LUCIEN FÉRAUD

Sur une généralisation des correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__81__1_0>

N° D'ORDRE
1979

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. LUCIEN FÉRAUD

Ancien Elève de l'École Normale supérieure.

1[re] THÈSE. — SUR UNE GÉNÉRALISATION DES CORRESPONDANCES PONCTUELLES QUI ÉTABLISSENT L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE.

2[e] THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 15 Février 1928 devant la Commission d'Examen.

MM. CARTAN, *Président.*
VESSIOT, } *Examinateurs.*
MONTEL. }

1928

IMPRIMERIE LES PRESSES MODERNES
45, rue de Maubeuge
PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	CH. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.	
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
Profess. honoraires	P. PUISEUX.	H. LEBESGUE.
	V. BOUSSINESQ.	A. FERNBACH.
	A. JOANNIS.	A. LEDUC.
	H. LE CHATELIER.	G. SAGNAC.

Professeurs

EMILE PICARD	Analyse supér. et algèbre supérieure.
G. KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET	Electrotechnique générale.
F. WALLERANT	Minéralogie.
H. ANDOYER	Astronomie.
P. PAINLEVÉ	Mécanique anal. et mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés)
C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
G. URBAIN	Chimie minérale.
ÉMILE BOREL	Calcul des probabilités et phys. mathém.
L. MARCHIS	Aviation.
JEAN PERRIN	Chimie physique.
RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM	Physique.
M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
E. CARTAN	Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE	Physiologie générale.
E. VESSIOT	Théorie des fonct. et th. des transf.
A. COTTON	Physique générale.
J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
CHARLES FABRY	Physique.
CHARLES PÉREZ	Zoologie.
LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et géolog. régionale.
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
E. RABAUD	Biologie expérimentale.
P. PORTIER	Physiologie comparée.
E. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD	Botanique.
P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA	Mathématiques générales.
A. JOB	Chimie générale.
A. MAILHE	Etude des combustibles.
L. LUTAUD	Géographie physique.
EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et phys. céleste.
H. VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
N. CH. JACOB	Géologie.

E. HÉROUARD	Zoologie.
E. PECHARD	Chimie (Ens. P. C. N.).
V. AUGER	Chimie analytique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.
A. GUILLET	Physique.
C. MAUGUIN	Minéralogie.
L. BLARINGHEM	Botanique.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
A. DEREIMS	Géologie.
R. DONGIER	Physique du globe.
A. DENJOY	Calcul diff. et int.
H. BENARD	Physique (P.C.N.).
E. DARMOIS	Physique.
G. BRUHAT	Physique.
H. MOUTON	Chimie physique.
L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.
A. DUFOUR	Physique (P.C.N.).
F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY	Zoologie.
L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	Botanique (P.C.N.).
A. DEBIERNE	Radioactivité.

Secrétaire DANIEL TOMBECK.

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA MÈRE

A MON CHER MAITRE

MONSIEUR E. CARTAN

Hommage respectueux de ma profonde gratitude.

PREMIÈRE THÈSE

SUR UNE

GÉNÉRALISATION DES CORRESPONDANCES PONCTUELLES QUI ÉTABLISSENT L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE

PAR

M. LUCIEN FÉRAUD

Ancien Élève de l'École Normale Supérieure

INTRODUCTION

1. Le problème de l'applicabilité projective a été formulé et étudié pour la première fois par M. FUBINI dans son mémoire : « Applicabilita proiettiva di due superficie » paru dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, t. XLI, 1916. M. CARTAN dans les *Annales de l'Ecole Normale*, t. XXXVIII, 1920, a repris la question, montré en particulier l'existence de surfaces projectivement applicables non identiques, et obtenu leur degré de généralité. Ce problème a été ensuite naturellement étendu à des variétés à p dimensions d'un espace à n dimensions et l'on a été également amené à considérer non seulement l'application du second ordre mais des applications d'ordre quelconque h. Nous empruntons à M. Cartan (1) l'énoncé du problème général de la déformation projective auquel on a été ainsi conduit.

(1) Sur le problème général de la déformation. *Comptes rendus du Congrès International de Strasbourg*, sept. 1920

Deux variétés à p dimensions s et S d'un espace projectif à n dimensions sont dites déformées l'une de l'autre d'ordre h si l'on peut établir entre ces variétés une correspondance ponctuelle telle que deux morceaux infiniment petits correspondants des deux variétés puissent être amenés en coïncidence, aux infiniment petits près d'ordre $h + 1$, par un déplacement projectif convenablement choisi (et variable avec le morceau considéré).

Nous pouvons dire qu'après le déplacement les deux surfaces ont aux points homologues amenés en coïncidence une *application d'ordre h* ou encore un *contact analytique d'ordre h* en employant le langage de M. Fubini. Ce dernier réserve le nom de *contact géométrique* à celui qui se définit tout naturellement [par l'égalité des termes jusqu'à l'ordre h dans le développement de $z = f(xy)$ p. ex.] et que nous appellerons simplement *contact* car il ne risquera pas d'être confondu avec *application* [1].

2. *Le problème que nous avons étudié peut d'abord être considéré comme une généralisation de celui de l'applicabilité projective.* Nous verrons plus loin qu'on peut encore le rattacher à un problème plus ancien. Nous nous sommes imposés d'avoir, aux points homologues amenés en coïncidence, non seulement une application d'un certain ordre h mais encore un contact d'un ordre k. *De la manière la plus générale nous considérerons des couples* (s, S) *de variétés à* p *dimensions d'un espace à* n *dimensions entre lesquelles on pourra établir une correspondance ponctuelle permettant par un déplacement projectif convenablement choisi d'amener un point A quelconque de S sur son homologue* a *de* s *de telle sorte qu'au point commun les deux variétés aient après le déplacement une application d'ordre* h *et un contact d'ordre* k.

Il ressort de cet énoncé même que nous sommes conduits à trois études différentes. Nous pouvons d'abord considérer les variétés entre lesquelles peuvent exister les correspondances définies. Nous pourrons ensuite en nous plaçant au point de vue cinématique chercher les propriétés du déplacement projectif (à un ou plusieurs paramètres) qui amène S sur s. Enfin nous porterons notre attention sur les correspondances elles-mêmes. Il sera alors commode de désigner d'une manière abrégée par C_{hk} une correspondance ponctuelle qui permet d'obtenir aux points homologues en coïncidence une application d'ordre h et un contact d'ordre k.

---

[1] Pour les définitions de *contact géométrique* et de *contact analytique* voir Fubini et Cech. *Lezioni di Geometria proiettivo-differenziale, Bologne*, 1926.

Remarquons que k ne peut jamais être inférieur à h et qu'une C_{hh} est établie dès qu'il y a application d'ordre h, ce que nous rappellerons en la désignant par C_h.

3. La méthode du repère mobile sera également appropriée à l'étude des trois questions que nous venons de définir.

Cette théorie, généralisation de celle de Darboux et aboutissement géométrique de la théorie de la structure des groupes continus d'une part, de celle des systèmes de Pfaff en involution d'autre part, est comme ces dernières presque entièrement l'œuvre de M. Cartan. On me permettra d'associer ici à cet hommage à mon cher Maître, l'expression respectueuse de ma profonde reconnaissance pour tout l'intérêt avec lequel il a dirigé mes recherches et pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

Nous représenterons par $\omega(\omega_{ij})$ les composantes du déplacement infinitésimal du repère attaché à chaque point de s et par Ω les quantités analogues pour S. D'une manière générale nous utiliserons les notations du mémoire : « Sur la déformation projective des surfaces ». *Annales de l'E. N. S.* **1920**, au premier chapitre duquel nous renvoyons, pour l'exposé de la méthode du repère mobile dans l'espace projectif [1]. L'application du premier ordre est toujours possible entre deux variétés quelconques elle s'écrit :

$$\Omega_{01} = \omega_{01} \qquad \Omega_{02} = \omega_{02} \;\ldots\ldots \qquad \Omega_{0n} = \omega_{0n}.$$

Les conditions d'application du second ordre — d'existence d'une C_2 — sont données dans le dernier mémoire que nous venons de citer pour le cas de deux hypersurfaces d'un espace à n dimensions. Nous aurons dans l'espace à 4 dimensions à les généraliser pour des surfaces (V_2) et à écrire encore dans le même cas les conditions d'existence d'une C_3. Les conditions d'application s'exprimeront toujours par un système d'équations linéaires entre les ω et les Ω.

Nous allons montrer maintenant que la méthode qui consiste à particulariser de proche en proche le système de référence conduit naturellement à

---

[1] Voir encore pour cette méthode : M. E. Cartan. La structure des groupes de transformations contenus et la théorie du trièdre mobile. *Bulletin de la Société Mathématique,* 1910 ; M. Lalan. *Thèse.* ch. I, Gauthier-Villars, 1924.

Nous nous bornerons à reproduire les formules de structure du groupe projectif de E_n, dont il sera fait un usage constant :

$$\omega'_{ij} = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + \ldots\ldots \qquad + [\omega_{in}\omega_{nj}] \qquad (i, j = 0, 1, \ldots\ldots n.).$$

des équations capables d'exprimer qu'un contact d'un ordre donné est réalisé. Elle introduit en effet des formes différentielles d'ordre de plus en plus élevé qui sont précisément celles qui figurent dans les équations réduites de la variété (1). Le contact d'ordre k s'exprimera en écrivant que toutes les formes différentielles d'ordre inférieur ou égal à k sont égales sur les deux surfaces. Remarquons que ces formes doivent bien être égales deux à deux et non seulement proportionnelles car nous supposons toujours une application du premier ordre au moins.

Mais ces formes différentielles s'expriment à l'aide des expressions de Pfaff nouvelles qui s'introduisent en particularisant le système de référence et le contact d'ordre k s'écrira par l'égalité des expressions de Pfaff qui figurent dans tous les systèmes successifs que l'on rencontre dans la particularisation jusqu'au k^{ieme} ordre inclus. En résumé nous saurons écrire par un système d'équations linéaires entre les ω et les Ω — ce sera un système de Pfaff par rapport aux variables indépendantes — les conditions exprimant à la fois l'application d'ordre h et le contact d'ordre k.

4. La méthode dont nous venons de donner les grandes lignes *rattache directement notre problème à celui de la détermination d'une variété par des formes différentielles*. Ce dernier remonte à Gauss et a fait l'objet des recherches de MM. Pick, Blaschke, Radon en géométrie affine et de M. Fubini en géométrie projective. M. Cartan s'est également placé à ce point de vue dans plusieurs mémoires et dans des géométries très diverses (affine, conforme, projective).

Le problème classique de la caractérisation, d'une variété par q formes différentielles revient à la recherche des variétés qui peuvent avoir entre elles une C_{1q} (2). C'est donc bien un cas particulier du problème que nous étudions. De plus le problème classique n'a un sens qu'autant que les formes différentielles que l'on considère sont susceptibles d'être *normées*, c'est-à-dire définies d'une manière intrinsèque, indépendante de l'arbitraire qui reste dans le choix du système de référence, tandis que l'étude des C_{hk} a, comme nous l'avons montré, une signification qui ne dépend aucunement de formes différentielles qu'il ne sera même pas nécessaire d'écrire.

5. Pour traiter la première des trois questions auxquelles nous avons pré-

---

(1) M. E. Cartan. Sur les formes différentielles en géométrie. *C. R.*, 1924.

(2) C'est une C_{12} si l'on se propose de déterminer une surface par ses deux formes de Gauss.

cédemment ramené notre problème nous considérerons dans le système qui donne les conditions de C_{hk} les ω comme des quantités connues les Ω étant des inconnues.

La solution générale de ce système de Pfaff déterminera (à un déplacement projectif près) les variétés S qui correspondent à une variété s donnée. Lorsqu'il sera complètement intégrable ou en involution [1] nous connaîtrons le degré de généralité de S. Nous rencontrerons des cas où le système ne sera pas en involution mais où nous pourrons en lui joignant le système qui définit le repère attaché à s, particularisé jusqu'à l'ordre k, en former un autre qui sera en involution. Le degré de généralité de sa solution sera celui des couples (s S) de variétés pouvant avoir entre elles la C_{hk} considérée.

Dans le deuxième problème le déplacement qui doit amener S sur s s'étudiera par la comparaison des formules de Frenet pour les deux repères. Les ω sont les composantes du déplacement qui amène le repère r attaché à s d'une position initiale r_0 à la position infiniment voisine r_1. Les Ω font passer de même de R_0 à R_1. Si nous supposons R_0 confondu avec r_0 les Ω sont les composantes du déplacement absolu (sur S) les ω celles du déplacement relatif (sur s) et les Ω_{ij}-ω_{ij} seront les composantes du déplacement d'entraînement. On peut encore dire que ce déplacement d'entraînement est la différence du déplacement qui amène R_1 sur r_1 et de celui qui amène R_0 sur r_0. Les conditions de C_{hk} annuleront un certain nombre de composantes $\Omega_{ij} - \omega_{ij}$, on en déduit immédiatement des propriétés du déplacement d'entraînement. Il pourra se faire que d'une manière réciproque il suffise d'imposer certaines de ces propriétés au déplacement d'entraînement pour qu'une correspondance ponctuelle supposée établie entre les variétés soit une C_{hk} déterminée.

Le dernier problème, l'étude de la C_{hk} elle-même, est celui qui pourra être poussé le plus loin et conduire dans certains cas à une interprétation géométrique de la correspondance. On suppose le repère attaché à s particularisé jusqu'à l'ordre k inclus on écrira toutes les équations qui en résultent et l'on fera de même pour S. En vertu des conditions d'application il pourra se faire que des particularisations supplémentaires sur s entraînent les mêmes réductions pour S. On considérera toutes les nouvelles relations qui s'introduisent comme satisfaites. Pour écrire toutes les conditions de C_{hk} il sera alors nécessaire

---

[1] Pour les systèmes de Pfaff en involution voir : M. E. CARTAN. *Annales E. N. S.*, 1901 et 1904 et encore *Bulletin Soc. Math.*, 1916 et 1917.

saire et suffisant de prendre certaines des conditions d'application d'ordre h qui ne dérivent pas des précédentes. Ce sont ces équations qui établiront la C_{hk} et l'étude de leur système donnera le degré de généralité de la correspondance.

6. Les résultats que nous avons obtenus dans l'espace à 3 dimensions sont relatifs aux surfaces développables. Nous donnerons une interprétation géométrique de C_{14} et de C_{15} qui ne se distinguent pas l'une de l'autre. La considération de la cubique osculatrice à l'arête de rebroussement nous permettra de définir C_{24}. Quant à C_{25} elle n'est pas possible entre deux surfaces quelconques; nous considérerons le cas particulier où les génératrices de la développable appartiennent à un complexe linéaire. La correspondance s'établit alors par une relation homographique entre deux paramètres projectifs après avoir développé — ayant ainsi défini une certaine connexion projective — les arêtes de rebroussement sur une cubique gauche.

A partir du chapitre II nous ne considérerons plus que des variétés de l'espace à 4 dimensions. Nous sommes amenés dans celui-ci à établir pour les surfaces développables les conditions d'application du deuxième ordre ainsi que celles du troisième ordre. Nous obtenons ensuite le degré de généralité des diverses correspondances que nous interprétons par des remarques géométriques tout à fait analogues à celles que nous avons faites pour les développables de E_3 ([1]).

Le chapitre III est consacré aux surfaces réglées. La particularisation conduit à les séparer en trois classes faciles à définir géométriquement ([2]). Les correspondances ne peuvent s'établir qu'entre surfaces de la même classe. Le degré de généralité de C_{14} dépend de la classe à laquelle appartiennent les surfaces — celui de C_{23} n'en dépend pas.

Le chapitre IV se divise en deux parties. La première est une étude des propriétés géométriques des surfaces les plus générales de E_4. Elles admettent deux familles de caractéristiques formant un réseau. On considère particulièrement les cas où les caractéristiques sont hyperplanes ou planes qui correspondent par dualité à ceux où les focales sont dégénérées. Nous serons ainsi amenés à porter notre attention sur les suites de Laplace et sur la manière

([1]) J'ai donné les principaux résultats relatifs aux surfaces développables (de E_3 et de E_4) dans les *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 1630.

([2]) Cette classification est due a M. Ranum. Cf. *Transactions of the American Mathematical Society*. Vol. XVI (1915). *American Journal of Mathematics*. Vol. XXXVII (1915).

dont elles peuvent s'arrêter. La deuxième partie est réservée à l'étude des correspondances : C_{13}, C_{14}, C_2, C_{23}. Les résultats diffèrent en général suivant que les surfaces ont deux, une ou aucune famille de caractéristiques planes.

C_{14} n'est possible qu'entre surfaces admettant deux droites focales (ce sont alors des surfaces de translation) elle s'établit simplement en passant en géométrie affine.

Pour une C_{23} entre surfaces sans caractéristique plane on détermine le degré de généralité des couples (s S), on étudie comme exemple un couple particulier et on donne une interprétation géométrique d'une relation qui existe *nécessairement* entre deux surfaces de l'un quelconque de ces couples. Pour qu'une C_{23} soit possible entre des surfaces avec une famille de caractéristiques planes ($\omega_1 = 0$), il faut et il suffit que s_1 (1) soit dégénérée ou bien que s_2 se réduise à une droite. Dans le cas où toutes les caractéristiques sont planes il faut de plus qu'une au moins des transformées de Laplace soit une droite (C_{23} dépend alors d'une fonction d'un argument); si cela a lieu pour les deux la correspondance dépend de 4 constantes arbitraires, et s'établit par des relations linéaires à coefficients constants entre des paramètres naturels définis sur les caractéristiques.

Nous avons donné pour chacun des cas que l'on rencontre dans l'étude de C_{23} les propriétés cinématiques du déplacement qui amène S sur s et nous en avons déduit d'une manière réciproque des conditions suffisantes auxquelles ce déplacement doit satisfaire pour qu'une correspondance donnée soit C_{23}.

A la fin de ce chapitre nous nous sommes demandés quel pouvait être l'effet d'une C_{23} établie entre s et S sur les surfaces qui s'en déduisent par une transformation de Laplace (du même côté).

Dans le chapitre V nous nous occupons des surfaces qui ont leurs caractéristiques confondues et par conséquent une famille d'asymptotiques. Il ne reste que C_{13}, C_2 et C_{23} car C_{14} ne peut exister sans qu'il y ait identité. Dans le cas de C_{23} le système de Pfaff qui donne les couples (s S) doit être prolongé plusieurs fois avant d'arriver à l'involution.

Dans le dernier chapitre nous considérons les hypersurfaces engendrées par des plans. Ce sont les transformées par dualité des surfaces réglées et

(1) On désigne par s_1 et s_2 les deux transformées de Laplace de s.

comme nous l'avons fait pour ces dernières au chapitre III nous les divisons en trois classes (a, b, c). Il est intéressant de remarquer que pour ces hypersurfaces les correspondances que nous avons définies peuvent encore avoir un sens (dans le cas de C_{12} et de C_{13}) alors que celles qui établissent l'applicabilité projective ont cessé d'exister (entre hypersurfaces distinctes).

CHAPITRE PREMIER

Surfaces de l'espace projectif à 3 dimensions.

7. Nous nous servirons des correspondances que nous avons définies pour énoncer sous une autre forme quelques-uns des résultats établis par M. Cartan dans son mémoire fondamental « Sur la déformation projective des surfaces » [1].

Surfaces non réglées.

1° Toute C_2 est d'elle-même C_{23};

2° Les surfaces S qui peuvent correspondre avec C_2 à une surface s donnée peuvent aussi le faire avec C_{23} et C_{24} — C_{25} nécessite l'identité;

3° Les surfaces S qui peuvent correspondre à s avec C_{13} peuvent aussi lui correspondre avec C_2. Il faut remarquer que ces résultats comprennent en particulier le théorème de M. Fubini sur l'applicabilité projective des surfaces et sa réciproque. En définitive si l'on prend une surface s projectivement déformable (elles dépendent de 6 fonctions arbitraires d'un argument) toute surface S de la famille peut avoir avec elle une C_{24}.

Surfaces réglées non développables.

Il existe pour une surface s quelconque une famille de S dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument chacune d'elles pouvant correspondre à s avec C_{24}. Ce sont ces C_{24} qui sont étudiées dans le mémoire cité ci-dessus.

---

[1] *Annales E. N. S.*, 1920 (*loc. cit.*).

Surfaces développables.

8. C_{13}. Nous supposerons effectuées des particularisations sur le repère mobile attaché en chaque point de s de telle sorte que l'on ait les équations :

$$(1)\ \omega_3 = 0 \qquad (2)\ \omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = \omega_2 \qquad (3)\ \omega_{12} = 0, \quad \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22} = 0.$$

La surface sera rapportée à un repère du troisième ordre et les équations précédentes entraînent immédiatement :

$$(4') \qquad \omega_{10} = a\omega_2, \ \omega_{20} - \omega_{32} = \frac{a}{3}\,\omega_1 + b\omega_2.$$

Nous supposerons encore que les relations (1), (2), (3) sont vérifiées si l'on y remplace les ω par les Ω (pour le repère attaché à S) et que l'on a encore :

$$\Omega_{10} = A\omega_2, \ \Omega_{20} - \Omega_{32} = \frac{A}{3}\,\omega_1 + B\omega_2.$$

Pour simplifier nous dirons par la suite que les équations (1), (2), (3), (4') sont satisfaites pour s et que l'on a pour S des *relations analogues* mais il faudra prendre garde à remplacer dans (4') a et b par d'autres paramètres A et B qui ne sont pas toujours égaux aux premiers.

La C_{13} sera établie par $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$ qui donne par dérivation extérieure

$$[\omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] + [\omega_2(\Omega_{21} - \omega_{21})] = 0$$
$$[\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0.$$

On a un système en involution dont la solution générale dépend au plus d'une fonction arbitraire de deux arguments. *Il en résulte qu'il est possible d'établir une C_{13} entre deux surfaces développables quelconques et que ces correspondances dépendent d'une fonction de deux arguments.*

9. C_{14} et C_{15}. On prend pour s les équations (1), (2), (3) :

$$(4) \qquad \omega_{10} = \omega_2 \qquad \omega_{20} - \omega_{32} = \frac{1}{3}\,\omega_1$$

$$(5') \qquad 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = c\omega_2 \qquad 3\omega_{30} - 2\omega_{21} = \frac{c}{2}\,\omega_1 + d\omega_2$$

et des équations analogues pour S (C et D au lieu de c et d). On exclut ainsi le cas des cônes ou $\omega_{10} = 0$.

Le système dérivé de : $\Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega_2$ s'écrit :

$$[\omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] + [\omega_2(\Omega_{21} - \omega_{21})] = 0,$$
$$[\omega_2(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] = 0.$$

Les C_{14} peuvent exister entre deux surfaces quelconques elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.

On obtient le même résultat pour C_{15}. Il faut alors partir des équations (1), (2), (3), (4) :

$$(5) \qquad 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0 \qquad 3\omega_{30} - 2\omega_{21} = 0$$
$$(6') \qquad \omega_{20} = \frac{4}{3}\omega_1 + e\omega_2 \qquad \omega_{31} = -\frac{e}{5}\omega_1 + f\omega_2$$

et des équations analogues pour S.

Si deux points P et p sont homologues dans une correspondance telle qu'il existe un déplacement qui amène P en p, S ayant alors au point commun avec s une application du premier ordre et un contact du quatrième on pourra trouver un déplacement (pas nécessairement le même que le premier) qui permettra d'obtenir aux points homologues amenés en coïncidence en plus des conditions précédentes le contact du cinquième ordre. *Nous résumerons en disant que toute C_{14} peut être considérée comme une C_{15}.* Nous allons donner une définition géométrique des C_{15}. Soit γ l'arête de rebroussement de s. $M(t)$ le point qui décrit cette courbe coïncidera avec A_1. Le point A sommet du tétraèdre de référence sera défini sur la génératrice passant par M par $A = M'(t) + uM(t)$. Sur S l'arête Γ sera engendrée par

$$\overline{M}(\bar{t}) \text{ et } \overline{A} = \overline{M}'(\bar{t}) + \bar{u}\,\overline{M}(\bar{t}).$$

Avec ces notations la correspondance considérée est établie par les formules :

$$(7) \qquad \bar{t} = f(t) \qquad \bar{u} = \frac{u}{f'(t)} + \varphi(t)$$

$f(t)$, $\varphi(t)$ étant les deux fonctions arbitraires dont dépend la correspondance.

La première formule montre que l'on établit d'abord une correspondance ponctuelle arbitraire entre γ et Γ. Interprétons la deuxième.

Considérons sur une génératrice de s les 4 points $M\,M_1\,P_1\,P_2$. M_1 étant un point infiniment voisin de M correspondant à la valeur $t + h$ du paramètre t. P_1P_2 correspondant respectivement aux valeurs u_1 et u_2 du paramètre u

$$(MM_1P_1P_2) = (t, t + h, u_1, u_2).$$

La transformation $y = \frac{1}{x - t}$ transforme ce dernier rapport anharmonique dans le suivant :

$$\left(+\infty, \frac{1}{h}, v_1, v_2\right) = \frac{1 - hv_2}{1 - hv_1},$$

c'est-à-dire aux infiniment petits du second ordre près $1 + h(v_2 - v_1)$.

Prenons sur la génératrice correspondante de S les points homologues des précédents soient $\overline{M}\ \overline{M_1}\ \overline{P_1}\ \overline{P_2}$. On aura encore $(\overline{M}\ \overline{M_1}\ \overline{P_1}\ \overline{P_2}) = 1 + \overline{h}\,(\overline{v_2} - \overline{v_1})$, or $\overline{t} + \overline{h} = f(t + h)$ et par suite $\overline{h} = hf'(t)$ et en se servant de la deuxième relation (7) qui lie entre eux v_1 et $\overline{v_1}$ d'une part, v_2 et $\overline{v_2}$ d'autre part on trouve immédiatement $\overline{v_2} - \overline{v_1} = \frac{v_2 - v_1}{f'(t)}$ il en résulte $(\overline{M}\ \overline{M_1}\ \overline{P_1}\ \overline{P_2}) = (M\ M_1\ P_1\ P_2)$.

Il suffit de remarquer maintenant qu'à l'aide de la fonction $\varphi(t)$ qui figure dans (7) il est possible de faire correspondre une courbe quelconque (C) de S à une courbe donnée (c) de s (par exemple le lieu de $\overline{P_1}$ à celui de P_1, ces deux courbes étant arbitraires). Avec cette hypothèse la correspondance résulte sur deux génératrices homologues, de $(\overline{M}\ \overline{M_1}\ \overline{P_1}\ \overline{P}) = (M\ M_1\ P_1\ P)$, M étant le point sur l'arête de rebroussement, M_1 le point infiniment voisin.

P_1 le point où la génératrice coupe (c) choisie arbitrairement.

P un point quelconque de la génératrice et les points $\overline{M}\,\overline{M_1}\,\overline{P_1}\,\overline{P}$ étant définis d'une manière analogue.

Application du deuxième ordre. C_{23} et C_{24}.

10. C_2 est étudiée dans le mémoire de M. Cartan [1] dans lequel il est montré que deux surfaces développables sont toujours applicables l'une sur l'autre, la correspondance ponctuelle qui réalise l'application dépendant de 3 fonctions arbitraires d'un argument, et où cette correspondance est définie géométriquement d'une manière très simple. On voit immédiatement que cette correspondance peut aussi être une C_{23}.

C_{23}. Pour la surface s on prend (1), (2), (3), (4), (5') et des équations analogues pour S.

---

(1) *Annales E. N. S.*, 1920 (*loc. cit*).

La correspondance s'établit en écrivant :

$$(8)\left\{\begin{array}{lll} \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 & \Omega_{21} = \omega_{21} \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} & & \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}. \end{array}\right.$$

On peut supposer que l'on fait $c = 0$ dans (5') et de même $C = 0$ ce qui donne la première des équations (6') et son analogue pour S.

Le système dérivé de (8) se réduit alors à :

$$(E - e)[\omega_2\omega_1] + [\omega_2(\Omega_{31} - \omega_{31})] = 0.$$

C_{24} *peut exister entre deux surfaces quelconques ; elle dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. Il suffit pour l'obtenir d'établir une correspondance ponctuelle arbitraire entre les arêtes de rebroussement* γ *et* Γ *de* s *et de* S.

C_{24}. Nous donnerons d'abord une expression analytique d'une C_{24} établie entre s et S. Nous supposerons vérifiées pour s les équations (1) (2) (3) et encore :

$$\omega_{10} = \omega_2 \qquad 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0.$$

Elles auront pour conséquences :

$$\omega_{20} - \omega_{32} = \frac{1}{3}\omega_1 + b\omega_2 \qquad \omega_{20} = \frac{4}{3}\omega_1 + e\omega_2.$$

Des équations analogues auront lieu entre les Ω. Remarquons d'abord que l'indétermination qui reste dans le choix des repères nous permet de disposer des quantités : e_{00}, e_{21}, e_{30}, e_{31}, E_{00}, E_{21}, E_{30}, E_{31}.

Nous allons montrer qu'il suffit alors pour établir C_{24} d'écrire :

$$\Omega_2 = \omega_2 \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}.$$

Ces équations entraînent en effet : $\Omega_1 = \omega_1 + \lambda\omega_2$ dans laquelle on peut réduire λ à 0 (à l'aide de $E_{21} - e_{21}$). En dérivant après avoir effectué cette réduction on a : $\Omega_{21} = \omega_{21} + \mu\omega_2$; où l'on peut encore en disposant de $E_{31} - e_{31}$ faire $\mu = 0$. Il suffit de remarquer que l'on peut encore réduire b à 0 à l'aide de $e_{30} - \frac{2}{3}e_{21}$ et que la même réduction est possible pour la quantité correspondante B pour pouvoir affirmer que toutes les conditions de C_{24} sont réalisées.

Désignons par $P(t)$ le point qui décrit l'arête de rebroussement γ, nous pouvons nous servir de l'indétermination qui subsiste dans le choix du repère attaché à s pour prendre simplement :

$$A_1 = \alpha P.$$
$$A = P' + uP.$$
$$A_2 = \beta(P'' + hP').$$
$$A_3 = \gamma(P''' + kP'').$$

On détermine les ω en écrivant de deux manières différentes les formules de Frenet et en identifiant. On obtient ainsi :

$$\omega_{00} = (u - h)dt \quad , \quad \omega_2 = \frac{dt}{\beta} \quad , \quad \omega_3 = 0.$$
$$\omega_{10} = \alpha dt \quad , \quad \omega_{11} = \frac{d\alpha}{\alpha} - udt \quad , \quad \omega_{12} = 0 \quad , \quad \omega_{23} = 0.$$
$$\omega_{22} = \frac{d\beta}{\beta} + (h - k)dt \quad , \quad \omega_{23} = \frac{\beta}{\gamma} dt.$$
$$\omega_{33} = \frac{d\gamma}{\gamma} + (k - m)dt.$$

en écrivant $P^{IV} + mP''' + \ldots = 0$ la relation qui détermine P^{IV} à l'aide de P, P', P'', P'''.

On peut alors écrire les relations que l'on suppose vérifiées entre les ω. Elles donnent :

$$\gamma = \beta^2 \qquad \alpha = \frac{1}{\beta} \qquad h = \frac{4u}{3} + \frac{m}{6} \qquad k = u + \frac{m}{2}.$$

Tous ces calculs peuvent être répétés pour S. Nous surlignerons les lettres qui se rapportent à cette surface. En tenant compte des résultats précédents les conditions $\Omega_2 = \omega_2$ $\Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}$ que l'on a montré être suffisantes pour établir une C_{24} conduisent à :

$$\frac{d\bar{t}}{\bar{\beta}} = \frac{dt}{\beta} \qquad \frac{d\bar{\beta}}{\bar{\beta}} + \left(\frac{2\bar{u}}{3} - \frac{\bar{m}}{6}\right)d\bar{t} = \frac{d\beta}{\beta} + \left(\frac{2u}{3} - \frac{m}{6}\right) dt.$$

On en tire : $\bar{t} = f(t) \qquad \bar{\beta} = \beta f'(t)$

$$\bar{u} - \frac{1}{4}\bar{m} = \frac{u - \frac{1}{4}m}{f'(t)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{f''(t)}{f'(t)^2}.$$

Cette dernière équation s'écrit encore :

$$\bar{v} = \frac{v}{f'} - \frac{3}{2}\frac{f''}{f'^2}$$

en posant : $u - \frac{1}{4}m = v$ et $\bar{u} - \frac{1}{4}\bar{m} = \bar{v}$.

En résumé une correspondance arbitraire étant établie entre les arêtes de rebroussement par $\bar{t} = f(t)$ la correspondance sur deux génératrices homologues est complètement déterminée et peut être définie par :

$$\bar{v} = \frac{v}{f'} - \frac{3}{2}\frac{f''}{f'}.$$

Cette formule montre que cette correspondance (sur deux génératrices homologues) est parfaitement déterminée si l'on connaît, pour **3** points infiniment voisins, celle qui lie les points sur les arêtes de rebroussement (c'est-à-dire P_1 P_2 étant infiniment voisins de P sur γ si l'on connaît leurs homologues $\bar{P}\,\bar{P}_1\,\bar{P}_2$ sur Γ). On peut alors la définir par des opérations purement projectives. Désignons par c la cubique osculatrice à γ en P et par C la cubique osculatrice à Γ en $\bar{P}$. Nous établirons une correspondance homographique entre les points Q de c et les points $\bar{Q}$ de C en posant $(P\ P_1\ P_2\ Q) = (\bar{P}\ \bar{P}_1\ \bar{P}_2\ \bar{Q})$ et nous passerons de cette correspondance entre Q et $\bar{Q}$ à une correspondance entre M et $\bar{M}$ sur deux génératrices homologues en remarquant que l'on peut lier M et Q d'une manière biunivoque. Il suffit pour cela de prendre pour Q le seul point de contact, différent de P, des plans osculateurs à la cubique, issus de M.

11. C_{25}. Les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6') seront vérifiées pour s et pour S. Si l'on veut établir cette correspondance avec le système (8) on voit qu'il n'est pas possible de le faire entre deux surfaces quelconques, on doit avoir la condition $e = E$ [1].

Les surfaces S *qui peuvent correspondre à une* s *donné avec* C_{25} *dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.*

Un cas intéressant est celui *où les génératrices appartiennent à un com-*

[1] Cette condition a une signification géométrique simple : lorsque S a, en un point commun avec s, application du 2e ordre et contact du 5e les arêtes de rebroussement ont en général aux points homologues en coïncidence un contact du 3e ordre seulement ; la condition $e = E$ exprime que ce dernier contact est au moins du 4e ordre.

plexe linéaire. Avec les repères choisis il suffit que l'on ait $\omega_{21} = 0$ ce qui entraîne $e = 0$ c'est-à-dire $\omega_{20} = \frac{4}{3}\omega_1$. Ces surfaces forment une famille dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument. Ce qui précède montre qu'une C_{23} est possible entre deux surfaces de la famille. Elle dépend en général de trois constantes arbitraires. Elle s'obtient en effet par le système complètement intégrable : $\Omega_1 = \omega_1 \qquad \Omega_2 = \omega_2 \qquad \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}$.

Nous allons donner une interprétation géométrique de cette correspondance.

Considérons d'abord une surface développable ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche. Le repère R qui lui est attaché sera particularisé jusqu'au cinquième ordre ; les équations (1), (2), (3), (4), (5) seront vérifiées. On devra avoir encore :

$$\omega_{21} = 0 \qquad \omega_{20} = \frac{4}{3}\omega_1 \qquad \omega_{31} = 0$$

et si l'on donne ω_1 et ω_2 tous les ω seront alors déterminés à l'exception toutefois de l'un des ω_{ii}. D'autre part si l'on particularise autant qu'il est possible le repère attaché à une cubique gauche il restera toujours un ω_{ii} arbitraire. Il en résulte que se donner ω_1 et ω_2 d'une part, les équations (1), (2), (3), (4) et (5) d'autre part revient à se donner le déplacement d'un repère mobile dont le sommet décrit une cubique gauche (à l'indétermination près qui résulte du choix qui reste encore arbitraire de ω_{00} p. ex.). Nous pouvons considérer maintenant le repère R comme attaché au point A_1 sur l'arête de rebroussement γ de s. Soit R_0 une position initiale, R_1 le repère infiniment voisin.

Nous appellerons (D) le déplacement infiniment petit d'un repère satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Il aura les mêmes ω_1 ω_2 que le déplacement de R ;

2° Les équations (1), (2), (3), (4), (5) resteront satisfaites ;

3° Il restera attaché à une cubique gauche.

Ce déplacement D appliqué à R_0 l'amènera en R'_1 qui correspondra à R_1. Nous pourrons ainsi faire correspondre à chaque position du repère R une position R' du repère attaché à une cubique gauche. Le repère R' sera défini en se donnant un parametre projectif t sur la cubique (défini à une transformation homographique près).

Nous dirons que nous avons *développé la courbe γ sur la cubique* ou encore que nous avons défini une *connexion* qui ramène γ à une cubique gauche. Nous pourrons développer de même Γ sur la même cubique et la correspondance s'établira en liant les deux paramètres naturels t et T qui s'introduisent sur la cubique par une relation homographique à coefficients constants. La correspondance ponctuelle entre γ et Γ étant établie celle que l'on veut réaliser entre s et S en résulte en procédant par exemple comme pour C_{24}.

CHAPITRE II

Surfaces développables de l'espace à 4 dimensions.

Nous allons continuer l'étude des correspondances ponctuelles précédentes en les supposant maintenant établies entre deux surfaces (V_2) développables de E_4. Nous présenterons les résultats d'une manière différente : nous préciserons d'abord la généralité des diverses correspondances ce qui nous permettra de les classer et nous donnerons ensuite une interprétation géométrique pour chaque groupe.

Les diverses correspondances.

12. C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}. Nous prendrons pour s :

(1) $\omega_3 = 0 \qquad \omega_4 = 0$

(2) $\omega_{13} = \omega_1 \qquad \omega_{23} = 0 \qquad \omega_{14} = 0 \qquad \omega_{24} = 0$

(3) $\omega_{21} = 0 \qquad \omega_{34} = \omega_1 \qquad \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = 0$ et

(4′) $\begin{cases} \omega_{20} = a\omega_1 \qquad 3\omega_{10} - 3\omega_{31} + \omega_{43} = c\omega_1 + a\omega_2 \\ \omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{11} = b\omega_1 \end{cases}$

qui résultent des précédentes. On aura pour S les mêmes relations entre les Ω avec dans (4′) A, B, C, pour remplacer a, b, c.

C_{13} s'établira par : $\Omega_1 = \omega_1 \quad \Omega_2 = \omega_2$ ce qui donne :

$$[\omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] = 0,$$
$$[\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] + [\omega_1(\Omega_{12} - \omega_{12})] = 0.$$

Les C_{13} *peuvent s'établir entre deux surfaces quelconques et dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

C_{14}. Supposons vérifiées, entre les ω, les équations (1), (2), (3) et :

(4) $\omega_{20} = \omega_1, \qquad 3\omega_{10} - 3\omega_{31} + \omega_{43} = \omega_2, \qquad \omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{11} = 0,$

nous aurons de plus :

$$(5')\quad\left\{\begin{aligned}&2\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22}=d\omega_1,\qquad 3\omega_{30}-2\omega_{41}-2\omega_{12}=e\omega_1+d\omega_2,\\&\qquad\qquad\omega_{10}-\omega_{43}=\frac{1}{2}\omega_2+f\omega_1.\end{aligned}\right.$$

Les mêmes relations existant entre les Ω et D, E, F, *la correspondance* C_{14} *s'établit par* : $\Omega_1=\omega_1$, $\Omega_2=\omega_2$ *entre deux surfaces quelconques* elle dépend de deux fonctions d'un argument.

C_{15}. Le repère attaché à chacune des surfaces sera complètement particularisé jusqu'au cinquième ordre, il satisfera donc à :

$$(1),(2),(3),(4),\quad(5)\left\{\begin{aligned}&2\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22}=0,\qquad 3\omega_{30}-2\omega_{41}-2\omega_{12}=0,\\&\qquad\qquad\omega_{10}-\omega_{43}=\frac{1}{2}\omega_2,\end{aligned}\right.$$

$$\text{et}\quad(6')\left\{\begin{aligned}&3\omega_{10}-\omega_{31}=3\omega_2+g\omega_1,\qquad 2\omega_{30}+2\omega_{41}-3\omega_{12}=h\omega_1,\\&\qquad\qquad\omega_{32}-\omega_{40}=i\omega_1+g\omega_2,\end{aligned}\right.$$

et des relations analogues pour S. *Le résultat est le même que pour* C_{14}.

C_{16}. Désignons par :

$$(6)\quad 3\omega_{10}-\omega_{31}=3\omega_2,\qquad 2\omega_{30}+2\omega_{41}-3\omega_{12}=0,\qquad \omega_{32}-\omega_{40}=0,$$

$$\text{et}\quad(7')\qquad \omega_{12}=k\omega_1,\qquad \omega_{32}=l\omega_1,\qquad \omega_{42}=m\omega_1+k\omega_2.$$

Si l'on rapporte s à un repère du sixième ordre on a les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) qui entraînent (7′), et des équations analogues pour S.

Etablissons alors la correspondance C_{16} en écrivant : $\Omega_1=\omega_1$, $\Omega_2=\omega_2$ qui donnent par dérivation extérieure en tenant compte des relations qui existent entre les ω et aussi entre les Ω :

$$[\omega_1(\Omega_{11}-\Omega_{00}-\omega_{11}+\omega_{00})]=0,\qquad [\omega_2(\Omega_{11}-\Omega_{00}-\omega_{11}+\omega_{00})]=0,$$

d'où : $\Omega_{11}-\Omega_{00}=\omega_{11}-\omega_{00}$.

La correspondance C_{16} s'obtiendra donc en écrivant :

$$\Omega_1=\omega_1\qquad \Omega_2=\omega_2\qquad \Omega_{11}-\Omega_{00}=\omega_{11}-\omega_{00}$$

système *complètement intégrable* dont la solution dépend de *3 constantes arbitraires*. C'est le degré de généralité de la correspondance étudiée qu'il est possible d'établir entre deux surfaces quelconques.

Il est facile de voir qu'une correspondance C_{17} ne peut pas exister entre deux surfaces projectivement distinctes.

Application du second ordre.

13. Les correspondances qui réalisent l'application du second ordre (sans autre condition) s'obtiennent par le système :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Omega_3 = \omega_3 & \Omega_4 = \omega_4 & \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 \\ \Omega_{14} = \omega_{14} & \Omega_{24} = \Omega_{24} & \Omega_{13} = \omega_{13} & \Omega_{23} = \omega_{23} \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} & & \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} & \\ \Omega_{12} = \omega_{12} & \Omega_{21} = \omega_{21} & & \end{array}\right.$$

Ce résultat qui est valable pour deux surfaces quelconques (pas nécessairement développables) s'obtient par la méthode de M. Cartan qui donne la condition d'applicabilité projective dans l'espace ordinaire ([1]).

Elle revient à écrire que deux points M′ P′ respectivement infiniment voisins de deux points homologues M et P supposés en coïncidence occupent la même position, aux infiniment petits du troisième ordre près.

Ces équations (8) peuvent encore se déduire de celles qui réalisent l'application du premier ordre ([2]) c'est-à-dire de :

$$(9)\qquad \Omega_3 = \omega_3,\ \Omega_4 = \omega_4,\ \Omega_1 = \omega_1,\ \Omega_2 = \omega_2$$

(en supposant $\omega_3 = \omega_4 = 0$) que l'on dérive extérieurement. Dans les équations que l'on obtient ainsi figurent huit expressions de Pfaff nouvelles que l'on égale à 0 et qui constituent alors avec les équations (9) le système (8). De la même manière nous obtiendrons les conditions d'application du troisième ordre en partant de celles du deuxième.

([1]) *Annales E. N.* S. 1920. p 268 (*loc. cit.*).

([2]) E. CARTAN. Sur le problème général de la déformation. *Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens*, Strasbourg, 1920 (*loc. cit.*).

Surfaces dèveloppables projectivement applicables et C_{23}.

14. Considérons de nouveau deux surfaces développables rapportées à un repère du second ordre, c'est-à-dire pour lesquelles on suppose vérifiées les équations (1) et (2) qui entraînent : $\omega_{21} = p\omega_1 \qquad \Omega_{21} = P\omega_1$.

En supposant $p = 0$ si l'on veut réaliser l'application du second ordre on devra avoir $P = 0$ d'où l'on déduit $\omega_{20} = a\omega_1 \qquad \Omega_{20} = A\omega_1$ et la correspondance qui réalise cette application s'obtient en écrivant :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 & \Omega_{12} = \omega_{12} \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} & & \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} \end{array} \right.$$

$$\text{qui donne} \left\{ \begin{array}{l} [\omega_1(2\Omega_{10} - \Omega_{31} - 2\omega_{10} + \omega_{31})] + [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0 \\ [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + 2[\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0 \\ [(\Omega_{10} - \Omega_{10})\omega_2] + [\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] = 0. \end{array} \right.$$

Elle dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument et peut exister entre deux surfaces s *et* S *quelconques.*

Ce résultat est conservé si l'on étudie les C_{23}. Il suffira en effet de supposer vérifiées les relations (1), (2), (3) et (4′) aussi bien pour s que pour S et les correspondances seront encore données par le système (10).

15. C_{24}. C_{25}. C_{26}. Nous partons des équations (1) (2) (3) (4) (5′) satisfaites à la fois pour s et pour S les correspondances C_{2i} seront définies par le système (10) qui donne par dérivation extérieure :

$$[(\Omega_{10} - \omega_{10})\omega_2] + [\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] = 0 \qquad [(\Omega_{10} - \omega_{10})\omega_1] = 0.$$

C_{24} *est possible entre deux surfaces quelconques et dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

Si l'on a les équations : (1) (2) (3) (4) (5) (6′) le système dérivé de (10) se réduit à : $[\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] = 0$.

C_{25} est *possible entre deux surfaces quelconques dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.*

Pour l'étude de C_{26} on supposera (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7′) satisfaites aussi bien pour s que pour S. Pour établir la correspondance on écrit (10) et l'on voit qu'il nécessite que k qui s'introduit dans (7′) soit égal à K qui lui correspond pour S. C'est la condition pour qu'une C_{26} puisse avoir lieu entre s et S ; on montre facilement que les *surfaces* S *qui correspondent à une* s *donnée dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument*. La condition $k = K$ entraîne l'égalité de deux invariants en deux points correspondants des arêtes de rebroussement, les invariants donnés devant en même temps être égaux on voit que la correspondance est en général bien déterminée. Il y a exception dans le cas où $k = K = 0$; elle dépend alors de *trois constantes arbitraires*.

16. **Application du troisième ordre**. Comme nous l'avons indiqué précédemment [13] cette application s'obtiendra en joignant aux équations (8) les suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} \Omega_{34} - \omega_{34} = 0 \qquad \Omega_{20} - \omega_{20} = 0 \qquad \Omega_{10} - \omega_{10} = 0 \\ \Omega_{33} - \Omega_{11} - \omega_{33} + \omega_{11} = 0 \qquad \Omega_{31} - \omega_{31} = 0 \qquad \Omega_{32} - \omega_{32} = 0. \end{cases}$$

ce sont égalées à 0 les expressions de Pfaff nouvelles qui s'introduisent dans le système obtenu par dérivation extérieure de (8).

Pour réaliser cette correspondance supposons d'abord vérifiées pour les deux surfaces les équations (1) (2) (3) et (4'). Nous devrons avoir dans (4') $a = A$ que nous prendrons égaux à l'unité. La dérivation de $\omega_{20} = \omega_1$ fait intervenir $2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}$ qui sera égal à $2\Omega_{00} - \Omega_{11} - \Omega_{22}$ et que nous réduirons à 0. Il s'introduit alors $3\omega_{10} - \omega_{31} = 3\omega_2 + g\omega_1$ dont le premier membre est évidemment le même pour les deux surfaces et l'on prendra $g = G = 0$ ce qui donnera enfin :

$$4\omega_{30} - 6\omega_{12} - 3\omega_{41} = m\omega_1, \qquad 4\Omega_{30} - 6\Omega_{12} - 3\Omega_{41} = M\omega_1.$$

En résumé on aura pour s les équations (1), (2), (3), (4') avec $a = 1$.

$$2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0 \qquad 3\omega_{10} - \omega_{31} = 3\omega_2$$
$$4\omega_{30} - 6\omega_{12} - 3\omega_{41} = m\omega_1$$

et les équations analogues pour S.

C_3 s'établira dans ces conditions par

$$\begin{array}{llll} \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 & \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} & \\ \Omega_{12} = \omega_{12} & \Omega_{10} = \omega_{10} & \Omega_{31} = \omega_{31} & \Omega_{32} = \omega_{32} \end{array}$$

qui donne par dérivation extérieure

$$[(\Omega_{30} - \omega_{30})\omega_1] = 0 \qquad [(\Omega_{30} - \omega_{30})\omega_2] + [\omega_1(\Omega_{42} - \omega_{42})] = 0.$$

C_3 *est possible entre deux surfaces quelconques et dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument:*

17. C_{34}. C_{35}. C_{36}. Le repère attaché à chacune des surfaces pourra être choisi de telle sorte que l'on ait (1) (2) (3) (4)

$$2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0 \qquad \omega_{10} - \omega_{43} = \frac{1}{2}\,\omega_2$$
$$3\omega_{10} - \omega_{31} = 3\omega_2 \qquad \omega_{12} = 0 \qquad \omega_{32} = 0$$

et toutes les équations analogues pour S.

C_{34} s'établit alors en écrivant :

$$\Omega_1 = \omega_1 \qquad \Omega_2 = \omega_2 \qquad \Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00} = 0$$

système qui est complètement intégrable.

C_{34} *est donc possible entre deux surfaces quelconques et dépend* en général *de trois constantes arbitraires*. On voit immédiatement que le même résultat est vérifié pour C_{35}. *Une* C_{34} *peut toujours être regardée comme une* C_{35}.

Pour que C_{36} puisse exister il est nécessaire que si l'on considère (7′) et le système analogue pour S on ait $k = K$ et $l = L$.

Les surfaces S *qui correspondent à une* s *donnée dépendent d'une fonction d'un argument.*

La correspondance est en général complètement déterminée par l'égalité de deux invariants. *Dans le cas particulier* où $k = K = l = L = 0$ *elle dépend de trois constantes arbitraires.*

Interprétation géométrique des correspondances du paragraphe précédent.

18. Nous avons montré qu'une correspondance prise parmi C_{14} C_{15} C_{24} C_3 pouvait être établie entre deux surfaces quelconques et dépendait de deux fonctions arbitraires d'un argument. On a ainsi mis en évidence les différentes propriétés que possède *une correspondance unique* qui peut être représentée par :

$$\bar{t} = f(t) \qquad \bar{u} = \frac{u}{f'(t)} + \varphi(t)$$

t étant un paramètre qui définit le point M (t) sur l'arête de rebroussement γ de s;

u étant un autre paramètre qui définit la position du point A sur la génératrice passant par M

$$A = M' + uM$$

$f(t)$ et $\varphi(t)$ étant les deux fonctions arbitraires. Le raisonnement qui a donné la définition géométrique de C_{19} dans E_3 peut être repris ; on est conduit à un résultat identique qui s'énonce dans les mêmes termes.

C_{25} dépend d'une fonction arbitraire d'un argument, elle est complètement définie si l'on se donne une correspondance ponctuelle entre les arêtes de rebroussement. *La correspondance sur deux génératrices homologues se définit géométriquement par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour* C_{24} *de* E_3 [10]. On considère en m la quartique gauche normale (q) qui a avec γ un contact du 4e ordre et de même en M la quartique (Q). On établit une correspondance homographique entre les points de (q) et ceux de (Q) et l'on passe de là à la correspondance ponctuelle entre génératrices homologues en remarquant qu'il est possible de faire correspondre d'une manière biunivoque les points de (q) à ceux de la génératrice tangente en M à γ. Par un point P quelconque de cette génératrice on peut mener 4 hyperplans surosculateurs à (q) mais un seul des points de contact sera distinct de m soit π ce point. La correspondance $(p. \pi)$ est bien univoque.

C_{16} C_{34} C_{35} dépendent également — entre deux surfaces quelconques — de trois constantes arbitraires. Reportons-nous au chapitre précédent [11].

Nous pourrons ici développer γ *sur une quartique normale* (q) (Pour C_{16} par exemple en se donnant les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6)). On définira ainsi sur (q) un paramètre naturel t. En développant également Γ sur (q) on aura un autre paramètre naturel T et la correspondance s'obtiendra en liant t et T par une relation homographique à coefficients constants.

Si pour les deux surfaces s et S on a $k = K = 0$ (dans les équations (7′) et les analogues) toute C_{16} est aussi une C_{26}.

La condition $k = K$ s'interprète aisément. En effet lorsqu'en un point commun s et S ont une application du premier ordre et un contact du sixième ordre il en résulte pour les arêtes de rebroussement aux points homologues confondus un contact du quatrième ordre en général. Ce dernier contact est du cinquième ordre si $k = K$ et il est du sixième si l'on a de plus $l = L$. Si l'on a $k = K = l = L = 0$ toute C_{16} est d'elle-même C_{36}.

CHAPITRE III

Les Surfaces réglées

Propriétés géométriques.

19. On particularise le repère attaché à s de telle sorte que l'on ait :

$$(1)\quad \begin{cases} \omega_3 = 0 & \omega_4 = 0 \quad \omega_{13} = \omega_1 \quad \omega_{23} = 0 \quad \omega_{24} = \omega_1 \\ \omega_{14} = \omega_2 & \omega_{21} = 0 \quad \omega_{43} = 0 \quad \omega_{34} - 2\omega_{12} = 0 \\ \omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0 & \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = 0 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \omega_{41} = 0 \quad \omega_{20} = \omega_1 \quad \omega_{32} = \omega_1 \\ \omega_{10} - \omega_{31} = \dfrac{\omega_2}{3} \qquad 2\omega_{10} - 2\omega_{42} - \omega_{31} = 2\omega_2 \end{cases}$$

La génératrice est alors la droite AA_2. Le point A_2 décrit une courbe γ que M. Bompiani (1) appelle la *quasi-asymptotique* et dont la tangente est la droite A_2, $A + A_4$. Le plan osculateur en un point A_2 de cette courbe est contenu dans l'hyperplan tangent $(AA_1A_2A_4)$ à la surface réglée le long de la génératrice AA_2. Le plan tangent à s au point A_2 a pour droite caractéristique A_2A_4 qui reste tangente à une courbe σ.

Nous savons alors d'après un théorème démontré par M. RANUM (2) que la droite A_2, $A - A_4$ est la *transversale* (on appelle ainsi une droite qui rencontre trois génératrices infiniment voisines de la surface).

Nous pourrons encore considérer la surface comme engendrée de la manière suivante : on se donne une courbe σ, sur chaque tangente à cette courbe on prend un point A_2 et par ce point dans le plan osculateur à σ au

(1) BOMPIANI Alcuna proprieta proiettivo diff etc. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, t. XXXVII, 1914, p. 305.

(2) *Transactions of the American Mathematical Society*, t. XVI, 1915.

point de contact de la tangente considérée on mène une droite quelconque qui sera la génératrice A_2A.

Nous désignerons comme M. Ranum par surfaces de la classe *a* celles qui appartiennent au cas le plus général.

Les sous-classes de *a* qu'il considère se présentent lorsque γ est hyperplane ou que σ se réduit à un point ou bien encore lorsque ces deux particularités se produisent en même temps. Le degré de généralité résulte toujours immédiatement du mode de génération de la surface. La courbe γ ne peut pas être plane. Remarquons encore que la surface transversale (engendrée par A_2, $A - A_4$) appartient toujours à la même sous-classe que la surface considérée; elles sont en effet définies à partir des mêmes courbes γ et σ.

Nous dirons que la surface *s* appartient à la classe *b* lorsque γ coïncidera avec σ qui sera alors une vraie asymptotique. La surface peut être engendrée de la manière suivante : on mène par chaque point d'une courbe σ une droite dans le plan osculateur à la courbe en ce point. Elle doit donc dépendre de 4 fonctions arbitraires d'un argument; c'est ce que l'on vérifie en considérant le système qui les définit qui se compose de (1) et de :

$$(3) \qquad \begin{cases} \omega_{41} = 0 \qquad \omega_{10} - \omega_{31} = \omega_1 \qquad \omega_{32} = 0 \\ \omega_{20} = 0 \qquad 2\omega_{10} - 2\omega_{42} - \omega_{31} = 0. \end{cases}$$

La surface transversale est alors la développable qui admet pour arête de rebroussement σ (les 3 droites

$$A_2 \quad A_4 \quad , \quad A_2 \quad A + A_4 \quad , \quad A_2 \quad A - A_4,$$

sont confondues).

Dans le cas plus particulier où l'asymptotique γ sera une droite D on dira que *s* est de la classe *c*. Elle sera engendrée de la manière suivante :

On considère une V_3 développable engendrée par des plans qui passent par la droite D, on établit une correspondance homographique entre les plans générateurs de la V_3 et les points de la droite et par chaque point on mène dans le plan correspondant une droite qui sera la génératrice. Ces surfaces dépendront de 3 fonctions d'un argument. Nous les caractériserons en remarquant que le système qui se déduit de (3) par dérivation s'écrit dans le cas d'une surface de la classe *b* :

$$(4) \qquad \begin{cases} \omega_{40} = \alpha\omega_1 \qquad \omega_{30} = \beta\omega_1 + \dfrac{4\alpha}{3}\,\omega_2 \\ \omega_{00} - \omega_{11} = \gamma\omega_1 - \dfrac{5\alpha}{6}\,\omega_2 \qquad \omega_{12} = \delta\omega_1 + \beta\omega_2 \end{cases}$$

dans lequel α peut se réduire à 0 pour une surface de la classe c. (à 1 pour une surface de la classe b).

La surface transversale se réduit alors à la droite D elle-même.

Etude des correspondances.

Application du second ordre C_{13}.

20. Les surfaces S qui auront avec s une correspondance ponctuelle établissant l'application du second ordre seront données par :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \Omega_3 = \omega_3 & \Omega_4 = \omega_4 & \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 \\ \Omega_{14} = \omega_{14} & \Omega_{24} = \omega_{24} & \Omega_{13} = \omega_{13} & \Omega_{23} = \Omega_{23} \\ \multicolumn{2}{l}{\Omega_{11} = \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}} & \multicolumn{2}{l}{\Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}} \\ \Omega_{12} = \omega_{12} & \Omega_{21} = \omega_{21} & & \end{array}\right.$$

En supposant s rapportée à un repère du deuxième ordre la dérivation extérieure de (5) donnera :

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} [\omega_2(\Omega_{44} - \Omega_{11} - \omega_{44} + \omega_{11})] + [\omega_1(\Omega_{34} - \omega_{34})] = 0 \\ [\omega_1(\Omega_{44} - \Omega_{22} - \omega_{44} + \omega_{22})] = 0 \\ [\omega_1(\Omega_{33} - \Omega_{11} - \omega_{33} + \omega_{11})] + [\omega_2(\Omega_{43} - \omega_{43})] = 0 \\ [\omega_1(\Omega_{43} - \omega_{43})] = 0 \\ [\omega_1(\Omega_{31} - 2\Omega_{10} - \omega_{31} + 2\omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{41} - \Omega_{20} - \omega_{41} + \omega_{20})] = 0. \\ [\omega_1(\Omega_{42} - \Omega_{10} - \omega_{42} + \omega_{10})] - 2[\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0 \\ [\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] + [\omega_2(\Omega_{42} - \Omega_{10} - \omega_{42} + \omega_{10})] = 0 \\ [\omega_1(\Omega_{41} - \Omega_{20} - \omega_{41} + \omega_{20})] = 0 \end{array}\right.$$

où figurent 9 expressions de Pfaff nouvelles qui s'expriment de la manière la plus générale à l'aide de 10 paramètres. *Le système est en involution et les surfaces* S *correspondant à* s *dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments ce qui est aussi le degré de généralité de la* C_2 *que l'on peut établir entre deux surfaces réglées quelconques.*

Le résultat est encore le même pour les C_{13}. Les repères étant particularisés jusqu'au troisième ordre elles s'établissent en écrivant : $\Omega_1 = \omega_1 \quad \Omega_2 = \omega_2$.

Correspondances C_{14}.

21. Les surfaces S qui correspondent à une s donnée s'obtiennent par le système :

$$
(9) \quad
\begin{array}{l}
\Omega_3 = \omega_3 \qquad \Omega_4 = \omega_4 \\
\left\{
\begin{array}{l}
\Omega_{13} = \omega_{13} \qquad \Omega_{23} = \omega_{23} \qquad \Omega_{14} = \omega_{14} \qquad \Omega_{24} = \omega_{24} \\
\Omega_{00} + \Omega_{33} - 2\Omega_{11} = \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} \\
\Omega_{00} + \Omega_{44} - \Omega_{11} - \Omega_{22} = \omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{22} \\
\Omega_{21} = \omega_{21} \qquad \Omega_{43} = \omega_{43} \qquad \Omega_{34} - 2\Omega_{12} = \omega_{34} - 2\omega_{12} \\
\Omega_{41} = \omega_{41} \qquad \Omega_{20} = \omega_{20} \qquad \Omega_{10} - \Omega_{31} = \omega_{10} - \omega_{31} \\
2\Omega_{10} - 2\Omega_{42} - \Omega_{31} = 2\omega_{10} - 2\omega_{42} - \omega_{31} \qquad \Omega_{32} = \omega_{32} \\
\Omega_1 = \omega_1 \qquad \Omega_2 = \omega_2
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

1° — *classe a*. — En supposant, que s appartient à la classe a et est rapportée à un repère du quatrième ordre, on obtiendra par dérivation extérieure :

$$
(10) \quad
\left\{
\begin{array}{l}
[(\Omega_{40} - \omega_{40})\omega_1] = 0 \\
[\omega_1(\Omega_{00} - \omega_{22} - \Omega_{00} + \omega_{22})] = 0 \\
[\omega_1(\Omega_{00} - \Omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{11})] = 0 \\
[(\omega_{10} - \omega_{31})(\Omega_{00} - \Omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{11})] + [(\Omega_{12} - \omega_{12})(\omega_{20} - 2\omega_{41})] \\
\qquad\qquad + 2[\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] + (\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] = 0 \\
[(\omega_{10} - 2\omega_{42})(\Omega_{00} - \Omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{11})] + [(\Omega_{12} - \omega_{12})(\omega_{20} + 2\omega_{41})] \\
\qquad\qquad + [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] + [3\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] = 0 \\
[(\Omega_{30} - \omega_{30})]\omega_2 + [(\Omega_{12} - \omega_{12})(2\omega_{42} - \omega_{31})] = 0 \\
[\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] + [\omega_1(\Omega_{12} - \omega_{12})] = 0
\end{array}
\right.
$$

qui se résoud suivant :

$$
(11) \quad
\left\{
\begin{array}{l}
\qquad\qquad \Omega_{40} - \omega_{40} = w\omega_1 \\
\Omega_{00} - \Omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{11} = u\omega_1 \\
\Omega_{00} - \Omega_{22} - \omega_{00} + \omega_{22} = (3u + 5w)\omega_1 \\
\Omega_{12} - \omega_{12} = v\omega_1 + (-3u - 5w)\omega_2 \\
\Omega_{30} - \omega_{30} = \frac{4}{3} v\omega_1 + \left(-\frac{4}{3} u - 2w\right)\omega_2
\end{array}
\right.
$$

où l'on peut réduire w à 0 grâce à $E_{10} - e_{10}$ et qui donne alors :

$$
(12) \quad
\left\{
\begin{array}{l}
[(\Omega_{42} - \omega_{42})\omega_1] = 0 \\
[\omega_1(du + u(\omega_{00} - \omega_{11}))] = 0 \\
[\omega_1(dv + v(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11}))] - 3[\omega_2(du + u(\omega_{00} - \omega_{11}))] \\
\qquad\qquad + 6u^2[\omega_2\omega_1] + 5u[\omega_1\omega_{12}] - [\omega_2(\Omega_{42} - \omega_{42})] = 0 \\
\frac{4}{3}[\omega_1(dv + 3v(\omega_{00} - \omega_{11}))] - \frac{4}{3}[\omega_2(du + u(3\omega_{00} - 2\omega_{11} - \omega_{22}))] \\
\qquad - 2\left[\frac{\omega_2}{3}(\Omega_{42} - \omega_{42})\right] + 2u[\omega_{30}\omega_1] - \frac{8}{3} u^2[\omega_2\omega_1] + \frac{4}{3} u[\omega_1\omega_{12}] = 0
\end{array}
\right.
$$

Les ω de s satisfont au système dérivé de (2).

$$(13)\quad \begin{cases} \omega_{40} = \alpha\omega_1 \\ 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = \beta\omega_1 \\ \omega_{30} = \gamma\omega_1 - \dfrac{\alpha+\beta}{3}\omega_2 \\ \omega_{12} = \delta\omega_1 - \dfrac{3\beta+5\alpha}{4}\omega_2 \\ \omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33} = \eta\omega_1 + \dfrac{5\delta - 3\gamma}{3}\omega_2 \end{cases}$$

dans lequel nous pourrons supposer α réduit à 0 grâce à e_{40} ce qui entraînera d'ailleurs $[\omega_{42}\omega_1] = 0$. On obtient comme conséquence des dernières équations (12) :

$$- 8[\omega_2(du + u(\omega_{00} - \omega_{11}))] - 4u[\omega_2(2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{11})] + 32u^2[\omega_2\omega_1] \\ - 16u[\omega_1\omega_{12}] - 2[\omega_2(\Omega_{42} - \omega_{42})] - 6u[\omega_{30}\omega_1] = 0$$

et en résolvant alors (12) :

$$\Omega_{42} - \omega_{42} = (16u^2 - 3u\beta - 4q)\omega_1 \qquad du + u(\omega_{00} - \omega_{11}) = q\omega_1$$

Par dérivation :

$$- 3u[\omega_1(d\beta + \beta(\omega_{00} - \omega_{11}))] - 4[\omega_1(dq + 2q(\omega_{00} - \omega_{11}))] = 0$$
$$[\omega_1(dq + q(\omega_{00} - \omega_{11}))] + u[\omega_1\omega_2] = 0$$

qui entraînent avec $u \neq 0$

$$- 3[\omega_1(d\beta + \beta(\omega_{00} - \omega_{11}))] + 4[\omega_1\omega_2] = 0$$

la dérivée de la 2^e équation (13) donne d'autre part :

$$[\omega_1(d\beta + \beta(\omega_{00} - \omega_{11}))] + \frac{2}{3}[\omega_1\omega_2] = 0$$

ces deux dernières équations présentent une incompatibilité. Si nous supposons $u = 0$ le système (12) se réduit à :

$$\left.\begin{array}{l} [(\Omega_{42} - \omega_{42})\omega_1] = 0 \\ [(\Omega_{42} - \omega_{42})\omega_2] = 0 \\ [\omega_1(dv + 3v(\omega_{00} - \omega_{11}))] = 0 \end{array}\right\} \text{ qui donne : } \begin{cases} \Omega_{42} - \omega_{42} = 0 \\ dv + 3v(\omega_{00} - \omega_{11}) = r\omega_1 \end{cases}$$

Comme la première équation ne donne rien par dérivation, nous obtenons un système en involution. *A toute surface* s *correspondent des surfaces* S *qui dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.*

En réduisant ω_{40} à 0 le point A_4 lui-même décrit la courbe σ. On montre facilement que si σ n'est pas distincte de Σ les surfaces correspondantes s et S sont identiques. Remarquons de plus que les plans osculateurs et même les hyperplans osculateurs à σ et Σ se correspondent. Si l'on considère le déplacement à deux paramètres qui amène S sur s dans les conditions imposées par C_{14}[21] les vitesses d'entraînement de tous les points du plan osculateur à Σ sont nulles.

Les deux surfaces s et S *appartiennent toujours à la même sous-classe de la classe a.* En particulier lorsque σ se réduit à un point il en est de même pour Σ, les plans $A\,A_2\,A_4$ ne sont plus osculateurs à une courbe gauche mais ils passent par un point fixe et engendrent une hypersurface développable. Dans ce cas on peut encore dire que dans le déplacement qui amène S sur s les vitesses d'entraînement des points de ce plan $A\,A_2\,A_4$ sont nulles.

2e — *classe b.* — On a entre les ω les équations (1) (3) et (4), d'où .

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} [\omega_1\Omega(_{40} - \omega_{40})] = 0. \\ [\omega_1(\Omega_{00} - \Omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{11})] = 0. \\ [\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] + [\omega_1(\Omega_{12} - \omega_{12}] = 0. \\ 2[\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] + [\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] = 0. \\ [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] + 3[\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] = 0. \\ [(\Omega_{30} - \omega_{30})\omega_2] + 2[(\Omega_{12} - \omega_{12})\omega_1] = 0. \end{array}\right.$$

et par suite :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega_{40} - \omega_{40} = 0. \\ \Omega_{00} - \Omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{11} = u\omega_1. \\ \Omega_{00} - \Omega_{22} - \omega_{00} + \omega_{22} = -\frac{p}{2}\omega_1 + v\omega_2. \\ \Omega_{30} - \omega_{30} = p\omega_1. \\ \Omega_{12} - \omega_{22} = q\omega_1 + \frac{p}{2}\omega_2. \end{array}\right.$$

La première relation donne, en supposant $\omega_{40} \neq 0$, la condition $v = 0$. On peut en se servant de $E_{10} - e_{10}$ réduire p à 0; on obtient alors $[\omega_1(\Omega_{42} - \omega_{42})] = 0$

en dérivant la troisième et $u = 0$ en dérivant la quatrième (car $\alpha \neq 0$).
Il reste à la fin :

$$[\omega_1(\Omega_{42} - \omega_{42})] = 0.$$
$$[\omega_1(dq + q(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11})] - [\omega_2(\Omega_{42} - \omega_{42})] = 0$$

Ce qui montre qu'à toute surface s *de la classe* b *correspondent (avec* C_{14}*) des surfaces dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

On remarquera que dans le déplacement qui amène S sur s les vitesses d'entraînement de tous les points de la génératrice A A_2 sont nulles. La correspondance ponctuelle entre les deux génératrices est projective. De plus S et s ne peuvent sans être identiques avoir comme asymptotiques la même courbe.

3° — *classe* C. — On a de plus $\omega_{40} = 0$; l'équation obtenue en dérivant la première équation (16) est vérifiée d'elle-même. Le système dérivé de (16) introduit 4 expressions de Pfaff nouvelles qui s'exprimeront de la manière la plus générale à l'aide de 4 paramètres. *Il est possible d'établir une* C_{14} *entre deux surfaces quelconques appartenant à la classe* C*; ces correspondances dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.*

Correspondances C_{23}.

22. Les surfaces S seront données par :

$$(17)\quad \begin{cases} \Omega_3 = \omega_3 \quad \Omega_4 = \omega_4 \quad \Omega_1 = \omega_1 \quad \Omega_2 = \omega_2. \\ \Omega_{14} = \omega_{14} \quad \Omega_{24} = \omega_{24} \quad \Omega_{13} = \omega_{13} \quad \Omega_{23} = \omega_{23}. \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} \quad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}. \\ \Omega_{12} = \omega_{12} \quad \Omega_{21} = \omega_{21} \quad \Omega_{33} = \omega_{33} \quad \Omega_{44} = \omega_{44}. \\ \Omega_{43} = \omega_{43} \quad \Omega_{34} - 2\Omega_{12} = \omega_{34} - 2\omega_{12}. \end{cases}$$

qui conduit à :

$$(18)\quad \begin{cases} \Omega_{41} - \omega_{41} = a\omega_1 \quad \omega_{20} - \omega_{20} = -a\omega_1. \\ \Omega_{31} - \omega_{31} = b\omega_1 \quad \Omega_{42} - \omega_{42} = c\omega_1 + a\omega_2. \\ \Omega_{10} - \omega_{10} = (b + c)\omega_1 - a\omega_2 \quad \Omega_{32} - \omega_{32} = f\omega_1 - b\omega_2 \end{cases}$$

dans lequel nous pourrons réduire a et b à 0 à l'aide des indéterminées $E_{40} - e_{40}$ et $E_{30} - e_{30}$. Nous supposerons s rapportée à un repère du 3ᵉ ordre c'est-à-dire les équations (1) entre les ω et de plus $\omega_{41} = 0$. On obtient alors par dérivation extérieure de (18) (après réduction).

$$
(19) \quad \begin{cases} [(\Omega_{40} - \omega_{40})\omega_1 = 0 \qquad [(\Omega_{30} - \omega_{30})\ \omega_1] = 0. \\ [\omega_1(dc + 2c(\omega_{00} - \omega_{11}))] + [(\Omega_{40} - \omega_{40})\ \omega_2] = 0. \\ [\omega_1(dc + 2c(\omega_{00} - \omega_{11}))] + [(\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] = 0. \\ [\omega_1(df + f(\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33}) - 2c\omega_{12})] + [(\Omega_{30} - \omega_{30})\omega_2] = 0. \end{cases}
$$

qui donne par résolution :

$$
(20) \quad \begin{cases} \Omega_{40} - \omega_{40} = 0 \qquad \Omega_{30} - \omega_{30} = \alpha\omega_1. \\ dc + 2c(\omega_{00} - \omega_{11}) = \beta\omega_1 \\ df + f(\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{33}) - 2c\omega_{12} = \gamma\omega_1 - \alpha\omega_2. \end{cases}
$$

En remarquant que s est rapportée à un repère du troisième ordre on a $\omega_{20} = b\omega_1$; la dérivation de la première équation (20) ne donne donc rien. On a alors un système en involution dont la solution dépend *au plus de trois fonctions arbitraires d'un argument. C'est le degré de généralité des surfaces* S *qui peuvent correspondre à une* s *donnée dans une* C_{23}. *Ce résultat ne dépend pas de la classe à laquelle appartient la surface* s *dont on est parti :* les surfaces S sont toujours de la même classe que s (elles peuvent ne pas être de la même sous-classe de a). *Si l'on prend deux surfaces quelconques de la classe* c *la* C_{23} *que l'on peut établir entre elles ne dépend que de constantes arbitraires.* C_{24} ne peut exister sans entraîner l'identité des deux surfaces.

CHAPITRE IV

Les surfaces les plus générales.

Etude géométrique.

23. C. Segre [1] a montré qu'une surface admet en général deux familles de courbes caractéristiques qui constituent le seul réseau qu'elle contient. Nous n'étudierons dans ce chapitre que les surfaces S pour lesquelles les deux familles de caractéristiques sont distinctes. Les tangentes à une famille de ces courbes engendrent les hypersurfaces les plus générales parmi celles dont l'hyperplan tangent dépend de 2 paramètres. On peut encore dire que ces droites déterminent une congruence qui peut être décomposée de deux manières différentes en une simple infinité de surfaces développables [2].

Nous désignerons par D_1 la congruence formée par la première famille de tangentes caractéristiques de S. D_1 admettra comme focales S et une autre surface S_1. D_2 sera formée par la deuxième famille de tangentes caractéristiques de S et aura pour focales S et S_2. Nous remarquerons que les deux familles de développables de la congruence D_2 par exemple découpent sur chaque focale de D_2 le réseau unique que porte cette surface. La congruence D_2 permet ainsi de passer du réseau de S au réseau tracé sur S_2 c'est-à-dire définit une transformation de Laplace qui pourra en général se prolonger dans les deux sens et donner une suite de Laplace de réseaux et de congruences.

Le repère mobile attaché à S.

Nous attachons en chaque point de S un système de référence caractérisé par :

---

(1) *Atti della R. Accademia. Torino* : 1907.

(2) M. Lalan. *Thèse (loc. cit.).*

$$(1)\left\{\begin{array}{cccc} & \omega_3 = \omega_4 = 0 & & \\ \omega_{13} = \omega_1 & \omega_{23} = 0 & \omega_{14} = 0 & \omega_{24} = \omega_2 \end{array}\right.$$

Les deux formes asymptotiques sont alors réduites à

$$F_3 = \omega_1^2 \qquad F_4 = \omega_2^2.$$

La première famille de caractéristiques est définie par $\omega_2 = 0$ et la deuxième famille par $\omega_1 = 0$.

Nous effectuerons une première particularisation du système de référence qui laissera encore indéterminés : e_{40}, e_{30}, e_{31}, e_{42}, e_{11}, e_{22}, et qui entraînera :

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = \alpha\omega_1 & \omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22} = \beta\omega_1 \\ \omega_{21} = 0 & \omega_{12} = 0 \\ \omega_{43} = a\omega_2 & \omega_{34} = b\omega_1 \end{array}\right.$$

Une particularisation plus complète permettra en annulant e_{31} et e_{42} de réduire α et β à 0. Et nous pouvons encore grâce à l'indétermination qui subsiste sur e_{11} et e_{22} réduire a et b à l'unité dans le cas général ou a 0 dans des cas particuliers. Les surfaces les plus générales seront données par le système obtenu en joignant aux équations (1) les équations (2) dans lesquelles on fait $\alpha = \beta = 0$ et $a = b = 1$. On vérifie que ce système est en involution et que sa solution générale dépend bien de deux fonctions arbitraires de deux arguments.

Les surfaces qui ont une famille de caractéristiques planes.

24. Un premier cas particulier se présente lorsque a peut être réduit non pas à l'unité mais à 0. Nous devons maintenant remarquer qu'avec le système de référence choisi sur chaque tangente caractéristique de S : AA_2 par exemple les points focaux sont précisément A et A_2. Le point A_2 décrit la focale S_2 ; de même A_1 décrit S_1.

L'hyperplan osculateur à la courbe $\omega_1 = 0$ de S_1 est déterminé par les points A_1, dA_1, d^2A_1, d^3A_1. On voit que c'est l'hyperplan $A_1AA_2A_4$ et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il reste fixe lorsque A_1 se déplace sur la courbe $\omega_1 = 0$ s'obtient en écrivant qu'il contient encore dA_4 ce qui entraîne en tenant compte de (2) $\omega_{43} = 0$ c'est-à-dire $a = 0$. Le cas particulier que nous étudions est donc caractérisé géométriquement par la propriété pour les courbes $\omega_1 = 0$ de S_1 d'être hyperplanes.

Si nous cherchons à exprimer que les courbes $\omega_1 = 0$ de S sont planes nous écrirons que le plan osculateur de l'une d'elles A, dA, d^2A qui est le plan AA_2A_4 est fixe ce qui aura lieu aux conditions $\omega_{41} = \lambda\omega_1$, $\omega_{43} = 0$. Ce qui montre que les courbes $\omega_1 = 0$ de S ne peuvent être planes que dans le cas étudié où les courbes $\omega_1 = 0$ de S_1 sont hyperplanes. Réciproquement, si $a = 0$ dans les équations (2) on en déduit par dérivation extérieure la condition $\omega_{41} = \lambda\omega_1$ qui permet d'affirmer que les courbes $\omega_1 = 0$ de S sont planes. *En résumé lorsque* a *se réduit à* 0 *les surfaces* S *ont leur famille de caractéristiques* $\omega_1 = 0$ *formée de courbes planes. Les courbes* $\omega_1 = 0$ *de* S_1 *sont alors hyperplanes et c'est le seul cas où cette dernière propriété peut avoir lieu.*

On pourra encore particulariser le système de référence en se servant de l'indéterminée e_{40} et réduire λ à 0 ce qui revient à prendre A_4 sur la tangente en A_2 à la courbe $\omega_1 = 0$ de S_2.

Les surfaces à une famille de caractéristiques planes seront données par le système formé par les équations :

$$(1) \quad (2) \quad \text{avec} \quad \sigma = \beta = a = 0 \quad \text{et} \quad b = 1$$

auxquelles on joindra $\omega_{41} = 0$.

On obtient par dérivation extérieure.

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 3[\omega_1(\omega_{10} - \omega_{31})] + [\omega_2\omega_{20}] = 0 \\ 3[\omega_2(\omega_{20} - \omega_{42})] + [\omega_1\omega_{10}] = 0 \\ [\omega_{20}\omega_1] = 0 \qquad [\omega_{40}\omega_1] = 0 \\ [\omega_{10}\omega_2] + [\omega_1\omega_{32}] = 0 \\ [\omega_{32}\omega_2] + [\omega_1(\omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{33})] = 0 \end{array} \right.$$

qui montrent que le système est en involution et que sa solution générale dépend au plus d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Les hypersurfaces H à une focale dégénérée.

La transformée par dualité d'une surface S quelconque est une hypersurface H dont l'hyperplan tangent dépend de deux paramètres (elle appartient à la même famille d'hypersurfaces que D_1 et D_2). Une développable de la congruence H est la transformée des ∞^1 plans tangents à S le long d'une courbe caractéristique. Dans le cas qui vient d'être étudié où les courbes $\omega_1 = 0$ de S_1 sont hyperplanes les plans tangents à S le long d'une courbe $\omega_1 = 0$ sont contenus dans un même hyperplan (ce sont en effet les plans osculateurs à la courbe $\omega_1 = 0$ correspondante de S_1). La propriété corrélative de celle-là est la suivante : la développable $\omega_1 = 0$ de H sera engendrée par des droites concourantes, ce sera un cône. Une des focales de H cessera d'être une surface mais sera dégénérée en une courbe. Ces hypersurfaces H à une focale dégénérée correspondent par dualité aux surfaces S qui ont une famille de caractéristiques planes ; elle sont le même degré de généralité ; elles dépendent encore d'une fonction arbitraire de deux arguments.

La transformée de Laplace S_2 dans le cas où les courbes $\omega_1 = 0$ de S sont planes.

25. Nous allons maintenant en supposant les courbes $\omega_1 = 0$ de S planes étudier la surface S_2 et la congruence D_2. Cette dernière admet une famille de développables qui se réduisent à des plans. Ces plans dépendent d'un paramètre. Ils envelopperont en général une surface développable qui sera précisément S_2 et sur laquelle on aura les génératrices en prenant la famille de courbes définie par $\omega_1 = 0$. Avec les particularisations effectuées ces génératrices ne seront pas autre chose que les droites A_2A_4. Réciproquement S_2 ne peut être développable que si elle admet seulement ∞^1 plans tangents et il est alors nécessaire que les courbes $\omega_1 = 0$ de S soient planes. Remarquons encore que les plans de ces courbes engendrent une hypersurface développable dans laquelle C_2 est contenue toute entière.

Il pourra se faire que la focale développable S_2 se réduise à un cône. Les génératrices A_2A_4 devront alors passer par un point fixe. Nous partirons ici du système (1) et (2) avec $a = 0$ $b = 1$ et nous supposerons effectuée la particularisation qui donne $\omega_{41} = 0$.

Par dérivation extérieure on a :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\omega_1(d\alpha + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) + 3(\omega_{10} - \omega_{31})] + [\omega_2\omega_{20}] = 0 \\ [\omega_2(d\beta + \beta(\omega_{00} - \omega_{22}) + 3(\omega_{20} - \omega_{32})] + [\omega_1\omega_{10}] = 0 \\ [\omega_{20}\omega_1] = 0 \qquad [\omega_{40}\omega_1] = 0 \\ [\omega_{10}\omega_2] + [\omega_1\omega_{32}] = 0 \\ [\omega_{32}\omega_2] + [\omega_1(\omega_{00} + \omega_{44} + \omega_{11} - \omega_{33})] = 0. \end{array} \right.$$

Si nous posons maintenant $\omega_{40} = u\omega_1$ il est facile de montrer qu'à l'aide de e_{42} qui reste indéterminé il est possible de réduire u à 0 ce qui revient à prendre A_4 comme point caractéristique de A_2A_4. Pour que cette génératrice passe par un point fixe il est alors nécessaire et suffisant que A_4 soit fixe ce que l'on exprimera en joignant aux conditions précédentes $\omega_{42} = 0$. Les équations obtenues en annulant les covariants bilinéaires de ω_{40} et de ω_{42} sont vérifiées d'elles-mêmes. Il suffira de faire $\omega_{40} = \omega_{42} = 0$ dans le système (4). On voit qu'il est en involution et que sa solution générale dépend encore d'une fonction de deux arguments. Dans ce cas la congruence D_2 est contenue toute entière dans un hypercône.

La focale S_2 pourra cesser d'être une surface développable pour dégénérer en une courbe si $\omega_{20} = \lambda\omega_2$. Nous supposerons le système de référence attaché à S choisi de telle sorte que l'on ait le système (4) avec de plus $\omega_{40} = 0$. Nous devrons alors avoir $\omega_{20} = 0$ et l'on voit immédiatement que S_2 se réduira à la droite A_2A_4. C'est d'ailleurs le seul cas où S_2 peut être dégénérée en une droite. En effet il suffira pour que S_2 soit une courbe que $\omega_{20} = \lambda\omega_2$. Si nous supposons effectuée seulement la première particularisation qui conduit à (1) et à (2) il sera possible avec l'indéterminée e_{40} de réduire λ à 0. Si l'on veut que la courbe en laquelle est dégénérée S_2 soit une droite ce ne pourra être que A_2A_4 et cela aura lieu si l'on a $\omega_{43} = \omega_{41} = \omega_{40} = 0$. Nous retrouvons bien toutes les conditions obtenues qui nous avaient conduits aux équations (4) dans lesquelles on prend $\omega_{40} = \omega_{20} = 0$. Ces deux dernières relations ne donnent par dérivation extérieure que des équations vérifiées d'elles-mêmes et l'on voit que le système que l'on déduit alors de (4) est en involution. La solution générale dépend encore d'une fonction de deux arguments. Dans ce cas la congruence C_2 est contenue toute entière dans une hypersurface développable de la classe de celles dont le plan générateur passe par une droite fixe.

Les cas corrélatifs des précédents.

26. Si nous supposons maintenant les courbes $\omega_1 = 0$ de S hyperplanes il est presque évident que si S_2 est dégénérée ce ne peut être qu'en une courbe plane. Ce cas est corrélatif de celui que nous venons d'étudier où les courbes $\omega_1 = 0$ de S sont planes et S_2 est dégénérée en une droite. En effet les courbes $\omega_1 = 0$ de S étant planes une focale de H est dégénérée ; S_2 étant dégénérée les plans tangents le long d'une courbe $\omega_2 = 0$ de S passent par un même point et par suite les développables $\omega_2 = 0$ de H sont hyperplanes. La propriété de la focale dégénérée de H de se réduire à une courbe plane s'obtiendrait encore en transformant par dualité le résultat précédemment obtenu : la réduction de S_2 à une droite. Nous allons montrer que réciproquement S_2 peut être dégénérée en une courbe plane seulement si comme nous l'avons supposé les courbes $\omega_1 = 0$ de S sont hyperplanes. Pour cela nous considérerons une hypersurface H qui aura une focale f_1 dégénérée. La transformée par dualité sera une surface à courbes $\omega_1 = 0$ planes. Si f_1 est une courbe plane les hyperplans qui contiennent les courbes $\omega_1 = 0$ de S_1 enveloppent une droite. Les plans caractéristiques de ces hyperplans contiennent les courbes $\omega_1 = 0$ de S. Ces plans devront donc passer par une droite fixe, la congruence D_2 devra être contenue dans une hypersurface développable dont les plans générateurs passent par une droite fixe ce qui ne pourra avoir lieu que si S_2 est dégénérée en une droite. Mais alors les développables $\omega_2 = 0$ de H sont hyperplanes et il en est de même pour les courbes $\omega_2 = 0$ de la deuxième focale f_2 de cette congruence, ce qui démontre la réciproque énoncée.

Le raisonnement que nous venons de faire va nous permettre de transformer dualistiquement une surface S à courbes $\omega_1 = 0$ planes pour laquelle S_2 se réduit à un cône Dans ce cas les plans des courbes $\omega_1 = 0$ passent par un point fixe. Mais ce sont les plans caractéristiques des hyperplans qui contiennent les plans tangents à S le long de $\omega_1 = 0$. Ces hyperplans passent donc par un point fixe. La transformée de S sera une hypersurface H dont la focale dégénérée f_1 sera hyperplane.

Comment une suite de Laplace peut se terminer d'un côté.

27. Nous allons pouvoir le déduire des résultats qui précèdent.

En partant d'une surface S à deux familles de caractéristiques gauches la suite de Laplace purra se terminer de l'une des manières suivantes :

a) La première transformée de S dégénère en une courbe gauche.

b) La première transformée de S dégénère en une courbe hyperplane.

En partant d'une surface S qui admet une famille de caractéristiques hyperplanes et en prolongeant la suite du côté de ces caractéristiques nous aurons les cas suivants :

c) La première transformée de S est dégénérée c'est alors une courbe plane.

Si cela n'a pas lieu cette première transformée a une famille de caractéristiques planes et nous distinguerons :

d) La deuxième transformée de S est une surface développable à arête de rebroussement.

e) Cette deuxième transformée est un cône.

f) Cette deuxième transformée est dégénérée en une droite.

Nous avons montré que ces cas se correspondent deux à deux par dualité

a) à *d*)
b) à *e*)
c) à *f*)

De plus l'étude des degrés de généralité qui a été faite pour certaines classes de surfaces nous permet d'énoncer : le degré de généralité de chaque surface et de chaque congruence de la suite de Laplace la plus générale qui se termine d'un côté est le même quelle que soit la manière dont la suite se termine. Chacune de ces variétés dépend au plus d'une fonction arbitraire de deux arguments. Remarquons que l'on peut trouver au voisinage de la terminaison des variétés (par ex. des surfaces développables) dont le degré de généralité est sûrement inférieur à celui de la suite. Dans les résultats très généraux qu'a obtenus M. Tzitzeïca [1] sur la terminaison des suites de Laplace dans un espace projectif quelconque les cas (*a*) (*b*) (*c*) (*f*) sont dits de Laplace, le cas (*d*) de M. Goursat et (*e*) le cas mixte.

Les surfaces qui ont toutes leurs caractéristiques hyperplanes.

28. Nous avons rencontré différentes classes de surfaces qui étaient caractérisées par des propriétés de leurs courbes caractéristiques ou de leurs transformées de Laplace. Pour continuer cette étude nous chercherons d'abord toutes les surfaces pour lesquelles les deux familles de caractéristiques sont hyperplanes. Ce sont les transformées dualistiques des congruences H qui ont leurs focales non dégénérées mais qui prolongées donnent immédiatement de chaque côté une focale dégénérée.

Considérons une congruence H dualistique d'une surface S rapportée à un

(1) *Géométrie différentielle projective des reseaux*, Paris, Gauthier-Villars, 1924

système de référence défini par (1) et (2). On pourra conserver ces relations en considérant H comme une congruence de foyers A_3 et A_4. A_3A_1 étant la deuxième tangente (à $\omega_2 = 0$) caractéristique sur la focale f_1 lieu de A_3 et A_4A_2 la deuxième tangente (à $\omega_1 = 0$) caractéristique sur f_2 lieu de A_4. Nous remarquons qu'il est possible en se servant de e_{42} et de e_{30} qui sont indéterminés de réduire ω_{32} à 0 ce qui revient à prendre A_2 comme point caractéristique des ∞^1 tangentes A_4 A_2 en tous les points d'une courbe $\omega_2 = 0$ de f_2. La transformée de Laplace de f_2 se réduira à une courbe si A_2 est fixe pour $\omega_2 = 0$ c'est-à-dire si l'on a $\omega_{42} = \lambda\omega_2$. De même la transformée de Laplace de f_1 (autre que f_2) sera dégénérée à la seule condition $\omega_{31} = \mu\omega_1$ (si l'on a d'abord réduit ω_{41} à 0). Nous partirons du système (2) où nous prendrons pour simplifier $a = b = 1$ et nous lui ajouterons :

$$\omega_{32} = 0 \qquad \omega_{41} = 0 \qquad \omega_{42} = \lambda\omega_1 \qquad \omega_{31} = \mu\omega_1$$

Nous obtiendrons par dérivation extérieure :

$$(3) \quad \begin{cases} [\omega_1(d\alpha + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) + 3(\omega_{10} - \omega_{31})] + [\omega_2\omega_{20}] + [\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\omega_2(d\beta + \beta(\omega_{00} - \omega_{22}) + 3(\omega_{20} - \omega_{42})] + [\omega_1\omega_{10}] + [\omega_2\omega_1] = 0 \\ [\omega_2(\omega_{00} + \omega_{33} - \omega_{22} - \omega_{44})] = 0 \qquad [\omega_{20}\omega_1] = 0 \\ [\omega_1(\omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{33})] = 0 \qquad [\omega_{10}\omega_2] = 0 \\ [\omega_{30}\omega_2] + \lambda[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\omega_{40}\omega_1] + \mu[\omega_2\omega_1] = 0 \\ [\omega_2(d\lambda + \lambda(\omega_{00} - \omega_{44}) - \omega_{40})] = 0 \\ [\omega_1(d\mu + \mu(\omega_{00} - \omega_{33}) - \omega_{30})] = 0 \end{cases}$$

La solution générale de ce système dépend de 10 fonctions arbitraires d'un argument. C'est le degré de généralité des congruences H considérées et aussi des surfaces S qui ont leurs deux familles de caractéristiques hyperplanes.

Les surfaces dont les deux transformées de Laplace sont dégénérées.

29. Les surfaces ayant une famille de caractéristiques planes et l'autre famille formée de courbes hyperplanes ne pourront être rencontrées que comme focales d'une congruence à deux familles de développables hyperplanes. Les deux focales d'une telle congruence appartenant à la fois à la classe de surfaces que l'on vient d'indiquer. Cette congruence sera la trans-

formée par dualité d'une surface dont les deux transformées de Laplace sont dégénérées (surface enveloppe de deux familles de cônes). Cette surface s'obtient en faisant dans les systèmes (1) et (2) : $\omega_{10} = 0 \quad \omega_{20} = 0$.

Ces deux dernières équations donnent : $[\omega_1\omega_{30}] = 0, \quad [\omega_2\omega_{40}] = 0$ et les surfaces considérées dépendent au plus de 8 fonctions arbitraires d'un argument [1].

Les raisonnements que nous venons de faire permettraient la résolution des problèmes qui consistent à chercher les surfaces dont les transformées de Laplace, des deux côtés, présentent à un certain rang une des particularités que nous avons étudiées. Nous nous bornerons à remarquer que les surfaces S à caractéristiques $\omega_1 = 0$ planes et à transformée S_1 dégénérée s'obtiennent en faisant dans (2) : $a = 0, \quad b = 1, \quad \alpha = \beta = 0$ et $\omega_{41} = \omega_{10} = 0$. Elles dépendent de 7 fonctions arbitraires d'un argument et leurs transformées dualistiques H sont des congruences de la même nature que D_1 qui joint S à S_1.

Les surfaces qui ont toutes leurs caractéristiques planes.

30. Il nous reste maintenant à étudier les surfaces S qui ont leurs deux familles de caractéristiques planes. Ce sont les dualistiques des congruences H qui ont leurs deux focales dégénérées. Le degré de généralité de ces variétés est celui de l'ensemble de deux courbes gauches c'est-à-dire 6 fonctions arbitraires d'un argument. Elles s'obtiendront en prenant dans (2) . $\alpha = \beta = a = b = 0$ et en joignant aux équations ainsi obtenues $\omega_{41} = \omega_{32} = 0$. Il sera maintenant facile d'obtenir les congruences à deux focales dégénérées pour lesquelles une de ces focales ou les deux sont des courbes planes ou hyperplanes. Le degré de généralité de ces congruences pourra être prévu en remarquant que ce sera celui de l'ensemble des courbes focales et de plus :

qu'une courbe gauche dépend de 3 fonctions de 1 argument ;

qu'une courbe hyperplane dépend de 2 fonctions de 1 argument ;

qu'une courbe plane dépend de 1 fonction de 1 argument.

Si les deux focales de H sont des courbes gauches les deux transformées de Laplace S_1 et S_2 de la surface S dualistique de H sont des développables à arête de rebroussement. Lorsqu'une focale de H sera hyperplane une des

---

[1] Ce résultat est indiqué dans la thèse de M. Lalan.

transformées de S se réduira à un cône; il faudra pour les obtenir ajouter au système que l'on vient d'indiquer $\omega_{40} = \omega_{42} = 0$.

Pour qu'une focale de H soit plane il sera nécessaire et suffisant qu'une des transformées de S se réduise à une droite. Le système qui donne ces surfaces s'obtient en prenant dans (2) : $a = b = \alpha = \beta = 0$ et en ajoutant $\omega_{20} = 0$ ce qui entraîne d'ailleurs immédiatement $\omega_{40} = 0$. Les deux focales de H seront planes lorsque les deux transformées de S seront des droites ; il faudra ajouter aux conditions précédentes : $\omega_{10} = \omega_{30} = 0$ et l'on obtient alors par dérivation extérieure les deux seules relations : $[\omega_1\omega_{31}] = 0$, $[\omega_2\omega_{42}] = 0$.

L'hypersurface H_0 qui a pour focales deux coniques.

31. Dans ce dernier cas où les deux focales de H sont planes on peut remarquer que lorsque ces courbes se réduiront à des coniques leur ensemble sera complètement déterminé c'est-à-dire ne dépendra que de constantes qui fixeront sa position dans l'espace projectif. Il en sera donc de même pour la congruence H_0 admettant pour focales deux coniques. Nous considérons une congruence rapportée à un repère du troisième ordre avec [1] :

$$\begin{array}{llll} \omega_4 = 0 & \omega_{14} = \omega_2 & \omega_{24} = \omega_1 & \omega_{34} = 0 \\ \omega_{22} + \omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{44} = 0 & & \omega_{12} = \omega_3 & \omega_{21} = \omega_3 \\ \omega_{32} = 2\omega_1 & & \omega_{31} = 2\omega_2 & \end{array}$$

La congruence H_0 sera donnée par :

$$\omega_{30} = 4\omega_3 \qquad \omega_{11} = \omega_{22} \qquad \omega_{00} = \omega_{33}$$
$$\omega_{40} = \omega_{41} = \omega_{42} = \omega_{43} = \omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{10} = \omega_{20} = 0$$

système qui est complètement intégrable et dont la solution ne dépend bien que de constantes arbitraires.

Les formes ω_1, ω_2, ω_3, ω_{11} restent alors seules indépendantes. La congruence H_0 admet un sous-groupe, à 4 paramètres, du groupe projectif qui la laisse invariante. En annulant ω_{11} et en posant :

$$\omega_1 = du_1 - u_2du_3$$
$$\omega_2 = du_2 - u_1du_3$$
$$\omega_3 = du_3$$

(1) Dans le chapitre VI nous reprendrons ce système de référence attaché en chaque point d'une hypersurface et nous donnerons sa signification géométrique.

les formules de Frenet s'intègrent directement et donnent comme équation finie : $2x_1(1 - x_4^2) = x_3^2 - x_2^2 + (x^2 + x_3^2)x_4$

Nous ferons encore le changement de variables :

$$2x_1 = X_1 \qquad x_4 = -2X_4 \qquad x_3 - x_2 = X_2 \qquad x_3 + x_2 = X_3$$

et l'équation de H_0 s'écrira : $(1 - 4X_4^2)X_1 = X_2X_3 - (X_3^2 + X_2^2)X_4$.

Cette hypersurface est coupée par son hyperplan tangent $X_1 = 0$ suivant une surface $X_4 = \frac{X_2X_3}{X_3^2 + X_2^2}$ qui est un conoïde de Plücker. Elle peut être considérée comme engendrée par le déplacement du conoïde de Plücker de l'espace projectif. Ce qui permet de définir ce conoïde comme la section de H_0 par un hyperplan tangent quelconque. D'une manière plus géométrique si nous considérons deux coniques f_1 et f_2 une génératrice quelconque B_1B_2 qui les joint soit B_1T_1 la tangente à f_1 en B_1 et B_2T_2 la tangente à f_2 en B_2 nous obtiendrons le conoïde de Plücker en prenant toutes les droites s'appuyant sur f_1 et f_2 et contenues dans l'hyperplan $T_1B_1B_2T_2$.

La surface S_0

32. La transformée dualistique de cette congruence H_0 sera une surface S_0 qui admettra rapportée à un repère du troisième ordre pour formules de Frenet :

$$\begin{aligned}
dA &= \omega_{00}A + \omega_1A_1 + \omega_2A_2 \\
dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_1A_3 \\
dA_2 &= \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4 \\
dA_3 &= \omega_{33}A_3 \\
dA_4 &= \omega_{44}A_4
\end{aligned}$$

les ω_{ii} étant encore liés par les relations :

$$\begin{aligned}
\omega_{00} &= 3(\omega_{11} + \omega_{22}) \\
\omega_{33} &= -\omega_{11} - 3\omega_{22} \\
\omega_{44} &= -3\omega_{11} - \omega_{22}
\end{aligned}$$

Les formes indépendantes sont ω_1, ω_2, ω_{11}, ω_{22}. S_0 admet un groupe à 4 paramètres qui la laisse invariante. En posant $\omega_1 = du_1$, $\omega_2 = du_2$ et en annulant ω_{11} et ω_{22} on trouve comme équations finies $x_3 = \frac{x_1^2}{2} \qquad x_4 = \frac{x_2^2}{2}$.

Cette surface S_0 admet deux familles de caractéristiques qui sont des coniques, ses deux transformées de Laplace sont deux droites (A_2A_4 et A_1A_3) On obtient facilement les équations finies de son groupe :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_0 + a_1 x_1 \\
X_2 &= \alpha_0 + \alpha_2 x_2 \\
X_3 &= \frac{a_0^2}{2} + a_0 a_1 x_1 + a_1^2 x_3 \\
X_4 &= \frac{\alpha_0^2}{2} + \alpha_0 \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_4
\end{aligned}
$$

où a_0, a_1, α_0, α_2, sont les 4 paramètres.

Les correspondances C_{hk}.

33. C_{13}. Considérons une surface *s* dont aucune des familles de caractéristiques n'est composée de courbes planes. Rapportée à un repère du troisième ordre elle est définie par :

$$
(6) \quad \left\{
\begin{array}{llll}
\omega_4 = \omega_3 = 0 & & & \\
\omega_{13} = \omega_1 & \omega_{23} = 0 & \omega_{14} = 0 & \omega_{24} = \omega_2 \\
\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = 0 & & \omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22} = 0 & \\
\omega_{21} = 0 & \omega_{12} = 0 & \omega_{43} = \omega_2 & \omega_{34} = \omega_1
\end{array}
\right.
$$

Nous obtiendrons toutes les surfaces S qui correspondent à une *s* donnée avec C_{13} par le système

$$
(7) \quad \left\{
\begin{array}{llll}
\Omega_3 = 0 & \Omega_4 = 0 & & \\
\Omega_{13} = \omega_1 & \Omega_{23} = 0 & \Omega_{14} = 0 & \Omega_{24} = \omega_2 \\
\Omega_{00} + \Omega_{33} - 2\Omega_{11} = 0 & & \Omega_{00} + \Omega_{44} - 2\Omega_{22} = 0 & \\
\Omega_{21} = 0 & \Omega_{12} = 0 & \Omega_{43} = \omega_2 & \Omega_{34} = \omega_1 \\
\Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 & &
\end{array}
\right.
$$

Il est en involution et il existe quelle que soit la surface s *dont on part une famille de surfaces* S *qui lui correspondent et qui dépendent de 8 fonc-*

tions d'un argument. Si l'on se donne *d'une manière convenable* s et S la C_{13} que l'on peut établir entre elles ne dépend que *de deux constantes arbitraires*.

Prenons maintenant une surface s avec une famille de caractéristiques planes. Elle sera définie par le système (6) dans lequel on remplace $\omega_{43} = \omega_2$ par $\omega_{43} = 0$. Les surfaces S qui ont avec s une C_{13} appartiennent à la même catégorie (elles ont aussi une famille de caractéristiques planes) *et dépendent encore de huit fonctions d'un argument. La correspondance* que l'on peut établir entre deux surfaces *convenablement choisies* dépend de *trois constantes arbitraires*.

Dans le cas des surfaces qui ont toutes leurs caractéristiques planes on montre qu'il est possible d'établir une C_{13} *entre deux quelconques* d'entre elles et que cette correspondance dépend de *deux fonctions arbitraires* d'un argument. On pourrait encore définir les surfaces à caractéristiques planes comme celles qui peuvent avoir avec S_0 [32] une C_{13}.

34. C_{14}. Nous commencerons par supposer que s est une surface à deux familles de caractéristiques planes. Elle sera définie par les équations (1) et (2) avec $\alpha = \beta = a = b = 0$ et les suivantes que l'on obtient après dérivation extérieure et particularisation nouvelle du système de référence :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_{41} = 0 & \omega_{32} = 0 \\ \omega_{20} = d\omega_1 & \Omega_{10} = d'\omega_2 \\ \omega_{31} = e\omega_1 + \left(d' - \frac{d}{3}\right)\omega_2 & \omega_{42} = \left(d - \frac{d'}{3}\right)\omega_1 + e'\omega_2 \end{array} \right.$$

Dans ce système il sera encore possible de réduire d et d' à 1 ou à 0.

Les Ω des S qui peuvent correspondre à s avec C_{14} sont donnés :

1° par les équations (1) et (2) telles qu'elles existent entre les ω mais où on remplace les ω par les Ω.

2° par :

$$\begin{array}{llll} \Omega_{10} = \omega_{10} & \Omega_{20} = \omega_{20} & \Omega_{32} = \omega_{32} & \Omega_{41} = \omega_{41} \\ \Omega_{31} = \omega_{31} & \Omega_{42} = \omega_{42} & \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 \end{array}$$

Le système formé par toutes ces équations donne par dérivation extérieure.

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}
[\omega_{10}(\Omega_{00}-\Omega_{11}-\omega_{00}+\omega_{11})]+[\omega_1(\Omega_{30}-\omega_{30})]=0\\
[(\Omega_{30}-\omega_{30})\omega_1]+[\omega_{31}(\Omega_{11}-\Omega_{33}-\omega_{11}+\omega_{33})]=0\\
[(\Omega_{30}-\omega_{30})\omega_2]+[\omega_{32}(\Omega_{22}-\Omega_{33}-\omega_{22}+\omega_{33})]=0\\
[\omega_{20}(\Omega_{00}-\Omega_{22}-\omega_{00}+\omega_{22})]+[\omega_2(\Omega_{40}-\omega_{40})]=0\\
[(\Omega_{40}-\omega_{40})\omega_2]+[\omega_{42}(\Omega_{22}-\Omega_{44}-\omega_{22}+\omega_{44})]=0\\
[(\Omega_{40}-\omega_{40})\omega_1]+[\omega_{41}(\Omega_{11}-\Omega_{44}-\omega_{11}+\omega_{44})]=0\\
[\omega_1(\Omega_{11}-\Omega_{00}-\omega_{11}+\omega_{00})]=0\\
[\omega_2(\Omega_{22}-\Omega_{00}-\omega_{22}+\omega_{00})]=0
\end{array}\right.$$

En comparant entre elles la première et la deuxième des équations de ce système on trouve pour qu'il puisse être vérifié les conditions

$$(10)\qquad \lambda\left(2d'-\frac{d}{3}\right)=0\qquad \mu\left(2d-\frac{d'}{3}\right)=0$$

en ayant posé pour résoudre les deux dernières équations (9)

$$(11)\qquad \Omega_{11}-\omega_{11}=\Omega_{00}-\omega_{00}+\lambda\,\omega_1,\quad \Omega_{22}-\omega_{22}=\Omega_{00}-\omega_{00}+\mu\omega_2$$

Supposons d'abord $d=d'=0$.

On tire de (9) et de (1) $\Omega_{30}=\omega_{30}$ $\Omega_{40}=\omega_{40}$ qui donnent $\mu[\omega_{40}\omega_2]=0$, $\lambda[\omega_{30}\omega_1]=0$. En comparant avec les équations dérivées des deux premières équations (8) on arrive à $\omega_{30}=\omega_{40}=0$. Enfin en dérivant (11)

$$[\omega_1(d\lambda+\lambda(\omega_{00}-\omega_{11}))]=0,\ [\omega_2(d\mu+\mu(\omega_{00}-\omega_{22}))]=0$$

On peut conclure que si l'on est parti d'une surface s définie par rapport à un repère du troisième ordre et telle que l'on ait :

$$\omega_{43}=\omega_{34}=\omega_{41}=\omega_{32}=\omega_{20}=\omega_{10}=\omega_{30}=\omega_{40}=0$$

il existe une famille de surfaces S qui lui correspondent avec C_{14}, dépendant de deux fonctions d'un argument. Les surfaces s que l'on vient de considérer ont déjà été rencontrées dans le paragraphe précédent [n° 30] ; ce sont celles qui ont leurs deux transformées de Laplace dégénérées en droites et l'on a trouvé leur degré de généralité : deux fonctions arbitraires d'un argument. Nous énoncerons : *On peut établir une* C_{14} *entre deux surfaces quelconques parmi celles qui ont leurs deux transformées de Laplace dégénérées en droites. Cette correspondance dépend en général de deux constantes arbi-*

traires. Elle peut s'interpréter géométriquement par le raisonnement qui suit :

Considérons l'hyperplan A_1, A_3, A_2, A_4 qui contient les deux droites focales, supposons-le rejeté à l'infini. La première caractéristique dans le plan A, A_2, A_4 a une équation de la forme $x_4 = f(x_2)$ et la deuxième dans le plan A, A_1, A_3 $x_3 = g(x_1)$. Ces deux équations définissent la surface qui est de translation. Les caractéristiques se déduiront de l'une d'elles par des translations. Si je considère maintenant la surface s rapportée à son repère en géométrie affine (affinités générales) $\omega_1 = d\sigma_1$ est l'élément d'arc affine pour la première caractéristique et $\omega_2 = d\sigma_2$ pour la deuxième.

La correspondance sera définie par : $d\sigma_1 = d\Sigma_1$, $d\sigma_2 = d\Sigma_2$ c'est-à-dire par : $\sigma_1 = \Sigma_1 + C_1$, $\sigma_2 = \Sigma_2 + C_2$, Σ_1 Σ_2 étant les arcs affines des caractéristiques de S, C_1 C_2 étant deux constantes.

Ceci tombe en défaut si *l'une des caractéristiques est une parabole* (par exemple la deuxième). On aura encore : $\sigma_1 = \Sigma_1 + C_1$ à laquelle il faudra joindre $T = f(t)$, t étant un paramètre quelconque qui définit l'origine du repère sur la parabole, T un paramètre analogue sur S. On aura une correspondance ponctuelle arbitraire entre les caractéristiques qui seront des paraboles. Il est facile de vérifier que dans ce cas la C_{14} *dépend d'une fonction d'un argument.*

Toutes les caractéristiques ne peuvent être des paraboles que pour S_0. Cette surface ne peut correspondre avec C_{14} qu'à elle-même. La *correspondance dépendrait de deux fonctions d'un argument.*

Revenons maintenant au système (10) en supposant que d et d' ne se réduisent pas à 0 tous les deux. Comme ils peuvent toujours être ramenés à 0 ou à 1 on aura nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et on montre aisément que l'on ne peut obtenir ainsi aucune surface S distincte de s et lui correspondant avec C_{14}.

Si l'on part d'une surface s qui a une seule famille de caractéristiques planes on aura par exemple $\omega_{34} = \omega_1$, $\omega_{43} = 0$. Dans le système (8) on obtiendra $\omega_{32} = - a'\omega_1$ au lieu de $\omega_{32} = 0$ et une équation de plus $5\omega_{22} = b'\omega_1 + a'\omega_2$. Pour établir C_{14} il faudra une condition supplémentaire $\Omega_{22} = \omega_{22}$ qui entraîne $\lambda = \mu = 0$ et par suite l'identité de s et de S.

Si nous prenons enfin pour s une surface n'ayant aucune famille de caractéristiques planes nous aurons $\Omega_{ii} = \omega_{ii}$ et s et S ne seront pas distinctes.

En résumé les surfaces qui admettent deux droites focales sont les seules pour lesquelles il puisse y avoir une C_{14} — *entre deux surfaces distinctes, à l'exception toutefois de* S_0.

35. C_2. *Deux surfaces sont toujours projectivement applicables du second ordre ; lorsqu'elles sont données la correspondance dépend encore d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

C_{23} entre surfaces n'ayant pas de caractéristiques planes [1].

36. Les surfaces S qui correspondent avec C_{23} à une s donnée s'obtiennent en écrivant :

$$
(12)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\Omega_3 = \omega_3 & \Omega_4 = \omega_4 & & \\
\Omega_{13} = \omega_{13} & \Omega_{23} = \omega_{23} & \Omega_{14} = \omega_{14} & \Omega_{24} = \omega_{24} \\
\multicolumn{4}{l}{\Omega_{00} + \Omega_{33} - 2\Omega_{11} = \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}} \\
\multicolumn{4}{l}{\Omega_{00} + \Omega_{44} - 2\Omega_{22} = \omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22}} \\
\Omega_{21} = \omega_{21} & \Omega_{12} = \omega_{12} & \Omega_{43} = \omega_{43} & \Omega_{34} = \omega_{34} \\
\Omega_{11} = \omega_{11} & \Omega_{22} = \omega_{22} & \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2
\end{array}\right.
$$

système qui conduit en supposant que *s n'a pas de caractéristiques planes* et qu'elle est rapportée à un repère du troisième ordre à :

$$
(13)\quad \left\{\begin{array}{l}
[\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0. \qquad [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0. \\
[(\Omega_{20} - \omega_{20})\omega_1] + [\omega_2(\Omega_{41} - \omega_{41})] = 0. \\
[(\Omega_{10} - \omega_{10})\omega_2] + [\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] = 0. \\
[(\Omega_{41} - \omega_{41})\omega_1] = 0. \qquad [(\Omega_{32} - \omega_{32})\omega_2] = 0. \\
[\omega_1(\Omega_{31} - \omega_{31})] = 0. \qquad [\omega_2(\Omega_{42} - \omega_{42})] = 0.
\end{array}\right.
$$

qui se résout suivant :

$$
(14)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\Omega_{20} - \omega_{20} = a\omega_2 & \Omega_{10} - \omega_{10} = a'\omega_1. \\
\Omega_{41} - \omega_{41} = - a\omega_1 & \Omega_{32} - \omega_{32} = - a'\omega_2. \\
\Omega_{31} - \omega_{31} = c\Omega_1 & \Omega_{42} - \omega_{42} = g\omega_2.
\end{array}\right.
$$

dans lequel on peut encore réduire a et a' à 0.

Cette réduction effectuée on aura par dérivation :

---

(1) Pour les résultats de l'étude des C_{23} entre deux surfaces (quelles que soient les particularités de leurs caractéristiques), voir *Comptes Rendus*, 185, 1925, p. 692.

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} [\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] = 0 & [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0 \\ [(\Omega_{40} - \omega_{40})\omega_1] + c[\omega_2\omega_1] = 0 & [(\Omega_{30} - \omega_{30})\omega_2] + g[\omega_1\omega_2] = 0 \\ [\omega_1(dc + c(\omega_{00} - \omega_{33}))] = 0 & [\omega_2(dg + g(\omega_{00} - \omega_{44})] = 0 \end{array} \right.$$

puis :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_{40} - \omega_{40} = - c\omega_2 & \Omega_{30} - \omega_{30} = - g\omega_1 \\ dg + g(\omega_{00} - \omega_{44}) = f\omega_2 & dc + c(\omega_{00} - \omega_{33}) = e\omega_1 \end{array} \right.$$

Si l'on dérive les équations qui donnent *s rapportée à un repère du 3e ordre* on obtient :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 5\omega_{11} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 & 5\omega_{22} = \beta'\omega_1 + \alpha'\omega_2. \\ \omega_{41} = - \alpha\omega_2 + \gamma\omega_1 & \omega_{32} = - \alpha'\omega_1 + \gamma'\omega_2. \\ \omega_{20} = \delta\omega_1 - \gamma\omega_2 & \omega_{10} = \delta'\omega_2 - \gamma'\omega_1. \\ \omega_{31} = \eta\omega_1 + \left(\delta' - \frac{\delta}{3} + \frac{1}{3}\right)\omega_2, & \omega_{42} = \left(\delta - \frac{\delta'}{3} + \frac{1}{3}\right)\omega_1 + \eta'\omega_2. \end{array} \right.$$

En dérivant les deux premières équations (16) on aboutit, à l'aide de (17), à :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} dg + g(\omega_{00} - \omega_{44}) = (c\delta' - g\alpha' - c)\omega_2. \\ dc + c(\omega_{00} - \omega_{33}) = (g\delta - c\alpha - g)\omega_1. \end{array} \right.$$

Lorsque les équations dérivées de (18) seront vérifiées nous aurons des surfaces correspondant à une s donnée avec C_{23}. *Elles dépendront de deux constantes arbitraires.* Nous pouvons encore chercher le degré de généralité des couples (s, S) de surfaces correspondantes. Nous réunissons (17) et (18), nous obtenons ainsi un système en involution dont la solution dépend de 10 fonctions d'un argument.

En résumé il existe une famille de surfaces s *dépendant de 10 fonctions arbitraires d'un argument entre lesquelles il est possible d'établir une* C_{23}.

Les caractéristiques du système en involution qui définit les couples (s, S) sont les courbes $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, et de plus celles qui sont définies par $\omega_1(\Omega_{31} - \omega_{31}) = \omega_2(\Omega_{42} - \omega_{42})$.

37. Si nous portons notre attention sur le déplacement qui amène S sur s nous pouvons faire les remarques cinématiques suivantes :

1° Dans le déplacement à deux paramètres qui amène à chaque instant

S sur s les vitesses d'entraînement de tous les points du plan tangent à S sont nulles.

2° Si l'on reste sur une caractéristique ($\omega_1 = 0$ par exemple) le déplacement qui amène S sur s n'est plus qu'à un paramètre et dans ce déplacement les vitesses d'entraînement des points du plan osculateur à l'autre caractéristique ($\omega_2 = 0$) sont nulles. En supposant s rapportée à un repère du 3e ordre il est facile de montrer que cette remarque est une conséquence de la précédente.

3° Dans le déplacement à 2 paramètres qui amène S sur s les vitesses d'entraînement de tous les points du plan osculateur à une caractéristique sont situés dans ce plan osculateur (dans le déplacement d'entraînement ce plan glisse sur lui-même).

Ces trois remarques nous conduisent à la *réciproque suivante.*

S'il existe entre deux surfaces s et S une correspondance ponctuelle telle qu'il soit possible par un déplacement à deux paramètres d'amener à chaque instant en coïncidence : 1° un point de S avec son homologue de s ; 2° aux points homologues confondus les plans tangents, les tangentes caractéristiques, les plans osculateurs aux courbes caractéristiques et si de plus ce déplacement possède les propriétés énoncées dans la première et la troisième des remarques précédentes la *correspondance ponctuelle que l'on considère est* C_{23}.

38. Nous nous proposons maintenant de pénétrer plus avant dans l'étude des couples (s S) entre lesquels peut exister une C_{23}. Nous commencerons par donner un exemple simple. Considérons les surfaces définies par (1) (2) (avec $\alpha = \beta = 0 \quad a = b = 1$) et les équations (17) où l'on prend :

$$\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0 \qquad \delta = \delta' = 1$$

et pour γ, γ' des constantes ; elles dépendent de 2 constantes arbitraires. *Entre deux quelconques de ces surfaces il est possible d'établir une* C_{23} (elles forment un couple (s S)). Il suffit d'écrire : $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$.

Cette correspondance dépend de 2 constantes arbitraires. Ces surfaces peuvent encore se définir comme celles qui peuvent avoir une C_{23} avec V_0.

V_0 étant celle qui correspond à $\gamma = \gamma' = 0$.

Cette surface particulière V_0 possède les propriétés remarquables suivantes :

1° La suite de Laplace que l'on peut former en partant de cette surface se ferme après avoir décrit un pentagone.

2° Cette suite de Laplace se transforme en elle-même par dualité.

Nous reprendrons ici l'étude du cas général.

Nous définirons d'abord le repère que nous avons utilisé. A_1 et A_2 sont les transformées de Laplace, $A_1 A_3$ et $A_2 A_4$ les tangentes aux caractéristiques sur ces transformées ; $A A_3 A_4$ est *le plan normal projectif* en appelant ainsi le seul plan, non en incidence avec le plan tangent, qui peut être défini d'une manière intrinsèque en partant des éléments des trois premiers ordres de la surface.

Les équations réduites de la surface rapportée à ce repère s'écrivent avec les notations précédemment définies :

$$x_3 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{6} x_2^3 + \frac{1}{24} (-3\eta x_1^4 + 4\delta x_1^3 x_2 + 4\alpha x_1 x_2^3 + \beta x_2^4).$$
$$x_4 = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{6} x_1^3 + \frac{1}{24} (-3\eta' x_1^4 + 4\delta' x_2^3 x_1 + 4\alpha' x_2 x_1^3 + \beta' x_1^4).$$

De ce qui précède [n. 36] il résulte immédiatement qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une C_{23} entre deux surfaces est que les invariants $\alpha\ \beta\ \delta\quad \alpha'\ \beta'\ \delta'$ soient égaux pour s et S ; *ce qui montre que lorsque la correspondance existe elle est en général bien déterminée* [1].

On peut donner une interprétation géométrique de cette condition nécessaire. Rapportons s et S à un même repère déterminé comme nous l'avons indiqué plus haut, en partant de l'une ou l'autre des surfaces. Soient s_4 et S_4 leurs projections (de sommet A_4) sur l'hyperplan $A A_1 A_2 A_3$, elles se couperont suivant une courbe qui aura un point quadruple avec quatre tangentes confondues suivant $A A_2$. Une propriété analogue s'énoncera si l'on considère les projection s_3 et S_3 sur l'hyperplan $A A_1 A_2 A_4$.

C_{23} entre surfaces ayant une famille de caractéristiques planes.

39. Nous partirons toujours du système (12) mais nous supposerons pour s $\omega_{43} = 0$ au lieu de $\omega_{43} = \omega_2$. On obtient les systèmes (13) et (14) (avec dans ce dernier $a = a' = 0$) mais (15) devient alors :

---

[1] Elle peut dépendre de 2 constantes arbitraires, au plus, dans des cas particuliers.

$$(19)\quad \begin{cases} [\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] = 0. & [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] = 0. \\ [(\Omega_{40} - \omega_{40})\omega_1] = 0. & [(\Omega_{30} - \omega_{30})\omega_2] + g[\omega_1\omega_2] = 0. \\ [\omega_1(dc + c(\omega_{00} - \omega_{33}))] = 0. & [\omega_2(dg + g(\omega_{00} - \omega_{44})] = 0. \end{cases}$$

qui se résout suivant :

$$(20)\quad \begin{cases} \Omega_{40} - \omega_{40} = 0 & \Omega_{30} - \omega_{30} = -g\omega_1. \\ dg + g(\omega_{00} - \omega_{44}) = f\omega_2 & dc + c(\omega_{00} - \omega_{33}) = e\omega_1. \end{cases}$$

La première de ces équations donne par dérivation extérieure :

$$(21)\qquad g[\omega_2\omega_{20}] = 0.$$

I. Nous supposerons d'abord $g = 0$.

On obtient alors $c[\omega_1\omega_{10}] = 0$ et par suite en laissant de côté le cas $c = 0$ qui conduit à l'identité des deux surfaces : $[\omega_1\omega_{10}] = 0$. Comme l'on peut supposer que l'on a réduit dans s, ω_{41} à 0 les surfaces que l'on rencontre ici ont déjà été étudiées [n. 29]; *ce sont celles qui ont leurs caractéristiques* $\omega_1 = 0$ *planes et de plus leurs transformées* s_1 *dégénérées en des courbes.* Elles dépendent de 7 fonctions arbitraires d'un argument. *A chacune d'elles correspond avec* C_{23} *une famille dépendant d'une fonction d'un argument de surfaces* S.

Nous pourrons dans ce cas faire les remarques cinématiques suivantes :

Dans le déplacement à deux paramètres qui amène S sur s :

1° Les vitesses d'entraînement des points du plan tangent à S sont nulles.

2° Les vitesses d'entraînement des points du plan $A\,A_2\,A_4$ — qui contient la caractéristique plane — sont nulles.

3° Le déplacement d'entraînement est une *élation* instantanée de centre le point A_1 qui décrit la focale dégénérée S_1.

4° Les vitesses d'entraînement des points du plan $A\,A_1\,A_3$ osculateur à la caractéristique gauche sont situées dans ce plan.

Nous en déduirons *une condition suffisante* pour qu'une correspondance ponctuelle entre deux surfaces de cette catégorie soit une C_{23}. Elle s'énoncera comme celle qui a été donnée plus haut [n. 37] mais les conditions auxquelles le déplacement doit satisfaire sont ici indiquées par la première et la quatrième des remarques ci-dessus.

II. $g \neq 0$.

On aura d'après (21) $[\omega_2 \omega_{20}] = 0$.

Si l'on réduit encore ω_{44} à 0 on aura de plus : $\omega_{20} = \omega_{40} = 0$.

Ce cas est celui où la transformée de Laplace s_2 *est dégénérée en une droite.* Pour une telle surface le système dérivé de (2) (où l'on prend : $\alpha = \beta = a = 0$ et $b = 1$) s'écrit :

$$(22) \quad \begin{cases} [\omega_1(\omega_{10} - \omega_{31})] = 0 & -3[\omega_2\omega_{42}] + [\omega_1\omega_{10}] = 0 \\ [\omega_{10}\omega_2] + [\omega_1\omega_{32}] = 0 & [\omega_{32}\omega_2] + 5[\omega_1\omega_{22}] = 0 \end{cases}$$

On voit que les couples (s S) de surfaces qui se correspondent sont donnés par le système obtenu en joignant à (1) et (2) les équations (12) et que ce système est en involution. Par dérivation on aboutit en effet en partant de ce système à (22) et au système dérivé de (20). Dans l'ensemble de ces 8 équations figurent 8 expressions de Pfaff nouvelles qui s'expriment à l'aide de 8 paramètres.

Les couples (s S) *dépendent de 8 fonctions d'un argument.*

On montre facilement *que pour une surface* s *convenablement choisie les surfaces* S *correspondantes ne dépendent que d'une constante arbitraire.*

Nous pourrons faire les mêmes remarques cinématiques que dans le cas général (où il n'y a pas de caractéristiques planes) et la *réciproque s'énoncera de même.* Toutefois il sera suffisant que la troisième condition ait lieu pour le déplacement du plan AA_1A_3 osculateur à la caractéristique gauche (elle sera en effet toujours satisfaite pour AA_2A_4 qui contient la caractéristique plane).

C_{23} entre surfaces à caractéristiques toutes planes.

40. On pourra encore écrire (12), (13) et (14). Ce dernier donnera après dérivation et résolution :

$$(23) \quad \begin{cases} \Omega_{30} - \omega_{30} = 0 & \Omega_{40} - \omega_{40} = 0 \\ dc + c(\omega_{00} - \omega_{33}) = e\omega_1 & dg + g(\omega_{00} - \omega_{44}) = f\omega_2 \end{cases}$$

qui conduit à : $g[\omega_2\omega_{20}] = 0 \qquad c[\omega_1\omega_{10}] = 0$.

Nous laisserons de côté le cas : $g = c = 0$ pour lequel les surfaces s et S ne sont pas distinctes et nous étudierons seulement les deux autres cas.

I. $g = 0 \qquad c \neq 0$.

$[\omega_1\omega_{10}] = 0$. *Une des transformées de* s *est dégénérée* (*en une droite*) et (23) *montre alors qu'à toute surface* s *correspondent des surfaces* S *qui dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.*

II. $g \neq 0 \qquad c \neq 0$.

On a : $[\omega_1\omega_{10}] = 0$, $[\omega_2\omega_{20}] = 0$ qui montrent que les deux transformées de Laplace sont pour une de ces surfaces réduites à des droites. *Il est possible d'établir une* C_{23} *entre deux quelconques de ces surfaces* [1]. *Cette correspondance dépend de 4 constantes arbitraires.* Nous allons l'interpréter géométriquement en envoyant comme nous l'avons déjà fait [n. 34] l'hyperplan des deux droites focales à l'infini. On peut alors définir dans la géométrie admettant le groupe des *affinités générales* un *arc* sur chaque caractéristique. Pour cela on considère la parabole osculatrice à cette caractéristique et l'on prend sur cette parabole un paramètre naturel qui sera défini à une substitution linéaire près à coefficients constants.

La C_{23} sera établie si l'on suppose les arcs affines σ_1 et σ_2 sur s, liés à Σ_1 et Σ_2 que l'on peut définir d'une manière analogue sur les caractéristiques de S par :

$$\sigma_1 = K\Sigma_1 + K' \qquad \sigma_2 = K''\Sigma_2 + K'''$$

$K \; K' \; K'' \; K'''$ étant les 4 constantes arbitraires dont dépend la C_{23}.

Lorsqu'une seule transformée de Laplace est dégénérée en une droite (par ex. s_1) dans le déplacement à deux paramètres qui amène S sur s.

1° Les vitesses d'entraînement des points du plan tangent sont nulles;

2° Les vitesses d'entraînement des points de AA_2A_4 (osculateur à $\omega_1 = 0$) sont nulles;

3° Le déplacement d'entraînement est une élation instantanée de centre le point A_1 qui décrit s_1.

La condition suffisante pour qu'entre deux de ces surfaces une correspondance ponctuelle soit C_{23} s'énonce en imposant au déplacement la première seulement des propriétés qui viennent d'être énoncées.

Si la surface admet deux droites focales on pourra dire encore que les vitesses d'entraînement des points du plan tangent sont nulles et réciproquement que cette condition imposée au déplacement à deux paramètres *suffit* à rendre une correspondance C_{23}.

41. Considérons de nouveau une C_{23} établie entre s et S dans le cas général

---

[1] On peut en particulier prendre pour l'une d'elles la surface S_0 [n. 32].

où il n'y a pas de caractéristiques planes nous allons chercher quelle correspondance résulte, entre s_2 et S_2 de la précédente. Nous pourrons supposer que dans le système (17) on a réduit à l'aide de e_{30} et de e_{40} γ et γ' à 0 il en résulte que les caractéristiques se correspondent aussi bien entre s_2 et S_2 qu'entre s_1 et S_1. Il y a entre s_2 et S_2 une C_{12} et il en est de même entre s_1 et S_1.

Il y aura une C_2 entre s_2 et S_2 si de plus $\Omega_{40} - \omega_{40} = 0$ qui entraîne : $C = 0 \quad \Omega_{31} - \omega_{31} = 0$ la correspondance est alors C_{23} (c'est la même que celle qui existe entre s et S). Le système (16) sera remplacé par :

$$(24) \qquad \begin{cases} \Omega_{30} - \omega_{30} = - g\omega_1 \qquad \Omega_{40} - \omega_{40} = 0 \\ dg + g(\omega_{00} - \omega_{44}) = f\omega_2 \end{cases}$$

d'où : $g[\omega_3\omega_{20}] - g[\omega_{43}\omega_1] = 0$ c'est-à-dire en tenant compte de (17) : $g(\delta - 1)[\omega_2\omega_1] = 0$.

En laissant de côté le cas $g = 0$ pour lequel s et S ne sont pas distinctes : $\delta = 1 \qquad \omega_{20} = \omega_1$.

En supposant cette condition vérifiée la dérivation de la première (24) conduit à :

$$(25) \qquad dg + g(\omega_{00} - \omega_{44}) = F\omega_2$$

F s'exprimant à l'aide de g et des paramètres qui interviennent dans (17) :

La dérivée de cette dernière équation (25) étant supposée vérifiée ; *à une surface* s *convenablement choisie* les équations qui précèdent feront correspondre *une famille dépendant d'une constante arbitraire de surfaces* S. *Les couples* (s S) *s'obtiendront en joignant* (18) *et* (25) ; *ils dépendront de neuf fonctions arbitraires d'un argument.*

Si nous supposons maintenant que s peut avoir une ou bien ses deux familles de caractéristiques planes le seul cas où il existe une transformée qui est une surface à caractéristiques (pour des surfaces admettant entre elles une C_{23}) *est celui où* s_2 *est une droite. Dans ce cas les couples* (s S) *dépendent de huit fonctions d'un argument.* Il y a alors entre s_1 et S_1 une C_{12} et il ne pourrait exister une correspondance plus étroite entre s_1 et S_1 qu'avec $g = 0$, ce qui entraînerait l'identité de s et S (en supposant s_1 et S_1 non dégénérées).

CHAPITRE V

Les surfaces qui ont une famille d'asymptotiques.

42. Si les deux familles de caractéristiques d'une surface s sont confondues elles constituent une famille d'asymptotiques. On pourra alors rapporter s à un système de référence choisi de telle sorte que l'on ait :

$$(1) \qquad \omega_3 = 0 \qquad \omega_4 = 0$$

$$(2) \qquad \omega_{13} = \omega_1 \qquad \omega_{23} = 0 \qquad \omega_{14} = \omega_2 \qquad \omega_{24} = \omega_1$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = 0 & \omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0 \\ \omega_{21} = \omega_2 \qquad \omega_{43} = \omega_2 & \omega_{34} - 2\,\omega_{12} = 0 \end{cases}$$

si l'on exclut les surfaces réglées qui ont été étudiées au chapitre III.

Il est facile de vérifier que ces surfaces dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Leurs transformées dualistiques sont des hypersurfaces V dont l'hyperplan tangent dépend de 2 paramètres et qui sont précisément engendrées par les tangentes asymptotiques d'une telle surface s (1). En résumé en désignant par C la congruence des tangentes asymptotiques de s on peut dire que la transformée dualistique V de s est de la même espèce que C. Il est presque évident que la famille d'asymptotiques de S ne peut être composée de courbes planes. Il est aussi impossible qu'elle soit formée par des courbes hyperplanes. En effet l'hyperplan de l'une de ces courbes ne pourrait être avec la particularisation effectuée que $AA_2A_1A_4$ et cet hyperplan n'est jamais fixe quand on se déplace sur la caractéristique $\omega_1 = 0$ si la surface n'est pas réglée. On en conclut pour V que ses développables ne peuvent se réduire à des cones c'est-à-dire qu'elle ne peut pas avoir sa focale dégénérée en une courbe.

---

(1) V M. Lalan, Thèse *(loc. cit.)*

43. C_{13}. C_{14}. ——. C_{13} *s'établit entre deux surfaces quelconques par* : $\Omega_1 = \omega_1$ $\Omega_2 = \omega_2$. *Elle dépend de deux fonctions d'un argument.*

Pour établir C_{14} on joint au système qui donne S correspondant à s avec C_{13} les équations :

$$\begin{aligned} &\Omega_{11} = \omega_{11} && 2\Omega_{41} - \Omega_{20} = 2\omega_{41} - \omega_{20} \\ &\Omega_{12} + \Omega_{41} = \omega_{12} + \omega_{41} && 2\Omega_{42} - \Omega_{10} = 2\omega_{42} - \omega_{10} \\ &\Omega_{32} = \omega_{32} && \Omega_{10} - \Omega_{31} = \omega_{10} - \omega_{31} \end{aligned}$$

On obtient par dérivation :

$$(5)\left\{\begin{aligned} &[\omega_1(\Omega_{00} - \omega_{00})] = 0 \qquad [\omega_1(\Omega_{12} - \omega_{12})] - \frac{1}{2}[\omega_2(\Omega_{00} - \omega_{00})] = 0 \\ &[\omega_1(\Omega_{12} - \omega_{12})] = 0 \quad 3[(\Omega_{40} - \omega_{40})\omega_1] + \frac{1}{2}[(2\omega_{41} - \omega_{20})(\Omega_{00} - \omega_{00})] = 0 \\ &\frac{1}{2}[(\omega_{41} + \omega_{12})(\Omega_{00} - \omega_{00})] + [(\Omega_{40} - \omega_{40})\omega_1] = 0 \\ &3[(\Omega_{40} - \omega_{40})\omega_2] + [(2\omega_{42} - \omega_{10})(\Omega_{00} - \omega_{00})] - [\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] \\ &\qquad\qquad + [(2\omega_{41} + 4\omega_{12} + \omega_{20})(\Omega_{12} - \omega_{12})] = 0 \\ &[(\Omega_{30} - \omega_{30})\omega_2] - \frac{1}{2}[\omega_{32}(\Omega_{00} - \omega_{00})] + [(2\omega_{42} - \omega_{31})(\Omega_{12} - \omega_{12})] = 0 \\ &[(\omega_{10} - \omega_{32})(\Omega_{00} - \omega_{00})] + 2[\omega_1(\Omega_{30} - \omega_{30})] + [\omega_2(\Omega_{40} - \omega_{40})] \\ &\qquad\qquad + [(\Omega_{12} - \omega_{12})(\omega_{20} - 2\omega_{41})] = 0 \end{aligned}\right.$$

On en tire $\Omega_{00} - \omega_{00} = \alpha\omega_1$, $\Omega_{12} - \omega_{12} = -\frac{\alpha}{2}\omega_2$ où l'on peut réduire α à 0 à l'aide de l'indétermination qui subsiste pour $E_{10} - e_{10}$. Après cette réduction (5) conduit à : $\Omega_{00} - \omega_{00} = \Omega_{12} - \omega_{12} = \Omega_{30} - \omega_{30} = \Omega_{40} - \omega_{40} = 0$ qui entraînent encore $\Omega_{10} - \omega_{10} = 0$ et par suite l'identité entre s et S. C_{14} *ne peut exister entre deux surfaces distinctes.*

44. C_2. Le repère attaché à s sera tel que les ω vérifieront les équations (1) (2) et (3).

Pour les Ω on aura seulement (1) (2) et :

$$(3')\left\{\begin{aligned} &\Omega_{00} + \Omega_{33} - 2\Omega_{11} = F\omega_1 + E\omega_2 \\ &\Omega_{00} + \Omega_{44} - \Omega_{11} - \Omega_{22} = A\omega_1 \\ &\Omega_{21} = \omega_2 \\ &\Omega_{43} = E\omega_1 + \omega_2 \\ &\Omega_{34} - 2\Omega_{12} = C\omega_1 + A\omega_2 \end{aligned}\right.$$

On pourra encore prendre :

$$\begin{array}{ll} \omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} = \omega_2 & \Omega_{00} + \Omega_{11} - 2\Omega_{22} = \omega_2 \\ \omega_{41} - \omega_{20} - \quad \omega_{12} = p\omega_1 & \Omega_{41} - \Omega_{20} - \quad \Omega_{12} = \mathrm{P}\omega_1 \end{array}$$

qui permettent de poser :

$$\omega_{31} - 2\omega_{42} + \omega_{12} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$

et

$$\Omega_{31} - 2\Omega_{42} + \Omega_{12} = \overline{\alpha}\omega_1 + \overline{\beta}\omega_2$$

Avec ces hypothèses C_2 s'établit en écrivant :

$$\begin{array}{ll} \Omega_1 \;\; = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} & \Omega_{12} = \omega_{12} \end{array}$$

qui donne par dérivation :

$$\begin{array}{l} [\omega_1(\Omega_{31} - 2\Omega_{10} - \omega_{31} + 2\omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{41} - \Omega_{20} - \omega_{41} + \omega_{20})] = 0 \\ [(\Omega_{10} - \Omega_{42} - \omega_{10} + \omega_{42})\omega_2] \quad + [\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] = 0 \end{array}$$

ou en se servant des équations précédentes.

$$\begin{array}{l} -2[\omega_1(\Omega_{10} - \Omega_{42} - \omega_{10} + \omega_{42})] + (\overline{\beta} - \beta)[\omega_1\omega_2] + (\mathrm{P} - p)[\omega_2\omega_1] = 0 \\ [(\Omega_{10} - \Omega_{42} - \omega_{10} + \omega_{42})\omega_2] \qquad + [\omega_1(\Omega_{32} - \omega_{32})] = 0 \end{array}$$

dans lequel ne figurent que deux expressions de Pfaff nouvelles.

On voit qu'une C_2 est possible entre deux surfaces quelconques et qu'elle dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.

45. C_{23}. Les couples (s S) de surfaces pouvant se correspondre avec C_{23} s'obtiennent en partant d'un système formé :

1° par les équations (1) (2) (3) ;

2° par les équations qui donnent S correspondant à s avec C_{13} ;

3° par : $\Omega_{12} = \omega_{12} \qquad \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}$.

On dérive ce système et on le résout de la manière la plus générale. On peut alors effectuer de nouvelles particularisations et écrire :

$$(7_1) \left\{ \begin{array}{ll} \omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} = \omega_2 & \omega_{41} - \omega_{20} - \omega_{12} = c\omega_1 \\ \omega_{12} + \omega_4 \; = d\omega_1 & 2\omega_{10} - 2\omega_{24} - \omega_{31} = e\omega_1 - 2c\omega_2 \\ \omega_{32} = f\omega - \frac{e}{3}\,\omega_2 & \omega_{10} - \omega_{31} = g\omega_1 - \frac{c+d}{3}\,\omega_2 \end{array} \right.$$

et

$$(7_2)\left\{\begin{array}{lll} \Omega_{41}=\omega_{41} & \Omega_{31}=\omega_{31} & \Omega_{20}=\omega_{20} \\ \Omega_{42}-\omega_{42}=\Omega_{10}-\omega_{10} & & \\ \Omega_{32}-\omega_{32}=\mathrm{D}\omega_1 & & \Omega_{10}-\omega_{10}=\mathrm{E}\omega_1 \end{array}\right.$$

Nous allons prolonger le système ainsi obtenu.

Nous obtenons (8_1) dans lequel 7 expressions de Pfaff :

$$dc, \ldots\ldots \text{ etc.}$$

s'expriment à l'aide de 8 paramètres :

$$p,\ q,\ r,\ \ldots\ldots \text{ etc.}$$ et

$$(8_2)\left\{\begin{array}{l} \Omega_{40}-\omega_{40}=\mathrm{D}\omega_1+\mathrm{E}\omega_2 \\ \Omega_{30}-\omega_{30}=\alpha\omega_1+\mathrm{D}\omega_2 \\ d\mathrm{E}+2\mathrm{E}(\omega_{00}-\omega_{11})=\beta\omega_1 \\ d\mathrm{D}+\mathrm{D}(\omega_{00}+\omega_{22}-\omega_{11}-\omega_{33})-2\mathrm{G}\omega_{12}=\gamma\omega_1-\alpha\omega_2 \end{array}\right.$$

En dérivant (8_2) on obtient :

$$\beta=\mathrm{D}-2\alpha$$

puis une expression de γ à l'aide de α et des :

$$p,\ q,\ r,\ \ldots\ldots \text{ etc.}$$

La dérivation des deux dernières équations de ce système conduit à :

$$(9_2) \qquad d\alpha=\mathrm{U}\omega_1+\mathrm{V}\omega_2$$

U et V s'exprimant à l'aide de D, E,

des $d.\ c.\ e$ ...... etc,
des $p.\ q.\ r$ ...... etc,
des $\lambda.\ \mu.\ \nu$ ...... etc.

Nous avons préalablement remarqué que le système (9_1) obtenu par dérivation de (8_1) permet d'exprimer les huit expressions de Pfaff :

$$dp,\ dq,\ dr\ \ldots\ldots \text{ etc.}$$

à l'aide de 9 paramètres :

$$\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots \text{etc.}$$

On peut déjà pressentir que le système ainsi prolongé est en involution.

En dérivant une fois de plus on est conduit à (10_1) dans lequel 9 expressions de Pfaff nouvelles :

$$d\lambda, d\mu, d\nu \ldots\ldots \text{etc.}$$

s'expriment à l'aide de 10 paramètres :

$$\xi. \eta. \xi \ldots\ldots \text{etc.}$$

La dérivée de (9_2) donne une relation entre :

$$d\lambda. d\mu. d\nu \ldots\ldots \text{etc.}$$

qui permet de réduire d'une unité le nombre de ces derniers paramètres.

Il suffit alors de vérifier — ce qui ne présente aucune difficulté — qu'un certain déterminant n'est pas nul, pour pouvoir affirmer qu'il y a involution et que la solution générale du problème posé — *la détermination des couples* (s S) — *dépend de 9 fonctions arbitraires d'un argument.*

Du point de vue cinématique nous pourrons faire les remarques suivantes :

Si l'on convient d'abord de rester sur l'asymptotique $\omega_1 = 0$ dans le mouvement à un paramètre qui amène S sur s les vitesses d'entraînement de tous les points du plan tangent à S sont nulles ; le déplacement d'entraînement est alors une élation de centre A dans laquelle les points du plan tangent à S restent fixes.

Si l'on considère le mouvement à 2 paramètres qui amène S sur s :

1° les vitesses d'entraînement des points de la tangente AA_2 à l'asymptotique sont nulles ;

2° le déplacement d'entraînement du plan tangent à S est une élation de centre A ;

3° les vitesses d'entraînement de tout point lié à la surface rencontrent la tangente AA_2 à l'asymptotique.

Ces trois conditions sont celles qu'il faut imposer au déplacement pour qu'une correspondance ponctuelle donnée soit C_{23}.

CHAPITRE VI

Les hypersurfaces engendrées par des plans.

46. Ce sont les transformées dualistiques des surfaces réglées. Elles peuvent être définies de la manière suivante : on considère une courbe G et par chaque tangente à cette courbe on fait passer un plan qui sera le plan générateur d'une hypersurface H. En général ce plan ne sera pas contenu dans l'hyperplan osculateur à G au point de contact de la tangente correspondante et les H dépendent de 5 fonctions d'un argument.

Leur étude se fait facilement en les rapportant à un repère du quatrième ordre par rapport auquel elles sont définies par

$$\omega_4 = 0 \tag{1}$$

$$\omega_{14} = \omega_2 \qquad \omega_{24} = \omega_1 \qquad \omega_{34} = 0 \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{44} = 0 \qquad \omega_{12} = \omega_{32} = 0 \\ \omega_{21} = \omega_3 \qquad \omega_{31} = 2\omega_2 \end{array} \right. \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{\text{[illegible]}} = 0 \qquad \omega_{\text{[illegible]}} - \omega_{\text{[illegible]}} + \omega_{\text{[illegible]}} = 0 \qquad \omega_{23} = \omega_2 \\ \omega_{10} - \omega_{42} = 0 \qquad \omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{10} = \omega_2 \qquad \omega_{40} = \beta\omega_2 \\ \omega_{13} - \omega_{20} = \dfrac{1}{3}\,\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \omega_{43} = \dfrac{2\beta}{3}\,\omega_1 + \delta\omega_2 + \dfrac{1}{3}\,\omega_3 \\ \omega_{33} + \omega_{00} - 2\omega_{22} = \delta\omega_1 + \eta\omega_2 + \gamma\omega_3 \end{array} \right. \tag{5}$$

La courbe G est alors décrite par A_3.
A_3, A_1 est sa tangente,
A_3, A, $A_1 + A_4$, son plan osculateur.
Le plan générateur de H est A_3, A_1. A.

L'hyperplan formé par les deux plans précédents est A, A_1, A_3, A_4.

Le plan caractéristique de cet hyperplan : A_1, A_3, A_4 et enfin le *plan transversal* (1) est A_1, A_3, $A - A_4$.

Si l'on choisit le plan générateur dans l'hyperplan osculateur à la courbe G au point considéré on obtient des hypersurfaces qui ne dépendent plus que de 4 fonctions d'un argument. Elles forment la *classe b*. Elles satisfont encore à (1) (2) (3) et (4) mais il faut remplacer la première équation (5) par $\omega_{10} = 0$. *L'hypersurface transversale* (lieu du plan transversal) se réduit à l'hypersurface développable engendrée par les plans osculateurs à G.

Un cas plus particulier se présente si l'on a en même temps $\omega_{10} = \omega_{40} = 0$. La courbe G est alors plane et il suffit pour engendrer H de mener par chacune de ses tangentes un plan générateur. Les hypersurfaces dépendent alors de trois fonctions d'un argument et appartiennent à la *classe c*. L'hypersurface transversale se réduit au plan qui contient G. Nous signalerons encore le cas où dans (3) on a $\omega_{23} = 0$ au lieu de $\omega_{23} = \omega_2$. On obtient alors une hypersurface H_0 de la classe c pour laquelle G est une conique et qui admet une famille doublement infinie de génératrices (2).

Correspondances établies entre deux des hypersurfaces précédentes.

47. M. Cartan (3) a montré que deux hypersurfaces distinctes non développables n'admettent entre elles aucune C_2. *On voit facilement qu'il peut exister une C_{12} entre deux hypersurfaces* h *et* H *quelconques et qu'elle dépend d'une fonction de deux arguments.*

48. C_{13}. Les hypersurfaces H qui correspondent à une h donnée s'obtiennent par

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \Omega_4 = \omega_4 & \Omega_{14} = \omega_{14} & \Omega_{24} = \omega_{24} & \Omega_{34} = \omega_{34} \\ \multicolumn{4}{l}{\Omega_{11} + \Omega_{22} - \Omega_{00} - \Omega_{44} = \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{44}} \\ \Omega_{12} = \omega_{12} & \Omega_{32} = \omega_{32} & \Omega_{21} = \omega_{21} & \Omega_{31} = \omega_{31} \\ \Omega_1 = \omega_1 & \Omega_2 = \omega_2 & \Omega_3 = \omega_3. & \end{array} \right.$$

(1) C'est ce que devient par dualité la droite transversale [*n.* 19] Voir M. Ranum *Transactions of the Amer. Mat. Soc.*, t. XVI, 1915 (*loc. cit.*) où l'on trouvera en particulier la classification de ces hypersurfaces qui correspond à celle des surfaces réglées.

(2) M. Lalan. *Thèse* (*loc. cit.*).

(3) *Annales E. N. S*, 1920, ch. VII (*loc. cit.*).

En supposant h rapportée à un repère du quatrième ordre on déduit par dérivation de (6) un système qui pourra par des particularisations nouvelles se réduire à

$$\begin{aligned}
&\Omega_{30} = \omega_{30} \qquad \Omega_{20} - \Omega_{41} + \Omega_{13} = \omega_{20} - \omega_{41} + \omega_{13} \\
&\Omega_{10} - \Omega_{42} = \omega_{10} - \omega_{42} \qquad \Omega_{00} + \Omega_{11} - \Omega_{22} - \Omega_{33} = \omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} \\
&\Omega_{23} - \omega_{23} = t\omega_2 \\
&\Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} + P\omega_1 \\
&\Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} \\
&\Omega_{13} - \omega_{13} = R\omega_1 + P\omega_3
\end{aligned}$$

En dérivant de nouveau on obtient $R = P = 0$ et un système qui se résout suivant :

$$\begin{aligned}
&\Omega_{10} = \omega_{10} \qquad \Omega_{40} = \omega_{40} \\
&\Omega_{20} = \omega_{20} + \gamma\omega_2 \\
&\Omega_{43} = \omega_{43} + \delta\omega_2 \\
&dt + t\,(\omega_{33} + \omega_{00} - 2\omega_{22}) = \omega_{33} + \omega_{00} - 2\omega_{22} + \delta\omega_1 + \eta\omega_2 + \gamma\omega_3.
\end{aligned}$$

Ce dernier conduit à

$$\begin{aligned}
&[\omega_2(d\gamma + 2\gamma(\omega_{00} - \omega_{22}))] = 0 \\
&[\omega_2(d\delta + 3\delta(\omega_{00} - \omega_{22}) - \gamma\omega_{13})] = 0 \\
&[\omega_1(d\delta + 3\delta(\omega_{00} - \omega_{22}) - \gamma\omega_{13})] + [\omega_2(d\eta + \eta(7\omega_{00} + 13\omega_{11}) + 5(t-1)\omega_{13})] \\
&+ [\omega_3(d\gamma + 2\gamma(\omega_{00} - \omega_{22}))] - (t-1)[\omega_1\omega_{10}] + \delta[\omega_2\omega_3] = 0
\end{aligned}$$

qui montre que les *hypersurfaces* H *qui correspondent à une* h *dépendent de trois fonctions d'un argument. La correspondance entre deux hypersurfaces* h *et* H *convenablement choisies est en général bien déterminée* (en écrivant l'égalité de certains invariants) *mais peut dans des cas particuliers dépendre de deux constantes arbitraires au plus.*

Deux hypersurfaces qui se correspondent appartiennent à la même classe. On peut en particulier définir celles de la classe c comme les hypersurfaces qui peuvent correspondre avec C_{13} à H_0 [n. 46].

Dans tous les cas si l'on considère le déplacement à trois paramètres qui amène H sur h on peut remarquer ce qui suit :

1° les vitesses d'entraînement des points du plan générateur sont nulles (la correspondance entre les plans générateurs est projective).

2° Les vitesses d'entraînement de tous les points de l'hyperplan tangent à H vont rencontrer la droite AA_3. Ces deux conditions sont celles qu'il faut imposer au déplacement à trois paramètres qui amène H sur h si l'on veut énoncer *une propriété caractéristique* des C_{13}.

On arrive aux résultats suivants par l'étude du contact qui peut résulter entre les courbes G et g de C_{13} :

Ce contact est en général du troisième ordre. Il est du quatrième ordre si $\gamma = 0$, H dépend alors de deux fonctions d'un argument. Si l'on a *de plus* $\delta = 0$ H ne dépend plus que d'une fonction ; les vitesses d'entraînement (dans le déplacement à trois paramètres) des points du plan osculateur à G sont nulles ; le contact entre G et g sera du cinquième ordre si les hypersurfaces appartiennent à la classe a, du sixième ordre si elles sont de la classe b et les deux courbes seront identiques si les hypersurfaces font partie de la classe c. *Il résulte de là que les seules hypersurfaces qui peuvent sans être identiques se correspondre avec* C_{13} *et avoir de plus la même courbe* G *sont celles qui appartiennent à la classe* c. Pour des hypersurfaces de la classe b se correspondant avec C_{13} le contact le plus élevé qui peut exister entre G et g sans entraîner l'identité de H et de h est du sixième ordre. Pour la classe a ce contact n'est que du cinquième ordre.

On montre sans difficulté que C_{14} *ne peut exister entre deux hypersurfaces distinctes.*