THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

MIRON NICOLESCO

Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__83__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
1987

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. MIRON NICOLESCO

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1re THÈSE. — FONCTIONS COMPLEXES DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1928 devant la Commission d'Examen.

MM. PAUL MONTEL *Président.*
HENRI VILLAT } *Examinateurs.*
JEAN CHAZY }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1928

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen	C. MAURAIN, Professeur, Physique du Globe.
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires	P. PUISEUX, V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC.

Professeurs

EMILE PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET	Électrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
ANDOYER	Astronomie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	Chimie minérale.
EMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
MARCHIS	Aviation.
JEAN PERRIN	Chimie physique.
REMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
ABRAHAM	Physique.
M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
CARTAN	Géométrie supérieure.
LAPICQUE	Physiologie générale.
VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
COTTON	Physique générale.
DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY	Physique.
CHARLES PÉREZ	Zoologie.
LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et Géologie régionale.
LESPIEAU	Théories chimiques.
RABAUD	Biologie expérimentale.
PORTIER	Physiologie comparée.
E. BLAISE	Chimie organique.
DANGEARD	Botanique.
PAUL MONTEL	Mécanique rationnelle.
WINTREBERT	Anatomie et Histologie comparées.
DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA	Mathématiques générales.
A. JOB	Chimie générale.
A. MAILHE	Étude des combustibles.
L. LUTAUD	Géographie physique.
EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
HENRI VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	Géologie.
N.	Chimie appliquée.

HÉROUARD	Zoologie.	DARMOIS	Physique.
PÉCHARD	Chimie (Enseigt P. C. N.).	BRUHAT	Physique.
AUGER	Chimie analytique.	MOUTON	Chimie physique.
GUICHARD	Chimie minérale.	JOLEAUD	Paléontologie.
GUILLET	Physique.	JAVILLIER	Chimie biologique.
MAUGUIN	Minéralogie.	DUFOUR	Physique (P. C. N.).
BLARINGHEM	Botanique.	PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
MICHEL-LÉVY	Pétrographie.		
DEREIMS	Géologie.	ROBERT-LÉVY	Zoologie.
DONGIER	Physique du globe.	DUNOYER	Optique appliquée.
DENJOY	Calcul différentiel et intégral.	GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
BÉNARD	Physique (P. C. N.).	DEBIERNE	Radioactivité.

Secrétaire D. TOMBECK.

83400-28. — Paris, Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

A

Monsieur Paul MONTEL

PROFESSEUR A LA SORBONNE

Hommage de respectueuse admiration.

Miron Nicolesco

A

MONSIEUR GEORGES TZITZÉICA

VICE-PRESIDENT DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BUCAREST

Respectueux hommage de son ancien élève.

A

GEORGES ET ALEXANDRE NICOLESCO

Fraternellement.

PREMIÈRE THÈSE

FONCTIONS COMPLEXES

DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

INTRODUCTION.

Le présent travail est divisé en deux Parties, d'inégales étendues.

Je considère, dans la première Partie, des fonctions $f = u + iu$, d'une variable complexe $z = x + iy$, dont les parties réelle et imaginaire ne satisfont pas au système de Cauchy. La dérivation, pour ces fonctions, n'a pas de sens, tant qu'on n'associe pas à chaque point du plan une direction m. Je donne quelques formules générales concernant les dérivées d'ordre supérieur au premier; ces formules conduisent à des propositions qui généralisent les propriétés classiques des fonctions monogènes. Je donne, incidemment, un exemple de fonction discontinue sur une infinité de lignes du plan qui satisfait à l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, aux dérivées secondes généralisées. Enfin, j'étudie plus particulièrement une classe de fonctions non analytiques, caractérisées par une équation du type Monge-Ampère, dont je passe en revue les propriétés.

J'essaie, dans la seconde Partie, d'étendre à l'espace à quatre dimensions la notion de fonctions harmoniques conjuguées dans le plan. La conclusion à laquelle j'arrive est que *cette tentative est vaine*, *tant qu'on n'abandonne pas soit la notion de dérivée ordinaire*, *soit celle de fonctions de point*. Je me place, successivement, aux deux points de vue.

Je garde d'abord la dérivée ordinaire et j'introduis la notion de bipoint, due à M. Cosserat. Je définis le bipoint *opposé* à un bipoint donné, et les fonctions de bipoint *conjuguées*. Cette définition me conduit aux fonctions analytiques de deux variables. J'étudie ensuite certaines transformations biponctuelles, qui généralisent la transformation conforme.

En second lieu, je garde les fonctions de point, mais je laisse indéterminée la notion de dérivée, tout en lui attribuant, pour les calculs, quelques propriétés fonctionnelles simples, vérifiées par la dérivée ordinaire. Je définis la dérivée d'une fonction suivant une direction plane caractéristique de l'espace à quatre dimensions, ce qui me permet de donner la définition de deux fonctions conjuguées. J'applique ces notions à une dérivée définie, il y a quinze ans, par M. Pompéiu, la dérivée aréolaire. L'étude des fonctions aréolairement conjuguées met en évidence la liaison qui existe entre ces fonctions et les fonctions harmoniques à quatre variables.

Une partie des résultats contenus dans ce travail a été communiquée à l'Académie des Sciences (1).

M. Montel fut pour moi le Maître véritable qui, dès le début, s'est intéressé vivement à mes recherches et qui m'a donné par la suite de bons conseils et des suggestions; nombre de pages de ce travail s'en ressentent heureusement. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma vive gratitude, ainsi que toute mon admiration.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Formules générales.

1. Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions réelles des variables réelles x et y.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 185, 1927, p. 442.

Nous poserons

$$f[\zeta] = f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y) \tag{1}$$

avec $\zeta = x + iy$. Si l'on donne à ζ un accroissement $\Delta x + i\Delta y$ et que l'on forme le rapport, à cet accroissement, de la variation correspondante de $f[\zeta]$, on trouve que la limite de ce rapport dépend en général de la limite m du quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Appelons *dérivée de $f[\zeta]$ suivant la direction m*, et désignons par $\frac{\partial f}{\partial m}$ la limite de ce rapport ; nous écrirons

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{1 + im}. \tag{2}$$

En séparant le réel et l'imaginaire, nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial m} = u_1(x, y, m) + i\,v_1(x, y, m)$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} u_1(x, y, m) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + m^2\frac{\partial v}{\partial y}}{1 + m^2}, \\ v_1(x, y, m) &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - m^2\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + m^2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Nous pouvons considérer $\frac{\partial f}{\partial m}$ comme une fonction de la combinaison $\zeta = x + iy$, dont nous nous proposons de calculer la dérivée suivant une direction m', différente ou non de m, dérivée que nous désignerons par la notation $\frac{\partial^2 f}{\partial m\,\partial m'}$.

Nous n'avons qu'à appliquer la formule (2), ce qui donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m\,\partial m'} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} + m'\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + i\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)}{1 + im'}.$$

Or, d'après (3),

$$
(3')\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + m^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}}{1+m^2},\\
\frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + m\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right) + m^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{1+m^2},\\
\frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - m^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}{1+m^2},\\
\frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + m\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right) - m^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{1+m^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

On en déduit aisément

$$
(4)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial m\,\partial m'} = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(m+m') + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}mm'}{(1+im)(1+im')}.
$$

Des remarques intéressantes peuvent être faites en partant de cette formule.

2. La formule (4) est symétrique en m et en m'. On a donc

$$
(5)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial m\,\partial m'} = \frac{\partial^2 f}{\partial m'\,\partial m}.
$$

Supposons que l'on dérive successivement, par rapport à des directions quelconques, $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Nous pouvons énoncer cette proposition :

L'ordre des dérivations successives, par rapport à des directions quelconques déterminées, n'influe pas sur le résultat.

La démonstration se fait, en s'appuyant sur la formule (5), absolument de la même manière que la démonstration du théorème analogue classique de l'Analyse.

Mais nous lirons le résultat ci-dessus sur une formule généralisant la formule (4). Je dis que l'on a en général

$$(6)\quad \frac{\partial^p f}{\partial m_1\,\partial m_2\ldots\partial m_p} = \frac{\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}+\dfrac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\,\partial y}\sum_j m_j+\dfrac{\partial^p f}{\partial x^{p-2}\,\partial y^2}\sum_{j,k} m_j m_k+\ldots+\dfrac{\partial^p f}{\partial y^p}m_1 m_2\ldots m_p}{\prod_1^p(1+im_k)}.$$

En effet, cette formule est vraie pour $p=1$, $p=2$. Supposons-la vraie pour p, nous allons démontrer qu'elle est vraie pour $p+1$. Donnons à cet effet à ζ un accroissement $\Delta x+i\Delta y$ et calculons les accroissements des diverses fonctions du second membre de la relation (6). Nous aurons, à des infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$\begin{aligned}
\Delta\,\frac{\partial^p f}{\partial x^p} &= \Delta x\,\frac{\partial^p f}{\partial x^{p+1}}+\Delta y\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\,\partial y},\\
\Delta\,\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\,\partial y} &= \Delta x\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\,\partial y}+\Delta y\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p-1}\,\partial y^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta\,\frac{\partial^p f}{\partial y^p} &= \Delta x\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x\,\partial y^p}+\Delta y\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Multiplions respectivement par 1, $\sum_j m_j$, $\sum_{j,k} m_j m_k$, $\ldots$, et ajoutons. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta\,\frac{\partial^p F}{\partial m_1\,\partial m_2\ldots\partial m_p}\prod_1^p(1+im_k)
&= \left(\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p+1}}+\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\,\partial y}\sum m_j+\ldots+\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^p\,\partial x}m_1 m_2\ldots m_p\right)\Delta x\\
&+\left(\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\,\partial y}+\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{p-1}\,\partial y^2}\sum m_j+\ldots+\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}m_1 m_2\ldots m_p\right)\Delta y.
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres par $\Delta\zeta$ et en passant à la limite, avec

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=m_{p+1},$$

nous obtenons la formule (6), dans laquelle p est remplacé par $p+1$. Notre affirmation est ainsi justifiée.

La formule (6) peut s'écrire, sous forme condensée,

$$(6') \qquad \frac{\partial^p f}{\partial m_1\, \partial m_2 \ldots \partial m_p} = \frac{\left(\prod_1^p\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + m_K \frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\prod_1^p (1 + i m_K)},$$

le symbole (Π) signifiant que les multiplications correspondantes se font d'après les règles suivantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^p = \frac{\partial^p f}{\partial x^p},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^q = \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\, \partial y^q}.$$

Sur les formules (6) ou (6′), la propriété énoncée au début de ce paragraphe est évidente.

3. Donnons une démonstration directe de la formule (5).

D'abord, puisque l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial u}{\partial m} + i\frac{\partial v}{\partial m},$$

il suffit de montrer que pour une fonction *réelle* $R(x, y)$, on a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial m\, \partial m'} = \frac{\partial^2 R}{\partial m'\, \partial m}.$$

Soient respectivement Δn et φ le module et l'argument de $\Delta\zeta$. On a

$$\frac{\Delta R}{\Delta \zeta} = e^{-i\varphi}\frac{\Delta R}{\Delta n};$$

donc, en passant à la limite, avec $\lim \varphi = \Phi$,

$$(7) \qquad \frac{\partial R}{\partial m} = e^{-i\Phi}\frac{\partial R}{\partial n}.$$

$\frac{\partial R}{\partial n}$ est ce qu'on appelle la dérivée de la fonction $R(x, y)$ dans la direction n du *plan réel* xOy.

Si $m'(n', \Phi')$ est une autre direction issue du point ζ, on aura, en appliquant la formule (7) à la fonction $\frac{\partial R}{\partial m'}$,

$$\frac{\partial R}{\partial m'} = e^{-i\Phi'} \frac{\partial R}{\partial n'}.$$

Comme on a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial n\, \partial n'} = \frac{\partial^2 R}{\partial n'\, \partial n},$$

la formule (5) se trouve démontrée.

En partant de cette formule, il est facile de démontrer, par un raisonnement bien connu, l'interchangeabilité des dérivations pour une dérivée d'ordre quelconque.

4. Les formules ci-dessus ont été établies en supposant qu'aucune des directions $m_1, m_2, \ldots, m_p$ ne dépende du point (x, y). Dans le cas contraire, la formule donnant la dérivée serait beaucoup plus compliquée. Peut-il y avoir des directions privilégiées, pour lesquelles la loi de dérivation donnée par la formule (6) se conserve?

Voici un résultat pour le cas de la dérivée seconde.

Soit $m(x, y)$ une fonction réelle du point (x, y). Posons

$$\frac{\partial f}{\partial m} = f_1.$$

La direction m' telle que la dérivée f de f_1, suivant m', conserve la forme (4), *est tangente à la courbe*

$$m(x, y) = c$$

passant par le point considéré.

En effet, f_1 est donnée par la formule (2), où m est une fonction de x et de y. Par dérivation suivant m', on aura une partie de la forme (4), obtenue en considérant m comme constant et une partie obtenue en prenant la différentielle du second membre de la formule (2) par rapport à m et en la divisant par $dx + i\,dy$. Si l'on y remplace dm par sa valeur et que l'on pose

$$\frac{dy}{dx} = m',$$

on obtient la formule

$$f_2 = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (m+m')\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + mm'\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{(1+im)(1+im')} + \frac{\left(\dfrac{\partial m}{\partial x} + m'\dfrac{\partial m}{\partial y}\right)\left[\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right]}{(1+im)^2(1+im')}.$$

Or la fonction f n'est pas analytique. Donc, pour que f_2 ait la forme (4), il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial m}{\partial x} + m'\frac{\partial m}{\partial y} = 0$$

ce qui justifie notre affirmation.

Supposons, en particulier, que l'on dérive toujours suivant la même direction m. La condition ci-dessus s'écrit alors

$$(8) \qquad \frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y} = 0$$

Je dis que cette condition est suffisante pour que *toute* dérivée

$$\frac{\partial^p f}{\partial m^p}$$

soit donnée par la formule générale (6).

En effet, la proposition est vraie pour $p = 1$, $p = 2$. Supposons-la vraie pour $p = k$, nous allons montrer qu'elle est vraie pour $p = k+1$.

Par hypothèse, nous avons

$$(6') \qquad \frac{\partial^k f}{\partial m^k} = \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + m\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^k}{(1+im)^k}.$$

La dérivée d'onde $k+1$ comprendra deux termes. Le premier s'obtiendra en regardant m constant, ce sera donc

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(k+1)}}{(1+im)^{(k+1)}}.$$

Le second s'obtiendra en prenant la différentielle par rapport à m et en divisant par $dx+i\,dy$. Il sera de la forme

$$\frac{A\,dm}{dx+i\,dy}=\frac{A}{1+im}\left(\frac{\partial m}{\partial x}+m\frac{\partial m}{\partial y}\right),$$

et par conséquent, en vertu de (8), il sera nul. Il reste donc

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial m^{k+1}}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(k+1)}}{(1+im)^{(k+1)}},$$

ce qui justifie notre affirmation.

5. Supposons que les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ n'aient pas partout de dérivées premières. La question de savoir si la fonction $f(\zeta)$ est analytique ne se pose plus. Mais supposons que les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ admettent des dérivées secondes généralisées. Si l'on remarque que l'expression (4) ne contient au second membre que de dérivées secondes, on en conclut la possibilité de former l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m\,\partial m'}$$

directement, sans que $\frac{\partial f}{\partial m}$ et $\frac{\partial f}{\partial m'}$ existent nécessairement. Dans le cas où ces dérivées premières n'existent pas, nous appellerons le premier membre de (4) *dérivée seconde généralisée, suivant les directions m et m'*.

Cherchons alors les conditions pour que $\frac{\partial^2 f}{\partial m\,\partial m'}$ ne dépende ni de m, ni de m'. On devra avoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-i\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

On obtient par conséquent le système

$$
(9)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le cas où u et v admettent partout des dérivées des deux premiers ordres, l'intégration de ce système est immédiate. En effet, les deux dernières équations (11) donnent

$$
\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = c,
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c',
$$

c et c' étant des constants arbitraires. Ce système, où l'on prend comme inconnue soit u, soit v, est complètement intégrable, en vertu des deux premières équations (11). On trouvera

$$
f[\zeta] = \text{fonction analytique de } \zeta + cx + c'y + c''.
$$

Donc, si $\dfrac{d^2 f}{dm\,dm'}$ est indépendant de m et m', il en est de même des dérivées d'ordre > 2.

Ceci généralise la propriété des fonctions analytiques : *Une fonction monogène a une dérivée monogène.*

Ce résultat est général. Supposons que

$$
\frac{\partial^p f}{\partial m_1\,\partial m_2 \ldots \partial m_p} = \varphi[\zeta]
$$

soit indépendant de $m_1, m_2, \ldots, m_p$; alors

$$
f_1[\zeta] = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial m_1\,\partial m_2 \ldots \partial m_{p-1}}
$$

est analytique en ζ, donc

$$\varphi[\zeta] = \frac{\partial f_1}{\partial m_p}$$

est analytique en ζ. Soit $F(\zeta)$ une fonction analytique de ζ, telle que $F^{(p)}(\zeta) = \varphi(\zeta)$; la différence

$$f - F = g(\zeta)$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial^p g}{\partial m_1\, \partial m_2 \ldots \partial m_p} = 0. \tag{10}$$

Faisons dans la formule (6), du paragraphe 2, $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = 0$, puis $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = \infty$ (en supposant écrit g au lieu de f) etc. On trouvera que g est un polynome en x et y, de degré p. Donc

$$f[\zeta] = \text{fonction analytique de } \zeta + \text{polynome de degré } p$$

et les dérivées d'ordre $> p$ *sont indépendantes des directions.*

6. La dérivée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m\, \partial m'}$$

peut encore être indépendante de m et m', lorsque les fonctions u et v n'ont pas partout des dérivées partielles du premier ordre à condition qu'elles admettent des dérivées partielles secondes généralisées. Mais alors, en regardant les équations (11), on pourrait se demander si cette distinction n'est pas illusoire, c'est-à-dire, si le fait pour u et v de vérifier l'équation de Laplace n'entraîne pas comme conséquence l'existence *partout* des dérivées du premier ordre.

On peut répondre par la négative. Voici en effet un exemple simple. Soit d'abord

$$f(t) = (t)$$

une fonction de la variable réelle t, définie de la manière suivante :

1° Aux points $t = n + \frac{1}{2}$ (n entier), on a

$$(t) = 0.$$

2° En tout autre point, (t) est égale à la différence entre t et l'entier le plus voisin.

On appelle cette fonction *l'excès de t*. Elle est bornée, et continue sauf au point $t = n + \frac{1}{2}$. Dans tout intervalle ouvert

$$n - \frac{1}{2} < t < n + \frac{1}{2}, \tag{11}$$

on a

$$\frac{d(t)}{dt} = 1, \qquad \frac{d^2(t)}{dt^2} = 0.$$

Il n'y a pas lieu de parler d'une dérivée seconde aux extrémités de ces intervalles. Mais définissons *directement* la dérivée seconde au point t comme la limite du quotient

$$\frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2}.$$

Aux extrémités des intervalles (11), le numérateur de cette expression est nul identiquement. Nous sommes donc conduits à poser

$$\frac{d^2\left(n + \frac{1}{2}\right)}{dt^2} = 0.$$

Nous en concluons que (t) admet *partout* une dérivée seconde généralisée, qui est égale à zéro.

Considérons maintenant un carrelage (R) de plan xOy, obtenu au moyen des droites

$$x = m + \frac{1}{2}, \qquad y = n + \frac{1}{2} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La fonction

$$\varphi(x, y) = (x) + (y)$$

est, d'après ce que nous venons de dire, bornée et discontinue sur les lignes du réseau (R).

On a en outre

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

même aux points de discontinuité. L'expression

$$\frac{\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y+k) + \varphi(x, y)}{hk}$$

est nulle identiquement en *tout* point du plan. On a donc aussi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Si, maintenant, $H(x, y)$ est une fonction harmonique, continue sur les lignes (R), la fonction

$$\Phi(x, y) = H(x, y) + \varphi(x, y)$$

n'est pas harmonique sur les lignes du réseau (R). Elle y satisfait toutefois à l'équation aux dérivées secondes généralisées :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

II. — Classes particulières de fonctions non analytiques.

7. Nous allons continuer dans cette Section l'application des formules trouvées au début de la Section précédente.

Donnons tout d'abord une définition. Considérons une fonction complexe quelconque $f = u + iv$ et supposons que cette fonction contienne, outre les variables x et y, un paramètre arbitraire, réel z. Le système de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

n'est pas satisfait en général. Mais les équations écrites définissent, dans l'espace (x, y, z), un domaine et l'on peut dire que le système de Cauchy est satisfait sur le domaine ainsi défini, ou encore, que la fonction f est analytique dans ce domaine.

Ce domaine est en général une ligne. Il peut être une surface, quand les deux équations ne sont pas distinctes, ou bien quand l'une d'elles se réduit à une identité. Enfin, il se peut qu'il n'existe pas quand le système précédent n'admet pas de solutions réelles en x, y, z.

Le second cas est évidemment le plus intéressant.

8. Les définitions ci-dessus posées, donnons-nous une fonction complexe $u(x, y) + iv(x, y)$, sans paramètre. L'opération de dérivation en introduit tout naturellement un : c'est la direction m. Dès lors, nous pouvons nous poser le problème de la recherche du *domaine d'analyticité* de la fonction $\frac{\partial f}{\partial m}$, dans l'espace (x, y, z). [Nous écrirons, dans ce paragraphe, z au lieu de m.] Ce domaine sera défini par les équations

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

où u_1 et v_1 sont données par les formules (3) [Section I, § 1]. Si l'on effectue les calculs, en posant

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \tau$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \delta$$

on trouve le système

$$\tau_1 \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial x}\right) z + \frac{\partial \delta}{\partial y} z^2 = 0,$$

$$\delta_1 \qquad \frac{\partial \delta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{\partial \tau}{\partial x}\right) z - \frac{\partial \tau}{\partial y} z^2 = 0$$

Posons la condition pour que les deux équations admettent *une* solution commune réelle en z. L'éliminant du système précédent étant

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial \delta}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \delta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial x}\right)^2\right] = 0,$$

on doit avoir

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \delta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial \delta}{\partial x}$$

ou bien

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial\delta}{\partial y}-\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial\delta}{\partial x}=0. \tag{12}$$

La première solution est à rejeter, car elle donne pour les équations considérées deux racines communes $\pm i$. Il reste donc la condition (12). Les fonctions f, satisfaisant à cette condition, jouissent d'une propriété très simple :

Le domaine d'analyticité de la fonction $\frac{\partial f}{\partial z}$ *ne comprend plus, à part une surface qu'on ne peut distinguer analytiquement, ni lignes, ni points isolés.*

En effet, la condition (12) étant remplie, la surface $\tau_1=0$ se décompose aisément dans les deux suivantes :

$$(\tau'_1) \qquad z_1=-\frac{\frac{\partial\delta}{\partial x}}{\frac{\partial\delta}{\partial y}},$$

$$(\tau''_1) \qquad z_2=-\frac{\frac{\partial\tau}{\partial y}}{\frac{\partial\delta}{\partial y}}.$$

De même, la surface $\delta_1=0$ se décomposera en deux :

$$(\delta'_1) \qquad Z_1=-\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x}}{\frac{\partial\tau}{\partial y}},$$

$$(\delta''_1) \qquad Z_2=+\frac{\frac{\partial\delta}{\partial y}}{\frac{\partial\tau}{\partial y}}.$$

On voit donc bien :

1° Que les deux portions (τ'_1) et (δ'_1) coïncident, en vertu de (14). Elles formeront la surface d'analyticité de $\frac{\partial f}{\partial z}$.

2° Que les deux autres portions (τ''_1) et (δ''_1) n'ont plus de points réels communs.

En effet, pour un même couple de valeurs de x et de y, on a

$$Z_2 = -\frac{1}{z_2},$$

et l'hypothèse d'une intersection réelle des deux portions équivaudrait à l'hypothèse de l'existence d'une solution réelle pour l'équation $1 + z^2 = 0$.

9. La condition (12) développée donne une équation de Monge-Ampère, soit en u, soit en v, que nous allons étudier ici de plus près.

Désignons par r, s, t les dérivées secondes de $u(x, y)$; par r_1, s_1, t_1 celles de $v(x, y)$. L'équation (2) s'écrira sous la forme

$$s_1 r + (t_1 - r_1)s - s_1 t + r_1 t_1 - s_1^2 + rt - s^2 = 0. \tag{13}$$

Nous allons passer rapidement en revue les propriétés de cette équation.

Supposons $v(x, y)$ donnée. Pour trouver les équations différentielles caractéristiques, nous emploierons la méthode classique. En considérant r, s, t comme les coordonnées d'un point de l'espace, l'équation (15) représente une quadrique réglée, dont les deux systèmes de génératrices sont :

$$\begin{cases} r - s_1 = \mu(s + r_1), \\ s - t_1 = \mu(t + s_1); \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} r - s_1 = \mu(s - t_1), \\ s + r_1 = \mu(t + s_1). \end{cases} \tag{15}$$

Nous identifierons la droite (14), ensuite la droite (15), avec la droite

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\mu} = \frac{dp}{\mu r_1 + s_1} = \frac{dq}{\mu s_1 + t_1}.$$

En éliminant le paramètre μ et en adjoignant la relation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

nous obtenons le premier système de caractéristiques :

$$
(16) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\
& dp - s_1\,dx + r_1\,dy = 0, \\
& dq - t_1\,dx + s_1\,dy = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On obtiendrait de même pour le second système de caractéristiques :

$$
(17) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\
& dp - s_1\,dx - t_1\,dy = 0, \\
& dq + r_1\,dx + s_1\,dy = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Le système (17) se déduit du système (16) par la permutation des lettres r_1 et $-t_1$. D'où ce résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de caractéristiques soient confondues est que la fonction v soit harmonique.

Soit

$$
(18) \qquad U(x, y, z, p, q) = C
$$

une intégrale *intermédiaire* du premier ordre de l'équation (13). Cette fonction satisfait à l'une des équations aux dérivées partielles que l'on obtient en remplaçant dans l'un des systèmes (16) et (17), dx, dy, dp, dq, respectivement, par

$$
\frac{\partial U}{\partial p}, \quad \frac{\partial U}{\partial q}, \quad -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z}\right), \quad -\left(\frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z}\right).
$$

On obtient ainsi le système

$$
(19) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& X(U) = \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z} + s_1\frac{\partial U}{\partial p} - r_1\frac{\partial U}{\partial q} = 0, \\
& Y(U) = \frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} + t_1\frac{\partial U}{\partial p} - s_1\frac{\partial U}{\partial q} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

et un système analogue, obtenu en utilisant les équations (17), ou, ce qui revient au même, en permutant les lettres r_1 et $-t_1$.

Les conditions pour que le système (19) soit complet se trouvent facilement :

$$X(q) - Y(p) = 0,$$
$$X(t_1) - Y(s_1) = 0,$$
$$X(s_1) - Y(r_1) = 0.$$

Ces conditions remplies, le système (19) est même jacobien. Les deux dernières conditions se trouvent vérifiées d'elles-mêmes. Il reste la première qui donne

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'un des systèmes de caractéristiques admette trois conbinaisons intégrales [*ou que le système* (19) *admette trois intégrales distinctes*] *est que la fonction v soit harmonique.*

Je dis que, dans ce cas, la recherche de la fonction u exige, en dehors de calculs d'élimination, *une seule quadrature.* En effet, par suite de la condition

$$(20) \qquad \Delta v = 0,$$

les deux systèmes de caractéristiques se confondent. Nous pouvons alors, par exemple, considérer le système (17), qui s'écrira

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, \\ dp - dq_1 &= 0, \\ dq + dp_1 &= 0, \end{aligned} \right.$$

d'où les deux combinaisons intégrales visibles

$$p - q_1 = c, \qquad q + p_1 = c'.$$

En portant les valeurs de p et de q dans la première des relations (21) nous obtenons l'équation

$$dz = (c + q_1)\,dx + (c' - p_1)\,dy$$

qui est complètement intégrable, en vertu de la relation (20).

Son intégration est immédiate. Soient en effet $\bar{v}$ la fonction harmonique conjuguée de v, $\bar{p}$ et $\bar{q}$ ses dérivées partielles de premier ordre. On a

$$q_1\,dx - p_1\,dy = \bar{p}\,dx + \bar{q}\,dy = d\bar{v},$$

donc

$$dz = c\,dx + c'\,dy + d\bar{v},$$

d'où

$$z = cx + c'y + c'' + \bar{v}.$$

Cette intégrale est indépendante de p et q, donc elle constitue une intégrale complète de l'équation (13).

Pour obtenir l'intégrale générale, on n'aura qu'à établir entre les constantes arbitraires c, c', c'' deux relations arbitraires

$$c = \varphi(c''), \qquad c' = \psi(c'')$$

et à prendre l'enveloppe de cette famille de surfaces à un paramètre.

La fonction u la plus générale s'obtiendra donc par l'élimination de c entre les deux relations

$$u = \bar{v} + x\varphi(c) + y\psi(c) + c,$$
$$0 = x\varphi'(c) + y\psi'(c) + 1.$$

Notre assertion est ainsi justifiée, car la fonction v étant donnée la fonction $\bar{v}$ s'obtient par une intégrale curviligne.

Supposons maintenant que la fonction v ne soit pas harmonique. Alors les deux systèmes de caractéristiques sont distincts. Chacun d'eux admettra au plus deux combinaisons intégrales distinctes. Le système (17) a toujours les deux combinaisons intégrables

$$dp - dq_1 = 0, \qquad dq + dp_1 = 0.$$

Quant au système (16), plusieurs cas peuvent se présenter.

Considérons-y, d'abord, z, p, q comme fonctions inconnues, x et y comme variables indépendantes. On remarquera alors que chacune des deux dernières équations peut être traitée indépendamment des autres, puisqu'elle ne contient que les deux variables et une seule des fonctions inconnues. Prenons par exemple la seconde équation

$$dp = s_1\,dx - r_1\,dy.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit com-

plètement intégrable est que l'expression

$$\Delta\varphi(x, y)$$

ne dépende pas de x.

En effet, cette équation est équivalente aux deux suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = s_1, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -r_1,$$

d'où la condition

$$\frac{\partial s_1}{\partial y} + \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial s_1}{\partial y} = \frac{\partial t_1}{\partial x},$$

donc la condition d'intégrabilité devient

$$\frac{\partial}{\partial x}(r_1 + t_1) = 0$$

et notre affirmation est justifiée.

On verrait de même que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$dq = t_1\,dx - s_1\,dy$$

soit intégrable est que $\Delta\varphi$ ne dépende pas de y.

Dès lors, trois cas sont à distinguer :

1° On a

$$\Delta\varphi = \text{const}.$$

Alors les deux systèmes (16) et (17) admettent chacun deux combinaisons intégrables. On sait que dans ce cas la recherche de la fonction u se ramène à des quadratures.

2° La fonction $\Delta\varphi$ dépend seulement de l'une des variables, par exemple de x. Alors, la seconde équation du système (16) est, seule, intégrable complètement. Dans ce cas, la recherche de la fonction u se ramène à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

3° L'expression $\Delta\varphi$ est fonction de x et de y. La deuxième et la troisième équation du système (16) ne sont pas complètement intégrables. Ce système n'admet donc aucune combinaison intégrable. Une intégrale intermédiaire est toujours celle que l'on sait :

$$p - q_1 = \Phi(q + p_1);$$

mais on ne pourra pas achever l'intégration tant que l'on ne particularisera pas la fonction Φ.

10. Dans les paragraphes précédents, nous avons considéré m comme un paramètre séparé. Dans les lignes qui suivent, m sera considéré comme une fonction du point (x, y) *donnée a priori* ou, en employant une terminologie empruntée à la Mécanique, $m(x, y)$ définira un champ de droites ou un *champ dirigé*.

Nous allons démontrer les deux propriétés suivantes :

I. *Étant donnés un champ dirigé* $m(\zeta)$ *et une fonction quelconque* $f[\zeta]$, *il existe une infinité de fonctions* $F(\zeta)$ *dont la dérivée suivant la direction du champ soit égale à la fonction donnée.*

Soit, en effet,

$$F = u + iv$$

la fonction inconnue. Nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial m} = u_1 + iv_1,$$

où u_1 et v_1 sont données psr les formules (3) [Section I, § 1].

Nous sommes alors conduits aux équations

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + m^2\frac{\partial v}{\partial y} - (1 + m^2)a = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - m^2\frac{\partial u}{\partial y} - (1 + m^2)b = 0, \end{aligned}\right.$$

a et b étant, respectivement, les parties réelle et imaginaire de la fonction f.

En éliminant successivement les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y},$$

nous obtenons le système

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + m\dfrac{\partial u}{\partial y} - a + mb = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} + m\dfrac{\partial v}{\partial y} - ma - b = 0, \end{cases}$$

où les variables u et v sont *séparées*.

Le théorème est donc établi et le système (23) nous indique le degré de généralité de la fonction f, qu'on pourrait appeler la *fonction primitive de $a + ib$ suivant le champ $m(x, y)$*.

Cas particulier. — Supposons la fonction $a + ib$ analytique. La recherche de la fonction primitive peut être faite alors d'une manière synthétique, qui nous donnera en même temps la forme de la fonction.

Une solution du problème est constituée par la fonction analytique

$$\int_{z_0}^{z} (a + ib)\,dz \qquad (z = x + iy).$$

On n'a qu'à lui ajouter la fonction la plus générale dont la dérivée suivant le champ donné soit nulle.

Or, si

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

est une intégrale première particulière de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = m(x, y),$$

la solution la plus générale de ce nouveau problème est donnée par

$$\theta(\varphi) = \psi(\varphi) + i\chi(\varphi),$$

ψ et χ étant deux fonctions réelles arbitraires.

On aura donc, dans le cas particulier envisagé,

$$f(x, y) = \int_{z_0}^{z} (a + ib)\,dz + \theta(\varphi).$$

L'étude directe du système (23) conduirait d'ailleurs au même résultat.

Remarque. — Exprimons que les valeurs de m fournies par les équations sont les mêmes. Nous obtenons la relation

$$(24)\qquad \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} - a}{\dfrac{\partial u}{\partial y} + b} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} - b}{\dfrac{\partial v}{\partial y} - a}.$$

D'où ce résultat :

Étant donnée une fonction complexe quelconque $a + ib$, toutes les fonctions dont la dérivée, suivant la direction d'un champ convenable, est égale à la fonction donnée, sont caractérisées par la relation (24). Cette condition étant remplie, il existe un seul champ $m(x, y)$ tel que

$$\frac{\partial(u + iv)}{\partial m} = a + ib.$$

La condition (24) prend une forme simple dans le cas où $a + ib$ est une fonction analytique.

Soit $A + iB$ une fonction analytique ayant $a + ib$ pour dérivée. On a alors

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} = a,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial y} = b$$

et la relation (24) s'écrira

$$(24')\qquad \frac{\partial(A - u, B - v)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Elle entraîne la suivante :

$$\frac{d(A + iB)}{d\zeta} = \frac{\partial(u + iv)}{\partial m}.$$

Le théorème I peut être considéré comme généralisant le théorème d'existence d'une fonction primitive pour une fonction analytique donnée.

11. Voici une généralisation analogue pour les équations différentielles :

II. *Étant donnés un champ dirigé $m(x, y)$ et une fonction complexe quelconque*

$$g[\zeta, \zeta'] = a(x, y, x', y') + i\, b(x, y, x', y')$$

des variables complexes $\zeta = x + iy$, $\zeta' = x' + iy'$, il existe en général une infinité de fonctions ζ' satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{d\zeta'}{d\zeta} = g[\zeta, \zeta'],$$

la dérivation du premier membre étant effectuée suivant le champ dirigé donné.

En suivant la même marche que pour la première proposition, nous sommes conduits au système

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + m\left(\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\right) + m^2 \frac{\partial y'}{\partial y} - (1 + m^2)\, a(x, y, x', y') = 0,$$
$$\frac{\partial y'}{\partial x} + m\left(\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial x}\right) - m^2 \frac{\partial x'}{\partial y} - (1 + m^2)\, b(x, y, x', y') = 0.$$

Ici on ne peut plus séparer les fonctions x' et y', mais on peut, du moins, séparer leurs dérivées, comme plus haut

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + m \frac{\partial x'}{\partial y} - \quad a(x, y, x', y') + m\, b(x, y, x', y') = 0,$$
$$\frac{\partial y'}{\partial x} + m \frac{\partial y'}{\partial y} - m\, a(x, y, x', y') - \quad b(x, y, x', y') = 0.$$

On commencera par intégrer la première équation, où l'on considérera y' comme un paramètre. On en obtiendra l'intégrale générale sous la forme

$$U(x, y, x'; y') = 0.$$

Soit, de même,

$$V(x, y, y'; x') = 0$$

l'intégrale générale de la seconde équation. Ces deux relations permettent, en général, de définir x' et y' en fonction de x et de y ; les cas d'exception sont ceux prévus par la théorie des fonctions implicites.

Le théorème II est ainsi établi.

12. Nous terminerons cette première Partie par un résultat intéressant concernant les relations mutuelles des fonctions complexes.

Donnons-nous une fonction quelconque

$$F(x, y) = U(x, y) + i\,V(x, y).$$

La remarque suivante est presque évidente :

Si

$$f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

est une autre fonction quelconque et si le rapport $\frac{dF}{df}$ *est indépendant de* $\frac{dy}{dx}$, *alors* F *est une fonction analytique de* f. *Inversement, si* F *peut s'exprimer en fonction analytique de* f, *le rapport précédent est indépendant de* $\frac{dy}{dx}$.

Nous dirons, dans ces conditions, que les fonctions F et f sont de la même classe [1]. Proposons-nous alors de caractériser analytiquement toutes les fonctions f de la même classe qu'une fonction donnée F. Nous aurons

$$\frac{dF}{df} = \frac{dU + i\,dV}{du + i\,dv} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}},$$

d'où les conditions cherchées

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Elles peuvent encore s'écrire, en séparant le réel et l'imaginaire,

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

(1) Cette définition ne diffère pas de celle donnée par MM. Hedrick, Ingold et Westfall, dans leur Mémoire : *Théorie of non-analytic Functions of a complex variable* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9e série, t. II, 1923).

ou encore

$$(25')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(U, u)}{\partial(x, y)} = \dfrac{\partial(V, v)}{\partial(x, y)}, \\ \dfrac{\partial(U, v)}{\partial(x, y)} = -\dfrac{\partial(V, u)}{\partial(x, y)}. \end{cases}$$

Ceci établi, séparons, dans le déterminant fonctionnel $\dfrac{\partial(F, f)}{\partial(x, y)}$, les parties réelle et imaginaire. Nous obtenons

$$\frac{\partial(F, f)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(U, u)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(V, v)}{\partial(x, y)} + i\left[\frac{\partial(U, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(V, u)}{\partial(x, y)}\right],$$

on a par conséquent, en vertu de (25'),

$$(26)\qquad \frac{\partial(F, f)}{\partial(x, y)} = 0$$

Réciproquement, la relation (26) entraîne les deux relations (25'). Nous obtenons donc cette généralisation du théorème fondamental des déterminants fonctionnels pour les fonctions réelles :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions complexes des variables réelles x, y soient fonctions analytiques l'une de l'autre est que leur déterminant fonctionnel soit nul.

Ce résultat curieux peut d'ailleurs se déduire du suivant, non moins curieux, et dont la démonstration n'offre pas de difficulté spéciale :

Lorsque F *est fonction analytique de f, on peut appliquer le théorème de dérivation des fonctions de fonction ; et réciproquement.*

C'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{df}\,\frac{\partial f}{\partial x}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

LA NOTION DE FONCTIONS CONJUGUÉES DANS L'ESPACE A QUATRE DIMENSIONS.

I. — Fonctions de point.

1. Nous nous proposons d'étudier ici quelques transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions, en cherchant à généraliser la théorie des fonctions harmoniques conjuguées dans le plan.

M. Volterra [1] a étendu la notion de fonctions conjuguées à l'espace à trois dimensions, en introduisant les *fonctions de lignes*. Sa méthode peut s'appliquer pour n'importe quel nombre de dimensions et l'on peut résumer ses résultats de la façon suivante :

Étant donnée une fonction potentielle dans l'espace à n dimensions, il existe une fonction de variétés à $(n - 1)$ dimensions, conjuguée de la première.

Dans l'espace à quatre dimensions il existe, au point de vue de M. Volterra, une autre sorte de fonctions conjuguées. Ce sont les fonctions conjuguées des fonctions de lignes et qui sont encore des fonctions de lignes.

D'autre part, dans le même espace, un point peut être défini, non seulement par quatre nombres, mais aussi par l'intersection de *deux* surfaces, c'est-à-dire, au point de vue algébrique, par deux équations (complexes). Cette façon d'envisager le point, le rapproche du point du plan, qui est défini par deux équations (réelles).

Il est donc intéressant de voir si les fonctions de points peuvent aussi conduire à la notion de fonctions conjuguées dans l'espace. Ce

---

(1) Voir ses *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, professées à Stockholm (nouveau tirage, 1912. A. Hermann et fils, éditeurs). 5e leçon et suivantes.

qui suit est consacré à l'analyse de cette question, avec quelques résultats complémentaires.

2. Nous nous placerons d'abord au point de vue des transformations ponctuelles. Considérons, pour commencer, le cas d'une seule variable complexe. Toute fonction $w = u + iv$, de la variable complexe $z = x + iy$, définit une transformation ponctuelle du plan (x, y) dans le plan (u, v).

Les fonctions analytiques sont caractérisées par la propriété que cette transformation conserve les angles. Cette condition peut être simplifiée. Considérons, en effet, dans le plan des z, une direction de coefficient angulaire m. Si μ est le coefficient angulaire de la direction correspondante du plan des w, les deux quantités μ et m sont liées par la relation homographique

$$\mu = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} m}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} m}.$$

Pour un autre couple (m', μ') de directions correspondantes, on aura aussi

$$\mu' = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} m'}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} m'}.$$

Posons-nous alors la question suivante :

Y a-t-il des valeurs de m, telles que la relation

$$mm' + 1 = 0$$

entraîne la suivante

$$\mu\mu' + 1 = 0?$$

En d'autres termes : *Existe-t-il des systèmes orthogonaux de courbes du plan des z, se tranformant en des systèmes orthogonaux du plan des w?*

D'après les formules écrites plus haut, les valeurs cherchées de m

doivent satisfaire à l'équation

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}m\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}m'\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}m\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}m'\right)=0,$$

m et m' étant supposés liés par la relation $1+mm'=0$.

En posant, comme d'habitude,

$$E=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \qquad F=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad G=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

cette équation peut s'écrire

$$E+F(m+m')+Gmm=0$$

ou encore

$$Fm^2+(E-G)m-F=0 \tag{1}$$

Si m_1 et m_2 sont les racines de cette équation, on a $1+m_1m_2=0$, de sorte que les deux racines de l'équation (1) conduisent à la même solution. Nous obtenons par conséquent ce résultat, énoncé pour la première fois par Tissot.

THEOREME. — *Il existe en général un systeme orthogonal de courbes et un seul dans le plan des z, auquel correspond un système orthogonal de courbes dans le plan des σ* [1].

Le théorème de Tissot comporte un cas d'exception, celui où l'on aurait à la fois

$$E=G \qquad F=0$$

Ces équations caractérisent les fonctions analytiques de $x\pm iy$. Nous obtenons donc la propriété suivante :

Les fonctions analytiques de $x\pm iy$ peuvent être caractérisees par la

---

[1] Une demonstration analytique, differente de celle du texte, se trouve dans le Memoire cite de MM Hedrick, Ingold et Westfall La demonstration geometrique est d'ailleurs immediate (DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t III, p 47 49) Si nous avons donne la demonstration precedente, c est surtout en vue d'une generalisation a laquelle la demonstration geometrique ne saurait conduire

seule propriété de transformer tout système orthogonal en un système orthogonal.

3. Ce sont ces deux propriétés que nous essaierons de transporter, *mutatis mutandis*, à l'espace à quatre dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4). Toute transformation ponctuelle de cet espace peut être définie au moyen de *deux* fonctions

$$Z = u_1 + i u_2 \qquad Z' = u_3 + i u_4$$

de deux variables complexes

$$z = x_1 + i x_2 \qquad z' = x_3 + i x_4$$

Proposons-nous d'abord de chercher les transformations qui changent toute surface caractéristique en une surface caractéristique (1). Nous résoudrons pour cela la question préliminaire suivante :

Exprimer que l'équation

$$f[z, z'] = 0$$

définit une surface caractéristique.

Si l'on pose

$$f = u + i v,$$

l'équation écrite équivaut aux deux suivantes :

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$
$$v(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Elles définiront, par exemple, x_3 et x_4 en fonction de x_1 et x_2. Il faut exprimer alors qu'on a

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial x_4}{\partial x_1}.$$

---

(1) On appelle, d'après E.-E. Levi, surface *caractéristique* de l'espace à quatre dimensions (z, z'), toute surface représentable par une équation de la forme

$$z' = \text{fonction analytique de } z.$$

Or, en différentiant les équations écrites plus haut, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}=0,$$

d'où

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_4)}}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_3,x_4)}},\qquad \frac{\partial x_4}{\partial x_1}=\frac{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_3)}}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_3,x_4)}},$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_2}=-\frac{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_2,x_4)}}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_3,x_4)}},\qquad \frac{\partial x_4}{\partial x_2}=\frac{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_2,x_3)}}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_3,x_4)}},$$

avec l'hypothèse

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_3,x_4)}\neq 0.$$

Les conditions cherchées peuvent alors s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_4)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_2,x_3)}=0,\\&\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_3)}-\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_2,x_4)}=0.\end{aligned}\right.$$

Ceci établi, revenons au problème initial. Toute surface caractéristique de l'espace (Z, Z') peut s'écrire

$$(3)\qquad Z'=\varphi(Z)=\varphi_1(u_1,u_2)+i\,\varphi_2(u_1,u_2),$$

avec les conditions

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2},\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}.$$

Effectuons la transformation

$$u_i=u_i(x_1,x_2,x_3,x_4)\qquad(i=1,2,3,4).$$

La relation (3) s'écrira

$$u_3(x_1,x_2,x_3,x_4)-\varphi_1[u_1(x_1,x_2,x_3,x_4),\ u_2(x_1,x_2,x_3,x_4)]=0,$$
$$u_4(x_1,x_2,x_3,x_4)-\varphi_2[u_1(x_1,x_2,x_3,x_4),\ u_2(x_1,x_2,x_3,x_4)]=0.$$

Pour exprimer que ces deux équations définissent une surface caractéristique, nous n'avons qu'à appliquer les équations (2), en posant

$$u = u_3 - \varphi_1(u_1,\ u_2),$$
$$v = u_4 - \varphi_2(u_1,\ u_2).$$

On aura alors

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u_3}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i},$$
$$\frac{\partial v}{\partial u_j} = \frac{\partial u_4}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}$$

et, par conséquent, en tenant compte des relations (4),

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x_i,\ x_j)} = \frac{\partial(u_3,\ u_4)}{\partial(x_i,\ x_j)} &- \left[\frac{\partial(u_1,\ u_4)}{\partial(x_i,\ x_j)} - \frac{\partial(u_2,\ u_3)}{\partial(x_i,\ x_j)}\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\\ &- \left[\frac{\partial(u_1,\ u_3)}{\partial(x_i,\ x_j)} + \frac{\partial(u_2,\ u_4)}{\partial(r_i,\ u_j)}\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}\\ &+ \frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(x_i,\ x_j)}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}\right)^2\right].\end{aligned}$$

En écrivant alors les conditions (2) et en exprimant qu'elles ont lieu quelles que soient $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}$, nous obtenons les conditions cherchées :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial(u_3,\ u_4)}{\partial(x_1,\ x_4)} + \frac{\partial(u_3,\ u_4)}{\partial(x_2,\ x_3)} = 0,\\ &\frac{\partial(u_3,\ u_4)}{\partial(x_1,\ x_3)} - \frac{\partial(u_3,\ u_4)}{\partial(x_2,\ x_4)} = 0,\\ &\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(x_1,\ x_4)} + \frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(x_2,\ x_3)} = 0,\\ &\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(x_1,\ x_3)} - \frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(x_2,\ x_4)} = 0;\end{aligned}\right.$$

$$(5')\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial(u_1,\ u_4)}{\partial(x_1,\ x_4)} - \frac{\partial(u_2,\ u_3)}{\partial(x_1,\ x_4)} + \frac{\partial(u_1,\ u_4)}{\partial(x_2,\ x_3)} - \frac{\partial(u_2,\ u_3)}{\partial(x_2,\ x_3)} = 0,\\ &\frac{\partial(u_1,\ u_3)}{\partial(x_1,\ x_4)} + \frac{\partial(u_2,\ u_4)}{\partial(x_1,\ x_4)} + \frac{\partial(u_1,\ u_3)}{\partial(x_2,\ x_3)} + \frac{\partial(u_2,\ u_4)}{\partial(x_2,\ x_3)} = 0,\\ &\frac{\partial(u_1,\ u_4)}{\partial(x_1,\ x_3)} - \frac{\partial(u_2,\ u_3)}{\partial(x_1,\ x_3)} - \frac{\partial(u_1,\ u_4)}{\partial(x_2,\ x_4)} + \frac{\partial(u_2,\ u_3)}{\partial(x_2,\ x_4)} = 0,\\ &\frac{\partial(u_1,\ u_3)}{\partial(x_1,\ x_3)} + \frac{\partial(u_2,\ u_4)}{\partial(x_1,\ x_3)} - \frac{\partial(u_1,\ u_3)}{\partial(x_2,\ x_4)} - \frac{\partial(u_2,\ u_4)}{\partial(x_2,\ x_4)} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les relations (5) s'interprètent aisément. Posons

$$u_1 + iu_2 = f(z, z'),$$
$$u_3 + iu_4 = g(z, z').$$

D'après les équations (2) ces relations expriment que les deux surfaces

$$f(z, z') = \text{const.},$$
$$g(z, z') = \text{const}$$

sont caractéristiques.

Les équations (5′) peuvent, elles aussi, se mettre sous une forme condensée. Soit g_0 la quantité imaginaire conjuguée de g. Multiplions la première équation par i et ajoutons-la à la seconde. Nous obtenons la relation

$$\frac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_1, x_4)} + \frac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_2, x_3)} = 0.$$

De même, en multipliant la troisième par i et en l'ajoutant à la quatrième, nous obtenons

$$\frac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_1, x_3)} - \frac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_2, x_4)} = 0.$$

Nous pouvons donc résumer :

THÉORÈME. — *Pour qu'une transformation pontuelle*

$$Z = f(z, z'), \qquad Z' = g(z, z'),$$

de l'espace à quatre dimensions, conserve les surfaces caractéristiques, il faut et il suffit :

1° *Que les surfaces*

$$f = 0, \qquad g = 0$$

soient caractéristiques;

2° *Que les relations suivantes soient satisfaites :*

$$(5'') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_1, x_4)} + \dfrac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_2, x_3)} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_1, x_3)} + \dfrac{\partial(f, g_0)}{\partial(x_2, x_4)} = 0. \end{cases}$$

4. Nous ne considérerons pas la transformation précédente sous sa forme la plus générale, mais simplement quelques solutions particulières du système (5), (5′). Une solution immédiate est constituée par un couple de fonctions analytiques de z et z'. Nous appellerons une telle transformation, une *transformation monogène*.

Une autre solution, aussi immédiate, est constituée par les fonctions f_0 et g_0 ([1]), f et g étant analytiques de z et z'. La transformation correspondante sera dite *antimonogène*.

Existe-t-il des transformations *mixtes?* On voit facilement que les équations (5) sont satisfaites par un couple de fonctions (f, g_0) telles que f et g soient analytiques.

Il reste à voir si les équations (5′) sont satisfaites. Or, en vertu des conditions posées. ces équations se réduisent à deux,

$$-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_4}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_4}=0,$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial x_4}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_4}=0,$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(u_1, u_3)}{\partial(x_1, x_3)} = \dfrac{\partial(u_1, u_3)}{\partial(x_2, x_4)}, \\[2ex] \dfrac{\partial(u_1, u_3)}{\partial(x_1, x_4)} = -\dfrac{\partial(u_1, u_3)}{\partial(x_2, u_3)}. \end{cases}$$

Elles expriment que *la surface*

$$u_1 = 0, \qquad u_3 = 0$$

est caractéristique.

5. Si, en passant du plan complexe à l'espace à quatre dimensions, nous remplaçons l'élément linéaire à une dimension par l'élément linéaire à deux dimensions, la notion d'orthogonalité doit être remplacée par la notion d'*orthogonalité complète*.

En effet, dans l'espace à quatre dimensions, deux plans se coupent, en général, en un point et un seul. Alors, par un point quelconque

([1]) Dans toute cette partie, l'indice zéro placé au bas d'une quantité complexe indiquera le changement du signe de i dans cette quantité.

d'un plan, on peut mener un plan et un seul, jouissant de la propriété suivante : Toute droite du premier plan est orthogonale à toute droite du second plan. Les deux plans sont alors *complètement orthogonaux*.

Prenons, en particulier, deux plans caractéristiques, passant par un même point, que nous placerons à l'origine

$$z' = mz, \qquad z' = m'z$$

et proposons-nous de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces deux plans soient complètement orthogonaux.

Remarquons pour cela qu'on peut représenter *paramétriquement* un plan caractéristique et une droite lui appartenant, *sous la même forme*

$$\begin{aligned} z &= A\,t + P, \\ z' &= A' t + P' \end{aligned}$$

Si le paramètre t est complexe, on a un plan caractéristique. Si le paramètre t est réel, on a une droite. Ceci permet d'écrire immédiatement ses coefficients directeurs

$$\frac{A - A_0}{2}, \quad \frac{A - A_0}{2i}, \quad \frac{A' + A'_0}{2}, \quad \frac{A' - A'_0}{2i}.$$

Prenons de même une autre droite

$$\begin{aligned} z &= B\,t + Q, \\ z' &= B' t + Q' \end{aligned}$$

engendrant un autre plan caractéristique. Ses coefficients directeurs seront

$$\frac{B + B_0}{2}, \quad \frac{B - B_0}{2i}, \quad \frac{B' + B'_0}{2}, \quad \frac{B' - B'_0}{2i}.$$

Pour que les deux droites considérées soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} &(A + A_0)(B + B_0) - (A - A_0)(B - B_0) \\ &+ (A' + A'_0)(B' + B_0) - (A' - A'_0)(B' + B'_0) = 0, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

(7) $$AB_0 + BA_0 + A'B'_0 + B'A'_0 = 0.$$

Dans notre cas on a

$$A' = mA, \qquad B' = m'B$$

et la condition (7) s'écrira

$$AB_0(1 + mm'_0) + BA_0(1 + m'm_0) = 0.$$

Or les quantités A et B sont arbitraires. Il faut donc que l'on ait

$$1 + mm'_0 = 0, \qquad 1 + m_0 m' = 0.$$

Ces deux égalités sont équivalentes. Nous obtenons donc le résultat suivant :

Theorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les deux plans caractéristiques*

$$z' = mz, \qquad z' = m'z$$

soient complètement orthogonaux s'exprime par l'une ou l'autre des égalités

$$1 + mm'_0 = 0, \qquad 1 + m_0 m' = 0.$$

On remarquera la grande analogie de ce résultat avec la condition d'orthogonalité de deux droites dans le plan.

6. Voici une application importante de la formule trouvée au paragraphe précédent. Considérons une famille de surfaces caractéristiques à un paramètre, dont nous supposerons l'équation ramenée à la forme

$$z' = f(z, c) = \varphi + i\psi,$$

f étant analytique. Soit

$$z' = g(z) = \chi + i\varpi$$

une autre surface caractéristique. Exprimons que cette surface est complètement orthogonale à toutes les surfaces de la famille considérée, aux points de rencontre. En désignant respectivement par m et m' les coefficients angulaires des plans caractéristiques, tangents aux deux surfaces, on a

$$m = f'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$$

et

$$m' = g'(z) = \frac{\partial\chi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\varpi}{\partial x_1}.$$

La condition d'orthogonalité complète devient ici

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1} - i\frac{\partial\varpi}{\partial x_1}\right) + 1 = 0.$$

ou, en séparant le réel et l'imaginaire,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\varpi}{\partial x_1} + 1 = 0,\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\chi}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varpi}{\partial x_1} \qquad = 0.
\end{aligned}$$

On tire de ce système

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\chi}{\partial x_1} = \frac{\partial\varpi}{\partial x_2} &= -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2},\\
\frac{\partial\varpi}{\partial x_1} = \frac{\partial\chi}{\partial x_2} &= -\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2}.
\end{aligned}\right.$$

Exprimons que la fonction ϖ est harmonique. Nous obtenons, en faisant intervenir partout la fonction ψ seulement, l'équation

$$\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0.$$

De même, en exprimant que la fonction χ est harmonique, nous obtenons l'équation

$$2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0.$$

Nous avons donc, en définitive, un système homogène de deux équations pour définir $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}$ et $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2}$. Le déterminant de ce système est, au signe près,

$$\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right]^2$$

et il ne peut pas être nul, si l'on suppose que la fonction f n'est pas une constante. On doit avoir, par conséquent,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2}=0$$

et, puisque ψ est harmonique, on aura aussi

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}=0.$$

Donc ψ est linéaire en x_1 et x_2 et il en sera de même de φ. Par conséquent, f est linéaire en z. On en déduira, au moyen des équations (8), que g est aussi linéaire en z. Nous obtenons finalement le résultat :

Théorème. — *Une famille de surfaces caractéristiques à un paramètre n'admet pas de trajectoires complètement orthogonales caractéristiques, à moins que ces surfaces ne se réduisent à des plans caractéristiques. Dans ce dernier cas, leurs trajectoires complètement orthogonales sont aussi des plans caractéristiques.*

7. Nous pouvons maintenant revenir à nos transformations. Nous considérerons d'abord les transformations monogènes. Soit

$$F(z, z')=0$$

une surface caractéristique. Au voisinage d'un de ses points $(\overline{z}, \overline{z'})$, elle peut être remplacée, si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur à un, par le plan caractéristique

$$A(z-\overline{z})+B(z'-\overline{z'})=0,$$

dont le *coefficient angulaire* m est donné par la formule

$$m=\frac{dz'}{dz},$$

z' étant la fonction analytique de z, définie par l'équation précédente. Ce plan est le plan caractéristique tangent à la surface au point $(\overline{z}, \overline{z'})$.

Deux surfaces caractéristiques, comme deux surfaces quelconques, se coupent en des points isolés. Nous dirons que les deux surfaces sont *complètement orthogonales* si, en l'un quelconque des points communs, les deux plans tangents sont complètement orthogonaux.

Ces définitions posées, considérons une transformation ponctuelle *monogène* quelconque

$$Z = f(z, z'), \qquad Z' = g(z, z') \tag{9}$$

de l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4) en l'espace (u_1, u_2, u_3, u_4). La question généralisant celle du début de cette Section peut s'énoncer de la manière suivante :

Existe-t-il des systèmes complètement orthogonaux de surfaces caractéristiques du premier espace, se transformant en des systèmes complètement orthogonaux du second espace ?

Soient, respectivement, m une direction plane caractéristique de l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4), $\overline{m}$ la direction transformée. On a

$$\overline{m} = \frac{dZ'}{dZ} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial g}{\partial z'}\,dz'}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial f}{\partial z'}\,dz'} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial z'}\,m}{\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial z'}\,m}. \tag{10}$$

Si m' est une autre direction plane caractéristique, complètement orthogonale à m et $\overline{m'}$ sa transformée dans l'espace (u_1, u_2, u_3, u_4), il faut que la relation

$$1 + m m'_0 = 0$$

entraîne la suivante :

$$1 + \overline{m}\,\overline{m}'_0 = 0.$$

Cette dernière relation peut s'écrire, en vertu de la formule (10),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z'}\,m\right)\left(\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial f_0}{\partial z'}\,m'_0\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z'}\,m\right)\left(\frac{\partial g_0}{\partial z} + \frac{\partial g_0}{\partial z'}\,m'_0\right) = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial z'}\right|^2 - \left|\frac{\partial g}{\partial z'}\right|^2 + \left\{\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 + \frac{\partial g}{\partial z'}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0\right\} m& \\ + \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0 + \frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0\right\} m'_0 = 0&,\end{aligned}$$

ou enfin, en remplaçant m'_0 par $-\frac{1}{m}$,

$$(11)\quad -\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0+\frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0\right\}+\left[\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial f}{\partial z'}\right|^2-\left|\frac{\partial g}{\partial z'}\right|^2\right]m$$
$$+\left\{\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0+\frac{\partial g}{\partial z'}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0\right\}m^2=0.$$

Cette équation donne deux valeurs pour m, et *les directions planes caractéristiques, ainsi obtenues, sont complètement orthogonales.*

Considérons, en effet, l'équation du second degré

$$(A+iB)x^2+2Cx-(A-iB)=0,$$

où A, B, C sont réels. Si α et β sont les deux racines de cette équation, on a entre ces quantités la relation

$$\alpha\beta_0+1=0.$$

En effet, si l'on forme l'équation ayant pour racines $-\frac{1}{\alpha_0}$ et $-\frac{1}{\beta_0}$, on retombe sur la proposée. On a donc bien

$$\alpha=-\frac{1}{\beta_0};$$

on ne peut pas avoir $\alpha=-\frac{1}{\alpha_0}$, car $\alpha\alpha_0$ est positif.

Nous obtenons par conséquent cette généralisation du théorème de Tissot :

Théorème. — *Il existe, en général, un système de surfaces caractéristiques, complètement orthogonales, et un seul, de l'espace* (z, z'), *qui est changé, par une transformation ponctuelle monogène, en un système complètement orthogonal de l'espace* (Z, Z').

8. Le théorème précédent comporte, comme le théorème de Tissot, un cas d'exception, celui où l'on aurait à la fois

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|^2=\left|\frac{\partial f}{\partial z'}\right|^2+\left|\frac{\partial g}{\partial z'}\right|^2,\\&\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0+\frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0=0,\\&\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0+\frac{\partial g}{\partial z'}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0=0.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, ces trois équations se réduisent à deux distinctes, puisque les deux dernières sont équivalentes.

Pour résoudre ce système, nous procéderons de la manière suivante: Nous tirons de la seconde équation

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0},$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}{\frac{\partial g}{\partial z'}} = \frac{-\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0}{\frac{\partial f}{\partial z'}}.$$

Si l'on multiplie membre à membre ces deux égalités et que l'on tienne compte de la première équation (12), on obtient

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0} = \pm 1, \tag{13}$$

d'où, par exemple,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0, \\ \frac{\partial f}{\partial z'} &= -\left(\frac{\partial g}{\partial z_0}\right)_0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

De la première de ces équations nous tirons

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z'} = \text{const. réelle},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z'} = \text{const. purement imaginaire},$$

donc $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial g}{\partial z'}$ sont constantes et il en sera de même de $\frac{\partial f}{\partial z'}$ et de $\frac{\partial g}{\partial z}$.

Posons alors

$$\frac{\partial f}{\partial z} = a, \qquad \frac{\partial f}{\partial z'} = b, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = a', \qquad \frac{\partial g}{\partial z'} = b'.$$

Entre les constantes a, b, a', b', il y aura, d'après les équations (14), les relations

$$a = b'_0, \qquad b = - a'_0.$$

Nous obtenons par conséquent ce résultat :

THEORÈME. — *La transformation monogène la plus générale changeant tout système de surfaces caractéristiques, complètement orthogonales, en un système jouissant de la même propriété, est la transformation linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} Z &= \quad a\, z + b\, z' + c, \\ Z' &= - b_0 z + a_0 z' + c', \end{aligned}$$

a, b, c, c' étant des constantes arbitraires.

Il est bon de remarquer que cette transformation n'est pas, en général, un déplacement. Il faudrait pour cela que les constantes a et b fussent liées par la relation

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Cette condition serait, d'ailleurs, suffisante.

9. Le cas des transformations antimonogènes se traite de la même manière. On obtient les résultats suivants :

1° *Il existe, en général, un système de surfaces caractéristiques, complètement orthogonales, et un seul qui soit changé, par une transformation ponctuelle antimonogène, en un système jouissant des mêmes propriétés.*

2° *La transformation antimonogène la plus générale changeant tout système de surfaces caractéristiques complètement orthogonales, en un système complètement orthogonal, est donnée par la formule*

$$\begin{aligned} Z &= a\, z_0 + b\, z'_0 + c, \\ Z' &= a' z_0 + b' z'_0 + c' \end{aligned}$$

avec $|a| = |b'|$, $|a'| = |b|$.

10. Passons maintenant aux transformations *mixtes*. Ici, il sera plus commode d'étudier la transformation inverse des directions de l'espace (Z, Z′) dans les directions de l'espace (z, z').

Rappelons qu'une transformation mixte est définie par les relations

$$\begin{aligned} \mathrm{Z} &= u_1 + \iota u_2, \\ \mathrm{Z}' &= u_3 + \iota u_4, \end{aligned}$$

où u_1, u_2, u_3, u_4 satisfont au système (6).

Considérons alors dans l'espace (Z, Z′) le plan caractéristique

$$\mathrm{Z}' = \overline{m}\,\mathrm{Z} \qquad (\overline{m} = \overline{\mu} + \iota\overline{\nu}).$$

Ce plan se transforme dans la surface caractéristique

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &\equiv u_3 - \overline{\mu}\,u_1 + \overline{\nu}\,u_2 = 0, \\ \mathrm{V} &\equiv u_4 - \overline{\nu}\,u_1 - \overline{\mu}\,u_2 = 0 \end{aligned}$$

de l'espace (z, z').

La direction plane caractéristique, tangente à cette surface, est donnée par la formule

$$m = \frac{dz'}{dz} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \iota\frac{\partial x_4}{\partial x_1}.$$

Or on a

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial(\mathrm{U},\mathrm{V})}{\partial(x_1, x_4)}}{\dfrac{\partial(\mathrm{U},\mathrm{V})}{\partial(x_3, x_4)}}, \qquad \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial(\mathrm{U},\mathrm{V})}{\partial(x_1, x_3)}}{\dfrac{\partial(\mathrm{U},\mathrm{V})}{\partial(x_3, x_4)}}.$$

Si l'on remplace U et V par leurs valeurs, on remarquera que les termes en $\mu\nu$ se réduisent d'eux-mêmes, tandis que les termes linéaires en μ et ν disparaissent en vertu des équations (6).

Il reste

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\dfrac{\partial u_3}{\partial x_4} - (\mu^2+\nu^2)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4}\right)}{-\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_4}\right)^2 + (\mu^2+\nu^2)\left[\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4}\right)^2\right]},$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_3}{\partial x_4} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - (\mu^2+\nu^2)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)}{-\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_4}\right)^2 + (\mu^2+\nu^2)\left[\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4}\right)^2\right]}.$$

Or, on a, respectivement,

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_4}+i\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_4}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)=\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-i\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+i\frac{\partial u_3}{\partial x_4}\right)$$
$$=\frac{\partial g_0}{\partial z}\left(\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_4}+i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_4}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0,$$

$$-\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_4}\right)^2=-\frac{\partial g_0}{\partial z'}\left(\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_4}\right)^2=\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0.$$

Par conséquent,

$$m=\frac{\dfrac{\partial g_0}{\partial z}\left(\dfrac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0-\overline{m}\overline{m}_0\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z'}\right)_0}{-\dfrac{\partial g_0}{\partial z'}\left(\dfrac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0-\overline{m}\overline{m}_0\dfrac{\partial f}{\partial z'}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z'}\right)_0},$$

et l'on aura une formule analogue pour un autre couple $(m'\,\overline{m'})$ de directions.

Alors la condition

$$1+mm'_0=0$$

s'écrira

$$\left[\frac{\partial g_0}{\partial z}\left(\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0-\overline{m}\overline{m}_0\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0\right]\left[\left(\frac{\partial g_0}{\partial z}\right)_0\frac{\partial g_0}{\partial z'}-\overline{m'}\overline{m'_0}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\frac{\partial f}{\partial z'}\right]$$
$$+\left[\frac{\partial g_0}{\partial z'}\left(\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0-\overline{m}\overline{m}_0\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0\right]\left[\frac{\partial g_0}{\partial z'}\left(\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0-\overline{m'_0}\overline{m'}\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0\right]=0.$$

Or on a

$$1+\overline{m}\overline{m'_0}=0.$$

En posant donc

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0\left(\frac{\partial g_0}{\partial z}\right)_0\frac{\partial g_0}{\partial z'}+\frac{\partial f}{\partial z'}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_0\frac{\partial g_0}{\partial z'}\left(\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right)_0=\mathrm{A}+i\mathrm{B},\\ &\left|\frac{\partial g_0}{\partial z}\right|^2\left|\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2\left|\frac{\partial f}{\partial z'}\right|^2+\left|\frac{\partial g_0}{\partial z'}\right|^4+\left|\frac{\partial f}{\partial z'}\right|^4=2\mathrm{C},\end{aligned}\right.$$

l'équation précédente s'écrira

$$(16)\qquad (\mathrm{A}+i\mathrm{B})|\overline{m}|^4-2\mathrm{C}|\overline{m}|^2+(\mathrm{A}-i\mathrm{B})=0.$$

Elle se décompose en deux

$$(17)\qquad \begin{cases} A|\overline{m}|^4 - 2C|\overline{m}|^2 + A = 0, \\ B|m|^4 - B = 0. \end{cases}$$

Deux cas sont alors à distinguer :

1° B est différent de zéro. Alors le système (17) est incompatible, si $A \neq C$, ce qui arrive en général. Car la seconde équation donne

$$|\overline{m}|^2 = 1$$

et, en introduisant dans la première, on obtient $A = C$.

Supposons $A = C \neq 0$. Alors la première équation devient

$$A\{|\overline{m}|^2 - 1\}^2 = 0,$$

elle est indépendante des fonctions données et donne

$$|\overline{m}| = 1.$$

2° B est nul identiquement. L'équation

$$A|\overline{m}|^4 - 2C'|\overline{m}|^2 + A = 0,$$

donne pour $|\overline{m}|^2$ deux solutions, liées par l'égalité

$$|\overline{m}|^2\,|\overline{m}_1|^2 = 1,$$

ce qui fait une solution unique pour notre problème. Pour que cette solution soit réelle et positive, il faut que l'on ait

$$C > A > 0.$$

On ne peut pas avoir $C = 0$, car les fonctions f et g se réduiraient à des constantes. L'équation (16) ne peut donc jamais se réduire à une identité.

Nous résumerons les résultats obtenus sous la forme suivante :

Théorème. — *Soient* A, B, C *les quantités réelles, définies par les équations* (15).

1° *Si* $B \neq 0$ *et* $A = C$, *il existe une infinité de couples de directions* *planes caractéristiques, complètement orthogonales, qui se trouvent changées, par une transformation mixte, en deux directions complètement orthogonales. Toutes ces directions ont leur module égal à l'unité.*

2° *Si* $B = 0$ *et* $0 < A < C$, *il existe un seul système de surfaces caractéristiques complètement orthogonales, qui soit changé en un système complètement orthogonal.*

3° *Dans tous les autres cas, il n'existe aucun système de surfaces caractéristiques complètement orthogonales, qui soit transformé dans un système analogue.*

11. Nous retrouverons les équations (14) du paragraphe 7, en nous plaçant dans cette tentative de généralisation à un point de vue différent : le point de vue de Cauchy.

Représentons un point $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de l'espace à quatre dimensions au moyen de la quantité

$$x = x_1 + i x_2 + j x_3 + k x_4, \tag{18}$$

où les unités complexes i, j, k sont celles qui définissent le quaternion :

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & jk &= -kj = i, \\ j^2 &= -1, & ki &= -ik = j, \\ k^2 &= -1, & ij &= -ji = k. \end{aligned}$$

Nous appellerons la quantité x donnée par (18) une *variable complexe* de l'espace à quatre dimensions. Toute fonction $f(x)$, complexe, de x sera de la forme

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + i f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ & + j f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + k f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}$$

f_1, f_2, f_3, f_4 étant réelles.

Prenons le quotient différentiel

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1 + i\, df_2 + j\, df_3 + k\, df_4}{dx_1 + i\, dx_2 + j\, dx_3 + k\, dx_4},$$

en un point déterminé de l'espace, et posons la condition que ce quotient dépende du point x seul et non pas des différentielles.

Nous aurons l'équation

$$\begin{aligned} & df_1 + i\, df_2 + j\, df_3 + k\, df_4 \\ & \quad = (dx_1 + i\, dx_2 + j\, dx_3 + k\, dx_4)(\varphi_1 + i\varphi_2 + j\varphi_3 + k\varphi_4), \end{aligned}$$

φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 étant indépendantes des différentielles.

En égalant les coefficients des mêmes différentielles dans les deux membres, nous obtenons les équations de condition

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + j\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + k\frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= \varphi_1 + i\varphi_2 + j\varphi_3 + k\varphi_4, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + i\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + j\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + k\frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= -\varphi_2 + i\varphi_1 + j\varphi_4 + k\varphi_3, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + i\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + j\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + k\frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= -\varphi_3 + i\varphi_4 - j\varphi_1 + k\varphi_2, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_4} + i\frac{\partial f_2}{\partial x_4} + j\frac{\partial f_3}{\partial x_4} + k\frac{\partial f_4}{\partial x_4} &= -\varphi_4 - i\varphi_3 + j\varphi_2 + k\varphi_1, \end{aligned}$$

qui se décomposent en seize équations entre des quantités réelles.

L'élimination de φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 entre ces équations conduit aux douze équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Posons

$$z = x_1 + i x_2, \qquad z' = x_3 + i x_4, \qquad F = f_1 + i f_2, \qquad G = f_3 + i f_4.$$

Les équations ci-dessus montrent simplement que les fonctions F et G sont analytiques en z et z' et que l'on a de plus

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial G}{\partial z'}\right)_0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z'} = -\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0.$$

Inversement, les fonctions F et G étant analytiques et satisfaisant à ces deux équations, donneront naissance aux douze équations écrites plus haut.

Or, les deux dernières équations trouvées sont justement les équations (14) du paragraphe 7.

Ainsi donc, en partant de deux points de vue différents, nous arrivons toujours aux fonctions linéaires en z et z'. On est en droit d'en conclure que *toute tentative de généraliser les fonctions harmoniques conjuguées, pour l'espace à quatre dimensions, devra échouer, tant qu'on gardera les fonctions de points, ou tant qu'on ne quittera pas les dérivées ordinaires.*

12. Nous garderons, dans cette Section, les fonctions de points, mais nous prendrons comme propriété des fonctions conjuguées, apte à être généralisée, celle qu'a adoptée M. Volterra dans son Ouvrage déjà cité : Les dérivées suivant deux directions perpendiculaires quelconques, mais orientées de la même façon que les axes de coordonnées, sont égales.

Introduisons d'abord une notion utile : *Dérivée d'une fonction de deux variables complexes, analytique ou non, suivant une direction plane, caractéristique quelconque de l'espace à quatre dimensions.*

Partons du cas des variables réelles. Étant données une fonction réelle $f(x, y)$, des variables réelles x, y et une direction du plan (x, y), définie par ses cosinus directeurs α, β, on appelle dérivée de $f(x, y)$, suivant la direction (α, β), le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta. \tag{19}$$

dont la signification géométrique est immédiate. On peut aussi procéder d'une autre manière : Soit

$$Y - y = \mu(X - x)$$

une droite passant par le point considéré. Sur cette droite f devient $f(x, \mu x + q)$, c'est-à-dire une fonction de x seulement. On peut alors appeler dérivée de f dans la direction μ la quantité suivante :

$$(20) \qquad \frac{df}{d\mu} = k(\mu)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$k(\mu)$ étant une fonction de μ seulement.

Si l'on compare cette expression avec (19), on trouve

$$(21) \qquad k(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Cela posé, considérons, d'une manière générale, une fonction $f(z)$ de la variable complexe z, analytique ou non. Supposons qu'on ait réussi à définir, en chaque point z du plan, une fonction qui dépende de la valeur de la fonction f au point z et *aux points infiniment voisins*. Nous appellerons cette fonction *dérivée de* $f(z)$ et nous la désignerons par la notation ordinaire $\frac{df}{dz}$. Pour éviter toute confusion, nous pourrons supposer que, dans le cas des fonctions analytiques, il s'agit de la dérivée ordinaire. Dans le cas général, nous ferons une seule hypothèse sur cette dérivée : elle jouit de l'une des propriétés fonctionnelles suivantes :

$$(22) \qquad \frac{df}{d(mz)} = \frac{1}{m}\frac{df}{dz},$$

$$(23) \qquad \frac{df}{d(mz)} = \frac{1}{m_0}\frac{df}{dz},$$

m étant une constante arbitraire.

Considérons maintenant une fonction $f(z, z')$ de deux variables complexes, analytique ou non. Les expressions

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z'}$$

définiront pour nous des dérivées partielles, avec le sens et les propriétés que nous venons d'énoncer. Nous supposerons en outre que ces deux dérivées partielles *ne soient pas liées par une relation linéaire et homogène*.

Soit alors $Z' = mZ + n$ un plan passant par le point (z, z'). Supposons, pour fixer les idées, que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial z'}$ jouisse de la propriété (22).

Nous appellerons dérivée de $f(z, z')$, dans la direction plane caractéristique m, l'expression

$$\frac{df}{dm} = k(m)\left(\frac{\partial f}{\partial z} + m\frac{\partial f}{\partial z'}\right), \tag{24}$$

$k(m)$ restant indéterminée pour le moment.

Soit $g(z, z')$ une autre fonction jouissant des mêmes propriétés que $f(z, z')$ et supposons que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial z'}, \\ \frac{\partial f}{\partial z'} &= -\frac{\partial g}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Je dis que les fonctions $f(z, z')$ et $g(z, z')$ ne peuvent pas être conjuguées au sens de M. Volterra. Soit, en effet, m' la direction plane caractéristique, complètement orthogonale à m. On a

$$m' = -\frac{1}{m_0},$$

et la dérivée de g dans la direction m' s'écrira

$$\frac{dg}{dm'} = k\left(-\frac{1}{m_0}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial g}{\partial z'}\right).$$

Posons la condition de M. Volterra transformée avec nos définitions dans l'espace à quatre dimensions

$$\frac{df}{dm} = \frac{dg}{dm'} \qquad (m \text{ quelconque}). \tag{26}$$

Nous obtenons l'équation

$$m_0 k(m)\left(\frac{\partial f}{\partial z} + m\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = k\left(-\frac{1}{m_0}\right)\left(m_0\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z'}\right)$$

ou, en tenant compte des relations (25),

$$(m_0 k + h)\frac{\partial f}{\partial z} + m_0(mk + h)\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \qquad \left[h = k\left(-\frac{1}{m_0}\right)\right].$$

Comme j'ai supposé qu'il n'y a aucune relation linéaire et homogène entre $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial z'}$, il faut que l'on ait simultanément, pour toute valeur de m,

$$m_0 k + h = 0, \qquad mk + h = 0,$$

ce qui est impossible tant que m est complexe.

Notre affirmation se trouve ainsi justifiée.

13. Il est curieux de constater comment les équations de Cauchy, écrites avec les variables complexes et même avec le sens général que nous avons donné à la dérivée, ne peuvent pas conduire à la notion de fonctions conjuguées. Mais le raisonnement fait indique déjà la modification que l'on doit apporter à ces équations. Si l'on se rappelle que la condition d'orthogonalité complète s'écrit

$$1 + mm'_0 = 0,$$

on a tout de suite l'idée de remplacer les quantités de l'un des deux membres des équations (25) par leurs imaginaires conjuguées.

Posons donc

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0, \\ \frac{\partial f}{\partial z'} &= -\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0. \end{aligned} \right.$$

Je dis que l'on a dans ce cas

$$(28) \qquad \frac{df}{dm} = \left(\frac{dg}{dm'}\right)_0,$$

quel que soit m.

En effet, la dernière relation s'écrira, d'après nos définitions,

$$k(m)\left(\frac{\partial f}{\partial z} + m\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = k_0\left(-\frac{1}{m_0}\right)\left[\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0 - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)_0\right],$$

ou, en vertu des relations (27),

$$(29) \qquad (mk + h_0)\frac{\partial f}{\partial z} + m(mk + h_0)\frac{\partial f}{\partial z'} = 0, \qquad \text{avec } h_0 = k_0\left(-\frac{1}{m_0}\right).$$

On n'a qu'à déterminer $k(m)$, jusqu'ici arbitraire, par l'équation fonctionnelle

$$\frac{k_0\left(-\frac{1}{m_0}\right)}{k(m)} = -m \tag{30}$$

pour que la proposition énoncée se trouve démontrée.

14. Cherchons à déterminer complètement $k(m)$. Pour cela, remarquons que, dans le plan, k est une fonction de la quantité $1+\mu^2$, provenant de $1+\mu\mu'$.

Je partirai donc ici de la forme $1+mm'_0$, en faisant $m'=m$ et je poserai *a priori*

$$k(m) = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{1+|m|^2}}, \tag{31}$$

φ étant un angle à déterminer. En posant

$$-m = |m|e^{i\theta},$$

la relation (30) donne

$$k_0\left(-\frac{1}{m_0}\right) = \frac{|m|e^{i(\theta+\varphi)}}{\sqrt{1+|m|^2}},$$

d'où

$$k\left(-\frac{1}{m_0}\right) = \frac{|m|e^{-i(\theta+\varphi)}}{\sqrt{1+|m|^2}}.$$

On en déduit

$$k(m) = \frac{\left|\frac{1}{m_0}\right| e^{-i(\theta+\varphi)}}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{m_0}\right|^2}}$$

ou bien

$$k(m) = \frac{e^{-i(\theta+\varphi)}}{\sqrt{1+|m|^2}}. \tag{32}$$

Les relations (31) et (32) comparées donnent $\varphi = -\frac{\theta}{2}$. Ainsi, nous avons

$$k(m) = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}}. \tag{33}$$

J'appellerai par conséquent dérivée de la fonction $f(z, z')$, dans la direction plane caractéristique m, la quantité

$$(34) \qquad \frac{df}{dm} = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{m e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}} \frac{\partial f}{\partial z'}.$$

Avec cette définition précise, on peut voir que, réciproquement, *la relation* (27) *entraîne les deux relations* (26).

Les deux quantités

$$\lambda = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}}, \qquad \lambda' = \frac{m e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}}$$

peuvent s'appeler les pseudo-cosinus directeurs de la direction plane caractéristique m. Ils sont liés par les deux relations

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = m,$$

$$|\lambda|^2 + |\lambda'|^2 = 1.$$

Dans la Section III nous ferons une application importante des dernières considérations de cette Section.

II. — Fonctions de bipoint.

15. Supposons qu'on soit dans un plan, sur lequel on convient de marquer en même temps les points et les affixes des variables complexes.

Suivant une locution déjà introduite dans la science par M. F. Cosserat [1], nous appellerons *bipoint* (p, q) l'ensemble des deux points $p(x, y)$ et $q(x_1, y_1)$.

Nous appellerons bipoint *opposé* à un bipoint donné l'ensemble des deux autres sommets du rectangle passant par les deux premiers points et ayant ses côtés parallèles aux axes de coordonnées.

Un bipoint (p, q), tel que la droite pq soit parallèle à l'un des axes de coordonnées, coïncide avec son opposé.

Ces définitions posées, considérons deux fonctions réelles f et g, des

---

[1] Voir son Mémoire des *Annales de Toulouse*, t. 3, 1889.

quatre variables (x, y, x_1, y_1), c'est-à-dire deux fonctions réelles du bipoint $[p(x, y), q(x_1, y_1)]$. Nous dirons que ces deux fonctions sont *conjuguées au bipoint* (p, q), lorsque les deux conditions suivantes seront satisfaites :

1° La dérivée de f au point p, suivant une direction *arbitraire* n, est égale à la dérivée de g au point q, suivant une direction n', perpendiculaire à n dans le sens direct (celui des axes de coordonnées).

2° La propriété précédente est symétrique par rapport aux points p et q. Nous écrirons ces conditions, d'une manière symbolique, sous la forme suivante :

$$(35) \qquad \frac{df}{dn_{p}} = \frac{dg}{dn'_{q}}, \qquad \frac{df}{dn_{q}} = \frac{dg}{dn'_{p}}.$$

Soit α l'argument de la direction n. On a, respectivement,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dn_{p}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \\
\frac{df}{dn_{q}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\sin\alpha. \\
\frac{dg}{dn'_{(p)}} &= -\frac{\partial g}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial g}{\partial y}\cos\alpha. \\
\frac{dg}{dn'_{(p)}} &= -\frac{\partial g}{\partial x_1}\sin\alpha + \frac{\partial g}{\partial y_1}\cos\alpha.
\end{aligned}$$

La première condition donne

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y_1}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\sin\alpha = 0.$$

et la seconde

$$(36) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\sin\alpha = 0.$$

Posons

$$z = x + iy_1, \qquad z' = x_1 + iy.$$

Comme les deux relations précédentes doivent avoir lieu quel que soit α, on en conclut que la fonction $f + ig$ est analytique en z et en z'. Or, le bipoint (z, z') est opposé au bipoint (p, q). Nous pouvons donc énoncer :

Theorème. — *La condition nécessaire et suffisante, pour que les fonctions f et g soient conjuguées (suivant notre définition) au bipoint (p, q), est que la fonction $f + ig$ soit analytique au bipoint opposé.*

16. La propriété précédente caractérise géométriquement les fonctions analytiques de deux variables, qui peuvent, par conséquent, être définies par les deux équations (35). On peut remplacer la seconde de ces équations par la suivante :

$$\frac{df}{dn'_{(q)}} = -\frac{dg}{dn_{(p)}},$$

car on a, respectivement,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dn'_{(q)}} &= -\frac{\partial f}{\partial x_1}\sin\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\cos\alpha,\\ \frac{dg}{dn_{(p)}} &= \frac{\partial g}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial g}{\partial x}\sin\alpha,\end{aligned}$$

et l'équation que nous avons écrite équivaut à celle-ci :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\sin\alpha - \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\cos\alpha = 0$$

et conduit aux mêmes conclusions que l'équation (36).

Les fonctions analytiques de deux variables peuvent donc, en définitive, être caractérisées par le système suivant :

$$(35')\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{df}{dn_{(p)}} &= \frac{dg}{dn'_{(q)}},\\ \frac{df}{dn'_{(q)}} &= -\frac{dg}{dn_{(p)}},\end{aligned}\right.$$

qui rappelle fidèlement le système de Cauchy pour les fonctions analytiques d'*une* variable complexe, $n_{(p)}$ et $n'_{(q)}$ jouant le rôle des variables réelles x et y.

Or, il est facile de vérifier la relation de commutativité

$$\frac{d^2u}{dn_{(p)}\,dn'_{(q)}} = \frac{d^2u}{dn'_{(q)}\,dn_{(p)}}.$$

On en déduit que les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique de deux variables sont caractérisées par l'équation symbolique *unique*

$$\frac{d^2\theta}{dn_p^2} + \frac{d^2\theta}{dn_{(q)}'^2} = 0, \tag{37}$$

qui rappelle l'équation de Laplace dans le plan.

17. Nous allons retrouver les fonctions analytiques de deux variables complexes, à l'occasion d'un problème que nous résoudrons dans ce paragraphe.

Considérons la transformation à quatre variables

$$\left\{\begin{aligned} X &= X(x, y, x_1, y_1), \\ Y &= Y(x, y, x_1, y_1), \\ X_1 &= X_1(x, y, x_1, y_1), \\ Y_1 &= X_1(x, y, x_1, y_1) \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Elle peut être considérée comme une transformation ponctuelle de l'espace à quatre dimensions, mais elle peut aussi être envisagée comme une transformation du bipoint

$$[p(x, y),\ q(x_1, y_1)]$$

dans le bipoint

$$[P(X, Y),\ Q(X_1, Y_1)].$$

Nous exprimerons ceci en disant que les relations (4) définissent une *transformation biponctuelle du plan.*

Supposons le point $q(x_1, y_1)$ fixe et le point $p(x, y)$ variable, sur une direction de coefficient angulaire m. Alors les points P et Q varieront respectivement sur les directions M et M_1, et l'on aura respectivement

$$\left\{\begin{aligned} M(m) &= \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y}\, m}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial y}\, m}, \\ M_1(m) &= \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_1}{\partial y}\, m}{\dfrac{\partial X_1}{\partial x} + \dfrac{\partial X_1}{\partial y}\, m}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Supposons maintenant le point $p(x, y)$ fixe et le point $q(x_1, y_1)$

variable, sur la direction $n_1(x_1, y_1)$. Alors les points P et Q varieront sur les directions $N(n_1)$ et $N_1(n_1)$ et l'on aura, respectivement,

$$(39')\quad \left\{\begin{aligned} N(n_1) &= \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Y}{\partial y_1} n_1}{\dfrac{\partial X}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X}{\partial y_1} n_1}, \\ N_1(n_1) &= \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} n_1}{\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X_1}{\partial y_1} n_1}. \end{aligned}\right.$$

De cette manière, aux deux directions m et n_1 du plan, nous faisons correspondre quatre directions M, N, M_1, N_1, deux pour chaque point transformé.

Ceci dit, posons-nous le problème suivant : *Existe-t-il des transformations biponctuelles, telles qu'à chaque couple de directions orthogonales* (m, n_1) *correspondent les deux couples orthogonaux* (M, N_1) et (M_1, N) (1)?

L'hypothèse

$$n_1 = -\frac{1}{m},$$

jointe aux relations (39) et (39'), fournit tous les éléments de la réponse.

La condition d'orthogonalité des directions M et N_1 donne

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} m\right)\left(-\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} m + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} m\right)\left(-\frac{\partial X_1}{\partial x_1} m + \frac{\partial X_1}{\partial y_1}\right) = 0 \end{aligned}$$

ou, en ordonnant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X_1}{\partial y_1} - \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) m & \\ - \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) m^2 = 0. & \end{aligned}$$

---

(1) On remarquera que ce problème est la généralisation du problème que nous nous sommes posé dans la seconde Partie de ce Mémoire (Ire Section).

De même, la condition d'orthogonalité des directions M_1 et N donne

$$\frac{\partial Y}{\partial y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y_1}\frac{\partial X_1}{\partial x}+\left(\frac{\partial Y}{\partial y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial y_1}\frac{\partial X_1}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial Y_1}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)m$$
$$-\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial Y_1}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)m^2=0.$$

Les deux relations doivent avoir lieu quelle que soit la direction m. D'où les six équations de condition

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}=0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial y_1}+\dfrac{\partial X_1}{\partial x}\dfrac{\partial X}{\partial y_1}=0, \\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial y_1}+\dfrac{\partial X_1}{\partial y}\dfrac{\partial X}{\partial y_1}=\dfrac{\partial Y_1}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial x_1}+\dfrac{\partial X_1}{\partial x}\dfrac{\partial X}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial x_1}+\dfrac{\partial X_1}{\partial y}\dfrac{\partial X}{\partial x_1}=0. \end{cases}$$

Pour transformer ce système, nous procéderons de la manière suivante :

Écrivons la première équation sous la forme

$$\frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial X}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}}{-\dfrac{\partial Y}{\partial x}}=\alpha.$$

La seconde équation s'écrira alors

$$\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}=\alpha\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

De cette équation et de la troisième, nous pourrons tirer $\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}$, et nous trouverons

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}=-\frac{\partial X}{\partial y}\alpha,$$
$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1}=\frac{\partial Y}{\partial y}\alpha,$$

Les trois premières équations du système (40) peuvent donc être remplacées par les suivantes :

$$(41)\qquad \frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial Y}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}}{-\dfrac{\partial Y}{\partial x}} = \frac{-\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial X}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial X}{\partial x}} = \alpha(x, y, x_1, y_1).$$

Si l'on traite d'une manière semblable les trois dernières équations (40), on arrive aux équations

$$(41')\qquad \frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial Y}{\partial y_1}} = \frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial y}}{-\dfrac{\partial Y}{\partial x_1}} = \frac{-\dfrac{\partial Y_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial X}{\partial y_1}} = \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_1}} = \beta(x, y, x_1, y_1).$$

Les transformations biponctuelles satisfaisant aux conditions du problème posé sont donc caractérisées par le système d'équations (41) et (41'). Nous les appellerons, pour abréger, les *transformations* (A).

Les équations (41) et (41') comprennent un cas particulier important, celui où l'on aurait $\alpha = \beta = -1$. On obtient alors le résultat :

Parmi les transformations (A) *se trouvent les transformations telles que les deux combinaisons* $X + iY_1$ *et* $X_1 + iY$ *sont des fonctions analytiques de* $z = x + iy_1$ *et* $z_1 = x_1 + iy$, *c'est-à-dire des fonctions analytiques du bipoint opposé à* (p, q).

18. Appelons *transformation* (A) *générale* la transformation (A) pour laquelle aucune des fonctions X, Y, X_1, X_1 ne peut s'exprimer au moyen de moins de quatre variables quelles que soient les nouvelles variables que l'on prenne.

Appelons encore, pour abréger, transformation *caratéristique* toute transformation ponctuelle à quatre variables qui conserve les surfaces caractéristiques de l'espace à quatre dimensions.

Posons-nous alors la question suivante : *A quelle condition une transformation* (A) *générale est-elle caractéristique ?*

Nous avons trouvé ailleurs les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation ponctuelle à quatre variables soit caractéristique [deuxième Partie, Section I, § 3]. Nous transcrivons ici ces conditions avec les nouvelles notations :

$$\frac{\partial(X, Y_1)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(X, Y_1)}{\partial(y_1, x_1)} = 0,$$

$$\frac{\partial(X, Y_1)}{\partial(x, x_1)} - \frac{\partial(X, Y_1)}{\partial(y_1, y)} = 0,$$

$$\frac{\partial(X_1, Y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(X_1, Y)}{\partial(y_1, x_1)} = 0,$$

$$\frac{\partial(X_1, Y)}{\partial(x, x_1)} - \frac{\partial(X_1, Y)}{\partial(y_1, y)} = 0,$$

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(Y_1, X_1)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(Y_1, X_1)}{\partial(y_1, x_1)} - \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y_1, x_1)},$$

$$\frac{\partial(X, X_1)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(Y_1, Y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(X, X_1)}{\partial(x_1, y_1)} + \frac{\partial(Y_1, Y)}{\partial(x_1, y_1)},$$

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, x_1)} - \frac{\partial(Y_1, X_1)}{\partial(x, x_1)} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y_1, y)} - \frac{\partial(Y_1, X_1)}{\partial(y_1, y)},$$

$$\frac{\partial(X, X_1)}{\partial(x, x_1)} + \frac{\partial(Y_1, Y)}{\partial(x, x_1)} = \frac{\partial(X, X_1)}{\partial(y_1, y)} + \frac{\partial(Y_1, Y)}{\partial(y_1, y)}.$$

Remplaçons dans ces égalités les huit dérivées partielles qui se trouvent comme numérateurs dans les relations (41) et (41′) par leurs valeurs en fonction de α, β et des dénominateurs des mêmes relations. Nous constaterons que la seconde et la quatrième équation sont vérifiées identiquement. Quant à la première, elle se réduit à

$$(\beta - \alpha)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y_1}\right) = 0.$$

Or, la quantité, entre parenthèses, peut s'écrire aussi

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial(X, Y_1)}{\partial(x, y)};$$

donc, elle ne peut être nulle en vertu de notre hypothèse. Il reste alors la condition $\alpha \equiv \beta$. On constatera aisément, qu'en vertu de cette condition, la quatrième, la sixième et la dernière équation sont vérifiées identiquement.

Quant aux deux autres, elles s'écrivent

$$(1-\alpha^2)\left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}+\frac{\partial(X, Y)}{\partial(y_1, x_1)}\right]=0,$$

$$(1-\alpha^2)\left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, x_1)}-\frac{\partial(X, Y)}{\partial(y_1, y)}\right]=0.$$

Deux cas sont donc possibles :

1° On a $\alpha^2=1$. Cette solution était visible *a priori*. Nous l'appellerons la *solution banale;*

2° On a

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}+\frac{\partial(X, Y)}{\partial(y_1, x_1)}=0,$$

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, x_1)}-\frac{\partial(X, Y)}{\partial(y_1, y)}=0.$$

Or, si l'on se rapporte à un lemme établi plus haut [deuxième Partie, Section I, § 3], ces deux relations s'interprètent géométriquement de la manière suivante : *La relation*

$$X+iY=\text{const.}$$

définit $x+iy_1$ comme fonction analytique de x_1+iy.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation* (A) *générale soit caractéristique sont, si l'on écarte la solution évidente $\alpha=\beta=\pm 1$, les suivantes :*

1° *On a*

$$\alpha(x, y, x_1, y_1)\equiv\beta(x, y, x_1, y_1);$$

2° *Les surfaces*

$$X(x, y, x_1, y_1)+iY(x, y, x_1, y_1)=\text{const.}$$

sont caractéristiques.

19. Essayons maintenant de généraliser le problème que nous nous sommes posé au paragraphe 17. Supposons les directions m et n_1, non plus orthogonales, mais quelconques et cherchons les transformations

pour lesquelles on a à la fois

$$\frac{M - N_1}{1 + MN_1} = \frac{m - n_1}{1 + mn_1}, \tag{42}$$

$$\frac{M_1 - N}{1 + M_1 N} = \frac{m - n_1}{1 + mn_1}. \tag{42'}$$

Il suffit, d'ailleurs, d'étudier les relations qui découlent de la condition (42), car, si l'on se reporte aux formules (39) et (39'), on en déduirait celles qui découlent de la condition (42') en échangeant le rôle des couples variables (x, y) et (x_1, y_1).

Ceci dit, si l'on remplace, dans la formule (42), M et N_1 par leurs valeurs en fonction de m et n_1 et si l'on exprime que la relation a lieu pour toutes valeurs de m et n_1, on trouve 9 équations qui se réduisent à 7 équations distinctes, à savoir :

$$\tag{43} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} = -\dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1} = 0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} = 0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}. \end{array} \right.$$

Pour interpréter ce système, nous procéderons de la manière suivante : De la cinquième équation, nous tirons

$$- \frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial Y}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}} = \alpha. \tag{44}$$

et de la quatrième

$$
\frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial Y}{\partial y}} = - \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial X}{\partial y}} = \alpha' \tag{44'}
$$

Nous supposons, bien entendu, que les quatre fonctions X, Y, X_1, Y_1 dépendent effectivement des quatre variables x, y, x_1, y_1. Dans ces conditions, les trois premières équations du système (43) s'écriront :

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} = 0 \\
\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \\
\alpha\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2\right] = \alpha'\left[\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right].
\end{gathered}
$$

Si l'on applique l'identité de Lagrange aux six quantités qui figurent dans les relations précédentes, on trouve, en tenant compte de ces relations mêmes, $\alpha = \pm \alpha'$.

Nous prendrons $\alpha = \alpha'$. Les trois équations précédentes se réduisent à deux :

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} = 0 \\
\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2.
\end{gathered}
$$

Elles montrent que la combinaison $X + iY$ est une fonction analytique de $x \pm iy$. Comme nous avons le choix, nous prendrons $X + iY$ fonction analytique de $x + iy$.

Les équations (44) et (44′) s'écriront maintenant

$$
\frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial Y}{\partial y}} = - \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial X}{\partial y}} = - \frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial Y}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial X}{\partial x}} = \alpha
$$

elles sont identiques aux équations (41).

Si l'on partait de la condition (42′), on trouverait les équations (41′) et puis deux autres équations qui montreront que $X + iY$ est fonction analytique de $x_1 + iy_1$.

Nous appellerons les transformations que nous venons de déterminer, *transformations biconformes*, ou, plus simplement, *transformations* (B). Nous pourrons alors énoncer :

THEOREME. — *Les transformations* (B) *sont des transformations* (A) *pour lesquelles l'un des points transformés est fonction analytique du bipoint primitif.*

Il est aisé de voir que chaque coordonnée du bipoint transformé satisfait à un système de 8 équations aux dérivées partielles du second ordre. Remarquons encore que si, pour les transformations ponctuelles, le problème de la conservation des angles coïncide avec le problème des angles droits, il n'en est pas de même pour les transformations biponctuelles. Au point de vue de la théorie des fonctions, c'est plutôt la transformation (A) qui généralise la transformation conforme, car elle conduit à deux fonctions analytiques et même un peu plus générales de deux variables complexes, et ces fonctions sont indépendantes entre elles. Les propriétés qui suivent justifieront d'ailleurs cette affirmation.

20. Considérons une transformation (A) du bipoint (p, q) dans le bipoint (P, Q). Laissons q fixe et donnons à p un déplacement infiniment petit dans la direction m. Les points P et Q varieront en venant respectivement en P' et Q'. De même, laissons le point p fixe et déplaçons le point q très peu, dans la direction m_1, perpendiculaire à m dans le sens direct. Nous obtenons les points P'' et Q''. Proposons-nous alors de comparer les valeurs algébriques des aires des triangles infiniment petits PP'P'' et QQ'Q''. Nous avons

$$\text{aire } QQ'Q'' = dX_1\,\delta Y_1 - \delta X_1\,dY_1,$$

en désignant par la lettre d le déplacement correspondant à la variation du point p et par δ le déplacement correspondant à la variation du point q.

En explicitant, on obtient

$$\begin{aligned}\text{aire } QQ'Q'' = & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x}dx + \frac{\partial X_1}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}dy\right)\\ & - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial X_1}{\partial y_1}dy_1\right)\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}dx + \frac{\partial Y_1}{\partial y}dy\right),\end{aligned}$$

ou encore, en tenant compte des relations fondamentales (41) et (41′),

$$\text{aire }QQ'Q''=\alpha\beta\Big[\left(\frac{\partial Y}{\partial y_1}dx-\frac{\partial Y}{\partial x_1}dy\right)\left(-\frac{\partial X}{\partial y}dx_1+\frac{\partial X}{\partial x}dy_1\right)$$
$$-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}dx_1-\frac{\partial Y}{\partial x}dy_1\right)\left(-\frac{\partial Y}{\partial y_1}dx+\frac{\partial X}{\partial x_1}dy\right)\Big].$$

Or, en vertu de la condition

$$dx\,dx_1+dy\,dy_1=0,$$

la quantité entre crochets s'écrit tout de suite

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial Y}{\partial y_1}dy_1\right)$$
$$-\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial X}{\partial y_1}dy_1\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)=dX\,\delta Y-\delta X\,dY=\text{aire }PP'P''.$$

On a donc la formule fondamentale

$$\boxed{\text{aire }QQ'Q''=\alpha\beta\text{ aire }PP'P''} \tag{45}$$

Appelons *transformation* (A′) toute transformation (A) pour laquelle les aires infiniment petites PP′P″ et QQ′Q″ sont égales. On voit, d'après la formule (45), que :

Pour qu'une transformation (A) *soit une transformation* (A′), *il faut et il suffit que l'on ait entre les fonctions arbitraires* α *et* β *la relation*

$$\alpha=\frac{1}{\beta}.$$

21. Nous avons vu plus haut qu'une transformation (A) *caractéristique* satisfait aux deux conditions suivantes : 1° $\alpha=\beta$; 2° les surfaces $X+iY=c$ sont caractéristiques. Prenons, en particulier, une transformation (A′). Pour une telle transformation, on a déjà $\alpha\beta=1$, donc la première condition devient $\alpha=\beta=\pm 1$; d'où ce théorème :

Dans une transformation (A′) *caractéristique, les deux combinaisons* $X+iY_1$ *et* X_1+iY *sont des fonctions analytiques du bipoint opposé à* (p, q).

22. Considérons toujours une transformation (A) et faisons varier *simultanément* les points p et q tels que les tangentes à leur déplacement soient rectangulaires. Pouvons-nous déterminer les fonctions α et β telles que les points P et Q se correspondent aussi par tangentes rectangulaires? En d'autres termes, dans quelles conditions la relation

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 = 0 \tag{46}$$

entraîne-t-elle la suivante

$$dX\,dX_1 + dY\,dY_1 = 0\,? \tag{46'}$$

Nous n'avons qu'à calculer les divers termes de la relation (46'). On a respectivement

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x}dx + \frac{\partial X_1}{\partial y}dy + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial X_1}{\partial y_1}dy_1,$$

$$dY_1 = \frac{\partial Y_1}{\partial x}dx + \frac{\partial Y_1}{\partial y}dy + \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}dy_1,$$

ou, en tenant toujours compte des relations fondamentales (41) et (41'),

$$dX_1 = \beta\frac{\partial Y}{\partial y_1}dx - \beta\frac{\partial Y}{\partial x_1}dy + \alpha\frac{\partial Y}{\partial y}dx_1 - \alpha\frac{\partial Y}{\partial x}dy_1,$$

$$dY_1 = -\beta\frac{\partial X}{\partial y_1}dx + \beta\frac{\partial X}{\partial x_1}dy - \alpha\frac{\partial X}{\partial y}dx_1 + \alpha\frac{\partial X}{\partial x}dy_1;$$

donc, la relation (46') s'écrit, en tenant compte de (46),

$$(\alpha-\beta)\left[\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y_1)}(dy_1^2 - dx^2) + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x_1,y)}(dx_1^2 - dy^2) + \left\{\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,x_1)} - \frac{\partial(X,Y)}{\partial(y,y_1)}\right\}(dx_1\,dy_1 - dx\,dy)\right] = 0.$$

La condition cherchée est donc

$$\alpha \equiv \beta.$$

Si l'on considère en particulier une transformation (A'), cette condition devient

$$\alpha = \beta = \pm 1,$$

c'est-à-dire que (en prenant le signe +) les fonctions $X + iY_1$ et $X_1 + iY$ sont analytiques en $x + iy_1$ et $x_1 + iy$. Nous constatons donc qu'une transformation biponctuelle telle que le bipoint opposé au bipoint transformé soit une fonction analytique du bipoint opposé au bipoint primitif satisfait à trois conditions géométriques.

Considérons les points P′, Q′, P″, Q″ du paragraphe 20, et soient PP_1 et QQ_1 les diagonales des parallélogrammes formés respectivement avec les côtés PP′, PP″ et QQ′, QQ″. Les trois conditions géométriques sont alors les suivantes :

1° Les angles (PP′, QQ″) et (QQ′, PP″) sont droits [transformation (A)].

La transformation considérée étant une transformation (A).

2° Les aires des parallélogrammes $PP'P''P_1$ et $QQ'Q''Q_1$ sont égales [transformation (A′)].

3° Les diagonales PP_1 et QQ_1 sont perpendiculaires (conservation de la correspondance par tangentes perpendiculaires).

II. — Dérivée aréolaire. Fonctions aréolairement coujuguées.

23. Dans la Section I de cette Partie, nous avons défini des fonctions conjuguées, en laissant indéterminée la notion de dérivée pour les fonctions *non analytiques*. Nous en ferons ici une application à une notion due à M. Pompéiu, la notion de *dérivée aréolaire* [1].

Soit $u(x,y)+iv(x,y)$ une fonction de la variable complexe $x+iy$, continue dans le voisinage d'un certain point (x_0, y_0). Entourons ce point d'un contour C et formons le rapport

$$\frac{\int_{C_1}(u+iv)(dx+i\,dy)}{\frac{1}{2}\int x\,dy-y\,dx}.$$

Si, lorsque C tend vers (x_0, y_0) par une déformation continue, ce rapport a une limite bien déterminée, indépendante de la suite des courbes C tendant vers $(x_0; y_0)$,

$$p(x_0, y_0)+i\,q(x_0, y_0)=p_0+iq_0,$$

---

[1] D. Pompéiu, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXIII, 1^er^ semestre 1912, p. 108-113).

le nombre $p_0 + iq_0$ sera dit la dérivée aréolaire de $u + iv$ au point $x_0 + iy_0$.

On peut calculer effectivement cette dérivée si l'on suppose que les fonctions u et v possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues. En effet, la formule de Riemann donne

$$\int_C (u + iv)(dx + i\,dy) = -\int\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i \int\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

d'où, en appliquant la formule de la moyenne,

$$\frac{\displaystyle\int_C (u + iv)(dx + i\,dy)}{\displaystyle\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx} = \left[-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}} + i\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_2\\ y=y_2}},$$

(x_1, y_1) et (x_2, y_2) étant deux points intérieurs au contour C. Si l'on fait tendre celui-ci vers le point (x_0, y_0), les deux points précédents tendront vers le même point (x_0, y_0), et l'on aura, en vertu des hypothèses de continuité,

$$p_0 + iq_0 = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)_0$$

24. Lorsque la fonction $f(z) = u + iv$ est analytique, sa dérivée aréolaire est nulle, et réciproquement. Par conséquent, au point de vue de la dérivée aréolaire, les fonctions analytiques jouent le rôle de constantes par rapport aux fonctions complexes générales.

En poursuivant l'analogie, M. Pompéiu s'est proposé de chercher les fonctions jouant le rôle de la fonction exponentielle, c'est-à-dire les fonctions identiques à leur dérivée aréolaire (¹). Son résultat est que u et v doivent satisfaire à une même équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \theta}{\partial y} - \theta = 0$$

Il est facile de donner la forme générale explicite de ces fonctions.

(¹) Note citée p. 112.

En effet, les équations du problème sont les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -u,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = v.$$

Effectuons le changement suivant de fonctions

$$u = e^{-y}\,\mathrm{U},$$
$$v = e^{-y}\,\mathrm{V}.$$

Le système précédent devient

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = 0$$

Par conséquent, *les fonctions f de la variable complexe $z = x + iy$, qui ne sont pas altérées par la dérivation aréolaire, sont de la forme*

$$f = e^{-y}\,\mathrm{F}(z),$$

$\mathrm{F}(z)$ *étant une fonction analytique de z.*

25. Prenons, pour contour C du paragraphe 23, un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon ρ. L'intégrale de Cauchy

$$\int_C (u + iv)(dx + i\,dy)$$

devient une fonction de ρ seulement, et même une fonction paire de cette variable.

Nous nous proposons de développer cette intégrale suivant les puissances de ρ, en supposant les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ développables en série de Taylor au voisinage du point (x_0, y_0), que nous prendrons pour origine de coordonnées. Nous pouvons écrire, *a priori*,

$$\int_C (u + iv)(dx + i\,dy) = a_0\rho^2 + a_2\rho^4 + a_4\rho^6 + \ldots + a_{2n}\rho^{2n+2} + \ldots$$

et déterminer les coefficients de proche en proche. On a tout de suite le premier coefficient

$$a_0 = (p + iq)\pi.$$

Pour trouver les autres coefficients, posons

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta$$

et développons u et v en séries de Taylor. On a

$$u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = u(0, 0) + \rho\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$+ \frac{1}{2}\rho^2\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \dots$$

et une formule analogue pour v. Les dérivées partielles du second membre sont, évidemment, supposées calculées pour $x = 0, y = 0$. En introduisant les valeurs de u et de v dans l'intégrale de Cauchy, on trouve

$$a_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$
$$+ \frac{3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} + i\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y}\right)\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$
$$+ \frac{3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + i\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y^2}\right)\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\,(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta.$$

Les intégrales sont faciles à calculer et l'on trouve en définitive

$$a_2 = \frac{\pi}{2^3}\left[-\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\right.$$
$$\left. + i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)\right]$$

ou encore

$$a_2 = \frac{\pi}{2^3}\Delta(p + iq),$$

si l'on pose, comme d'habitude,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

On trouvera de même

$$a_4 = \frac{\pi}{4!\,2^4}\Delta^2(p+iq),$$

en posant

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

La règle est manifestement générale et l'on trouve en définitive le développement suivant :

$$(47)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\pi\rho^2}\int(u+iv)(dx+i\,dy)\\ &\quad = (p+iq) + \frac{\rho^2}{2!\,2^2}\Delta(p+iq)\\ &\qquad + \frac{\rho^4}{4!\,2^4}\Delta^2(p+iq) + \ldots + \frac{\rho^{2n}}{(2n)!\,2^{n+1}}\Delta^n(p+iq) + \ldots, \end{aligned}$$

où les coefficients des diverses puissances de ρ sont les diverses puissances symboliques de l'opérateur Δ de Laplace.

Le cas le plus simple, après les fonctions analytiques, serait celui où l'intégrale de Cauchy est indépendante de ρ. Ces fonctions, que l'on pourrait appeler *non analytiques du premier degré*, sont caractérisées par l'équation

$$\Delta(p+iq) = 0,$$

et la formule fondamentale (47) devient

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int(u+iv)(dx+i\,dy) = p+iq.$$

On peut démontrer que, dans ce cas, *la fonction* $\Delta(u)+i\Delta(v)$ *est analytique* (¹).

Il en résulte que les fonctions u et v sont *biharmoniques*, c'est-à-dire elles satisfont toutes les deux à la même équation

$$\Delta^2\theta = 0.$$

(¹) *Cf*, T. Hayashi, *On areolar holomorphic functions* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXIV, 2ᵉ semestre 1912, p. 220-224).

26. Nous pouvons écrire la formule (47) aussi

$$(47') \quad \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S (p+iq)\,dx\,dy = p+iq+\frac{\rho^2}{2!\,2}\Delta(p+iq)+\ldots+\frac{\rho^{2n}}{(2n)!\,2^{n-1}}\Delta^n(p+iq)+\ldots$$

De cette manière, on a partout la *même* fonction $p+iq$ [1]. En séparant la partie réelle, nous obtenons la formule

$$(48) \quad \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S p(x,y)\,dx\,dy = p(x,y)+\frac{\rho^2}{2!\,2}\Delta(p)+\ldots+\frac{\rho^{2n}}{(2n)!\,2^{n+1}}\Delta^n(p)+\ldots$$

valable pour toute fonction réelle, analytique, de deux variables. Elle donne le développement de la moyenne d'une fonction dans un cercle, suivant les puissances du carré du rayon, ou, si l'on veut, suivant les puissances de l'aire du cercle.

On déduit de ce développement la proposition suivante, qui généralise un théorème bien connu [2].

Théorème A. — *S'il existe une infinité dénombrable de cercles, concentriques en* P, *ayant ce point pour cercle-limite et tels que la moyenne des valeurs d'une fonction réelle et analytique de deux variables, dans chacun des cercles, soit la même, alors cette fonction est harmonique en* P.

Plus généralement, on peut énoncer la proposition suivante, dont la démonstration est immédiate, en partant de la formule (48).

Théorème B. — *Si, dans les cercles de l'ensemble considéré dans le théorème* A, *la moyenne d'une fonction réelle et analytique de deux variables est un polynome de degré $n-1$ par rapport à l'aire des cercles, la fonction est n-harmonique en* P.

27. De la formule (48), on peut en déduire facilement une autre. Multiplions les deux membres de cette formule par ρ et dérivons par

(1) Cette remarque pourrait suggérer l'idée d'une démonstration directe du développement (47). Mais elle conduirait presque aux mêmes calculs que l'autre.

(2) *Cf.* Georges Bouligand, *Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet* (fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques*, p. 46).

rapport à ρ. Nous obtiendrons finalement la formule

$$(48') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, d\theta$$
$$= p(x, y) + \frac{2\rho^2}{2!\,2^2}\Delta(p) + \ldots + \frac{(n+1)\rho^{2n}}{(2n)!\,2^{n+1}}\Delta^n(p) + \ldots,$$

qui donne le développement de la moyenne *périphérique* de la fonction $p(x, y)$, suivant les puissances de ρ^2. On en déduit les théorèmes A′ et B′, résultant respectivement des théorèmes A et B, par le changement du mot « cercle » en le mot « circonférence ».

La comparaison des formules (48) et (48′) va nous donner d'autres résultats importants. Désignons par $M_C(p)$ la moyenne des valeurs de $p(x, y)$ *sur* la circonférence C de centre (x, y) et de rayon ρ, par $M_S(p)$ la moyenne des valeurs de $p(x, y)$ *dans* le cercle limité par cette circonférence.

Les formules (48) et (48′) nous donnent alors par soustraction

$$M_C(p) - M_S(p) = \frac{\rho^2}{8}\Delta(p) + \rho^4 \mathcal{R}(\rho).$$

Nous en déduisons les deux propositions suivantes :

Théorème C. — *Le laplacien d'une fonction réelle et analytique, non harmonique, en un point (x, y) est égal à la limite du rapport*

$$8\,\frac{M_C(p) - M_S(p)}{\rho^2}$$

lorsque ρ tend vers zéro.

Theorème D. — *Si, pour l'ensemble des cercles considérés dans le théorème* A, *les moyennes superficielle et périphérique d'une fonction réelle et analytique de deux variables sont égales, la fonction est harmonique au centre.*

28. Revenons maintenant à la notion des fonctions conjuguées, en utilisant la dérivée aréolaire. Assurons-nous d'abord que cette dérivée satisfait à l'une des conditions (22) ou (23). Soit

$$\varphi(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

une fonction quelconque. Nous poserons

$$z = m\zeta = (\mu + i\nu)(\xi + i\eta),$$

d'où

$$\varphi(m\zeta) = u(\mu\xi - \nu\eta,\ \nu\xi + \mu\eta) + i\,v(\mu\xi - \nu\eta,\ \nu\xi + \mu\eta).$$

Si l'on désigne par le symbole

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}z}$$

la dérivée aréolaire, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}\zeta} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \\
&= \nu\frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial u}{\partial y} - \mu\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial y} + \nu\frac{\partial v}{\partial x} - \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \quad m_0\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\,m_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= m_0\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}(m\zeta)};
\end{aligned}$$

la dérivée aréolaire satisfait donc à la condition (23).

Soit maintenant f une fonction complexe des variables $z = x_1 + ix_2$ et $z' = x_3 + ix_4$. Nous désignerons par

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}z} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}z'}$$

les dérivées aréolaires *partielles* de cette fonction par rapport à z et z'. Démontrons d'abord une propriété concernant ces dérivées partielles :

Si l'on dérive, plusieurs fois, aréolairement la fonction f par rapport à z et z', le résultat final est indépendant de l'ordre des dérivations.

Il suffit pour cela de montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{D}^2 f}{\mathrm{D}z'\,\mathrm{D}z} = \frac{\mathrm{D}^2 f}{\mathrm{D}z\,\mathrm{D}z'}.$$

On a d'abord, en posant $f = u + iv$,

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = u_1 + iv_1,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{D^2 f}{Dz\,Dz'} &= -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_4} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) + i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_1}{\partial x_4}\right)\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_3}\\ &\quad + i\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_4}\right).\end{aligned}$$

Pour obtenir, en partant de cette expression, la dérivée $\frac{D^2 f}{Dz'\,Dz}$, il suffit de permuter respectivement les indices 1 et 3, 2 et 4. Or ceci ne change pas le second membre. On a donc bien

$$\frac{D^2 f}{Dz\,Dz'} = \frac{D^2 f}{Dz'\,Dz},$$

ce qui justifie la proposition énoncée.

Ceci établi, nous appellerons *dérivée aréolaire de f, dans la direction plane caractéristique m*, l'expression suivante :

$$\frac{Df}{Dm} = h(m)\left(\frac{Df}{Dz} + m_0\,\frac{Df}{Dz'}\right), \tag{49}$$

$h(m)$ étant une fonction de m, que nous déterminerons dans un instant.

Nous dirons que deux fonctions f et g sont *aréolairement conjuguées*, si elles vérifient le système

$$\left\{\begin{aligned}\frac{Df}{Dz} &= \left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0,\\ \frac{Df}{Dz'} &= -\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0.\end{aligned}\right. \tag{50}$$

Soient m et m' deux directions planes caractéristiques, complètement orthogonales. Je dis que si (50) est vérifié, on aura aussi

$$\boxed{\frac{Df}{Dm} = \left(\frac{Dg}{Dm'}\right)_0.} \tag{50'}$$

En effet, en utilisant la formule de définition (49) et les équations (50), la relation à démontrer revient à

$$\left[m_0 h(m) + h_0\left(-\frac{1}{m_0}\right)\right]\left(\frac{Df}{Dz} + m_0 \frac{Df}{Dz'}\right) = 0$$

Il suffit de déterminer h par l'équation

$$(51) \qquad \frac{h_0\left(-\frac{1}{m_0}\right)}{h(m)} = m_0,$$

pour que notre affirmation soit justifiée. Je poserai, comme dans la première Section,

$$-m = |m|\, e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad h(m) = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{1+|m|^2}},$$

d'où

$$h_0\left(-\frac{1}{m_0}\right) = \frac{|m|\, e^{-i\varphi}}{\sqrt{1+|m|^2}}.$$

La relation (51) devient alors

$$e^{-2i\varphi} = e^{-i\theta}.$$

Nous prendrons

$$\varphi = \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$h(m) = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}},$$

et la formule (49) devient

$$(52) \qquad \boxed{\frac{Df}{Dm} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}} \frac{Df}{Dz} + \frac{m_0\, e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+|m|^2}} \frac{Df}{Dz'}.}$$

Avec cette définition précise de la dérivée aréolaire dans la direction m, il est facile de démontrer que, inversement, la relation (50′) entraîne les deux relations (50) et, par conséquent, on peut prendre indifféremment comme formules de définition des fonctions aréolairement conjugées (50) ou (50′).

29. Puisque les équations (50) peuvent s'écrire aussi

$$\frac{Dg}{Dz'} = \left(\frac{Df}{Dz}\right)_0,$$
$$\frac{Dg}{Dz} = -\left(\frac{Df}{Dz'}\right)_0,$$

on peut, en se servant du lemme ci-dessus, éliminer de ce système, soit la fonction f, soit la fonction g. On trouvera que les deux fonctions sont caractérisées par une *même équation*

$$\boxed{\frac{D}{Dz}\left(\frac{D\theta}{Dz}\right)_0 + \frac{D}{Dz'}\left(\frac{D\theta}{Dz'}\right)_0 = 0} \tag{53}$$

qui joue le même rôle que l'équation de *Laplace* dans le plan.

Nous appellerons *fonction aréolairement harmonique*, toute fonction vérifiant l'équation (53). Nous obtiendrons une propriété remarquable de ces fonctions, en explicitant l'équation (53). En posant $\theta = \varphi + i\psi$, nous avons d'abord

$$\left(\frac{D\theta}{Dz}\right)_0 = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = \varphi_1 + i\psi_1;$$
$$\frac{D}{Dz}\left(\frac{D\theta}{Dz}\right)_0 = -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right) + i\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)$$
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} - i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right).$$

On obtiendrait de même

$$\frac{D}{Dz'}\left(\frac{D\theta}{Dz'}\right)_0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2} - i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_4^2}\right).$$

Donc, en posant

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2},$$

l'équation (53) est entièrement équivalente à la suivante :

$$\boxed{\Delta_2\varphi + i\,\Delta_2\psi = 0.} \tag{54}$$

Nous exprimerons ce résultat sous la forme suivante :

THÉORÈME. — *Les parties réelle et imaginaire d'une fonction aréolairement harmonique sont des fonctions harmoniques ordinaires de l'espace* (x_1, x_2, x_3, x_4).

Réciproquement, si $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *et* $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *sont deux fonctions harmoniques de quatre variables, la combinaison*

$$\varphi + i\psi$$

est une fonction aréolairement harmonique.

30. Il est évident que deux fonctions aréolairement harmoniques, prises au hasard, ne sont pas aréolairement conjuguées. Mais l'une des fonctions

$$g = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$$

étant donnée, proposons-nous de chercher le degré d'indétermination de sa fonction conjuguée

$$f = u + iv.$$

A cet effet, explicitons le système (50). Nous obtenons le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u_3} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_4},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_4} + \frac{\partial v}{\partial x_3} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial v}{\partial x_4} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2},$$

où le second membre est connu. L'élimination de l'une des fonctions, par exemple de v, entre ces équations, conduira à *quatre* équations aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = a(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_4^2} = -a(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial x_3} = c(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial x_4} = d(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Ce sont, au second membre près, les équations qui caractérisent les parties réelle et imaginaire d'une *fonction analytique de deux variables*.

31. Nous rencontrerons le système précédent dans une autre question. Un couple de fonctions f et g, aréolairement conjuguées, étant donné, proposons-nous de chercher si l'on peut définir deux autres fonctions f_1 et g_1, aréolairement conjuguées, qui jouent, par rapport à f et g, un rôle analogue à celui que jouent les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique d'une variable, par rapport aux parties réelle et imaginaire de son intégrale indéfinie.

En suivant toujours le même ordre d'idées, nous considérerons les deux fonctions

$$f_1 = \frac{Df}{Dz} = u_1 + iv_1,$$
$$g_1 = \left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0 = U_1 + iV_1,$$

et nous chercherons sous quelles conditions ces fonctions vérifient le système (50).

On doit avoir

$$\frac{D}{Dz}\left(\frac{Df}{Dz}\right) = \left(\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0\right)_0,$$
$$\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Df}{Dz}\right) = -\left(\frac{D}{Dz}\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0\right)_0.$$

Entre ces deux équations on peut éliminer, moyennant le système (50), soit f, soit g. L'élimination de f donne

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0\right)_0 &= \frac{D}{Dz}\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0, \\ \left(\frac{D}{Dz}\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0\right)_0 &= \frac{D}{Dz}\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0, \end{aligned}\right.$$

et par l'élimination de g nous obtenons

$$(55')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{D^2 f}{Dz^2} &= -\left(\frac{D^2 f}{Dz'^2}\right)_0, \\ \frac{D^2 f}{Dz\,Dz'} &= \left(\frac{D^2 f}{Dz\,Dz'}\right)_0. \end{aligned}\right.$$

Avant de développer les calculs, faisons une remarque : Si l'on cherchait les conditions pour que les deux fonctions

$$f' = \frac{Df}{Dz'} \quad \text{et} \quad g' = \left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0$$

soient aréolairement conjuguées, on poserait les équations de condition suivantes :

$$\frac{D}{Dz}\left(\frac{Df}{Dz'}\right) = \left(\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0\right)_0,$$
$$\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Df}{Dz'}\right) = \left(\frac{D}{Dz}\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0\right)_0.$$

Si, au moyen du système (50) on éliminait entre ces deux équations la fonction g, on obtiendrait le système (55'). L'élimination de f donnerait le système suivant :

$$\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0 = \left(\frac{D}{Dz}\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0\right)_0,$$
$$\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0 = -\left(\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0\right)_0.$$

Si l'on compare ce système avec le système (55), on voit :

1° que les deux premières équations sont les mêmes ;

2° que les secondes équations sont les mêmes, *en vertu de l'équation fondamentale* (53).

On obtient donc le résultat suivant :

THEORÈME. — *Soient f et g deux fonctions aréolairement conjuguées. Si les fonctions*

$$f_1 = \frac{Df}{Dz}, \qquad g_1 = \left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0$$

sont aréolairement conjuguées, les fonctions

$$f' = \frac{Df}{Dz'}, \qquad g' = \left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0$$

sont aussi aréolairement conjuguées (¹).

(¹) Remarquons que ce théorème est, plus généralement, valable pour tout couple

32. Revenons maintenant aux systèmes (55) et (55′). La dernière équation du système (55) donne, en se reportant à l'équation (54),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = 0.$$

donc, en vertu du théorème du paragraphe 29, on a aussi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_4^2} = 0.$$

Passons maintenant à la première équation du même système. On a, respectivement,

$$\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0 = U_1 + iV_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\right) - i\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2}\right),$$

d'où

$$\left(\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0\right)_0 = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_4} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right) - i\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_1}{\partial x_4}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\,\partial x_4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_4} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_3}$$
$$- i\left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_4} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_4}\right)$$

et

$$\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0 = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_4} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\right) - i\left(\frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{\partial V}{\partial x_4}\right),$$

d'où

$$\frac{D}{Dz}\left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\,\partial x_4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_4}$$
$$+ i\left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_4} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_4}\right).$$

La comparaison des deux résultats donne

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_4} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_3}$$

et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_4};$$

---

de fonctions f et g conjuguées, pour lequel la dérivée que l'on considère jouit de la propriété de la commutativité, puisque l'équation (53) a été obtenue en supposant seulement l'existence de cette propriété.

donc, en définitive, V doit satisfaire au système suivant :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_4^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1\,\partial x_4} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2\,\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2\,\partial x_4} = 0$$

qui n'est autre que le système de Cauchy pour les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique de deux variables complexes.

Si l'on explicitait maintenant le système (55'), on obtiendrait le système suivant en u et v :

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3\,\partial x_4}\right) = 0\\ &-\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_4^2} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_3\,\partial x_4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right) = 0,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_4} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_4} = 0\end{aligned}\right.$$

Appelons, pour abréger, fonction *coharmonique*, toute fonction susceptible d'être la partie réelle ou imaginaire d'une fonction analytique de deux variables. Nous énoncerons le résultat obtenu ainsi :

THÉORÈME. — *Étant données les fonctions f et g, aréolairement conjuguées, pour que les fonctions*

$$f_1 = \frac{Df}{Dz}, \qquad g_1 = \left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0$$

soient aréolairement conjuguées, il faut et il suffit :

1° *que la partie imaginaire de g soit une fonction coharmonique ;*
2° *que les parties réelle et imaginaire de f satisfassent au système* (56).

33. Considérons un couple $f = u + iv$, $g = U + iV$ de fonctions aréolairement conjuguées et cherchons les conditions pour que les fonctions $f_0 = u - iv$ et $g_0 = U - iV$ soient aussi aréolairement con-

juguées. On devrait, pour cela, avoir simultanément :

$$\frac{Df}{Dz} = \left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0, \qquad \frac{Df}{Dz'} = -\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0,$$
$$\frac{Df_0}{Dz} = \left(\frac{Dg_0}{Dz'}\right)_0, \qquad \frac{Df_0}{Dz'} = -\left(\frac{Dg_0}{Dz}\right)_0$$

ou, en développant,

$$-\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} - i\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{\partial V}{\partial x_4} - i\left(\frac{\partial U}{\partial x_4} - \frac{\partial V}{\partial x_3}\right),$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial v}{\partial x_1} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_4} - \frac{\partial V}{\partial x_3} - i\left(\frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{\partial V}{\partial x_4}\right),$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x_4} + \frac{\partial v}{\partial x_3} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_4}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1} + i\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\right),$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x_4} - \frac{\partial v}{\partial x_3} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial v}{\partial x_4}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + i\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2}\right)$$

Les deux premières relations donnent

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_4}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{\partial V}{\partial x_4},$$

et les deux autres

$$\frac{\partial u}{\partial x_4} = -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_3} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_4} = \frac{\partial V}{\partial x_2}$$

Donc :

Théorème. — *Pour que les deux couples (f, g) et (f_0, g_0) soient en même temps aréolairement conjugués, il faut et il suffit que les deux combinaisons $u + iU$ et $v - iV$ soient fonctions analytiques de $x_1 - ix_3$ et $x_2 + ix_4$.*

Nous dirons, dans ces conditions, que les fonctions aréolairement conjuguées f et g forment un *couple symétrique*. Il est facile de vérifier qu'un couple symétrique de fonctions aréolairement conjuguées satisfait au système (56). Le théorème du paragraphe 32 devient alors :

Théorème. — *Si l'on considère un couple symétrique (f, g) de fonctions aréolairement conjuguées, la condition nécessaire et suffisante pour* *que les fonctions*

$$f_1 = \frac{Df}{Dz}, \qquad g_1 = \left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0$$

soient aréolairement conjuguées, est que la partie imaginaire de g soit une fonction coharmonique.

34. On peut faire un pas de plus et chercher les conditions pour que le couple (f_1, g_1) soit symétrique. Nous devons avoir les équations

$$\frac{D}{Dz}\left(\frac{Df}{Dz}\right)_0 = \left(\frac{D^2 g}{Dz\, Dz'}\right)_0,$$
$$\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Df}{Dz}\right)_0 = -\left(\frac{D^2 g}{Dz^2}\right)_0.$$

En éliminant successivement f et g, au moyen des équations (54), on trouve pour g les équations

$$\frac{D^2 g}{Dz\, Dz'} = \left(\frac{D^2 g}{Dz\, Dz'}\right)_0,$$
$$\frac{D^2 g}{Dz^2} + \left(\frac{D^2 g}{Dz'^2}\right) = 0,$$

et pour f les équations

$$\frac{D}{Dz}\left(\frac{Df}{Dz'}\right)_0 = \left(\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Df}{Dz}\right)_0\right)_0,$$
$$\frac{D}{Dz'}\left(\frac{Df}{Dz'}\right)_0 = -\left(\frac{D}{Dz}\left(\frac{Df}{Dz}\right)_0\right)_0.$$

On voit donc, en comparant avec les équations (55) et (55′), que le rôle des fonctions f et g est renversé : Les fonctions U et V doivent satisfaire au système (56) et v doit être une fonction coharmonique. Si l'on part, en particulier d'un couple (f, g) symétrique, on verra, comme plus haut, que le système en U et V se trouve satisfait. On obtient donc cette propriété :

THEORÈME. — *Étant donné un couple (f, g), symétrique de fonctions aréolairement conjuguées, la condition nécessaire et suffisante pour que* *les fonctions*

$$f_1 = \frac{Df}{Dz}, \qquad g_1 = \left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0$$

forment un couple symétrique de fonctions aréolairement conjuguées, est que les parties imaginaires des fonctions données soient des fonctions coharmoniques.

Un corollaire immédiat de cette propriété est le suivant : *Les conditions du théorème précédent étant satisfaites, les deux fonctions*

$$f' = \frac{Df}{Dz'}, \qquad g' = \left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0$$

forment aussi un couple symétrique de fonctions aréolairement conjuguées.

35. La notion de fonctions aréolairement conjuguées, que nous avons posée *a priori* au commencement de cette Section, va ressortir d'une manière naturelle d'un problème simple de symétrie.

Soient $f(z, z')$ et $g(z, z')$ deux fonctions variables des complexes z et z'. Désignons par $\frac{\partial}{\partial m}$ une dérivation par rapport à z, *dans la direction m*, et par $\frac{\delta}{\delta n}$ une dérivation par rapport à z', *dans la direction n*. Formons les deux expressions

$$A(m, n) = \frac{\partial f}{\partial m} - \left(\frac{\delta g}{\delta n}\right)_0,$$
$$B(m, n) = \frac{\partial f}{\partial n} + \left(\frac{\partial g}{\partial m}\right)_0,$$

analogues aux premiers membres du système de Cauchy.

Dans quelles conditions ces deux expressions sont-elles symétriques par rapport à m et à n?

Posons $f = u + iv$, $g = U + iV$. Si l'on se reporte à la formule (3) de la première Partie, qui donne la dérivée suivant une direction arbitraire du plan, un calcul facile nous donnera les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_4} + \frac{\partial V}{\partial x_3} + i\left(\frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{\partial V}{\partial x_4}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_4} + \frac{\partial v}{\partial x_3} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x_4} - \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1} + i\left(\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial U}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_4} - i\frac{\partial U}{\partial x_4} = \frac{\partial v}{\partial x_2} - i\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial U}{\partial x_3} + i\frac{\partial V}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} + i\frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial x_2} + i\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_4} - i\frac{\partial u}{\partial x_4} + \frac{\partial U}{\partial x_1} - i\frac{\partial V}{\partial x_1}.$$

Les deux dernières se réduisent aux deux premières, si l'on multiplie les deux membres par i. Or celles-ci s'écrivent tout de suite

$$\frac{Df}{Dz} = \left(\frac{Dg}{Dz'}\right)_0,$$

$$\frac{Df}{Dz'} = -\left(\frac{Dg}{Dz}\right)_0.$$

Nous pouvons donc énoncer :

THEORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les deux expressions* $A(m, n)$ *et* $B(m, n)$ *soient symétriques en* m *et en* n, *est que les fonctions* f *et* g *soient aréolairement conjuguées.*

NOTE

SUR UNE PROPRIÉTÉ D'UNICITÉ DES FONCTIONS HARMONIQUES CONJUGUÉES.

---

1. Dans ce qui suit nous allons mettre en évidence une propriété d'unicité des fonctions harmoniques conjuguées.

Nous ferons d'abord la remarque simple suivante : Soient f et g deux fonctions reelles de x et de y, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues, O un point du plan, n et n' deux directions perpendiculaires issues de ce point. *Si la relation* $\frac{df}{dn} = \frac{dg}{dn'}$, *où les dérivées sont calculées pour le point* O, *est conservée par une rotation de* 90°, *elle est conservée par toute rotation.*

En effet, rien n'empêche de prendre O comme origine des coordonnées et les deux directions comme axes de coordonnées. La relation précédente devient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

La même relation devient, après une rotation de 90°,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

On obtient donc le système de Cauchy et l'on sait que ce système entraîne la relation $\frac{df}{dn} = \frac{dg}{dn'}$, n étant quelconque, n' perpendiculaire à n dans le sens direct.

Cette manière de présenter les fonctions harmoniques conjuguées suggère le problème plus général suivant : Soient f et g deux fonctions réelles et continues de x et de y dans un domaine D, où elles possèdent des dérivées partielles du premier ordre finies. Je fais en outre l'hypothèse que g ne peut pas dépendre de moins de deux variables. Dans ces conditions : *Existe-t-il des fonctions* $\varphi(u)$, *autres que* $\varphi(u) = u$, *telles que la relation*

$$\frac{df}{dn} = \varphi\left(\frac{dg}{dn'}\right)$$

étant conservée par une rotation de 90°, *la même relation soit conservée par une rotation quelconque ?*

Analytiquement, le problème revient à ceci : Trouver $\varphi(u)$ telle que les deux relations

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

entraînent la suivante :

$$\frac{df}{dn} = \varphi\left(\frac{dg}{dn'}\right).$$

La réponse à cette question est très simple, en faisant sur α la seule hypothèse

$$\varphi(+0) = \varphi(-0) = \varphi(0).$$

En effet, la dernière relation explicitée donne

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha = \varphi\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial g}{\partial y}\cos\alpha\right).$$

Remplaçons-y α par $\alpha+\pi$. Le premier membre et l'argument de φ changent de signe. L'on a donc

$$\varphi(-u) = -\varphi(u),$$

d'où, en vertu de l'hypothèse faite sur φ,

$$\varphi(0) = 0.$$

Ceci établi, dans la relation (2) nous pouvons choisir α tel que

$$\frac{\sin\alpha}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\cos\alpha}{\dfrac{\partial g}{\partial x}};$$

alors (2) donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi(0) = 0$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\mu\frac{\partial g}{\partial x}.$$

En comparant avec (1) on voit que μ doit être en même temps fonction de $\frac{dg}{dy}$ et de $\frac{dg}{dx}$. Or, ceci est impossible en vertu des hypothèses faites sur la fonction g. Donc μ est une constante et l'on a

$$\varphi(u) = \mu . u.$$

On peut faire $\mu = 1$ sans restreindre la généralité de la solution : Ceci revient à remplacer g par $\frac{1}{\mu}\times g$. On peut donc énoncer :

Théorème. — *Il n'existe pas de couples de fonctions, autres que les fonctions harmoniques conjuguées, jouissant de la propriété d'invariance énoncée.*

2. Si l'on regarde de plus près la démonstration précédente, on voit que l'on peut énoncer le même théorème avec des hypothèses plus générales. Rappelons d'abord un théorème dû à M. Montel *Soient f et g deux fonctions continues du point (x, y) dans un domaine D où elles possèdent des dérivées partielles du premier ordre finies. La condition nécessaire et suffisante pour que $u + iv$*

soit une fonction holomorphe de $x + iy$ *dans le domaine* D, *est que les relations* $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$ *soient vérifiées presque partout dans* D (1).

En vertu de ce théorème, les conditions de Cauchy, jointes à la condition de continuité, suffisent à assurer l'holomorphie de $u + iv$; en particulier, si l'on suppose que $u + iv$ a une dérivée en *chaque point* de D, on retombe sur le théorème de M. Goursat.

En revenant à notre problème, je dis qu'*il suffit que les relations* (1) *et* (2) *soient vérifiées presque partout dans* D, *pour conclure que l'on a* $\varphi(u) = \mu u$ *dans toute la région* D.

En effet, soit D_1 l'ensemble des points de D où les relations (1) et (2) sont vérifiées. La démonstration du paragraphe précédent montre que l'on a, sur l'ensemble D_1,

$$\varphi(u) = \mu u.$$

Il en résulte, en vertu du théorème de M. Montel, que la fonction $f + \frac{i}{\mu} g$ est holomorphe dans D. Sur l'ensemble $D - D_1$ on a donc aussi

$$\varphi(u) = \mu u$$

et notre affirmation se trouve complètement justifiée.

---

(1) PAUL MONTEL, *Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 156, 1913, p. 1820-1823).

Vu et approuvé :

Paris, le 22 février 1928.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 22 février 1928.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.