{b'_u}{b}\,\theta'_v + c\theta \tag{5}$$

étant l'équation de Laplace à laquelle satisfont les α_i, *on ait :* $a'_v = o$.

Soient, en effet, (1), (2), (3) (page 8) les équations relatives au premier réseau focal de (G). Les ξ, η, figurant dans ces équations sont paramètres normaux du réseau. Si on suppose que les α_i sont paramètres normaux du réseau, on pourra prendre : $\xi_i = \alpha_i$. Des relations (2), on tire une équation de la forme :

$$\theta''_{uv} = \frac{1}{n}\,n'_u\,\theta'_v + mn\theta \tag{6}$$

à laquelle doivent satisfaire les ξ_i (ou les α_i).

Les équations (5) et (6), admettant les n ($n \geq 3$) intégrales communes α_i, sont identiques, ce qui exige les conditions :

$$\frac{a'_v}{a} = o, \qquad \frac{b'_u}{b} = \frac{n'_u}{n}; \qquad c = mn.$$

La condition $a'_v = o$ est donc nécessaire.

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée, et soient (1), (2), (3), (page 8), les équations relatives au premier réseau focal de (G). On a, pour les ξ_i, des expressions de la forme : $\xi_i = \lambda\alpha_i$.

En remplaçant, dans l'équation aux ξ [équation (4)], ξ par $\lambda\alpha$, on a l'équation :

$$\alpha''_{uv} = -\frac{\lambda'_v}{\lambda}\,\alpha'_u + \left(\frac{n'_u}{n} - \frac{\lambda'_u}{\lambda}\right)\alpha'_v + \left(\frac{n'_u}{n}\frac{\lambda'_u}{\lambda} + mn'_u - \frac{\lambda''_{uv}}{\lambda}\right)\alpha,$$

qui doit être identique à (5). Or, l'identification donne, en particulier :

$$\frac{\lambda'_v}{\lambda} = \frac{a'_v}{a}$$

Si : $a'_v = o$, on a : $\lambda'_v = o$, d'où : $\lambda = \mathrm{F}(u)$ et $\alpha_i = \dfrac{\xi_i}{\mathrm{F}(u)}$.

Les ξ n'étant définis qu'à un facteur près fonction de u, on peut prendre $\mathrm{F}(u) = \lambda = 1$, ce qui établit la proposition.

Conséquence. — *Pour qu'on puisse trouver des paramètres directeurs d'une congruence qui soient paramètres normaux pour ses deux réseaux focaux, il faut et il suffit que l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces paramètres se réduise à une* *équation de Moutard, et que, par suite, si $n=3$, la congruence soit une congruence de Ribaucour.*

La première partie de cette proposition résulte immédiatement de la propriété précédente. Pour établir la dernière partie, nous remarquerons que si des paramètres directeurs d'une congruence satisfont à une équation de Moutard, les invariants de cette équation de Laplace sont égaux : par suite, la congruence est une congruence de Ribaucour.

Soit, inversement, une congruence de Ribaucour : si θ_1, θ_2, θ_3, sont paramètres directeurs, ces trois quantités vérifient une équation de Laplace à invariants égaux, et par suite de la forme :

$$\theta''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\theta'_u + \frac{h'_u}{h}\theta'_v + R\theta.$$

Posons : $\theta = k\sigma$; l'équation précédente se transforme en la suivante :

$$\sigma''_{uv} = \left(\frac{h'_v}{h} - \frac{k'_v}{k}\right)\sigma'_u + \left(\frac{h'_u}{h} - \frac{k'_u}{k}\right)\sigma'_v + \left(\frac{k'_u}{k}\frac{h'_v}{h} + \frac{k'_v}{k}\frac{h'_u}{h} + R - \frac{k''_{uv}}{k}\right)\sigma.$$

Pour que la transformée soit une équation de Moutard, il faut et il suffit que l'on ait à la fois :

$$\frac{k'_v}{k} = \frac{h'_v}{h} \qquad \text{et} \qquad \frac{k'_u}{k} = \frac{h'_u}{h},$$

ce qui entraîne : $K = ch$ ($c = \text{const.}$).

Donc on peut toujours trouver, pour une congruence de Ribaucour, des paramètres directeurs qui soient solutions d'une équation de Moutard.

La propriété précédente constitue un nouveau critérium pour les congruences de Ribaucour.

On dit que, dans l'espace à n dimensions, deux réseaux sont parallèles, si leurs tangentes aux courbes u sont parallèles, ainsi que leurs tangentes aux courbes v; ou, comme on dit, si leurs tangentes de même rang sont parallèles.

Cette définition est valable dans le plan.

Nous allons établir la propriété suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux réseaux soient parallèles, est que les paramètres normaux de l'une des deux tangentes de l'un soient aussi paramètres normaux pour la tangente de même rang de l'autre.

Soient, en effet, ξ_i les paramètres normaux de la tangente à la courbe u de l'un des réseaux, η_i ceux de la deuxième tangente, $\lambda\xi_i$, $\mu\eta_i$, les paramètres normaux relatifs au deuxième réseau, m, n, les rotations du premier réseau, m_1, n_1, celles du deuxième. On a les équations (voir page 8) :

$$(1)\ \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial v} &= n\eta \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} &= m\xi \end{aligned}\right. \qquad (2)\ \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\xi) &= n_1\mu\eta \\ \frac{\partial}{\partial u}(\mu\eta) &= m_1\lambda\xi \end{aligned}\right.$$

La première équation (2) peut s'écrire, en développant :

$$\lambda\xi'_v + \xi\lambda'_v = n_1\mu\eta,$$

ou, en tenant compte de la première équation (1) :

$$\lambda n\eta + \xi\lambda'_v = n_1\mu\eta, \qquad \text{ou :} \quad \eta(\lambda n - \mu n_1) + \xi\lambda'_v = o.$$

Cette relation devant avoir lieu quels que soient les ξ_i, η_i, on en déduit :

$$\lambda n - \mu n_1 = o \qquad \text{et} \quad \lambda'_v = o, \qquad \text{d'où :} \quad \lambda = F(u).$$

Il en résulte que l'on peut prendre, pour le deuxième réseau, les ξ_i pour paramètres normaux, puisque les ξ_i ne sont définis qu'à un facteur près fonction de u.

On prouverait, de même, que les η_i peuvent être pris pour paramètres normaux du deuxième réseau.

Considérons, réciproquement, un réseau M de paramètres normaux ξ_i, η_i, et un second réseau M' de paramètres normaux ξ_i, η'_i. Soient m, n, les rotations du réseau M, m', n', celles de N. On peut écrire les équations :

$$(1') \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial v} &= n\eta \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} &= m\xi \end{aligned} \right. \qquad (2') \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial v} &= n'\eta' \\ \frac{\partial\eta'}{\partial u} &= m'\xi \end{aligned} \right.$$

En divisant membre à membre les premières équations (1') et (2'), on a :

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{n}{n'},$$

ce qui prouve le parallélisme des deuxièmes tangentes (1).

D'autre part, des équations (1') et (2'), on déduit les relations :

$$\xi''_{uv} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\,\xi'_v + mn\xi,$$

$$\xi''_{uv} = \frac{1}{n'}\frac{\partial n'}{\partial u}\,\xi'_v + mn'\xi,$$

d'où :

$$\left(\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u} - \frac{1}{n'}\frac{\partial n'}{\partial u}\right)\xi'_v + (mn - m'n')\xi' = o.$$

Cette dernière équation devant être vérifiée pour n valeurs de ξ, on aura nécessairement :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u} = \frac{1}{n'}\frac{\partial n'}{\partial u}, \quad \text{et } mn = m'n'.$$

De la première de ces deux relations, on déduit : $n' = n\,F(v)$.

---

(1) Il y a cependant un cas d'exception à signaler : celui pour lequel on a : $\dfrac{\partial\xi}{\partial v} = o.$

En comparant les premières équations (1′) et (2′), on a :

$$n'\eta' = n\eta = n\eta' \mathrm{F}(v), \quad \text{d'où :} \quad \eta' = \frac{\eta}{\mathrm{F}(v)}.$$

Les η n'étant définis qu'à un facteur près fonction de v, peuvent donc être pris pour paramètres normaux du réseau M′.

On s'aperçoit aisément que la définition donnée par M. Guichard de deux congruences parallèles (congruences dont les droites correspondantes sont parallèles) ne saurait suffire pour le cas des congruences planes. En effet, dans l'espace à n dimensions où $n > 2$, l'équation de Laplace qui caractérise la congruence est parfaitement définie par trois des n paramètres directeurs, qui permettent de calculer les trois coefficients de cette équation. Il n'en est plus de même dans le plan, où deux paramètres directeurs, α, β, d'une droite, ne peuvent suffire à déterminer une équation de la forme :

$$\theta''_{uv} = a\theta'_u + b\theta'_v + c\theta.$$

Nous dirons que, dans le plan, deux congruences sont paralleles, si les droites correspondantes le sont, et si les secondes tangentes à leurs premiers foyers F, F′, *(foyers dont les droites qui engendrent les congruences sont les tangentes aux courbes* u*), sont paralleles.*

Dans ces conditions, les réseaux focaux F, F′, étant parallèles, auront mêmes paramètres normaux (page 10), et mêmes rotations, et les ξ, paramètres directeurs des droites parallèles des congruences, qui sont paramètres normaux pour F et F′, vérifieront une équation de Laplace :

$$\xi''_{uv} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\,\xi'_v + mn\xi,$$

qui sera bien la même pour les deux congruences.

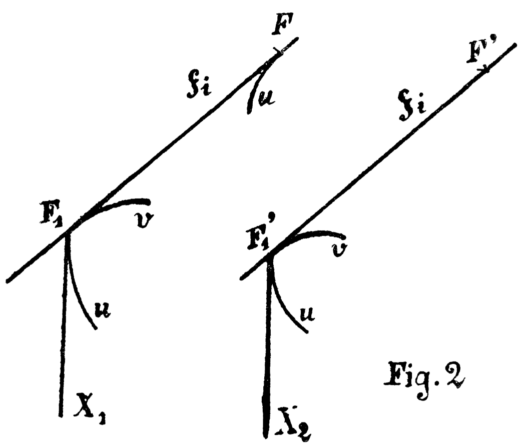

Fig. 2

De cette définition résulte immédiatement que *les premières tangentes* F_1X_1, F_2X_2, *aux deuxièmes réseaux* F_1, F_1', *sont parallèles.*

Soient, en effet, x_i les coordonnées de F, y_i celles de F_1.

On a, pour le réseau F, des équations de la forme :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= h\xi_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= l\eta_i \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= n\eta_i \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u} &= m\xi_i \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= lm \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= hn, \end{aligned}\right.$$

et, pour le réseau F′, parallèle à F, des équations de la même forme, avec les mêmes ξ_i, η_i, m, n, mais avec des x_i, des h et l différents.

Or, on peut écrire des équations de la forme :

$$y_i = x_i + \rho\xi_i.$$

En dérivant par rapport à v, on en déduit :

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v} + \rho\frac{\partial \xi_i}{\partial v} + \xi_i\rho'_v.$$

ou, en tenant compte des équations ci-dessus :

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = l\eta_i + \rho n\eta_i + \rho'_v\xi_i = \eta_i(l + n\rho) + \rho'_v\xi_i.$$

Pour que F_1 (y_i) soit le deuxième foyer de la congruence, il faut que $\frac{\partial y_i}{\partial v}$ et ξ_i soient proportionnels, et que, par suite, on ait :

$$l + n\rho = 0, \quad \text{d'où :} \quad \rho = -\frac{l}{n}.$$

On déduit de cette relation :

$$\rho'_u = -\frac{nl'_u - ln'_u}{n^2} = -\frac{n^2h - ln'_u}{n^2} = -h + l\frac{n'_u}{n^2}.$$

Mais, d'autre part, on a :

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u} + \rho\frac{\partial \xi_i}{\partial u} + \xi_i\rho'_u$$

$$= h\xi_i - \frac{l}{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial u} + \xi_i\left(-h + l\frac{n'_u}{n^2}\right) = l\left[\xi_i\frac{n'_u}{n^2} - \frac{1}{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right].$$

Il en résulte que les quantités $\xi_i\frac{n'_u}{n^2} - \frac{1}{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial u}$ sont paramètres *directeurs* pour la première tangente FX_1 du réseau F_1.

Comme les quantités ξ_i et n sont les mêmes pour les réseaux F et F', ces quantités $\xi_i\frac{n'_u}{n^2} - \frac{1}{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial u}$ dirigent aussi la première tangente F'_1X_2 du réseau F'_1.

Donc les premières tangentes aux deuxièmes réseaux focaux sont parallèles.

De ce qui précède on peut déduire que *la condition nécessaire et suffisante pour que deux congruences planes soient parallèles, est que les paramètres normaux de l'une des tangentes de l'un des réseaux focaux de l'une, soient aussi paramètres normaux pour la tangente de même rang du réseau focal de même rang de l'autre* (*cette propriété est vraie dans le cas général de l'espace à n dimensions*).

Il est clair que si deux réseaux plans sont parallèles, leurs congruences focales correspondantes sont parallèles.

On peut remarquer utilement que *si deux réseaux de l'espace ordinaire sont parallèles, leurs projections sur le plan xOy sont deux réseaux parallèles, et que si deux congruences de l'espace à trois dimensions sont parallèles, elles se projettent suivant deux congruences parallèles.*

Nous allons établir la proposition suivante :

Etant données deux congruences planes parallèles (g), (g'), *si* (G') *est une congruence de l'espace à trois dimensions se projetant suivant* (g'), *on peut trouver une congruence* (G) [*plus toutes celles qu'on peut déduire de* (G) *par une translation parallèle à* Oz] *parallèle à* (G') *et se projetant suivant* (g).

Soient, en effet :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = h\xi_i \\[2mm] \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = l\eta_i \end{cases} \qquad\qquad (2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i \\[2mm] \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\xi_i \end{cases}$$

les équations relatives au premier réseau focal F (x_i) de (g) (fig. 3), les ξ_i étant les paramètres normaux de la première tangente (g) de F.

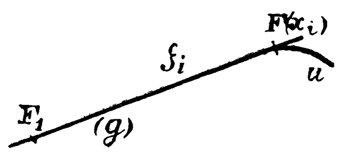

Fig. 3

Le problème revient à déterminer un nombre x_3, d'après les équations (1), ξ_3 étant donné comme vérifiant l'équation :

$$\xi''_{uv} = \frac{n'_u}{n}\,\xi'_v + mn\xi. \qquad (3)$$

Or, les équations (1) fournissent x_3, par quadrature, avec une constante additive.

Il existera donc une congruence (G), dont le premier foyer $\mathcal{F}$ se projettera en F, parallèle à (G'). Donc les projections de (G) et de (G') sont parallèles.

On peut vérifier que la projection de (G) est bien (g) : il suffit, pour cela, de prouver que son deuxième foyer $\mathcal{F}_1$ se projette au point F_1, deuxième foyer de (g).

Soient Y_i les coordonnées de $\mathcal{F}_1$, y_i celles de F_1. On a des équations de la forme :

$$Y = x + \rho\xi ; \qquad y = x + \rho_1\xi.$$

On en déduit : $$Y'_v = x'_v + \rho\xi'_v + \xi\rho'_v = \eta\,(l + n\rho) + \xi\rho'_v,$$

$$y'_v = x'_v + \rho_1\xi'_v + \xi\,\frac{\partial\rho_1}{\partial v} = \eta\,(l + n\rho_1) + \xi\,\frac{\partial\rho_1}{\partial v}.$$

Les points $\mathcal{F}_1$ et F_1 seront foyers si l'on a :

$$l + \rho n = o ; \quad l + \rho_1 n = o, \quad \text{d'où} : \rho = \rho_1 \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La proposition ci-dessus peut encore être énoncée de la façon suivante :

Etant donné un réseau plan F (x_i), *défini par les équations* (1), (2) (*page 14*), *on peut, parmi les réseaux de l'espace ordinaire qui le projettent, en trouver un* (*plus tous les réseaux qu'on peut en déduire par une translation parallèle à* Oz), *dont l'une des tangentes ait une direction donnée* ξ_3 *telle que* ξ_3 *vérifie l'équation* (3),

ou, plus simplement :

Si deux réseaux plans r_1, r_2, *sont parallèles, il existe, dans l'espace ordinaire, un réseau* (*plus tous ceux qu'on peut en déduire par une translation parallèle à* Oz), *projetant* r_1 *et parallèle à tout réseau qui projette* r_2.

Réseaux et congruences conjugués

M. Guichard dit qu'un réseau et une congruence sont conjugués si le point qui décrit le réseau est situé sur la droite qui décrit la congruence.

Il est immédiatement visible que cette définition ne saurait suffire dans le cas des congruences et réseaux plans, car, dans le plan, tout point (et, par conséquent, tout point d'une droite engendrant une congruence) décrit un réseau. En effet, deux solutions d'une équation de la forme :

$$\theta''_{uv} = a\theta'_u + b\theta'_v$$

— et, en particulier, les deux coordonnées de tout point du plan — déterminent parfaitement les coefficients a et b de cette équation, qui caractérise un réseau. Or, le fait pour un réseau et une congruence d'être conjugués entraîne une propriété géométrique, énoncée par M. Guichard et que nous allons démontrer plus loin, qui ne saurait appartenir à une congruence plane et au réseau décrit par un point quelconque de chacune de ses droites.

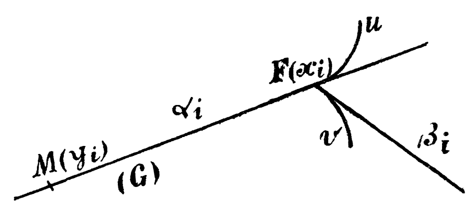

Fig. 4

Nous allons d'abord déterminer les conditions analytiques nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau soit conjugué à une congruence.

Soient (G) une congruence, F(x_i) son premier réseau focal, α_i, β_i, les paramètres normaux de F [α_i paramètres directeurs de (G)]. On a, pour le réseau F, des équations de la forme :

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = h\alpha_i \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = l\beta_i \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} h'_v = lm \\ l'_v = hn \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} \alpha'_v = n\beta \\ \beta'_u = m\alpha \end{cases}$$

Supposons que le point M (y_i) de (G) décrive un réseau. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que ses coordonnées y_i vérifient une équation de la forme :

$$\theta''_{uv} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\theta'_u + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\theta'_v \tag{4}$$

Or, on a :

$$y_i = x_i + \rho\alpha_i \tag{5}$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à u, on obtient :

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u} + \rho\frac{\partial \alpha_i}{\partial u} + \alpha_i\rho'_u,$$

ou, en tenant compte de la première équation (1) (page 15) et en supprimant les indices :

$$y'_u = \rho\alpha'_u + (h + \rho'_u)\alpha.$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à v, on a :

$$y''_{uv} = \rho\alpha''_{uv} + \rho'_v\alpha'_u + (h + \rho'_u)\alpha'_v + (h'_v + \rho''_{uv})\alpha.$$

Mais, des équations (3) (page 15), on déduit :

$$\alpha''_{uv} = \frac{n'_u}{n}\alpha'_v + mn\alpha.$$

On peut donc écrire la relation précédente sous la forme :

$$y''_{uv} = \rho'_v\alpha'_u + \left(h + \rho'_u + \rho\frac{n'_u}{n}\right)\alpha'_v + (h'_v + \rho''_{vu} + mn\rho)\alpha.$$

En écrivant que y vérifie (4), on a, en tenant compte de ce que, de (5), on déduit :

$$y'_v = \left(\rho + \frac{l}{n}\right)\alpha'_v + \alpha\rho'_v\,;$$

$$\left(h + \rho'_u + \rho\frac{n'_u}{n}\right)\alpha'_v + \rho'_v\alpha'_u + (h'_v + \rho''_{uv} + mn\rho)\alpha$$
$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}[\rho\alpha'_u + (h + \rho'_u)\alpha] + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\left[\alpha'_v\left(\rho + \frac{l}{n}\right) + \alpha\rho'_v\right],$$

ou :

$$\left[h + \rho'_u + \rho\frac{n'_u}{n} - \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\left(\rho + \frac{l}{n}\right)\right]\alpha'_v + \left(\rho'_v - \frac{\rho}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\right)\alpha'_u$$
$$+ \left(h'_v + \rho''_{uv} + mn\rho - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}(h + \rho'_u) - \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\rho'_v\right)\alpha = o.$$

Si $n \geqq 3$, cette relation se déduit à une identité en α'_u, α'_v, α, ce qui entraîne les trois conditions :

$$h + \rho'_u + \rho\frac{n'_u}{n} - \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\left(\rho + \frac{l}{n}\right) = o \tag{6}$$

$$\rho'_v - \frac{\rho}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v} = o \tag{7}$$

$$h'_v + \rho''_{uv} + mn\rho - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}(h + \rho'_u) - \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\rho'_v = o \tag{8}$$

Ces trois conditions sont donc nécessaires pour que M décrive un réseau.

Réciproquement, si elles sont vérifiées, les coordonnées y_i de M vérifient l'équation (4) (page 15), et, par suite, M décrit un réseau.

Or, de (7), on tire : $h_1 = \rho\mathcal{F}(u)$. Mais h_1 n'est défini qu'à un facteur près fonction de u. On peut donc prendre, sans diminuer la généralité : $h_1 = \rho$.

En éliminant $\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}$ entre les équations (6) et (8), et en remplaçant h_1 par ρ, on a une équation du second ordre qui détermine ρ.

ρ une fois connu, l'équation (6) déterminera l_1 à un facteur près fonction de v.

Le réseau M sera complètement défini et pourra être représenté par les équations :

$$(1') \left\{ \begin{array}{l} y'_u = h_1\xi \\ y'_v = l_1\eta \end{array} \right. \qquad (2') \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial h_1}{\partial v} = l_1 m_1 \\ \dfrac{\partial l_1}{\partial u} = h_1 n_1 \end{array} \right. \qquad (3') \left\{ \begin{array}{l} \xi'_v = n_1\eta \\ \eta'_u = m_1\xi \end{array} \right.$$

où les ξ_i, η_i, paramètres normaux, sont définis par les équations (1'), et les rotations m, n, par les équations (2') ou (3').

Nous allons maintenant établir la propriété géométrique suivante, énoncée par M. Guichard :

Si un réseau M *et une congruence* (G) *sont conjugués, la deuxième tangente du premier réseau focal de* (G) *passe par le premier foyer de la deuxième congruence focale de* M, *et la première tangente du deuxième réseau focal de* (G) *passe par le deuxième foyer de la première congruence focale de* M.

Soient, en effet (fig. 5) F(x_i) le premier réseau focal de (G), α_i, β_i, ses paramètres normaux, ξ_i, η_i, les paramètres normaux du réseau M (y_i) conjugué à (G), S(z_i) le premier foyer *de la deuxième congruence focale de M.*

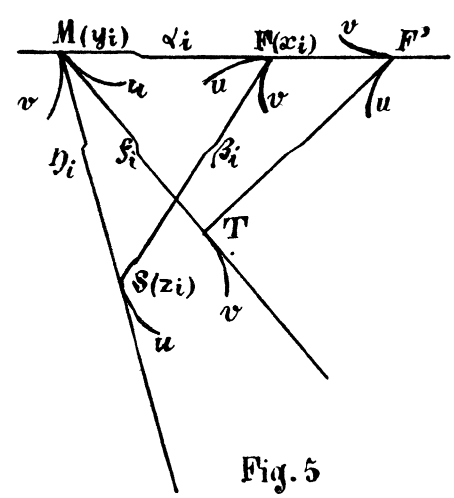

Fig. 5

On a des équations de la forme :

$$z = y + \lambda\eta,$$

d'où :
$$z'_u = y'_u + \lambda\eta'_u + \eta\lambda'_u,$$

ou, en tenant compte des équations (1') et (3') relatives au réseau M :

$$z'_u = h_1\xi + \lambda m_1\xi + \eta\lambda'_u = \xi\,(h_1 + \lambda m_1) + \eta\lambda'_u.$$

Le point S sera le premier foyer de M si les z'_u sont proportionnels aux η, c'est-à-dire si l'on a :

$$h_1 + \lambda m_1 = o, \qquad \text{d'où : } \lambda = -\frac{h_1}{m_1}.$$

On a donc :

$$z = y - \frac{h_1}{m_1}\eta,$$

ou, en remplaçant y par $x + \rho\alpha$ et h_1 par ρ :

$$z = x + \rho\alpha - \frac{\rho}{m_1}\eta.$$

On peut alors écrire :

$$z - x = \frac{\rho}{m_1}(\alpha m_1 - \eta) \tag{9}$$

Or, en dérivant la relation :

$$y = x + \rho\alpha,$$

on a, en tenant compte des équations relatives au réseau F (page 15) et de la deuxième équation (1′) (page 17) :

$$y'_v = l_1\eta = x_v + \rho\alpha'_v + \alpha\rho'_v = l\beta + \rho n\beta + \alpha\rho'_v$$
$$= \beta(l + n\rho) + \alpha\rho'_v.$$

On en déduit :

$$\eta = \frac{\beta(l + n\rho) + \alpha\rho'_v}{l_1},$$

et, par suite :

$$\alpha m_1 - \eta = \frac{1}{l_1}[(l_1 m_1 - \rho'_v)\alpha - (l + n\rho)\beta],$$

ou, en remarquant que $l_1 m_1 = \dfrac{\partial h_1}{\partial v} = \rho'_v$:

$$\alpha m_1 - \eta = -\beta\frac{l + n\rho}{l_1} \qquad (10)$$

Les équations (9) et (10) montrent que la droite FS est dirigée par les paramètres β_i de la tangente en F à la courbe v du réseau F. En d'autres termes, la tangente en F à la courbe v du réseau F passe par S.

On prouverait, par une méthode analogue, que la première tangente F′T du deuxième réseau focal de (G) passe par le deuxième foyer T de la première congruence focale du réseau M.

Nous dirons que, dans le plan, un réseau et une congruence sont conjugués, s'ils sont les projections d'un réseau et d'une congruence conjugués dans l'espace ordinaire.

Cette définition peut être justifiée de la façon suivante :

Analytiquement, nous avons établi que les conditions pour qu'un réseau et une congruence soient conjugués, se traduisent par les relations (6), (7), (8), (page 16), et la démonstration précédente prouve que si un réseau et une congruence de l'espace à trois dimensions sont conjugués, leurs projections le sont, car elles vérifient aussi les relations (6), (7), (8), qui ne font pas intervenir les coordonnées, mais seulement les rotations, et les coefficients des équations de Laplace correspondantes.

Nous allons prouver que, *réciproquement, si un réseau plan r et une congruence plane (g) satisfont aux conditions (6), (7), (8), il existe une famille dépendant d'une constante arbitraire* (∞^1) *de congruences de l'espace ordinaire, conjuguées à tout réseau projetant r, et se projetant suivant la congruence plane (g).*

Pour établir cette propriété, considérons (fig. 4) une congruence (G) de l'espace à trois dimensions, dont les équations relatives au premier foyer sont (1), (2), (3), (page 15). Soit M (y_i) un point de (G) décrivant un réseau, d'équations (1′), (2′), (3′) (page 17) et tel que les trois relations (6), (7), (8) (page 16) soient vérifiées.

Tout revient à trouver, pour déterminer (G), des paramètres α_3, β_3.

Or, de la relation :

$$y_3 = x_3 + \rho\alpha_3, \qquad (1)$$

on tire :
$$\frac{\partial y_3}{\partial u} = h_1 \xi_3 = \frac{\partial x_3}{\partial u} + \rho \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} + \alpha_3 \rho'_u,$$

ou, en remplaçant $\dfrac{\partial x_3}{\partial u}$ par $h\alpha$:

$$\frac{\partial y_3}{\partial u} = (h + \rho'_u)\,\alpha_3 + \rho\,\frac{\partial \alpha_3}{\partial u} \tag{2}$$

On trouve, de même :

$$\frac{\partial y_3}{\partial v} = l_1 \eta_3 = \frac{\partial x_3}{\partial v} + \rho \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} + \alpha_3 \rho'_v,$$

ou, en remarquant que :

$$\frac{\partial x_3}{\partial v} = l\beta_3 = \frac{l}{n}\,\frac{\partial \alpha_3}{\partial v} :$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial v} = \left(\frac{l}{n} + \rho\right) \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} + \alpha_3 \rho'_v \tag{3}.$$

Ceci posé, on peut observer que, les quantités y_3, h, l, ρ, n, étant données, les équations (2) et (3) fourniront α_3 par quadrature, et, par suite, avec une constante arbitraire, si la condition de compatibilité entre les deux équations aux dérivées partielles (1) et (3) qui déterminent α, est vérifiée.

Nous allons former cette condition de compatibilité.

En dérivant la relation (2) par rapport à v, et la relation (1) par rapport à u, on a les équations :

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial u\,\partial v} = \rho \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial u\,\partial v} + \rho'_v \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} + (h + \rho'_u) \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} + \alpha_3 (h'_v + \rho''_{uv});$$

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial v\,\partial u} = \left(\rho + \frac{l}{n}\right) \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial v}\left[\rho'_u + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{l}{n}\right)\right] + \alpha_3 \rho''_{uv} + \rho'_v \frac{\partial \alpha_3}{\partial u},$$

entre lesquelles on peut éliminer $\dfrac{\partial^2 \alpha_3}{\partial u\,\partial v}$, ce qui donne une nouvelle équation (E).

En tenant compte de ce que y_3 vérifie l'équation (4) (page 15), on peut remplacer, dans (E),

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial u\,\partial v} \text{ par } \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial y_3}{\partial u} + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\frac{\partial y_3}{\partial v},$$

puis $\dfrac{\partial y_3}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial y_3}{\partial v}$ par leurs expressions (2), (3), et on obtient la relation :

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial u}\left(\frac{\rho}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v} - \rho'_v\right) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial v}\left[\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\left(\rho + \frac{l}{n}\right) - h - \rho'_u - \rho\frac{n'_u}{n}\right]$$
$$+ \alpha_3\left[\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\rho'_v + \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}(h + \rho'_u) - h'_v - \rho''_{uv} - mn\rho\right] = 0,$$

qui, en tenant compte des relations (6), (7), (8), (page 16), est identiquement vérifiée.

Il existe donc bien une famille à une constante arbitraire de congruences de l'espace ordinaire conjuguée à un réseau donné R projetant r.

On peut établir de même que *si un réseau plan r et une congruence plane* (g) *satisfont aux conditions* (6), (7), (8) (*page 16*), *il existe* ∞^1 *réseaux parallèles* (*déduits de l'un d'eux par une translation parallèle à* Oz,) *se projetant suivant r et conjugués à l'une* (G) *des congruences projetantes de* (g) *dont chaque droite ait une direction donnée,* car les équations (2) et (3), α_3 étant donné, fournissent y_3 par une quadrature avec une constante additive. Il est d'ailleurs facile de vérifier que la condition de compatibilité, obtenue en égalant les deux expressions de $\frac{\partial^2 y_3}{\partial u \partial v}$ déduites par dérivation de $\frac{\partial y}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial v}$, est satisfaite.

On en conclut *qu'il existe un seul réseau de l'espace ordinaire conjugué à une congruence donnée projetante de* (g), *et se projetant suivant r : celui qui a son sommet à l'intersection de la verticale du sommet de r et de la droite correspondante de la congruence donnée.* Les paramètres normaux ξ_3, η_3, de ce réseau sont donnés sans ambiguité par les formules :

$$h_1 \xi_3 = (h + \rho'_u)\,\alpha_3 + \rho \frac{\partial \alpha_3}{\partial u},$$

$$l_1 \eta_3 = \rho'_v\, \alpha_3 + \left(\frac{l}{n} + \rho\right) \frac{\partial \alpha_3}{\partial v}.$$

(On voit aisément, d'ailleurs, qu'il existe un seul réseau de l'espace ordinaire, de sommet R donné, sur la verticale du sommet *r* d'un réseau plan, qui se projette suivant le réseau *r*. Ses paramètres normaux ξ_3, η_3, sont en effet parfaitement déterminés par les équations :

$$\frac{\partial y_3}{\partial u} = h\,\xi_3, \qquad \frac{\partial y_3}{\partial v} = l_3 \eta,$$

où y_3, h et l sont donnés à priori).

M. Guichard a démontré (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure,* 1897, Chapitre 1er, n° 3, Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques), que si l'on coupe une congruence par un plan, le point d'intersection décrit un réseau conjugué à la congruence.

Si deux réseaux de l'espace à deux dimensions sont parallèles, toute congruence conjuguée à l'un est parallèle à une congruence conjuguée à l'autre.

Soient, en effet, (fig. 6), r_1 et r_2 deux réseaux plans parallèles.

Par définition (page 18), la congruence (d_1), conjuguée à r_1, est la projection d'une congruence (D_1) conjuguée à l'un des réseaux R_1 qui projettent r_1.

Or il existe (page 14) un réseau R_2 parallèle à R_1 qui se projette suivant le réseau r_2 parallèle à r_1.

Mais M. Guichard a établi, dans son Mémoire sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure,* 1897, Chapitre 1er, n° 5), que dans l'espace à n dimensions ($n \geq 3$), si deux réseaux sont parallèles, toute congruence conjuguée à l'un est parallèle à une congruence conjuguée à l'autre. Il existe donc une congruence (D_2) parallèle à (D_1) et conjuguée à R_2.

Les congruences (d_1) et (d_2), projections de (D_1) et (D_2), seront conjuguées respectivement à R_1 et R_2, par définition (page 18). D'autre part, elles sont parallèles, comme projections de congruences parallèles (page 13). Par suite, la proposition est établie.

On démontre de la même façon que *si deux congruences planes sont parallèles, tout réseau conjugué à l'une est parallèle à un réseau conjugué à l'autre.*

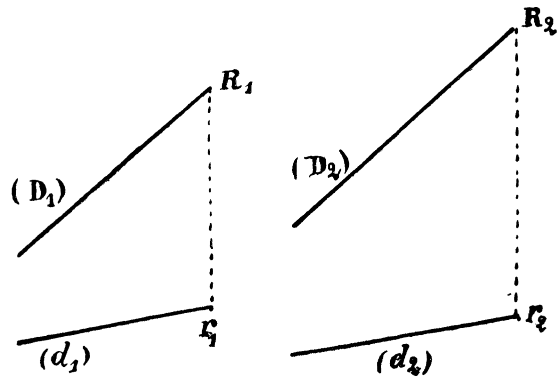

Fig. 6

On dit qu'une congruence et un réseau sont harmoniques, lorsque les foyers de la congruence sont sur les tangentes du réseau.

Nous allons *établir* la propriété suivante, *énoncée* par M. Guichard :

Dans l'espace à n dimensions où $n \geqq 3$, si chaque droite d'une congruence est dans le plan d'un réseau que l'on fait correspondre à la congruence, ses foyers sont sur les tangentes du réseau.

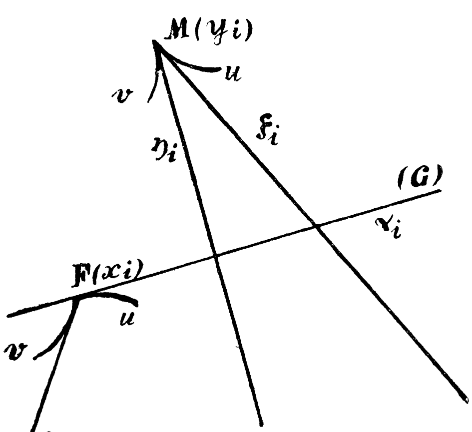

Fig. 7

Soit, en effet, $F(x_i)$ le premier foyer d'une congruence (G) dont chaque droite est dans le plan du réseau $M(y_i)$. Désignons par α_i, β_i, les paramètres normaux du réseau F [α_i paramètres directeurs de (G)], et par ξ_i, η_i ceux du réseau M.

Les équations relatives au réseau F sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x'_u = h\alpha \\ x'_v = l\beta \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} h'_v = lm \\ l'_u = hn \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha'_v = n\beta \\ \beta'_u = m\alpha \end{array}\right.$$

Celles qui définissent le réseau M sont :

$$\left\{\begin{array}{l} y'_u = h_1\xi \\ y'_v = l_1\eta \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial h_1}{\partial v} = l_1 m_1 \\ \dfrac{\partial l_1}{\partial u} = h_1 n_1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \xi'_v = n_1\eta \\ \eta'_u = m_1\xi \end{array}\right.$$

Le fait que (G) est dans le plan du réseau M peut être exprimé par des équations de la forme suivante :

$$(1) \qquad x_1 = y_1 + a\eta_1 + b\alpha_1 \qquad\qquad \alpha_1 = c\xi_1 + d\eta_1 \qquad (2),$$

dont la première exprime que les trois directions $x - y$, η, α, sont dans un même plan, la deuxième que les directions α, ξ, η, sont parallèles.

En tenant compte de (2), et en supprimant les indices pour simplifier les notations, la relation (1) peut se mettre sous la forme :

$$x = y + bc\,\xi + (a + bd)\eta.$$

En dérivant par rapport à u, on a :

$$x'_u = y'_u + bc\,\xi'_u + \xi\,(bc'_u + cb'_u) + (a + bd)\,\eta'_u + \eta\,(a'_u + bd'_u + db'_u),$$

ou, en remplaçant

$$x'_u \text{ par } h\alpha = h\,(c\xi + d\eta) = h\left(c\xi + \frac{d}{n_1}\,\xi'_v\right),\ y'_u \text{ par } h_1\xi, \eta'_u \text{ par } m_1\xi \text{ et } \eta \text{ par } \frac{1}{n_1}\,\xi'_v :$$

$$h\left(c\xi + \frac{d}{n_1}\,\xi'_v\right) = h_1\xi + bc\xi'_u + (bc'_u + cb'_u)\,\xi + (a + bd)\,m_1\xi$$
$$+ \frac{a'_u + bd'_u + db'_u}{n_1}\,\xi'_v,$$

ou :

$$bc\xi'_u + \left(-\frac{hd}{n_1} + \frac{a'_u + bd'_u + db'_u}{n_1}\right)\xi'_v + [-hc + h_1 + bc'_u + cb'_u + m_1(a + bd)]\,\xi = o.$$

Les trois directions ξ, ξ'_u, ξ'_v, n'étant pas dans un même plan, la relation précédente doit être vérifiée quels que soient ξ, ξ'_u, ξ'_v, et, par suite, on doit avoir :

$$bc = o, \qquad hd = a'_u + bd'_u + db'_u, \qquad hc = h_1 + bc'_u + cb'_u + m_1(a + bd).$$

Or, c ne peut être nul, sans quoi, d'après la relation (2), (G) serait parallèle à la deuxième tangente du réseau M, ce qui est contraire à l'hypothèse. La relation : $bc = o$ entraîne donc nécessairement $b = o$. La relation (1) devient alors :

$$x_1 = y_1 + a\eta_1,$$

ce qui exprime que F est sur la deuxième tangente du réseau M.

On prouverait, de même, que le deuxième foyer de (G) est sur la première tangente du réseau M.

La définition donnée plus haut pour les réseaux et congruences harmoniques est valable dans le plan. La propriété ci-dessus montre que cette définition équivaut à la suivante, que nous adopterons :

Une congruence et un réseau plans sont harmoniques, si cette congruence et ce réseau sont les projections d'une congruence et d'un réseau harmoniques de l'espace ordinaire.

En effet, si dans l'espace à trois dimensions une congruence (G) et un réseau R sont harmoniques, les foyers de la congruence se projettent aux foyers de la projection (g) de (G). Donc (g) a ses foyers sur les tangentes du réseau r projection de R.

Soient, réciproquement (fig. 8) (g) une congruence plane ayant ses foyers sur les tangentes du réseau r, et R l'un des réseaux de l'espace ordinaire projetant r. Il existe une congruence de l'espace à trois dimensions harmonique à R et projetant (g) : c'est celle (G) dont la droite génératrice est l'intersection du plan du réseau R et du plan projetant (g). En effet, (G) étant dans le plan du réseau R, a ses foyers sur les tangentes de R, d'après la propriété démontrée page 21; donc les foyers de la projection de (G), étant sur les tangentes de r, coïncident avec ceux de (g).

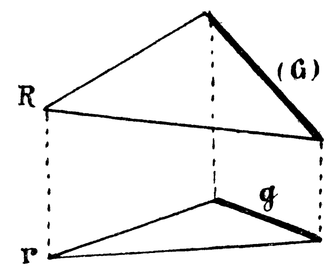

Fig. 8

Remarque. — *Dans l'espace à trois dimensions, toute transformation par polaires réciproques transforme une congruence conjuguée à un réseau en une congruence harmonique à un réseau, et réciproquement.*

En effet, toute transformation par polaires réciproques, n'altérant pas le rapport anharmonique, transforme un réseau en un réseau.

D'autre part, après la transformation, le point commun à la congruence (G) et au réseau R qui lui est conjugué se transforme en un plan contenant la transformée de (G). Or, ce plan n'est autre que le plan tangent au transformé du réseau au point qui correspond au plan tangent au point R. Donc la transformée de la congruence (G) est harmonique au transformé du réseau.

La réciproque s'établirait d'une façon analogue; elle résulte d'ailleurs de la propriété directe, puisque la transformation est réciproque.

En s'appuyant sur cette remarque, on peut aisément déduire la propriété fondamentale géométrique d'un réseau et d'une congruence conjugués, dans l'espace à trois dimensions, du fait qu'une congruence harmonique à un réseau a ses foyers sur les tangentes du réseau et réciproquement.

Si deux réseaux plans sont parallèles, toute congruence plane harmonique à l'un est parallèle à une congruence hormonique à l'autre.

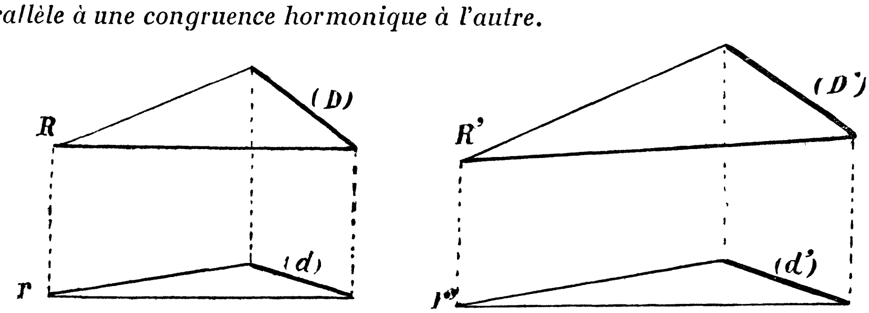

Fig. 9

Soient, en effet (fig. 9) r et (d) un réseau plan et une congruence plane harmoniques, r' un réseau parallèle à r' et R l'un des réseaux de l'espace ordinaire projetant r.

On peut trouver (page 14) un réseau R', parallèle à R, se projetant suivant r'. Or, (page 23), la congruence (D) intersection du plan tangent à R et du plan projetant (d), qui est harmonique à R, se projette suivant (d).

Dans l'espace à trois dimensions, M. Guichard a établi (sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1897, Chapitre 1er, n° 6) qu'étant donnée une congruence (D) harmonique à un réseau R, il existe une congruence (D') harmonique à tout réseau R' parallèle R.

Par suite, la projection (d') de (D') est harmonique à la projection r' de R'. De plus, les congruences (d) et (d') sont parallèles, comme projections de deux congruences parallèles (D) et (D') de l'espace ordinaire.

Si deux congruences planes sont parallèles, tout réseau harmonique à l'une est parallèle à un réseau harmonique à l'autre.

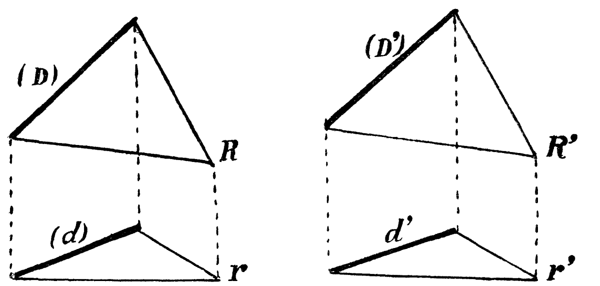

Fig. 10

Soient, en effet (fig. 10), (d) et r une congruence plane et un réseau plan harmoniques, (d') une congruence plane parallèle à (d), et R l'un des réseaux projetant r.

L'intersection (D) du plan tangent à R et du plan vertical projetant (d) décrit une congruence harmonique à R.

Or, nous avons vu (page 14) qu'il existe une congruence (D'), parallèle à (D) et se projetant suivant (d').

Mais M. Guichard a prouvé (Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, Chapitre 1er, n° 6, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1897), que si un réseaux R est harmonique à une congruence (D), on peut trouver un réseau R', parallèle à R, et harmonique à toute congruence (D') parallèle à (D).

Dès lors, les projections (d') et r' de (D') et R' sont harmoniques ; de plus, les réseaux r et r', étant les projections de deux réseaux parallèles, sont parallèles.

On démontrerait de la même manière les propriétés suivantes :

Si un réseau plan et une congruence plane sont conjugués, une congruence focale du réseau est harmonique à un réseau focal de la congruence.

Si un réseau plan et une congruence plane sont harmoniques, chaque réseau focal de la congruence est conjugué à une congruence focale du réseau.

La proposition suivante :

L'intersection par un plan fixe d'un réseau de l'espace à trois dimensions, décrit une congruence harmonique au réseau,

se démontrerait sans difficulté.

Réseaux orthogonaux et congruences orthogonales dans le plan

On dit que *deux réseaux plans sont orthogonaux, quand la première tangente de chacun d'eux* (*tangente à la courbe u*) *est perpendiculaire à la deuxieme tangente de l'autre* (*tangente à la courbe v*).

On dit que *deux congruences planes* (D), (Δ), *sont orthogonales, quand le premier réseau focal de* (Δ) *est orthogonal au deuxième réseau focal de* (D).

Nous allons démontrer que *si deux congruences planes* (D), (Δ), *sont orthogonales, le deuxième réseau focal de* (Δ) *est orthogonal au premier réseau focal de* (D).

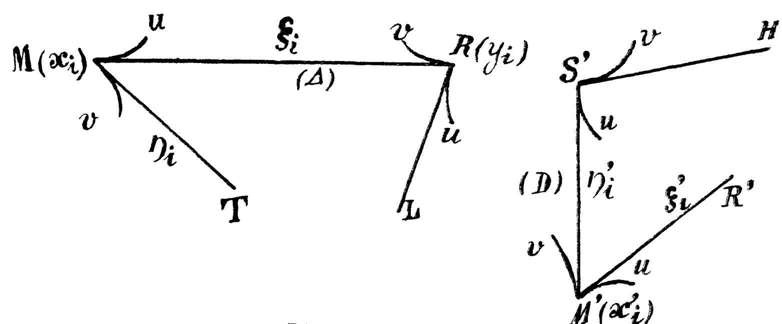

Fig. 11

Soient, en effet, (Δ) et (D) (fig. 11) deux congruences orthogonales, ξ_i, η_i, les paramètres normaux du premier réseau focal M (x_i) de (Δ), ξ'_i, η'_i, ceux du deuxième réseau focal de (D), R (y_i) le deuxième foyer de (Δ) et S' le premier foyer de (D).

Par hypothèse, les droites (Δ) et (D) sont rectangulaires, ainsi que les droites MT et M'R', ce qui se traduit par les deux relations :

$$\Sigma\, \xi\eta' = o \qquad \Sigma\, \eta\xi' = o \tag{1}$$

Il s'agit de prouver que les réseaux R et S' sont orthogonaux, et pour cela il suffit d'établir que RL et S'H sont rectangulaires.

Si l'on tient compte des relations :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial v} &= n\eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= m\xi \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial v} &= n'\eta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial u} &= m'\xi' \end{aligned}\right.$$

on trouve, en dérivant les équations (1), les formules suivantes :

$$\text{(A)} \quad \left\{\begin{aligned} &\sum \eta' \frac{\partial \xi}{\partial u} = -\, m'\Sigma\xi\xi' \\ &\sum \xi \frac{\partial \eta'}{\partial v} = -\, n\, \Sigma\eta\eta' \\ &\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta'}{\partial v} = -\frac{\partial m'}{\partial v}\Sigma\xi\xi' - \frac{\partial n}{\partial u}\Sigma\eta\eta' \end{aligned}\right.$$

Or on a, pour les coordonnées y_i de R, des expressions de la forme :

$$y = x + \rho\xi.$$

En dérivant cette équation par rapport à u et à v, on a les relations :

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \xi(h + \rho'_u) + \rho\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad (\alpha)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \xi\rho'_v + \eta(l + n\rho) \qquad (\beta),$$

après avoir remplacé x'_u par $h\xi$ et x'_v par $l\eta$.

Le point R doit être tel que $l + n\rho = o$.

En dérivant par rapport à u cette dernière équation, on a :

$$n(h + \rho'_u) + \rho\frac{\partial n}{\partial u} = o.$$

En comparant cette relation à (α), on voit qu'on peut écrire :

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\xi\frac{\rho}{n}\frac{\partial n}{\partial u} + \rho\frac{\partial \xi}{\partial u},$$

et que par suite la droite RL admet pour paramètres directeurs les quantités :

$$n\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial n}{\partial u}\xi.$$

On montrerait, de même, que les quantités :

$$m'\frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial v}\eta'$$

dirigent S'H.

Il ne reste plus qu'à vérifier que l'on a :

$$\sum\left(n\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial n}{\partial u}\xi\right)\left(m'\frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial v}\eta'\right) = o,$$

et cette vérification est immédiate si l'on tient compte des relations (A).

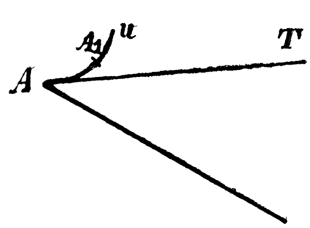

Fig. 12

M. Guichard a établi, au sujet de l'orthogonalité, un certain nombre de propositions générales qui, dans le cas du plan, semblent échapper à ses démonstrations. Aussi allons-nous établir directement ces propositions.

On sait [et nous démontrerons plus loin (première partie)] que les projections de deux droites polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à un complexe linéaire sont parallèles.

Soient alors (fig. 12). A un réseau, AT la tangente en A à la courbe u.

Cette tangente joint A à un point A_1 infiniment voisin sur la courbe u [courbe (Γ)]. Donc sa transformée est la droite (Δ) d'intersection des deux plans tangents au réseau A′ transformé de A dont les points de contact sont sur la transformée (Γ′) de (Γ). Par suite, (Δ) est la tangente en A′ (point correspondant au plan tangent au réseau A au point A), à la courbe conjuguée de (Γ′). En d'autres termes, après la transformation, la tangente à la courbe u du réseau A se transforme en la tangente à la courbe v du réseau transformé ; et, de même, la tangente à la courbe v du premier réseau se transforme en la tangente à la courbe u du deuxième.

Alors les projections a et a' des deux réseaux A, A′, sont telles que la première tangente de chacun est parallèle à la deuxième tangente de l'autre. Donc, si on fait tourner a' de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Oz du complexe, on obtient un réseau a'_1 qui, par définition (page 25), sera orthogonal à a.

Le raisonnement précédent prouve aussi que si deux congruences (G), (G′) de l'espace ordinaire, sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport au complexe linéaire, le premier réseau focal de chacune d'elles se transforme dans le deuxième réseau focal de l'autre, et que la projection (g) de (G) et (g'_1) [(g'_1) étant la projection (g') de (G′) qui a tourné de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz], non seulement sont rectangulaires, mais encore telles que le premier réseau de l'une soit orthogonal au deuxième de l'autre, c'est-à-dire orthogonales, par définition (page 25).

Ceci posé, démontrons la proposition suivante :

Si deux réseaux plans sont orthogonaux, toute congruence plane conjuguée à l'un est orthogonale à une congruence harmonique à l'autre, et inversement.

Soient, en effet, a un réseau du plan, et c un réseau orthogonal à a. Considérons une congruence (g) conjuguée à a. (g) sera alors la projection d'une congruence (G) conjuguée à l'un des réseaux A de l'espace ordinaire qui projettent a.

Transformons par rapport au complexe linéaire d'axe Oz. A se transforme en un réseau B′, qui se projette suivant un réseau b'. (G) se transforme en une congruence (G′), qui est harmonique à B′ (page 23, remarque). Il en résulte (page 22) que la projection (g') de (G′) est harmonique à b'.

Soit maintenant b'_1 le réseau obtenu en faisant tourner b' de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz : b'_1 est orthogonal au réseau a (voir ci-dessus). De même, (g'_1), déduite de (g') par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz, est orthogonale à la congruence (g).

Or, deux réseaux plans, orthogonaux d'un même réseau, sont parallèles. Mais on a vu (page 23) que si deux réseaux plans sont parallèles, toute congruence plane harmonique à l'un est parallèle à une congruence harmonique à l'autre. On peut donc trouver une congruence plane (h), parallèle à (g'_1), qui soit harmonique à c.

D'ailleurs, il résulte immédiatement des définitions données, que si deux congruences planes sont parallèles, toute congruence orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre. Donc (g), conjuguée au réseau plan a, est orthogonale à (h), harmonique au réseau c orthogonal de a.

La propriété inverse s'établit d'une façon analogue.

On peut prouver de la même manière que *si deux congruences planes sont orthogonales, tout réseau plan conjugué à l'une est orthogonal à un réseau harmonique à l'autre, et inversement.*

Les deux propriétés suivantes :

Si deux congruences planes sont orthogonales, le premier réseau focal de chacune d'elles est orthogonal au deuxième réseau focal de l'autre.

Si deux réseaux plans sont orthogonaux, la première congruence focale de chacun d'eux est orthogonale a la deuxième congruence focale de l'autre,

résultent immédiatement des définitions des réseaux plans orthogonaux et des congruences planes orthogonales (page 25), et de la proposition établie page 25.

Nous allons démontrer directement le théorème fondamental suivant qui a été établi par M. Guichard pour le cas de l'espace à n dimensions ($n \geqq 3$), et qui subsiste dans le plan :

Si, dans l'espace a trois dimensions, une congruence (G) *et un réseau* R *sont orthogonaux, la projection de la congruence* (G) *et la trace du réseau* R *sur le plan* xOy, *forment deux congruences orthogonales.*

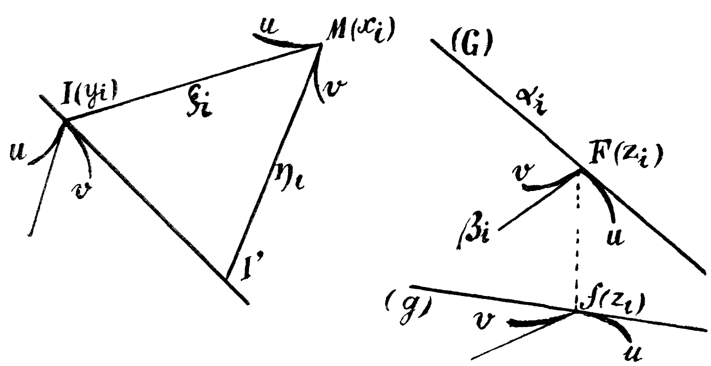

Fig. 13

Soit, en effet, (fig. 13), M un réseau de coordonnées x_i, et de paramètres normaux ξ_i, η_i. On a des équations de la forme :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= h\xi \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= l\eta\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial v} &= n\eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= m\xi\end{aligned}\right.$$

Or, si I et I′ sont les traces, sur le plan xOy, des tangentes au réseau M, II′ décrit une congruence plane dont I et I′ sont les foyers (cela résulte de la propriété établie page 21 ; d'ailleurs, la démonstration directe est instantanée). Le point I, trace de la première tangente du réseau M, décrit un réseau dont la deuxième tangente est précisément la droite II'.

Soit alors (G) une congruence orthogonale au réseau M, c'est-à-dire qui corresponde à ce réseau de façon que (G) soit orthogonale au plan IMI' du réseau (Guichard, *Cours de Géométrie*, 1922-1923), et, par suite, à la droite II' de ce plan. Soit (g) sa projection. II' étant dans le plan xOy, est orthogonale à une projetante de (G). Par suite, étant orthogonale à deux droites non parallèles du plan vertical projetant horizontalement (G), II' est perpendiculaire à ce plan, et en particulier à sa trace (g).

Pour démontrer que les congruences II' et (g) sont orthogonales, il ne reste donc plus qu'à prouver (voir page 25) que la tangente en I à la courbe u et la tangente à la courbe v en f, premier foyer de (g) [projection du premier foyer F de (G)], sont rectangulaires.

Or, les coordonnées de I sont de la forme :

$$y_1 = x_1 + \rho\xi_1, \quad y_2 = x_2 + \rho\xi_2, \quad y_3 = x_3 + \rho\xi_3 = o.$$

En dérivant par rapport à u, on a :

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u} + \rho\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \xi_1\rho'_u; \qquad \frac{\partial y_2}{\partial u} = \frac{\partial x_2}{\partial u} + \rho\frac{\partial \xi_2}{\partial u} + \xi_2\rho'_u;$$

$$o = \frac{\partial x_3}{\partial u} + \rho\frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \xi_3\rho'_u$$

En remplaçant $\frac{\partial x}{\partial u}$ par $h\xi$, on peut écrire :

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = (h + \rho'_u)\,\xi_1 + \rho\frac{\partial \xi_1}{\partial u}; \qquad \frac{\partial y_2}{\partial u} = (h + \rho'_u)\,\xi_2 + \rho\frac{\partial \xi_2}{\partial u};$$

$$-\frac{\partial x_3}{\partial u} = -h\xi_3 = \rho\frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \xi_3\rho'_u,$$

d'où :

$$-\rho\frac{\partial \xi_3}{\partial u} = \xi_3(h + \rho'_u) \quad \text{(A)}$$

Soient, d'autre part, α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, les paramètres normaux du premier foyer F de (G) [α_i paramètres directeurs de (G)] (fig. 13). On a les équations :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= h_1\alpha \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= l_1\beta \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= n_1\beta \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} &= m_1\alpha \end{aligned}\right. .$$

On en déduit que $\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}$, $\frac{\partial \alpha_2}{\partial v}$, sont paramètres directeurs pour la deuxième tangente du foyer f de (g). Tout revient donc à établir la relation :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\left[(h + \rho'_u)\,\xi_1 + \rho\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\right] + \frac{\partial \alpha_2}{\partial v}\left[(h + \rho'_u)\,\xi_2 + \rho\frac{\partial \xi_2}{\partial u}\right] = o,$$

ou :

$$(h + \rho'_u)\left(\xi_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \xi_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial v}\right) + \rho\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial v}\frac{\partial \xi_2}{\partial u}\right) = o. \quad \text{(E)}$$

Or, la congruence (G) et le réseau R étant orthogonaux, on a :

(1) $\qquad \sum_1^3 \xi\alpha = o \qquad \sum_1^3 \eta\alpha = o \qquad$ (2)

En dérivant l'équation (1) par rapport à v, on a :

$$\sum_1^3 \xi\alpha'_v = -\sum_1^3 \alpha\xi'_v = -h\,\Sigma\eta\alpha = o.$$

En dérivant alors l'équation : $\sum_1^3 \xi\alpha'_v = o$ par rapport à u, on a :

$$\sum_1^3 \xi'_u\alpha'_v = -\sum_1^3 \xi\alpha''_{uv} = -\sum_1^3 \xi\left(\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial u}\alpha'_v + m_1 n_1 \alpha\right)$$

$$= -\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial u}\sum_1^3 \xi\alpha'_v - m_1 n_1 \sum_1^3 \xi\alpha = o.$$

On peut donc remplacer, dans (E), $\xi_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} + \xi_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}$ par $-\xi_3\frac{\partial\alpha_3}{\partial v}$, et $\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u}\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}$ par $-\frac{\partial\xi_3}{\partial u}\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}$, et, en tenant compte de (A), on obtient une identité.

Démontrons également que *si, dans l'espace à trois dimensions, une congruence et un réseau sont orthogonaux, la trace de la congruence et la projection du réseau sur le plan xOy, sont deux réseaux orthogonaux.*

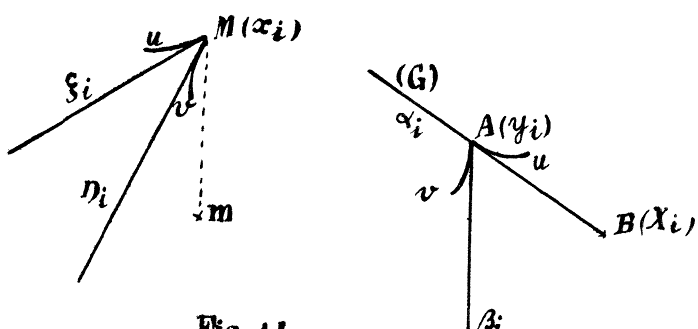

Fig. 14

Soient, en effet, (fig. 14), y_1, y_2, y_3, les coordonnées du premier foyer A de la congruence (G), α_i les paramètres normaux de la première tangente du réseau A [cette tangente est (G)], β_i les paramètres normaux de la deuxième tangente.

On a les équations :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u} &= h\alpha \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} &= l\beta \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= n\beta \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} &= m\alpha \end{aligned}\right.$$

On a, pour les coordonnées X_1, X_2, de la trace B de (G) sur le plan xOy :

$$X_1 = y_1 - y_3\frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \qquad X_2 = y_2 - y_3\frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial y_1}{\partial u} - \frac{\partial y_3}{\partial u}\frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{y_3}{\alpha_3^2}\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}\right) = h\alpha_1 - h\alpha_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{y_3}{\alpha_3^2}\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}\right)$$

$$= -\frac{y_3}{\alpha_3^2}\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}\right).$$

On a, de même :

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{y_3}{\alpha_3^2}\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} - \alpha_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}\right).$$

On en déduit que :

$$\alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}, \qquad \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} - \alpha_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}$$

sont paramètres directeurs pour la tangente en B à la courbe u.

On va montrer que cette tangente est perpendiculaire à la tangente en m [m, projection du réseau M (x_i, ξ_i, η_i) orthogonal à (G)] à la courbe v, c'est-à-dire que l'on a :

$$o = E = \eta_1\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}\right) + \eta_2\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} - \alpha_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}\right).$$

L'expression E peut s'écrire :

$$E = \alpha_3\left(\eta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \eta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u}\right) - \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2).$$

Or, des conditions d'orthogonalité de M et de (G) :

(1) $$\sum_1^3 \xi\alpha = o, \qquad \sum_1^3 \eta\alpha = o \qquad (2),$$

on déduit :

$$\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 = -\alpha_3\eta_3;$$

par suite, on a :

$$E = \alpha_3 \sum_1^3 \eta \frac{\partial \alpha}{\partial u}.$$

Or, en dérivant (2) par rapport à u, on a :

$$\sum_1^3 \eta \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\sum_1^3 \alpha \frac{\partial \eta}{\partial u} = -m_1 \sum_1^3 \xi\alpha = o$$

(en remplaçant $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ par $m_1\xi$, m_1 étant l'une des rotations du réseau m).

Donc $E = o$.

Il ne reste plus qu'à établir la perpendicularité de la première tangente du réseau m et de la deuxième tangente du réseau B.

Or, on a :

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial y_1}{\partial v} - \frac{\partial y_3}{\partial v}\frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{y_3}{\alpha_3^2}\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{l}{\alpha_3}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) - \frac{y_3}{\alpha_3^2}\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial v}\right);$$

ou, en tenant compte des relations : $\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial v} = n\beta_i$:

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{l}{\alpha_3}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) - \frac{ny_3}{\alpha_3^2}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) = \frac{l\alpha_3 - ny_3}{\alpha_3^2}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3).$$

On trouve, de même :

$$\frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{l\alpha_3 - ny_3}{\alpha_3^2}(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3).$$

Par suite :

$$\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \qquad \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3,$$

dirigent la deuxième tangente du réseau B.

Il s'agit de prouver que :

$$E_1 = \xi_1(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \xi_2(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3) = o.$$

Or, on peut écrire :

$$E_1 = \alpha_3(\xi_1\beta_1 + \xi_2\beta_2) - \beta_3(\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2),$$

ou, en remplaçant $\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2$ par $-\xi_3\alpha_3$:

$$E_1 = \alpha_3 \sum_1^3 \xi\beta.$$

Mais la relation : $\sum_1^3 \xi\alpha = o$, entraîne, par dérivation :

$$\sum_1^3 \xi\alpha'_v + \sum_1^3 \alpha\xi'_v = o,$$

d'où, en remplaçant α'_v par $n\beta$ et ξ'_v par $n_1\eta$:

$$n\sum_1^3 \xi\beta = -n_1\sum_1^3 \eta\alpha = o;$$

d'où :

$$E_1 = o.$$

Réseaux et congruences x, px

Dans son Mémoire : Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1903, Chapitre III, pages 104 et suivantes), M. Guichard a défini ce qu'il entend, dans un espace d'ordre n, par réseaux O, pO, C, pC, par congruences O, pO, C, pC.

Nous rappellerons seulement ici qu'il appelle congruence px, dans l'espace à n dimensions, la projection sur cet espace d'une congruence $(p-1)x$ de l'espace à $n+1$ dimensions, ou, ce qui revient au même, d'une congruence $(p-2)x$ de l'espace à $n+2$ dimensions, ou d'une congruence x de l'espace à $n+p-1$ dimensions.

Ainsi, une congruence 2O de l'espace ordinaire est la projection, sur cet espace, d'une congruence O (congruence de normales) de l'espace à quatre dimensions.

Mêmes notations en ce qui concerne les réseaux. Par exemple, un réseau plan 3C est la projection, sur le plan, d'un réseau C (cyclique) de l'espace à quatre dimensions, ou d'un réseau 2C de l'espace à trois dimensions.

Dans sa note du 13 décembre 1920 (Comptes rendus de l'Académie des Sciences), M. Guichard indique que, dans le plan, tout réseau pO est orthogonal à un réseau pO, et que toute congruence pH $[(p+1)$O$]$ est orthogonale à une congruence pC, et réciproquement. De plus, dans son Cours de Géométrie de 1922-23, il signale que, dans le plan, toute congruence conjuguée à un réseau O est une congruence 2O, et que toute congruence harmonique à un réseau O est une congruence C. De même, à un réseau 2O sont conjuguées ∞^0 congruences 2O ; toutes les autres sont 3O. Il y a une congruence C harmonique à un réseau 2O plan ; les autres congruences sont 2C.

A un réseau plan 2C (ou L) sont harmoniques ∞^2 congruences 2O, ∞^3 congruences 3O ; les autres sont 4O.

De même, à une congruence 2O sont conjugués 2 réseaux O, ∞^1 réseaux 2O ; les autres sont 3O. Tout réseau harmonique à une congruence 2O est L (ou 2C) (applicable sur l'espace à 4 dimensions).

A une congruence plane 3O sont conjugués ∞^1 réseaux 2O, ∞^2 réseaux 3O ; les autres sont 4O. Il existe ∞^0 réseaux 2C harmoniques à une congruence plane 3O, tous les autres sont 3C (ou 2L).

Enfin, parmi les réseaux harmoniques à une congruence C, se trouvent ∞^0 réseaux O, ∞^1 réseaux 2O ; les autres sont 3O.

En se référant aux indications précédentes, et au Chapitre III (pages 104 et suivantes) du Mémoire de M. Guichard « Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques » (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1903), et en convenant d'appeler réseau K, dans l'espace à deux dimensions, tout réseau conjugué à une congruence C, on peut former les deux tableaux suivants :

TABLEAU I

CONGRUENCES	RÉSEAUX CONJUGUÉS	RÉSEAUX HARMONIQUES
2O	2 réseaux O, ∞^1 réseaux 2O Les autres 3O	2C ou L
3O	∞^1 réseaux 2O, ∞^2 réseaux 3O Les autres 4O	∞^0 réseaux 2C (ou L) Les autres 3C (ou 2L)
pO	∞^{p-2} réseaux $(p-1)$ O; ∞^{p-1} pO. Les autres $(p+1)$O	
C	K	∞^0 réseaux O; ∞^1 réseaux 2O $(\infty^0 = 2)$ Les autres 3O
2C	Une série de réseaux K Les autres 2K	∞^1 réseaux 2O; ∞^2 réseaux 3O Les autres 4O
3C		∞^2 réseaux 3O, ∞^3 réseaux 4O Les autres 5O
pC		∞^{p-1} réseaux pO, ∞^{p} $(p+1)$ O Les autres $(p+2)$ O

TABLEAU II

RÉSEAUX	CONGRUENCES CONJUGUÉES	CONGRUENCES HARMONIQUES
O	2O	C
2O	∞^0 congruences 2O Les autres 3O	∞^0 congruences C Les autres 2C
3O	∞^0 congruences 2O, ∞^1 3O Les autres 4O	∞^0 congruences C ; ∞^1 2C Les autres 3C
pO	∞^{p-3} congruences $(p-1)$ O ; ∞^{p-2} pO Les autres $(p+1)$ O	∞^{p-3} congruenc. $(p-2)$ C ; ∞^{p-2} $(p-1)$ C Les autres pC
2C ou L		∞^2 congruences 2O, ∞^3 3O Les autres 4O
3C ou 2L		∞^3 congruences 3O, ∞^4 4O Les autres 5O
pC		∞^p congruences pO, ∞^{p+1} $(p+1)$ O Les autres $(p+2)$ O
K	C, 2C ou 3C	

PREMIÈRE PARTIE

DÉTERMINATION DES CONGRUENCES DE NORMALES QUI SE TRANSFORMENT EN CONGRUENCES DE NORMALES PAR POLAIRES RÉCIPROQUES RELATIVEMENT A UN COMPLEXE LINÉAIRE

I. — Interprétation géométrique de la propriété.

Soit (C) un complexe linéaire de paramètre K. Considérons une congruence (G) assujettie à la condition d'admettre une congruence (G') *de normales* comme transformée par polaires réciproques relativement au complexe (C).

(G') étant une congruence de normales, ses plans focaux sont rectangulaires, c'est-à-dire forment un faisceau harmonique avec les plans menés par la droite G' de la congruence (G') tangentiellement au cercle de l'infini (plans isotropes). Donc les foyers de la polaire réciproque G de G', qui sont les pôles de ces plans, sont conjugués harmoniques par rapport à la polaire réciproque du cercle de l'infini, qui est un cylindre de révolution autour de l'axe Oz du complexe. Si l'on prend deux autres axes de coordonnées Ox, Oy, formant avec Oz un trièdre trirectangle, ce cylindre, imaginaire pour K réel, a pour équation :

$$(C_1) \qquad x^2 + y^2 + K^2 = o.$$

Si on désigne par (x, y, z), (ξ, η, ζ), les coordonnées des deux foyers de G, la condition sus-indiquée s'exprime par la relation suivante :

$$(1) \qquad \xi x + \eta y + K^2 = o,$$

que l'on pourrait, du reste, obtenir en exprimant l'orthogonalité des plans focaux de G', qui ont pour équations respectives :

$$\eta X - \xi Y + K(Z - \zeta) = o,$$
$$y X - x Y + K(Z - z) = o,$$

ces équations ayant été écrites en remarquant que les plans focaux de G' sont les plans polaires des foyers de G, et contiennent leurs pôles.

La condition (1) peut être interprétée géométriquement de la façon suivante :

Elle exprime que de l'origine O *des coordonnées on voit sous un angle droit le segment focal de la droite* G, *en projection sur le plan* $z = K$.

Réciproquement, si une congruence (G) est telle que d'un point fixe O on voie sous un angle droit la projection, sur un plan fixe (P), du segment focal de chacune de ses droites G, cette congruence possède la propriété de se tranformer en une congruence de normales, par polaires réciproques relativement à un complexe linéaire, dont l'axe est la perpendiculaire OP abaissée de O sur le plan (P), et dont le paramètre a pour valeur la distance de O au plan (P).

En effet, si on prend pour axe Oz la droite OP, la condition imposée se traduit analytiquement par la relation (1), et exprime que les foyers de G sont conjugués par rapport au cylindre (C_1). En transformant par polaires réciproques par rapport au complexe, cette propriété signifie que les plans focaux de la transformée G′ de G sont conjugués par rapport au cercle imaginaire de l'infini, c'est-à-dire rectangulaires, et que par suite (G′) est une congruence de normales.

Si l'on suppose, de plus, que (G) est elle-même une congruence de normales, on voit que le problème faisant l'objet de la première partie de ce travail peut être énoncé sous la forme suivante :

Recherche des surfaces dont les centres de courbure de chaque normale sont conjugués harmoniques par rapport à un cylindre de révolution, — ou dont la projection, sur un plan fixe, du segment joignant les centres de courbure, est vue d'un point fixe sous un angle droit.

II. — Solution analytique du problème

I. — GÉNÉRALITÉS

On voit immédiatement, par symétrie, que si une congruence de normales répond à la question, il en est de même de toute congruence résultant de la rotation de la précédente autour de l'axe Oz du complexe, ou d'une translation parallèle à Oz (les congruences obtenues à l'aide de ces déplacements sont toujours des congruences de normales). Il en résulte que d'une solution on peut, à priori, en déduire une infinité d'autres formant une famille à deux constantes arbitraires.

On se rend compte, à priori, que la solution générale du problème peut être considérée comme dépendant de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, de Monge-Ampère.

En effet, si on considère une trajectoire orthogonale (Σ) d'une congruence (G) répondant à la question, et une trajectoire orthogonale (Σ_1) de sa transformée (G_1), et si on exprime que deux normales correspondantes G et G_1 sont polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire, on obtient quatre relations entre les coordonnées (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) dés deux points correspondants de (Σ) et de (Σ_1), et les dérivées de z et z_1 par rapport à x, y, x_1, y_1.

Ces quatre équations définissent une transformation de Bäcklund, et si on forme la condition de compatibilité, z_1 disparaît. Le problème dépend donc d'une équation aux dérivées partielles unique et linéaire en r, s, t, $rt - s^2$. (Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, de M. Goursat). Le cas actuel est celui où, l'une des deux surfaces (Σ) étant déterminée, il lui correspond une infinité de surfaces (Σ_1). On pouvait même prévoir sans calcul la forme de l'équation, car une surface (Σ) étant déterminée, et (G) étant la congruence de ses normales, il correspond à (Σ) une famille à un paramètre de surfaces (Σ_1), qui sont les trajectoires orthogonales de la transformée (G_1) de (G).

En considérant la question autrement, on peut présenter une remarque.

Soient (S_1), (S_2), les deux nappes de la surface focale de la congruence (G), (x, y, z) les coordonnées du point M_1 où la droite G de la congruence touche (S_1), (ξ, η, ζ) celles du point M_2 de contact de G avec (S_2).

Posons : $$p = z'_x, \quad q = z'_y, \quad \pi = \zeta'_\xi, \quad \varkappa = \zeta'_\eta.$$

Le problème s'exprime par les quatre relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c} p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = F_1 = o \\ \pi(\xi - x) + \varkappa(\eta - y) - (\zeta - z) = F_2 = o. \\ \xi x + \eta y + K^2 = F_3 = o \\ p\pi + q\varkappa + 1 = F_4 = o. \end{array}\right.$$

Sous cette forme, c'est encore un problème de Backlund. Si on essaie de le résoudre et qu'on forme la condition classique de compatibilité : (Darboux, Théorie générale des Surfaces, tome 3, page 440) :

$$(12)\,[F_3F_4] + (13)\,[F_4F_2] + (14)\,[F_2F_3]$$
$$+ (34)\,[F_1F_2] + (42)\,[F_1F_3] + (23)\,[F_1F_4] = o,$$

ζ n'en disparaît pas. On en conclut que z satisfait, non à une équation aux dérivées partielles du second ordre de Monge-Ampère, mais à deux équations aux dérivées partielles simultanées du troisième ordre, et qu'à toute surface (S_1) correspond une seule surface (S_2) et non une infinité.

Par conséquent, sur chaque surface (S_1) répondant à la question, il n'existera qu'une famille de géodésiques dont les tangentes formeront une congruence de normales satisfaisant à la question.

Ainsi, par le complexe linéaire, on ne peut pas réaliser, entre une nappe de la surface focale et sa polaire réciproque, la correspondance de Dini. En d'autres termes, ces deux surfaces ne peuvent pas être représentées géodésiquement l'une sur l'autre par ce procédé.

On pourrait obtenir rapidement, à partir de (1) (page 35), l'équation de Monge-Ampère dont dépend le problème. Il semble plus intéressant de faire intervenir les équations de la droite G qui décrit la congruence (G).

Rapportons-nous à un trièdre trirectangle, Oz coïncidant avec l'axe du complexe. Soient :

$$(G) \quad \Big\{ \; x = az + q, \qquad y = bz + q.$$

les équations de G.

Le plan polaire d'un point M (x, y, z) par rapport au complexe linéaire, a pour équation :

$$yX - xY + K(Z - z) = o.$$

Si M est un point de G, on peut, dans cette équation, remplacer x et y par leurs valeurs tirées des équations (G). En écrivant qu'on obtient une identité en z, on a les deux équations :

$$bX - aY - K = o, \qquad qX - pY + KZ = o,$$

qui définissent la transformée G′ de G, et qui peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(G') \quad \Big\{ \; X = a_1Z + p_1, \qquad Y = b_1Z + q_1,$$

où l'on a : $\quad a_1 = a\lambda, \qquad b_1 = b\lambda, \qquad p_1 = p\lambda, \qquad q_1 = q\lambda,$

λ ayant la valeur $\quad \dfrac{K}{bp - aq}.$

Il en résulte que les projections de G et de G′ sont parallèles : on retrouve un résultat connu.

La condition pour que (G) soit une congruence de normales se traduit par la relation :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{a\frac{\partial p}{\partial\alpha}+b\frac{\partial q}{\partial\alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{a\frac{\partial p}{\partial\beta}+b\frac{\partial q}{\partial\beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right]$$

laquelle peut être mise sous la forme :

$$(2) \qquad A\ (b^2+1)+B\,(a^2+1)+abC=o,$$

en posant : $\quad A=a'_\beta p'_\alpha-a'_\alpha p'_\beta, \quad B=q'_\alpha b'_\beta-q'_\beta b'_\alpha,$

$$C=b'_\alpha p'_\beta-b'_\beta p'_\alpha+a'_\alpha q'_\beta-a'_\beta q'_\alpha.$$

En exprimant, de même, que G′ décrit une congruence de normales, on a la condition :

$$(2') \qquad (A_1(a^2+b^2)+B_1\,(p^2+q^2+K^2)+C_1\,(ap+bq)=o,$$

en posant : $\quad A_1=q'_\alpha p'_\beta-q'_\beta p'_\alpha, \qquad B_1=b'_\alpha a'_\beta-b'_\beta a'_\alpha,$

$$C_1=p'_\alpha b'_\beta+q'_\beta a'_\alpha-q'_\alpha a'_\beta-b'_\alpha p'_\beta.$$

Si l'on prend, en particulier, pour paramètres α et β les cosinus des angles formés par G avec Ox et Oy, la condition (2) prend la forme simple :

$$q'_\alpha=p'_\beta.$$

On peut alors poser : $\quad p=\phi'_\alpha, \quad q=\phi'_\beta,$

et la relation (2′) devient :

$$(p\alpha+q\beta)\,[r\,(1-\alpha^2)-2\alpha\beta s+t\,(1-\beta^2)]$$
$$+(\alpha^2+\beta^2)\,(1-\alpha^2-\beta^2)\,(s^2-rt)=p^2+q^2+K^2,$$

$p, q, r, s, t,$ désignant, suivant l'usage, les dérivées premières et secondes de la fonction ϕ.

Quant aux trajectoires orthogonales, elles sont représentées par les équations paramétriques suivantes :

$$x=M\alpha+\phi'_\alpha\,; \qquad y=M\beta+\phi'_\beta\,; \qquad z=M\gamma,$$

en posant : $\quad M=-\alpha\,\phi'_\alpha-\beta\,\phi'_\beta+\phi+C. \qquad (C=\text{const.})$

Un point courant de l'une d'elles s'obtient en menant, par le point I de coordonnées ϕ'_α, ϕ'_β du plan xOy, la parallèle à la droite G, et en prenant sur cette droite, à partir de I, une longueur égale à M.

Les congruences (G), *étant déterminées par une équation aux dérivées partielles du second ordre, dépendent de deux fonctions arbitraires.*

Prenons pour variables indépendantes l'x et l'y de l'une des trajectoires orthogonales. Soient alors P et Q les dérivées partielles de z. Les équations de G deviennent :

$$X = -PZ + x + pz, \qquad Y = -QZ + y + qz$$

On a donc : $\quad a = -P, \ b = -Q, \ p = x + Pz, \ q = y + Qz.$

En portant dans l'équation (2') (page 39), et en remplaçant, pour simplifier les notations, P, Q, par des minuscules, on trouve l'équation :

$$\left.\begin{aligned} &-(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)+(s^2-rt)(x^2+y^2+K^2) \\ &+(px+qy)[(t\,1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)]=o \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

On peut, d'ailleurs, obtenir une équation beaucoup plus simple par l'emploi des variables de Darboux (paramètres des génératrices rectilignes de la sphère), et de la fonction ξ définie dans le tome I de la Théorie générale des Surfaces (page 295). Si c, c', c'', sont les cosinus directeurs de la droite G, on a les formules :

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad c' = \frac{i(1+\alpha\beta)}{\alpha-\beta}, \quad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

On a alors, pour les coordonnées x, y, d'un point de l'une des nappes de la développée (voir Darboux, Théorie générale des Surfaces, tome I, page 296) :

$$x - iy = s + \sqrt{rt}$$

$$x + iy = -\alpha\beta\left(s + \sqrt{rt}\right) + p\alpha + q\beta - \xi.$$

Pour les coordonnées ξ_1, η_1, d'un point de l'autre nappe, il suffit de placer le signe — devant chaque radical.

L'équation (1) (page 35) :

$$(1) \qquad \xi_1 x + \eta_1 y + K^2 = o$$

qui exprime la propriété exigée, prend alors la forme :

$$\alpha\beta(s^2 - rt) + s(\xi - p\alpha - q\beta) = K^2.$$

En appliquant à cette équation la transformation de Legendre, on peut lui donner la forme plus simple :

$$pq = zs + K^2(s^2 - rt).$$

Le choix des variables précédentes ne donne pas nécessairement des surfaces réelles. Pour éviter cet inconvénient, on prendra les variables α et β telles que l'on ait :

$$c = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}, \quad c' = \frac{i(\beta-\alpha)}{1+\alpha\beta}, \quad c'' = \frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha\beta},$$

ce qui conduira à l'équation :

$$\alpha\beta\, rt - K^2 = (s\alpha - q)(s\beta - p),$$

qui peut s'écrire : $\quad \alpha\beta(rt - s^2) + s(p\alpha + q\beta) - pq = K^2.$

Soient, pour terminer, $\cos\lambda$, $\sin\lambda$, $sh\nu$, des paramètres directeurs de la normale à l'une des trajectoires orthogonales des congruences à étudier. En prenant λ et ν pour variables indépendantes, on aura l'équation suivante :

$$rt - s^2 - zr + p^2 + K^2 = o \qquad (1)$$

C'est une équation de la forme :

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = o,$$

où : $$H = o, \quad 2K = o, \quad L = o, \quad M = p^2 + K^2, \quad N = 1.$$

L'équation : $$\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = o$$

devient actuellement : $$\lambda^2 = p^2 + K^2.$$

En effectuant une transformation d'Ampère définie par les relations :

$$X = p, \quad Y = y, \quad Z = z - px, \quad P = -x, \quad Q = q,$$

$$R = -\frac{1}{r}, \qquad S = +\frac{s}{r}, \qquad T = \frac{rt - s^2}{r},$$

l'équation (1) est remplacée par la suivante :

$$(X^2 + K^2)R - T + Z - PX = o, \qquad (2)$$

Les équations des caractéristiques de (2) sont :

$$\begin{cases} dY - \lambda_1 dX = o \\ H\lambda_1 dP + LdQ + M\lambda_1 dX = o \end{cases} \qquad \begin{cases} dY - \lambda_2 dX = o \\ H\lambda_2 dP + LdQ + M\lambda_2 dX = o, \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 étant les racines de l'équation :

$$H\lambda^2 - 2K\lambda + L = o, \quad (K = o, \quad L = -1),$$

qui s'écrit : $$(X^2 + K^2)\lambda^2 = 1,$$

d'où l'on tire :

$$\lambda_1 = +\frac{1}{\sqrt{X^2 + K^2}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{X^2 + K^2}}.$$

Chacune des deux familles de caractéristiques admet une combinaison intégrable, car de : $$dY \pm \frac{dX}{\sqrt{X^2 + K^2}} = o,$$

on tire :

$$Y \pm \log\left(X + \sqrt{X^2 + K^2}\right) = \text{const.}$$

Si nous changeons alors de variables en posant :

$$Y + \log(X + \sqrt{X^2 + K^2}) = u,$$

$$Y - \log(X + \sqrt{X^2 + K^2}) = v,$$

l'équation transformée sera de la forme :

$$S = F(X, Y, Z, P, Q).$$

En effectuant les calculs, on trouve, après avoir posé $K^2 = 1$, ce qui, à une homothétie près, ne change rien :

$$-4S + 2(Q - P)\, th\frac{u - v}{2} + z = o.$$

C'est là une équation à invariants égaux que, par suite, l'on pourra ramener à une équation de Moutard.

En posant : $z = \sigma\, ch\frac{u - v}{2},$ on obtient l'équation :

$$2\, ch^2\frac{u - v}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v} - \sigma = o,$$

qui est intégrable par la méthode de Laplace.

En dérivant par rapport à v, et en posant : $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = z_1$, on a l'équation :

$$2\, ch^2\frac{u - v}{2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\partial v} - 2\, sh\frac{u - v}{2}\, ch\frac{u - v}{2}\frac{\partial z_1}{\partial u} - z_1 = o,$$

ou :

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\partial v} - th\frac{u - v}{2}\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{z_1}{ch^2\frac{u - v}{2}} = o,$$

dont l'un des invariants est nul.

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z_1}{\partial v} - th\frac{u - v}{2} z_1\right) = o.$$

On a immédiatement l'intégrale première :

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} - th\frac{u - v}{2} z_1 = V \qquad \text{(V fonction de } v \text{ seul).}$$

L'intégration s'achève aisément en posant : $z_1 = \frac{t}{ch^2\frac{u - v}{2}}$

On a alors :

$$\frac{\partial t}{\partial v} = V\, ch^2\frac{u - v}{2},$$

puis

$$t = V_1 + V_2 e^{u} + V_3 e^{-u} + U \qquad \text{(U fonction de } u \text{ seul),}$$

où l'on a :

$$4V'_2 V'_3 = V'^2_1, \qquad \text{et} \qquad V'_3 = V'_2 \times e^{2v}.$$

II. — MÉTHODE DES INVARIANTS

Soient $$\left\{ x = az + x_0 \qquad y = bz + y_0 \right.$$

les équations définissant une droite G d'une congruence (G). x_0, y_0, sont les coordonnées du point où cette droite perce le plan xoy. Si on prend $\cos\lambda$, $\sin\lambda$, $sh\nu$ pour paramètres directeurs de G, on aura : $a = \dfrac{\cos\lambda}{sh\nu}$, $\quad b = \dfrac{\sin\lambda}{sh\nu}$.

La signification géométrique de λ et ν s'aperçoit aisément. λ est le paramètre de direction de la perpendiculaire commune à G et à sa transformée (G'); par suite, λ sera un invariant pour la congruence (G) et sa transformée (G') par polaires réciproques relativement au complexe linéaire.

ν définit l'angle de la normale avec Oz. D'une façon plus précise, on peut noter que $sh\nu$ est le rapport des distances de l'origine O à la trace sur xoy du plan tangent à une trajectoire orthogonale de G, à la trace de Oz sur ce plan tangent.

La transformée G' de G sera définie par des équations de la forme :

$$\left\{ x' = a'z + x'_0, \qquad y' = b'z' + y'_0 \right.$$

où $$a' = \frac{\cos\lambda}{sh\nu'}, \qquad b' = \frac{\sin\lambda}{sh\nu'} .$$

On a, d'autre part (page 38) les relations :

$$a' = a\mu, \qquad b' = b\mu, \qquad x'_0 = x_0\mu, \qquad y'_0 = y_0\mu,$$

μ ayant la valeur :

$$\mu = \frac{K}{bx_0 - ay_0} = \frac{b'x'_0 - a'y'_0}{K} = \frac{K sh\nu}{x_0 \sin\lambda - y_0 \cos\lambda} = \frac{x'_0 \sin\lambda - y'_0 \cos\lambda}{K sh\nu'}$$

En tenant compte de ce que, d'autre part, $\mu = \dfrac{a'}{a} = \dfrac{sh\nu}{sh\nu'}$,

on trouve les relations :

$$x_0 \sin\lambda - y_0 \cos\lambda = K sh\nu' \tag{1}$$

$$x'_0 \sin\lambda - y'_0 \cos\lambda = K sh\nu \tag{1'}$$

On en déduit aussi que l'on a :

$$(x_0 \cos\lambda + y_0 \sin\lambda)\, sh\nu = (x'_0 \cos\lambda + y'_0 \sin\lambda)\, sh\nu',$$

ce qui permet de poser :

$$x_0 \cos\lambda + y_0 \sin\lambda = -K \frac{\psi}{sh\nu} \tag{2}$$

(ψ étant une fonction auxiliaire), et :

$$x'_0 \cos\lambda + y'_0 \sin\lambda = -K \frac{\psi}{sh\nu'} \tag{2'}$$

En exprimant (voir page 39) que les congruences (G) et (G') sont des congruences de normales, on a, α et β étant des variables indépendantes quelconques, les deux relations suivantes, obtenues en tenant compte des relations (1), (1′), (2), (2′) :

$$(E_1)\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial\nu'}{\partial\alpha}ch\nu\, ch\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}+\frac{\partial\nu}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-sh\nu\, sh\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)\\&=-\frac{\partial\nu'}{\partial\beta}ch\nu\, ch\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}+\frac{\partial\nu}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}-sh\nu\, sh\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)\end{aligned}\right.$$

$$(E_2)\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial\nu}{\partial\alpha}ch\nu\, ch\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}+\frac{\partial\nu'}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-sh\nu\, sh\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)\\&=-\frac{\partial\nu}{\partial\beta}ch\nu\, ch\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}+\frac{\partial\nu'}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}-sh\nu\, sh\nu'\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)\end{aligned}\right.$$

En prenant pour variables : $\alpha=\nu+\nu'$, $\beta=\nu-\nu'$, on peut ramener les équations (E_1), (E_2) aux deux suivantes :

$$(I)\qquad \left\{\ \psi'_\alpha=\lambda'_\alpha\, ch\alpha,\qquad -\psi'_\beta=\lambda'_\beta\, ch\beta\right.$$

La condition de compatibilité de ces deux équations :

$$\lambda''_{\alpha\beta}\,(ch\alpha+ch\beta)=o,$$

est :

$$\lambda''_{\alpha\beta}=o,\qquad (I')$$

d'où :

$$\lambda=F(\alpha)+\Phi(\beta)$$

λ une fois connu, ψ est ensuite donné par une quadrature à l'aide des équations (I)

$$\psi=\int F'_\alpha\, ch\alpha\, d\alpha-\int \Phi'_\beta\, ch\beta\, d\beta+C^{te}.$$

L'équation (I′) montre que $\alpha=\nu+\nu'$ et $\beta=\nu-\nu'$ sont les caractéristiques de l'équation du problème.

Au reste, on peut prouver que le problème se résout complètement sans signe de quadrature, comme on le verra plus loin.

Equation des lignes de courbure d'une trajectoire orthogonale d'une congruence (G)

On peut obtenir l'équation des lignes de courbure en exprimant que le point

$$\left\{\ x=az+x_0,\qquad y=bz+y_0\right.\qquad (3)$$

de la droite G décrit une courbe tangente à G, et que l'on a, par suite, pour ce point :

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{1},$$

ou :

$$\frac{d\,(az+y_0)}{a}=\frac{d\,(bz+y_0)}{b}=\frac{dz}{1},$$

d'où :

$$-z=\frac{dx_0}{da}=\frac{dy_0}{db}\qquad (4)$$

L'équation (4) donne le z du point où G touche chacune des deux nappes de la développée ; x et y sont ensuite donnés par les relations (3).

Quant à l'équation des lignes de courbure, elle s'écrit :

$$\frac{dx_0}{da} = \frac{dy_0}{db}.$$

Or, l'équation ci-dessus équivaut à la suivante :

$$\frac{dx_0 \cos\lambda + dy_0 \sin\lambda}{da \cos\lambda + db \sin\lambda} = \frac{dx_0 \sin\lambda - dy_0 \cos\lambda}{da \sin\lambda - db \cos\lambda}$$

En tenant compte des relations (1) et (2), on trouve :

$$sh\nu\, sh\nu'\, d\lambda^2 - d\psi\, d\lambda - ch\nu\, ch\nu'\, d\nu\, d\nu' = o,$$

d'où, en remplaçant ν et ν' en fonction de α et β :

$$(1 + 4\lambda'^2_\alpha)\, d\alpha^2 = (1 + 4\lambda'^2_\beta)\, d\beta^2 \qquad (5)$$

On trouve ensuite, pour les coordonnées d'un point quelconque d'une nappe de la développée :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{k} &= \sin\lambda\, sh\nu' + 2\cos\lambda\, ch\nu' \frac{\lambda'_\beta\, d\beta - \lambda'_\alpha\, d\alpha}{d\alpha + d\beta} \\ \frac{y}{k} &= -\cos\lambda\, sh\nu' + 2\sin\lambda\, ch\nu' \frac{\lambda'_\beta\, d\beta - \lambda'_\alpha\, d\alpha}{d\alpha + d\beta} \\ \frac{z}{k} &= \psi + 2\, sh\nu\, ch\nu' \frac{\lambda'_\beta\, d\beta - \lambda'_\alpha\, d\alpha}{d\alpha + d\beta} \end{aligned}\right.$$

en prenant pour $\frac{d\beta}{d\alpha}$ l'une des deux racines de l'équation (5).

Il se présente ici quelques remarques géométriques.

Le point N, de coordonnées

$$\sin\lambda\, sh\nu' \quad -\cos\lambda\, sh\nu', \quad \psi,$$

n'est autre que le pied, sur G, de la perpendiculaire commune à G et G′, comme on le voit immédiatement en observant que toute droite de paramètres

$$\sin\lambda, \; -\cos\lambda, \; o,$$

est bien perpendiculaire à G et G′.

On retrouve ainsi des résultats connus :

1° Que la perpendiculaire commune est horizontale, car si N′ est le pied sur G′ de la perpendiculaire commune, les points N et N′ ont même cote $K\psi$;

2° Qu'elle rencontre l'axe du complexe, car les droites ON, ON′ ont pour projections des droites ayant mêmes paramètres directeurs.

Un point de l'une des nappes de la développée peut s'obtenir à l'aide de la construction suivante :

On mène par l'origine, parallèlement à la direction de la perpendiculaire commune, une longueur OA $= sh\nu'$. En A on élève une perpendiculaire au plan xoy, de longueur AN $= K\psi$.

Il ne reste plus qu'à porter sur la normale, à partir du point N de cette normale G, une longueur égale à $2\, ch\nu' \dfrac{\lambda'_\beta\, d\beta - \lambda'_\alpha\, d\alpha}{d\alpha + d\beta}$, [où l'on a pris pour $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ une des racines de l'équation (5)].

Equation des lignes asymptotiques d'une trajectoire orthogonale

On sait que les équations paramétriques d'un point M (X, Y, Z), d'une trajectoire orthogonale d'une congruence (G) sont :

$$X = x - u\rho, \qquad Y = y - v\rho, \qquad Z = z - w\rho,$$

$u = \dfrac{\cos\lambda}{ch\nu}, \quad v = \dfrac{\sin\lambda}{ch\nu}, \quad w = \dfrac{sh\nu}{ch\nu}$, étant les cosinus directeurs de G, x, y, z les coordonnées d'un point quelconque N de G, et ρ la distance des points M, N.

ρ doit satisfaire à la condition :

$$d\rho = u dx + v dy + w dz \qquad (6)$$

Si nous prenons pour point N (x, y, z), le pied sur G de la perpendiculaire commune, de coordonnées :

$$K \sin\lambda\, sh\nu', \qquad -K\cos\lambda\, sh\nu', \qquad K\psi,$$

la condition ci-dessus s'écrit :

$$\frac{d\rho}{K} = \frac{sh\nu'\, d\lambda + sh\nu\, d\psi}{ch\nu}$$

En remplaçant $d\lambda$ par $\lambda'_\alpha\, d\alpha + \lambda'_\beta\, d\beta$, $d\psi$ par $\psi'_\alpha\, d\alpha + \psi'_\beta\, d\beta$, ν et ν' par leurs valeurs en fonction de α et β, on trouve :

$$\frac{d\rho}{K} = \lambda'_\alpha\, sh\alpha\, d\alpha - \lambda'_\beta\, sh\beta\, d\beta,$$

et, par suite :

$$\rho'_\alpha = K\lambda'_\alpha\, sh\alpha, \qquad \rho'_\beta = -K\lambda'_\beta\, sh\beta.$$

Ceci posé, l'équation des lignes asymptotiques est :

$$dA\, dX + dB\, dY + dC dZ = o$$

Prenons :

$$A = \frac{\cos\lambda}{ch\nu} = u\,; \qquad B = v, \qquad C = w,$$

nous aurons, après simplifications :

$$\Sigma\, du\, dx - \rho\, \Sigma\, du^2 = o,$$

d'où, en remplaçant u et x par leurs valeurs :

$$K\, ch\nu\, ch\nu' \,(\lambda'_\alpha - \lambda'_\beta)\, d\alpha\, d\beta - \rho\,(d\lambda^2 + d\nu^2) = o.$$

Surfaces minima se rattachant au problème posé

On a trouvé plus haut, pour déterminer une trajectoire orthogonale, des relations de la forme :

$$\lambda = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta)$$

$$\begin{cases} \psi'_\alpha = \lambda'_\alpha ch\alpha, & \psi'_\beta = -\lambda'_\beta ch\beta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho'_\alpha = K\lambda'_\alpha sh\alpha, & \rho'_\beta = -K\lambda'_\beta sh\beta. \end{cases}$$

On peut donc poser :

$$(7) \qquad \lambda = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \qquad \psi = f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta)\,; \qquad \frac{\rho}{K} = f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta),$$

les fonctions f_2, f_3, φ_2, φ_3, se reliant à f_1, φ_1, par les équations :

$$(8) \qquad \begin{cases} f'^2_2(\alpha) - f'^2_3(\alpha) = f'^2_1(\alpha) \\ \varphi'^2_2(\beta) - \varphi'^2_3(\beta) = \varphi'^2_1(\beta) \end{cases}$$

Montrons d'abord que les coordonnées d'un point M d'une trajectoire orthogonale peuvent s'exprimer sans aucun signe de quadrature. Nous allons utiliser, à cet effet, la transformation de Weierstrass.

Si l'on pose :

$$(9) \qquad f'_2(\alpha) + f'_3(\alpha) = u f'_1(\alpha)$$

(où u est une fonction de α), on déduit de la première équation (8) la relation :

$$f'_2(\alpha) - f'_3(\alpha) = \frac{f'_1(\alpha)}{u},$$

ce qui permet d'écrire :

$$f'_2(\alpha) = \frac{(u^2+1)f'_1(\alpha)}{2u}\,; \qquad f'_3(\alpha) = \frac{(u^2-1)f'_1(\alpha)}{2u},$$

d'où :

$$\frac{f'_2(\alpha)}{u^2+1} = \frac{f'_3(\alpha)}{u^2-1} = \frac{f'_1(\alpha)}{2u}$$

En écartant le cas exceptionnel où u serait une constante, on peut égaler chacun de ces rapports à $\frac{1}{2}\mathcal{F}(u)\frac{du}{d\alpha}$, après avoir remarqué que l'on a :

$$\lambda'_\alpha ch\alpha + \lambda'_\alpha sh\alpha = u\lambda'_\alpha,$$

d'où :

$$u = ch\alpha + sh\alpha.$$

On peut alors écrire :

$$f_1(\alpha) = \int u\,\mathcal{F}(u)\,du$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{2}\int (1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du$$

$$f_3(\alpha) = \frac{1}{2}\int (u^2-1)\,\mathcal{F}(u)\,du$$

En posant, d'autre part :

$$\varphi'_2(\beta) + \varphi'_3(\beta) = v\varphi'_1(\beta),$$

on aurait, de même :

$$\varphi'_2(\beta) - \varphi'_3(\beta) = \frac{\varphi'_1(\beta)}{v},$$

d'où :

$$\varphi'_2(\beta) = \frac{(v^2+1)\,\varphi'_1(\beta)}{v}; \qquad \varphi'_3(\beta) = \frac{(v^2-1)\,\varphi'_1(\beta)}{v},$$

et :

$$\frac{\varphi'_2(\beta)}{v^2+1} = \frac{\varphi'_3(\beta)}{v^2-1} = \frac{\varphi'_1(\beta)}{2v} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_1(v)\,\frac{dv}{d\beta}$$

ce qui donnerait :

$$\varphi_1(\beta) = \int v\,\mathcal{F}_1(v)\,dv; \qquad \varphi_2(\beta) = \frac{1}{2}\int (1+v^2)\,\mathcal{F}_1(v)\,dv; \qquad \varphi_3(\beta) = \frac{1}{2}\int (v^2-1)\,\mathcal{F}_1(v)\,dv,$$

(avec $\quad -v = sh\beta + ch\beta$).

Les formules définissant λ, ψ et ρ s'écrivent alors

$$\lambda = \int u\,\mathcal{F}(u)\,du + \int v\,\mathcal{F}_1(v)\,dv$$

$$\psi = \frac{1}{2}\int (1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1+v^2)\,\mathcal{F}_1(v)\,dv$$

$$\frac{\rho}{K} = \frac{1}{2}\int (u^2-1)\,\mathcal{F}(u)\,du + \frac{1}{2}\int (v^2-1)\,\mathcal{F}_1(v)\,du$$

En substituant à $\mathcal{F}(u)$ la dérivée troisième d'une fonction $f(u)$ de u et à $\mathcal{F}_1(v)$ la dérivée troisième d'une fonction $\varphi(v)$ de v, on obtiendra les formules suivantes, débarrassées de tout signe de quadrature :

$$\lambda = u f''(u) - f'(u) + v\varphi''(v) - \varphi'(v);$$

$$\psi = \frac{1+u^2}{2} f''(u) - uf'(u) + f(u) + \frac{1+v^2}{2}\varphi''(v) - v\varphi'(v) + \varphi(v),$$

$$\frac{\rho}{K} = \frac{u^2-1}{2} f''(u) - uf'(u) + f(u) + \frac{v^2-1}{2}\varphi''(v) - v\varphi'(v) + \varphi(v).$$

Ceci posé, je dis que la surface (Σ) dont le point courant M (x, y, z) a pour coordonnées :

$$x = K\psi, \qquad y = i\rho, \qquad z = iK\lambda, \qquad (\Sigma)$$

est une surface minima rapportée à ses lignes de longueur nulle.

On a d'abord, en effet :

$$\Sigma x_\alpha'^2 = K^2 (\lambda_\alpha'^2 ch^2\alpha - \lambda_\alpha'^2 sh^2\alpha - \lambda_\alpha'^2) = O,$$

et

$$\Sigma x_\beta'^2 = K^2 (\lambda_\beta'^2 ch^2\beta - \lambda_\beta'^2 sh^2\beta - \lambda_\beta'^2) = O.$$

Par suite, α et β sont les paramètres des lignes de longueur nulle.

De plus, les courbes α et β découpent sur la surface (Σ) un réseau (propriété caractéristique des surfaces minima), car x, y, z, (ou, ce qui revient au même, ψ, ρ et λ), sont solutions d'une même équation de la forme : $\theta''_{uv} = o$.

On en conclut que (Σ) *est une surface minima, et que la détermination des congruences faisant l'objet du présent travail équivaut a celle des surfaces minima. Cette identité rattache donc l'étude de ces congruences à celle des surfaces minima.*

En particulier, puisque α *et* β *sont à la fois les paramètres des lignes minima de* (Σ) *et des caractéristiques des trajectoires orthogonales* (S) *des congruences étudiées* (*congruences* O'_c), *on en déduit une relation géométrique remarquable entre* (Σ) *et* (S), *qui peut être considérée comme une propriété géométrique non encore énoncée des surfaces minima.*

Remarque. — Quand on passe d'une congruence (G) à sa transformée, λ et ψ ne changent pas, mais ρ est modifié, comme on le voit en remarquant que α ne change pas par permutation de ν et ν', mais que β se change en $-\beta$.

Si, dans les formules (Σ), qui peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{aligned} x &= K\left[\int \lambda'_\alpha\, ch\alpha d\alpha - \int \lambda'_\beta\, ch\beta d\beta\right] \\ y &= iK\left[\int \lambda'_\alpha\, sh\alpha d\alpha - \int \lambda'_\beta\, sh\beta d\beta\right] \\ z &= iK\lambda, \end{aligned}\right.$$

on change β en $-\beta$, on obtient les équations :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= K\left[\int \lambda'_\alpha\, ch\alpha d\alpha - \int \lambda'_\beta\, ch\beta d\beta\right] \\ y &= iK\left[\int \alpha'_\lambda\, sh\alpha d\alpha + \int \lambda'_\beta\, sh\beta d\beta\right] \\ z &= iK\lambda, \end{aligned}\right.$$

qui définiraient la surface minima (Σ') attachée à la congruence (G') transformée de (G)

On déduit de là un moyen très simple pour faire correspondre à une surface minima donnée quelconque (Σ) une autre surface minima (Σ'). Cette correspondance semble différente de celle qui est étudiée par Darboux dans le Tome I des Leçons sur la *théorie générale des Surfaces*.

L'équation des lignes asymptotiques de (Σ) est :

$$\lambda'_\alpha\, d\alpha^2 = \lambda'_\beta\, d\beta^2$$

et celle des lignes de courbure s'écrit :

$$\lambda'_\alpha \, d\alpha^2 + \lambda'_\beta \, d\beta^2 = o.$$

REMARQUE. — *Darboux a montré (Leçons sur la théorie générale des Surfaces, Tome III) qu'il y avait équivalence entre le probleme de la détermination des surfaces minima et celui de la déformation du paraboloıde de révolution. De ce qui précède, il résulte, par suite, qu'il y a équivalence entre le probleme de la recherche des congruences* O'_c *et celui de la déformation du paraboloıde de révolution. Cette équivalence sera établie plus loin, d'une manière rigoureuse, par une autre voie.*

III. — MÉTHODE DES RÉSEAUX PLANS (λ, ν)

α) Les réseaux (λ, ν) et leurs applications

Si, par l'origine O des coordonnées, on mène des parallèles à toutes les droites d'une congruence (G_1), on obtient une congruence (G) dite *représentation sphérique* de la première. Si (G_1) est une congruence de normales, la congruence-point (G) découpe, sur la sphère de centre O et de rayon 1, un réseau conjugué qui, se trouvant sur une sphère, est en même temps orthogonal. (Cette propriété, qui est caractéristique de la représentation sphérique d'une congruence de normales, est évidemment indépendante du rayon de la sphère, mais l'emploi de la sphère de rayon 1 est commode, car la trace sur cette sphère d'une droite de la congruence (G) a pour coordonnées les cosinus directeurs de cette droite).

Ceci posé, nous allons traiter le problème *en appliquant une méthode permettant de transformer toute question relative à la représentation sphérique d'une congruence de normales* (*c'est-à-dire relative à un réseau conjugué de la sphère de centre* O), *en une question relative à un réseau plan orthogonal.*

On peut, d'une infinité de manières, établir une correspondance entre un réseau de la sphère et un réseau plan. (Suivant la notation de M. Guichard, le mot « réseau » sera employé pour « réseau conjugué »).

Une correspondance de cette nature existe, par exemple (fig. 15), entre un point M de la sphère et la trace m, sur le plan xOy, de la droite AM, A étant l'un des points communs à la sphère et à Oz (projection stéréographique).

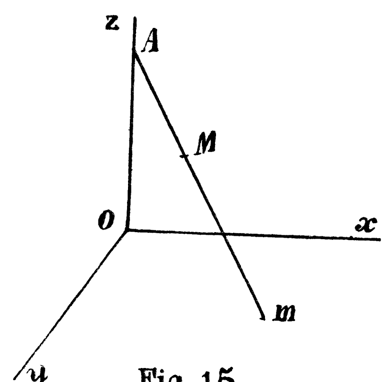

Fig. 15

On sait (page 8) que si une droite G décrit une congruence (G), des paramètres directeurs quelconques de G vérifient une même équation de Laplace.

Or, on peut toujours trouver des paramètres directeurs, α, β, γ, tels que l'on ait :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Il suffit, pour cela, si α_1, β_1, γ_1, sont paramètres directeurs, de poser :

$$\alpha = K\alpha_1, \qquad \beta = K\beta_1, \qquad \gamma = K\gamma_1,$$

en prenant pour K la valeur :

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$$

Soit alors :

$$\theta''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\,\theta'_u + \frac{l'_u}{l}\,\theta'_v + R\,\theta \qquad (1)$$

l'équation de Laplace à laquelle satisfont de tels paramètres α, β, γ, d'une congruence (G) (u et v, paramètres des développables de la congruence).

Posons : $\alpha = \cos\lambda, \quad \beta = \sin\lambda, \quad \gamma = sh\nu, \quad \delta = ch\nu,$

$$\sigma''_{uv} - \frac{h'_v}{h}\sigma'_u - \frac{l'_u}{l}\sigma'_v - R\sigma = A, \tag{2}$$

A étant nul pour toute solution de (1). Désignons par A_α, A_β, A_γ, A_δ, les résultats de substitution, dans le premier membre de (2), de σ par α, β, γ, δ. Nous obtiendrons des relations pouvant se ramener aux quatre suivantes :

$$A_\alpha \cos\lambda + A_\beta \sin\lambda = -\lambda'_u\lambda'_v - R \tag{m}$$

$$A_\alpha \sin\lambda - A_\beta \cos\lambda = -\lambda''_{uv} + \frac{h'_v}{h}\lambda'_u + \frac{l'_u}{l}\lambda'_v \tag{n}$$

$$A_\gamma\, sh\nu - A_\delta\, ch\nu = -\nu'_u\nu'_v + R \tag{p}$$

$$A_\gamma\, ch\nu - A_\delta\, sh\nu = \nu''_{uv} - \frac{h'_v}{h}\nu'_u - \frac{l'_u}{l}\nu'_v \tag{s}$$

Pour une congruence de paramètres α, β, γ, on a :

$$A_\alpha = A_\beta = A_\gamma = o,$$

et les équations précédentes prennent la forme :

$$(m_1) \qquad -\lambda'_u\lambda'_v - R = o, \qquad -\lambda''_{uv} + \frac{h'_v}{h}\lambda'_u + \frac{l'_u}{l}\lambda'_v = o \qquad (n_1)$$

$$(p_1) \qquad -A_\delta\, ch\nu = -\nu'_u\nu'_v + R \qquad -A_\delta\, sh\nu = \nu''_{uv} - \frac{h'_v}{h}\nu'_u - \frac{l'_u}{l}\nu'_v \qquad (s_1)$$

Or, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence soit congruence de normales, est que l'équation de Laplace à laquelle satisfont des paramètres directeurs *quelconques* α, β, γ, de chacune de ses droites, admette aussi comme solution $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$. (Guichard, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1897, Chapitre II, n° 14).

D'après le choix actuel des paramètres, si la congruence (G) est une congruence de normales, l'équation (1) admet comme solution $\sqrt{1 + sh^2\nu} = ch\nu = \delta$, et, par suite, on a : $A_\delta = o$.

On peut déduire de là la nouvelle propriété suivante :

On obtient la représentation sphérique de toutes les congruences de normales à l'aide des équations de Laplace.

$$\theta''_{uv} = P\theta'_u + Q\theta'_u + R\theta$$

admettant pour solutions deux fonctions $a(u,v)$, $b(u,v)$, et leurs inverses.

En effet, soit (G) une congruence de normales. Prenons des paramètres directeurs α, β, γ, tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. On pourra poser :

$$\alpha = \cos\lambda, \qquad \beta = \sin\lambda, \qquad \gamma = sh\nu$$

L'équation de Laplace (E) dont α, β, γ, sont solutions, devra, d'après ce qui précède, admettre $\delta = ch\nu$ comme solution. Donc (E), admettant $e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}$ et $e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}$, admettra $e^{i\lambda}$ et $e^{-i\lambda} = \frac{1}{e^{i\lambda}}$,

De même, admettant $e^{\nu} + e^{-\nu}$ et $e^{\nu} - e^{-\nu}$, (E) admettra e^{ν} et $\frac{1}{e^{\nu}}$.

Soit, inversement, (E) une équation de Laplace admettant pour solutions :

$$a\,(u, v), \frac{1}{a}, \quad \text{et } b\,(u, v), \frac{1}{b}.$$

Si on pose : $a = e^{i\lambda}$, $\frac{1}{a} = e^{-i\lambda}$, on aura : $\cos\lambda = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$.

$$\sin\lambda = \frac{1}{2i}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$ch\nu = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right); \qquad sh\nu = \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right),$$

et la congruence de paramètres directeurs.

$$\alpha = \cos\lambda, \qquad \beta = \sin\lambda, \qquad \gamma = sh\nu$$

sera bien une congruence de normales, puisque (E), admettant pour solutions b et $\frac{1}{b}$, admettra aussi $b + \frac{1}{b}$, et par suite $ch\nu$.

Ceci noté, il résulte, de la condition $A_\delta = o$, que les relations (p_1) et (s_1) se réduisent alors aux suivantes :

$$(p_2) \qquad -\nu'_u \nu'_v + R = o \qquad\qquad \nu''_{uv} - \frac{h'_v}{h}\nu'_u - \frac{l'_u}{l}\nu'_v = o \qquad (s_2)$$

Des équations (m_1) et (p_2), on déduit :

$$(3) \qquad \lambda'_u \lambda'_v + \nu'_u \nu'_v = o.$$

Cette dernière relation exprime que le réseau plan décrit par le point de coordonnées λ, ν, est orthogonal. De plus, les relations (n_1) et (s_2) montrent que l'équation de Laplace à laquelle satisfont λ, ν, n'est autre que l'équation (1) (page 51) privée du terme en θ.

Réciproquement, si le réseau (λ, ν) correspondant à une congruence (G) est orthogonal, la relation (3) est vérifiée. En la comparant à (m_1), on en déduit :

$$\nu'_u \nu'_v = -\lambda'_u \lambda'_v = R.$$

La relation (p_1) donne alors : $A_\delta\, ch\nu = o$, et comme $ch\nu \neq o$, on a : $A_\delta = o$.

Cette dernière condition exprime que (G) est une congruence de normales.

On peut donc indiquer le nouveau critérium suivant pour caractériser une congruence de normales :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence (G) *soit une congruence* *de normales, est que,* $\cos\lambda$, $\sin\lambda$, $sh\nu$, *étant paramètres directeurs d'une droite* G *de* (G), *le point de coordonnées* λ, ν, *décrire un réseau orthogonal.*

Soit maintenant un réseau plan orthogonal quelconque, décrit par un point M (λ, ν). La condition d'orthogonalité s'exprime par la relation (3), et permet de poser :
$$-\lambda'_u\,\lambda'_u = \nu'_u\,\nu'_v = \mathrm{R}.$$

L'équation de Laplace à laquelle satisfont λ et ν, étant :
$$\sigma''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\,\sigma'_u + \frac{l'_u}{l}\,\sigma'_v,$$
considérons l'équation :
$$\theta''_{uv} - \frac{h'_v}{h}\,\theta'_u - \frac{l'_u}{l}\,\theta'_v - \mathrm{R}\theta = o. \tag{1}$$

Si nous substituons dans le premier membre de cette dernière les quantités :
$$\alpha = \cos\lambda, \qquad \beta = \sin\lambda, \qquad \gamma = sh\nu, \qquad \delta = ch\nu,$$
nous obtiendrons les équations (m), (n), (p), (s), de la page 52, en désignant par A_α, A_β, A_γ, A_δ, les résultats de substitution. Or, les seconds membres de ces équations étant nuls par hypothèse, les premiers le sont. Comme les déterminants :
$$\begin{vmatrix} \cos\lambda, & \sin\lambda, \\ \sin\lambda, & -\cos\lambda, \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} sh\nu, & -ch\nu \\ ch\nu, & -sh\nu \end{vmatrix} = +1,$$
ne sont pas nuls, on a nécessairement :
$$\mathrm{A}_\alpha = \mathrm{A}_\beta = \mathrm{A}_\gamma = \mathrm{A}_\delta = \mathrm{O}.$$

Donc l'équation (1) admet pour solutions α, β, γ et $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$; par suite, la congruence-point de paramètres directeurs α, β, γ, est une congruence de normales.

On en conclut qu'à *tout réseau plan orthogonal on peut faire correspondre des congruences de normales ayant une représentation sphérique bien déterminée.*

On peut remarquer que la correspondance précédente réalise une représentation conforme de la sphère sur le plan.

Désignons, en effet, par ds l'élément linéaire du réseau M (λ, ν), et par dS celui du réseau M_1 (x, y, z) correspondant de la sphère. On a :
$$ds^2 = d\lambda^2 + d\nu^2 = (\lambda'_u\,du + \lambda'_v\,dv)^2 + (\nu'_u\,du + \nu'_v\,dv)^2$$
$$= (\lambda'^2_u + \nu'^2_u)\,du^2 + (\lambda'^2_v + \nu'^2_v)\,dv^2,$$
en tenant compte de la condition d'orthogonalité :
$$\lambda'_u\,\lambda'_v + \nu'_u\,\nu'_v = o.$$

D'autre part, on a :
$$x = \frac{\cos\lambda}{ch\nu}, \qquad y = \frac{\sin\lambda}{ch\nu}, \qquad z = \frac{sh\nu}{ch\nu}.$$

Par suite :

$$d\,S^2 = du^2\,\Sigma\,x_u'^2 + dv^2\,\Sigma\,x_v'^2$$
$$= \frac{1}{ch^2\nu}\,[(\lambda_u'^2 + \nu_u'^2)\,du^2 + (\lambda_v'^2 + \nu_v'^2)\,dv^2] = \frac{1}{ch^2\nu}\,ds^2.$$

Montrons, par deux exemples, l'application que l'on peut faire des réseaux (λ, v).

EXEMPLE 1. — **Etude des congruences de Ribaucour qui sont congruences de normales (cette étude équivaut, comme on sait, à la détermination des surfaces minima).**

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence soit une congruence de Ribaucour [c'est-à-dire intercepte sur la surface centrale un « réseau » (conjugué)], est que les invariants de l'équation de Laplace à laquelle satisfont des paramètres directeurs quelconques de cette congruence, soient égaux. Donc si les paramètres α, β, γ, (tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$) d'une telle congruence vérifient l'équation (1) (page 51), on pourra prendre : $l = ih$.

D'autre part, les coordonnées du point qui décrit le réseau plan (λ, ν) correspondant à cette congruence, vérifient l'équation de Laplace :

$$\sigma''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\,\sigma'_u + \frac{l'_u}{l}\,\sigma'_v \tag{4}$$

Soient alors (page 8) :

$$(5)\ \left\{ \begin{array}{l} \xi'_v = n\eta \\ \eta'_u = m\xi \end{array} \right. \qquad (6)\ \left\{ \begin{array}{l} x'_u = h\xi \\ x'_v = l\eta \end{array} \right. \qquad (7)\ \left\{ \begin{array}{l} h'_v = lm \\ l'_u = hn \end{array} \right.$$

les équations relatives à ce réseau (où l'on a : $x_1 = \lambda$, $x_2 = \nu$).

Si, dans la condition d'orthogonalité : $\Sigma x'_u\,x'_v = o$, on remplace les dérivées de x par leurs valeurs (6), cette condition est remplacée par la suivante : $\Sigma\xi\eta = o$.

Multiplions la première équation (5) par ξ, et ajoutons les équations analogues, nous aurons :

$$\Sigma\xi\xi'_v = n\,\Sigma\xi\eta = o,$$

d'où, en intégrant :

$$\Sigma\xi^2 = \mathrm{F}(u).$$

En opérant de même sur les dernières équations (5), on obtient :

$$\Sigma\eta\eta'_u = m\,\Sigma\xi\eta = o, \qquad \text{d'où :} \qquad \Sigma\eta^2 = \mathcal{F}(v).$$

Comme les ξ ne sont définis qu'à un facteur près fonction de u, et les η à un facteur près fonction de v (voir pages 7-8), on peut prendre :

$$\mathrm{F}(u) = 1, \qquad \mathcal{F}(v) = 1,$$

et on a alors les relations :

$$\Sigma\xi^2 = 1, \qquad \Sigma\eta^2 = 1.$$

Le réseau orthogonal (λ, ν) étant plan, on peut donc poser :

$$\xi_1 = \cos\tau\,; \qquad \xi_2 = \sin\tau\,; \qquad \eta_1 = -\sin\tau\,; \qquad \eta_2 = \cos\tau.$$

En remplaçant, dans les équations (5), les ξ par ces valeurs, on trouve :

$$m = -\tau'_u\,; \qquad n = +\tau'_v \tag{7'}$$

Des équations (7), qui, pour $l = ih$, peuvent s'écrire :

$$\frac{ih'_v}{h} = -m, \qquad \frac{ih'_u}{h} = +n,$$

on déduit, en écrivant la condition de compatibilité :

$$m'_u + n'_v = o, \qquad \text{d'où :} \quad \tau''^2_u = \tau''^2_v.$$

Cette équation s'intègre. On en déduit τ, d'où ν et γ, λ et α, β, à l'aide des équations (6).

EXEMPLE 2. — **Etude des surfaces à courbure totale constante.**

Soient c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale G à une surface à courbure totale constante. Pour former l'équation de Laplace à laquelle satisfont c, c', c'', il suffit, dans l'équation :

$$(1) \qquad \theta''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\,\theta'_u + \frac{l'_u}{l}\,\theta'_v + R\theta$$

à laquelle satisfont les paramètres directeurs $\cos\lambda$, $\sin\lambda$, $sh\nu$, de poser : $\theta = \theta_1\, ch\nu$. Il est d'ailleurs inutile d'effectuer les calculs. On sait, à priori, que le coefficient de θ_1 sera nul, [puisque, du fait que la congruence (G) est une congruence de normales, l'équation aux c, c', c'', admet comme solution $\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = 1$], et que h et l seront divisés par $ch\nu$. On a donc instantanément la transformée en θ_1 :

$$\frac{\partial_2\theta_1}{\partial u\partial v} = \frac{\partial\theta_1}{\partial u}\left(\frac{h'_v}{h} - \nu'_v\, th\nu\right) + \frac{\partial\theta_1}{\partial v}\left(\frac{l'_u}{l} - \nu'_u\, th\nu\right) \tag{8}$$

Si, d'autre part, entre les formules d'Olinde Rodrigues :

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} + R_1\frac{\partial c}{\partial u} = o, \qquad \frac{\partial x_0}{\partial v} + R_2\frac{\partial c}{\partial v} = o,$$

on élimine x_0, on a l'équation :

$$\sigma''_{uv} = \frac{-\dfrac{\partial R_1}{\partial v}}{R_1 - R_2}\,\sigma'_u + \frac{\dfrac{\partial R_2}{\partial u}}{R_1 - R_2}\,\sigma'_v, \tag{9}$$

à laquelle doivent satisfaire c, c', c''.

Les équations (8) et (9), ayant trois solutions communes c, c', c'', sont identiques. On a donc :

$$\frac{h'_v}{h} - \nu'_v\, th\nu = -\frac{\dfrac{\partial R_1}{\partial v}}{R_1 - R_2}; \qquad \frac{l'_u}{l} - \nu'_u\, th\nu = \frac{\dfrac{\partial R_2}{\partial u}}{R_1 - R_2}. \tag{10}$$

Soit alors $R_1 R_2 = -1$ la relation existant entre les rayons de courbure d'une trajectoire orthogonale de la congruence (G). (On peut toujours, à l'aide d'une homothétie, qui ne modifie pas les propriétés de la surface, ramener la constante à être égale à -1). Si, dans les relations (10), on remplace R_2 par $-\frac{1}{R_1}$, on a deux équations qui s'intègrent, et en posant :

$$\mu = R_1^2 + 1,$$

on obtient :

$$\mu = \frac{4ch^2\nu}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{l^2}{4ch^2\nu}. \tag{11}$$

L'élimination de μ entre ces deux équations donne :

$$h^2 + l^2 = 4ch^2\nu. \tag{12}$$

Posons alors :

$$h = 2h_1\, ch\nu, \qquad l = 2l_1\, ch\nu, \tag{13}$$

nous aurons :

$$h_1^2 + l_1^2 = 1, \tag{14}$$

ce qui permettra de poser :

$$h_1 = \cos\varphi, \qquad l_1 = \sin\varphi,$$

d'où :

$$h = 2ch\nu \cos\varphi, \qquad l = 2ch\nu \sin\varphi. \tag{15}$$

De la première équation (11), on tire alors :

$$1 + R_1^2 = \mu = \frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi, \qquad \text{d'où :} \quad R_1 = \operatorname{tg}\varphi.$$

Or, on sait que cette fonction φ, pour les surfaces à courbure totale constante, est l'intégrale générale de l'équation :

$$\varphi''_{u^2} - \varphi''_{v^2} = \sin\varphi\cos\varphi. \tag{16}$$

(Darboux, Théorie générale des Surfaces, Tome III, page 427).

Effectivement, si dans le système (5), (6), (7) (page 55), on remplace h et l par leurs valeurs (15), on trouve que φ est donné par l'équation (16).

Enfin, si, dans l'équation (8), on effectue la substitution (13), on donne à cette équation la forme :

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial\theta_1}{\partial u}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v} + \frac{\partial\theta_1}{\partial v}\frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}.$$

Comme on a, d'autre part :

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 = h_1^2 + l_1^2,$$

il en résulte que le critérium donné par M. Guichard pour les congruences cycliques (voir ci-dessous), est vérifié. On en conclut que la congruence des normales à une surface à courbure totale constante, est une congruence cyclique, ce qui démontre à nouveau le théorème d'Ossian Bonnet.

β) Résolution du problème proposé

Si l'on se reporte à ce qui a été dit page 36, on voit que la projection (g_1) de la congruence (G) sur le plan $z = K$, si la congruence (G) satisfait aux conditions du problème, est harmonique à un réseau-point orthogonal, et que, par suite, c'est une congruence cyclique. C'est donc à la fois une congruence 2O et cyclique, et il en est de même de sa projection (g) sur xOy.

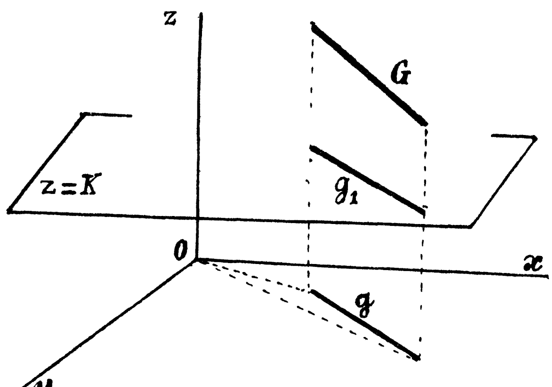

Fig. 16

Or, M. Guichard, dans son Mémoire sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1897, Chapitre III, n° 21), a donné le critérium suivant : *si, dans un espace d'ordre n, une congruence est cyclique, on a, entre les quantités h, l, qui figurent dans l'équation de Laplace aux paramètres* α_i $(i = 1, 2 \ldots, n,)$ *et ces paramètres, la relation suivante :*

$$\sum_1^n \alpha_i^2 = \frac{h^2}{U^2} + \frac{l^2}{V^2}$$

(U *étant une fonction de u, et* V *une fonction de v*) *et réciproquement.*

h n'étant défini qu'à un facteur près fonction de u, et l qu'à un facteur près fonction de v, on peut prendre : $U = V = 1$.

Actuellement, on a :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

ce qui permet de poser :

$$h = \cos \varphi, \qquad l = \sin \varphi.$$

En portant ces valeurs dans les équations (7) (page 55), on a, en tenant compte des valeurs (7′) de m et de n, les deux relations :

$$(17) \qquad \tau'_v = \varphi'_u, \qquad \tau'_u = \varphi'_v.$$

On en conclut que φ et τ sont deux solutions (non indépendantes) de l'équation :

$$(18) \qquad \mu''_{u^2} = \mu''_{v^2}$$

On déduit, des équations (17) et (18) :

$$(A) \qquad \varphi = f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2)\,; \qquad \tau = f_1(\rho_1) - f_2(\rho_2),$$

en posant :

$$u + v = \rho_1, \qquad u - v = \rho_2.$$

Les équations (6) (page 55) donnent ensuite, en y remplaçant x successivement par λ et ν :

$$\lambda'_u = h\xi_1 = \cos(f_1 + f_2) \cos(f_1 - f_2) = \frac{1}{2}(\cos 2f_1 + \cos 2f_2),$$

$$\lambda'_v = l\eta_1 = - \sin(f_1 + f_2) \sin(f_1 - f_2) = \frac{1}{2}(\cos 2f_1 - \cos 2f_2).$$

$$\nu'_u = \frac{1}{2}(\sin 2f_1 - \sin 2f_2), \qquad \nu'_v = \frac{1}{2}(\sin 2f_1 + \sin 2f_2).$$

On tire de là :

$$2\lambda'_{\rho_1} = \cos 2f_1(\rho_1)\,; \qquad 2\lambda'_{\rho_2} = \cos 2f_2(\rho_2),$$

$$2\nu'_{\rho_1} = \sin 2f_1\,; \qquad 2\nu'_{\rho_2} = - \sin 2f_2$$

Si l'on pose alors :

$$\cos 2f_1 = 2\mathrm{F}'(\rho_1), \qquad \cos 2f_2 = 2\mathrm{G}'(\rho_2),$$
$$\sin 2f_1 = 2\mathcal{F}'(\rho_1), \qquad - \sin 2f_2 = 2\mathcal{G}'(\rho_2),$$

on a :

$$\text{(A)} \qquad \lambda = \mathrm{F}(\rho_1) + \mathrm{G}(\rho_2), \qquad \nu = \mathcal{F}(\rho_1) + \mathcal{G}(\rho_2), \qquad \text{(B)}$$

avec les conditions :

$$\text{(C)} \qquad \mathrm{F}'^2_{\rho_1} + \mathcal{F}'^2_{\rho_1} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{G}'^2_{\rho^2} + \mathcal{G}'^2_{\rho^2} = \frac{1}{4}. \qquad \text{(D)}$$

Posons maintenant :

$$\mathrm{F}' + i\mathcal{F}' = -\frac{t}{2}.$$

L'équation (C) donnera :

$$\mathrm{F} - i\mathcal{F}' = -\frac{1}{2t},$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{F}'}{1 + t^2} = \frac{\mathcal{F}'}{i(1 - t^2)} = \frac{-1}{4t}.$$

En égalant chacun de ces rapports à $-\frac{1}{2}\mathrm{H}(t)\frac{dt}{d\rho_1}$, on aura :

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}\int(1 + t^2)\,\mathrm{H}(t)\,dt, \qquad \mathcal{F} = \frac{i}{2}\int(1 - t^2)\,\mathrm{H}(t)\,dt.$$

De même, si l'on pose :

$$\mathrm{G}' + i\mathcal{G}' = -\frac{t_1}{2},$$

on trouvera :

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2}\int(1 + t_1^2)\,\mathrm{H}_1(t_1)\,dt_1, \qquad \mathcal{G} = \frac{i}{2}\int(1 - t_1^2)\,\mathrm{H}_1(t_1)\,dt_1.$$

Les formules (A) et (B) s'écrivent alors :

$$\lambda = \frac{1}{2}\int (1+t^2)\,\mathrm{H}(t)\,dt \;+\; \frac{1}{2}\int (1+t_1^2)\,\mathrm{H}_1(t_1)\,dt_1,$$

$$\nu = \frac{i}{2}\int (1-t^2)\,\mathrm{H}(t)\,dt \;+\; \frac{i}{2}\int (1-t_1^2)\,\mathrm{H}_1(t_1)\,dt_1.$$

En posant enfin :

$$\mathrm{H}(t) = f'''(t), \qquad \mathrm{H}_1(t_1) = f_1'''(t_1),$$

on aura λ et ν sans quadratures, après une intégration par parties :

$$\lambda = \frac{1+t^2}{2} f''(t) - tf'(t) + f(t) + \frac{1+t_1^2}{2} f_1''(t_1) - tf'_1(t_1) + f_1(t_1)$$

$$\nu = i\frac{1-t^2}{2} f''(t) + itf'(t) - if(t) + i\frac{1-t_1^2}{2} f''_1(t_1) + it_1 f'_1(t_1) - if_1(t_1).$$

On a alors également, sans quadrature : $\alpha = \cos\lambda$, $\beta = \sin\lambda$, $\gamma = sh\nu$.

Nous allons maintenant adjoindre à la congruence (G) une deuxième congruence de normales (G'), se projetant parallèlement à la projection de (G) sur $x\mathrm{O}y$, suivant une congruence cyclique. Soient α_1, β_1, γ_1, ceux de ses paramètres directeurs tels que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ (alors $\alpha = \alpha_1$ et $\beta = \beta_1$) et :

$$s''_{uv} = \frac{\mathrm{H}'_v}{\mathrm{H}} s'_u + \frac{\mathrm{L}'_u}{\mathrm{L}} s'_v + \mathrm{R}_1 s,$$

l'équation de Laplace à laquelle satisfont α, β, et γ_1. Si nous posons :

$$\alpha = \cos\lambda, \qquad \beta = \sin\lambda, \qquad \gamma_1 = sh\nu_1,$$

nous aurons les relations suivantes :

$$\lambda'_u \lambda'_v = -\mathrm{R}_1 \tag{2$_1$}$$

$$\lambda''_{uv} = \frac{\mathrm{H}'_v}{\mathrm{H}} \lambda'_u + \frac{\mathrm{L}'_u}{\mathrm{L}} \lambda'_v \qquad \frac{\partial \nu_1}{\partial u}\frac{\partial \nu_1}{\partial v} = +\mathrm{R} \qquad \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial u \partial v} = \frac{\mathrm{H}'_v}{\mathrm{H}}\frac{\partial \nu_1}{\partial u} + \frac{\mathrm{L}'_u}{\mathrm{L}}\frac{\partial \nu_1}{\partial v}.$$

En comparant l'équation (m_1) page 52) à l'équation (2_1), on voit que *si deux congruences quelconques ont leurs projections sur $x\mathrm{O}y$ parallèles, les équations de Laplace auxquelles satisfont les cosinus directeurs α et β de ces projections, ont même terme en θ.*

De même que pour (G), à la congruence (G') se rattache un réseau plan orthogonal (λ, ν). Soient :

$$(5_1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^0}{\partial v} = \mathrm{N}\eta^0 \\[2mm] \dfrac{\partial \eta^0}{\partial u} = \mathrm{M}\xi^0 \end{cases} \qquad (6_1)\ \begin{cases} \mathrm{X}'_u = \mathrm{H}\xi^0 \\ \mathrm{X}'_v = \mathrm{L}\eta^0 \end{cases} \qquad (7_1)\ \begin{cases} \mathrm{H}'_v = \mathrm{LM} \\ \mathrm{L}'_u = \mathrm{HN} \end{cases}$$

les équations relatives à ce réseau.

Supposons maintenant que la projection horizontale de la première tangente du deuxième réseau focal de (G) et celle de la deuxième tangente du premier réseau focal de (G′), soient parallèles, et que la projection horizontale de la deuxième tangente du premier réseau focal de (G) soit parallèle à celle de la première tangente du deuxième réseau focal de (G′).

D'après la Note de M. Guichard parue le 26 décembre 1922 dans les *Comptes Rendus*, ces deux propriétés se traduisent analytiquement par les deux relations suivantes :

$$\alpha\beta'_u - \beta\alpha'_u = h\mathrm{HU}, \qquad \text{ou :} \qquad \lambda'_u = h\mathrm{HU} \tag{18'}$$

et

$$\lambda'_v = l\mathrm{LV}, \tag{19}$$

U étant une fonction de u et V une fonction de v.

On tire, des équations (18′) et (6) :

$$h\mathrm{HU} = h\xi_1, \qquad \text{d'où :} \qquad \mathrm{H} = \frac{\xi_1}{\mathrm{U}} = \frac{\cos\tau}{\mathrm{U}}.$$

On a, de même :

$$l\mathrm{LV} = l\eta_1, \qquad \text{d'où :} \qquad \mathrm{L} = \frac{\eta_1}{\mathrm{V}} = \frac{-\sin\tau}{\mathrm{V}}.$$

H n'étant défini qu'à un facteur près fonction de u, et L qu'à un facteur près fonction de v, on pourra prendre : $\mathrm{U} = +1, \quad \mathrm{V} = -1,$

d'où : $$\mathrm{H} = \cos\tau, \qquad \mathrm{L} = \sin\tau.$$

Les équations (7_1) donnent alors :

$$\mathrm{M} = -\tau'_v, \qquad \mathrm{N} = +\tau'_u.$$

Des équations (6) (page 55) et (6_1) (page 60), on tire :

$$h\xi_1 = \mathrm{H}\xi^0_1, \qquad \text{d'où :} \qquad \xi^0_1 = \cos\varphi.$$

On a, de même :

$$\xi^0_2 = \sin\varphi; \qquad \eta^0_1 = -\sin\varphi; \qquad \eta^0_2 = \cos\varphi.$$

Si on porte dans les équations (5_1) on retombe précisément sur les équations (17) (page 58).

On remarquera qu'on déduit tout ce qui concerne (G′) *de* (G) *en échangeant* τ *et* φ.

Réciproquement, étant donnée une congruence (G) de normales se projetant suivant une congruence cyclique (congruence O_c), si on considère une deuxième congruence (G′) définie par la condition que son réseau (λ, ν) s'obtienne en permutant τ et φ dans les équations relatives au réseau correspondant à la première, et que l'on fasse tourner autour de Oz la congruence (G′) jusqu'à ce que la projection sur xOy de chacune de ses droites soit parallèle à celle de la droite correspondante de (G), il existe des congruences parallèles à la nouvelle congruence obtenue (G″)

qui se transforment en congruences parallèles à (G) par polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire d'axe Oz.

Pour la congruence (G), on a, en effet, les équations :

$$\lambda'_u = \cos\varphi \cos\tau, \qquad \nu'_u = \cos\varphi \sin\tau,$$

$$\lambda'_v = -\sin\varphi \sin\tau, \qquad \nu'_v = \sin\varphi \sin\tau.$$

Si on permute τ et φ, les dérivées de λ sont les mêmes. On a donc, pour la congruence (G′) :

$$\lambda_1 = \lambda + \alpha; \qquad \text{d'où :} \quad \alpha_1 = \cos(\lambda + \alpha); \qquad \beta_1 = \sin(\lambda + \alpha),$$

α étant une constante. Par suite, si l'on fait tourner la congruence (G′) d'un angle $-\alpha$ autour de Oz, les projections des droites correspondantes G et G′ seront parallèles.

On a, d'ailleurs :

$$h = \cos\varphi, \qquad l = \sin\varphi, \qquad H = \cos\tau, \qquad L = \sin\tau.$$

Les relations (6) (page 55), appliquées au réseau (λ, ν) de la congruence (G), permettent d'écrire :

$$\lambda'_u = h\xi_1 = \cos\varphi \cos\tau = hH, \qquad \lambda'_v = l\eta_1 = \sin\varphi \sin\tau = lL.$$

Les relations (18′) et (19) (page 61) sont donc vérifiées, et, par suite, les deux conditions énoncées page 61 sont satisfaites.

La fin de la démonstration résulte immédiatement de la Note de M. Guichard parue le 10 mai 1920 dans les *Comptes Rendus*. D'après cette Note, les congruences possédant les propriétés énoncées page 61, sont telles que, A étant le premier réseau focal de $(G)(v_0)$, B′ le deuxième réseau focal de $(G')(u_0)$, il existe des réseaux parallèles à A dont la transformée par polaires réciproques relativement à un complexe linéaire d'axe Oz, est un réseau parallèle à B′.

Il en résulte, en particulier, que la tangente du réseau parallèle à A, qui est parallèle à G, se transforme en la tangente du réseau parallèle à B′ qui est parallèle à G′.

Le raisonnement précédent prouve, en outre, qu'étant donnée une congruence O_c, *on peut toujours en trouver une parallèle qui se transforme en congruence de normales par polaires réciproques relativement à un complexe linéaire.*

Le calcul de γ_1 s'effectue comme celui de γ. On trouve :

$$2\frac{\partial\nu_1}{\partial\rho_1} = \sin 2f_1, \qquad 2\frac{\partial\nu_1}{\partial\rho_2} = \sin 2f_2,$$

$$\nu_1 = \mathcal{F}(\rho_1) - \mathcal{G}(\rho_2)$$

Adoptons maintenant les notations de la Note de M. Guichard du 10 mai 1920 (*Comptes Rendus*). Soient (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (η_1, η_2, η_3), les paramètres normaux du réseau A (page 55), (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3), $(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$, ceux du réseau B'. Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de A, x_1, x_2, x_3, seront définis par les relations :

$$\text{(23)} \qquad \left\{ \begin{aligned} -x_2\xi'_1 + x_1\xi'_2 + \mathrm{K}\xi'_3 = o \\ -x_2\eta'_1 + x_1\eta'_2 + \mathrm{K}\eta'_3 = o \end{aligned} \right.$$

$$\text{(24)} \qquad \frac{\partial x_3}{\partial u} = h_1\,\xi_3, \qquad \frac{\partial x_3}{\partial v} = l_1\,\eta_3,$$

où h_1, l_1, se rapportent au réseau A, K étant le paramètre du complexe.

Posons alors :

$$\alpha = t\xi_1, \qquad \beta = t\xi_2, \qquad \gamma = t\xi_3,$$

et portons dans l'équation (1) (page 51). Il vient :

$$\left. \begin{aligned} t\xi''_{uv} = \xi'_u\left(t\frac{h'_v}{h} - t'_v\right) + \xi'_v\left(t\frac{l'_u}{l} - t'_u\right) \\ + \xi\left(-t''_{uv} + \frac{h'_v}{h}t'_u + \frac{l'_u}{l}t'_v + \mathrm{R}t\right) \end{aligned} \right\} \qquad (25)$$

Soient enfin :

$$\text{(26)} \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'_v &= n_1\eta \\ x'_u &= h_1\xi \\ \frac{\partial h_1}{\partial v} &= l_1 m_1 \end{aligned} \right. \qquad \left. \begin{aligned} \eta'_u &= m_1\xi \\ x'_v &= l_1\eta \\ \frac{\partial l_1}{\partial u} &= h_1 n_1 \end{aligned} \right\} \quad (26')$$

les équations relatives au premier réseau focal A de la congruence (G).

Des premières équations (26) et (26'), on tire :

$$\xi''_{uv} = m_1 n_1\,\xi + \frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial u}\,\xi'_v\,.$$

En remplaçant, dans l'équation (25), ξ''_{uv} par la valeur précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \xi'_u\left(t'_v - t\frac{h'_v}{h}\right) + \xi'_v\left[t'_u + t\left(\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial u} - \frac{l'_u}{l}\right)\right] \\ + \xi\left(tm_1n_1 + t''_{uv} - \frac{h'_v}{h}t'_u - \frac{l'_u}{l}t'_v - \mathrm{R}t\right) = o. \end{aligned}$$

La relation ci-dessus devant être vérifiée pour trois valeurs ξ_1, ξ_2, ξ_3 de ξ, est une identité en ξ. On a donc les trois relations :

$$\text{(27)} \qquad \frac{t'_v}{t} = \frac{h'_v}{h}; \qquad t'_u + t\left(\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial u} - \frac{l'_u}{l}\right) = o \qquad (27')$$

$$tm_1n_1 + t''_{uv} - \frac{h'_v}{h}t'_u - \frac{l'_u}{l}t'_v - \mathrm{R}t = o. \qquad (27'')$$

De l'équation (27), on tire : $t = h\,\mathrm{F}(u)$. Il suffira donc de prendre $t = h$ pour que les ξ soient des paramètres normaux.

D'autre part, l'équation (27'), qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{t'_u}{t} + \frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial u} - \frac{l'_u}{l} = o,$$

donne par intégration :

$$\log t + \log n_1 = \log l + \log \phi(v) \,; \qquad \text{d'où :} \qquad tn_1 = l\,\phi(v).$$

On pourra prendre $\phi(v) = 1$, ce qui donnera :

$$n_1 = \frac{l}{t} = \frac{l}{h}.$$

Les ξ sont alors obtenus par les formules

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{h}, \qquad \xi_2 = \frac{\beta}{h}, \qquad \xi_3 = \frac{\gamma}{h}.$$

La première équation (26) donne ensuite les η comme des paramètres normaux. On a, calculs effectués :

$$\eta_1 = \frac{1}{l}\left(\alpha'_v - \alpha\frac{h'_v}{h}\right), \qquad \eta_2 = \frac{1}{l}\left(\beta'_v - \beta\frac{h'_v}{h}\right), \qquad \eta_3 = \frac{1}{l}\left(\gamma'_v - \gamma\frac{h'_v}{h}\right).$$

On trouve, de même :

$$\eta'_1 = \frac{\alpha}{L}, \qquad \eta'_2 = \frac{\beta}{L}, \qquad \eta'_3 = \frac{\gamma}{L};$$

$$\xi'_1 = \frac{1}{H}\left(\alpha'_u - \alpha\frac{L'_u}{L}\right), \qquad \xi'_2 = \frac{1}{H}\left(\beta'_u - \beta\frac{L'_u}{L}\right), \qquad \xi'_3 = \frac{1}{H}\left(\gamma'_u - \gamma\frac{L'_u}{L}\right).$$

Les équations (23) (page 63) donnent alors x_1 et x_2. En remplaçant dans les deuxièmes équations (26), x_1 (ou x_2) par sa valeur, on trouve h_1 et l_1. Les équations (24) donnent alors x_3 par une seule quadrature.

Le problème est complètement résolu.

On remarquera que le résultat énoncé page 37, d'après lequel si une congruence répond à la question, il en est de même de toute congruence résultant d'une rotation de la précédente autour de l'axe du complexe ou d'une translation le long de cet axe, se retrouve dans la présence d'une constante additive dans l'expression de λ, et dans la constante additive introduite par l'intégration des équations (24).

Remarque. — On peut démontrer, par une voie différente de celle qui a été indiquée plus haut (pages 62 et précédentes), qu'étant donnée une congruence O_c, il en est de parallèles se transformant en congruences de normales par polaires réciproques relativement à un complexe linéaire. A cet effet, il sera utile d'établir la proposition suivante :

Etant donnée une congruence cyclique plane, il existe une congruence parallèle à *la précédente, dont le segment focal, en projection sur le plan* $z = \mathrm{K}$ ($\mathrm{K} = const.$) *est vu de l'origine sous un angle droit.*

Considérons, en effet, la congruence-point (g') orthogonale à la proposée, issue du point de O.

On peut l'obtenir en prenant une congruence plane (g) orthogonale à la congruence donnée, en considérant l'une (G) des congruences de l'espace ordinaire qui projettent (g) et en menant par O la congruence-point (G') parallèle à (G). La projection (g') de (G') sera parallèle à (g), donc orthogonale à la proposée.

Cette congruence (g') est 2O, et, par suite, est la projection d'une congruence de normales de l'espace ordinaire. Soit (fig. 17) OM une droite de cette congruence de normales, M étant sa trace sur la sphère de centre O et de rayon 1. Menons par O le réseau-point parallèle au réseau orthogonal décrit par M sur la sphère. Il coupe le plan $z = \mathrm{K}$ suivant une congruence ff'. Or si une congruence et un réseau de l'espace ordinaire sont orthogonaux, la trace du réseau sur un plan $z = \mathrm{K}$ et la projection de la congruence sur ce plan (ou sur un plan parallèle), sont deux congruences orthogonales (page 28). Donc la congruence ff' est orthogonale à la congruence Om qui est 2O ; par suite, c'est une congruence cyclique, parallèle à la proposée.

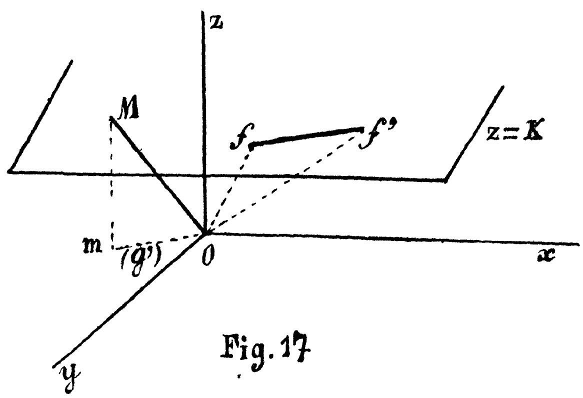

Fig. 17

Ceci posé, considérons une congruence $\mathrm{O_c}$. Construisons, d'après la méthode ci-dessus, dans le plan $z = \mathrm{K}$, la congruence plane ff' qui est parallèle à sa projection et telle que ff' soit vu de O sous un angle droit (f et f' sont les foyers de la congruence). D'après la proposition établie page 14, on peut trouver une congruence, parallèle à la congruence $\mathrm{O_c}$ donnée, qui se projette suivant la congruence ff'. Cette dernière étant telle que son segment focal, en projection sur $x\mathrm{O}y$, est vu de O sous un angle droit, se transforme en une congruence de normales par polaires réciproques relativement au complexe linéaire d'axe Oz et de paramètre K (page 36).

III. — Représentation sphérique des congruences O'_c

I. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Pour abréger, les congruences de normales solutions du problème proposé seront appelées congruences O'_c. D'après ce qui précède, les congruences O'_c sont des congruences de normales se projetant sur le plan xOy suivant des congruences cycliques, et réciproquement, étant donnée une congruence de normales se projetant sur xOy suivant une congruence cyclique (congruences O_c), il existe des congruences, parallèles à celle-ci, qui sont des congruences O'_c.

Le problème posé équivaut donc à l'étude de la représentation sphérique des congruences O_c.

Si on mène par l'origine O *des coordonnées une congruence-point parallèle à une congruence de normales, elle découpe un réseau sur un paraboloïde de révolution admettant* O *pour foyer.*

Soient, en effet, α et β les paramètres (dérivés des génératrices rectilignes de la sphère),définis dans la Théorie générale des Surfaces de Darboux (Tome I,page 296, n° 165) et définissant la représentation sphérique de la congruence. Le point de coordonnées :

$$\text{(P)} \qquad x = \alpha + \beta, \qquad y = i(\beta - \alpha), \qquad z = \alpha\beta - 1,$$

est bien sur un paraboloïde de révolution ayant son foyer en O (1).

En effet, des deux premières équations (P), on tire :

$$\alpha = \frac{x + iy}{2}, \qquad \beta = \frac{x - iy}{2},$$

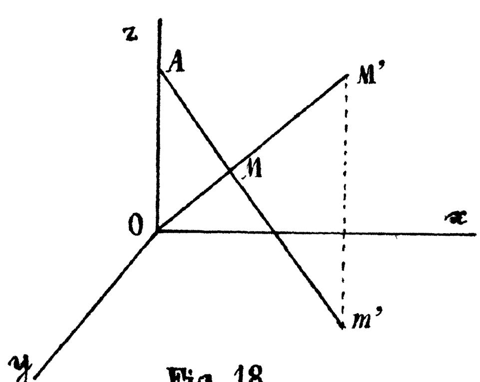

Fig. 18

(1) On peut même faire à ce sujet une curieuse remarque.

Soient M un point quelconque de la sphère de centre O et de rayon 1, A le point de cote + 1 où la sphère est percée par Oz, m' la projection sur xoy de la droite AM.

M ayant pour coordonnées :

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta + 1}, \quad \frac{i(\beta - \alpha)}{\alpha\beta + 1}, \quad \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1},$$

les coordonnées de m' sont :

$$\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \frac{i(\beta - \alpha)}{2}.$$

Donc m' est la projection d'un point de OM qui décrit un paraboloïde de révolution autour et en portant dans la troisième, on a :

$$x^2 + y^2 = 4(z+1).$$

Or, $\alpha + \beta$, $i(\beta - \alpha)$, $\alpha\beta - 1$, étant paramètres directeurs de la congruence-point, ces quantités (ou, ce qui revient au même, les quantités, α, β, $\alpha\beta$, qui sont des combinaisons linéaires des précédentes), vérifient une équation de Laplace, de la forme :

$$\theta''_{uv} = P\theta'_u + Q\theta'_v + R\theta \qquad (1)$$

En exprimant que $\alpha\beta$ vérifie l'équation (1), et en tenant compte de ce que α, β, sont solutions de (1), on obtient la relation :

$$\beta'_u \alpha'_v + \beta'_v \alpha'_u - R = o,$$

Si l'on remarque que la condition :

$$\beta'_u \alpha'_v + \beta'_v \alpha'_u = o$$

est le critérium exprimant que la congruence est une congruence de normales, on en déduit : $R = o$.

Donc le point de coordonnées $\alpha + \beta$, $i(\beta - \alpha)$, $\alpha\beta - 1$, vérifiant une équation de Laplace :

$$\theta''_{uv} = P\theta'_u + Q\theta'_v \qquad (1')$$

privée de terme en θ, décrit un réseau (page 7.)

On sait, d'autre part, que la condition nécessaire et suffisante pour que, dans l'espace à n dimensions, le réseau décrit par un point de coordonnées x_i $(i = 1, 2, \ldots., n)$ soit orthogonal, est que l'équation de Laplace admettant pour intégrales ces coordonnées, admette, en outre, la solution :

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots\ldots + x_n^2.$$

(Guichard, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1897. Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, Chapitre II, n° 13).

---

de Oz, de foyer O. On peut donc obtenir, par une construction géométrique, le paraboloïde de révolution à partir de la sphère, ce qui établit un lien entre les deux surfaces.

On déduit de là une nouvelle construction de la parabole, en géométrie élémentaire :

Soit à tracer une parabole de foyer F et de directrice (D). Soient I la projection de F sur (D), A le symétrique de I par rapport à F, A′ et A″ les points de rencontre de la parallèle à (D) menée par F avec le cercle de centre F et de rayon IF.

On prendra un point quelconque M sur le cercle, on mènera la perpendiculaire SM′ à (D) par la trace de AM sur A′ A″. SM′ rencontrera FM en un point M′ de la parabole, qui passera d'ailleurs par les points A′ et A″.

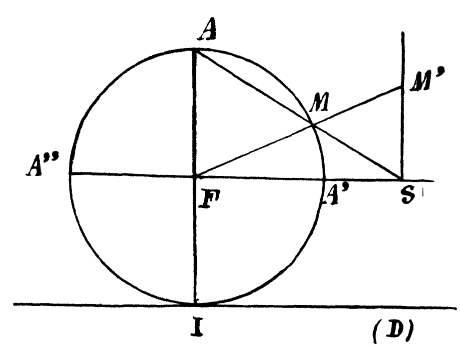

Fig. 19

Or, l'équation (1′), admettant comme solution $z = \alpha\beta - 1$, et 1 admet $4\alpha\beta = x^2 + y^2$. On voit ainsi que tout réseau du paraboloïde de révolution se projette suivant un réseau orthogonal : on retrouve un résultat connu qui sera utile plus loin.

On peut rappeler, à ce sujet, que *la seule surface donc tous les réseaux se projettent sur le plan $x\mathrm{O}y$ suivant des réseaux orthogonaux, est le paraboloïde de révolution.*

Soit, en effet, une surface jouissant de cette propriété. Les tangentes aux deux courbes de chaque réseau qui se croisent en tout point M de la surface sont, en projection sur le plan $x\mathrm{O}y$, conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes de ce plan. Or il existe, au point M, un seul couple de courbes dont les tangentes en M soient conjuguées harmonique par rapport aux couples de tangentes aux courbes conjuguées se croisant en M : ce sont les lignes asymptotiques. Le rapport anharmonique étant une propriété projective, on en déduit que les directions isotropes du plan $x\mathrm{O}y$ coïncident avec les projections des lignes asymptotiques de la surface. On en conclut que l'équation des projections des asymptotiques d'une telle surface doit être, à priori :

$$dx^2 + dy^2 = o \tag{2}$$

Or, si cette surface a pour équation :

$$z = f(x, y),$$

l'équation de ses asymptotiques est :

$$dp\,dx + dq\,dy = o,$$

ou, en explicitant :

$$f''_{x^2}\,dx^2 + 2f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{y^2}\,dy^2 = o \tag{3}$$

En identifiant les équations (2) et (3), on a les conditions :

$$f''_{x^2} = f''_{y^2}\,; \qquad f''_{xy} = o.$$

On en déduit :

$$f = \mathrm{X} + \mathrm{Y} \qquad (\text{X fonction de } x,\ \text{Y fonction de } y).$$

Il faut, de plus, que l'on ait :

$$\mathrm{X}'' = \mathrm{Y}'' = c_1,$$

d'où :

$$\mathrm{X} = c_1x^2 + c_2x + c_3\,;$$

$$\mathrm{Y} = c_1y^2 + c_4y + c_5,$$

et :

$$f = c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_4y + c_6 = z \qquad (c_6 = c_3 + c_5)$$

(les c étant des constantes).

On a bien l'équation d'un paraboloïde de révolution.

En considérant les réseaux conjugués à la représentation sphérique d'une congruence de normales, on peut présenter quelques remarques.

Soit :

$$\theta''_{uv} = \mathrm{P}\,\theta'_u + \mathrm{Q}\,\theta'_v \tag{4}$$

l'équation de Laplace (E) à laquelle satisfont les cosinus directeurs c_i d'une congruence-point de normales issue de l'origine.

Si nous posons : $x_1 = \mu c_1, \quad x_2 = \mu c_2, \quad x_3 = \mu c_3,$

en remarquant que l'équation (4) admet pour solutions $c_1, c_2, c_3, 1$, nous voyons que les quantités : $c_1\mu, \quad c_2\mu, \quad c_3\mu, \quad 1 \times \mu = \mu,$

satisfont à une même équation de Laplace (E_1). En d'autres termes, l'équation de Laplace aux x_i $(i=1, 2, 3)$ admet μ comme solution.

Pour que le point de coordonnées x_1, x_2, x_3, décrive un réseau, il faut et il suffit que l'équation (E_1) soit privée du terme en θ, c'est-à-dire admette 1 comme solution, ou, ce qui revient au même, que l'équation (E), qui admet pour solutions $\frac{x_1}{\mu} = c_1, \frac{x_2}{\mu} = c_2, \frac{x_3}{\mu} = c_3$, admette aussi $\frac{1}{\mu}$.

En dérivant par rapport à u la relation :

$$x_i = \mu\, c_i,$$

on a :

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \mu \frac{\partial c_i}{\partial u} + c_i \frac{\partial \mu}{\partial u}.$$

En multipliant les deux membres de cette dernière équation par x_i, remplaçant dans le second x_i par μc_i et ajoutant toutes les équations analogues, on a :

$$\sum x x'_u = \mu^2 \sum c c'_v + \mu\mu'_u \sum c^2 \tag{4'}$$

La relation : $\sum c^2 = 1$ donne, par dérivation par rapport à u :

$$\sum c c'_u = o.$$

La relation (4') peut alors s'écrire :

$$\sum_1^3 x x'_u = \mu\mu'_u,$$

ou :

$$x_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} + x_3 \frac{\partial x_3}{\partial u} + i\mu \frac{\partial (i\mu)}{\partial u} = o.$$

ou encore, en abrégeant :

$$\sum_1^4 x x'_u = o, \quad (x = x_1, x_2, x_3, i\mu).$$

On trouverait, de même : $$\sum_1^4 x x'_v = o \tag{5}$$

En dérivant l'équation (5) par rapport à u, on a :

$$\sum_1^4 x'_u x'_v + \sum_1^4 x x''_{uv} = o$$

Or, si : $$\theta''_{uv} = P_1 \theta'_u + Q_1 \theta'_v$$

est l'équation à laquelle satisfont $x_1, x_2, x_3, i\mu$, on a :

$$\sum_1^4 x x''_{uv} = P_1 \sum_1^4 x x'_u + Q \sum_1^4 x x'_v = o.$$

On a donc finalement : $$\sum_1^4 x'_u\, x'_v = o,$$

ou, en explicitant : $$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}+\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}+\frac{\partial(i\mu)}{\partial u}\frac{\partial(i\mu)}{\partial v}=o \qquad (6)$$

Si l'on tient compte enfin de la relation :

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\mu^2,$$

qui peut s'écrire : $$x_1^2+x_2^2+x_3^2+(i\mu)^2=o, \qquad (7)$$

on voit, d'après les équations (6) et (7), que, dans l'espace à quatre dimensions, le point de coordonnées x_1, x_2, x_3, $i\mu$, décrit un réseau orthogonal sur l'hypercone défini par l'équation (7).

L'équation (6) montre que la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau (x_1, x_2, x_3), de l'espace ordinaire soit orthogonal, est :

$$\mu'_u\,\mu'_v=o, \qquad \text{d'où } \mu=F(v), \qquad \text{ou } \mu=F_1(u)$$

On peut noter, d'après ce qui précède, que tous les réseaux, autres que les réseaux orthogonaux, qui sont conjugués à la congruence-point, sont des réseaux projections de réseaux orthogonaux de l'espace à quatre dimensions (réseaux 2O). Ce point avait déjà été établi par les travaux de M. Guichard (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1903. Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, page 124, tableau).

II. — RÉSEAUX DÉCOUPÉS, SUR LA SPHÈRE Σ DE CENTRE O ET DE RAYON 1, PAR UNE CONGRUENCE-POINT DE NORMALES SE PROJETANT SUR LE PLAN DES xy SUIVANT UNE CONGRUENCE CYCLIQUE (CONGRUENCE O_c)

Soit (fig. 20) sur la sphère Σ, un point M de coordonnées c_1, c_2, c_3. M décrit, sur Σ, un réseau, qui, étant sur une sphère, est nécessairement orthogonal.

Désignons, d'autre part, par G la trace du réseau sur le plan xOy, et par m la projection de M.

La congruence-point Om, du plan xOy, est 2O, et cyclique, par hypothèse, D'autre part, la congruence OM et le réseau M sont orthogonaux.

Or si, dans l'espace ordinaire, une congruence et un réseau sont orthogonaux, la projection de la congruence et la trace du réseau sur le plan xOy forment deux congruences orthogonales (page 28).

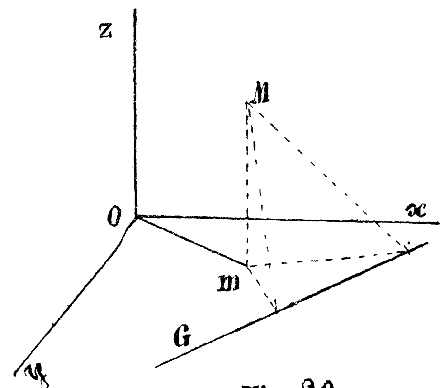

Fig. 20

On en déduit que G et Om sont, dans le plan xOy, deux congruences orthogonales. Or, dans le plan (page 33), une congruence orthogonale à une congruence 2O est une congruence cyclique, et réciproquement. Donc G est une congruence 2O et cyclique (congruence 2O,C).

Le réseau M étant harmonique à la congruence G, sa projection m est harmonique à G (page 22). G étant une congruence 2O, le réseau m, harmonique à G, est nécessairement un réseau L (applicable sur un espace à quatre dimensions) (voir page 33, tableau I, et *Cours de Géométrie* de M. Guichard 1922-23).

Donc le réseau m est un réseau 2O,L, et le réseau M est un réseau orthogonal se projetant suivant un réseau L (réseau O_L).

Le réseau M n'est pas le réseau O_L le plus général.

Considérons, en effet, un réseau O_L : tout réseau O étant parallèle à un réseau de la sphère (Guichard, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1897, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, Chapitre II, n° 13), on pourra trouver un réseau M_1 de la sphère parallèle au proposé ; ce réseau M_1 sera aussi O_L. Sa trace G_1 sur le plan $x\,Oy$ est une congruence cyclique, comme étant harmonique à un réseau O ; d'autre part, étant harmonique au réseau m_1 (projection de M_1) qui est un réseau L, la congruence G_1 (page 34, tableau II) peut être 2O, 3O ou 4O (fig. 21).

La congruence OM_1, orthogonale au réseau M_1, est une congruence de normales ; sa projection Om_1, orthogonale à G_1, peut être cyclique, 2C ou 3C. Donc la congruence-point issue de O, orthogonale à un réseau O_L de la sphère, peut être O_c, O_{2c} ou O_{3c}. On voit, par suite, que les réseaux O_L de la sphère obtenus à partir d'une congruence O_c ne sont que des réseaux O_L particuliers.

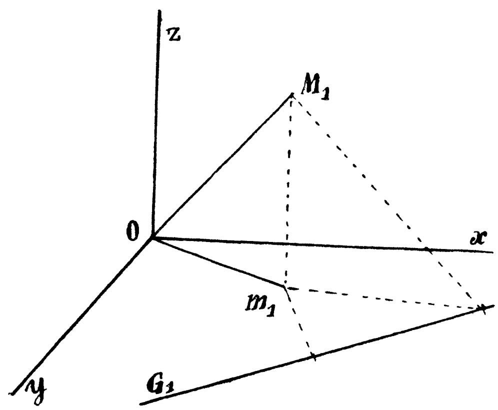

Fig. 21

Les réseaux O_L de la sphère obtenus à partir d'une congruence-point O_c peuvent être complètement caractérisés par la propriété géométrique suivante :

Leur trace G *sur le plan* xOy *est une congruence* 2O.

En effet, la congruence G_1, étant orthogonale à la congruence Om_1, qui est C, est une congruence 2O.

Considérons, inversement, un réseau M_1 de la sphère dont la trace G_1 sur xOy soit une congruence 2O. Joignons OM_1. OM_1 décrit une congruence-point de normales, comme étant orthogonale à un réseau de la sphère (qui est orthogonal). De plus, la congruence décrite par Om_1 (projection de OM), étant orthogonale à G_1, est une congruence cyclique. Donc la congruence OM est une congruence O_c.

ETUDE DES RÉSEAUX O_L PRÉCÉDENTS

On peut construire de tels réseaux de la façon suivante :

Soient F et F′ (fig. 22) les foyers d'une congruence O'_c (se transformant en congruence de normales par polaires réciproques relativement à un complexe linéaire d'axe Oz et de paramètre K).

Le réseau-point F′OF, étant harmonique à une congruence de normales F′F, est un réseau cyclique.

D'autre part, si φ' et φ sont les projections de F′ et F sur le plan $z = K$, on a : $\widehat{\varphi' O \varphi} = 1$ droit (page 35). Par suite, le réseau-point $\varphi' O \varphi$ est orthogonal.

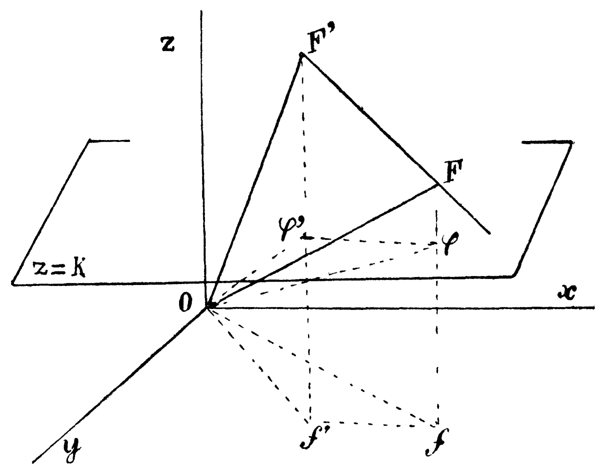

Fig. 22

Si f' et f sont les projections de F′ et F sur le plan $x\,Oy$, le réseau-point $f'Of$ est 2C (ou L), comme étant la projection du réseau F′OF, qui est un réseau C ; ce réseau $f'Of$ est aussi 2O, comme étant la projection du réseau orthogonal $\varphi' O \varphi$. Par suite, le réseau $\varphi' O \varphi$ est un réseau O_L. D'ailleurs, la congruence $\varphi'\varphi$, projection de la congruence de normales F′F, est une congruence 2O. Le réseau $\varphi' O \varphi$, qui est O_L, a, de plus, pour trace sur le plan parallèle à $x\,Oy$, $z = K$, une congruence 2O : il est bien du type précédent.

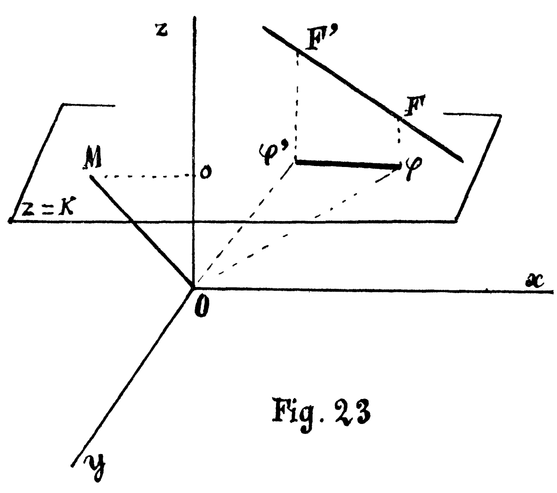

Fig. 23

Nous pouvons maintenant donner une construction géométrique des projections, sur un plan parallèle à xOy, des congruences O'_c.

Soit (fig. 23) OM une congruence-point qui soit une congruence O_c. Soit oM sa projection sur le plan $z = K$.

Menons, par O, le réseau-point orthogonal à OM. Sa trace $\varphi'\varphi$ sur le plan $z = K$ est orthogonale à la projection oM de la congruence OM ; oM étant une congruence 2O, C, la congruence $\varphi'\varphi$ sera 2O, C. [On sait que, dans le plan, si une congruence est orthogonale à une congruence pC, c'est une congruence $(p+1)$ O, et réciproquement (page 33)].

Or, le réseau φ'Oφ est O, comme orthogonal à une congruence de normales. Donc la congruence de normales qui se projette suivant $\varphi\varphi'$ sur le plan $z = K$, vérifie la propriété énoncée page 35 ; par suite c'est une congruence O'_c.

Cette construction fournit une nouvelle méthode de détermination des congruences O'_c. Avant de l'indiquer, il sera utile de rappeler certains résultats dus à M. Guichard.

Soit :

$$\sigma''_{uv} = \frac{H'_v}{H}\sigma'_u + \frac{L'_u}{L}\sigma'_v \tag{1}$$

l'équation à laquelle satisfont les coordonnées x_1, x_2, x_3, d'un point M décrivant un réseau. Si σ est une solution de (1), et si F_1, F_2, sont les foyers d'une congruence harmonique au réseau M, les coordonnées y_1, y_2, y_3, de F_1 sont de la forme :

$$y = x - \frac{\sigma}{\frac{\partial\sigma}{\partial u}} x'_u. \tag{2}$$

Les coordonnées z_1, z_2, z_3, de F'_1 sont de la forme :

$$z = x - \frac{\sigma}{\frac{\partial\sigma}{\partial v}} x'_v. \tag{3}$$

Posons :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = Hq, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = Lr,$$

ce qui définit les fonctions q et r. En écrivant que σ vérifie l'équation (1), il vient :

$$\sigma''_{uv} = Hq'_v + qH'_v = \frac{H'_v}{H} Hq + \frac{L'_u}{L} Lr.$$

$$L'_u = Hn, \qquad H'_v = Lm.$$

On en déduit :

$$q'_v = nr, \qquad r'_u = mq.$$

Les quantités q et r vérifient une équation à laquelle satisfont ξ et η. Donc cette équation admet des couples de solutions q et r. Les formules (2) et (3) prennent alors la forme :

$$y = x - \frac{\sigma}{q}\xi, \qquad z = x - \frac{\sigma}{r}\eta.$$

Donc la droite $F_1 F_1'$ admet pour paramètres directeurs les quantités :

$$r\xi_i - q\eta_i.$$

Supposons que par O (fig. 24) on mène OF, OF', parallèles à MF_1, MF_1', et soit FF′ une congruence harmonique à ce réseau-point. Les coordonnées de F′, du fait que le réseau F′ est conjugué à la congruence point OF′, sont de la forme $\frac{\xi}{\sigma}$, σ étant solution de l'équation à laquelle satisfont les ξ.

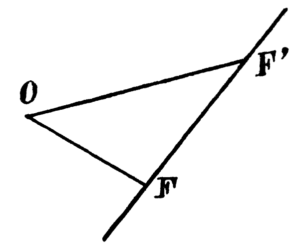

Fig. 24

Or, on peut prendre pour solution une des quantités sus-mentionnées. Les coordonnées de F′ sont donc de la forme : $\frac{\xi_1}{q}$, et, de même, celles de F sont de la forme : $\frac{\eta_1}{r}$.

Les paramètres directeurs de la congruence sont bien : $r\xi_1 - q\eta_1$.

Trouvons l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces paramètres. On a les équations :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_v = n\eta \\ \eta'_u = m\xi \end{array} \right. \qquad\qquad (4') \quad \left\{ \begin{array}{l} q'_v = nr \\ r'_u = mq \end{array} \right.$$

Posons :

$$X^0 = r\xi - q\eta, \tag{5}$$

il vient :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X^0}{\partial u} = r\xi'_u - \eta q'_u \\ \dfrac{\partial X^0}{\partial v} = -q\eta'_v + \xi r'_v. \end{array} \right.$$

On a :

$$\frac{\partial^2 X^0}{\partial u \partial v} = r'_v \xi'_u - q'_u \eta'_v + r\xi''_{uv} - \eta q''_{uv}.$$

En dérivant les premières équations (4) et (4′), on obtient :

$$\xi''_{uv} = n\frac{\partial \eta}{\partial u} + mn\xi; \qquad q''_{uv} = r\eta'_u + mnq.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 X^0}{\partial u \partial v} = r'_v \xi'_u - q'_u \eta'_v + mnX^0.$$

Les quantités X^0 vérifient une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 X^0}{\partial u \partial v} = P\frac{\partial X^0}{\partial u} + Q\frac{\partial X^0}{\partial v} + RX^0.$$

En remplaçant $\frac{\partial^2 X^0}{\partial u \partial v}$ par sa valeur précédente, et en écrivant que l'on a une identité en ξ'_u, η'_v, ξ et η, on trouve :

$$r'_v = Pr; \quad q'_u = Qq; \quad \text{d'où :} \quad P = \frac{r'_v}{r} \text{ et } Q = \frac{q'_u}{q};$$

$$mnr = Qr'_v + Rr;$$

$$R = mn - Q\frac{r'_v}{r} = mn - \frac{q'_u}{q}\frac{r'_v}{r}.$$

L'équation à laquelle satisfont les X^0 est donc :

$$(6') \qquad \frac{\partial^2 X^0}{\partial u \partial v} = \frac{r'_v}{r}\frac{\partial X^0}{\partial u} + \frac{q'_u}{q}\frac{\partial X^0}{\partial v} + \left(mn - \frac{q'_u}{q}\frac{r'_v}{r}\right)X^0.$$

Ces résultats étant rappelés, indiquons une nouvelle méthode de détermination des congruences O'_c, basée sur la construction de la page 73.

Soit M la trace de la droite OM sur la sphère de centre O et de rayon 1. M décrit un réseau orthogonal parallèle au reseau-point $\varphi O \varphi'$, et qui, par conséquent, a mêmes rotations et mêmes paramètres normaux.

Soit alors :

$$\theta''_{uv} = \frac{H'_v}{H}\theta'_u + \frac{L'_u}{L}\theta'_v$$

l'équation de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées de M. On a :

$$H = \frac{h}{ch\nu}, \qquad L = \frac{l}{ch\nu},$$

h et l étant les coefficients qui entrent dans l'équation de Laplace :

$$\sigma''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\sigma'_u + \frac{l'_u}{l}\sigma'_v + R\sigma,$$

à laquelle satisfont les paramètres directeurs $\cos\lambda$, $\sin\lambda$, $sh\nu$, de la congruence OM.

Si l'on a posé :

$$h = \cos\varphi, \qquad l = \sin\varphi,$$

on aura :

$$H = \frac{\cos\varphi}{ch\nu}, \qquad L = \frac{\sin\varphi}{ch\nu}.$$

Les équations relatives au réseau M sont :

$$(7)\ \begin{cases} \xi'_v = n\eta \\ \eta'_u = m\xi \end{cases} \qquad (8)\ \begin{cases} x'_u = H\xi \\ x'_v = L\eta \end{cases} \qquad (9)\ \begin{cases} H'_v = Lm \\ L'_u = Hn \end{cases}$$

On a, en dérivant H par rapport à v :

$$H'_v = \frac{-ch\nu \sin\varphi\,\varphi'_v - \cos\varphi\, sh\nu\,\nu'_v}{ch^2\nu},$$

d'où, en tenant compte de la première équation (9) :

$$m = \frac{H'_v}{L} = \frac{-ch\nu\,\varphi'_v - \cot\varphi\, sh\nu\,\nu'_v}{ch\nu} = -\varphi'_v - \cot\varphi\, th\nu\,\nu'_v.$$

On trouve, de même :

$$L'_u = \frac{ch\nu\cos\varphi\,\varphi'_u - \sin\varphi\, sh\nu\,\nu'_u}{ch^2\nu}, \qquad \text{d'où :} \quad n = \varphi'_u - \operatorname{tg}\varphi\, th\nu\,\nu'_u.$$

D'autre part, on a, pour les coordonnées x_1, x_2, x_3 de M :

$$x_1 = \frac{\cos\lambda}{ch\nu}, \qquad x_2 = \frac{\sin\lambda}{ch\nu}, \qquad x_3 = th\nu.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{-ch\nu \sin\lambda\, \lambda'_u - \cos\lambda\, sh\nu\, \nu'_u}{ch^2\nu},$$

d'où, en tenant compte de la première équation (8) :

$$\xi_1 = \frac{1}{H}\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{\cos\varphi}(-\sin\lambda\, \lambda'_u - \cos\lambda\, th\nu\, \nu'_u).$$

On trouve, de même :

$$\xi_2 = \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\lambda\, \lambda'_u - \sin\lambda\, th\nu\, \nu'_u); \qquad \xi_3 = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\nu'_u}{ch\nu};$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sin\varphi}(-\sin\lambda\, \lambda'_v - \cos\lambda\, th\nu\, \nu'_v); \qquad \eta_2 = \frac{1}{\sin\varphi}(\cos\lambda\, \lambda'_v - \sin\lambda\, th\nu\, \nu'_v);$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\nu'_v}{ch\nu}.$$

Nous avons déjà remarqué que les quantités m, n, calculées plus haut, sont aussi les rotations, et les ξ, η, les paramètres normaux du réseau $\varphi'O\varphi$. Nous prendrons, pour simplifier (ce qui ne diminue en rien la généralité) : $K = 1$.

Si X_1, X_2, 1, sont les coordonnées de φ', on aura, pour déterminer la droite $O\varphi'$, les équations suivantes :

$$\frac{X_1}{\xi_1} = \frac{X_2}{\xi_2} = \frac{1}{\xi_3} = \frac{1}{a},$$

ou, en remarquant que l'on a :

$$\frac{X_1}{\xi_1} = \frac{1}{q} = \frac{1}{a},$$

(ce qui montre que a est la quantité q définie page 74) :

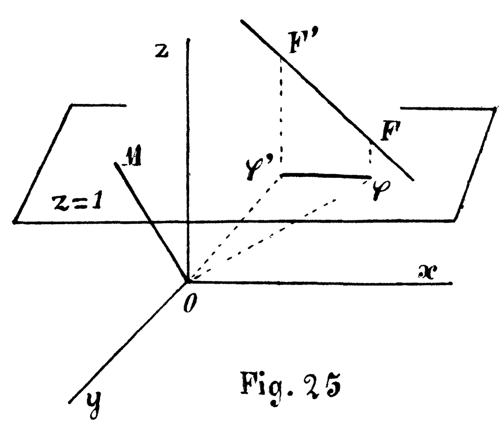

Fig. 25

$$q = \xi_3 = \frac{\nu'_u}{\cos\varphi\, ch\nu}$$

$$(7')\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\xi_1}{q} = -\sin\lambda\, ch\nu \dfrac{\lambda'_u}{\nu'_u} - \cos\lambda\, sh\nu \\[2ex] X_2 = \dfrac{\xi_2}{q} = \cos\lambda\, ch\nu \dfrac{\lambda'_u}{\nu'_u} - \sin\lambda\, sh\nu \\[2ex] X_3 = 1 \end{cases}$$

On trouve, de même :

$$(7'') \quad \begin{cases} Y_1 = -\sin\lambda\, ch\nu \dfrac{\lambda'_v}{\nu'_v} - \cos\lambda\, sh\nu \\[2mm] Y_2 = \cos\lambda\, ch\nu \dfrac{\lambda'_v}{\nu'_v} - \sin\lambda\, sh\nu \\[2mm] Y_3 = 1 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$-\sin\lambda, \qquad \cos\lambda, \qquad o, \qquad \text{(A)}$$

sont paramètres directeurs pour $\varphi\varphi'$, ce qu'on pouvait prévoir à priori, la congruence $\varphi\varphi'$, trace sur le plan $z = 1$ du réseau orthogonal $\varphi O\varphi'$, étant orthogonale à la projection, sur ce plan, de la congruence orthogonale à $\varphi O\varphi'$.

Soit maintenant :

$$\theta''_{uv} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\,\theta'_u + \frac{1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}\,\theta'_v + R_1\theta$$

l'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs θ_1, θ_2, θ_3, de la congruence de normales (G) se projetant suivant $\varphi\varphi'$, tels que $\theta^2 + \theta_2^2 = 1$.

En l'identifiant avec (6') (page 76), on a, en remarquant que :

$$X^0 = r\xi - q\eta = t\theta :$$

$$r = th_1, \qquad q = tl_1.$$

On en déduit (en tenant compte de ce que, du fait que la congruence $\varphi\varphi'$ est cyclique, on a : $h_1^2 + l_1^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1$) :

$$\frac{h_1}{r} = \frac{l_1}{q}, \qquad \text{et} \qquad \frac{h_1^2}{r^2} = \frac{h_1^2 + l_1^2}{r^2 + q^2} = \frac{1}{r^2 + q^2}.$$

d'où :

$$h_1^2 = \frac{r^2}{r^2 + q^2} = \frac{\nu'^2_v \cos^2\varphi}{\nu'^2_u \sin^2\varphi + \nu'^2_u \cos^2\varphi}. \qquad (8)$$

Or, pour le réseau (λ, ν) correspondant à la congruence OM définie page 76, on a les équations :

$$\begin{cases} \lambda'_u = h\xi_1 \\ \lambda'_v = l\eta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu'_u = h\xi_2 \\ \nu'_v = l\eta_2, \end{cases}$$

où l'on a :

$$\xi_1 = \cos\tau, \qquad \xi_2 = \sin\tau, \qquad \eta_1 = -\sin\tau, \qquad \eta_2 = \cos\tau.$$

$$h = \cos\varphi, \qquad l = \sin\varphi.$$

On en déduit :

$$\nu'_u = \cos\varphi \sin\tau, \qquad \nu'_v = \sin\varphi\cos\tau.$$

En portant dans l'équation (8), on trouve :

$$h_1^2 = \cos^2\tau, \qquad \text{d'où :} \qquad h_1 = \cos\tau.$$

On trouverait, de même :

$$l_1 = \sin \tau.$$

Or, h_1, l_1, sont des quantités relatives au réseau (λ_1, ν_1) correspondant à la congruence (G) projetante de $\varphi\varphi'$. On peut donc écrire l'équation suivante :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = h_1 \xi'_1,$$

(ξ'_1, ξ'_2), (η'_1, η'_2), étant des paramètres normaux pour le réseau (λ_1, ν_1).

Mais on a, d'après les expressions (A) (page 78) :

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{\pi}{2}; \qquad \text{donc :} \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial u}.$$

Par suite, on peut écrire :

$$h_1 \xi'_1 = h\xi_1, \qquad \text{ou :} \quad \xi'_1 \cos \tau = \cos \varphi \cos \tau, \qquad \text{d'où :} \quad \xi'_1 = \cos \varphi.$$

On aurait, de même :

$$\xi'_2 = \sin \varphi; \qquad \eta'_1 = -\sin \varphi; \qquad \eta'_2 = \cos \varphi.$$

Le réseau (λ_1, ν_1) est complètement déterminé. Par suite, on connaît la direction des droites de la congruence (G). Il en résulte (page 64) que les cotés des foyers de (G) se déterminent à l'aide d'une quadrature.

Le calcul précédent établit que les réseaux (λ, ν) correspondant aux deux congruences OM et (G) se déduisent l'un de l'autre par permutation de τ et de φ (ou de τ et de $-\varphi$). Or, les projections de ces deux congruences sur un plan parallèle à xOy sont perpendiculaires. On en déduit, d'après le résultat obtenu page 61, que la transformée de (G) par polaires réciproques relativement au complexe linéaire d'axe Oz et de paramètre 1, est parallèle à la congruence OM, après rotation de $\frac{\pi}{2}$ de celle-ci autour de Oz.

De ce qui précède on peut déduire que, les équations (7′) et (7″) (pages 77-78), ne contenant que λ, ν, et leurs dérivées, si on y permute τ et φ, (ou τ et $-\varphi$), on aura les projections, sur le plan $z=1$, de la transformée de (G). Dans le cas particulier où $\tau = \varphi$ (ou $\tau = -\varphi$), ces projections coïncident, et comme les deux congruences transformées ont alors la même direction, elles coïncident également. Les congruences se transforment en elles-mêmes : ce sont les normales aux hélicoïdes.

Remarque. — Le raisonnement fait plus haut permet de compléter la construction de la page 73. Ayant construit la congruence FF′ (fig. 23), qui est O'_c, à l'aide de la congruence-point OM, si on recommence la construction en remplaçant OM par la congruence-point parallèle à FF′ que l'on a fait tourner de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz, on obtient une deuxième congruence O'_c, la congruence $F_1F'_1$. Les deux congruences FF et $F_1F'_1$, ainsi obtenues, se transforment l'une dans l'autre.

Cette construction de la polaire réciproque d'une congruence O'_c *par rapport à un complexe linéaire, a été faite par des opérations relatives à la sphère (elle est donnée par un réseau orthogonal, et tout réseau orthogonal est parallèle à un réseau de la sphère). Elle établit donc un lien entre la sphère et le complexe linéaire. D'autre part (à une rotation près, autour de* Oz, *la polaire réciproque d'une droite* D *par rapport à un complexe linéaire est identique à la polaire de* D *relativement à un paraboloide de révolution ayant même axe que le complexe. La construction précédente établit un lien de plus entre la sphère et le paraboloide de révolution (M. Servant avait déjà établi un lien entre la sphère et le paraboloïde quelconque, en prouvant que le problème de la déformation de la sphère et celui de la déformation du paraboloïde quelconque, pouvaient se ramener chacun à la recherche des surfaces à courbure totale constante).*

III. — RÉSEAUX DÉCOUPÉS PAR UNE CONGRUENCE-POINT O_c, MENÉE PAR L'ORIGINE O, SUR UN PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION (P) DE FOYER O ET D'AXE Oz

Soient (fig. 26) N le point de la congruence O_c situé sur (P), n sa projection.

Le réseau N, étant conjugué à une congruence de normales, et n'étant pas orthogonal, ne peut être que 2O (Guichard, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure,* Chapitre IV, n° 35).

D'autre part, N étant un réseau d'un paraboloïde de révolution, sa projection n décrit un réseau orthogonal (page 68). Enfin, le réseau N étant conjugué à la congruence-point ON, sa projection n est un réseau conjugué à la congruence plane On, projection de ON (page 18). Or, la congruence On est cyclique.

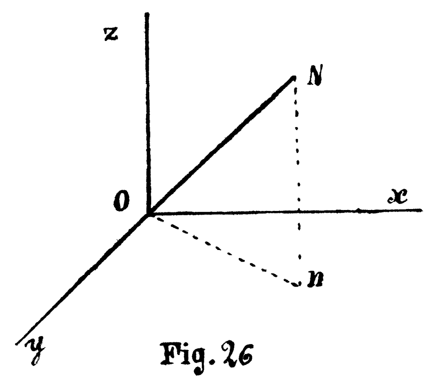

Fig. 26

Nous sommes ainsi ramenés naturellement à rappeler les résultats obtenus par M. Guichard sur les réseaux conjugués aux congruences cycliques.

La propriété donnée par M. Guichard (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1903, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, page 123) pour les réseaux K *de l'espace à trois dimensions, est valable pour l'espace d'ordre quelconque n, si nous convenons d'appeler réseau* K, *dans l'espace à n dimensions, tout réseau conjugué à une congruence cyclique.*

Considérons, en effet, une congruence-point OM, dans l'espace à n dimensions, qui soit cyclique. Soient x_i ($i=1, 2,..., n$) les coordonnées d'un point M de cette congruence qui décrit un réseau. On aura, pour caractériser le réseau M, des équations de la forme :

$$(\alpha_1)\left\{\begin{array}{l}\xi'_v = n\eta\\ \eta'_u = m\xi\end{array}\right.\qquad(\alpha_2)\left\{\begin{array}{l}x'_u = h\xi\\ x'_v = \mathrm{L}\eta\end{array}\right.\qquad(\alpha_3)\left\{\begin{array}{l}h'_v = lm\\ l'_u = hn\end{array}\right.$$

On en déduit, par dérivations :

$$(\beta)\quad x''_{uv} = \frac{h'_v}{h}x'_u + \frac{l'_v}{l}x'_v;$$

$$h''_{uv} = lm'_u + ml'_u = lm'_u + mnh;$$

$$l''_{uv} \mp hn'_v + mnl.$$

La congruence OM étant cyclique, on peut écrire (voir page 58), en remarquant que les x_i sont paramètres directeurs pour cette congruence-point :

$$\sum_1^n x_i^2 = h^2 + l^2.$$

En dérivant par rapport à u la relation précédente, on a :

$$(\gamma) \quad \sum x x'_u = h h'_u + l l'_u.$$

On trouverait, de même :

$$\sum x x'_v = h h'_v + l l'_v.$$

En dérivant la relation (γ), par rapport à v, il vient :

$$\sum x x''_{uv} + \sum x'_u x'_v = h h''_{uv} + l l''_{uv} + h'_u h'_v + l'_u l'_v.$$

En tenant compte des relations précédentes, on peut écrire cette dernière équation sous la forme :

$$\frac{h'_v}{h}(h h'_u + l l'_u) + \frac{l'_u}{l}(h h'_v + l l'_v) + hl \sum \xi\eta$$
$$= h h''_{uv} + l l''_{uv} + h'_u h'_v + l'_u l'_v,$$

d'où, en simplifiant :

$$\frac{h'_v}{h} l l'_u + \frac{l'_u}{l} h h'_v + hl \sum \xi\eta = h h''_{uv} + l l''_{uv}.$$

On en déduit :

$$l^2 mn + h^2 mn + hl \sum \xi\eta = hlm'_u + mnh^2 + hln'_v + mnl^2,$$

d'où :

$$m'_u + n'_v = \sum \xi\eta \qquad (1)$$

Cette propriété subsiste d'ailleurs si le réseau, au lieu d'être conjugué à une congruence-point cyclique, est conjugué à une congruence cyclique quelconque.

Soit, en effet, un réseau K quelconque : par définition, il y a au moins une congruence C qui lui est conjuguée. Soient m, n, les rotations, ξ_i, η_i, les paramètres normaux de ce réseau.

Menons, par l'origine, une congruence-point (D) parallèle à la congruence précédente : ce sera aussi une congruence C. On peut toujours trouver un réseau R′ conjugué à (D) et parallèle au réseau proposé, car si deux congruences sont parallèles, tout réseau conjugué à l'une est parallèle à un réseau conjugué à l'autre.

Ce réseau R′ est tel, d'après la démonstration ci-dessus, que l'on ait :

$$m'_u + n'_v = \sum \xi\eta \qquad (1)$$

Comme il est parallèle au proposé, celui-ci a mêmes rotations et mêmes paramètres normaux que R′.

Donc les rotations et les paramètres normaux de tout réseau K vérifient bien la relation (1).

Considérons maintenant, réciproquement, un réseau dont les rotations et les paramètres normaux vérifient la rotation (1). Posons :

$$\sum x^2 - h^2 - l^2 = 2\lambda,$$

Nous aurons, par dérivations :

$$\sum x x'_u - h h'_u - l l'_u = \lambda'_u \qquad (\gamma')$$

$$\sum x x'_v - h h'_v - l l'_v = \lambda'_v \qquad (\delta)$$

puis :

$$\sum x x''_{uv} + \sum x'_u x'_v - h h''_{uv} - l l''_{uv} - h'_u h'_v - l'_u l'_v = \lambda''_{uv},$$

ou, en tenant compte des relations (α_2), (α_3), (γ'), (δ) :

$$\sum x\left(\frac{h'_v}{h} x'_u + \frac{l'_u}{l} x'_v\right) + hl \sum \xi\eta - h\left(lm'_u + mnh\right)$$

$$- l\left(hn'_v + mnl\right) - lmh'_u - hnl'_v = \lambda''_{uv};$$

d'où, en simplifiant :

$$\lambda''_{uv} - \frac{h'_v}{h} \lambda'_u - \frac{l'_u}{l} \lambda'_v + hl\left(m'_u + n'_v - \sum \xi\eta\right) = o.$$

Si l'on tient compte maintenant de la condition (1), la relation précédente se réduit à :

$$\lambda''_{uv} - \frac{h'_v}{h} \lambda'_u - \frac{l'_u}{l} \lambda'_v = o$$

On en déduit, pour tout réseau K, une autre propriété, déjà énoncée par M. Guichard :

Si, dans un espace d'ordre n, un réseau est K, l'équation de Laplace à laquelle satisfont ses coordonnées admet comme solution $\sum_1^n x^2 - h^2 - l^2$.

Remarque. — *Si un réseau est* K, *le point de coordonnées :*

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \qquad \sum_1^2 x_i^2 - h^2 - l^2,$$

décrit un réseau dans l'espace d'ordre $n + 1$.

Si un réseau orthogonal est K, *le point de coordonnées :*

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \qquad \sum_1^n x_i^2, \qquad h^2 + l^2,$$

décrit un réseau dans l'espace à $n + 2$ *dimensions* (*voir page 67*).

Soient maintenant une congruence 2O, et une congruence orthogonale à la précédente, et par conséquent cyclique (page 33). Tout réseau harmonique à la première étant un réseau L (ou 2C) (c'est-à-dire applicable sur un réseau de l'espace à quatre dimensions), et tout réseau conjugué à la seconde étant un réseau K par définition (voir page 33, tableau I), on en déduit (page 28) que *tout réseau* L *est orthogonal à un réseau* K, *et inversement.*

On prouverait d'une façon analogue que *tout réseau* 2L *est orthogonal à un réseau* 2K, *et inversement.*

On sait que si l'on connaît deux réseaux, l'un du plan, l'autre de l'espace à quatre dimensions, applicables l'un sur l'autre, on peut en déduire des couples de réseaux applicables de l'espace ordinaire.

En effet, si (x_1, x_2), (x_3, x_4, x_5, x_6), sont les coordonnées des points correspondants des deux réseaux applicables, la condition d'applicabilité se traduit par la relation :

$$dx_1^2 + dx_2^2 = dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 + dx_6^2,$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$dx_1^2 + dx_2^2 + (idx_3)^2 = dx_4^2 + dx_5^2 + dx_6^2.$$

On peut donc en déduire, par exemple, que les deux réseaux de l'espace ordinaire (x_1, x_2, ix_3) et (x_4, x_5, x_6), sont applicables l'un sur l'autre.

Or, de ce qui précède on peut conclure qu'à toute congruence cyclique plane on peut faire correspondre des réseaux L, *donc des couples de surfaces applicables de l'espace à trois dimensions : il suffit de prendre l'un quelconque des réseaux conjugués à la congruence, et d'en déduire un réseau orthogonal, qui sera* L. *On entrevoit là une nouvelle méthode pour l'étude de la déformation des surfaces, à partir des congruences cycliques planes.*

Considérons maintenant un réseau plan K, et déterminons la nature des congruences qui lui sont conjuguées.

Le réseau étant K, un réseau qui lui est orthogonal est un réseau L (voir plus haut). Or, toute congruence harmonique à un réseau L est une congruence 2O, 3O ou 4O. On en déduit, d'après la loi d'orthogonalité, que toute congruence conjuguée à un réseau K doit être orthogonale à une congruence 2O, 3O ou 4O, et par conséquent est nécessairement C, 2C ou 3C. On retrouve des résultats consignés dans le tableau II (page 34).

Revenons à la question de la page 72. Le point N du paraboloïde de révolution (fig. 26, page 81), décrivant un réseau conjugué à la congruence-point ON (qui est une congruence O_c), sa projection *n* décrit un réseau conjugué à la congruence cyclique O*n*, c'est-à-dire un réseau K.

IV. — Autres façons de poser le problème des congruences O'_c

Considérons un réseau cyclique du paraboloïde de révolution (P) (un réseau cyclique, ou réseau C, est un réseau qui s'applique sur un autre réseau; la détermination des réseaux cycliques d'une surface équivaut à la résolution du problème de la déformation de cette surface). Parmi les congruences harmoniques à ce réseau, s'en trouvent ∞^1 qui sont des congruences de normales (Guichard, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, tableau, pages 124-125). La projection, sur le plan xOy perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde, de chacunes d'elles, est harmonique à la projection du réseau. Or, la projection de tout réseau du paraboloïde de révolution est un réseau plan orthogonal (page 68), et, dans le plan, toute congruence harmonique à un réseau orthogonal est une congruence cyclique (tableau II, page 34).

Donc à tout réseau cyclique du paraboloïde de révolution (P) on peut faire correspondre ∞^1 congruences O_c qui lui sont harmoniques.

Soit, réciproquement, une congruence O_c. Tout réseau harmonique à une congruence de normales de l'espace ordinaire, est un réseau cyclique (Guichard, *Annales de l'Ecole Normale*, page 124).

D'autre part, dans le plan, parmi les réseaux harmoniques à une congruence cyclique, s'en trouvent deux qui sont orthogonaux.

Il existe donc deux réseaux C_o (réseaux cycliques se projetant suivant des réseaux orthogonaux) qui sont harmoniques à la congruence O_c donnée.

Par suite, ainsi qu'on va le voir, il existe un réseau parallèle à chacun de ces deux réseaux cycliques qui est situé sur le paraboloïde de révolution (et ce réseau est aussi cyclique).

Pour le montrer, considérons, dans l'espace ordinaire, un réseau A se projetant suivant un réseau a orthogonal. Soient (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (η_1, η_2, η_3) des paramètres normaux pour le réseau A.

Les quantités (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2), sont alors des paramètres normaux pour le réseau a.

Le réseau a étant supposé orthogonal, on peut poser :

$$\xi_1 = \cos\varphi, \qquad \xi_2 = \sin\varphi,$$
$$\eta_1 = -\sin\varphi, \qquad \eta_2 = \cos\varphi.$$

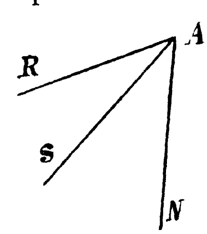

Fig. 27

On a alors (fig. 27), pour paramètres directeurs des tangentes AR, AS, du réseau A, les quantités :

$$\cos\varphi; \qquad \sin\varphi, \qquad \xi_3 \text{ (pour AR)},$$
$$-\sin\varphi, \qquad \cos\varphi, \qquad \eta_3 \text{ (pour AS)}.$$

On a, de plus, pour les rotations m, n, du réseau a :

$$m = -\varphi'_u, \qquad n = +\varphi'_v,$$

et comme ces rotations sont aussi les rotations du réseau projetant A, on peut écrire les équations :

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial v} = n\eta_3 = \eta_3\ \varphi'_v\ ; \qquad \frac{\partial \eta_3}{\partial u} = m\ \xi_3 = -\ \xi_3\ \varphi'_u.$$

Or, on a :

$$X_1 = \xi_3 \cos\varphi - \eta_3 \sin\varphi, \qquad X_2 = \xi_3 \sin\varphi + \eta_3 \cos\varphi, \qquad X_3 = -1,$$

pour paramètres directeurs de la normale AN au réseau A.

Soit alors M (x_1, x_2, x_3), un point du paraboloïde de révolution (P). Les quantités x_1, x_2, — 1, dirigent la normale en M de (P), normale qui doit être parallèle à AN. Cette propriété se traduit par les équations :

$$x_1 = \xi_3 \cos\varphi - \eta_3 \sin\varphi, \qquad x_2 = \xi_3 \sin\varphi + \eta_3 \cos\varphi.$$

En déterminant x_1, x_2, par ces équations, on trouve que le point de coordonnées x_1, x_2, décrit un réseau orthogonal. Pour ce dernier réseau, on peut écrire les équations :

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = h \cos\varphi, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\ l \sin\varphi\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(x_1^2 + x_2^2) = 2h\xi_3, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(x_1^2 + x_2^2) = 2l\eta_3.$$

En prenant :

$$2x_3 = x_1^2 + x_2^2,$$

le point (x_1, x_2, x_3) est sur (P), décrit un réseau, qui, d'autre part, est parallèle au réseau A.

Cette démonstration est due à M. Guichard.

De ce qui précède on déduit que *le problème de la déformation du paraboloïde de révolution est identique à la détermination de la représentation sphérique des congruences* O'_c. *Le problème actuel fournit donc une nouvelle solution du problème de la déformation du paraboloïde de révolution.*

On peut remarquer que la solution du problème de la déformation du paraboloïde de révolution donne des surfaces isothermiques à deux fonctions arbitraires.

Il a été démontré plus généralement, en effet, que toute surface applicable sur un paraboloïde quelconque fait connaître un couple de surfaces isothermiques.

Voici comment on peut montrer simplement que deux surfaces isothermiques peuvent être déduites d'une surface applicable sur le paraboloïde de révolution (P), autrement dit d'un réseau cyclique de (P).

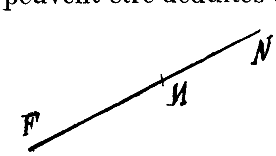

Fig. 28

Soit (fig. 28) M un point décrivant sur (P) un réseau cyclique. Joignons-le au foyer F. La droite FM décrit une congruence-point qui, coupant le paraboloïde (P) suivant un réseau, coupera une sphère de centre F suivant un réseau N. Ce réseau, étant sur une sphère, sera orthogonal, et la congruence-point FM, découpant sur cette sphère un réseau, sera une congruence de normales.

Le réseau M étant cyclique, la congruence FM, conjuguée à ce réseau, sera une congruence K (et, par suite, une congruence OK). Le réseau N de la sphère, étant orthogonal à cette congruence, sera lui-même OK. Donc on peut y faire correspondre deux surfaces isothermiques (Guichard, Comptes Rendus).

On peut montrer que *le problème de la recherche des congruences* O'_c *équivaut à celui de la détermination des surfaces* (S) *telles que les plans menés par une droite fixe et contenant les centres de courbures, soit rectangulaires.* Ces dernières surfaces ont été étudiées par M. Guichard (Mémoire sur la déformation des surfaces, *Journal de Mathématiques*, 1896, page 165)

Prenons, en effet (fig. 29) la droite fixe pour axe Oz, et soit F'F l'une des normales à la surface (S), F' et F étant ses foyers. Si f' et f sont les projections de F' et F sur le plans xOy, la condition énoncée peut se traduire ainsi : l'angle $\widehat{f'Of}$ est droit. En d'autres termes, le réseau-point $f'Of$ est orthogonal. Par suite, la congruence plane $f'f$, étant harmonique à un réseau orthogonal, est une congruence cyclique. Donc la congruence F'F est O_c ; par suite, on peut y faire correspondre une congruence O'_c parallèle.

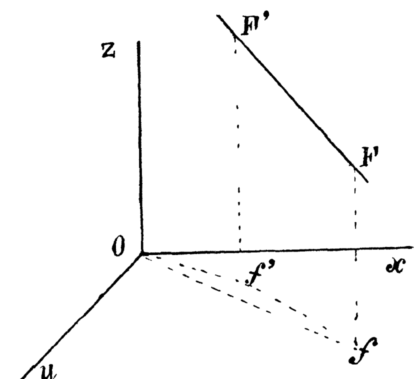

Fig. 29

Réciproquement, considérons une congruence O'_c (ou plus généralement une congruence O_c [congruence (G)]. On peut trouver, dans le plan, un réseau O qui soit harmonique à sa projection (g) qui est cyclique. Menons le réseau-point issu de l'origine O, parallèle au précédent. Il existera une congruence plane (g'), harmonique à ce réseau, qui sera parallèle à (g). Par suite (page 14), il existera une congruence parallèle à (G), — qui sera de ce fait, une congruence de normales — qui se projettera suivant (g'), et cette congruence admettra bien pour trajectoires orthogonales les surfaces jouissant de la propriété énoncée.

V. — Surfaces particulières

On peut d'abord rechercher des surfaces tout à fait particulières parmi les quadriques homofocales. On sait que les tangentes communes à deux quadriques homofocales (S_1), (S_2), forment une congruence de normales. Or, deux quadriques qui ont mêmes focales sont circonscrites à une même développable isotrope; en d'autres termes, leurs tangentes communes rencontrent le cercle imaginaire de l'infini.

Transformons par polaires réciproques relativement au complexe linéaire d'axe Oz et de paramètre K : le cercle de l'infini se transforme dans le cylindre de révolution d'équation :

$$(\mathrm{C}) \qquad x^2 + y^2 + \mathrm{K}^2 = o\,;$$

(S_1) et (S_2) se transforment en deux quadriques (Σ_1), (Σ_2) (car une quadrique est une surface de second ordre et de seconde classe, et toute transformation dualistique transforme une surface d'ordre m et de classe p en une surface d'ordre p et de classe m).

L'intersection complète de (Σ_1) et de (Σ_2), qui est la polaire réciproque de la développable isotrope circonscrite à (S_1) et à (S_2), est donc sur le cylindre (C).

Réciproquement, si l'intersection complète de deux quadriques (Σ_1), (Σ_2), est sur le cylindre (C), les polaires réciproques (S_1) et (S_2) de (Σ_1) et (Σ_2) admettront pour développable circonscrite commune la polaire réciproque de l'intersection des surfaces (Σ_1), (Σ_2). Cette développable devant rencontrer la courbe polaire réciproque du cylindre (C), c'est-à-dire le cercle de l'infini, les quadriques (S_1), (S_2) seront homofocales.

Il en résulte que si l'intersection complète de deux quadriques homofocales est sur le cylindre (C), ces deux quadriques se transformeront en quadriques homofocales, et, par suite, la congruence des tangentes communes à ces transformées — qui est la transformée de la congruence des tangentes communes aux quadriques données — sera une congruence de normales.

Soient, par exemple, les paraboloïdes homofocaux :

$$\frac{x^2}{p-\lambda} + \frac{y^2}{q-\lambda} - 2z + \lambda = o,$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = o.$$

En exprimant que leur intersection complète est sur le cylindre (C), on obtient une relation de la forme :

$$\frac{x^2}{p-\lambda} + \frac{y^2}{q-\lambda} - 2z + \lambda + \mu\left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z\right) = \nu(x^2 + y^2 + \mathrm{K}^2),$$

qui peut s'écrire :

$$x^2\left[\frac{1}{p-\lambda}+\frac{\mu}{p}-\nu\right]+y^2\left[\frac{1}{q-\lambda}+\frac{\mu}{q}-\nu\right]-2z(1+\mu)+\lambda-\nu K^2=o.$$

Cette relation devant être une identité en x, y, z, on devra donc avoir simultanément :

$$\frac{1}{p-\lambda}+\frac{\mu}{p}-\nu=o \qquad (1)$$

$$\frac{1}{q-\lambda}+\frac{\mu}{q}-\nu=o \qquad (2)$$

$$(3) \qquad 1+\mu=o, \qquad\qquad \lambda-\nu K^2=o. \qquad (4)$$

De (3) et (4), on tire : $\mu=-1, \quad \lambda=\nu K^2.$

En portant ces valeurs dans les équations (1) et (2), il vient :

$$\nu K^2=\nu p\,(p-\nu K^2)\,; \qquad\qquad \nu K^2=\nu q\,(q-\nu K^2).$$

En écartant l'hypothèse $\nu=o$, qui entraînerait $\lambda=o$ et correspondrait au cas où les deux quadriques homofocales seraient confondues, on a :

$$K^2=p^2-pK^2\nu, \qquad\qquad K^2=q^2-qK^2\nu.$$

En éliminant ν entre ces deux relations, on trouve :

$$(K^2+pq)(p-q)=o.$$

Si l'on fait $p=q$, on a des paraboloïdes de révolution.

Si l'on prend : $q=-\dfrac{K^2}{p}$, on a :

$$\nu=\frac{p^2-K^2}{pK^2}\,; \qquad \lambda=\nu K^2=\frac{p^2-K^2}{p}\,;$$

il y correspond des paraboloïdes homofocaux d'équations :

$$\frac{x^2}{p}-\frac{py^2}{K^2}-2z=o, \qquad\qquad \frac{px^2}{K^2}-\frac{y^2}{p}-2z+\frac{p^2-K^2}{p}=o.$$

Si l'on fait un calcul analogue pour les quadriques homofocales d'équations ;

$$\frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}+\frac{z^2}{c+\lambda}-1=o, \qquad\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=o,$$

on trouve la condition :

$$x^2\left(\frac{1}{a+\lambda}+\frac{\mu}{a}+\nu\right)+y^2\left(\frac{1}{b+\lambda}+\frac{\mu}{b}+\nu\right)+z^2\left(\frac{1}{c+\lambda}+\frac{\mu}{c}\right)-1-\mu+\nu K^2=o,$$

qui entraîne les relations :

$$\frac{1}{a+\lambda}+\frac{\mu}{a}+\nu=o, \qquad \frac{1}{b+\lambda}+\frac{\mu}{b}+\nu=o,$$

$$\frac{1}{c+\lambda}+\frac{\mu}{c}=o, \qquad -1-\mu+\nu K^2=o.$$

En éliminant λ et μ entre ces équations, on trouve :

$$(a-c)K^2+a(a+\lambda)=o, \qquad (b-c)K^2+b(b+\lambda)=o.$$

On en déduit :

$$(a-b)(cK^2-ab)=o.$$

Pour $a-b=o$, on a des quadriques de révolution autour de Oz.

Si l'on prend : $K^2-ab=o$, il est facile de former les équations des quadriques correspondantes.

Determinons maintenant les congruences O'_c dont les trajectoires orthogonales aient même représentation sphérique que des surfaces W.

Darboux a démontré (*Théorie générale des Surfaces*, Tome III) que la recherche des surfaces W revient à celle des réseaux de la sphère pour lesquels on a :

$$d\sigma^2=\alpha\, du^2+\psi(\alpha)\, dv^2 \qquad (1)$$

« *Chaque fois que l'élément linéaire de la sphère est ramené à la forme* (1), *ou* (1′) :

$$d\sigma^2=\frac{1}{K^2}du^2+\frac{1}{\varphi'^2(K)}dv^2, \qquad (1')$$

φ (K) *est déterminé à une constante près, et on en déduit une famille de surfaces* W, *parallèles, de représentation sphérique* (1). »

Ceci posé, soient :

$$(2)\left\{\begin{aligned}\xi'_v&=n\eta\\ \eta'_u&=m\xi\end{aligned}\right. \qquad (3)\left\{\begin{aligned}x'_u&=H\xi\\ x'_v&=L\eta\end{aligned}\right. \qquad (4)\left\{\begin{aligned}h'_v&=lm\\ l'_u&=hn\end{aligned}\right.$$

les équations définissant un réseau de la sphère. On a, pour l'élément linéaire $d\sigma$ de la sphère :

$$d\sigma^2=\sum dx^2=\sum\left(x'_u\,du+x'_v dv\right)^2$$

$$=du^2\sum x'^2_u+dv^2\sum x'^2_v+2\,du\,dv\sum x'_u x'_v=du^2\sum x'^2_u+dv^2\sum x'^2_v,$$

car le réseau, étant sur une sphère, est orthogonal, et, par suite, on a :

$$\sum x'_u x'_v=o.$$

Or, si l'on tient compte des équations (3), on peut écrire :

$$\sum x'^2_u=H^2\sum\xi^2; \qquad \sum x'^2_v=L^2\sum\eta^2.$$

Mais on a vu (page 55) que, pour un réseau orthogonal, les ξ et les η peuvent être choisis de manière que l'on ait :

$$\sum\xi^2=1, \quad \sum\eta^2=1.$$

Par suite, on a :

$$\sum x'^2_u = H^2, \qquad \sum x'^2_v = L^2,$$

et :

$$d\sigma^2 = H^2 du^2 + L^2 dv^2.$$

Si l'on compare cette équation à l'équation (1) (page 90), on voit que :

$$H^2 = \alpha, \qquad L^2 = \psi(\alpha)$$

On peut donc dire que *la recherche des surfaces* W *est celle des réseaux de la sphère dont l'équation de Laplace :*

$$\theta''_{uv} = \frac{H'_v}{H}\theta'_u + \frac{L'_u}{L}\theta'_v \tag{5}$$

à laquelle satisfont les coordonnées du point M *qui décrit le réseau, est telle que* H *et* L *soient fonctions l'un de l'autre.*

Soient alors c_1, c_2, c_3, les coordonnées du point M. Joignons OM. c_1, c_2, c_3, étant cosinus directeurs pour la congruence-point de normales décrite par OM, on peut encore dire que *la recherche des surfaces* W *est celle de la représentation sphérique des congruences de normales dont l'équation de Laplace* (5) *aux cosinus directeurs est telle que* H *et* L *soient fonctions l'un de l'autre.*

Cette condition est réalisée, en particulier, pour $L = H$ (congruences de normales qui sont en même temps congruences de Ribaucour, détermination des surfaces minima). On a alors sur la sphère un réseau isotherme.

Revenons au cas général. On a :

$$H = \frac{h}{ch\nu}, \qquad L = \frac{l}{ch\nu}, \tag{6}$$

les h et l étant ceux du réseaux (λ, ν) (page 55) correspondant à la congruence de normales OM.

La condition pour que H et L soient fonctions l'un de l'autre s'écrit :

$$H'_u L'_v = H'_v L'_u,$$

ou, en remplaçant H et L par leur valeur (6) :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h}{ch\nu}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{l}{ch\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h}{ch\nu}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{l}{ch\nu}\right).$$

La relation précédente s'écrit, en effectuant :

$$h'_u l'_v - h'_v l'_u = th\nu\left[h\left(l'_v \nu'_u - l'_u \nu'_v\right) - l\left(h'_v \nu'_u - h'_u \nu'_v\right)\right] \tag{7}$$

Recherchons les congruences O'_c qui la vérifient. Pour de telles congruences, on peut poser (page 58) :

$$h = \cos\varphi; \qquad l = \sin\varphi.$$

On en déduit : $h'_u\, l'_v - h'_v\, l'_u = o$, ce qui était évident à priori, du fait que h et l sont fonctions d'une même variable, et par suite fonctions l'un de l'autre.

On a, par suite :

$$th\nu\left[h\left(l'_v\,\nu'_u - l'_u\,\nu'_v\right) - l\left(h'_v\,\nu'_u - h'_u\,\nu'_v\right)\right] = o$$

d'où, en tenant compte des valeurs ci-dessus de h et de l :

$$\text{tg}\nu\left[\cos\varphi\left(\nu'_u\cos\varphi\,\varphi'_v - \nu'_v\cos\varphi\,\varphi'_u\right) - \sin\varphi\left(-\sin\varphi\,\varphi'_v\,\nu'_u - \sin\varphi\,\varphi'_u\,\nu'_v\right)\right] = o$$

c'est-à-dire .

$$\text{tg}\nu\left(\nu'_u\,\varphi'_v - \nu'_v\,\varphi_u\right) = o,$$

d'où :

$$\nu'_u\,\varphi'_v - \nu'_v\,\varphi'_u = o.$$

Cette relation, qui exprime que φ (et par suite h et l) est fonction de ν, peut s'écrire, en tenant compte des équations (6) (page 55) et en remarquant qu'on peut poser : $\xi_2 = \sin\tau$; $\eta_2 = \cos\tau$:

$$\varphi'_v\cos\varphi\sin\tau = \varphi'_u\sin\varphi\cos\tau,$$

ou, en tenant compte des équations (17) (page 58), et en remplaçant φ'_u par τ'_v :

$$\sin\tau\cos\varphi\,\varphi'_v = \sin\varphi\cos\tau\,\tau'_v,$$

ou :

$$l'_v\sin\tau = l\cos\tau\,\tau'_v,$$

d'où :

$$\frac{l'_v}{l} = \frac{\cos\tau\,\tau'_v}{\sin\tau} \qquad \text{et } l = \text{F}(u)\sin\tau$$

On trouve, de même :

$$h = \text{G}(v)\cos\tau.$$

On en déduit la relation :

$$\text{F}^2(u)\sin^2\tau + \text{G}^2(v)\cos^2\tau = 1 \tag{8}$$

En faisant, dans la relation (8), $\text{F}^2(u) = 1$, $\text{G}^2(v) = 1$, on a la solution la plus générale de la question.

En effet, dans ce cas, la relation précédente, se réduisant à l'identité :

$$\sin^2\tau + \cos^2\tau = 1,$$

ne fournit aucune relation nouvelle pour τ.

On a alors : $h = \pm\cos\tau = \cos\varphi$; $l = \pm\sin\tau = \sin\varphi$,

et, par suite, l'on peut prendre $\tau = \varphi$ ou $\tau = -\varphi$.

Il en résulte (page 79) *que les congruences* O'_c *correspondantes sont les normales des surfaces hélicoïdes*. Elles correspondent au cas où, dans les expressions (A) (page 58), on a :

$$f_1(\rho_1) = o, \qquad \text{ou} \qquad f_2(\rho_2) = o,$$

et dépendent, par conséquent, d'une fonction arbitraire. Ce résultat était à prévoir, car les hélicoïdes sont des surfaces W.

Supposons maintenant $F^2(u) \neq 1$. Nous allons montrer que les congruences O'_c correspondantes sont tout à fait particulières et ne dépendent plus que de trois constantes arbitraires.

En effet, l'hypothèse $F^2(u) \neq 1$ entraîne nécessairement $G^2(v) \neq 1$, car si on avait $G^2(v) = 1$, la condition (8) s'écrirait : $\sin^2\tau\,[F^2(u) - 1] = o$, et entraînerait : $F^2(u) = 1$.

Ceci posé, on devra avoir, en égalant deux valeurs de h et de l, les relations suivantes :

$$(8') \qquad G \cos\tau = \cos\varphi\,; \qquad\qquad F \sin\tau = \sin\varphi. \qquad (8'')$$

Dérivons (8′) par rapport à v, nous aurons l'équation :

$$G'_v \cos\tau - G \sin\tau\, \tau'_v = - \sin\varphi\, \varphi'_v,$$

ou, en remplaçant, d'après les relations (17) (page 58), φ'_v par τ'_u, puis $\sin\varphi$ par $F \sin\tau$:

$$G'_v \cos\tau = \left(G\,\tau'_v - F\,\tau'_u\right)\sin\tau. \qquad \text{(A)}$$

On trouve, de même, en dérivant (8″) par rapport à u :

$$F'_u \sin\tau + F \cos\tau\, \tau'_u = \cos\varphi\, \varphi'_u,$$

d'où, en remplaçant φ'_u par τ'_v et $\cos\varphi$ par $G \cos\tau$:

$$F'_u \sin\tau = \left(G\,\tau'_v - F\,\tau'_u\right)\cos\tau \qquad \text{(B)}$$

De (A) et de (B) on déduit :

$$G'_v \cos^2\tau = F'_u \sin^2\tau \qquad \text{(C)}$$

Des relations (C) et (8) (page 92), on tire, par l'élimination de τ :

$$\frac{F'_u}{F^2 - 1} + \frac{G'_v}{G^2 - 1} = o.$$

Les deux termes du premier membre étant fonctions, l'un de u seul, l'autre de v seul, on doit avoir nécessairement :

$$\frac{F'_u}{F^2 - 1} = c_1\,; \qquad \frac{G'_v}{G^2 - 1} = - c_1 \quad (c_1 = \text{const.})$$

On déduit de là, par intégration :

$$F = \frac{1 + e^{c_1 u + c_2}}{1 - e^{c_1 u + c_2}}\,; \qquad G = \frac{1 + e^{-c_1 v + c_3}}{1 - e^{-c_1 v + c_3}}, \qquad \text{(D)}$$

c_2 et c_3 étant deux nouvelles constantes.

De la relation (8), on tire alors :

$$\cos^2\tau = \frac{1 - F^2}{G^2 - F^2} \qquad \text{(E)}$$

Les relations :

$$\lambda'_u = h\xi_1 = \mathrm{G}\cos^2\tau = \frac{\mathrm{G}(1-\mathrm{F}^2)}{\mathrm{G}^2-\mathrm{F}^2};$$

$$\lambda'_v = l\eta_1 = \mathrm{F}\sin^2\tau = \mathrm{F}\left[1-\left(\frac{1-\mathrm{F}^2}{\mathrm{G}^2-\mathrm{F}^2}\right)^2\right];$$

$$\nu'_u = h\xi_2 = -\mathrm{G}\sin\tau\cos\tau; \qquad \nu'_v = l\eta_2 = \mathrm{F}\sin\tau\cos\tau,$$

fournissent ensuite λ et ν par quadrature.

On remarquera que si on donne à la constante c_1 une valeur infinie, on aura : $\mathrm{F}^2 = 1$, $\mathrm{G}^2 = 1$, et que, d'après (E), $\cos^2\tau$ se présentera sous forme indéterminée, ce qui prouve à nouveau que ce cas spécial correspond à la solution la plus générale.

REMARQUE. — *A cette méthode échappe la détermination des normales aux surfaces moulures qui, comme on va le voir, sont trajectoires orthogonales de congruences* O'_c.

Reprenons enfin l'équation aux dérivées partielles obtenue page 40, et définissant les trajectoires orthogonales des congruences O'_c :

$$\left.\begin{aligned}&-(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)+(s^2-rt_1)(x^2+y^2+\mathrm{K}^2)\\&+(px+qy)[t_1(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)]=o\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Si on fait :

$$1+p^2+q^2=o,$$

on a, en dérivant cette dernière équation par rapport à x et à y :

$$pr+qs=o, \qquad ps+qt_1=o,$$

d'où :

$$r=-\frac{qs}{p}, \qquad t_1=-\frac{ps}{q}.$$

On en déduit :

$$s^2-rt_1=o,$$

et si l'on porte ces valeurs dans l'équation (9), elle est vérifiée.

On en conclut que les développables isotropes fournissent une solution de l'équation (9) ; cependant elles ne donnent aucune congruence O'_c, car les normales d'une développable isotrope, étant les génératrices de la surface, ne dépendent que d'un paramètre, et, par suite, ne forment pas une congruence.

Ceci posé, considérons l'équation aux rayons de courbure principaux :

$$(rt_1-s^2)\mathrm{R}^2-\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)t_1-2pqs+(1+q^2)r]\mathrm{R}+(1+p^2+q^2)^2=o.$$

Si on la compare à l'équation (9), on voit que les surfaces pour lesquelles on a :

$$\frac{-\mathrm{R}^2}{x^2+y^2+\mathrm{K}^2}=\frac{-\mathrm{R}\sqrt{1+p^2+q^2}}{px+qy}=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{-(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)}$$

se rattachent à la question.

En éliminant R entre ces deux équations et en divisant par le facteur

$$1+p^2+q^2,$$

on trouve l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(px+qy)^2=(p^2+q^2)(x^2+y^2+K^2) \qquad (9')$$

Si on passe en coordonnées semi-polaires, en posant :

$$x=\rho\cos\omega, \qquad y=\rho\sin\omega,$$

on a l'équation :

$$\rho^2 K^2 z'^2_\rho + z'^2_\omega(\rho^2+K^2)=o.$$

On voit que les surfaces correspondantes sont imaginaires pour K réel. Si K est une imaginaire pure, on peut poser : $K=iK_1$ (K_1 étant réel). En intégrant, on trouve alors l'équation :

$$z=f(t),$$

en posant :

$$t=\omega+\frac{\sqrt{\rho^2+K^2}}{iK}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\rho^2+K^2}}{iK}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2+K^2}}{iK}-\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2+K^2}}{iK}$$

Montrons que ces surfaces vérifient bien l'équation (9).

On peut écrire, en effet, les relations :

$$z'_x=f'_t\,t'_x=p; \qquad z'_y=q=f'_t\,t'_y;$$

$$r=p'_x=f'\,t''_{x^2}+f''\,t'^2_x; \qquad s=f'\,t''_{xy}+f''\,t'_x\,t'_y; \qquad t_1=f'\,t''_{y^2}+f''\,t'^2_y;$$

$$s^2-rt_1=f'^2\left(t''_{xy}-t''_{x^2}\,t''_{y^2}\right)-f'f''\left(t''_{x^2}\,t'^2_y-2t''_{xy}\,t'_x\,t'_y+t''_{y^2}\,t'^2_x\right);$$

$$t_1(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)=f'^3\left(t''_{x^2}\,t'^2_y-2t''_{xy}\,t'_x\,t'_y+t''_{y^2}\,t'^2_x\right)+f'\left(t''_{x^2}+t''_{y^2}\right)+f''\left(t'^2_x+t'^2_y\right);$$

$$p^2+q^2=f'^2\left(t'^2_x+t'^2_y\right); \qquad 1+p^2+q^2=1+f'^2\left(t'^2_x+t'^2_y\right).$$

Or, on a :

$$t'_x=-\frac{1}{K}\frac{Ky+ix\sqrt{x^2+y^2+K^2}}{x^2+y^2}; \qquad t'_y=\frac{1}{K}\frac{Kx-iy\sqrt{x^2+y^2+K^2}}{x^2+y^2};$$

$$t''_{x^2}=-\frac{1}{K}\frac{-2Kxy\sqrt{x^2+y^2+K^2}+i\left[y^2(x^2+y^2+K^2)-K^2x^2\right]}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2+K^2}};$$

puis, en posant :

$$x^2+y^2+K^2=A^2:$$

$$t''_{xy}=-\frac{1}{K}\frac{K^2(x^2-y^2)A-ixy(A^2+K^2)}{(x^2+y^2)^2A}; \qquad t''_{y^2}=\frac{1}{K}\frac{-2KxyA+i(-x^2A^2+K^2y^2)}{(x^2+y^2)^2A};$$

$$t''_{xy}-t''_{x^2}\,t''_{y^2}=o, \qquad t''_{x^2}\,t'^2_y-2t''_{xy}\,t'_x\,t'_y+t''_{y^2}\,t'^2_x=\frac{i}{AK^3};$$

$$t'^2_x+t'^2_y=-\frac{1}{K^2}; \qquad t''_{x^2}+t''_{y^2}=\frac{-i}{AK}; \qquad px+qy=f'_t\left(xt'_x+yt'_y\right)=\frac{-iA}{K}.$$

En portant ces résultats dans l'équation (9), on a :

$$\frac{f'}{K^2}\left(1-\frac{f'^2}{K^2}\right)-\frac{if''A^2}{AK^3}-\frac{iA}{K}\left[\frac{if'^3}{AK^3}-\frac{if'}{AK}-\frac{f''}{K^2}\right]=o$$

ce qui prouve que l'équation (9) est identiquement vérifiée.

Cherchons à reconnaître la nature géométrique de ces surfaces. En développant l'équation :

$$(px + qy)^2 = (p^2 + q^2)(x^2 + y^2 + K^2),$$

on peut la mettre sous la forme :

$$(py - qx)^2 + K^2(p^2 + q^2) = o, \qquad \text{ou :} \quad \left(\frac{qx - py}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)^2 = (iK)^2.$$

Or, la quantité $\left|\frac{qx - py}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right|$ n'est autre que la distance de l'origine O des coordonnées à la projection de la normale en M (x, y, z), d'équation :

$$q(X - x) - p(Y - y) = o$$

On en déduit immédiatement que la projection de la normale en M est tangente au cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 + K^2 = o,$$

et que, par suite, le plan vertical projetant cette normale touche le cylindre ayant ce cercle pour section droite tout le long d'une génératrice. Donc la normale à la surface touche ce cylindre, qui constitue l'une des nappes de la développée.

D'après ce qui précède, on voit que réciproquement, toute surface admettant le cylindre pour l'une des nappes de sa développée satisfait à l'équation (9'), et par suite à l'équation (9).

Ainsi, les surfaces (9') *ne sont autres que les surfaces moulures à noyau cylindrique circulaire droit. Toute surface moulure admettant un cylindre circulaire droit pour l'une des nappes de sa développée possède la propriété d'avoir la congruence de ses normales transformée en une congruence de normales par polaires réciproques relativement au complexe ayant pour axe l'axe du cylindre, et pour paramètre* iR, R *étant le rayon du cylindre. Si on prend un point fixe* O *sur l'axe du cylindre, et qu'on mène, à une distance* iR *de* O, *un plan* (P) *perpendiculaire à l'axe, la projection, sur le plan* (P), *du segment ayant pour extrémités les centres de courbure, est vue de* O *sous un angle droit.*

Comme on le sait, ces surfaces peuvent être engendrées par une courbe plane (c) dont le plan roule sur le cylindre. Leurs deux systèmes de lignes de courbure sont des courbes planes. Ces surfaces, ainsi que l'a indiqué Darboux, peuvent être obtenues encore de la manière suivante :

On prend dans un plan une famille de courbes parallèles. Si l'on effectue sur chacune de ces courbes une translation normale au plan et variant d'après une loi déterminée quand on passe d'une courbe à l'autre, les positions nouvelles de toutes ces courbes ont pour lieu géométrique la surface moulure.

On peut enfin remarquer que la développée d'une surface moulure comprend, outre le cylindre, une deuxième surface moulure. Par suite, l'une de ces surfaces étant donnée on peut, de ce fait, en déduire une infinité d'autres.

D'ailleurs, il résulte de la définition géométrique donnée plus haut qu'étant donnée une surface moulure, on peut en déduire une infinité d'autres à deux constantes arbitaires — c'est-à-dire, analytiquement, une intégrale complète dont peut être déduite la surface générale — par rotation, autour de l'axe du cylindre, et translation parallèle à cet axe.

VI. — Propriétés de divers réseaux se présentant dans l'étude des congruences O'_c

Soit (fig. 30) (G) une congruence O_c, M un point d'une droite de cette congruence qui décrit un réseau orthogonal à (G). Il a été établi (page 71) que la trace (G_1) du réseau M sur le plan xOy est une congruence 2O, C.

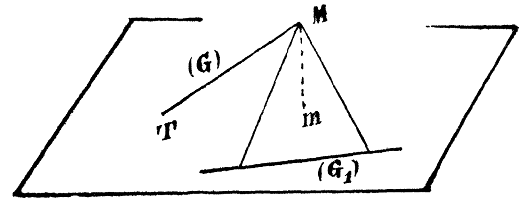

Fig. 30

Considérons la trace T de la congruence (G) sur le plan xOy. On sait (page 20) que le point de rencontre d'une droite d'une congruence avec un plan fixe, décrit un réseau conjugué à la congruence. D'autre part (page 30), si, dans l'espace ordinaire, une congruence (G) et un réseau M sont orthogonaux, la trace de (G) et la projection de M sur le plan xOy, forment deux réseaux orthogonaux.

Le réseau T est donc orthogonal au réseau m (projection du réseau M), qui est 2O, L (page 71). Or, (page 33) dans le plan, un réseau 2O a pour réseau orthogonal un réseau 2O et un réseau orthogonal à un réseau L est un réseau K (page 84). Donc T est un réseau 2O, K.

Etudions maintenant les réseaux harmoniques aux congruences O_c.

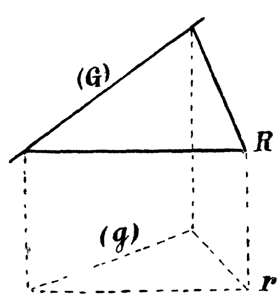

Fig. 31

Tout réseau harmonique à une congruence (G) de normales (fig. 31) dans l'espace ordinaire, est un réseau C. Le réseau R étant harmonique à la congruence (G), la projection r de R est un réseau harmonique à la projection (g) de (G). Or, (g) est une congruence C par hypothèse, et, dans le plan, parmi les réseaux harmoniques à une congruence C, s'en trouvent : deux qui sont orthogonaux; ∞^1 qui sont 2O ; les autres sont des réseaux 3O (tableau I, page 33).

Il y a donc trois catégories de réseaux cycliques : deux réseaux C_O; ∞^1 réseaux C_{2O} ; puis, en général, les réseaux C_{3O}.

Les réseaux C_O ont été étudiés (page 85). Ils sont parallèles aux réseaux cycliques du paraboloïde de révolution, et leur détermination se rattache au problème de la déformation de cette surface.

Considérons les congruences conjuguées à ces réseaux C_O. Chacun de ces réseaux étant cyclique, les congruences (G) qui leur sont conjuguées sont des congruences K (une congruence K est une congruence applicable sur une congruence à cinq dimensions). Le réseau se projette suivant un réseau plan O, qui est conjugué à la projection (g) de l'une quelconque des congruences sus-indiquées. Or, dans le plan, toute congruence conjuguée à un réseau O, est une congruence 2O. Donc chacune des congruences (G) est une congruence K_{2O}.

La trace d'un réseau C_O sur le plan xOy est une congruence (G_1) qui lui est harmonique. D'autre part, cette congruence est orthogonale à la projection d'une congruence (G) orthogonale au réseau C_O, et la congruence (G) étant orthogonale à un réseau C, est une congruence C, et sa projection (g) est une congruence 2C. Donc la congruence (G_1), orthogonale à cette dernière, est une congruence 3O (page 33). D'autre part, (G_1) est une congruence C, comme étant harmonique à un réseau C de l'espace ordinaire.

De même, la trace de la congruence orthogonale au réseau C_O, étant orthogonale à la projection du réseau (projection qui est un réseau plan 2C, O) sera un réseau O comme étant orthogonal à un réseau O, et en même temps un réseau K comme étant orthogonal à un réseau 2C (ou L). On retrouve ainsi des réseaux parallèles à des réseaux isothermiques du plan.

DEUXIÈME PARTIE

TRANSFORMATIONS PAR POLAIRES RÉCIPROQUES RELATIVEMENT AU COMPLEXE LINÉAIRE ET A LA SPHÈRE, ET APPLICATIONS

I. — Transformations par rapport au complexe linéaire

Nous avons indiqué (page 23) que toute transformation par polaires réciproques transforme une congruence conjuguée à un réseau en une congruence harmonique à un réseau, et réciproquement.

Nous avons également noté (page 27), que, si R′ est le réseau polaire réciproque d'un réseau R relativement à un complexe linéaire d'axe Oz, les projections r' et r des deux réseaux, après rotation de r' de l'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz, sont orthogonales.

De même, nous avons vu que si deux congruences sont transformées l'une de l'autre par rapport au complexe d'axe Oz, leurs projections sur xOy, après rotation de $\frac{\pi}{2}$ de l'une d'elles autour de Oz, se correspondent par orthogonalité.

Cette remarque est très importante. Elle permet de savoir, à priori, qu'*un réseau* O, *se projetant suivant un réseau* 2O, *se transforme en un réseau dont la projection, superposable à un réseau orthogonal à un réseau* 2O, *est un réseau* 2O. (*Un réseau* O *se transforme en réseau* R_{2O}).

Un réseau cyclique se projette suivant un réseau 2C. Dans le plan, un réseau 2C est orthogonal à un réseau K. Donc *un réseau* C *se transforme en un réseau* R_K.

Une congruence de normales se projette suivant une congruence 2O. Une telle congruence 2O est orthogonale à une congruence C plane (page 33). Par suite, *une congruence* O *se transforme en congruence* D_c.

Une congruence C se projette suivant une congruence 2C. Une congruence plane 2C est orthogonale à une congruence 3O. Donc *une congruence* C *se transforme en congruence* D_{3O}.

Etant donnée une congruence se projetant suivant une congruence cyclique (congruence D_c*), il existe* ∞^1 *congruences parallèles à la congruence donnée qui se transforment en congruences de normales par polaires réciproques relativement au complexe linéaire.*

Considérons, en effet, la projection de la congruence donnée : c'est une congruence C plane. Par suite, en vertu d'une propriété établie page 64, il existe une congruence cyclique (g), parallèle à la précédente, dont on voit, de l'origine O située sur l'axe Oz du complexe, le segment focal, en projection sur le plan $z = K$ (K, paramètre du complexe), sous un angle droit. Il en résulte, d'après une autre propriété démontrée page 14, qu'il existe une congruence (G), parallèle à la proposée, qui se projette suivant la congruence (g) (ainsi que toutes les congruences obtenues à partir de la précédente par une translation parallèle à Oz) (en tout ∞^1 congruences). Or, chaque congruence (G) ainsi obtenue se transforme en une congruence de normales relativement au complexe linéaire (page 36).

Cette propriété permet de démontrer instantanément qu'étant donnée une congruence O_c, il en est ∞^1 parallèles qui sont O'_c.

Etant donné un réseau se projetant suivant un réseau K, *il en existe de parallèles se transformant en réseaux cycliques par rapport au complexe.*

Considérons, en effet, un tel réseau (réseau R_K). Toute congruence plane conjuguée à sa projection r (qui est un réseau K) est nécessairement une congruence C, une congruence 2C ou une congruence 3C. Soit (d) l'une des congruences C planes conjuguées au réseau r, et (D) une congruence de l'espace ordinaire se projetant suivant (d) et conjuguée à R (On a vu, page 18, que si un réseau plan r et une congruence plane (d) sont conjugués il existe une congruence de l'espace à trois dimensions qui est conjuguée à tout réseau R projetant r, et se projetant suivant la congruence plane (d)). La congruence (D) étant D_c, on peut, d'après la propriété précédente, en trouver de parallèles se transformant en congruences de normales. Soit (D′) l'une d'elles. (On sait (Guichard, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, Chapitre I, n° 5) que si deux congruences de l'espace ordinaire sont parallèles, on peut trouver un réseau conjugué à l'une, qui soit parallèle à tout réseau conjugué à l'autre. Donc il existe un réseau donné R′, parallèle au réseau donné R, qui est conjugué à la congruence (D′).

Ainsi, la congruence (D′) se transforme en une congruence (D″) de normales. Le réseau R′, étant *conjugué* à (D′), se transforme en un réseau R″ *harmonique* à (D″) (page 23, remarque). Or, dans l'espace ordinaire, tout réseau harmonique à une congruence (D″) de normales (congruence O), est un réseau cyclique (réseau C). Donc le réseau R′, parallèle au proposé, se transforme en un réseau C.

Etant donné un réseau se projetant suivant un réseau 2O (*et qui ne soit pas un réseau* O), *il en existe de parallèles au précédent qui se transforment en réseaux* O *par rapport au complexe.*

Soit, en effet, R un réseau se projetant suivant un réseau *r* qui soit 2O. On peut trouver une congruence cyclique plane (*d*) qui soit harmonique à *r* (tableau I, page 33). On en déduit (page 22) qu'il existe une congruence (D), harmonique au réseau R, se projetant suivant la congruence (*d*). Cette congruence étant D_c, on peut (page 100) en trouver au moins une (en tout ∞^1) parallèle (D′), qui se transforme en congruence de normales (D″), et on peut trouver un réseau R′, parallèle à R, qui soit harmonique à (D′).

R′ étant harmonique à (D′), son transformé R″ sera conjugué à (D″). Or, un réseau conjugué à une congruence de normales (D″) ne peut être qu'un réseau O ou 2O (Guichard, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1903, page 124, tableau). Mais le réseau R′, étant parallèle à R, se projette suivant un réseau 2O dont un réseau orthogonal, superposable à la projection du transformé de R′ (page 27), est un réseau 2O (page 33). R″, devant se projeter suivant un réseau 2O, sera nécessairement O, en général [on exclut le cas tout à fait particulier où R″, étant parallèle au plan xOy, serait un réseau 2O].

Il existe donc bien des réseaux R′ parallèles à R se transformant en réseaux O.

Etant donnée une congruence se projetant suivant une congruence 2C (*et qui ne soit pas* C) *il en existe de parallèles à la précédente qui se transforment en congruences* 2O.

On effet, soit (D) une congruence se projetant suivant une congruence (*d*) qui soit 2C. Parmi les réseaux plans conjugués à cette congruence plane 2C, s'en trouvent qui sont des réseaux K (tableau I, page 33). Soit *r* l'un de ces réseaux. Si R est le point de la congruence (D) qui se projette en *r*, R décrit un réseau conjugué à (D) (page 18).

Or, parmi les congruences conjuguées à *r*, s'en trouvent qui sont des congruences C (tableau II, page 34). Soit (*d*′) l'une de ces congruences planes. Désignons par (D′) (page 15) une congruence conjuguée au réseau R, et se projetant suivant (*d*′). On peut trouver (page 100) ∞^1 congruences parallèles à la congruence D'_c, qui se transforment en congruences de normales. Soit (D″) l'une d'elles. (D″) étant parallèle à (D′), on peut trouver un réseau R′, parallèle au réseau R, et conjugué à (D″). Par suite, le réseau R′ se transforme en un réseau harmonique à la transformée (D_1) de (D″), c'est-à-dire en un réseau C.

De même, le réseau R′ étant parallèle à R, on peut trouver une congruence (D'_1), parallèle à (D), et conjuguée au réseau R′. La transformée de (D'_1) sera harmonique au réseau transformé de R′, qui est un réseau C. Or une congruence harmonique à un réseau C ne peut être qu'une congruence O, une congruence 2O ou une congruence 3O.

Dans le plan (page 33), une congruence orthogonale à une congruence 2C est 3O. Donc, a priori, la congruence donnee D_{2C} doit se transformer en une congruence se projetant suivant une congruence 3O. Par suite, la transformée ne peut être ni O, ni en général 3O : elle est nécessairement 2O.

II. — Transformations par rapport à la sphère

Considérons (fig. 32) un point M qui décrit un réseau. Si, par le centre O de la sphère, nous menons une droite Δ perpendiculaire au plan tangent en M au réseau, Δ est bien déterminée pour chaque point M. Le point M, qui se meut sur une surface, dépendant de deux paramètres, il en est donc de même de Δ, qui, par suite, décrit une congruence-point.

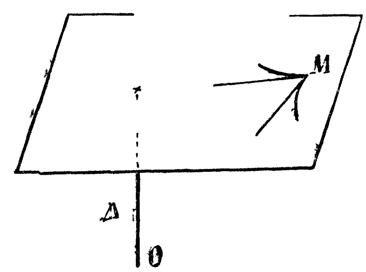

Fig. 32

Le sommet N du réseau transformé de M par polaires réciproques par rapport à la sphère de centre O, n'est autre, sur la droite Δ, que le pôle du plan tangent en M au réseau primitif. N étant sur Δ, décrit, dans l'espace ordinaire, un réseau conjugué à la congruence (Δ).

Il résulte de ce qui précède que tous les réseaux parallèles à M se transforment en réseaux conjugués à la congruence (Δ), car, pour tous ces réseaux, la perpendiculaire aux plans tangents correspondants (qui sont parallèles), est la droite Δ.

Réciproquement, prenons un point N décrivant un réseau sur une droite Δ d'une congruence-point passant par le centre O de la sphère Σ. Le réseau polaire réciproque de N, par rapport à Σ, sera, dans le plan polaire réciproque de N, un réseau orthogonal à (Δ). Les réseaux transformés des réseaux ayant leurs sommets aux différents points de la droite Δ, sont tous parallèles, comme ayant, aux points correspondants, leurs plans tangents perpendiculaires à la même droite Δ. (On sait, en effet, d'après une propriété classique très facile à établir, que si deux réseaux, en chacun de leurs couples de points correspondants, ont leurs plans tangents parallèles, ces réseaux sont parallèles).

Donc tout réseau décrit par un point de Δ se transforme en un réseau parallèle à M.

Ce résultat, obtenu par M. Guichard, étant rappelé, démontrons les propriétés suivantes (espace ordinaire).

Tout réseau cyclique se transforme en un réseau K *par polaires réciproques par rapport à la sphere.*

Menons, en effet, par le centre O de la sphère, la congruence-point (Δ) perpendiculaire au plan tangent au réseau donné M. (Δ) est orthogonale au réseau; par suite, M étant un réseau C, (Δ) est une congruence C. Le transformé de M, étant conjugué a (Δ), *est un réseau* K, *car tout réseau conjugué à une congruence* cyclique est un réseau K.

Inversement, étant donné un réseau K, *il en est* ∞^2, *parallèles au précédent, qui se transforment en réseaux* C (*cycliques*).

Abaissons, en effet, de O la congruence-point (Δ) orthogonale au réseau R donné. Etant orthogonale à un réseau K, la congruence (Δ) est une congruence K (Guichard, Sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, page 122). Or, parmi les réseaux conjugués à une congruence K, il en est ∞^2 qui sont cycliques. Chacun de ces réseaux, ayant son sommet sur (Δ), sera la transformée d'un réseau parallèle à R (page 103).

Tout réseau O *se transforme en un réseau* 2O, *en général.*

Cette propriété, déjà énoncée par M. Guichard, peut être démontrée de la façon suivante :

Le réseau R donné étant O, son transformé est conjugué à la congruence (Δ) qui, étant orthogonale à un réseau O, est une congruence de normales (congruence O). Or, en général, un réseau conjugué à une congruence O de l'espace ordinaire est un réseau 2O.

(Dans le cas particulier où le réseau O est sur la sphère, il se transforme évidemment en un réseau O.)

Inversement, étant donné un réseau 2O, *il existe deux réseaux, parallèles au précédent, qui se transforment en réseaux* O.

Soit, en effet, R le réseau donné. La congruence-point orthogonale (Δ) est une congruence 2O. (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, page 121). Or, il existe deux réseaux O conjugués à une congruence 2O. Chacun d'eux, ayant son sommet sur (Δ), est le transformé d'un réseau parallèle à R.

Toute congruence de normales se transforme en une congruence cyclique.

Cette propriété, établie par M. Guichard, peut être démontrée de la façon suivante :

Considérons une congruence (D) de normales : elle est caractérisée par le fait que ses plans focaux P, P′ sont rectangulaires. Si on transforme par polaires réciproques par rapport à la sphère Σ de centre O, les plans focaux se transforment dans les foyers de la droite D′ transformée de D. Ces foyers, pôles des plans P, P′, par rapport à Σ, sont sur la perpendiculaire abaissée de O sur PP′. Ces perpendiculaires sont donc rectangulaires. En d'autres termes, les transformées des congruences de normales par rapport à la sphère sont celles dont, du centre O de Σ, on voit le segment focal sous un angle droit.

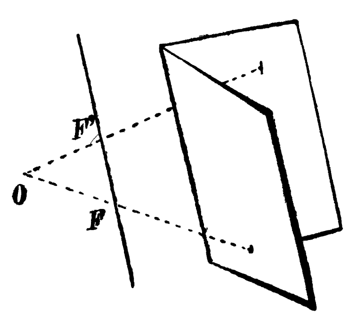

Fig. 33

Si F, F′ (fig, 33) sont les foyers de la transformée, celle-ci est harmonique au réseau-point orthogonal FOF′ : donc c'est une congruence cyclique.

Réciproquement, toute congruence (D_1) telle que de O on voie le segment focal sous un angle droit, se transforme en une congruence de normales, car les plans focaux de la transformée de (D_1), transformés des foyers F, F′, sont rectangulaires comme perpendiculaires, respectivement, à OF et à OF′.

Si (D) est une congruence de normales, $F(x, y, z)$, $F'(\xi, \eta, \zeta)$, les foyers de la transformée D_1 de D, on aurait pu montrer analytiquement que si :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

est l'équation de la sphère Σ de centre O, le fait pour (D) d'être une congruence de normales se traduit par la relation :

$$\xi x + \eta y + \zeta z = o,$$

qui exprime que les foyers de sa transformée (D_1) sont conjugués harmoniques par rapport au cône isotrope de sommet O, c'est-à-dire de O on voit le segment focal de D_1 sous un angle droit.

Si on suppose, de plus, que (D_1) est aussi une congruence de normales, le réseau FOF′, qui est orthogonal, est en même temps cyclique comme harmonique à une congruence de normales.

Considérons, inversement, un réseau-point, de sommet O, orthogonal et cyclique. Toute congruence harmonique à un réseau orthogonal, est cyclique ; d'autre part, étant donné un réseau cyclique, il existe ∞^1 congruences, harmoniques à ce réseau, qui sont des congruences de normales. Chacune d'elles, d'après le raisonnement ci-dessus, se transforme en une congruence de normales.

Il en résulte que *la recherche des congruences de normales se tranformant en congruences de normales par rapport à une sphère, équivaut à la détermination des réseaux orthogonaux et cycliques, c'est-à-dire des surfaces à courbure totale constante.*

Etant donnée une congruence cyclique, il en est ∞^1, parallèles à la précédente, qui se transforment en congruences de normales par polaires réciproques par rapport à la sphère.

Menons, en effet, par le centre O de la sphère, un réseau-point r parallèle à l'un des ∞^1 réseaux O harmoniques à la congruence cyclique donnée (D). On pourra mener une congruence (D′) parallèle à (D), qui soit harmonique au réseau r. D'après ce qui a été vu ci-dessus, (D′) se transformera en une congruence de normales.

A chacun des ∞_1 réseaux O harmoniques à (D), correspond une congruence possédant la propriété de l'énoncé.

Etant donnée une congruence cyclique, il en est ∞^2, parallèles à la précédente, qui se transforment en congruences 2O par rapport à la sphère.

En effet, parmi les réseaux harmoniques à une congruence (D) qui soit cyclique, s'en trouvent ∞^2 qui sont des réseaux 2O. Soit R l'un de ces réseaux. Il existe deux réseaux, parallèles à R, qui se transforment en réseaux O (page 104). D'après une propriété maintes fois rappelée, on peut trouver une congruence (D_1), parallèle à (D), qui soit harmonique à l'un quelconque R_1 de ces deux réseaux. La congruence (D_1) se transforme en une congruence conjuguée au transformé de R_1, et qui sera en général 2O, car, en général, une congruence conjuguée à un réseau O, est 2O.

Etant donnée une congruence 2C, *il en est* ∞^2, *parallèles à la précédente, qui se transforment en congruences* 2O.

Le raisonnement est le même que plus haut, car, parmi les réseaux harmoniques à une congruence 2C, se trouvent ∞^2 réseaux 2O.

Etant donnée une congruence 2O, *il en est deux, parallèles à la précédente, qui se transforment en congruences cycliques.*

En effet, à une congruence (D) qui est 2O sont conjugués deux réseaux O. Soit R l'un de ces réseaux : il en est un R', parallèle à R (celui qui est sur la sphère), qui se transforme en un réseau O. Il existe, d'autre part, une congruence (D'), parallèle à (D), qui est conjuguée au réseau R'. Donc sa transformée sera harmonique au transformé de R', c'est-à-dire à un réseau O, et, par suite, sera une congruence cyclique.

En partant du deuxième réseau O conjugué à (D), on trouverait, de même, une deuxième congruence, parallèle à (D), se transformant en congruence cyclique.

Une congruence 2O *se transforme, en général, en une congruence* 2C.

En effet, à une congruence 2O sont conjugués deux réseaux O. L'un quelconque R de ces réseaux se transforme en un réseau 2O, et la congruence la plus générale harmonique à un réseau 2O, est 2C. (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1903, page 124). La transformée de la congruence donnée étant harmonique au transformé de R, est donc une congruence 2C, en général.

III. — Applications à l'étude des surfaces isothermiques

I. — APPLICATIONS DE LA POLARITÉ RELATIVE AU COMPLEXE LINÉAIRE

Si deux réseaux, l'un R_1 *du plan, l'autre* R_2 *de l'espace à quatre dimensions, sont applicables, et si* R_1 *est un réseau* 2O, *le réseau* R_2 *est aussi* 2O.

En effet, M. Kœnigs a démontré que si deux surfaces sont applicables, non seulement elles admettent un système conjugué commun, mais que, de plus, les coordonnées des points correspondants des deux réseaux applicables sont solutions d'une même équation de Laplace :

$$\text{(E)} \qquad \sigma''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\sigma'_u + \frac{l'_u}{l}\sigma'_v.$$

Les deux réseaux ont donc même h et même l, et, par suite, mêmes rotations m et n.

Soient alors :

$$(1)\ \begin{cases} \xi'_v = n\eta \\ \eta'_u = m\xi \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x'_u = h\xi \\ x'_v = l\eta \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} h'_v = lm \\ l'_u = hn \end{cases}$$

les équations définissant l'un d'eux, R_1. Si ds_1 et ds_2 sont les éléments linéaires respectifs de R_1 et R_2, on a :

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dx_2^2; \qquad ds_2^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3 + dx'^2_4$$

La condition d'applicabilité : $ds_1^2 = ds_2^2$, s'écrit :

$$\sum dx_1^2 = \sum dx_2^2,$$

ou :

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial x'}{\partial u}du + \frac{\partial x'}{\partial v}dv\right)^2.$$

Cette relation devant avoir lieu quels que soient u et v, se décompose dans les trois suivantes :

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2; \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \sum\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}; \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2,$$

qui peuvent s'écrire, en tenant compte des équations (2) dans lesquelles h et l sont les mêmes pour les deux réseaux :

$$(4) \qquad \sum\xi^2 = \sum\xi'^2; \qquad \sum\xi\eta = \sum\xi'\eta'; \qquad \sum\eta^2 = \sum\eta'^2,$$

les ξ, η, étant les paramètres normaux relatifs au réseau R_1, les ξ', η', se rapportant à R_2.

Si on suppose que le réseau R_1 est 2O, on pourra exprimer que le réseau de l'espace à trois dimensions de paramètres normaux (ξ_1, ξ_2, ξ''), (η_1, η_2, η''), est O [les quantités ξ'', η'', sont telles que l'on ait :

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = h\xi''; \qquad \frac{\partial x_3}{\partial v} = l\eta'',$$

la quantité x_3 étant solution de l'équation (E)].

On aura donc des relations de la forme :

$$(5) \qquad \sum_1^2 \xi^2 + \xi''^2 = 1, \qquad \sum_1^2 \xi\eta + \xi''\eta'' = o, \qquad \sum_1^2 \eta^2 + \eta''^2 = 1.$$

En rapprochant les relations (4) et (5), on aura :

$$\sum \xi'^2 + \xi''^2 = 1; \qquad \sum \xi'\eta' + \xi''\eta'' = o, \qquad \sum \eta'^2 + \eta''^2 = 1.$$

Ces dernières relations expriment que R_2 est aussi un réseau 2O [la coordonnée x_3 le rendant O étant la même, à une translation près, que pour R_1, d'après les équations (2)].

Cette propriété permet de montrer que *la détermination des réseaux plans* 2C, 2O (*ou* L, 2O) *équivaut à celle des surfaces isothermiques*.

En effet, tout réseau plan 2C (ou L) est un réseau s'appliquant sur un réseau R de l'espace à quatre dimensions. (Un tel réseau de l'espace d'ordre 4 applicable sur un réseau plan, est aussi appelé réseau L). Si le réseau plan est, de plus, 2O, le réseau R sera aussi 2O ; R sera donc un réseau 2O, L.

Réciproquement, tout réseau 2O. L de l'espace d'ordre 4 s'applique sur un réseau plan, qui est 2C, 2O.

Or, M. Guichard a prouvé (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1903, page 285 n° 100) que la détermination des réseaux 2O, L de l'espace d'ordre 4, équivaut à celle des surfaces isothermiques. Il en est de même, par suite, de la détermination des réseaux plans 2O, 2C.

Le problème de la recherche des réseaux O *qui se transforment en réseaux* C, *ou des réseaux* C *qui se transforment en réseaux* O, *par polaires réciproques relativement à un complexe linéaire, équivaut à celui de la recherche des surfaces isothermiques.*

En effet, on a vu (page 99) que tout réseau cyclique se transforme, relativement au complexe linéaire, en un réseau se projetant sur xOy suivant un réseau K.

Donc tout réseau O se transformant en réseau cyclique est nécessairement O_K.

Soit alors R le réseau O_K donné. Etant R_K, il en existe de parallèles se transformant en réseaux C (page 100). Soit R'_K un tel réseau parallèle à R. Etant O, il se transforme (page 99) en un réseau R_{2O}, donc finalement en un réseau cyclique se projetant suivant un réseau 2O.

Donc, étant donné un réseau O_K, il en est de parallèles se transformant en réseaux C_{2O}.

Réciproquement, soit R″ un réseau C se transformant en un réseau O. La projection du transformé devant être un réseau 2O, un tel réseau C est nécessairement C_{2O}.

R″, étant un réseau C, se transforme en un réseau R_K (page 99). Comme, d'autre part, il se projette suivant un réseau 2O, il en existe de parallèles se transformant en réseaux O.

Donc, étant donné un réseau C_{2O}, il en est de parallèles se transfornant en réseaux O_K.

La recherche des réseaux O se transformant en réseaux C, et inversement, équivaut donc à celle des réseaux O_K ou des réseaux C_{2O}, c'est-à-dire à celle des réseaux plans 2C, 2O, et par suite (page 108) à celle des surfaces isothermiques.

Le problème de la recherche des congruences de normales se transformant en congruences 2O, *ou des congruences* 2O *se transformant en congruences de normales, relativement au complexe linéaire, équivaut à celui de la recherche des surfaces isothermiques.*

En effet, une congruence 2O se projette suivant une congruence 3O; la transformée de la première se projettera donc nécessairement suivant une congruence plane superposable à une congruence orthogonale à la congruence plane 3O, c'est-à-dire 2C.

Donc toute congruence O se transformant en une congruence 2O est nécessairement O_{2C}.

Soit alors (D) la congruence O_{2C} donnée. Puisqu'elle se projette suivant une congruence 2C, il en est de parallèles se transformant en congruences 2O (page 100). Soit (D′) l'une de ces congruences parallèles à (D). (D′) est aussi une congruence O, et, par suite, se transforme en une congruence D_c. En définitive, la congruence (D′) se transforme en une congruence $2O_c$.

Donc, étant donnée une congruence O_{2C}, il en est de parallèles se transformant en congruences $2O_c$.

Réciproquement, soit (D_1) une congruence 2O assujettie à la condition de se transformer en une congruence O. La transformée devant se projeter suivant une congruence 2O, (D_1) est nécessairement $2O_c$.

Or, (D_1) se projetant suivant une congruence cyclique, on peut en trouver de parallèles se transformant en congruences O. Soit (D_2) une telle congruence parallèle à (D_1). Comme (D_2) est aussi une congruence 2O, elle se projette suivant une congruence 3O; par suite, sa transformée se projette suivant une congruence 2C : c'est une congruence O_{2C}.

Donc, étant donnée une congruence $2O_c$, il en est de parallèles se transformant en congruences O_{2C}.

Il est donc équivalent de rechercher les congruences $2O_c$ *ou les congruences* O_{2C}, *c'est-à-dire les congruences planes* 2O, 2C.

Or, soit une congruence plane 2O, 2C. Il existe ∞^1 réseaux 2O qui sont harmoniques à cette congruence 2C. D'autre part, dans le plan, tout réseau harmonique à une congruence 2O est un réseau 2C (ou L). Il y a donc ∞^1 réseaux plans 2O, 2C, harmoniques à cette congruence.

Considérons, inversement, un réseau plan 2O, 2C. Il existe ∞^2 congruences 2O qui sont harmoniques à ce réseau 2C. D'ailleurs, la congruence la plus générale qui soit harmonique à un réseau plan 2O, est une congruence 2C. Il existe donc ∞^2 congruences 2O, 2C, harmoniques au réseau 2O, 2C.

On voit finalement que *la recherche des congruences planes* 2O, 2C, *et celle des réseaux plans* 2O, 2C, *sont deux problèmes équivalents.*

Si l'on tient compte de la propriété démontrée page 108, la proposition est établie.

II. — APPLICATIONS DE LA POLARITÉ RELATIVE A LA SPHÈRE

La détermination des réseaux O, K de l'espace ordinaire équivaut à celle des surfaces isothermiques (Guichard).

M. Guichard a prouvé que la recherche des réseaux 2O, C de l'espace à trois dimensions équivaut à celle des surfaces isothermiques. On peut l'établir d'une nouvelle manière en utilisant la polarité par rapport à la sphère.

Soit, en effet, un réseau 2O, C. Ce réseau étant 2O, il existe deux réseaux parallèles qui se transforment en réseaux O (page 104). Soit R′ l'un d'eux. R′ étant aussi un réseau C, se transforme en un réseau K (page 103). Le transformé de R′ est donc O, K.

Donc, étant donné un réseau 2O, C, il existe deux réseaux parallèles au précédent, qui se transforment en réseaux O, K.

Soit, inversement, un réseau O, K. On peut trouver ∞^2 réseaux parallèles à ce réseau K qui se transforment en réseaux C (page 103). Soit R_1 l'un de ces réseaux. R_1, qui est un réseau O, se transforme en un réseau 2O. Le transformé de R_1 est donc 2O, C.

Donc, étant donné un réseau O, K, il existe ∞^2 réseaux, parallèles au précédent, qui se transforment en réseaux 2O, C.

Par suite, la détermination des réseaux 2O, C équivaut à celle des réseaux O, K, et, par suite, à celle des surfaces isothermiques.

On remarquera qu'à toute congruence 2O, C on peut faire correspondre un réseau orthogonal à cette congruence, qui est 2O,C, et inversement. La détermination des congruences 2O, C équivaut donc aussi à celle des surfaces isothermiques.

La détermination des réseaux O *qui se transforment en réseaux* C *par polaires réciproques relativement à la sphère, équivaut à celle des surfaces isothermiques.*

En effet, le transformé de tout réseau C est un réseau K. Donc tout réseau O satisfaisant à l'énoncé ci-dessus est nécessairement O, K.

Soit, réciproquement, un réseau O, K : ce réseau étant K, il existe ∞^2 réseaux, parallèles au précédent, qui se transforment en réseaux C.

De même, le transformé de tout réseau O est un réseau 2O, en général. Donc tout réseau C qui se transforme en un réseau O est 2O, C.

Soit, inversement, un réseau 2O, C : ce réseau étant 2O, il existe deux réseaux, parallèles au précédent, qui se transforment en réseaux O (page 104).

On voit donc que la détermination des réseaux O qui se transforment en réseaux C, ou des réseaux C qui se transforment en réseaux O, équivaut à celle des réseaux O, K ou des réseaux 2O, C, et par suite à celle des surfaces isothermiques.

La détermination des congruences de normales qui se transforment en congruences 2O, *ou des congruences* 2O *qui se transforment en congruences de normales* *par polaires réciproques par rapport à la sphere, équivaut a celle des surfaces isothermiques.*

En effet, une congruence 2O se transforme, en général, en une congruence 2C (page 106).

Une congruence de normales se transformant en une congruence 2O, est donc nécessairement O, 2C.

Soit (D) une telle congruence O, 2C. (D) étant une congruence 2C, il existe (page 106), ∞^2 congruences, parallèles à (D), qui se transforment en congruences 2O. Considérons l'une (D) de ces congruences. (D) étant, de même que (D), une congruence O, se transforme en une congruence C (page 104). Donc la transformée de (D') est une congruence 2O, C.

Réciproquement, puisque toute congruence O se transforme en une congruence C, toute congruence 2O assujettie à se transformer en congruence O, est nécessairement une congruence 2O, C.

Soit (D_1) une telle congruence 2O, C. (D_1) étant une congruence C, il existe ∞^1 congruences, parallèles à (D_1), qui se transforment en congruences O (page 105). Soit (D'_1) l'une de ces congruences. (D'_1) étant, de même que (D_1), une congruence 2O, se transforme en une congruence 2C (page 106). Donc la transformée de (D_1) est une congruence O, 2C.

La détermination des congruences O, 2C et des congruences 2O, C, sont donc équivalentes, et équivalent à la détermination des congruences O qui se transforment en congruences 2O, et inversement. Or, (page 111), la détermination des congruences 2O, C équivaut à celle des surfaces isothermiques.

Remarque concernant les surfaces isothermiques

Darboux a établi, dans les Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, que les cinq coordonnées pentasphériques d'un point de toute surface isothermique, considérées comme fonctions des paramètres u et v des lignes de courbure, satisfont à une équation de Laplace à invariants égaux, et qu'inversement, si une équation de Moutard :

$$\theta''_{uv} = m\theta \tag{1}$$

(ou, plus généralement, une équation à invariants égaux), admet cinq solutions particulières θ_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$,) liées par la relation :

$$\sum_1^5 \theta_i^2 = o, \tag{2}$$

les θ_i sont les coordonnées pentasphériques qui définissent une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure, de sorte que la recherche des surfaces isothermiques revient à trouver cinq solutions d'une équation de la forme (1), liées par la relation (2).

Ceci etant rappelé, on peut remarquer que l'équation (1) admet comme solution θ_5, et, par suite, la quantité $i\theta_5$ qui, d'après (2), peut être définie de la façon suivante :

$$i\theta_5 = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2} \tag{2'}$$

Or, les quantités θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, étant solutions d'une même équation de Laplace, peuvent être considérées comme des paramètres directeurs d'une droite décrivant une congruence (G) dans l'espace à quatre dimensions. De plus, comme, d'après la relation (2'), l'équation (1) admet en outre comme solution la racine carrée de la somme des carrés des quatre paramètres, on en déduit, d'après un critérium donné par M. Guichard dans son Mémoire sur les Systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1897, Chapitre II, n° 14), que (G) est, dans l'espace d'ordre 4, une congruence O. D'autre part, (1) étant une équation à invariants égaux, (G) est une congruence de Ribaucour (généralisée).

Considérons, réciproquement, une congruence (G) de Ribaucour de l'espace à quatre dimensions. Soient σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, des paramètres directeurs d'une droite (G) de cette congruence et :

$$\sigma''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\sigma'_u + \frac{h'_u}{h}\sigma'_v + R\sigma$$

l'équation de Laplace à invariants égaux dont les σ sont des solutions particulières :

On a vu plus haut (page 10) qu'en multipliant les σ par un même facteur, l'équation de Laplace à laquelle satisfont les nouveaux paramètres directeurs a aussi ses invariants égaux, et qu'il est possible de choisir ce facteur de manière à ce que l'équation nouvelle soit une équation de Moutard.

Soient alors θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, ces paramètres directeurs de G, solutions d'une équation de la forme :

$$\theta''_{uv} = m\theta \tag{1}$$

(G) étant supposée, de plus, être congruence O, l'équation (1) admettra aussi la solution $\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2}$. En désignant par $i\theta_5$ ce radical, on a la relation :

$$\sum_1^5 \theta_i^2 = o. \tag{2}$$

Donc *la recherche de la représentation sphérique des congruences* O *de Ribaucour de l'espace à quatre dimensions, équivaut à la recherche de 5 solutions d'une équation de la forme* (1), *liées par la relation* (2), *et par suite à la recherche des surfaces isothermiques.*

Divisons maintenant par $-\theta_5^2$ les deux membres de l'équation (2), et posons :

$$\frac{\theta_1}{i\theta_5} = \mu_1, \quad \frac{\theta_2}{i\theta_5} = \mu_2, \quad \frac{\theta_3}{i\theta_5} = \mu_3, \quad \frac{\theta_4}{i\theta_5} = \mu_4.$$

La relation (2) sera alors remplacée par la suivante :

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 = 1 \tag{3}$$

Les quantités μ ainsi définies $\left(\mu = \frac{\theta}{i\theta_5}\right)$, satisfont encore à une équation à invariants égaux, ainsi que $i\mu_5 = \frac{i\theta_5}{i\theta_5} = 1$. Donc cette équation n'a pas de terme en θ et est de la forme :

$$\mu''_{uv} = \frac{H'_v}{H}\mu'_u + \frac{H'_u}{H}\mu'_v. \tag{4}$$

Le point de coordonnées μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, décrit, par suite, un réseau sur l'hypersphère d'équation (3), et ce réseau, étant sur une hypersphère, est un réseau O.

Considérons, inversement, un tel réseau. Soient μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, les coordonnées de son sommet, qui vérifient, ainsi que (1), l'équation (4). Désignons par $i\theta_5$ le facteur par lequel il faut multiplier les cinq quantités :

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \mu_4, \quad 1,$$

pour que l'équation de Laplace à laquelle satisfont les produits :

$$i\theta_5\mu_1 = \theta_1, \quad i\theta_5\mu_2 = \theta_2, \quad i\theta_5\mu_3 = \theta_3, \quad i\theta_5\mu_4 = \theta_4, \quad i\theta_5$$

se réduise à une équation de Moutard :

$$\theta''_{uv} = m\theta.$$

La relation (3) entraînera alors la suivante :

$$\sum_1^5 \theta_i^2 = o.$$

On peut donc dire que *la recherche des surfaces isothermiques équivaut à celle des réseaux à invariants égaux de l'espace à quatre dimensions, situés sur l'hypersphère* (3), *c'est-à-dire aux réseaux isothermiques de cette hypersphère*.

Envisageons enfin la congruence-point, issue de O, de paramètres directeurs μ_1, μ_2, μ_3, dans l'espace ordinaire : c'est une congruence de Ribaucour, puisque μ_1, μ_2, μ_3, vérifient une équation de Laplace à invariants égaux. C'est, de plus, une congruence 2O, puisque la congruence de paramètres μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, qui se projette suivant la précédente sur l'espace ordinaire, est une congruence O dans l'espace d'ordre 4.

On peut donc énoncer les résultats indiqués ci-dessus sous la forme suivante :

La recherche des surfaces isothermiques équivaut à celle de la représentation sphérique des congruences 2O de Ribaucour de l'espace ordinaire.

Ce résultat ne se confond pas avec le suivant, dû à M. Guichard, d'après lequel on peut obtenir des surfaces isothermiques à partir des congruences 2O qui sont cycliques. Il est plus simple.

Il est plus facile, en effet, d'exprimer qu'une congruence est une congruence de Ribaucour, que d'écrire qu'une congruence est cyclique.

Soit, en effet :

$$\theta''_{uv} = \frac{h'_v}{h}\,\theta'_u + \frac{l'_u}{l}\,\theta'_v + R\theta$$

l'équation de Laplace à laquelle satisfont les paramètres directeurs θ_1, θ_2, θ_3, d'une droite décrivant une congruence.

Si la congruence est cyclique, cette propriété se traduira par la relation :

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = h^2\,F_1(u) + l^2\,F_2(v)$$

Si la congruence est une congruence de Ribaucour, il suffira d'écrire que les invariants sont égaux, c'est-à-dire de former la relation plus simple :

$$l = h$$

Note sur les congruences O qui se transforment en congruences O par polaires réciproques relativement à la sphère

Soient (G) et (G′) deux congruences de normales polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à la sphère de centre O et de rayon 1, G et G′ deux droites correspondantes, et

$$\cos\lambda, \qquad \sin\lambda, \qquad sh\nu,$$

des paramètres directeurs de la perpendiculaire commune Γ de G et G′, laquelle passe par O. Désignons par N et N′ les pieds de Γ sur G et G′. Soit Δ l'instersection de xOy et du plan perpendiculaire en N à ON. Si t est l'angle $\widehat{\Delta,G}$, l'angle $\widehat{\Delta,G'}$ sera $t+\frac{\pi}{2}$.

On a, pour les cosinus directeurs c_1, c_2 c_3, de G :

$$\left\{\begin{aligned} c_1 &= \sin\lambda\cos t - \cos\lambda\, th\nu \sin t,\\ c_2 &= -\cos\lambda\cos t - \sin\lambda\, th\nu\sin t,\\ c_3 &= \frac{\sin t}{ch\nu}\end{aligned}\right.$$

En exprimant que (G) est une congruence C, on trouve la relation :

$$\sum\left(\frac{\partial c}{\partial u}\right)^2+\sum\left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)^2=1.$$

De même, en écrivant que (G′) est une congruence C, on trouve la condition :

$$\sum\left(\frac{\partial c'}{\partial u}\right)^2+\sum\left(\frac{\partial c'}{\partial v}\right)^2=1,$$

en désignant par c'_1, c'_2, c'_3, les cosinus directeurs de G′.

[u et v sont les paramètres des développables de (G) et de (G′)].

D'autre part, les congruences (G) et (G′) seront des congruences de normales, si l'on a les relations :

$$\sum\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v}=o, \qquad \text{et} \qquad \sum\frac{\partial c'}{\partial u}\frac{\partial c'}{\partial v}=o,$$

ou, en posant :

$$u+v=\rho_1, \qquad u-v=\rho_2 :$$

$$\sum\left(\frac{\partial c}{\partial\rho_1}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial c}{\partial\rho_2}\right)^2; \qquad \sum\left(\frac{\partial c'}{\partial\rho_1}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial c'}{\partial\rho_2}\right)^2.$$

En remplaçant, dans les relations précédentes, les c par leurs valeurs (et en remarquant qu'il suffit, pour obtenir les c', de remplacer, dans les expressions donnant les c, t par $t+\frac{\pi}{2}$), on obtient des équations dont l'une d'elles s'écrit :

$$\left(\lambda'_{\rho_1}\lambda'_{\rho_2}+\nu'_{\rho_1}\nu'_{\rho_2}\right)\left(\lambda'_{\rho_2}\nu'_{\rho_1}-\lambda'_{\rho_1}\nu'_{\rho_2}\right)=0,$$

et entraîne, en écartant le cas où

$$\lambda'_{\rho_2}\nu'_{\rho_1}-\lambda'_{\rho_1}\nu'_{\rho_2}=0,$$

(c'est-à-dire le cas où λ et ν seraient fonctions l'un de l'autre), la condition :

$$\lambda'_{\rho_1}\lambda'_{\rho_2}+\nu'_{\rho_1}\nu'_{\rho_2}=0$$

Or, nous avons montré que c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que la droite de paramètres directeurs :

$$\cos\lambda, \qquad \sin\lambda, \qquad sh\nu,$$

décrive une congruence de normales.

Si l'on remarque, d'autre part, que ρ_1 et ρ_2 sont les caractéristiques de l'equation dont depend la détermination des congruences O se transformant en congruences O par polaires réciproques relativement à la sphère, on voit que *la perpendiculaire commune à deux droites correspondantes* G *et* G′ *décrit sur la sphere un réseau, qui correspond aux caracteristiques de l'équation aux dérivées partielles du probleme. Les deux tangentes en un point de la sphere aux courbes du réseau sont dans les deux plans bissecteurs du diedre ayant pour arête la perpendiculaire commune et dont les faces contiennent respectivement les deux droites* G *et* G′.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

INTRODUCTION

PREMIÈRE PARTIE

DÉTERMINATION DES CONGRUENCES DE NORMALES QUI SE RRANSFORMENT EN CONGRUENCES DE NORMALES PAR POLAIRES RÉCIPROQUES RELATIVEMENT A UN COMPLEXE LINÉAIRE

DEUXIÈME PARTIE

TRANSFORMATIONS PAR POLAIRES RÉCIPROQUES RELATIVEMENT AU COMPLEXE LINÉAIRE ET A LA SPHÈRE, ET APPLICATIONS