

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

BASILE DEMTCHENKO

**I. Sur les cavitations solitaires dans un liquide infini. II. Sur l'influence des bords sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1928

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1928\\_\\_87\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__87__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N<sup>o</sup> D'ORDRE  
1994

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

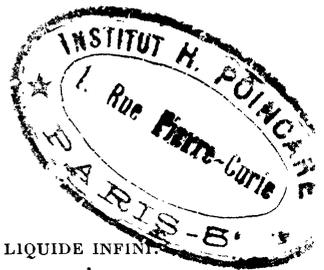
POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**Basile DEMTCHENKO**

---



- 1<sup>re</sup> THÈSE.** — I. SUR LES CAVITATIONS SOLITAIRES DANS UN LIQUIDE INFINI.  
II. SUR L'INFLUENCE DES BORDS SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DANS UN LIQUIDE.
- 2<sup>e</sup> THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
- 

*Soutenues le* **2 JUN** *mai 1928 devant la Commission d'examen*

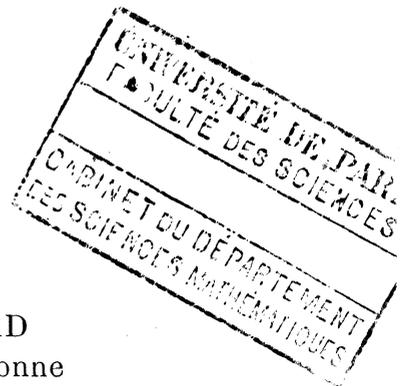
*Président :* MM. PAINLEVÉ.

*Examineurs* { VILLAT,  
MONTEL.

---

Librairie Scientifique  
ALBERT BLANCHARD  
3 et 3 bis Place de la Sorbonne  
PARIS (V<sup>e</sup>)

1928



# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

## MM.

*Doyen*..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

*Doyens honoraires*.. P. APPELL, M. MOLLIARD.

*Profess. honoraires*.. { P. PUISEUX. H. LEBESGUE.  
V. BOUSSINESQ. A. FERNBACH.  
A. JOANNIS. A. LEDUC.  
H. LE CHATELIER. G. SAGNAC.

*Professeurs* ..... { EMILE PICARD..... Analyse supér. et algèbre supérieure.  
G. KOENIGS..... Mécanique physique et expérimentale  
E. GOURSAT..... Calcul différentiel et calcul intégral.  
P. JANET..... Electrotechnique générale.  
F. WALLERANT... Minéralogie.  
H. ANDOYER..... Astronomie.  
P. PAINLEVE..... Mécanique anal. et mécanique céleste  
GABRIEL BERTRAND Chimie biologique.  
M<sup>me</sup> P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.  
M. CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés)  
C. CHABRIÉ..... Chimie appliquée.  
G. URBAIN..... Chimie minérale.  
EMILE BOREL..... Calcul des probabilités et phys. mathém.  
L. MARCHIS..... Aviation.  
JEAN PERRIN..... Chimie physique.  
RÉMY PERRIER... Zoologie (Enseignement P. C. N.).  
H. ABRAHAM..... Physique.  
M. MOLLIARD..... Physiologie végétale.  
E. CARTAN..... Géométrie supérieure.  
L. LAPICQUE..... Physiologie générale.  
E. VESSIOT..... Théorie des fonct. et th. des transf.  
A. COTTON..... Physique générale.  
J. DRACH..... Application de l'analyse à la géométrie  
CHARLES FABRY... Physique.  
CHARLES PÉREZ... Zoologie.  
LÉON BERTRAND... Géologie appliquée et géolog. régionale .  
R. LESPIEAU..... Théories chimiques.  
E. RABAUD..... Biologie expérimentale.  
P. PORTIER..... Physiologie comparée.  
E. BLAISE..... Chimie organique.  
P.-A. DANGEARD... Botanique.  
P. MONTEL..... Mécanique rationnelle.  
P. WINTREBERT... Anatomie et histologie comparées.  
O. DUBOSQ..... Biologie maritime.  
G. JULIA..... Mathématiques générales.  
A. JOB..... Chimie générale.  
A. MAILHE..... Etude des combustibles.  
L. LUTAUD..... Géographie physique.  
EUGÈNE BLOCH... Physique théorique et phys. céleste.  
HENRI VILLAT... Mécanique des fluides et applications.  
Ch. JACOB..... Géologie.

E. HÉROUARD... Zoologie.	E. DARMOIS..... Physique.
E. PECHARD... Chimie (Ens. P. C. N.)	G. BRUHAT..... Physique.
V. AUGER..... Chimie analytique.	H. MOUTON..... Chimie physique.
M. GUICHARD... Chimie minérale.	L. JOLEAUD..... Paléontologie.
A. GUILLET..... Physique.	M. JAVILLIER... Chimie biologique.
C. MAUGUIN... Minéralogie.	A. DUFOUR..... Physique (P. C. N.).
L. BLARINGHEM Botanique.	F. PICARD..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
A. MICHEL-LÉVY Pétrographie.	ROBERT-LÉVY... Zoologie.
A. DEREIMS... Géologie.	L. DUNOYER..... Optique appliquée.
R. DONGIER... Physique du globe.	A. GUILLIERMOND. Botanique (P.C.N.).
A. DENJOY... Calcul diff. et int.	A. DEBIERNE..... Radioactivité.
H. BENARD... Physique (P.C.N.).	

*Secrétaire*..... DANIEL TOMBECK.

A Monsieur PAUL PAINLEVÉ



A mon cher et regretté Maître

PIERRE VORONETZ



**PREMIÈRE PARTIE**

---

**SUR LES CAVITATIONS SOLITAIRES  
DANS UN LIQUIDE INFINI**



## PRÉFACE

---

L'étude des phénomènes qui se rattachent aux surfaces libres des liquides présente, dans le cas général, des difficultés qui ne peuvent pas être surmontées actuellement. On peut chercher les surfaces libres en partant de différents points de vue. Les surfaces stationnaires de glissement forment une classe étendue de surfaces libres. Les problèmes qui s'y rattachent ont été l'objet de beaux travaux de Helmholtz, Levi Civita, Villat et de plusieurs autres savants <sup>(1)</sup>. Tous ces problèmes concernent le mouvement plan et ont été résolus moyennant la méthode de la représentation conforme. Nous ne connaissons qu'un exemple de surfaces de glissement dans l'espace <sup>(2)</sup>.

On peut envisager aussi les surfaces libres qui se déforment. Les surfaces de cavitations appartiennent à cette classe de surfaces libres. L'étude de ces surfaces est encore moins

<sup>(1)</sup> On trouvera la bibliographie dans l'article de M. Villat, Quelques récents progrès des théories hydrodynamiques. *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XLII, février-mars 1918, et dans le troisième volume du *Traité de mécanique rationnelle* par P. Appell.

<sup>(2)</sup> J. Weingarten. Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung :  $\Delta V = 0$ . *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1890, s. 312-335.

avancée que celle des surfaces stationnaires de glissement. Cependant malgré toutes les difficultés une étude systématique de ces surfaces serait très nécessaire. Nous espérons que la présente étude pourra peut-être un peu remplir cette lacune, en donnant un exposé général du problème des cavitations et en développant les méthodes qui s'y rattachent.

Soit T un corps solide plongé dans un liquide infini. Supposons qu'à un instant déterminé le corps T disparaisse et que, par conséquent, une cavitation se produise dans le liquide. La surface libre de la cavitation commencera à se déformer. Le problème général des cavitations consiste en l'étude de ce phénomène. M. Riabouchinsky (1) a donné un procédé général pour résoudre ce problème. Nous y reviendrons dans le Chapitre II.

Le cas le plus simple est celui où le corps T est une sphère. Ce problème appartient à Besant (2) et a été résolu par Rayleigh (3). Il vient d'être l'objet de recherches de M. Riabouchinsky (4). On les trouvera dans le Chapitre I<sup>er</sup>. Nous y exposons aussi quelques considérations sur la stabilité des cavitations et les appliquons ensuite à l'étude de stabilité des cavitations sphériques.

(1) Riabouchinsky. *Comptes rendus*, t. CLXXXII, 31 mai 1926, pp. 1325-27.

(2) Besant. *Hydrostatics and Hydrodynamics*, § 158, 1859.

(3) Rayleigh. On the Pressure developed in a Liquid during the Collapse of a Spherical Cavity. *Phil. Mag.* August 1917, pp. 94-98.

(4) Riabouchinsky. *Bulletin technique du Service Technique de l'Aéronautique*, f. 17 avril 1924, p. 25.

Riabouchinsky. *Comptes rendus*, t. CLXXVI, 1923, p. 1278; t. CLXXXII, 1926, p. 1325 et t. CLXXXIV, 1927, 7 mars.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude des cavitations ellipsoïdales. Nous y donnons une méthode générale relative aux surfaces de cavitations et démontrons ensuite l'impossibilité d'existence permanente d'une cavitation ellipsoïdale. Dans le dernier paragraphe nous appliquons le procédé de M. Riabouchinsky et obtenons une solution approchée.

Dans le Chapitre III nous traitons par des méthodes élémentaires quelques problèmes se rattachant à celui des cavitations planes. Nous supposons que le liquide est pesant et, en adoptant l'hypothèse du parallélisme de tranches, nous étudions le mouvement du liquide dans des tubes cylindriques.

Les recherches que nous exposons ici sont loin de traiter le problème des cavitations dans toute sa complexité. Nous serons heureux si ces essais peuvent un peu éclaircir des phénomènes si complexes et faciliter le choix des voies pour de nouvelles recherches à ce sujet.

---



CHAPITRE PREMIER  
CAVITATIONS SPHÉRIQUES

§ 1, 1. — Cavitations sphériques <sup>(1)</sup>.

Imaginons dans un liquide infini une cavité sphérique, engendrée par la dilatation ou la contraction d'une enveloppe sphérique. Le mouvement du fluide étant entièrement symétrique autour du centre de la sphère, le potentiel des vitesses a la forme

$$(1) \quad \varphi = \frac{A}{r}$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Désignons par  $a$  le rayon de la sphère. A la surface de la sphère on a :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{A}{a^2} = \dot{a}$$

où  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . On obtient ainsi :

$$(2) \quad A = -\dot{a}a^2 \quad \varphi = -\frac{\dot{a}a^2}{r}.$$

<sup>(1)</sup> Rayleigh. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity: *Philosophical Magazine*, vol. 34, 1917, pp. 94-98.

D. Riabouchinsky. *Comptes rendus*, t. CLXXVI, 1923, p. 1278.

D. Riabouchinsky. *Bulletin technique du Service Technique de l'Aéronautique*, f. 17 avril 1924, p. 25.

Le mouvement considéré n'étant pas permanent, l'équation des pressions sera

$$(3) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho}$$

où  $p_0$  est la pression à l'infini et  $\rho$  la densité du fluide. La pression à l'intérieur de la cavité étant nulle, on obtient l'équation

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a}^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{r=a} = \frac{p_0}{\rho}$$

ou en substituant les formules (2)

$$(5) \quad a \dot{a} + \frac{3}{2} a^2 + \frac{p_0}{\rho} = 0.$$

Intégrons une première fois cette équation. On obtient

$$(6) \quad a^2 = \frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} \left( \frac{a_0^3}{a^3} - 1 \right)$$

où  $a_0$  est le rayon maximum de la cavité. De cette formule il s'ensuit :

$$(7) \quad \dot{a} = - \frac{2p_0}{\rho} \frac{a_0^3}{a^4}.$$

On voit, que la vitesse de contraction  $\dot{a}$  ainsi que l'accélération deviennent infinies au moment où la cavité disparaît en se contractant complètement. Après avoir atteint le rayon maximum  $a_0$ , la cavité commence à se contracter. La durée  $T$  d'une contraction complète de la cavité de  $a = a_0$  à  $a = 0$  sera d'après la formule (6) :

$$T = \frac{1}{3} a_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^1 z^{-\frac{1}{6}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz$$

où  $z = \frac{a^3}{a_0^3}$ . On obtient ainsi

$$(8) \quad T = a_0 \sqrt{\frac{\rho}{6p_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} = 0,91468 a_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

Ramenons maintenant l'équation (6) à la forme canonique de Weierstrass. En supposant

$$x = \frac{a_0}{\sqrt[3]{4}a}$$

on obtient

$$-\frac{a_0 dx}{\sqrt[3]{4}x^2 \sqrt{4x^3 - 1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_0}{\rho} dt$$

d'où

$$(9) \quad \frac{du}{p^2 u} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{a_0} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_0}{\rho} dt \quad x = pu.$$

Mais

$$1 = 4p^3 - p'^2 = 6p^3 - p'^2 - 2p^3 = pp'' - p'^2 - 2p^3.$$

L'équation (9) prend la forme :

$$\left( \frac{pp'' - p'^2}{p^3} - 2p \right) du = -\frac{\sqrt[3]{4}}{a_0} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_0}{\rho} dt.$$

En effectuant l'intégration, on trouve

$$(10) \quad \frac{p'u}{pu} + 2\zeta u = -\frac{\sqrt[3]{4}}{a_0} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_0}{\rho} (t + t_1)$$

$$\frac{a_0}{a} = \sqrt[3]{4} pu.$$

L'énergie cinétique de tout le fluide est

$$(11) \quad T = 2\pi\rho \int_a^\infty \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)^2 r^2 dr = 2\pi\rho \dot{a}^2 a^3 =$$

$$= \frac{4}{3} \pi p_0 (a_0^3 - a^3).$$

On remarquera, que l'énergie cinétique ne dépend pas de la densité  $\rho$ . A l'instant où le rayon de la cavité s'annule, un choc a lieu, et une perte d'énergie cinétique égale à  $\frac{4}{3} \pi p_0 a_0^3$  s'ensuit.

Pour éviter les vitesses infinies et la discontinuité, on peut supposer que la cavité est remplie de gaz, dont l'équation caractéristique est

$$(12) \quad p = f(a^3).$$

L'équation de pression donne

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 + \frac{p_0}{\rho} - \frac{f(a^3)}{\rho} = 0$$

d'où

$$a^3 \dot{a} d\dot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 a^2 da + \frac{p_0}{\rho} a^2 da - \frac{f(a^3)}{\rho} a^2 da = 0.$$

En intégrant, on obtient

$$(13) \quad \frac{1}{2} \dot{a}^2 a^3 + \frac{p_0}{3\rho} (a^3 - a_0^3) - \frac{1}{3\rho} [F(a^3) - F(a_0^3)] = 0$$

où  $F(x)$  est la fonction primitive de  $f(x)$ .

Si le gaz suit la loi de Mariotte, on a  $F(x) = a_0^3 p_1 \lg x$ , où  $p_1$  est la pression du gaz à l'instant où  $a = a_0$ , et la formule (13) donne

$$\dot{a}^2 = \frac{2p_0}{3\rho} \left( \frac{a_0^3}{a^3} - 1 \right) - \frac{2p_1}{\rho} \frac{a_0^3}{a^3} \lg \frac{a_0}{a}.$$

Le mouvement devient périodique, le rayon  $a$  variant entre  $a_0$  et  $a_1$ .

Si le gaz se dilate adiabatiquement (ce qui a lieu, par exemple, dans le cas d'explosion d'une mine) on a <sup>(1)</sup>

$$F(x) = -\frac{p_0 a_0^{3\gamma}}{\gamma - 1} x^{4-\gamma}$$

et l'équation (13) prend la forme

$$a^2 = \frac{2p_0}{3\rho} \left( \frac{a_0^3}{a^3} - 1 \right) + \frac{2p_1}{3(\gamma - 1)} \frac{a_0^3}{a^3} \left[ 1 - \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma - 3} \right].$$

Les cavités sphériques jouissent d'une remarquable propriété. Leurs surfaces libres se confondent avec des surfaces équipotentielles. Démontrons avec M. Riabouchinsky, que les cavités sphériques et cylindriques circulaires sont les seules qui jouissent de cette propriété <sup>(2)</sup>.

Soit

$$\varphi = c(t)$$

la surface équipotentielle qui se confond avec la surface de pression nulle

$$(14) \quad \frac{1}{2} q^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho}$$

où

$$q^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2.$$

Puisque cette surface est une surface liquide, on a

$$(15) \quad q^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial t}$$

sur  $\varphi = c$ . Les équations (14) et (15) donnent :

$$q^2 = 2 \left( \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho} \right).$$

<sup>(1)</sup> Lamb. *Mathematical Theory of fluid motion*, § 6, pp. 69-71. A Collective Work ; « The mechanical properties of fluids », 1923.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, t. CLXXXII, 31 mai 1926.

Donc sur la surface  $\varphi = c(t)$ , on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = q = \text{const.}$$

La formule de Green

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\varphi=c} \left[ \varphi \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} \right] ds$$

donne la forme générale du potentiel  $\varphi$  dans le cas considéré :

$$\varphi = - \frac{q}{4\pi} \iint_{\varphi=c} \frac{ds}{r}.$$

On voit, que le potentiel  $\varphi$  est le potentiel d'une simple couche dont la densité est constante. La recherche de la forme de la surface  $\varphi = c$  est équivalente au problème électrostatique suivant : quelle forme doit avoir le conducteur pour que la distribution d'électricité sur lui soit uniforme? Les seules solutions de ce problème sont la sphère et le cylindre infini. D'où s'ensuit le théorème de M. Riabouchinsky.

### § 1, 2. — Cavitations cylindriques circulaires.

Les raisonnements du paragraphe précédent peuvent être appliqués dans le cas du mouvement à deux dimensions. Supposons, que la surface S de cavité soit une surface cylindrique circulaire infinie. Le mouvement étant entièrement symétrique autour de l'axe du cylindre, le potentiel des vitesses a la forme :

$$\varphi = A \lg r.$$

A la surface du cylindre  $r = a$  on doit avoir .

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \dot{a}$$

d'où

$$(16) \quad A = a\dot{a} \quad \varphi = a\dot{a} \lg r.$$

La pression sur la surface  $r = a$  étant nulle, l'équation de pression sera

$$(17) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{a^2 \dot{a}^2}{r^2} + (a\ddot{a} + \dot{a}^2) \lg r = \frac{1}{2} \dot{a}^2 + (a\dot{a} + \dot{a}^2) \lg a.$$

Il s'ensuit de cette équation, que la pression  $p$  à l'infini devient infiniment grande ou que, si la pression à l'infini est finie, la cavitation ne se contracte qu'avec une vitesse infiniment petite. Pour éviter cette difficulté, supposons avec M. Riabouchinsky (<sup>1</sup>), que le liquide soit limité extérieurement par une membrane. Désignons par  $b$  et  $p_0$ , le rayon de cette membrane et la pression sur la surface limite. L'équation de pression (17) donne

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + (a\dot{a} + \dot{a}^2) \lg \frac{a}{b} = \frac{p_0}{\rho}$$

ou

$$\dot{a}^2 a \, da \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + \lg \frac{a}{b} \, d(a\dot{a}^2) = 2 \frac{p_0}{\rho} a \, da.$$

En prenant en considération, que  $b\dot{b} = a\dot{a}$ , et en intégrant, on obtient

$$\frac{p_0}{\rho} (a_0^2 - a^2) = a^2 \dot{a}^2 \lg \frac{b}{a}.$$

(<sup>1</sup>) Conférences. Année scolaire, 1925-26, Sorbonne.

La durée  $T$  d'une contraction complète de la cavité de  $a = a_0$  à  $a = 0$  sera d'après cette formule

$$\sqrt{\frac{p_0}{\rho}} T = \int_{a_0}^0 \frac{a da}{\sqrt{a_0^2 - a^2}} \sqrt{lg b - lg a}.$$

$T$  est fini pourvu que  $p_0$  et  $b$  le soient. Si la valeur de  $b$  est très grande, on a approximativement

$$\sqrt{\frac{p_0}{\rho}} T \approx \sqrt{a_0^2 - a^2} \sqrt{lg b}.$$

Si  $p_0$  est de même grandeur que  $lg b$ , la durée de contraction est finie.

### § 1, 3. — Sur la stabilité des cavitations.

Nous donnons ici quelques considérations générales sur la stabilité des cavitations et les appliquons ensuite à la démonstration de la stabilité des cavitations sphériques.

Soient  $\varphi(M, t)$  et  $f(M, t) = 0$  le potentiel des vitesses et l'équation de la surface  $S$  de la cavitation à l'instant  $t$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $f$  sont des fonctionnelles qui dépendent de la forme de la cavitation à l'instant initial, caractérisée par l'équation  $f_0(M) = f(M, t_0) = 0$ , et de la distribution initiale des vitesses donnée par le potentiel des vitesses  $\varphi_0(M) = \varphi(M, t_0)$ . Ce fait mis en évidence, on peut écrire

$$(18) \quad \varphi = \Phi(|\varphi_0, f_0|, M, t) \quad f = F(|\varphi_0, f_0|, M, t).$$

La question de la stabilité des cavitations est liée directement à la question de la continuité des fonctionnelles  $F$  et  $\Phi$ .

La fonction harmonique  $\varphi$  et la fonction  $f$  doivent satisfaire aux équations

$$(19) \quad \frac{1}{2} \vec{q}^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho} \quad (f = 0)$$

$$(20) \quad \vec{q} \operatorname{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

où

$$\vec{q}^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2.$$

Ces équations nous montrent, que les fonctionnelles  $F$  et  $\Phi$  ne peuvent être continues qu'en considérant le voisinage uniforme du premier ordre dans les champs fonctionnels  $f_0$  et  $\varphi_0$ .

Nous dirons, que la cavitation  $S$  est stable, si la fonctionnelle  $F$  est continue dans le point  $f_0, \varphi_0$ , et qu'elle est instable, si le cas contraire a lieu. Désignons par  $\delta\varphi$  et  $\delta f$  les variations des fonctionnelles  $\Phi$  et  $F$  qui correspondent aux variations  $\delta\varphi_0$  et  $\delta f_0$  des conditions initiales. Supposons : 1° que les modules des fonctions  $\delta\varphi_0$  et  $\delta f_0$  ainsi que les modules de leurs premières dérivées partielles soient des quantités infiniment petites ; 2° que les fonctionnelles  $F$  et  $\Phi$  ainsi que leurs premières dérivées partielles par rapport à  $x, y, z, t$  soient continues.

Les fonctions  $\varphi + \delta\varphi$  et  $f + \delta f$  qui correspondent au mouvement perturbé satisfont aux équations :

$$(19)' \quad \frac{1}{2} \vec{q}^2 + \vec{q} \delta \vec{q} + \frac{1}{2} \delta \vec{q}^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho} \quad (f + \delta f = 0)$$

$$(20)' \quad \vec{q} \operatorname{grad} f + \vec{q} \operatorname{grad} \delta f + \delta \vec{q} \operatorname{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \delta f}{\partial t} = 0$$

ou en négligeant les quantités infiniment petites de deuxième ordre

$$(19)'' \quad \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{2} \vec{q}^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \delta n + \vec{q} \delta \vec{q} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} = 0 \quad (f=0)$$

$$(20)'' \quad \frac{d}{dn} \left( \vec{q} \text{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \delta n + \vec{q} \text{grad} \delta f + \delta \vec{q} \text{grad} f + \frac{\partial \delta f}{\partial t} = 0$$

où  $n$  est la normale extérieure à la surface  $S$  et

$$\delta n = - \frac{\delta f}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Les équations (19)'' et (20)'' sont linéaires par rapport à  $\delta \varphi$  et  $\delta f$ .

Si on pouvait trouver une solution du système (19)''-(20)'' telle, qu'elle tende ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre vers zéro avec  $\delta \varphi_0$  et  $\delta f_0$ , nos hypothèses seraient justifiées, et on pourrait affirmer que la cavitation est stable.

Appliquons les raisonnements précédents à l'étude des cavités sphériques.

### § 1, 31. — Stabilité des cavitations sphériques <sup>(1)</sup>.

Dans le cas d'une cavité sphérique on a :

$$(21) \quad \varphi = - \frac{\dot{a} a^2}{r} \quad f = a - r \quad q = \frac{\dot{a} a^2}{r^2}.$$

<sup>(1)</sup> Ce paragraphe a été l'objet d'une communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CLXXXIV, Séance du 30 mai 1927).

Introduisons les coordonnées polaires  $r, \theta, \psi$ . L'équation (19)" prend la forme

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial r} \delta a + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \delta a + \vec{q} \hat{\partial} \vec{q} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} = 0 \quad (r = a)$$

ou en substituant les formules (21)

$$(22) \quad \dot{a} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + \ddot{a} \delta a = 0 \quad (r = a).$$

L'équation (20)" se simplifie aussi et prend la forme

$$(23) \quad 2 \frac{\dot{a}}{a} \delta a + \dot{a} \frac{\partial \delta a}{\partial r} - \frac{\partial \delta \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \delta a}{\partial t} = 0 \quad (r = a)$$

Pour simplifier nos raisonnements, supposons que le mouvement perturbé soit symétrique par rapport à l'axe polaire, c'est-à-dire que les fonctions  $\delta \varphi$  et  $\delta a$  ne dépendent pas de la variable  $\psi$ . Développons ces fonctions en séries de fonctions sphériques

$$(24) \quad \delta \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} x_n(t) X_n(\cos \theta), \quad \delta a = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, t) X_n(\cos \theta)$$

où  $X_n(\cos \theta)$  sont les polynômes de Legendre. Substituons ces expressions dans les formules (22) et (23) et identifions à zéro les coefficients des  $X_n(\cos \theta)$ .

En désignant  $f_n(a, t)$  par  $y_n(t)$ , on obtient

$$(22)' \quad \frac{dx_n}{dt} - \beta^2 y_n = 0 \quad (23)' \quad \frac{dy_n}{dt} + \alpha_n^2 x_n = 0$$

où

$$(25) \quad \beta^2 = -\frac{\ddot{a}}{a^2} = \frac{2\rho_0}{\rho} \frac{a_0^3}{a^6}, \quad \alpha_n^2 = (n+1)a.$$

Soit  $t_1$  un moment quelconque qui précède le moment de la contraction complète de la cavitation. Les coefficients  $\alpha_n$

et  $\beta$  étant réguliers dans l'intervalle  $t_0 \dots t_1$ ,  $x_n$  et  $y_n$  sont aussi réguliers dans cet intervalle. Désignons par  $x_n^0$  et  $y_n^0$  les valeurs que prennent  $x_n$  et  $y_n$  à l'instant initial. Les intégrales  $x_n$  et  $y_n$  du système (22)-(23) satisfont aux inégalités

$$(26) \quad x_n^2 \leq \frac{S}{I} x_n^{02} + \frac{1}{(n+1)I} y_n^{02}, \quad y_n^2 \leq \frac{S}{I} y_n^{02} + (n+1) S x_n^{02}$$

où  $(n+1)S$  et  $(n+1)I$  sont les limites, supérieure et inférieure, du quotient  $\left(\frac{x_n}{\beta}\right)^2$

$$(27) \quad S = \frac{\rho a_0^4}{2\rho_0} \quad I = \frac{\beta a_1^7}{2\rho_0 a_0^3}.$$

En effet, d'après (22)-(23) on a

$$\int_{x_n^0}^{x_n} \left(\frac{x_n}{\beta}\right)^2 x_n dx_n + \int_{y_n^0}^{y_n} y_n dy_n = 0.$$

D'où on obtient facilement les inégalités (26).

D'après les séries (24) on a

$$M(\varphi | t) = \int_{-1}^{+1} (\partial\varphi)_{r=a}^2 d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x_n^2$$

$$M(a | t) = \int_{-1}^{+1} (\partial a)^2 d\mu = \frac{1}{a^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} y_n^2 \quad (\nu = \cos \theta)$$

$$M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} | t\right) = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a}^2 d\mu = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)^2}{2n+1} x_n^2$$

En substituant dans ces formules les inégalités (26), on obtient

$$(28) \quad M(\varphi | t) \leq \frac{S}{I} M(\varphi | t_0) + \frac{a_0^4}{I} M(a | t_0)$$

$$M(a | t) \leq \frac{S}{I} \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 M(a | t_0) + \frac{S a_0^2}{a_1^4} M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} | t_0\right),$$

On voit que  $\delta\varphi$  et  $\delta a$  tendent en moyenne vers zéro avec  $\left(\frac{\partial\delta\varphi_0}{\partial r}\right)_{r=a}$  et  $(\delta a)_{t=t_0}$ . Par conséquent,  $\delta\varphi$  et  $\delta a$  ne peuvent avoir une valeur finie que sur l'ensemble de points dont la mesure tend vers zéro avec les variations initiales. Nos hypothèses sont justifiées. Qu'il nous soit permis d'en conclure qu'il y a lieu de considérer les cavitations sphériques comme stables.

---

## CHAPITRE II

### CAVITATIONS ELLIPSOIDALES <sup>(1)</sup>

#### § 2,1. — Surfaces des cavitations.

Le problème traité dans le chapitre précédent est un cas particulier d'un problème beaucoup plus général. Ce problème consiste en la détermination de la forme et du mouvement d'une surface  $S$  de pression nulle à l'instant  $t$  connaissant la forme et le mouvement initial de cette surface. M. Riabouchinsky <sup>(2)</sup> a donné une méthode générale pour la solution du problème posé.

La surface de pression nulle

$$(1) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{1}{2} \vec{q}^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \vec{q}^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$$

étant une surface liquide, on obtient

$$(2) \quad \frac{dp}{dt} = 0 \quad (2)' \quad \frac{d^2 p}{dt^2} = 0 \quad (2)'' \quad \frac{d^3 p}{dt^3} = 0$$

avec

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} .$$

<sup>(1)</sup> Ce chapitre est l'objet d'un article qui vient de paraître dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1927.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, t. CLXXXII, 31 mai 1926, pp. 1325-27.

Développons le potentiel  $\varphi$  en série de la forme

$$(3) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1(t - t_0) + \frac{1}{2} \varphi_2(t - t_0)^2 + \dots$$

Les équations (2), (3) ... nous permettent de calculer de proche en proche les coefficients de ce développement. En effet, connaissant le mouvement et la forme de S à l'instant  $t_0$ , on peut calculer la fonction  $\varphi_0$ . L'équation de pression (1) nous donne les valeurs initiales de  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  sur S et, par conséquent, la fonction  $\varphi_1$ . Ensuite, d'après l'équation (2), on obtient les valeurs initiales de  $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}$  sur S

$$(2 \text{ bis}) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = - \vec{q} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} - \vec{q} \frac{d\vec{q}}{dt}$$

et, par conséquent, la fonction  $\varphi_2$ . L'équation (2)' nous donne

$$(2' \text{ bis}) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = - \left( \frac{d\vec{q}}{dt} \right)^2 - \frac{d\vec{q}}{dt} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} - \vec{q} \left( \frac{d^2 \vec{q}}{dt^2} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial t^2} \right)$$

d'où on trouve  $\varphi_3$ . De la même manière on calculera de proche en proche les fonctions  $\varphi_4$ ,  $\varphi_5$ ,  $\varphi_6$ ... La série (3) que l'on obtient ainsi satisfait formellement aux conditions du problème, mais il faudra démontrer dans chaque cas particulier sa convergence.

Le procédé de M. Riabouchinsky a l'avantage d'être très général. Il peut être appliqué même dans le cas des cavitations produites par le mouvement de solides dans un liquide. Mais il est purement théorique, et il serait difficile d'en obtenir des exemples de surfaces de cavitations.

En partant d'un autre point de vue, nous donnerons ici quelques considérations générales sur les surfaces des cavi-

tations et les appliquerons ensuite à la démonstration d'impossibilité d'existence d'une cavitation ellipsoïdale.

Soit

$$(A) \quad f(x, y, z, t) = 0$$

la surface de la cavitation. La vitesse normale de la déformation de cette surface est égale à <sup>(1)</sup>.

$$(B) \quad \theta = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Si  $\varphi(x, y, z, t)$  est le potentiel des vitesses du liquide, sur la surface (A) on a alors :

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{dn} = \theta$$

où  $n$  est la normale à la surface (A). Nous arrivons ainsi au problème de Neumann. La fonction  $\varphi$  étant déterminée, la pression  $p$  est donnée par l'expression

$$(4) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho}$$

où  $\rho$  est la densité du liquide et  $p_0$  la pression à l'infini. La pression doit être nulle sur la surface (A), et par conséquent, on obtient la condition :

$$(5) \quad \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho}.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, la surface (A) ne peut pas être une surface libre.

Supposons maintenant que nous ayons une famille de sur-

(1) Hadamard. *Leçons sur la propagation des ondes*, 1903, p. 104.

faces à  $k$  paramètres  $a_1, a_2 \dots a_k$  pour lesquelles nous puissions résoudre le problème de Neumann. Soit

$$(6) \quad f(x, y, z, a_1, a_2 \dots a_k) = 0$$

l'équation de ces surfaces. Introduisons les coordonnées curvilignes de Gauss  $\mu$  et  $\nu$  et écrivons l'équation (6) sous la forme paramétrique :

$$(6)' \quad x = x(\mu, \nu, a_i), \quad y = y(\mu, \nu, a_i), \quad z = z(\mu, \nu, a_i) \quad i = 1, 2 \dots k.$$

Si une surface de famille (6) se déforme, la vitesse normale  $\theta$  de la déformation est alors égale à

$$(7) \quad \theta = - \frac{\frac{\partial f}{\partial a_1} \dot{a}_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} \dot{a}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_k} \dot{a}_k}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

où  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . Le potentiel des vitesses du liquide qui entoure la surface (6), a la forme

$$(8) \quad \varphi = \varphi_1 \dot{a}_1 + \varphi_2 \dot{a}_2 + \dots + \varphi_k \dot{a}_k$$

où les fonctions harmoniques  $\varphi_i$  satisfont, à la surface (6), aux conditions :

$$(9) \quad \frac{d\varphi_i}{dn} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial a_i}}{\sqrt{\left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2 + \left(f'_z\right)^2}}$$

D'après (8) on a

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^k (\varphi_i \dot{a}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_j} \dot{a}_j \dot{a}_j)$$

avec

$$\ddot{a}_i = \frac{d^2 a_i}{dt^2}.$$

Si la surface (6) est une surface libre, alors l'équation (5) doit être satisfaite, et par conséquent, on a sur la surface (6) une identité de la forme :

$$(11) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_{ij} a_i a_j + \sum_{i=1}^k A_i a_i \equiv \frac{p_0}{\rho}.$$

Supposons maintenant, que les coefficients  $A_{ij}$  et  $A_i$  puissent être développés à la surface (6) en séries de puissances par rapport aux coordonnées curvilignes  $\mu$  et  $\nu$ .

$$(12) \quad A_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{ij}^{mn} \mu^m \nu^n \quad A_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_i^{mn} \mu^m \nu^n.$$

Puisque l'équation (11) est une identité par rapport à  $\mu$  et  $\nu$ , on obtient

$$(13) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_{ij}^{00} a_i a_j + \sum_{i=1}^k A_i^{00} a_i &= \frac{p_0}{\rho} \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_{ij}^{mn} a_i a_j + \sum_{i=1}^k A_i^{mn} a_i &= 0 \quad \begin{matrix} m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ m = n \neq 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Il est évident qu'il est impossible dans le cas général de satisfaire à toutes ces équations qui sont en nombre infini. Mais si les coefficients  $A_{ij}$  et  $A_i$  sont des polynômes ou des fractions rationnelles en  $\mu$  et  $\nu$ , le nombre des équations (13) est dans ce cas fini. Si le nombre des équations indépendantes est plus petit que  $k$  ou égal à  $k$ , le système (13) admet alors en général des solutions, et par conséquent, parmi les surfaces de la famille (6) il y a des surfaces de cavitations.

§ 2, 2. — Impossibilité d'existence d'une cavitation ellipsoïdale.

Appliquons les résultats du paragraphe précédent au cas particulier où les surfaces (6) sont des ellipsoïdes. Nous utiliserons les notations employées par P. Appell (<sup>1</sup>).

Introduisons les coordonnées elliptiques  $\rho, \mu, \nu$  [181] :

$$(14) \quad x = h_1 R_1 M_1 N_1 \quad y = h_2 R_2 M_2 N_2 \quad z = h_3 R_3 M_3 N_3.$$

L'équation (6) a la forme

$$(15) \quad f(x, y, z, a_1, a_2, a_3) = \frac{x^2}{\rho_0^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} - 1 = 0$$

où

$$(16) \quad \begin{aligned} a_1 &= \rho_0^2 - a^2 = [R_1(\rho_0)]^2 = (R_1^0)^2 \\ a_2 &= \rho_0^2 - b^2 = (R_2^0)^2 \quad a_3 = \rho_0^2 - c^2 = (R_3^0)^2. \end{aligned}$$

Nous avons d'après la formule (7)

$$(17) \quad \theta = \frac{\frac{x^2}{a_1^2} \dot{a}_1 + \frac{y^2}{a_2^2} \dot{a}_2 + \frac{z^2}{a_3^2} \dot{a}_3}{2\sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2}}}.$$

Mais il est aisé de voir que [124]

$$(18) \quad \sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2}} = \frac{1}{l_0 R_1^0 R_2^0 R_3^0}$$

(<sup>1</sup>) P. Appell. *Traité de mécanique rationnelle*, vol. IV, 1921. Ci-dessous les chiffres entre crochets renvoient aux formules de ce Traité.

où [164]

$$(19) \quad l_0^2 = \frac{1}{(\sigma_0^2 - \mu^2)(\sigma_0^2 - \nu^2)}.$$

En substituant les expressions (18) et (14) dans (17), on trouve facilement

$$(20) \quad \theta = \frac{1}{2} l_0 R_1^0 R_2^0 R_3^0 \sum_{i=1}^3 h_i^2 M_i^2 N_i^2 \frac{d \lg a_i}{dt}.$$

D'autre part on a [167]

$$(21) \quad \frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dn} = - \frac{d\varphi}{d\rho} \frac{l_0 R_1^0 R_2^0 R_3^0}{\rho_0}.$$

La formule (3) donne

$$(22) \quad \left( \frac{d\varphi}{d\rho} \right)_0 = - \frac{\rho_0}{2} \sum_{i=1}^3 h_i^2 M_i^2 N_i^2 \frac{d \lg a_i}{dt}.$$

Pour calculer  $\varphi$  il faut développer  $M_i^2 N_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) en produits de Lamé. En introduisant les fonctions  $M_7, N_7, M_8, N_8$  de Lamé [182], on trouve

$$(23) \quad \begin{aligned} M_7 N_7 &= \mu^2 \nu^2 - \alpha(\mu^2 + \nu^2) + \alpha^2 \\ M_8 N_8 &= \mu^2 \nu^2 - \alpha'(\mu^2 + \nu^2) + \alpha'^2. \end{aligned}$$

Mais

$$M_1^2 N_1^2 = \mu^2 \nu^2 - a^2(\mu^2 + \nu^2) + a^4.$$

Donc on obtient

$$(24) \quad \begin{aligned} (\alpha - \alpha') M_1^2 N_1^2 &= (\alpha - a^2) M_8 N_8 - (\alpha' - a^2) M_7 N_7 + \\ &\quad + (\alpha - \alpha') (\alpha - a^2) (\alpha' - a^2) \end{aligned}$$

et les formules analogues pour  $M_2^2 N_2^2$  et  $M_3^2 N_3^2$  :

$$\begin{aligned}
 (\alpha - \alpha') M_3^2 N_3^2 &= (\alpha - b^2) M_8 N_8 - (\alpha' - b^2) M_7 N_7 + \\
 (24)' \quad &+ (\alpha - \alpha') (\alpha - b^2) (\alpha' - b^2). \\
 (\alpha - \alpha') M_3^2 N_3^2 &= (\alpha - c^2) M_8 N_8 - (\alpha' - c^2) M_7 N_7 + \\
 &+ (\alpha - \alpha') (\alpha - c^2) (\alpha' - c^2).
 \end{aligned}$$

D'après ces formules on a

$$(25) \quad \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = - \frac{\rho_0}{2(\alpha - \alpha')} \sum h_i^2 \frac{d \lg a_i}{dt} [(\alpha - a^2) M_8 N_8 - (\alpha' - a^2) M_7 N_7 + (\alpha - \alpha') (\alpha - a^2) (\alpha' - a^2)].$$

Le potentiel des vitesses s'obtient immédiatement d'après les règles générales [173]

$$(26) \quad \varphi = A M_8 N_8 S_8 + A' M_7 N_7 S_7 + A_0 S_0$$

où A, A' et A<sub>0</sub> sont des constantes :

$$\begin{aligned}
 A &= - \frac{\rho_0}{2(\alpha - \alpha') S_8'(\rho_0)} \sum h_i^2 \frac{d \lg a_i}{dt} (\alpha - a^2) \\
 (27) \quad A' &= \frac{\rho_0}{2(\alpha - \alpha') S_7'(\rho_0)} \sum h_i^2 \frac{d \lg a_i}{dt} (\alpha' - a^2) \\
 A_0 &= - \frac{\rho_0}{2S_0'(\rho_0)} \sum h_i^2 \frac{d \lg a_i}{dt} (\alpha - a^2) (\alpha' - a^2)
 \end{aligned}$$

S<sub>8</sub>, S<sub>7</sub> et S<sub>0</sub> sont les fonctions de Lamé de deuxième espèce et S'<sub>8</sub>, S'<sub>7</sub>, S'<sub>0</sub> leurs dérivées. Nous voyons, que φ est un polynôme de deuxième degré par rapport à μ<sup>2</sup> et ν<sup>2</sup>.

Si l'ellipsoïde (15) est une surface libre, la condition (5) doit alors être satisfaite. Cette condition prend la forme [125]:

$$(28) \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\rho_0}{\delta}.$$

Nous avons désigné par δ la densité du liquide. α, β, γ sont donnés par les expressions :

$$(29) \quad \alpha^2 = \frac{\rho_0^4(\mu^2 - \rho_0^2)(\nu^2 - \rho_0^2)}{R_1^2 R_2^2 R_3^2} \quad \beta^2 = \frac{\mu^4(\nu^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \mu^2)}{M_1^2 M_2^2 M_3^2}$$

$$\gamma^2 = \frac{\nu^4(\rho_0^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{N_1^2 N_2^2 N_3^2}.$$

L'équation (28) se transforme facilement comme suit :

$$(30) \quad 2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho^2} \right)^2 R_1^2 R_2^2 R_3^2 \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - \mu^2) + 2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mu^2} \right)^2 M_1^2 M_2^2 M_3^2 \rho_0^2 \nu^2 (\rho_0^2 - \nu^2) +$$

$$+ 2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu^2} \right)^2 N_1^2 N_2^2 N_3^2 \rho_0^2 \mu^2 (\mu^2 - \rho_0^2) +$$

$$+ \rho_0^2 \mu^2 \nu^2 (\rho_0^2 - \mu^2) (\mu^2 - \nu^2) (\nu^2 - \rho_0^2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_0}{2} \right) = 0.$$

C'est une équation symétrique de septième degré par rapport à  $\mu^2 \nu^2$  et de quatrième degré par rapport à  $\mu^2$  et  $\nu^2$  séparément. On obtient donc onze équations de la forme (13). Puisque dans ce cas  $k = 3$ , on ne peut pas satisfaire simultanément à toutes ces équations, à moins de circonstances exceptionnelles, qui en fait ne se produisent pas, et par conséquent, les surfaces (15) des ellipsoïdes ne pourraient être des surfaces de cavitations. Si à l'instant initial la cavitation a la forme d'un ellipsoïde, à l'instant suivant elle cessera d'avoir cette forme.

### § 2, 3. — Cas d'un ellipsoïde de révolution.

Nous examinerons maintenant le cas d'un ellipsoïde de révolution. Remarquons d'abord, que si la surface de la cavitation est au moment initial une surface de révolution, elle restera en se déformant toujours une surface de révolution. Dans ce cas les formules du paragraphe précédent se simplifient beaucoup. Le nombre des équations (13) se réduit à

trois, mais le nombre des paramètres étant égal à deux, les résultats négatifs que nous avons établis restent en vigueur.

Supposons que  $a = b$ , c'est-à-dire que l'ellipsoïde soit un ellipsoïde allongé de révolution autour de Oz. Les formules (14) prennent la forme [158] :

$$(31) \quad x = r_1 \sin \theta \cos \omega \quad y = r_1 \sin \theta \sin \omega \quad z = r_2 \cos \theta$$

où

$$(32) \quad r_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2} \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 - c^2} \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{a^2 - c^2}}.$$

Nous transformerons avec Lamb <sup>(1)</sup> ces formules comme suit :

$$(33) \quad x = \tilde{\omega} \cos \omega \quad y = \tilde{\omega} \sin \omega \quad z = k \cosh \eta \cos \theta = k \zeta \mu$$

où

$$(34) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega} &= k \sin \theta \sin \eta = k \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} & \mu &= \cos \theta \\ \zeta &= \cosh \eta & k &= \sqrt{a^2 - c^2} & \sinh \eta &= \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{a^2 - c^2}} \end{aligned}$$

$\zeta$ ,  $\mu$  et  $\omega$  sont les nouvelles coordonnées elliptiques. L'élément linéaire a la forme

$$(35) \quad ds^2 = \alpha^2 d\mu^2 + \beta^2 d\zeta^2 + \gamma^2 d\omega^2$$

$$(36) \quad \alpha^2 = k^2 \frac{\zeta^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}, \quad \beta^2 = k^2 \frac{\zeta^2 - \mu^2}{\zeta^2 - 1}, \quad \gamma^2 = k^2 (1 - \mu^2) (\zeta^2 - 1).$$

Les surfaces des ellipsoïdes sont  $\zeta = \zeta_0$  ou

$$(37) \quad f(x, y, z; k, \zeta_0) = \frac{x^2}{k^2 \cosh^2 \eta_0} + \frac{x^2 + y^2}{k^2 \sinh^2 \eta_0} - 1 = 0.$$

On trouve sans difficulté

$$(38) \quad \theta = \zeta_0 k' \sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \mu^2}} + k \zeta_0' \sqrt{\frac{\zeta_0^2 - \mu^2}{\zeta_0^2 - 1}}.$$

(1) Lamb. *Hydrodynamique*, § 403.

D'autre part on a :

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{\beta} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \mu^2}} \frac{d\varphi}{d\xi}.$$

D'où

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_0 = \zeta_0 k' k + k^2 \zeta_0 \frac{\zeta_0^2 - \mu^2}{\zeta_0^2 - 1}.$$

D'après cette formule (voir Lamb § 104) le potentiel des vitesses a la forme

$$(39) \quad \varphi = AX_2(\mu)Y_2(\zeta) + BY_0(\zeta)$$

où A et B sont des constantes

$$(40) \quad A = -\frac{2k^2\zeta'_0}{3Y'_2(\zeta_0)(\zeta_0^2 - 1)} \quad B = \frac{\zeta_0 k' k'}{Y'_0(\zeta_0)} + \frac{k^2\zeta'_0}{Y'_2(\zeta_0)(\zeta_0^2 - 1)} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Nous désignerons par  $X_1(\mu)$  les polynômes de Legendre et par  $Y_1(\zeta)$  les fonctions sphériques de deuxième espèce qui leur correspondent :

$$(41) \quad \begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) & Y_0(\zeta) &= \frac{1}{2} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \\ Y_2 &= \frac{1}{4}(3\zeta^2 - 1) \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{3}{2}\zeta. \end{aligned}$$

La condition (5) se réduit à

$$(42) \quad \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho}$$

où d'après les formules (36)

$$(43) \quad \frac{1}{k^2} \left[ (1 - \mu^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 + (\zeta_0^2 - 1) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)^2 \right] + 2(\zeta_0^2 - \mu^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho}\right) = 0.$$

C'est une équation de deuxième degré par rapport à  $\mu^2$ . Elle a la forme

$$(44) \quad A_0\mu^4 + A_1\mu^2 + A_2 = 0.$$

Puisque cette égalité doit être une identité par rapport à  $\mu$ , on obtient trois équations

$$(45) \quad A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \quad A_2 = 0.$$

Nous avons seulement deux paramètres arbitraires  $k$  et  $\zeta$ . On pourrait démontrer que les équations (45) sont indépendantes et, par conséquent, ne sont pas compatibles. Donc l'ellipsoïde allongé de révolution ne pourrait être une surface libre.

Indiquons un cas particulier d'une simplicité remarquable. Si l'ellipsoïde se déforme en restant homothétique à lui-même, alors  $\zeta' = 0$  et par conséquent

$$(46) \quad A = 0 \quad B = \frac{\zeta_0 k k'}{Y'_{00}(\zeta_0)} = -\zeta_0 k k' (\zeta_0^2 - 1),$$

Le potentiel  $\varphi$  ne dépend pas de  $\mu$  :

$$(47) \quad \begin{aligned} \varphi &= BY_0(\zeta) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \zeta_0 k k' \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_0 = \\ &= -\zeta_0 (\zeta_0^2 - 1) (k'^2 + k k'') \lg \sqrt{\frac{\zeta_0 + 1}{\zeta_0 - 1}}. \end{aligned}$$

L'équation (42) prend la forme

$$(48) \quad \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_0} \right)^2 (\zeta_0^2 - 1) + 2(\zeta_0^2 - \mu^2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho} \right) = 0.$$

Cette équation est linéaire par rapport à  $\mu^2$ . Nous obtenons deux équations :

$$(49) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho} = 0 \quad \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_0} \right)^2 (\zeta_0^2 - 1) = 0$$

ou d'après les formules (47)

$$(50) \quad \frac{1}{2} \zeta_0 (\zeta_0^2 - 1) \lg \frac{\zeta_0 + 1}{\zeta_0 - 1} (k'^2 + k k'') + \frac{p_0}{\rho} = 0$$

$$\zeta_0^2 k'^2 (\zeta_0^2 - 1) = 0.$$

Les solutions de ces équations sont

$$(51) \quad \begin{array}{lll} 1^\circ k' = 0 & k = \text{const.} & p_0 = 0 \\ 2^\circ \zeta_0 = 1 & & p_0 = 0. \end{array}$$

La première solution donne comme surface de cavitation un ellipsoïde immobile à condition que la pression à l'infini soit nulle. Cette solution est évidente et reste valable pour une surface quelconque, comme le montrent les équations (13). La seconde solution ne présente pas plus d'intérêt. Remarquons, que l'ellipsoïde  $\zeta_0 = 1$  se réduit à un segment de longueur  $2k$ . La cavité peut être considérée comme un tube infiniment mince de longueur  $2k$  qui varie arbitrairement.

Le cas d'un ellipsoïde aplati ( $b = c$ ) peut être étudié de la même manière. Indiquons ici quelques formules (voir Lamb, § 107) :

$$(52) \quad \begin{array}{lll} x = k \cos \theta \sinh \eta = k \mu \zeta, & y = \hat{\omega} \sin \omega, & z = \hat{\omega} \cos \omega \\ \zeta = \sinh \eta & \mu = \cos \theta & \hat{\omega} = k \cosh \eta \sin \theta. \end{array}$$

$$(53) \quad \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)_0 = k k' \zeta_0 + k^2 \zeta_0' \frac{\zeta_0^2 + \mu^2}{\zeta_0^2 + 1} \quad \varphi = A p_2(\mu) q_2(\zeta) + B q_0(\zeta)$$

où

$$(54) \quad \begin{array}{ll} p_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 + 1) & q_0(\zeta) = \text{arctg } \zeta \\ q_2(\zeta) = \frac{1}{2} (3\zeta^2 + 1) \text{arctg } \zeta - \frac{3}{2} \zeta. \end{array}$$

La solution  $\zeta_0 = 0, p_0 = 0$  correspond à la solution 2° (51).

La cavitation a la forme d'un disque infiniment mince de rayon  $k$  qui varie arbitrairement.

### § 2, 4. — Solution approchée.

Les résultats négatifs que nous avons obtenus montrent, que le problème d'une cavitation qui a, à l'instant initial, la forme d'un ellipsoïde, est loin d'être résolu et présente de grandes difficultés. Nous pouvons seulement indiquer une solution approximative, en suivant le procédé donné dans le § 2, 1.

Nous supposons, que le liquide est au repos à l'instant initial. Le premier terme du développement (3) est, par conséquent, une constante qu'on peut supposer égale à zéro ( $\varphi_0 = 0$ ). L'équation de pression (1) nous donne

$$(55) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 = \frac{p_0}{\delta}$$

d'où on obtient

$$(56) \quad \varphi_1 = \frac{p_0}{\delta S_0(\rho_0)} S_0(\rho).$$

D'après l'équation (2 bis) on a :  $\varphi_2 = 0$ . L'équation (2' bis) donne la valeur de  $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}\right)_0$  sur  $S$ . On obtient

$$\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}\right)_0 = -2 \left(\frac{dq}{dt}\right)_0^2 = -2 \left(\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0^2$$

ou d'après (56)

$$(57) \quad \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}\right)_0 = -2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)_0^2 \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{K}{(\mu^2 - \rho_0^2)(\nu^2 - \rho_0^2)}$$

où

$$K = \frac{2\rho_0 S'_0(\rho_0) (R_1^0)^2 (R_2^0)^2 (R_3^0)^2}{\delta S_0(\rho_0) \rho_0^4}.$$

On calculera la fonction  $\varphi_3$  en développant cette expression en série des fonctions de Lamé.

D'après la condition (2)'' on trouve facilement que  $\varphi_4 = 0$ . Donc le développement de la fonction  $\varphi_{\rho = \rho_0}$  a la forme suivante :

$$(58) \quad \varphi_{\rho = \rho_0} = \frac{p_0}{\delta} (t - t_0) - K \frac{(t - t_0)^3}{6(\mu^2 - \rho_0^2)(\nu^2 - \rho_0^2)} + \\ + (t - t_0)^5 Q$$

où Q reste fini pour  $t = t_0$ .

Si l'instant  $t$  est infiniment voisin de l'instant initial  $t = t_0$ , on peut négliger dans le développement (58) les termes d'ordre supérieur. On obtient alors

$$(59) \quad \varphi = \frac{p_0}{\delta S_0(\rho_0)} S_0(\rho) (t - t_0).$$

Cette formule nous donne la distribution des vitesses au commencement du mouvement. Nous voyons, que les vitesses sont normales à la surface de l'ellipsoïde initial et qu'elles sont constantes sur cette surface, tandis que les surfaces équipotentiellles sont des ellipsoïdes homofocaux.

---

## CHAPITRE III

### SURFACES PLANES LIBRES D'UN LIQUIDE PESANT

#### § 3, 1. — Mouvement dans un tube.

Dans le premier chapitre, nous avons étudié les cavitations sphériques et cylindriques circulaires. En passant à la limite, on obtient les cavitations planes. Nous supposons dans ce qui suit, que le liquide est pesant, et nous traiterons d'une façon approchée quelques problèmes se rattachant à celui des cavitations planes.

On étudie le mouvement d'un liquide pesant dans un vase en linéarisant le problème, c'est-à-dire en supposant les mouvements très petits. Le problème ainsi posé se ramène à une équation intégral-différentielle <sup>(1)</sup> qui présente de grandes difficultés. On arrive à des résultats très compliqués même dans les cas les plus simples. C'est pourquoi il nous paraît intéressant de donner ici une solution élémentaire d'un cas du mouvement du liquide pesant en adoptant l'hy-

(1) Hadamard. Sur les ondes liquides. *Comptes rendus*, 7 et 21 mars 1910.

Bouligand. Sur les singularités à la paroi dans le problème des ondes liquides. *Bulletin des sciences mathématiques*, mars-avril 1926.

Bouligand. Sur les équations des petits mouvements de surface des fluides parfaits. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1912.

pothèse du parallélisme des tranches dans certaines régions occupées par le liquide, quoique cette hypothèse puisse éveiller de grandes objections et quoique les solutions ainsi obtenues soient loin de présenter exactement les phénomènes réels. Mais en même temps cette restriction nous permet d'étudier les mouvements finis et d'obtenir les solutions complètes en fonctions elliptiques.

Les raisonnements qui suivent ont été en grande partie suggérés par M. Riabouchinsky, à qui nous devons la plus grande reconnaissance.

Prenons pour unité de densité la densité du liquide, dirigeons l'axe  $Oz$  vers en haut et faisons coïncider le plan  $Oxy$  avec le plan de charge. Soit  $T$  un tube cylindrique d'une section normale quelconque plongé verticalement dans un liquide infini. Désignons par  $l$  la longueur de la partie du tube au-dessous du plan de charge. Nous supposons : 1° que cette longueur soit grande par rapport à la plus grande des dimensions de la section normale du tube ; 2° que le liquide se meuve dans le tube par tranches horizontales, et que, par conséquent, la surface libre dans le tube soit toujours un plan ; 3° que la surface libre du liquide extérieur reste au repos, c'est-à-dire que le plan de charge soit immobile.

Soit  $z = a$  l'équation de la surface libre dans le tube. Le potentiel de vitesse a la forme  $\varphi = \dot{a}\omega(x, y, z)$ , où  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$  et où la fonction  $\omega(x, y, z)$  ne dépend pas du temps. Dans le tube, on a, d'après nos suppositions

$$(1) \quad \omega(x, y, z) = z + h$$

où  $h$  est une constante. Sur la surface libre du liquide extérieur qui est au repos,  $\omega(x, y, z)$  est constante. On peut tou-

jours admettre que cette constante soit nulle. Il est facile de désigner la limite inférieure de la constante  $h$ . Le potentiel  $\omega(x, y, z)$  correspond au cas où  $\dot{a} = 1$ , c'est-à-dire quand le liquide coule dans le tube. Sur le bord inférieur du tube ce potentiel prend la valeur  $-l + h$  qui doit être plus grande que sa valeur sur la surface libre extérieure. Donc, on a

$$(2) \quad -l + h \geq 0 \quad h \geq l.$$

Si on néglige le gradient du potentiel le long de la surface extérieure du tube, on pourrait admettre que  $h = l$ .

L'équation de pression donne

$$(3) \quad p + \frac{1}{2} a^2 \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] + \dot{a} \omega(x, y, z) + gz = 0$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $\dot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$ . D'après (1) dans le tube cette équation prend la forme :

$$(4) \quad p + \frac{1}{2} \dot{a}^2 + a(z + h) + gz = 0.$$

Sur la surface libre  $z = a$  la pression doit être constante. Nous la supposons nulle. On obtient ainsi l'équation

$$(5) \quad \frac{1}{2} \dot{a}^2 + \ddot{a}(a + h) + ga = 0$$

qui détermine le mouvement de la surface libre dans le tube. On obtient immédiatement la première intégrale de cette équation :

$$(6) \quad \dot{a}^2(a + h) + ga^2 = gc^2$$

où  $c^2$  est une constante déterminée par les conditions initiales :

$$(7) \quad gc^2 = ga_0^2 + \dot{a}_0^2 (a_0 + h)$$

$\dot{a}_0$  et  $z = a_0$  étant la vitesse et l'équation de la surface libre à l'instant  $t = t_0$ . Ecrivons l'équation (6) sous la forme

$$(8) \quad \frac{(a+h)da}{\sqrt{(a+h)(c^2-a^2)}} = \pm \sqrt{g} dt.$$

D'après (2) le facteur  $a+h$  est positif. Donc le facteur  $c^2 - a^2$  doit être aussi positif, et par conséquent, la vitesse initiale  $a_0$  doit satisfaire à la condition

$$(9) \quad gc^2 = a_0^2(a_0 + h) + ga_0^3 < g\hbar^2.$$

Pendant la durée du mouvement  $a$  varie entre  $+c$  et  $-c$ , et par conséquent, le mouvement est périodique.

Pour ramener l'équation (8) à la forme canonique de Weierstrass faisons le changement de variable

$$a = x - \frac{1}{3}h.$$

On a alors

$$(10) \quad \frac{2i \left( x + \frac{2}{3}h \right) dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \pm \sqrt{g} dt$$

où

$$(11) \quad g_2 = 4\left(c^2 + \frac{1}{3}h^2\right) \quad g_3 = \frac{8}{3}h\left(c^2 - \frac{1}{9}h^2\right).$$

Les racines qui correspondent à cette forme canonique sont :

$$(12) \quad e_1 = c + \frac{1}{3}h \quad e_2 = -c + \frac{1}{3}h \quad e_3 = -\frac{2}{3}h.$$

La variable  $x$  varie entre  $e_1$  et  $e_2$ . Introduisons maintenant l'argument elliptique  $u$ , en supposant  $x = pu$ . L'équation (10) prend la forme

$$(13) \quad 2i\left(pu + \frac{2}{3}h\right)du = dt\sqrt{g}$$

d'où

$$(14) \quad \sqrt{g} t = 2i(\eta - \zeta u) + \frac{4}{3} ih(u - \omega)$$

en prenant pour instant initial l'instant où  $u = \omega$ , c'est-à-dire quand la surface libre atteint sa limite supérieure. Les formules (14) et

$$(15) \quad a = pu - \frac{1}{3} h$$

donnent la solution du problème. Puisque l'argument  $u$  a la forme  $u = ix + \omega$ ,  $\alpha$  étant une variable réelle, la formule (14) se transforme comme suit

$$(16) \quad \sqrt{g} t = -2i\left(\zeta ix + \frac{1}{2} \frac{p'ix}{pux - e_1}\right) - \frac{4}{3} hx.$$

D'après ces formules la demi-période du mouvement est égale à

$$(17) \quad \tau = -2i\eta' + \frac{4}{3} ih\omega'.$$

Pour calculer les éléments du mouvement il faut savoir le module  $q$  qui correspond aux racines  $e_1, e_2, e_3$  (12). Ce module est donné par le développement (1)

$$q = \frac{\varepsilon}{2} + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{13} + \dots$$

où

$$\varepsilon = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}$$

dans le cas où  $g_3 > 0$  et

$$\varepsilon = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}}$$

dans le cas où  $g_3 < 0$ .

(1) Halphen. *Traité des fonctions elliptiques*, 1 vol., p. 270-271 (1886).

On calcule les demi-périodes  $\omega$  et  $\omega'$  ainsi que  $\eta$  et  $\eta'$  immédiatement à l'aide de formules connues.

Comme nous l'avons déjà remarqué, le mouvement que nous avons obtenu est périodique, ce qui est en contradiction avec l'expérience. Ce fait tient à notre supposition à ce, qu'aucune perte d'énergie ne se produit. Cependant, en réalité le mouvement du liquide dans le tube fait naître des ondes sur la surface libre extérieure qui se propagent dans toutes les directions, à l'infini. La formation de ces ondes entraîne une grande perte d'énergie du liquide intérieur, et le mouvement s'éteint déjà après une ou deux oscillations.

Supposons maintenant que le tube T soit infini et qu'il soit plongé tout entier dans le liquide qui remplit seulement sa partie supérieure. Soit  $l$  la distance entre le bord supérieur du tube et le plan de charge. En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on obtient sans difficulté les mêmes formules (5), (8), (10) et (11). Le facteur  $a + h$  étant négatif ( $h \leq l$ ), on a  $c^2 < a^2$ . La constante  $c^2$  peut être dans ce cas aussi négative, mais si la vitesse  $a_0$  est positive, alors pour que les formules (8) et (10) soient valables pendant toute la durée du mouvement, il faut que  $c^2 > h^2$ . La coordonnée  $a$  variant entre  $a_0$  et  $-\infty$ , le mouvement est progressif. La variable  $x$  varie entre  $e_2 = -c + \frac{1}{3}h$  et  $-\infty$  si  $c^2 > 0$ , et entre  $e_2 = -\frac{2}{3}h$  et  $-\infty$  si  $c^2 < 0$ . Les formules (14)-(17) restent valables si l'on suppose dans le cas  $c^2 < 0$ , que  $\omega' = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  étant les demi-périodes imaginaires conjuguées.

## § 3, 2. — Cas d'un gaz qui suit la loi de Mariotte.

On peut modifier les conditions du problème de § 3, 1 en supposant que la partie supérieure du tube soit fermée et qu'elle contienne un gaz qui suit la loi de Mariotte. Désignons par  $l'$  la longueur de la partie du tube au-dessus du plan de charge. La pression du gaz à l'instant  $t$  sera donnée par la formule :

$$(18) \quad p = \frac{k}{l' - a} \quad k = p_0(l' - a_0)$$

où  $p_0$  est la pression à l'instant initial. En substituant cette formule dans l'équation de pression (4) on obtient

$$(19) \quad \frac{k}{l' - a} + \frac{1}{2} a^2 + a(a + h) + ga = 0.$$

C'est l'équation du mouvement de la surface libre dans le tube. La première intégrale s'obtient immédiatement

$$(20) \quad \dot{a}(a + h) = \pm \sqrt{g(a + h) \left( c^2 - a^2 + \frac{2k}{g} \lg \frac{l' - a}{l' - a_0} \right)}$$

où

$$gc^2 = ga_0^2 + a_0^2(\dot{a}_0 + h).$$

L'équation

$$c^2 - a^2 + \frac{2k}{g} \lg \frac{l' - a}{l' - a_0} = 0$$

a deux racines comprises entre  $l'$  et  $-\infty$ . La coordonnée  $a$  variant entre ces deux racines, le mouvement est périodique. Si à l'instant initial  $a_0 = 0$ , on détermine le signe devant le radical (20) comme suit. Développons  $\lg \frac{l' - a}{l' - a_0}$  en puis-

sances de  $a_0 - a$  et négligeons les quantités infiniment petites d'ordre supérieur. On obtient ainsi :

$$c^2 - a^2 + \frac{2k}{y} \lg \frac{v-a}{v'-a_0} = (a_0 - a) \left( a_0 + a + \frac{2\rho_0}{g} \right).$$

Donc si  $p_0 > -a_0g$ , alors  $a < a_0$ , et on doit prendre le signe minus ; si  $p_0 < -a_0g$ , alors  $a > a_0$ , et il faut retenir le signe plus, ce qui est évident au point de vue physique.

### § 3, 3. — Mouvement dans deux vases cylindriques (1).

Examinons maintenant un problème plus général, quand le liquide se meut dans deux vases  $T_1$  et  $T_2$ , cylindriques verticaux qui communiquent entre eux. Soient  $S_1$  et  $S_2$  les sections normales de ces vases ( $S_1 < S_2$ ). Prenons pour le plan  $Oxy$  la surface libre dans les vases, quand le liquide est en équilibre, et dirigeons l'axe  $Oz$  vers le haut. Soient  $z = a_1$  et  $z = a_2$  les équations des surfaces libres dans les vases à l'instant  $t$ . On a évidemment

$$(21) \quad a_2 = -k^2 a_1 \quad k^2 = \frac{S_1}{S_2} < 1.$$

Le potentiel de vitesses a la forme  $\varphi_1 = \dot{a}_1(z_1 + c_1)$  dans le vase  $T_1$  et la forme  $\varphi_2 = \dot{a}_2(z_2 + c_2)$  dans le vase  $T_2$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes, qui vérifient l'inégalité suivante. Désignons par  $l_1$  et  $l_2$  les longueurs des parties de vases  $T_1$  et  $T_2$  au-dessous du plan  $Oxy$ , où le mouvement s'effectue

(1) Ce problème vient d'être traité par Mazet, Sur les oscillations d'un liquide en vases communicants. *Rendiconti della R. A. dei Lincei. Roma*, vol. III, série 6<sup>a</sup>, 1926.

par des tranches horizontales. Alors il est aisé de voir que

$$(22) \quad c_1 + c_2 k^2 > l_1 + l_2 k^2.$$

En effet, supposons pour fixer l'idée que  $\dot{a}_1 < 0$  ( $\dot{a}_2 > 0$ ), c'est-à-dire que le liquide coule du premier vase dans le second. On a alors

$$\dot{a}_1(-l_1 + c_1) < \dot{a}_2(-l_2 + c_2)$$

d'où on obtient immédiatement l'inégalité (22). Remarquons, que d'après (21) et (22)

$$(23) \quad \frac{c_1 + k^2 c_2}{1 - k^4} > l_1.$$

Les pressions  $p_1$  et  $p_2$  dans les vases sont liées par l'équation

$$(24) \quad p_1 + \frac{1}{2} \dot{a}_1^2 + \ddot{a}_1(z_1 + c_1) + gz_1 = p_2 + \frac{1}{2} \dot{a}_2^2 + \ddot{a}_2(z_2 + c_2) + gz_2.$$

Sur les surfaces libres  $p_1 = p_2$ ,  $z_1 = a_1$ ,  $z_2 = a_2$ . On obtient ainsi l'équation du mouvement des surfaces libres dans les vases :

$$(25) \quad \frac{1}{2} (\dot{a}_1^2 - \dot{a}_2^2) + \ddot{a}_1(a_1 + c_1) - \ddot{a}_2(a_2 + c_2) + g(a_1 - a_2) = 0.$$

En substituant la formule (21) on obtient

$$(26) \quad \frac{1}{2} \dot{a}_1^2 (1 - k^4) + a_1 a_1 (1 - k^4) + \dot{a}_1 (c_1 + k^2 c_2) + a_1 g (1 + k^2) = 0$$

et en effectuant l'intégration

$$(27) \quad \dot{a}_1(a_1 + h) = \pm \sqrt{\frac{g}{1 - k^2}} \sqrt{(a_1 + h)(c^2 - a_1^2)}$$

où

$$(28) \quad h = \frac{c_1 + c_2 k^2}{1 - k^4} \quad gc^2 = ga_{10}^2 + (1 - k^2)(a_{10} + h)\dot{a}_{10}^2.$$

L'équation (27) montre, que la coordonnée  $a_1$  varie entre  $+c$  et  $-c$ , car le facteur  $a_1 + h$  est positif en vertu de (23). La vitesse initiale  $\dot{a}_{10}$  doit satisfaire à la condition

$$ga_{10}^2 + (1 - k^2) (a_{10} + h)a_{10}^2 < gh^2.$$

Le mouvement est par conséquent périodique. L'inversion d'intégrale elliptique (27) s'effectue comme dans le § 3, 1. On obtient ainsi

$$(29) \quad a_1 = pu - \frac{1}{3}h \quad \sqrt{\frac{a}{1-k^2}} t = 2i(r_1 - \zeta u) + \frac{4}{3}ih(u - \omega).$$

Si les sections des vases sont égales ( $k^2 = 1$ ), l'équation (26) prend la forme

$$(30) \quad a_1(c_1 + c_2) + 2ga_1 = 0$$

et les oscillations deviennent harmoniques.

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

**SUR L'INFLUENCE DES BORDS  
SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE  
DANS UN LIQUIDE**



## PRÉFACE

---

Dans cet Ouvrage nous traitons de quelques exemples relatifs à l'influence des bords sur le mouvement des corps solides dans un liquide. Nous avons tâché de répondre seulement à des questions précises et limitées, sans nous occuper de la théorie générale <sup>(1)</sup>. C'est en étudiant des problèmes simples qu'on peut se rendre compte des phénomènes complexes qui se présentent en réalité. L'influence des bords sur le mouvement d'un solide dans un liquide est une question d'un grand intérêt pratique. Dans l'aviation elle a une importance particulière, étant liée directement aux lois d'atterrissage et d'envol des avions. Il était donc intéressant d'étudier cette question au point de vue de la théorie classique du mouvement des corps solides dans un liquide <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Cette dernière a été développée dans notre note : Forces perturbatrices agissant sur un corps qui se meut dans un liquide près d'une paroi. *Comptes rendus*, 1927, 28 novembre.

<sup>(2)</sup> Dans ce qui suit nous laissons tout à fait de côté les problèmes si importants dans l'aviation de l'interaction du sol sur les ailes d'un aéroplane et de l'interaction mutuelle des ailes d'un biplan ou triplan. Voir à ce sujet Maurice Roy, Sur la théorie des surfaces portantes (*Scientia*, 1922), ainsi que les travaux de Prandtl, Betz et Munk. On trouvera des recherches expérimentales du même sujet dans le *Bulletin Technique de Service Technique de l'Aéronautique*, no 19, 1924. Toussaint,

Mais le problème ainsi posé ne pourrait pas être abordé avec succès à cause de sa généralité, car les cas même les plus simples présentent plusieurs difficultés, comme nous le verrons dans ce qui suit. Nous nous contentons d'étudier le problème des perturbations dans le mouvement d'un cylindre de révolution sous l'influence d'une paroi cylindrique circulaire ou plane. Ces problèmes ne sont pas nouveaux, mais ils ont été traités d'un autre point de vue et non dans toute leur généralité. Dans le § 1,1 on trouvera des indications bibliographiques à ce sujet.

La question de l'influence d'une paroi plane étant la plus importante au point de vue pratique et en même temps la plus simple, nous nous permettons de donner ici un bref aperçu des résultats que nous avons obtenus relativement à ce problème.

La présence de la paroi <sup>(1)</sup> se manifeste par des perturbations du mouvement du liquide et du cylindre. Il serait difficile de donner dans le cas général une interprétation simple de la variation du champ des vitesses exprimée par les formules des §§ 3, 2 et 3, 21, qui représentent le développement du potentiel en série des puissances négatives de la distance  $a$  du cylindre de la paroi. Mais en supposant que cette distance soit très grande par rapport au rayon  $b$  du cylindre, on obtient une suite de conclusions importantes :

1° La perturbation du mouvement acyclique étant de deuxième ordre, est négligeable par rapport à la perturbation du mouvement cyclique qui est de premier ordre.

*Contribution à l'étude expérimentale des lois de similitude en aérodynamique, chapitre V, p. 66.*

<sup>(1)</sup> Dans ce qui suit nous supposons, que la paroi est horizontale.

2° La première variation du champ des vitesses est égale au champ des vitesses d'un courant liquide qui entoure le cylindre  $r = b$  supposé immobile et qui *a*) vient de l'infini avec la vitesse  $\frac{\kappa}{4\pi a}$ ,  $\kappa$  étant la circulation autour du cylindre, *b*) est parallèle à la paroi et *c*) a le même sens que la circulation.

3° La deuxième variation se compose de la variation du mouvement cyclique et de celle du mouvement acyclique. La variation du mouvement acyclique est égale au champ des vitesses d'un courant liquide qui entoure le cylindre supposé immobile et qui vient de l'infini avec la vitesse  $-\frac{1}{4} \frac{b^2}{a^2} \vec{U}$ ,  $\vec{U}$  étant la vitesse du cylindre. La partie de la deuxième variation relative au mouvement cyclique est égale au champ des vitesses d'un courant hyperbolique qui entoure le cylindre immobile et dont la distribution des vitesses sur l'asymptote est égale à  $\frac{\kappa}{8\pi a^2} r$ ,  $r$  étant la distance de la particule fluide au centre du cylindre. L'asymptote de l'affluence forme avec la verticale descendante l'angle  $+ 45^\circ$ , si  $\kappa > 0$ , et  $- 45^\circ$ , si  $\kappa < 0$  (voir les figures VI et VII, p. 103).

On pourrait interpréter les variations d'ordre supérieur de la même manière.

L'interprétation précédente n'est valable qu'à la distance finie du cylindre. Près de la paroi la première variation est égale au champ des vitesses non perturbées. Par conséquent, la présence de la paroi double les vitesses primitives.

La masse additive du cylindre est la même dans le mouvement horizontal et dans le mouvement vertical. Elle croît constamment ainsi que l'énergie cinétique du liquide, quand

la distance du cylindre à la paroi diminue. Sa valeur maximum est 2,28. . fois plus grande que la valeur non perturbée et est atteinte, quand le cylindre heurte la paroi.

Quand le cylindre se meut dans un liquide infini, il est assujetti à deux forces : force d'inertie de la masse additive et force de Joukowsky. La présence de la paroi fait apparaître encore d'autres forces perturbatrices au nombre de quatre que nous désignons par  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  et  $F_4$ .

La force  $F_1$  est la force d'augmentation d'inertie de la masse additive du cylindre.

La force  $F_2$  est due à la variation de la masse additive. Sa valeur absolue est égale à la dérivée de la masse additive par rapport au rayon-vecteur du centre du cylindre  $(\frac{1}{2} \vec{U}^2 \frac{dm}{da})$ . Cette force diminue la composante horizontale de la vitesse, si le cylindre monte, et l'augmente, si le cylindre descend. Si la pente de la trajectoire est plus petite que  $45^\circ$ , elle attire le cylindre vers la paroi et le repousse dans le cas contraire. Nous voyons que l'effet produit par la force  $F_2$  peut être nuisible aux avions. Cet effet diminue vite avec l'accroissement de la distance entre le corps et la paroi. Mais près de la paroi la force  $F_2$  est considérable surtout, si la vitesse  $\vec{U}$  est grande, et même théoriquement elle devient infinie au moment où le cylindre touche la paroi.

La force  $F_3$  représente la variation de la force de Joukowsky. La présence de la paroi augmente la valeur absolue de cette force. Cette augmentation est d'autant plus grande que le cylindre est plus près de la paroi. La force perturbée

de Joukowski s'obtient de la force initiale en la multipliant par le coefficient  $\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ .

La force  $F_4$  est la force d'attraction par la paroi ; elle est due uniquement à la circulation et est égale à  $\frac{\rho \kappa^2}{4\pi\sqrt{a^2 - b^2}}$  où  $\rho$  est la densité du liquide. Elle croît, quand le cylindre s'approche de la paroi, et devient infinie, ainsi que les forces  $F_2$  et  $F_3$ , quand le cylindre heurte la paroi.

Quand la distance  $a$  est très grande, les forces  $F_1$  et  $F_3$ , qui sont de deuxième ordre, et la force  $F_2$ , qui est de troisième ordre, sont négligeables par rapport à la force  $F_4$ , qui est de premier ordre. C'est cette force, par conséquent, due à la circulation, qui perturbe le plus le mouvement du cylindre, si celui-ci se trouve à une distance suffisamment grande de la paroi. Dans ces conditions on peut prendre pour la valeur de cette force l'expression  $\frac{1}{4\pi} \frac{\rho \kappa^2}{a}$ .

Le caractère des forces perturbatrices qui vient d'être décrit détermine complètement les perturbations dans le mouvement du cylindre dont les trajectoires non perturbées sont des cercles. Si la distance  $a$  est grande, en négligeant les forces  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ , on obtient une cycloïde comme trajectoire du cylindre. Mais près de la paroi le mouvement est plus compliqué. Si le cylindre ne heurte pas la paroi, le mouvement est périodique. La trajectoire du cylindre est comprise entre deux droites horizontales et est tangente à ces droites. Elle est symétrique par rapport aux verticales qui passent par les points de contact. Si la composante horizontale de la vitesse s'annule, la trajectoire a des points doubles ou, dans le cas limite, des points de rebroussement

sur la droite supérieure. Si cette composante ne s'annule pas, la trajectoire n'a pas de points singuliers.

Tout ce que nous venons de dire de la paroi plane se généralise facilement pour une paroi cylindrique circulaire. Nous traitons dans ce qui suit seulement le cas où le cylindre mobile se trouve à l'intérieur du cylindre immobile. Mais il est facile de voir, que les formules obtenues sont applicables aussi sous une certaine réserve dans le cas des cylindres extérieurs. On pourrait étudier ainsi l'influence mutuelle de deux corps se mouvant dans un liquide. Notre problème est susceptible aussi d'autres généralisations. On peut en déduire une infinité, en effectuant des transformations conformes du domaine occupé par le liquide (par exemple la transformation de Joukowski) <sup>(1)</sup>. L'image de l'influence des bords dont nous avons parlé restera la même dans ses points essentiels. Il serait nécessaire d'entreprendre une étude spéciale de quelques cas importants donnant des profils d'ailes.

(<sup>1</sup>) Dans le cas du mouvement stationnaire cette méthode a été appliquée par J. Bonder, Mouvement de deux cylindres circulaires dans un liquide parfait avec application au vol d'un aéroplane à proximité du sol. *Société Polytechnique de Varsovie*, t. IV, 1. 1925 (en polonais).

---

## CHAPITRE PREMIER

### MOUVEMENT D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION DANS UN VASE CYLINDRIQUE CIRCULAIRE

#### § 1, 1. — Introduction.

La théorie classique de mouvement des corps solides dans un liquide, donnée par Kirchhoff<sup>(1)</sup>, bien qu'on ne doive la considérer qu'en tant que première approximation, ne donne une solution complète que dans des cas très particuliers et peu nombreux. Ce sont ceux dans lesquels un corps solide ayant la forme d'une sphère, d'un ellipsoïde ou d'un cylindre elliptique, se meut dans un liquide infini<sup>(2)</sup>. Cependant ces cas présentent relativement moins d'intérêt, car l'inertie additive correspondante est constante. Le problème de mouvement de deux corps solides dans un liquide infini, même dans le cas le plus simple de deux sphères, ne peut être résolu qu'approximativement<sup>(3)</sup>. La présence d'une paroi fixe rend le problème encore plus difficile<sup>(4)</sup>. C'est pourquoi

(1) Kirchhoff. *Mechanik*. 19 Vorlesung.

(2) *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. IV, vol. V, fasc. 2 1914, pp. 125, 131, 132.

(3) et (4) *L. c. a.*, pp 132-133. Mouvement de deux sphères, de deux cylindres de révolution et d'une sphère au voisinage d'un plan fixe a été surtout étudié par Hicks.

le problème dont nous donnons ci-dessous la solution présente un intérêt particulier. Un cas limite de ce problème a été étudié déjà par M. Riabouchinsky dans sa thèse <sup>(1)</sup>. M. Riabouchinsky envisage le mouvement d'un cylindre circulaire qui se meut parallèlement à une paroi rectiligne en utilisant la méthode de Schwarz et Christoffel qui permet de résoudre le problème uniquement dans le cas où le mouvement est stationnaire <sup>(2)</sup>. Nous traitons un problème plus général <sup>(3)</sup> et donnons une solution complète, en employant la méthode directe de développement en séries trigonométriques. Les résultats que nous avons obtenus ont une forme très simple et sont susceptibles d'une interprétation mécanique directe.

Ce problème a été déjà traité dans le cas du mouvement acyclique par Hicks <sup>(4)</sup> par une méthode tout à fait différente de la nôtre. Quant au mouvement cyclique Hicks a étudié seulement quelques questions particulières qui s'y rattachent <sup>(5)</sup>.

Cependant ce mouvement a la plus grande importance quand

<sup>(1)</sup> D. Riabouchinsky. *Sur les équations générales du mouvement de corps solides dans un liquide incompressible*, 1922. Paris, pp. 112-131.

<sup>(2)</sup> Voir aussi J. Bonder, *l. c. a.*

<sup>(3)</sup> Ce problème nous avait été indiqué par M. Métal.

<sup>(4)</sup> Hicks. On the motion of two cylinders in a fluid, pp. 113-140, 193-210. *The Quarterly journal of pure and applied mathematics*, 1879, vol. XVI. Dans ce mémoire Hicks calcule directement l'énergie cinétique du liquide sans calculer le potentiel des vitesses et applique ensuite les formules reçues à l'interprétation du mouvement acyclique du cylindre.

<sup>(5)</sup> Hicks. On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid, pp. 194-202. *The Quarterly journal of pure and applied mathematics*, 1881, vol. XVII.

on veut mettre en évidence l'influence des bords sur le mouvement, comme nous le verrons plus loin. En même temps c'est le mouvement cyclique qui joue le plus grand rôle dans les problèmes pratiques de l'hydrodynamique.

Posons le problème suivant. Considérons un vase cylindrique circulaire limité latéralement par deux plans parallèles et perpendiculaires aux génératrices du cylindre. Dans ce vase rempli de liquide, considérons un autre cylindre de révolution qui se meut orthogonalement à ses génératrices et parallèlement aux parois planes du vase. Nous supposons que le mouvement du liquide soit le même dans toutes les sections normales du vase, et ramènerons ainsi notre problème à un problème plan.

### § 1, 2. — Problème élémentaire.

Avant d'aborder le problème posé rappelons la solution d'un problème élémentaire qui peut être considéré comme un cas limite où le rayon du cercle immobile devient infini. Nos raisonnements peuvent paraître un peu longs, mais ils seront justifiés par ce qui suit.

Soient  $b$  le rayon du cercle et  $O_1$  son centre que nous prenons pour origine de coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . Si le cercle tourne avec une vitesse angulaire  $\dot{\omega}$  autour d'un pôle fixe  $O$ , le potentiel des vitesses  $\varphi_1$  et la fonction du courant  $\psi_1$  qui correspondent à ce mouvement ont la forme :

$$(a) \quad \varphi_1 = -\dot{\omega}ab^2 \frac{\sin \theta}{r} \quad \psi_1 = -\omega ab^2 \frac{\cos \theta}{r}$$

$$f_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = -\dot{\omega}ab^2 \frac{i}{z-a}$$

où  $a$  est le segment  $OO_1$  et  $z - a = re^{i\theta}$ .

Si le cercle se déplace avec une vitesse  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$  dans la direction  $\vec{OO}_1$ , la distribution des vitesses dans le liquide se détermine comme suit

$$(b) \quad \varphi_2 = -\dot{a}b^2 \frac{\cos \theta}{r} \quad \psi_2 = \dot{a}b^2 \frac{\sin \theta}{r}$$

$$f_2 = \varphi_2 + i\psi_2 = -\dot{a}b^2 \frac{1}{z-a}$$

où  $\varphi_2$  et  $\psi_2$  sont le potentiel des vitesses et la fonction du courant correspondant à ce mouvement.

Désignons par  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  le potentiel des vitesses et la fonction du courant du mouvement cyclique. On a

$$(c) \quad \varphi_0 = -\frac{x\theta}{2\pi} \quad \psi_0 = \frac{x}{2\pi} \lg r$$

$$f_0 = \varphi_0 + i\psi_0 = \frac{ix}{2\pi} \lg(z-a)$$

où  $x$  est la circulation.

L'énergie cinétique du mouvement acyclique est égale à

$$(d) \quad 2\mathcal{E} = m(\dot{a}^2 + a^2\dot{\omega}^2) \quad m = \rho\pi b^2$$

où  $\rho$  est la densité du liquide.

Quant au mouvement cyclique, l'énergie cinétique correspondante est infiniment grande.

Soient  $X$  et  $N$  la projection radiale de la pression du fluide sur le cylindre et son moment autour du pôle  $O$ . D'après le théorème de Kutta-Joukowski on a

$$(e) \quad X = -m\ddot{a} + ma\dot{\omega}^2 + na\dot{\omega}$$

$$(f) \quad N = -m \frac{d}{dt}(a^2\dot{\omega}) - \dot{n}aa$$

où

$$(g) \quad m = \pi b^2 \rho, \quad n = \rho x, \quad \ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}.$$

Dans ces formules  $m$  est la masse additive du cylindre et  $n$  la composante de la force de Joukowski relative à l'unité de vitesse.

Les équations du mouvement du cylindre prennent la forme :

$$(h) \quad M\dot{a} - M a \dot{\omega}^2 - n a \dot{\omega} = 0, \quad M \frac{d}{dt} (a^2 \dot{\omega}) + n a \dot{a} = 0,$$

$$M = m + \pi b^2 \rho_1$$

où  $\rho_1$  est la densité du cylindre.

Les premières intégrales de ces équations sont

$$(i) \quad a^2 + a^2 \dot{\omega}^2 = h^2 \quad M a^2 \dot{\omega} + \frac{n}{2} a^2 = \Gamma.$$

Les constantes  $h$  et  $\Gamma$  se déterminent d'après les conditions initiales. Soient  $a_0, \omega_0, \dot{a}_0 = 0, \dot{\omega}_0$  les coordonnées et les vitesses du cercle à l'instant initial. Alors

$$(j) \quad h^2 = a_0^2 \dot{\omega}_0^2 \quad \Gamma = M a_0^2 \dot{\omega}_0 + \frac{n}{2} a_0^2.$$

Les équations (i) donnent

$$(l) \quad a^2 = h^2 - \frac{\left(\Gamma - \frac{n}{2} a^2\right)^2}{M^2 a^2}$$

ou en intégrant

$$(m) \quad a^2 = -A \cos \frac{n}{M} t + A + a_0^2$$

avec

$$A = \frac{2}{n^2} (h^2 M^2 + \Gamma n).$$

La deuxième équation (i) prend la forme :

$$\frac{M}{n} \dot{\omega} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{n(A + a_0^2) - 2\Gamma}{An} + \cos \frac{n}{M} t}{\frac{A + a_0^2}{A} - \cos \frac{n}{M} t}$$

ou en intégrant

$$(n) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\left(a_0 - \frac{2\Gamma}{na_0}\right) \sin \frac{n}{M} t}{a_0 + \frac{2\Gamma}{na_0} - \left(a_0 - \frac{2\Gamma}{na_0}\right) \cos \frac{n}{M} t}.$$

Les équations (m) et (n) sont les équations paramétriques du cercle en coordonnées polaires. Le rayon du cercle est égal à

$$\frac{1}{2} \left| a_0 - \frac{2\Gamma}{na_0} \right| = \left| \frac{M}{n} \dot{\omega}_0 a_0 \right|.$$

Ces résultats sont évidents *a priori*. Ils nous seront utiles pour étudier l'influence des bords sur le mouvement du cercle.

Revenons maintenant au problème général.

### § 1, 3. — Représentation conforme sur une couronne circulaire.

Soient O le centre de la section normale (L) du vase et O<sub>1</sub> le centre du cylindre mobile (L<sub>1</sub>). Désignons par *c* et *b* les rayons de ces deux sections et par *a* le segment OO<sub>1</sub>. Prenons O pour origine d'axes de coordonnées, dirigeons l'axe Ox vers O<sub>1</sub> et posons

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy.$$

Ecrivons l'équation du cercle L sous la forme :

$$(1) \quad z\bar{z} = c^2$$

et celle du cercle L<sub>1</sub> sous la forme :

$$(2) \quad z\bar{z} - a(z + \bar{z}) + a^2 = b^2.$$

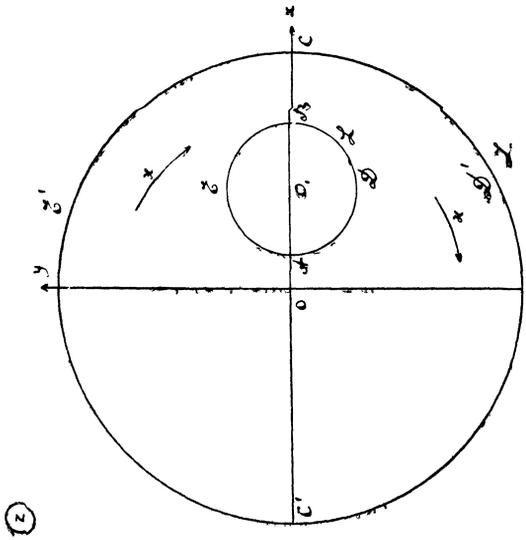


Fig. 1.

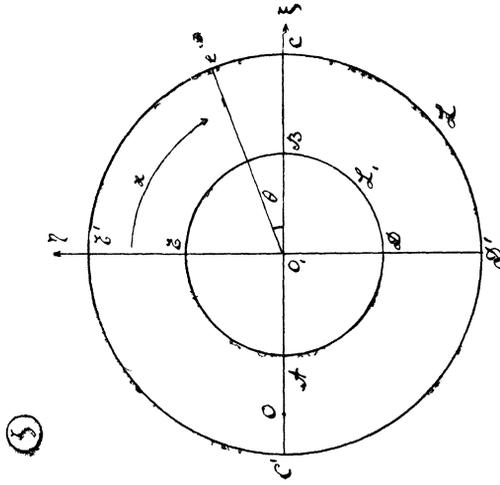


Fig. 2.

Représentons d'une façon conforme le domaine  $z$  occupé par le fluide sur la bande annulaire  $\zeta$  comprise entre deux cercles concentriques de rayon 1 et  $q < 1$ . Les équations de ces cercles ont la forme

$$(1)' \quad \zeta \bar{\zeta} = 1 \qquad (2)' \quad \zeta \bar{\zeta} = q^2$$

où

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta.$$

La représentation conforme du plan  $z$  sur le plan  $\zeta$  est donnée par la transformation homographique suivante

$$(3) \quad \zeta = \frac{ck - z}{kz - c} \qquad (4) \quad z = \frac{c(k + \zeta)}{k\zeta + 1}.$$

où  $k$  est une constante à déterminer. La formule (3) donne

$$(5) \quad \zeta \bar{\zeta} = \frac{c^2 k^2 - ck(z + \bar{z}) + z\bar{z}}{k^2 z \bar{z} - ck(z + \bar{z}) + c^2}.$$

Sur le cercle L  $z\bar{z} = c^2$  ou d'après (5)  $\zeta \bar{\zeta} = 1$ , c'est-à-dire que nous obtenons le cercle extérieur de la couronne. Pour que le cercle intérieur de la couronne corresponde au cercle  $L_1$  il faut satisfaire à l'équation

$$q^2 = \frac{c^2 k^2 - ck(z + \bar{z}) + z\bar{z}}{k^2 z \bar{z} - ck(z + \bar{z}) + c^2}$$

ou

$$z\bar{z}(1 - k^2 q^2) - ck(1 - q^2)(z + \bar{z}) + c^2(k^2 - q^2) = 0.$$

En substituant maintenant l'équation (2) nous obtenons l'identité

$$(z + \bar{z})[a(1 - k^2 q^2) - ck(1 - q^2)] + c^2(k^2 - q^2) - (a^2 - b^2)(1 - k^2 q^2) = 0$$

d'où

$$(6) \quad a(1 - k^2q^2) - ck(1 - q^2) = 0$$

$$(7) \quad c^2(k^2 - q^2) - (a^2 - b^2)(1 - k^2q^2) = 0.$$

Ces deux dernières équations déterminent  $q$  et  $k$ . En introduisant les fonctions hyperboliques :  $\sin h \log q$ ,  $\sin h \log k$ ,  $\cos h \log q$ ,  $\cos h \log k$ , donnons à ces équations la forme suivante :

$$(8) \quad a \operatorname{sh} \lg kq = c \operatorname{sh} \lg q$$

$$(9) \quad c^2 \operatorname{sh} \lg \frac{k}{q} = (b^2 - a^2) \operatorname{sh} \lg kq.$$

De ces équations on tire successivement :

$$(10) \quad ch \lg k = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \quad (11) \quad sh \lg k = -\frac{\sqrt{D}}{2ac}$$

$$(12) \quad ch \lg q = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2cb} \quad (13) \quad sh \lg q = -\frac{\sqrt{D}}{2cb}$$

$$(14) \quad ch \lg kq = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} \quad (15) \quad sh \lg kq = -\frac{\sqrt{D}}{2ab}$$

$$(16) \quad kq = \frac{c^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{D}}{2ab}$$

où

$$(17) \quad D = (c^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2 = \\ = (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a - b - c).$$

Cette quantité est toujours positive en vertu de l'inégalité

$$c \geq a + b.$$

Nous prenons devant le radical dans les formules (11), (13)

et (15) le signe plus, c'est-à-dire nous choisissons pour  $k$  et  $q$  les valeurs moindres que un.

Il est aisé de voir que

$$(18) \quad \frac{a}{c} \leq k \leq \frac{a+b}{c}$$

Nous voyons aussi que d'après l'équation (9)

$$(19) \quad \begin{array}{ll} k < q & \text{si } a < b \\ k > q & \text{si } a > b. \end{array}$$

La constante  $k$  a une interprétation géométrique simple ; c'est l'abscisse du point 0 dans le plan  $\zeta$ . La position des points C et C' dans le plan  $\zeta$  résulte immédiatement de l'équation (3), quant aux points A et B, il n'y a pas non plus de difficulté, car il est aisé de vérifier que

$$(20) \quad q = \frac{ck - a - b}{k(a+b) - c} = - \frac{ck - a + b}{k(a-b) - c}$$

On peut aussi facilement démontrer qu'au sens direct de la rotation dans le plan  $\zeta$  correspond le sens direct de la rotation dans le plan  $z$ . Donc la formule (3) qui donne la représentation conforme du plan  $z$  sur le plan  $\zeta$  satisfait à toutes les conditions nécessaires à la solution de notre problème. Les constantes  $k$  et  $q$  jouent un grand rôle dans ce qui suit. Elles sont des fonctions du rayon  $c$  du vase. D'après les formules (10) et (12) on trouve facilement que  $\frac{dk}{dc} < 0$ ,  $\frac{dq}{dc} < 0$  c'est-à-dire que  $k$  et  $q$  diminuent constamment quand  $c$  croît. Quand  $c$  est égal à  $a + b$  (sa valeur inférieure)  $k$  et  $q$  sont égaux à un. Quand  $c$  devient infini,  $k$  et  $q$  tendent vers zéro. Ainsi l'influence de la présence du vase sur  $k$  et  $q$  est bien simple

## § 1, 4. — Potentiel de vitesse dans le cas de la rotation.

Supposons, que le cercle  $L_1$  tourne avec une vitesse angulaire  $\omega$  autour du centre  $O$ . Cherchons la distribution des vitesses dans le liquide, en supposant le mouvement acyclique. Selon l'usage introduisons les notations  $f_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y)$  où  $\varphi_1$  est le potentiel de vitesse et  $\psi_1$  la fonction du courant. Nous avons <sup>(1)</sup>

$$(21) \quad \psi_1 = -\frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \omega z \bar{z}$$

sur le cercle  $L_1$  et  $\psi_1 = \text{const.}$  sur le cercle  $L$ . D'après la formule (4) nous avons sur le cercle  $L_1$

$$(22) \quad z \bar{z} = c^2 \left[ 1 - \frac{(1 - k^2)(1 - q^2)}{1 + 2kq \cos \theta + q^2 k^2} \right]$$

en supposant

$$(23) \quad \zeta = qe^{i\theta}.$$

En négligeant les constantes additives, nous obtenons pour la valeur de la fonction  $\psi_1$  sur le cercle  $L_1$  l'expression

$$(24) \quad \psi_1 = \frac{1}{2} \omega c^2 \frac{(1 - k^2)(1 - q^2)}{1 + 2kq \cos \theta + k^2 q^2}$$

Sur le cercle  $|\zeta| = 1$ ,  $\psi_1$  est constante. Donc nous sommes ramenés au problème de Dirichlet pour l'anneau. La méthode de Villat <sup>(2)</sup> nous fournit immédiatement l'expression pour  $f_1(\zeta)$  sous la forme d'une intégrale définie.

<sup>(1)</sup> Lamb. *Hydrodynamics*, 1916, § 72.

<sup>(2)</sup> Villat. Problème de Dirichlet dans une aire annulaire. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIII, 1912, pp. 434-475.

Mais le calcul de cette intégrale serait assez compliqué : il faudrait développer les fonctions  $\psi_1$  et  $\zeta_3$  en séries et au fond faire les mêmes calculs qu'en employant la méthode directe. C'est pourquoi nous n'utiliserons pas les formules de Villat, mais développerons directement l'expression (24) en série de Fourier.

Nous avons

$$\frac{1 - q^2 k^2}{1 + 2qk \cos \theta + q^2 k^2} = -1 + \frac{1}{1 + qke^{i\theta}} + \frac{1}{1 + qke^{-i\theta}}.$$

Mais

$$(25) \quad \frac{1}{1 + qke^{i\theta}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n k^n e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{1 + qke^{-i\theta}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n k^n e^{-in\theta}.$$

Donc nous obtenons le développement suivant

$$(26) \quad \psi_1 = -2\omega ac \operatorname{sh} \lg k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k^n q^n \cos n\theta$$

car d'après la formule (8)

$$\frac{(1 - k^2)(1 - q^2)}{1 - k^2 q^2} = -2 \frac{\operatorname{sh} \lg k \operatorname{sh} \lg q}{\operatorname{sh} \lg kq} = -\frac{2a}{c} \operatorname{sh} \lg k.$$

La fonction harmonique  $\psi_1$  qui s'annule sur L et prend les valeurs (26) sur  $L_1$  est égale à

$$(27) \quad \psi_1 = -2\omega ac \operatorname{sh} \lg k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n q^{2n}}{1 - q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} - r^n \right) \cos n\theta.$$

Le potentiel des vitesses  $\varphi_1$  se détermine d'après les formules :

$$(28) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{r \partial \theta} \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Nous obtenons

$$(29) \quad \varphi_1 = -2\omega ac \operatorname{sh} \lg k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n q^{2n}}{1 - q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} + r^n \right) \sin n\theta.$$

Les expressions (27) et (29) donnent

$$(30) \quad \begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 + i\psi_1 = \\ &= -2\omega iac \operatorname{sh} \lg k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n q^{2n}}{1 - q^{2n}} (\zeta^{-n} - \zeta^n). \end{aligned}$$

Nous donnerons à cette série une autre forme, en utilisant quelques transformations dues à Villat (<sup>1</sup>). Puisque  $q < 1$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{1 - q^{2n}} = \sum_{p=0}^{\infty} q^{2np}.$$

D'après ce développement on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^n q^{2n}}{1 - q^{2n}} (\zeta^{-n} - \zeta^n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^n k^n q^{2pn} (\zeta^{-n} - \zeta^n) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{q^{2p} k \zeta}{1 + q^{2p} k \zeta} - \frac{q^{2p} k \zeta^{-1}}{1 + q^{2p} k \zeta^{-1}} \right] = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \zeta \frac{d}{d\zeta} \lg[(1 + q^{2p} k \zeta)(1 + q^{2p} k \zeta^{-1})] = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dv} \lg S(v, k, q) \end{aligned}$$

où

$$(31) \quad S(v, k, q) = \prod_{p=1}^{\infty} (1 + q^{2p} k \zeta)(1 + q^{2p} k \zeta^{-1}) \quad \zeta = e^{2\pi i v}.$$

On obtient donc finalement pour  $f_1$  l'expression

$$(32) \quad f_1 = -\omega \frac{ac}{\pi} \operatorname{sh} \lg k \frac{d}{dv} \lg S(v, k, q).$$

(<sup>1</sup>) Villat, *ibid.*, page 63.

La fonction  $S(v, k, q)$  est une généralisation des produits  $\mathfrak{S}(v)$  de Weierstrass <sup>(1)</sup>. Dans le cas  $k = 1$  elle se réduit à  $\mathfrak{S}_2(v)$  à quelques facteurs près et dans le cas  $k = q$ , à  $\mathfrak{S}_4(v)$ . Le produit infini (31) converge uniformément à l'intérieur du cercle  $|\zeta| = 1$  et sur le cercle lui-même, car  $k < 1, q < 1$ . Ce produit peut être facilement développé en série des puissances de  $k$  :

$$(33) \quad S(v, k, q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} k^{\nu}$$

où

$$(34) \quad A_0 = 1 \quad A_1 = (\zeta + \zeta^{-1}) \frac{q^k}{1 - q^2}$$

$$A_2 = \frac{q^4}{1 - q^4} \left[ (\zeta + \zeta^{-1})^2 \frac{q^2}{1 - q^2} + 1 \right]$$

avec la formule de récurrence

$$A_{\nu} = \frac{q^{2\nu}}{1 - q^{2\nu}} [A_{\nu+1}(\zeta + \zeta^{-1}) + A_{\nu-2}].$$

Indiquons encore les développements

$$(35) \quad S(v, k, q) = \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i k^i \zeta^i \right) \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i k^i \zeta^{-i} \right)$$

$$a_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{q^{2j}}{1 - q^{2j}}.$$

$$(36) \quad \lg S(v, k, q) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} k^n \cos n\theta.$$

<sup>(1)</sup> Tannery et Molk. *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 48, t. II, Paris, 1896.

Il est aisé de voir que

$$(37) \quad S(v + 1, k, q) = S(v, k, q)$$

$$S(v + \tau, k, q) = \frac{1 + k\zeta^{-1}}{1 + q^2 k \zeta} S(v, k, q) \quad \tau = -\frac{i}{\pi} \lg q.$$

Quoique les propriétés de la fonction  $S(v, k, q)$  soient analogues aux propriétés des fonctions de troisième espèce de Hermite, elle ne se réduit pas en général à ces fonctions.

### § 1, 41. — Potentiel des vitesses dans le cas du mouvement radial.

Supposons que le cercle  $L_1$  se déplace avec une vitesse  $a = \frac{da}{dt}$  dans la direction de l'axe  $Ox$ . Désignons par  $\varphi_2$  et  $\psi_2$  le potentiel des vitesses et la fonction du courant correspondant à ce mouvement radial. Sur le cercle  $L_1$  nous avons :

$$(38) \quad \psi_2 = ay = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})a.$$

Mais d'après la formule (4) on a

$$z - \bar{z} = \frac{2i q(1 - k^2) \sin \theta}{1 + 2qk \cos \theta + q^2 k^2}.$$

Donc la fonction du courant  $\psi_2$  prend sur le cercle  $|\zeta| = q$  les valeurs suivantes :

$$(39) \quad \psi_2 = \frac{acq(1 - k^2) \sin \theta}{1 + 2qk \cos \theta + q^2 k^2}.$$

Développons maintenant cette expression en série de Fourier. Nous avons d'après la formule (25) :

$$\begin{aligned} \frac{2iqk \sin \theta}{1 + 2qk \cos \theta + q^2k^2} &= \frac{1}{1 + qke^{-i\theta}} - \frac{1}{1 + qke^{i\theta}} \\ &= -2i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n k^n \sin n\theta \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(40) \quad \psi_2 = -ac(1 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n k^{n-1} \sin n\theta.$$

La fonction harmonique  $\psi_2$  qui s'annule sur L et prend les valeurs (40) sur  $L_1$  est égale à

$$(41) \quad \psi_2 = -ac(1 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n-1}q^{2n}}{1 - q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} - r^n \right) \sin n\theta.$$

La formule (28) nous donne le potentiel des vitesses  $\varphi_2$  qui correspond à cette fonction du courant

$$(42) \quad \varphi_2 = ac(1 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n-1}q^{2n}}{1 - q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} + r^n \right) \cos n\theta.$$

On déduit immédiatement de ces formules l'expression pour  $f_2 = \varphi_2 + i\psi_2$  :

$$(43) \quad f_2 = ac(1 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{n-1}q^{2n}}{1 - q^{2n}} (\zeta^n + \zeta^{-n}).$$

Nous faisons subir à cette expression une transformation tout à fait analogue à celle du paragraphe précédent. On obtient aisément

$$f_2 = -ac(1 - k^2) \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{q^{2p}\zeta}{1 + q^{2p}k\zeta} + \frac{q^{2p}\zeta^{-1}}{1 + q^{2p}k\zeta^{-1}} \right].$$

En introduisant la fonction  $S(v, k, q)$  (31), on peut écrire

$$(44) \quad f_2 = -ac(1 - k^2) \frac{d}{dk} \lg S(v, k, q).$$

En comparant cette formule avec la formule (32), on remarquera que  $f_1$  fait intervenir la dérivation par rapport à  $v$  et  $f_2$  la dérivation par rapport à  $k$  de la même fonction  $S(v, k, q)$ . Ainsi la fonction  $S(v, k, q)$  caractérise complètement la distribution des vitesses dans le liquide.

La formule (44) peut être écrite sous une autre forme, en utilisant une nouvelle fonction

$$S_1(v, k, q) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{1 + kq^{2p}\zeta}{1 + kq^{2p}\zeta^{-1}} \quad \zeta = e^{2\pi iv}.$$

Alors on a

$$f_2 = -\frac{ac}{2i\pi k} (1 - k^2) \frac{d}{dv} \lg S_1(v, k, q).$$

La fonction  $S_1(v, k, q)$  a la propriété

$$\begin{aligned} S_1(v + 1, k, q) &= S_1(v, k, q) \\ S_1(v + \tau, k, q) &= \frac{1}{(1 + kq^{2\tau})(1 + k\zeta^{-1})} S_1(v, k, q) \\ \tau &= -\frac{i}{\pi} \lg q. \end{aligned}$$

Indiquons le développement

$$\lg S_1(v, k, q) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} k^n \sin nv.$$

### § 1, 5. — Influence des bords sur la distribution des vitesses dans le liquide.

La comparaison des formules (a) et (b) avec les formules (27), (29), (30), (41), (42) et (43) nous permet d'étudier l'in-

fluence des bords du vase sur la distribution des vitesses dans le liquide. Supposons, que le rayon  $c$  du vase soit très grand par rapport au rayon  $b$  du cylindre et au rayon-vecteur  $a$ . Désignons  $\frac{1}{c}$  par  $\varepsilon$  et considérons cette quantité comme une quantité infiniment petite de premier ordre. Développons  $k$  et  $q$  en séries des puissances par rapport à  $\varepsilon$ . En négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient d'après les formules (10)-(17) :

$$(17)' \quad \sqrt{D} = \frac{1}{\varepsilon^2} [1 - \varepsilon^2(a^2 + b^2) - 2\varepsilon^4 a^2 b^2]$$

$$(10)' \quad ch \lg k = \frac{1 + \varepsilon^2(a^2 - b^2)}{2a\varepsilon}$$

$$(11)' \quad sh \lg k = - \frac{1 - \varepsilon^2(a^2 + b^2) - 2\varepsilon^4 a^2 b^2}{2a\varepsilon}$$

$$(12)' \quad ch \lg q = \frac{1 - \varepsilon^2(a^2 - b^2)}{2b\varepsilon}$$

$$(13)' \quad sh \lg q = - \frac{1 - \varepsilon^2(a^2 + b^2) - 2\varepsilon^4 a^2 b^2}{2b\varepsilon}$$

D'où

$$(45)' \quad k = a\varepsilon(1 + \varepsilon^2 b^2)$$

$$(46)' \quad q = b\varepsilon(1 + \varepsilon^2 a^2).$$

La transformation homographique (3) prend la forme

$$(3)' \quad \zeta = \varepsilon[z - a + \varepsilon^2 a(z^2 - az - b^2)].$$

Calculons maintenant  $f_1$  et  $f_2$ , en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux. Substituons les formules précédentes dans les développements (30) et (43). Il est évident que c'est seulement les termes en  $\zeta$ ,  $\zeta^{-1}$  et  $\zeta^{-2}$  qu'il nous

fait. Après quelques calculs faciles, mais un peu longs, on trouve en négligeant les termes constants :

$$(30)' \quad f_1 = i\omega ab^2 \left( -\frac{1 + \varepsilon^2 b^2}{r - a} + \varepsilon^2 z \right)$$

$$(43)' \quad f_2 = ab^2 \left( -\frac{1 + \varepsilon^2 b^2}{r - a} - \varepsilon^2 z \right).$$

D'où on obtient

$$(29)' \quad \varphi_1 = \omega ab^2 \left[ -\left(1 + \varepsilon^2 b^2\right) \frac{\sin \theta}{r} - \varepsilon^2 r \sin \theta \right]$$

$$(42)' \quad \varphi_2 = ab^2 \left[ -\left(1 + \varepsilon^2 b^2\right) \frac{\cos \theta}{r} - \varepsilon^2 r \cos \theta \right].$$

Comparons ces formules avec les formules correspondantes relatives au mouvement d'un cylindre dans un liquide illimité [voir § 1, 2 form. (a) et (b)]. Nous voyons que la variation du potentiel due à l'influence des bords est égale à

$$(47) \quad \delta\varphi_1 = \omega ab^2 \left[ -\varepsilon^2 b^2 \frac{\sin \theta}{r} - \varepsilon^2 r \sin \theta \right]$$

$$(48) \quad \delta\varphi_2 = ab^2 \left[ -\varepsilon^2 b^2 \frac{\cos \theta}{r} - \varepsilon^2 r \cos \theta \right].$$

Désignons par  $\vec{V}_0$  la vitesse du cylindre. D'après les formules (47) et (48) la variation du potentiel est égale au potentiel d'un courant fluide venant de l'infini avec la vitesse  $-\vec{V}_0 \varepsilon^2 b^2$  et entourant le cylindre immobile.

On obtient ainsi le théorème suivant :

La perturbation du champ des vitesses du mouvement acyclique due à la présence des bords du vase est égale au champ des vitesses d'un courant liquide qui venant de l'infini avec la vitesse  $-\vec{V}_0 \varepsilon^2 b^2$  entoure le cylindre  $r = b$  supposé immobile.

On remarquera que cette perturbation est de deuxième ordre.

§ 1, 6. — **Mouvement cyclique** <sup>(1)</sup>.

Supposons que le cercle  $L_1$  soit immobile et que le liquide circule autour de ce cercle. Supposons en outre, que la cloison qui rend le domaine occupé par le liquide simplement connexe, coïncide avec le segment BC. Soient  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  le poten-

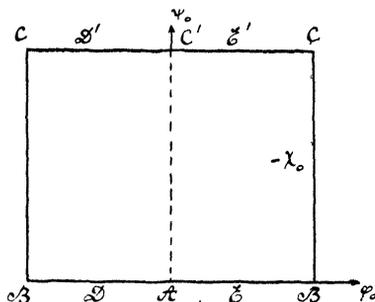


Fig. 3.

tiel de vitesse et la fonction du courant correspondants. Le plan  $f_0 = \varphi_0 + i\psi_0$  est donné par la figure III. Les points qui correspondent entre eux sont indiqués sur les plans  $z, \zeta, f_0$  par les mêmes lettres. Si  $x$  est la circulation et  $\chi_0$  le flux à travers la coupure BC, on a alors dans le plan  $f_0$

$$AB = \frac{x}{2} \quad BC = -\chi_0.$$

<sup>(1)</sup> Nous suivons dans ce paragraphe les raisonnements de M. Riabouchinsky, voir thèse, p. 124, 1922, Paris.

Nous représentons d'une façon conforme le plan  $f_0$  sur le plan  $\zeta$  en supposant

$$f_0 = C_1 \lg \zeta + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes qu'on doit déterminer. On peut toujours supposer, qu'au point A dont l'affixe est  $\zeta = qe^{i\pi}$  on ait  $f_0 = 0$ , c'est-à-dire que

$$0 = C_1 \lg q + i\pi C_1 + C_2.$$

Au point B dont l'affixe est  $q$  on a  $f_0 = \frac{x}{2}$ . D'où

$$\frac{x}{2} = C_1 \lg q + C_2.$$

Ces équations nous permettent de calculer  $C_1$  et  $C_2$ . On trouve

$$C_1 = \frac{ix}{2\pi} \quad C_2 = -\frac{ix}{2\pi} \lg q + \frac{x}{2}.$$

On obtient ainsi

$$(49) \quad f_0 = \frac{ix}{2\pi} \lg \zeta + \frac{x}{2} - \frac{ix}{2\pi} \lg q$$

$$\varphi_0 = -\frac{x}{2\pi} \theta + \frac{x}{2} \quad \psi_0 = \frac{x}{2\pi} \lg \frac{q}{r}.$$

Pour calculer le flux  $\chi_0$  remarquons qu'au point C dont l'affixe est  $\zeta = 1$ , on a  $f_0 = \frac{x}{2} - i\chi_0$ . La formule (49) nous donne

$$(50) \quad \chi_0 = \frac{x}{2\pi} \lg q.$$

L'énergie cinétique du mouvement cyclique est égale à

$$(51) \quad 2K = -\rho x \chi_0.$$

En substituant l'expression (50), on obtient

$$(52) \quad 2K = -\frac{\rho \kappa^2}{2\pi} \lg q.$$

La comparaison des formules (49) avec les formules (c) nous permet de trouver l'influence des bords sur le mouvement cyclique dans le cas où le rayon du vase est assez grand. En substituant la formule (3)' dans l'expression (49) et en négligeant les termes constants, on obtient :

$$(49)' \quad \begin{aligned} f_0 &= -\frac{\kappa}{2\pi i} \left[ \lg(z-a) + \varepsilon^2 a \left( z - \frac{b^2}{z-a} \right) \right] \\ \varphi_0 &= -\frac{\kappa}{2\pi} \theta - \frac{\varepsilon^2 a \kappa}{2\pi} \left( r \sin \theta + b^2 \frac{\sin \theta}{r} \right). \end{aligned}$$

Donc la variation du potentiel cyclique est égale à

$$\delta\varphi_0 = -\frac{\varepsilon^2 a \kappa}{2\pi} \left( r \sin \theta + b^2 \frac{\sin \theta}{r} \right).$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

La perturbation du champ des vitesses du mouvement cyclique due à la présence des bords du vase est égale au champ des vitesses d'un courant liquide qui entoure le cylindre  $r = b$  supposé immobile et qui 1° vient de l'infini avec la vitesse  $\frac{\varepsilon^2 a \kappa}{2\pi}$ , 2° est perpendiculaire à la ligne des centres  $OO_1$  et 3° a le même sens que la circulation.

En substituant la formule (46) dans l'expression (52) on trouve

$$(52)' \quad 2K = -\frac{\rho \kappa^2}{2\pi} [\lg b + \lg \varepsilon + \varepsilon^2 a^2].$$

L'énergie cinétique du mouvement cyclique augmente infiniment comme  $-\lg \varepsilon$ .

§ 1, 7. — Énergie cinétique dans le mouvement de rotation.

Désignons par  $\mathfrak{E}_1$  l'énergie cinétique du liquide dans le mouvement plan acyclique qui correspond à la rotation du cercle autour du centre O. Nous avons

$$2\mathfrak{E}_1 = -\rho \int_{L_1} \varphi_1 d\psi_1 = -\rho \int_0^{2\pi} \varphi_1 \frac{d\psi_1}{d\theta} d\theta.$$

où  $\rho$  est la densité du liquide. Mais d'après (26) et (29) on a sur le cercle  $L_1$

$$(53) \quad d\psi_1 = 2\omega ac sh \lg k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nk^n q^n \sin n\theta d\theta$$

$$(54) \quad \varphi_1 = -2ac sh \lg k \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m k^m q^m \frac{1+q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin m\theta.$$

En multipliant ces deux séries et en remarquant, que

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = 0 \quad n \neq m$$

nous obtenons

$$(55) \quad 2\mathfrak{E}_1 = 4\pi\rho\omega^2 c^2 a^2 s h^2 \lg k \sum_{n=1}^{\infty} nk^{2n} q^{2n} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

Transformons cette expression. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nk^{2n} q^{2n} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} &= \frac{k}{2} \frac{d}{dk} \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} q^{2n} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} = \\ \frac{k}{2} \frac{d}{dk} \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{k^2 q^{2(p+1)}}{1-k^2 q^{2(p+1)}} + \frac{k^2 q^{2(p+2)}}{1-k^2 q^{2(p+2)}} \right] &= \frac{k^2 q^2}{(1-k^2 q^2)^2} + \\ &+ 2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{k^2 q^{2p}}{(1-k^2 q^{2p})^2}. \end{aligned}$$

Cette transformation nous permet d'écrire l'énergie cinétique sous la forme

$$2\mathfrak{E}_1 = \pi\rho\dot{\omega}^2 a^2 c^2 \frac{sh \lg k}{sh^2 \lg qk} P(k, q)$$

où

$$(56) \quad P(k, q) = 1 + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \left[ \frac{kq - k^{-1}q^{-1}}{kq - k^{-1}q^{-p}} \right]^2.$$

Mais d'après les formules (11) et (15) on a

$$(57) \quad b sh \lg kq = c sh \lg k.$$

Donc nous obtenons finalement

$$(58) \quad 2\mathfrak{E}_1 = \pi\rho\dot{\omega}^2 a^2 b^2 P(k, q).$$

### § 1, 71. — Energie cinétique dans le mouvement radial.

Désignons par  $\mathfrak{E}_2$  l'énergie cinétique qui correspond au mouvement radial. Nous avons

$$2\mathfrak{E}_2 = -\rho \int_0^{2\pi} \varphi_2 \frac{d\psi_2}{d\theta} d\theta.$$

D'après les formules (40) et (42) on a sur le cercle  $L_1$

$$(59) \quad d\psi_2 = -\dot{a}c(1 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nq^n k^{n-1} \cos n\theta d\theta.$$

$$(60) \quad \varphi_2 = \dot{a}c(1 - k^2) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m k^{m-1} q^m \frac{1 + q^{2m}}{1 - q^{2m}} \cos m\theta$$

et par conséquent

$$(61) \quad 2\mathfrak{E}_2 = \rho\pi\dot{a}^2 c^2 (1 - k^2)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nk^{2n-2} q^{2n} \frac{1 + q^{2n}}{1 - q^{2n}}.$$

Mais il est aisé de voir que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nk^{2n} {}_2q^{2n-2} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} &= \frac{1}{2q^2k} \frac{d}{dk} \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} q^{2n} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} = \\ &= \frac{1}{k^2q^2} \left[ \frac{k^2q^2}{(1-k^2q^2)^2} + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{k^2q^{2p}}{(1-k^2q^{2p})^2} \right]. \end{aligned}$$

L'expression (61) prend la forme

$$2\mathfrak{C}_2 = \rho\pi\dot{a}^2c^2 \frac{q^2(1-k^2)^2}{(1-k^2q^2)^2} P(k, q)$$

ou d'après la formule (57)

$$(62) \quad 2\mathfrak{C}_2 = \rho\pi\dot{a}^2b^2P(k, q).$$

En comparant les formules (58) et (62) nous voyons que la masse additive du cylindre dans le mouvement radial est la même que dans le mouvement de rotation. Désignons-la par  $m$ . Elle est égale à

$$(63) \quad m = \pi\rho b^2P(k, q).$$

## § 1, 72. — Énergie cinétique dans le mouvement général.

On obtient le mouvement général en superposant le mouvement acyclique et le mouvement cyclique. Le potentiel des vitesses et la fonction du courant dans ce mouvement général sont :

$$(64) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_0 \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_0.$$

Pour calculer l'énergie cinétique  $T$  dans le mouvement général rappelons, que l'énergie totale est égale à la somme

des énergies cinétiques du mouvement cyclique et du mouvement acyclique  $\mathfrak{E}$

$$(65) \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{E} + \mathfrak{K}.$$

Mais

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{E} &= -\rho \int_{L_1} (\varphi_1 + \varphi_2) d(\psi_1 + \psi_2) = \\ &= -\rho \int_{L_1} \varphi_1 d\psi_1 - \rho \int_{L_1} \varphi_2 d\psi_2 - \rho \int_{L_1} \varphi_1 d\psi_2 - \rho \int_{L_1} \varphi_2 d\psi_1. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes disparaissent en vertu de (53), (54), (59), (60); car  $\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta d\theta = 0$ . Par conséquent

$$(66) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2.$$

En rappelant que la masse additive du cylindre est égale à

$$(67) \quad m = \pi\rho b^2 P(k, q) = \pi\rho b^2 \left[ 1 + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \left( \frac{kq - k^{-1}q^{-1}}{kq^p - k^{-1}q^{-p}} \right)^2 \right]$$

on obtient finalement

$$(68) \quad 2\mathfrak{E} = (a^2\omega^2 + a^2)m$$

$$(69) \quad 2\mathfrak{T} = (a^2\omega^2 + a^2)m - \frac{1}{2\pi} \rho x^2 \operatorname{I}g q.$$

La comparaison de ces formules avec les formules (d) nous donne la variation de la masse additive due à la présence des bords du vase dans le cas général :

$$\begin{aligned} (70) \quad \delta m &= 2\pi\rho b^2 \sum_{p=2}^{\infty} \left[ \frac{kq - k^{-1}q^{-1}}{kq^p - k^{-1}q^{-p}} \right]^2 = \\ &= 2\pi\rho b^2 (1 - k^2 q^2)^2 \sum_{p=2}^{\infty} \left( \frac{q^p - 1}{1 - k^2 q^{2p}} \right)^2. \end{aligned}$$

Si le rayon du vase est très grand, on a alors, d'après les formules (45) et (46)

$$(70)' \quad \delta m = 2\pi\rho b^4\varepsilon^2 [1 + \varepsilon^2(2a^2 + b^2) + \varepsilon^4(a^2 + b^2)^2 \dots]$$

Pour se rendre compte de la variation de l'énergie cinétique il est nécessaire d'étudier les propriétés de la fonction  $P(k, q)$  qui joue un grand rôle dans ce qui suit.

### § 1, 8. — Étude de la fonction $P(k, q)$ .

La fonction  $P(k, q)$  (67) peut être présentée sous une autre forme, si l'on introduit les fonctions hyperboliques :

$$(70) \quad P(k, q) = 1 + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \left[ \frac{sh(\alpha + \beta)}{sh(\nu + p\beta)} \right]^2 = \\ = 1 + 2(1 - k^2q^2) \sum_{p=2}^{\infty} \left[ \frac{q^{p-1}}{1 - k^2q^{2p}} \right]^2$$

où

$$\alpha = \lg k < 0 \quad \beta = \lg q < 0.$$

Calculons les dérivées de  $\alpha$  et  $\beta$  par rapport à  $c$ . D'après les formules (10) et (12), on obtient sans difficulté

$$(71) \quad \frac{d\alpha}{dc} = \frac{coth\beta}{c} \quad \frac{d\beta}{dc} = \frac{coth\alpha}{c'}$$

D'où

$$(72) \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{b}{a} \frac{ch\beta}{ch\alpha}$$

Si  $c$  prend sa valeur inférieure, c'est-à-dire si  $c = a + b$ , on a alors d'après cette formule

$$(73) \quad \lim_{c=a+b} \frac{\lg k}{\lg q} = \frac{b}{a}$$

On obtient maintenant facilement la valeur de la fonction  $P(k, q)$  pour  $c = a + b$ .

On a

$$P(1,1) = 1 + 2 \lim_{p=2}^{\infty} \sum \left( \frac{\alpha + \beta}{\alpha + p\beta} \right)^2$$

d'où

$$(74) \quad P(1,1) = 1 + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \left( \frac{b + a}{b + pa} \right)^2.$$

Quand  $c$  devient infini,  $q$  et  $k$  tendent vers zéro et, par conséquent, on a

$$(75) \quad P(0,0) = 1.$$

Démontrons que la fonction  $P(k, q)$  diminue constamment, quand  $c$  augmente de  $a + b$  à  $\infty$ . Calculons la dérivée  $\frac{dP}{dc}$ . On a d'après les formules (71)

$$(76) \quad \frac{dP}{dc} = \frac{1}{c} \left( \coth\beta \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \coth\alpha \frac{\partial P}{\partial \beta} \right)$$

l'équation (70) donne :

$$(77) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \alpha} &= 4 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{sh(\alpha + \beta) \cdot h(p-1)\beta}{sh^3(\alpha + p\beta)} < 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \beta} &= -4 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{sh(\alpha + \beta)}{sh^3(\alpha + p\beta)} [(\rho - 1)sh\alpha ch\alpha ch(p+1)\beta + \\ &\quad + ch^2\alpha(psh\beta chp\beta - ch\beta shp\beta) + sh^2\alpha(pch\beta shp\beta - sh\beta chp\beta)]. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$(78) \quad \begin{aligned} shp\beta &= \sum_n C_p^n sh^n \beta ch^{p-n} \beta & n &= 1, 3, 5... \\ chp\beta &= \sum_n C_p^{n-1} ch^{p-n+1} \beta sh^{n-1} \beta & n &= 1, 3, 5... \end{aligned}$$

où

$$C_p^n = \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n(n-1) \dots 1} \quad C_p^0 = 1$$

on a

$$(78)' \quad \begin{aligned} psh\beta chp\beta - ch\beta shp\beta &= \sum_n (n-1) C_{p+1}^n sh^n \beta ch^{p-n+1} \beta < 0 & n &= 1, 3, 5... \\ pch\beta shp\beta - sh\beta chp\beta &= \sum_n (p-n) C_{p+1}^n ch^{p-n+1} \beta sh^n \beta < 0 & n &= 1, 3, 5... \end{aligned}$$

car

$$pC_p^{n-1} - C_p^n = (n-1)C_{p+1}^n, \quad pC_p^n - C_p^{n-1} = (p-n)C_{p+1}^n.$$

D'après ces formules la dérivée  $\frac{\partial P}{\partial \beta}$  est positive. Mais la dérivée  $\frac{\partial P}{\partial \alpha}$  étant négative, nous ne pouvons pas encore conclure que  $\frac{dP}{dc} < 0$ . En substituant les formules (78), (78)' et (77) dans l'expression (76), on trouve

$$(79) \quad \frac{dP}{dc} = \frac{4}{c} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{sh(\alpha + \beta)}{sh^3(\alpha + p\beta)} \left\{ \frac{1}{sh\beta} [sh(p-1)\beta ch\beta - \right. \\ \left. - (p-1)ch^2\alpha ch(p+1)\beta sh\beta] - ch^2\alpha coth\alpha S_1 - sh^2\alpha coth\alpha S_2 \right\}$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont les sommes (78)'. Remarquons, que d'après (78) on a :

$$\begin{aligned} sh(p-1)\beta ch\beta - (p-1)ch^2\alpha ch(p+1)\beta sh\beta > \\ > sh(p-1)\beta ch\beta - (p-1)ch(p-1)\beta sh\beta > 0. \end{aligned}$$

D'où il s'ensuit, que  $\frac{dP}{dc} < 0$ .

Donc la masse additive  $m$  du cylindre diminue constamment, quand  $c$  augmente. Elle atteint pour  $c = a + b$  son maximum qui est égal à  $\rho\pi b^2 P(1,1)$ , et pour  $c = \infty$  son minimum qui est égal à  $\rho\pi b^2$ .

Dans ce qui suit il nous sera nécessaire de connaître, comment varie la masse additive, quand elle est considérée comme fonction de la coordonnée  $a$  du cercle mobile. Cette coordonnée varie entre 0 et  $c - b$ . D'après les formules (10)-(13) pour  $a = 0$  on a :

$$(80) \quad k = 0 \quad q = \frac{b}{c} \quad P\left(0, \frac{b}{c}\right) = \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}.$$

Les formules (10) et (12) donnent

$$(81) \quad \frac{d\alpha}{da} = -\frac{ch(\alpha + \beta)}{c sh\beta} > 0 \quad \frac{d\beta}{da} = -\frac{1}{c sh\alpha} > 0.$$

Donc  $k$  et  $q$  augmentent avec  $a$ . La fonction  $P(k, q)$  reste dans l'intervalle  $0 \leq a \leq c - b$  toujours finie, positive et plus grande que un. Démontrons qu'elle croît constamment avec  $a$ , c'est-à-dire que sa dérivée  $\frac{dP}{da}$  est toujours positive.

On a

$$(82) \quad \frac{dP}{da} = -\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{ch(\alpha + \beta)}{sh\beta} + \frac{\partial P}{\partial \beta} \frac{1}{sh\alpha} \right]$$

ou d'après les formules (77)

$$(82)' \quad \frac{dP}{da} = -\frac{4}{c} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{sh(\alpha + \beta)}{sh^2(\alpha + p\beta)} \left\{ \frac{1}{sh\beta} [sh(p-1)\beta ch(\alpha + \beta) - (p-1)ch\alpha ch(p+1)\beta sh\beta] - ch\alpha th\alpha S_1 - sh\alpha S_2 \right\}.$$

Remarquons que d'après (78) on a

$$\begin{aligned} sh(p-1)\beta ch(\alpha + \beta) - (p-1)ch\alpha sh\beta ch(p+1)\beta &> \\ > sh(p-1)\beta ch(\alpha + \beta) - (p-1)sh(\alpha + \beta)ch(p+1)\beta > \\ > sh(p-1)\beta ch(\alpha + \beta) - (p-1)sh(\alpha + \beta)ch(p-1)\beta > 0. \end{aligned}$$

D'où on trouve facilement que la dérivée  $\frac{dP}{da}$  reste toujours positive.

La fonction  $P(k, q)$  envisagée comme fonction de  $a$  est paire d'après les formules (10)-(13) et (70). Donc

$$(83) \quad \left( \frac{dP}{da} \right)_{a=0} = 0.$$

On pourrait aussi démontrer que

$$(84) \quad \begin{aligned} 1^\circ \left( \frac{dP}{da} \right)_{a=c-b} &= +\infty \\ 2^\circ \left( \frac{dP}{d\beta} \right)_{a=c-b} &= \left[ \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} \right]_{a=c-b} = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en possession de toutes les propriétés nécessaires de la fonction  $P(k, q)$ .

(1) Cette dernière formule est évidente, si on remarque que la fonction  $P(k, q)$  envisagée comme fonction de  $\beta$  est paire,  $\alpha$  étant une fonction impaire de  $\beta$ .

## § 1, 9. — Expression du flux relatif à travers la coupure.

Nous aurons besoin encore d'une expression pour le flux relatif à travers la coupure qui rend le domaine occupé par le fluide simplement connexe. Nous supposons, que cette coupure coïncide, entre la paroi du solide et la paroi du vase, avec le segment BC. Calculons le flux du mouvement acyclique à travers BC dans le sens positif de la circulation. Désignons ce flux par  $\chi'$  On a

$$\chi' = \int_B^C \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \omega} (\varphi_1 + \varphi_2) dx = - \int_B^C \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \psi_2) dx = - \left|_B^C (\psi_1 + \psi_2) \right.$$

Mais d'après les formules (27) et (41) on a

$$(\psi_1)_C = (\psi_2)_C = (\psi_2)_B = 0.$$

La formule (26) donne :

$$\begin{aligned} (\psi_1)_B &= -2\omega acsh \lg k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k^n q^n = \\ (85) \quad &= 2\omega acsh \lg k \frac{kq}{1+kq} = -\omega ac \frac{sh \lg k}{sh \lg kq} (1-kq) = \\ &= -\omega ab(1-kq). \end{aligned}$$

Donc le flux  $\chi'$  est égal à

$$(86) \quad \chi' = -\omega ab(1-kq).$$

Soit  $\chi''$  le flux d'entraînement à travers la coupure BC. On trouve facilement :

$$(87) \quad \chi'' = \int_{a+b}^c \omega x dx = \frac{\omega}{2} [c^2 - (a+b)^2].$$

D'après ces formules le flux relatif  $\chi = \chi' - \chi''$  est égal à

$$(88) \quad \chi = -\frac{\dot{\omega}}{2} (c^2 - a^2 - b^2 - 2abkq)$$

où d'après la formule (16)

$$(89) \quad \chi = -\frac{\dot{\omega}}{2} \sqrt{D} = bc\dot{\omega}sh \lg q.$$

## CHAPITRE II

### INFLUENCE DES BORDS SUR LE MOUVEMENT DU CYLINDRE DANS LE PROBLÈME PRÉCÉDENT

#### § 2, 1. — Pression hydrodynamique sur le cylindre.

Dans le chapitre précédent, nous avons signalé mainte fois l'influence des bords du vase sur le mouvement du liquide et sur son énergie cinétique. Nous abordons maintenant l'importante question de l'influence des bords du vase sur la résultante des pressions hydrodynamiques et sur le mouvement du cylindre lui-même. Nous étudierons le cas général quand il y a circulation. Nous arriverons ainsi au problème du mouvement de corps autour desquels le fluide est animé d'un mouvement cyclique. M. Riabouchinsky <sup>(1)</sup> a démontré que les équations de Thomson <sup>(2)</sup> peuvent être appliquées aussi dans ce cas, quand la coupure est variable. Cette importante généralisation nous permet de résoudre complètement notre problème. Formons avec M. Riabouchinsky <sup>(1)</sup> la fonction

<sup>(1)</sup> Riabouchinsky. *Thèse*, p. 110.

<sup>(2)</sup> Lamb. *Hydrodynamics*, 1916, p. 188.

$$(1) \quad 2R = 2c - 2K + 2\rho x \chi.$$

D'après les formules (52), (68) et (89) on a

$$(2) \quad 2R = (\dot{a}^2 + a^2 \dot{\omega}^2) m + \frac{\rho x^2}{2\pi} \lg q + 2bc\rho x \omega \dot{\omega} \operatorname{sh} \lg q.$$

Soit X la projection de la résultante des pressions sur l'axe mobile Ox. Cette projection est donnée par l'expression (1)

$$X = -\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{d}{dt} (am) + \\ + \frac{\dot{a}^2}{2} \frac{dm}{da} + \frac{\dot{\omega}^2}{2} \frac{d}{da} (a^2 m) + \frac{\rho x^2}{4\pi} \frac{d \lg q}{da} + bc\rho x \omega \dot{\omega} \operatorname{ch} \lg q \frac{d \lg q}{da}.$$

D'après la formule (81) on a

$$bc \operatorname{ch} \lg q \frac{d^2 \beta}{da} = -b \frac{ch \beta}{sh \alpha} = -a \operatorname{coth} \beta.$$

On obtient ainsi

$$(3) \quad X = -\frac{1}{2} \frac{d}{da} (a^2 m) + \frac{\dot{\omega}^2}{2} \frac{d}{da} (a^2 m) + \frac{\rho x^2}{4\pi} \frac{d \lg q}{da} - \rho x \omega a \operatorname{coth} \beta.$$

Supposons, que la vitesse radiale du cylindre soit nulle. Alors  $\dot{a} = 0$ , et l'équation (3) donne :

$$(4) \quad X = \frac{\dot{\omega}^2}{2} \frac{d}{da} (a^2 m) + \frac{\rho x^2}{4\pi} \frac{d \lg q}{da} - \rho x \omega a \operatorname{coth} \beta.$$

Cette expression peut être positive, nulle ou négative. Donc le cylindre peut être attiré vers la paroi ou repoussé vers le centre O. Si le cylindre est en repos, alors

$$(5) \quad X = \frac{\rho x^2}{4\pi} \frac{d \lg q}{da}$$

et par conséquent  $X > 0$ . Donc le cylindre est attiré vers la paroi, ce qui est évident, car les vitesses sur la coupure BC sont plus grandes que sur le segment AC'. Si maintenant le

cyindre commence à se mouvoir dans le sens négatif ( $\dot{\omega} < 0$ ) et si  $x$  est positif, alors ce mouvement diminuera les vitesses sur BC et augmentera les vitesses sur AC'. Quand ces vitesses deviendront égales, la composante X sera nulle. Si maintenant  $|\dot{\omega}|$  augmente encore, les vitesses sur AC' deviendront plus grandes que sur BC, et par conséquent le cylindre sera repoussé vers le centre O. L'augmentation continue de la valeur absolue de la vitesse  $\dot{\omega}$  provoquera bientôt un effet inverse, et l'on obtiendra une deuxième valeur de  $\dot{\omega}$  qui annulera X. Or, l'expression pour X (4) étant de deuxième degré en  $\frac{\dot{\omega}}{x}$ , l'équation  $X = 0$  a deux racines qui donnent les valeurs limites du quotient  $\frac{\dot{\omega}}{x}$ . Ces deux racines sont négatives ce qui est évident au point de vue physique.

Supposons maintenant, que  $\dot{\omega} = 0$  et que  $\dot{a} = a_0 = \text{const.}$   
Alors

$$(6) \quad X = -\frac{\dot{a}^2}{2} \frac{dm}{da} + \frac{\rho x^2}{4\pi} \frac{d \lg q}{da} = \frac{d \lg q}{da} \left( -\frac{\dot{a}^2}{2} \frac{dm}{d\beta} + \frac{\rho x^2}{4\pi} \right).$$

D'après les formules (81), (83) et (84) on a dans le centre  $X = 0$  et près de la paroi  $X = +\infty$ .  $\frac{dm}{da}$  étant positif, la formule (6) montre, que la vitesse  $\dot{a}$  diminue la résultante X des pressions hydrodynamiques.

Soit N le moment des pressions hydrodynamiques autour du centre O. On a

$$(7) \quad N = -\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\omega}} = -\frac{d}{dt} (a^2 \dot{\omega} m) + a \dot{a} \rho x \coth \beta.$$

Si  $\dot{a} = 0$ , alors

$$(8) \quad N = - a^2 m \ddot{\omega}$$

c'est-à-dire la pression du liquide empêche la rotation du cylindre.

Si  $\dot{\omega} = 0$ , alors

$$(9) \quad N = a \dot{a} \rho x \operatorname{coth} \beta.$$

D'après cette formule  $N$  est négatif si  $x$  et  $\dot{a}$  sont positifs. C'est évident, car le mouvement du cylindre vers la paroi diminue les vitesses relatives au-dessus de l'axe  $Ox$  et augmente les vitesses au-dessous de l'axe  $Ox$  (voir la figure 4).

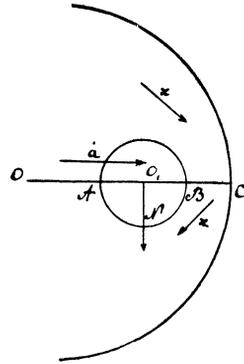


Fig. 4.

§ 2, 11. — Influence des bords sur la pression hydrodynamique.

Etudions maintenant les formules (3) et (7) au point de vue de l'influence des bords du vase. Comparons-les avec les formules (e) et (f) du premier Chapitre. On obtient facilement les variations de la composante radiale de la pression et de son moment autour du pôle O. Nous écrivons ces variations sous la forme suivante :

$$(10) \quad \begin{aligned} \delta X &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \\ \delta N &= N_1 + N_2 + N_3 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\ddot{a}\delta m + a\dot{\omega}^2\delta m \\
 X_2 &= \frac{1}{2}(a^2\dot{\omega}^2 - \dot{a}^2)\frac{d\delta m}{da} \\
 X_3 &= -na\dot{\omega}(1 + \coth\beta) \\
 X_4 &= \frac{x^2_0}{4\pi}\frac{d\beta}{da}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\delta m\frac{d}{dt}(a^2\dot{\omega}) \\
 N_2 &= -a^2\dot{\omega}\dot{a}\frac{d\delta m}{da} \\
 N_3 &= na\dot{a}(\coth\beta + 1)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

La variation  $\delta m$  de la masse additive du cylindre est donnée par la formule (70) du premier Chapitre. D'après les formules précédentes l'influence des bords du vase sur le cylindre se manifeste par quatre forces. Ce sont les forces suivantes :

1° La force  $X_1$ ,  $N_1$  qui est due à l'augmentation de la masse additive du cylindre qui nous est bien connue.

2° La force  $X_2$ ,  $N_2$  dont l'origine est dans la variation de la masse additive du cylindre. Cette force repousse le cylindre du pôle  $O$ , si la trajectoire du centre  $O_1$  du cylindre coupe le rayon-vecteur  $OO_1$  sous un angle plus grand que  $\frac{\pi}{4}$ , et attire vers le pôle  $O$  dans le cas contraire. Elle devient infinie, quand le cylindre touche le bord du vase.

3° La force  $X_3$ ,  $N_3$  qui représente la variation de la force de Joukowsky. On remarquera, que la présence des bords du vase augmente la valeur absolue de cette force. La force perturbée s'obtient de la force initiale en la multipliant par

le coefficient  $|\coth\beta| > 1$ . Elle augmente avec  $a$  et devient infinie, quand le cercle touche le bord du vase.

4° La force  $X_4$ ,  $N_4 = 0$  qui attire le cylindre vers la paroi du vase et qui est due uniquement à la circulation du liquide autour du cylindre. Cette force devient aussi infinie si le cylindre touche la paroi.

Examinons maintenant le cas où le rayon  $c$  du vase devient très grand. Les formules (10)'-(13)', (52)' et (70)' nous donnent :

$$\begin{aligned}
 & X_1 = 2\pi\rho b^4 \varepsilon^2 (-\ddot{a} + a\dot{\omega}^2) \\
 & X_2 = 4\pi\rho b^4 \varepsilon^4 a(a^2\dot{\omega}^2 - \dot{a}^2) [1 + \varepsilon^2(a^2 + b^2) + \dots] \\
 (13) \quad & X_3 = 2\varepsilon^2 b^2 n a \dot{\omega} [1 + \varepsilon^2(2a^2 + b^2) + \dots] \\
 & X_4 = \frac{\rho \varepsilon^2}{2\pi} a \varepsilon^2 [1 + \varepsilon^2(a^2 + b^2) + \varepsilon^4(a^4 + b^4 + 4a^2b^2) + \dots] \\
 & N_1 = -2\pi\rho b^4 \varepsilon^2 \frac{d}{dt} (a^2\dot{\omega}) \\
 (14) \quad & N_2 = -8\pi\rho b^4 \varepsilon^4 a^3 \dot{\omega} \dot{a} [1 + \varepsilon^2(a^2 + b^2) + \dots] \\
 & N_3 = -2\varepsilon^2 b^2 n a \dot{a} [1 + \varepsilon^2(2a^2 + b^2) + \dots]
 \end{aligned}$$

On remarquera tout de suite, que la force  $X_3$ ,  $N_3$  étant de quatrième ordre est négligeable par rapport aux autres forces qui sont de deuxième ordre. Mais quoiqu'il y ait trois forces de deuxième ordre, leur importance n'est pas la même. Les forces 1° et 3° sont constantes. En outre elles représentent de simples variations des forces constantes du mouvement non perturbé. Elles ne peuvent pas, par conséquent, essentiellement changer le caractère du mouvement. C'est tout à fait différent quand il s'agit de la force  $X_4$ . Cette force qui repousse le cercle du pôle O et qui est proportionnelle à la distance  $a$  change tout à fait le caractère du mou-

vement du cylindre, comme nous le verrons plus loin. C'est une force nouvelle due exclusivement à l'influence des bords du vase. Elle dépend uniquement de la circulation et disparaît avec celle-ci.

Nous pouvons annoncer la proposition suivante :

Au point de vue de l'influence des bords, c'est le mouvement cyclique qui joue le plus grand rôle dans le cas limite.

### § 2, 2. — Equations du mouvement du cylindre et leurs premières intégrales.

Désignons par  $T_0$  la force vive du cylindre. Si  $\rho_1$  est la densité du cylindre, alors

$$(15) \quad 2T_0 = \pi\rho_1 b^2 (a^2 + a^2\omega^2).$$

Soit

$$(16) \quad M = m + \pi\rho_1 b^2.$$

Formons la fonction

$$(17) \quad 2R + 2T_0 = M(a^2 + a^2\omega^2) + \frac{\rho x^2}{2\pi} \lg q + 2\rho xbc\omega sh \lg q.$$

Les équations du mouvement du cylindre sont

$$(18) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} (R + T_0) = 0$$

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial a} (R + T_0) - \frac{\partial}{\partial a} (R + T_0) = 0.$$

Ces équations déterminent les accélérations du cylindre. L'équation (18) donne immédiatement la première intégrale du mouvement

$$(20) \quad Ma^2\omega + \rho xbc sh \lg q = \Gamma$$

où  $\Gamma$  est une constante. Si  $\dot{\omega}_0$  est la vitesse angulaire initiale, alors

$$(21) \quad \Gamma = M_0 a_0^2 \dot{\omega}_0 + \rho xbc sh \lg q_0.$$

Donc on obtient

$$(22) \quad \dot{\omega} = \frac{1}{a^2 M} (\Gamma - bcx\rho sh \lg q)$$

$$(22)' \quad \dot{\omega} = \frac{1}{a^2 M} [a_0^2 \dot{\omega}_0 M_0 - \rho xbc (sh \lg q - sh \lg q_0)].$$

On peut former une autre intégrale première en utilisant le théorème des forces vives. D'après les formules (69) et (15) on a

$$(23) \quad 2T + 2T_0 = M(\dot{a}^2 + a^2 \omega^2) - \frac{x^2 \rho}{2\pi} \lg q = h'$$

où  $h'$  est une constante. En tenant compte de l'équation (22), on obtient :

$$(24) \quad \dot{a}^2 M + \frac{1}{a^2 M} (\Gamma - x\rho bcsh \lg q)^2 - \frac{x^2 \rho}{2\pi} \lg \frac{q}{q_0} = h$$

où

$$(25) \quad h = (\dot{a}_0^2 + a_0^2 \dot{\omega}_0^2) M_0.$$

On a donc finalement

$$(26) \quad \dot{a}^2 M = h - \frac{1}{a^2 M} (\Gamma - x\rho bcsh \lg q)^2 + \frac{x^2 \rho}{2\pi} \lg q / q_0.$$

$$(26)' \quad \dot{a}^2 M = h - \frac{1}{a^2 M} [a_0^2 M_0 \dot{\omega}_0 - bcx\rho (sh \lg q - sh \lg q_0)]^2 + \frac{x^2 \rho}{2\pi} \lg q / q_0.$$

§ 2, 3. — Cas où les vitesses initiales sont nulles.

Supposons, que  $\dot{a}_0 = \dot{\omega}_0 = 0$ . Alors les formules (22)' et (26)' prennent la forme

$$(22)'' \quad \dot{\omega} = -\frac{\rho x b c}{a^2 M} (sh \lg q - sh \lg q_0).$$

$$(26)'' \quad a^2 M = -\frac{c^2 x^2 b^2 c^2}{a^2 M} (sh \lg q - sh \lg q_0)^2 + \frac{x^2 \rho}{2\pi} \lg q / q_0.$$

Développons  $sh \lg q - sh \lg q_0$  en série. Alors

$$(27) \quad \dot{\omega} = -\frac{x \rho b c}{a^2 M} \lg q / q_0 (ch \lg q_0 + \frac{1}{2} sh \lg q_0 \lg q / q_0 + \dots).$$

$$(28) \quad a^2 M = x^2 \rho^2 \lg q / q_0 \left[ \frac{1}{2\pi \rho} - \frac{b^2 c^2}{a^2 M} \lg q / q_0 (ch \lg q_0 + \dots)^2 \right].$$

La dernière équation montre que  $\lg q / q_0$  doit être positif, c'est-à-dire que le mouvement se produit entre le cercle  $q = q_0$  et la paroi. D'après la formule (27) la vitesse angulaire a le signe contraire à celui de  $x$ . Sur la paroi on doit avoir :

$$(29) \quad a^2 M_s = -\rho^2 x^2 \left[ \frac{\lg q_0}{2\pi \rho} + \frac{b^2 c^2}{(c-b)^2 M_s} sh^2 \lg q_0 \right]$$

où  $M_s$  est la valeur de  $M$  sur la paroi. Cette valeur est donnée par la formule (74) du chapitre précédent. Examinons maintenant l'équation

$$(30) \quad f(q_0) = \frac{1}{2\pi \rho} \lg q_0 + \frac{b^2 c^2}{(c-b)^2 M_s} sh^2 \lg q_0 = 0.$$

Désignons par  $\lambda$  la racine de cette équation comprise entre

$$q_0 = 1 \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{b}{c}.$$

Cette racine est unique. En effet, on a

$$\frac{df}{dq_0} = \frac{1}{q_0} f_1(q_0)$$

où

$$f_1(q_0) = \frac{1}{2\pi\rho} + \frac{b^2c^2}{(c-b)^2M_s} sh 2 \lg q_0.$$

La dérivée  $\frac{df_1}{dq_0}$  étant positive, l'équation  $\frac{df_0}{dq_0} = 0$  n'a qu'une racine entre  $q_0 = 1$  et  $q_0 = \frac{b}{c}$ . Par conséquent, l'équation (30) ne peut avoir d'autres racines que  $q_0 = \lambda$ ,  $q_0 = 1$ .

La fonction  $f(q_0)$  est positive quand  $q_0 < \lambda$ , et négative quand  $\lambda < q_0 < 1$ . Si  $q_0 > \lambda$ , alors le second terme de l'équation (29) est positif, et par conséquent, le cercle heurtera la paroi. Mais si  $q_0 < \lambda$ , le mouvement du cercle sera alors régulier et périodique. Soit  $q'$  la racine de l'équation :

$$(31) \quad \frac{1}{2\pi\rho} \lg q/q_0 - \frac{b^2c^2}{a^2M} (sh \lg q - sh \lg q_0)^2 = 0.$$

On a  $1 > q' > q_0$ , car  $f(q_0) > 0$ . La trajectoire du centre  $O_1$  est comprise entre les cercles  $q = q_0$  et  $q = q'$ . Cette trajectoire est tangente au cercle  $q'$  et a des points de rebroussement de première espèce sur le cercle  $q_0$ . Dans le cas limite, quand  $q_0 = \lambda$  on a  $q' = 1$ . Remarquons, que le cercle  $q = \lambda$  ne dépend pas de la circulation  $\alpha$ . Si le centre  $O_1$  du cylindre est placé à l'instant initial entre le cercle  $\lambda$  et la paroi, le choc sera imminent.

§ 2, 31. — Cas où la vitesse radiale n'est pas nulle à l'instant initial.

Supposons que  $\dot{\omega}_0 = 0$ ,  $\dot{a}_0 \neq 0$ . L'équation (22)'' reste inaltérée, et l'équation (26)'' prend la forme :

$$(32) \quad \dot{a}^2 M = F(q) = \dot{a}_0^2 M_0 + \rho^2 x^2 \left[ \frac{1}{2\pi\rho} \lg q/q_0 - \right. \\ \left. - \frac{b^2 c^2}{a^2 M} (sh \lg q - sh \lg q_0)^2 \right].$$

D'où l'on obtient :

$$(33) \quad \dot{a} = \pm \sqrt{\frac{F(q)}{M}}.$$

Devant le radical on doit prendre le signe plus, si  $\dot{a}_0 > 0$ , et le signe moins, si  $\dot{a}_0 < 0$ . Supposons, que  $\dot{a}_0 < 0$ . Le cercle commence à se mouvoir vers le centre O. Deux cas peuvent se présenter. Supposons, que l'équation  $F(q) = 0$  ait une racine entre  $q = q_0$  et  $q = \frac{b}{c}$  (la valeur de  $q$  au centre O). Soit  $q''$  cette racine. La trajectoire de  $O_1$  est tangente au cercle  $q = q''$ . Le centre  $O_1$ , après avoir touché le cercle  $q''$ , revient sur le cercle  $q_0$  avec la vitesse positive  $-\dot{a}_0$ . Nous sommes ramenés à étudier le cas où  $\dot{a}_0 > 0$ , c'est-à-dire celui où le cercle se meut vers la paroi.

Sur la paroi, nous avons

$$(34) \quad F(1) = \dot{a}^2 M = \dot{a}_0^2 M_0 - \rho^2 x^2 f(q_0)$$

où  $f(q_0)$  est donné par la formule (30). Si  $q_0 > \lambda$ , alors  $f(q_0) < 0$  (voir le paragraphe précédent), le second terme de l'équation (34) est toujours positif, et par conséquent, le choc sera imminent. Mais si  $q_0 < \lambda$ , alors  $f(q_0) > 0$  et par conséquent le cercle heurtera la paroi si :

$$(35) \quad \dot{a}_0^2 > \frac{\rho^2 x^2 f(q_0)}{M}$$

et aura un mouvement régulier et périodique si

$$(36) \quad \dot{a}_0^2 \leq \frac{\rho^2 x^2 f(q_0)}{M}.$$

Dans ce dernier cas qui présente un intérêt particulier, l'équation  $F(q) = 0$  a une racine entre  $q = q_0$  et  $q = 1$ . Soit  $q'$  cette racine. La trajectoire du centre  $O_1$  est comprise entre les cercles  $q = q'$  et  $q = q''$ ; elle est tangente à ces cercles et symétrique par rapport aux rayons vecteurs des points de contact. En outre elle a des points doubles, car la vitesse angulaire  $\dot{\omega}$  change toujours le signe sur le cercle  $q = q_0$ .

Si l'équation  $F(q) = 0$  n'a pas de racines entre  $q = q_0$  et  $q = \frac{b}{c}$ , la trajectoire de  $O_1$  passera par le centre  $O$ . Le mouvement sera périodique, si la condition (36) est satisfaite, et irrégulier dans le cas contraire.

§ 2, 32. — Cas où la vitesse angulaire n'est pas nulle à l'instant initial.

Si  $\dot{\alpha}_0 = 0$   $\dot{\omega} \neq 0$ , les équations (22)'' et (26)'' prennent la forme :

$$(37) \quad \dot{\omega} = \frac{4}{a^2 M} [a_0^2 M_0 \dot{\omega}_0 - \kappa \rho b c (sh \lg q - sh \lg q_0)]$$

$$(38) \quad \dot{\alpha}^2 M = \Phi(q) = a_0^2 M_0 \left( 1 - \frac{a_0^2 M_0}{a^2 M} \right) \dot{\omega}_0^2 + \\ + 2 \kappa \rho b c \dot{\omega} \frac{a_0^2 M_0}{a^2 M} (sh \lg q - sh \lg q_0) + \\ + \rho^2 \kappa^2 \left[ \frac{1}{2 \pi \rho} \lg q / q_0 - \frac{b^2 c^2}{a^2 M} (sh \lg q - sh \lg q_0)^2 \right].$$

Pour déterminer le signe d'accélération  $\ddot{\alpha}$  au commencement du mouvement, examinons l'accélération  $\ddot{\alpha}$  au voisinage du cercle  $q_0$ , c'est-à-dire considérons  $\lg q/q_0$  comme

une quantité infiniment petite de premier ordre. Alors on obtient, en développant en séries :

$$(39) \quad a^2 M = \Phi(q) = \lg q/q_0 \left[ \omega_0^2 \left( \frac{da^2 M}{d \lg q} \right)_0 + \frac{\rho x^2}{2\pi} + 2\dot{\omega}_0 \rho x c h \lg q_0 \right].$$

Mais d'après les formules (12) § 2, 3 et (16) on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{ch} \lg q, \quad M = m + \pi b^2 \rho_1.$$

Donc

$$\Phi(q) = \frac{1}{2} \lg q/q_0 \left[ \frac{\dot{\omega}_0^2}{2} \left( \frac{da^2 m}{d \lg q} \right)_0 + \pi b^2 \rho_1 \omega_0^2 bc \operatorname{sh} \lg q_0 + \frac{\rho x^2}{4\pi} + \dot{\omega}_0 \rho bc \operatorname{ch} \lg q_0 \right].$$

On obtient finalement

$$(40) \quad \dot{a}^2 M = \Phi(q) = \frac{1}{2} \lg q/q_0 \left( \frac{d \lg q}{da} \right)_0 (X_0 + J_0)$$

où  $X_0$  est la composante radiale des pressions hydrodynamiques sur le cylindre (§ 2, 1 form. 4) et  $J_0$  la force centrifuge due à la rotation  $\omega_0$ .

$$J_0 = \pi b^2 \rho_1 \dot{\omega}_0^2 a_0.$$

Si  $X_0 + J_0 < 0$ , alors  $q < q_0$  et le cercle se meut vers le centre  $O$ . Ce résultat est évident. Supposons, que l'équation  $\Phi(q) = 0$  ait une racine entre  $q = q_0$  et  $q = b/c$ . Désignons cette racine par  $q''$ . La trajectoire du centre  $O_1$  reste toujours comprise entre les cercles  $q = q''$  et  $q = q_0$ , et le mouvement est, par conséquent, toujours périodique.

Si  $X_0 + J_0 > 0$ , alors  $q > q_0$  et le cercle se meut vers la paroi. Sur la paroi, nous avons

$$(41) \quad \dot{a}^2 M_s = \Phi(1) = a_0^2 M_0 \left[ 1 - \frac{a_0^2 M_0}{(c-b)^2 M_s} \right] \dot{\omega}_0^2 - 2x\rho \dot{\omega}_0 bc \operatorname{sh} \lg q_0 \frac{a_0^2 M_0}{(c-b)^2 M_s} - x^2 \rho^2 f(q_0).$$

Le deuxième terme de cette équation est une forme quadratique par rapport à  $x$  et  $\dot{\omega}_0$ . Les coefficients de  $\dot{\omega}_0^2$  et de  $x\dot{\omega}_0$  sont toujours positifs. Soient  $k' = \left(\frac{\dot{\omega}_0}{x}\right)'$  et  $k'' = \left(\frac{\dot{\omega}_0}{x}\right)''$  les racines de l'équation

$$(42) \quad a_0^2 M_0 \left[ 1 - \frac{a_0^2 M_0}{(c-b)^2 M_s} \right] \left( \frac{\dot{\omega}_0}{x} \right)^2 - 2bc\rho sh \lg q_0 \frac{a_0^2 M_0}{(c-b)^2 M_s} \frac{\dot{\omega}_0}{x} - \rho^2 f(q_0) = 0$$

Le mouvement sera périodique si

$$(43) \quad k' \leq \frac{\dot{\omega}_0}{x} \leq k''$$

Un choc se produira, si cette inégalité n'est pas satisfaite. Si  $q_0 > \lambda$ , les racines  $k'$  et  $k''$  sont négatives, et par conséquent, les vitesses  $\dot{\omega}$  et  $x$  ont des signes inverses. Si  $q_0 < \lambda$ , alors  $k' < 0 < k''$  et par conséquent, le quotient  $\frac{\dot{\omega}_0}{x}$  peut être positif ou négatif. Quand l'inégalité (43) est satisfaite, l'équation  $\Phi(q) = 0$  a toujours une racine entre  $q = q_0$  et  $q = 1$ . Désignons cette racine par  $q'$ . La trajectoire du centre  $O_1$  est comprise entre les cercles  $q = q'$  et  $q = q_0$  et est tangente à ces cercles.

Désignons par  $q = \mu$  la racine de l'équation

$$(44) \quad a_0^2 M_0 \dot{\omega}_0 - bcx\rho (sh \lg q - sh \lg q_0) = 0.$$

Cette racine est unique. Si  $q' > \mu > q_0$ , la vitesse  $\dot{\omega}$  change le signe, et la trajectoire a des points doubles. Mais si  $\mu > q'$  ou  $\mu < q_0$ , alors la vitesse  $\omega$  ne s'annule pas, et la trajectoire n'a pas de points singuliers. Le cas limite  $q_0 = \mu$  a été déjà étudié dans le § 2, 3. D'après la formule (38) il est impossible, que  $\mu = q'$ ,  $\lg q'/q_0$  étant positif.

## § 2, 33. — Interprétation du mouvement dans le cas général.

Dans le cas général, quand  $\dot{\omega}_0 \neq 0$   $\dot{a}_0 \neq 0$ , l'interprétation du mouvement que nous avons donnée dans les paragraphes précédents, reste la même. Le mouvement est périodique, si

$$(45) \quad a_0^2 M_s + a_0^2 M_0 \left[ 1 - \frac{a_0^2 M_0}{(c-b)^2 M_s} \right] \omega_0^2 - \\ - 2 bc sh \lg q_0 \frac{a_0^2 M_0}{(b-c)^2 M_s} \dot{\omega}_0 \alpha \rho - \alpha^2 \rho^2 f(q_0) \leq 0.$$

Un choc se produira dans le cas contraire. Si le mouvement est périodique, c'est-à-dire si l'inégalité (45) est satisfaite, l'équation

$$(46) \quad h - \frac{1}{a^2 M} (\Gamma - bc \rho \alpha sh \lg q)^2 + \frac{\alpha^2 \rho}{2\pi} \lg q/q_0 = 0$$

a deux racines  $q'$  et  $q''$  telles que  $1 > q' > q_0 > q''$ . Si  $q'' < \frac{b}{c}$ , la trajectoire du centre  $O_1$  est comprise à l'intérieur du cercle  $q' = q$ . Si  $q'' > \frac{b}{c}$ , la trajectoire du centre  $O_1$  est comprise entre les cercles  $q = q'$  et  $q = q''$ . Elle est tangente à ces cercles et symétrique par rapport aux rayons vecteurs des points de contact. Si  $q = \mu$  est la racine de l'équation

$$(47) \quad \Gamma - \alpha \rho bc sh \lg q = 0$$

alors la trajectoire a des points doubles, si  $q' > \mu > q''$ , et des points de rebroussement de la première espèce sur le cercle  $q = q''$ , si  $\mu = q''$ . L'équation (46) montre que la trajectoire ne peut pas avoir de points de rebroussement sur le cercle  $q = q'$ ,  $q'$  étant plus grand que  $q_0$ . Si  $\mu > q'$  ou  $< q''$ , la trajectoire n'a pas de points singuliers.

Nous voyons, que la trajectoire du centre  $O_1$ , ressemble à une épicycloïde.

§ 2, 4. — Influence des bords du vase sur le mouvement du cylindre.

Après avoir interprété géométriquement le mouvement du cylindre, nous pouvons maintenant l'examiner au point de vue de l'influence des bords. En comparant les résultats obtenus avec ceux du § 1, 2 nous voyons, que le caractère du mouvement est entièrement changé par la présence des bords. Cela est dû aux forces  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  données par les formules (11) et (12). Ces forces provoquent de grandes perturbations dans le mouvement du cylindre, qu'on peut facilement prévoir à l'avance.

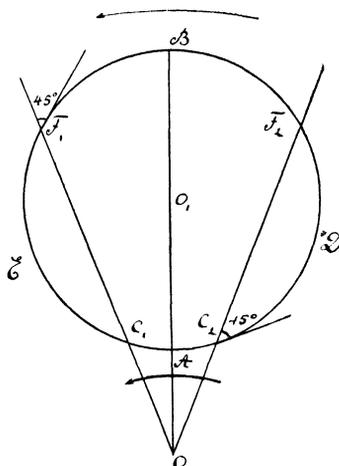


Fig. 5

Soit ADBE la trajectoire du centre du cylindre dans le mouvement non perturbé (voir figure 5). D'après le § 1, 2, on a

$$O_1A = \frac{M}{|n|} |\omega_0| a_0, \quad OO_1 = a_0 \left| 1 - \frac{M}{n} \dot{\omega}_0 \right|.$$

La force  $F_1$  augmente la masse du cylindre et, par conséquent, diminue la courbure de la trajectoire. L'effet produit

par la force  $\overline{F}_2 = \frac{1}{2} (\dot{a}^2 + a^2 \dot{\omega}^2) \frac{d\delta m}{da}$  est plus compliqué. Cette force repousse le cylindre du pôle O, quand il se trouve sur  $F_1BF_2$  ou sur  $C_1AC_2$ , et l'attire vers O sur  $F_1EC_1$  et  $F_2DC_2$ . En même temps elle augmente la valeur absolue de la vitesse angulaire du cylindre sur une des demi-circonférences ADB ou AEB et la diminue sur l'autre. Elle déplace la trajectoire dans le sens de la rotation du cylindre autour de  $O_1$ , augmente la courbure de  $F_1BF_2$  et diminue celle de  $C_1AC_2$ .

La force  $F_3$  augmente la force de Joukowsky et, par conséquent, la courbure de la trajectoire. Mais cette augmentation n'est pas constante. Elle est plus grande près de la paroi du vase et plus petite près du pôle O. Par conséquent, la courbure de l'arc DBE devient plus grande que celle de l'arc EAD.

La force  $F_4$  est une force centrale de répulsion qui croît avec  $OO_1$ . Donc elle augmente la courbure de l'arc EBD et diminue celle de l'arc EAD.

Ces remarques nous donnent une image sommaire du mouvement perturbé.

### § 2, 5. — La trajectoire du cylindre dans le cas où le rayon du vase devient très grand.

Déterminons la trajectoire du cylindre, en supposant le rayon du vase très grand par rapport à  $a$  et  $b$ . D'après les formules (63)' § 1, 6 et (71)' § 1, 72 les équations (20) et (23) prennent la forme

$$(20)' \quad a^2 \dot{\omega} M + \frac{1}{2} \rho x a^2 = \Gamma$$

$$(23)' \quad (a^2 \dot{\omega}^2 + \dot{a}^2) M - \frac{x^2 \rho}{2\pi} \varepsilon^2 a^2 = h.$$

Ces équations peuvent être facilement ramenées à la forme (i) § 1, 2. La substitution

$$\dot{\omega} = \dot{\varphi} + \Omega$$

où

$$\Omega = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi\rho}$$

donne

$$(23)'' \quad (\dot{a}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2) M = H^2 \quad H^2 = h^2 - 2\Gamma\Omega$$

$$(20)'' \quad M a^2 \dot{\varphi} + a^2 \left( \frac{1}{2} \rho x + M\Omega \right) = \Gamma.$$

Dans ces formules, d'après (71)' § 1, 72, M est une constante. En intégrant et en supposant  $\dot{a}_0 = 0$ , on obtient les formules (m) et (n) du § 1, 2 dans lesquelles on doit substituer

$$n = \rho x + 2M\Omega, \quad \Gamma = a_0^2 M (\dot{\omega}_0 - \Omega) + a_0^2 \left( \frac{1}{2} \rho x + M\Omega \right).$$

Il s'ensuit, que la trajectoire du cercle est une épicycloïde (1).

(1) Haton de la Goupillière Etude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1914, cahier XV.

## CHAPITRE III

### INFLUENCE D'UNE PAROI RECTILIGNE SUR LE MOUVEMENT D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE

#### § 3, 1. — Calcul des éléments fondamentaux.

Considérons un cylindre circulaire qui se meut orthogonalement à ses génératrices et parallèlement à une paroi plane, et supposons, que le mouvement du liquide soit le même dans toutes les sections normales à l'axe du cylindre. Soit  $O_1$  le centre de la section normale du cylindre. Désignons par  $b$  le rayon du cylindre et par  $a$  la distance entre  $O_1$  et la paroi. Prenons  $O_1$  pour origine d'axes de coordonnées, dirigeons l'axe  $O_1x$  vers la paroi et l'axe  $O_1y$  orthogonalement à l'axe du cylindre (voir les figures 6 et 7).

Le problème envisagé est un cas limite du problème étudié dans les Chapitres précédents. Pour ne pas répéter nos raisonnements nous utiliserons les formules obtenues antérieurement et les appliquerons à ce cas limite.

Supposons, que les longueurs du rayon  $c$  du vase et du rayon-vecteur  $a$  du centre  $O_1$  dans le problème du premier Chapitre croissent infiniment. Soient

$$(1) \quad a = \frac{1}{\varepsilon} \quad c = \frac{1}{\varepsilon} + a_1$$

(2)

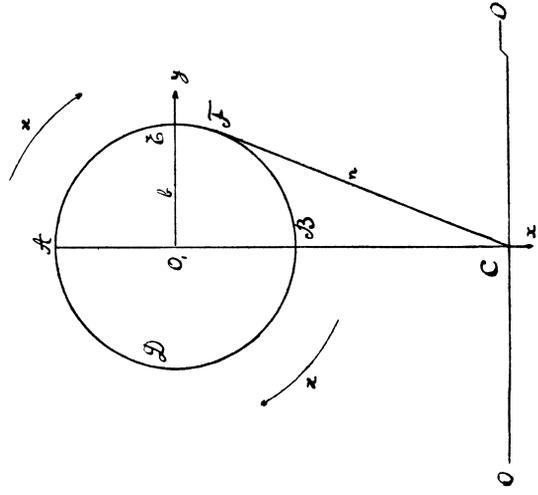


Fig. 6.

(3)

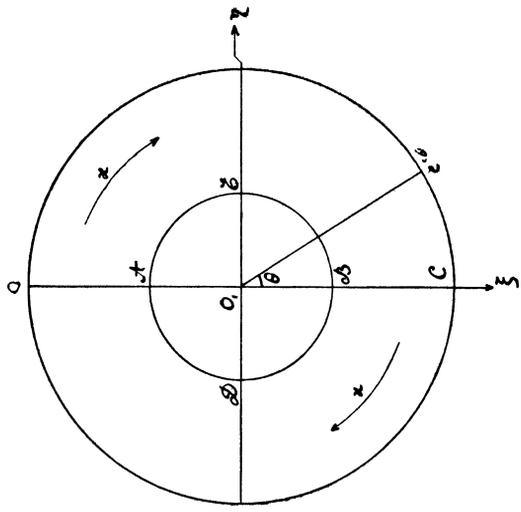


Fig. 7.

où  $a_1$  reste fini et  $\varepsilon$  est une quantité infiniment petite. Substituons ces expressions dans la formule (17) § 1, 3. On obtient, en supprimant l'indice de  $a_1$  :

$$(2) \quad \sqrt{D} = \frac{2}{\varepsilon} n \quad n = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Les formules (10)-(13) donnent

$$(3) \quad ch \lg k = 1 \quad (4) \quad sh \lg k = -\varepsilon n$$

$$(5) \quad ch \lg q = \frac{a}{b} \quad (6) \quad sh \lg q = -\frac{n}{b} \quad n = \sqrt{a^2 - b^2}$$

D'où

$$(7) \quad k = 1 \quad (8) \quad q = \frac{a-n}{b} = \frac{b}{a+n}.$$

La constante  $q$  qui joue un grand rôle dans ce qui suit est une fonction de la distance  $a$  du centre  $O_1$  à la paroi. La formule (5) nous donne

$$(9) \quad \frac{d \lg q}{da} = \frac{1}{bsh \lg q} = -\frac{1}{n}.$$

Donc la fonction  $q$  diminue quand  $a$  croît. Elle est toujours moins que un, est égale à un, quand  $a = b$ , et tend vers zéro, quand  $a$  tend vers l'infini.

La représentation conforme du domaine  $z$  occupé par le fluide sur la bande annulaire  $\zeta$  comprise entre deux cercles concentriques des rayons 1 et  $q < 1$  s'effectue par la formule (3) § 1, 3. Faisons le changement des coordonnées

$$z = z_1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Substituons cette expression dans la formule (3) § 1, 3.

En passant à la limite et en supprimant l'indice de  $z_1$ , on obtient

$$(10) \quad \zeta = -\frac{x-a+i}{x-a-i}$$

avec

$$n = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Il est facile de vérifier, que cette formule donne la représentation cherchée. Dans les figures 6 et 7 les points qui se correspondent sont indiqués par les mêmes lettres.

§ 3, 2. — Influence de la paroi rectiligne sur la distribution des vitesses dans le liquide.

Supposons, que le cylindre se meuve parallèlement à la paroi avec une vitesse  $v$ . On obtient la distribution des vitesses du liquide qui correspond à ce mouvement, en substituant les expressions (4) et (7) dans les formules (27) et (29) du § 1, 4 et en remarquant, que  $v = \lim a\omega$ . On a

$$(11) \quad \psi_1 = 2vn \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} - r^n \right) \cos n\theta$$

$$(12) \quad \varphi_1 = 2vn \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} + r^n \right) \sin n\theta.$$

D'où

$$(13) \quad f_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = 2ivn \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (r^{-n} - \zeta^n).$$

On peut faire subir à cette expression des transformations analogues à celles du § 1, 4. On obtient ainsi

$$(14) \quad f_1 = \frac{1}{\pi} vn \frac{d}{dv} \lg S(v', q)$$

où

$$S(v', q) = \prod_{p=1}^{\infty} (1 + q^{2p} e^{2\pi i v'}) (1 + q^{2p} e^{-2\pi i v'}) \quad \zeta = e^{2\pi i v'}.$$

La fonction  $S(v', q)$  ne diffère de la fonction  $\mathfrak{S}_2(v')$  de Weierstrass que par un facteur.

Si le cylindre se meut orthogonalement à la paroi avec la vitesse  $u = -a_1 = a$ , le potentiel des vitesses  $\varphi_2$  et la fonction du courant  $\psi_2$  correspondants sont donnés par les formules (41) et (42) du § 1, 41. En passant à la limite, on obtient

$$(15) \quad \psi_2 = -2un \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} - r^n \right) \sin n\theta$$

$$(16) \quad \varphi_2 = 2un \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \left( \frac{1}{r^n} + r^n \right) \cos n\theta.$$

D'où

$$(17) \quad f_2 = 2un \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} (\zeta^n + \zeta^{-n}).$$

Cette formule peut être écrite encore sous la forme

$$(18) \quad f_2 = \frac{1}{\pi} iun \frac{d}{dv} \lg S_1(v', q)$$

où

$$S_1(v', q) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2p} e^{2\pi i v'}}{1 + q^{2p} e^{-2\pi i v'}} \quad \zeta = e^{2\pi i v'}.$$

Les formules (13) et (17) nous permettent de mettre en évidence l'influence de la paroi rectiligne sur la distribution des vitesses dans le liquide. Si la paroi n'existait pas, la distribution des vitesses serait donnée par les formules

$$(13)' \quad f_1 = -ivb^2z^{-1}$$

$$(17)' \quad f_2 = -ub^2z^{-1}.$$

Transformons ces expressions. D'après les formules (8) et (10) on a

$$(19) \quad \frac{1}{z} = \frac{q}{b} \frac{1+\zeta}{\zeta+q^2}$$

ou en développant en série des puissances de  $\zeta$  et en effectuant quelques calculs faciles

$$\frac{1}{z} = \frac{q}{b} - \frac{2n}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{2n} \zeta^{-n}.$$

Substituons cette expression dans (13)' et (17)'. En négligeant les termes constants, on obtient

$$(13)'' \quad f_1 = 2ivn \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{2n} \zeta^{-n}$$

$$(17)'' \quad f_2 = 2un \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{2n} \zeta^{-n}.$$

Comparons ces formules avec les formules (13) et (17). La perturbation des vitesses dans le liquide due à la présence de la paroi est donnée par les expressions suivantes :

$$(20) \quad \begin{aligned} \delta f_1 &= 2ivn \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (q^{2n} \zeta^{-n} - \zeta^n) \\ \delta f_2 &= 2un \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (q^{2n} \zeta^{-n} + \zeta^n). \end{aligned}$$

Donc l'influence de la paroi se manifeste par l'apparition des puissances positives de  $\zeta$  et par l'augmentation du module de chaque puissance négative de  $\zeta$  dans le rapport  $\frac{1}{1-q^{2n}}$ . Près du cylindre c'est la variation des coefficients des puissances négatives de  $\zeta$  qui joue le plus grand rôle. Au contraire près de la paroi ce sont les puissances positives de  $\zeta$  qui ont la plus grande importance et qui caractérisent la perturbation des vitesses.

Supposons maintenant, que la distance  $a$  du cylindre soit très grande par rapport au rayon  $b$  du cylindre. Désignons  $\frac{1}{a}$  par  $\varepsilon$  et considérons cette quantité comme une quantité infiniment petite de premier ordre. Développons  $q$  en série des puissances par rapport à  $\varepsilon$ . On obtient d'après la formule (8)

$$(21) \quad n = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 b^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^4 b^4 - \frac{1}{16} \varepsilon^6 b^6 - \dots \right)$$

$$(22) \quad q = \frac{1}{2} \varepsilon b \left( 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 b^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^4 b^4 + \dots \right)$$

La transformation homographique (10) prend la forme

$$(23) \quad \zeta = \frac{\varepsilon}{2} \frac{z - \frac{1}{2} \varepsilon b^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^3 b^4 - \dots}{1 - \frac{\varepsilon}{2} \left( z + \frac{1}{2} \varepsilon b^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^3 b^4 + \dots \right)} = \frac{\varepsilon}{2} \left[ z + \frac{1}{2} \varepsilon (z^2 - b^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \varepsilon^2 z^3 + \frac{1}{8} \varepsilon^3 (z^4 + b^2 z^2 - b^4) + \dots \right]$$

Substituons ces expressions dans les formules (20). Après un calcul long mais qui ne présente pas de difficulté au point de vue théorique, on obtient les séries suivantes :

$$(24) \quad -\delta f_1 = \frac{1}{4} i v \varepsilon^2 b^2 \left\{ z - \frac{b^2}{z} + \frac{\varepsilon}{2} \left[ z^3 - \frac{b^4}{z^2} \right] + \frac{\varepsilon^3}{4} \left[ z^3 - \frac{b^6}{z^3} + b^2 \left( z - \frac{b^2}{z} \right) \right] + \frac{\varepsilon^3}{8} \left[ z^4 - \frac{b^8}{z^4} + b^2 \left( z^2 - \frac{b^4}{z^2} \right) \right] + \dots \right\}$$

$$(25) \quad \delta f_2 = -\frac{1}{4} u \varepsilon^2 b^2 \left\{ z + \frac{b^2}{z} + \frac{\varepsilon}{2} \left[ z^2 + \frac{b^4}{z^2} \right] + \frac{\varepsilon^2}{4} \left[ z^3 + \frac{b^6}{z^3} + b^2 \left( z + \frac{b^2}{z} \right) \right] + \frac{\varepsilon^3}{8} \left[ z^4 + \frac{b^8}{z^4} + b^2 \left( z^2 + \frac{b^4}{z^2} \right) \right] + \dots \right\}$$

Désignons par  $\vec{U}$  la vitesse du cylindre. D'après les formules précédentes on peut conclure, que :

1° La perturbation des vitesses du mouvement acyclique due à la paroi est de deuxième ordre.

2° La première variation du champ des vitesses est égale au champ des vitesses d'un courant liquide qui, venant de l'infini avec la vitesse  $-\frac{1}{4} \varepsilon^2 b^2 \vec{U}$ , entoure le cylindre supposé immobile.

3° La deuxième variation est égale au champ des vitesses d'un courant hyperbolique qui entoure le cylindre immobile et dont l'asymptote de l'affluence fait avec l'axe  $Ox$  l'angle  $\omega$  donné par l'expression

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{v}.$$

La distribution des vitesses sur l'asymptote est donnée par la formule

$$V = |U| \frac{1}{4} \varepsilon^2 b^2 r$$

$V$  étant la vitesse d'une particule fluide.

On pourrait de la même manière interpréter les variations d'ordre supérieur.

§ 3, 21. — Importance du mouvement cyclique  
au point de vue de l'influence des bords.

Si le cylindre est immobile et si le fluide circule autour, le potentiel des vitesses et la fonction du courant correspondants sont donnés par les formules (49) du § 1, 6 que nous rappelons ici :

$$(26) \quad \varphi_0 = -\frac{x}{2\pi}\theta + \frac{x}{2}, \quad \psi_0 = -\frac{x}{2\pi} \lg \frac{q}{r}, \quad f_0 = \frac{ix}{2\pi} \lg \frac{\zeta}{q} + \frac{x}{2}$$

L'énergie cinétique du mouvement cyclique est égale à

$$(27) \quad 2K = -\frac{\rho x^2}{2\pi} \lg q.$$

La fonction  $f_0$  relative au mouvement non perturbé étant égale à

$$f_0 = \frac{ix}{2\pi} \lg z = -\frac{ix}{2\pi} \lg q/b \frac{1+\zeta}{q^2+\zeta}$$

on obtient, en négligeant les termes constants

$$(26)' \quad \delta f_0 = \frac{ix}{2\pi} \lg \frac{1+\zeta}{1+q^2/\zeta} = \frac{ix}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( \zeta^n - \frac{q^{2n}}{\zeta^n} \right)$$

Supposons, que la distance du cylindre à la paroi soit très grande. En développant (26') en série des puissances de  $\varepsilon = \frac{1}{a}$ , on obtient

$$(26)'' \quad \delta f_0 = \frac{1}{4\pi} ix\varepsilon \left[ z - \frac{b^2}{z} + \frac{1}{4}\varepsilon \left( z^2 - \frac{b^4}{z^2} \right) + \frac{1}{12}\varepsilon^2 \left( z^3 - \frac{b^6}{z^3} \right) + \dots \right].$$

On peut interpréter cette formule de la même manière que les formules relatives au mouvement acyclique. On remarquera, que :

1° La perturbation des vitesses dans le mouvement cyclique due à la paroi est de premier ordre. Par conséquent, le mouvement acyclique est négligeable par rapport au mouvement cyclique qui est le plus important au point de vue de l'influence des bords.

2° La première variation est égale au champ des vitesses d'un courant liquide qui entoure le cylindre  $r = b$  supposé immobile et qui a) vient de l'infini avec la vitesse  $\frac{x\varepsilon}{4\pi}$ , b) est parallèle à la paroi et c) a le même sens que la circulation.

3° La deuxième variation est égale au champ des vitesses d'un courant hyperbolique qui entoure le cylindre immobile et dont la distribution des vitesses sur l'asymptote est donnée par la formule

$$V = \frac{x\varepsilon^2}{8\pi} r.$$

L'asymptote de l'affluence forme avec l'axe  $Ox$  l'angle  $+ 45^\circ$ , si  $x > 0$ , et  $- 45^\circ$ , si  $x < 0$ .

La formule (26)'' n'est valable qu'à la distance finie du cylindre. Pour obtenir la distribution des vitesses près de la paroi, il faut revenir à la formule (26)' et (23). Substituons  $z = z_1 + \frac{1}{\varepsilon}$  dans la formule (23). On obtient

$$(23)' \zeta = \frac{1 + \varepsilon z_1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 b^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^3 b^3 - \dots}{1 - \varepsilon z_1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 b^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^3 b^3 - \dots} = 1 + 2\varepsilon z_1 + 2\varepsilon^2 z_1^2 + \dots$$

La formule (26)' nous donne, si on néglige les termes constants

$$(26)'' \quad \delta f_0 = \frac{ix}{2\pi} (\varepsilon z_1 + \dots)$$

où les termes non écrits sont de l'ordre supérieur à deux. On remarquera, que :

1° La perturbation du champ des vitesses près de la paroi est de premier ordre.

2° La première variation est égale au champ des vitesses d'un courant liquide parallèle à la paroi et ayant la vitesse  $\frac{\kappa \varepsilon}{2\pi}$ . Mais dans le mouvement non perturbé on a

$$f_0 = \frac{\gamma \kappa}{2\pi} \lg z = \frac{\gamma \kappa}{2\pi} (\varepsilon z_1 + \dots) + \text{const.}$$

Par conséquent, la présence de la paroi double la vitesse du courant liquide dû à la circulation.

L'énergie cinétique du mouvement cyclique augmente infiniment avec  $a$ , car on a d'après les formules (22) et (27)

$$(27)' \quad 2K = -\frac{\rho \kappa^2}{2\pi} \left[ \lg \left( \frac{1}{2} \varepsilon b \right) + \frac{1}{4} \varepsilon^2 b^2 + \dots \right]$$

### § 3, 3. — Variation de l'énergie cinétique du liquide.

Nous ne répéterons pas ici les raisonnements du Chapitre I. La formule (69) § 1, 72 s'applique immédiatement et donne la valeur de l'énergie cinétique du mouvement acyclique :

$$(28) \quad 2\bar{c} = (u^2 + v^2)m$$

où  $m$  est la masse additive du cylindre. Cette masse est donnée par l'expression

$$(29) \quad m = \pi \rho b^2 P(q)$$

avec

$$(30) \quad P(q) = 1 + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \left( \frac{q - q^{-1}}{q^p - q^{-p}} \right)^2 = 1 + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{sh^2 \lg q}{sh^2 p \lg q}.$$

La variation de l'énergie cinétique due à la présence de la paroi est égale à

$$(29)' \delta m = 2\pi\varrho b^2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{sh^2 \lg q}{sh^2 p \lg q} = 2\pi\varrho b^2 (1-q^2)^2 \sum_{p=2}^{\infty} \left( \frac{q^{p-1}}{1-q^{2p}} \right)^2$$

La fonction  $P(q)$  étant un cas particulier de la fonction  $P(k, q)$  du § 1, 8, on conclut que

1° La fonction  $P(q)$  diminue constamment avec  $a$ . Elle est égale à un pour  $a = \infty$  et prend pour  $a = b$  la valeur

$$(31) \quad P_1 = 1 + 2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^2} = -1 + \frac{1}{3} \pi^2.$$

On voit, que la valeur maximum de la masse additive est plus de deux fois plus grande que la valeur minimum.

2° La dérivée  $\frac{dP}{da}$  est négative. La fonction  $P(q)$  envisagée comme fonction de  $a$  est paire d'après les formules (6) et (8).  
Donc

$$(32) \quad \left( \frac{dP}{da} \right)_{a=\infty} = 0.$$

On pourrait aussi démontrer, que

$$(32)' \quad \left( \frac{dP}{da} \right)_{a=b} = -\infty$$

quoi qu'il y ait

$$(32)'' \quad \left( \frac{dP}{d \lg q} \right)_{a=b} = 0$$

puisque la fonction  $P(q)$  envisagée comme fonction de  $\lg q$  est paire.

La fonction  $P(q)$  et sa dérivée  $\frac{dP}{da}$  jouent un grand rôle dans l'étude de notre problème. Il serait utile d'indiquer ici

quelques séries qui permettent de calculer les éléments fondamentaux <sup>(1)</sup>. En considérant  $q$  comme module d'une fonction elliptique, on peut écrire [p. 404]

$$(33) \quad P(q) = -1 + 8sh^2 \lg q \left( \frac{1}{24} - \frac{\eta\omega}{2\pi^2} \right).$$

On calcule le produit  $\eta\omega$  d'après la formule [p. 265]

$$(33)' \quad \eta\omega = \frac{\pi^2}{12} \frac{1 - 3^3q^2 + 5^3q^6 - 7^3q^{12} + \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \dots} = -\frac{1}{12} \frac{\mathfrak{S}'''_1(0)}{\mathfrak{S}'_1(0)}$$

Pour calculer la dérivée  $\frac{dP}{da} = \frac{dP}{d \lg q} \frac{1}{bsh \lg q}$  on peut se servir de la formule [p. 321]

$$\frac{d\eta\omega}{d \lg q} = \frac{2\omega^2}{\pi^2} \left[ \eta^2 - \frac{1}{12} g_2\omega^2 \right]$$

où le produit  $g_2\omega^2$  est donné par la formule [p. 283]

$$\frac{3}{4} g_2\omega^2 = \left( \frac{\pi}{2} \right)^4 (-\mathfrak{S}^4_0\mathfrak{S}^2_2 + \mathfrak{S}^6_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^4 (\mathfrak{S}^8_0 + \mathfrak{S}^8_2 + \mathfrak{S}^8_4).$$

On peut développer la fonction  $P(q)$  en série de puissances négatives de  $a = \frac{1}{\varepsilon}$ . En utilisant les formules (22) et (29)', on obtient pour la variation de la masse additive la série suivante :

$$(34) \quad \delta m = \frac{1}{2} \pi \rho b^4 \varepsilon^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 b^2 + \frac{15}{16} \varepsilon^4 b^4 + \dots \right).$$

Si le cylindre se trouve loin de la paroi, il suffit de prendre le premier terme de ce développement.

<sup>(1)</sup> Halphen *Traite des fonctions elliptiques*, vol. 1, Paris, 1886. Ci-dessous les chiffres entre crochets renvoient aux pages de ce Traité.

§ 3, 4. — Forces perturbatrices.

Comme nous l'avons vu dans le § 1, 2, quand le cylindre se meut dans un liquide infini, il est assujéti à deux forces :

1° force d'inertie de la masse additive ;

2° force de Joukowsky.

La présence de la paroi fait apparaître encore d'autres forces perturbatrices que nous étudierons maintenant.

La fonction R du § 2, 1 qui donne les expressions pour les composantes de la pression hydrodynamique prend la forme :

$$(35) \quad 2R = (u^2 + v^2)m + \frac{\rho x^2}{2\pi} \lg q + 2v\rho x b \operatorname{sh} \lg q.$$

Soient X et Y les projections de la pression sur les axes *Oxy*. Ces projections sont données par les expressions suivantes :

$$(36) \quad X = -\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial a} = -\dot{im} - \frac{1}{2}(v^2 - u^2) \frac{dm}{da} - \frac{\rho x^2}{4\pi} \frac{1}{b \operatorname{sh} \lg q} - v\rho x \operatorname{coth} \lg q$$

$$(37) \quad Y = -\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial v} = -\dot{vm} + uv \frac{dm}{da} + \rho x u \operatorname{coth} \lg q.$$

Nous voyons, que le corps est assujéti à quatre forces perturbatrices. Ce sont les forces suivantes :

$$(38) \quad X_1 = -\dot{u}\dot{m} \qquad Y_1 = -\dot{v}\dot{m}$$

$$(39) \quad X_2 = -\frac{1}{2}(v^2 - u^2) \frac{dm}{da} \qquad Y_2 = uv \frac{dm}{da}$$

$$(40) \quad X_3 = -v\rho x(1 + \operatorname{coth} \lg q) \qquad Y_3 = u\rho x(1 + \operatorname{coth} \lg q)$$

$$(41) \quad X_4 = -\frac{\rho x^2}{4\pi} \frac{1}{b \operatorname{sh} \lg q} = \frac{1}{n} \frac{\rho x^2}{4\pi}.$$

Dans le § 2, 11 nous avons déjà interprété ces forces.

1° La force  $F_1$  est la force d'inertie d'augmentation de la masse additive.

2° La force  $F_2$  est due à la variation de la masse additive. Elle attire le cylindre vers la paroi, si la vitesse fait avec celle-ci un angle plus petit que  $45^\circ$ , et le repousse dans le cas contraire. Elle diminue la valeur absolue de la vitesse parallèle à la paroi si le cylindre s'éloigne, et l'augmente si le cylindre s'approche de la paroi. La valeur absolue de cette force est égale à  $\frac{1}{2} \vec{U}^2 \frac{dm}{da}$ .

3° La force  $F_3$  est la variation de la force de Joukowsky. On remarquera, que la présence de la paroi augmente toujours la valeur absolue de cette force. Cette augmentation est d'autant plus grande que le cylindre est plus près de la paroi. La force perturbée de Joukowsky s'obtient de la force initiale en la multipliant par le coefficient  $\frac{a}{n}$ .

4° La force  $F_4$  est la force d'attraction par la paroi; elle est due uniquement à la circulation et est égale à  $F_4 = \frac{\rho x^2}{4\pi n}$ . Elle croît, quand le cylindre s'approche de la paroi, et devient infinie ainsi que les forces  $F_2$  et  $F_3$ , quand le cylindre heurte la paroi.

Les forces perturbatrices  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  et  $F_4$  peuvent être développées en séries de puissances négatives de la distance  $a$  du cylindre à la paroi. En prenant en considération les formules (21), (22), (34), on obtient les développements suivants :

$$(38)' \quad \vec{F}_1 = -\frac{1}{2} \vec{\gamma} \pi \rho b^2 \varepsilon^2 (1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 b^2 + \frac{45}{16} \varepsilon^4 b^4 + \dots)$$

$$(39)' \quad |F_2| = \frac{1}{2} \vec{U}^2 \pi \rho b^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 b^2 + \frac{45}{16} \varepsilon^4 b^4 + \dots)$$

$$(40)' \quad |F_3| = \frac{1}{2} |U| \rho \varkappa b^2 \varepsilon^2 (1 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 b^2 + \frac{5}{8} \varepsilon^4 b^4 + \dots)$$

$$(41)' \quad |F_4| = \frac{1}{4\pi} \rho \varkappa^2 \varepsilon (1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 b^2 + \frac{3}{8} \varepsilon^4 b^4 + \frac{5}{16} \varepsilon^6 b^6 + \dots)$$

où  $\vec{\gamma}$  est l'accélération et  $\vec{U}$  la vitesse du cylindre.

Ces formules sont remarquables. On voit, que si le corps est loin de la paroi, les forces  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  sont négligeables par rapport à la force  $F_4$ . C'est cette force, par conséquent, due à la circulation, qui perturbe le plus le mouvement du cylindre. Mais si la vitesse du cylindre est assez grande pour

que le quotient  $\frac{\vec{U} b}{\varkappa}$  soit du même ordre de grandeur que  $\frac{1}{\varepsilon b}$ , alors l'influence des forces  $F_2$  et  $F_3$  n'est plus négligeable, et ce serait une faute de ne pas en tenir compte. La force  $F_2$  peut même avoir un rôle dominant, si la vitesse est très grande (ou si la circulation est petite).

### § 3, 5. — Les trajectoires perturbées du cylindre.

Le caractère des forces perturbatrices qui vient d'être décrit détermine complètement les perturbations dans le mouvement du cylindre. On pourrait les déduire *a priori*. Pour obtenir l'équation de la trajectoire du cylindre utilisons les résultats du chapitre précédent. Les intégrales (22) et (26) du § 2, 2 donnent :

$$(42) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{M} (\Gamma + \rho \kappa n) \quad (42)' \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{M} [\dot{y}_0 M_0 + \rho \kappa (n - n_0)]$$

$$(43) \quad M \dot{x}^2 = h - \frac{1}{M} (\Gamma + \rho \kappa n)^2 + \frac{\kappa^2 \rho}{2\pi} \lg q/q_0$$

$$(43)' \quad M \dot{x}^2 = h - \frac{1}{M} [\dot{y}_0 M_0 + \rho \kappa (n - n_0)]^2 + \frac{\kappa^2 \rho}{2\pi} \lg q/q_0.$$

Dans ces formules  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du centre  $O_1$  par rapport aux axes immobiles dont l'origine est le point  $C$  et qui sont parallèles aux axes mobiles, c'est-à-dire

$$v = \frac{dy}{dt} \text{ et } a = -x.$$

L'interprétation du mouvement est immédiate d'après ce que nous avons dit dans le chapitre précédent. Supposons; que la paroi soit horizontale et que le cylindre se meuve au-dessus de cette paroi. Le cylindre heurtera la paroi si :

$$(44) \quad h - \frac{(M_0 y_0 - \rho \kappa n_0)^2}{\pi b^2 \left( \rho_1 - \rho + \frac{\pi^2 \rho}{3} \right)} - \frac{\kappa^2}{2\pi} \lg q_0 > 0.$$

Dans le cas contraire le mouvement est périodique. La trajectoire du centre  $O_1$  du cylindre est comprise entre deux droites horizontales  $q = q'$  et  $q = q''$  ( $q' > q_0 > q''$ ) et est tangente à ces droites. Elle est symétrique par rapport aux verticales qui passent par les points de contact. Si la vitesse  $v$  s'annule, la trajectoire a des points doubles, ou, dans le cas limite, des points de rebroussement sur la droite supérieure  $q = q''$ . Si la vitesse  $v$  ne s'annule pas, la trajectoire n'a pas de points singuliers. Les valeurs limites  $q'$  et  $q''$  de  $q$  s'obtiennent comme racines de l'équation

$$(45) \quad h - \frac{1}{M} (\Gamma - \rho \kappa b s h \lg q)^2 + \frac{\kappa^2 \rho}{2\pi} \lg q/q_0 = 0.$$

Cette équation a toujours une racine entre  $q = q_0$  et  $q = 0$  et, si l'inégalité (44) n'a pas lieu, une racine entre  $q = q_0$  et  $q = 1$ .

Déterminons la trajectoire du cylindre dans le cas limite, en supposant la distance  $a$  du centre à la paroi très grande par rapport au rayon  $b$  du cylindre. En substituant dans les formules (21) et (22)  $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_1} - x_1$  et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient :

$$n = -x_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \quad q = \frac{\varepsilon_1 b}{2(1 - x_1 \varepsilon_1)} \quad M = (\rho + \rho_1)\pi b^2.$$

Les formules (42) et (43) donnent

$$(42)'' \quad M\dot{y} = \Gamma - \rho \times x$$

$$(43)'' \quad M\dot{x}^2 = h - \frac{1}{M} (\Gamma - \rho \times x)^2 - \frac{x^2 \rho}{2\pi} \varepsilon x.$$

On a supprimé ici les indices de  $x_1$  et de  $\varepsilon_1$ . Intégrons ces équations, en supposant que  $\dot{x}_0 = x_0 = y_0 = 0$ . On obtient

$$x = -A \cos \frac{x\rho}{M} t + A \quad A = \frac{M}{\rho x} \dot{y}_0 - \frac{M}{4\pi\rho} \varepsilon$$

$$y = \frac{x\varepsilon}{4\pi} t + A \sin \frac{x\rho}{M} t.$$

C'est l'équation d'une cycloïde. Le rayon du cercle générateur est égal à  $\frac{\varepsilon M}{4\pi\rho}$ , la distance entre deux horizontales limites est  $2A = \frac{2M}{\rho} \left( \frac{\dot{y}_0}{x} - \frac{\varepsilon}{4\pi} \right)$ , la vitesse de roulement est  $\frac{x\rho}{M}$ . Cette perturbation du mouvement circulaire primitif est due uniquement à la force perturbatrice  $F_4$ .



# TABLE DES MATIÈRES

---

## PREMIÈRE PARTIE

### Sur les cavitations solitaires dans un liquide infini.

	Pages
PRÉFACE . . . . .	3
CHAPITRE I. — <i>Cavitations sphériques.</i>	
§ 1, 1. — Cavitations sphériques . . . . .	7
§ 1, 2. — Cavitations cylindriques circulaires . . . . .	12
§ 1, 3. — Sur la stabilité des cavitations . . . . .	14
§ 1, 3A. — Stabilité des cavitations sphériques . . . . .	16
CHAPITRE II. — <i>Cavitations ellipsoïdales.</i>	
§ 2, 1. — Surfaces de cavitations . . . . .	20
§ 2, 2. — Impossibilité d'existence d'une cavitation ellipsoïdale.	25
§ 2, 3. — Cas d'un ellipsoïde de révolution . . . . .	28
§ 2, 4. — <i>Solution approchée</i> . . . . .	33
CHAPITRE III. — <i>Surfaces planes libres d'un liquide pesant.</i>	
§ 3, 1. — Mouvement dans un tube . . . . .	35
§ 3, 2. — Cas d'un gaz qui suit la loi de Mariotte . . . . .	41
§ 3, 3. — Mouvement dans deux vases cylindriques . . . . .	42

## DEUXIÈME PARTIE

### Sur l'influence des bords sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide.

PRÉFACE . . . . .	47
CHAPITRE I. — <i>Mouvement d'un cylindre de révolution dans un vase cylindrique circulaire.</i>	
§ 1, 1. — Introduction . . . . .	53

	Pages
§ 1, 2. — Problème élémentaire . . . . .	55
§ 1, 3. — Représentation conforme sur une couronne circulaire . . . . .	58
§ 1, 4. — Potentiel des vitesses dans le cas de la rotation . .	63
§ 1, 41. — Potentiel des vitesses dans le cas du mouvement radial . . . . .	67
§ 1, 5. — Influence des bords sur la distribution des vitesses dans le liquide . . . . .	69
§ 1, 6. — Mouvement cyclique . . . . .	72
§ 1, 7. — Energie cinétique dans le mouvement de rotation .	75
§ 1, 71. — Energie cinétique dans le mouvement radial . .	76
§ 1, 72. — Energie cinétique dans le mouvement général. .	77
§ 1, 8. — Etude de la fonction $P(k, q)$ . . . . .	79
§ 1, 9. — Expression du flux relatif à travers la coupure .	84
 CHAPITRE II. — <i>Influence des bords sur le mouvement du cylindre dans le problème précédent.</i>	
§ 2, 1. — Pression hydrodynamique sur le cylindre . . . . .	86
§ 2, 11. — Influence des bords sur la pression hydrodynamique . . . . .	89
§ 2, 2. — Equation du mouvement du cylindre et les premières intégrales . . . . .	92
§ 2, 3. — Cas où les vitesses initiales sont nulles . . . . .	94
§ 2, 31. — Cas où la vitesse radiale n'est pas nulle à l'instant initial . . . . .	95
§ 2, 32. — Cas où la vitesse angulaire n'est pas nulle à l'instant initial . . . . .	97
§ 2, 33. — Interprétation du mouvement dans le cas général.	100
§ 2, 4. — Influence des bords du vase sur le mouvement du cylindre . . . . .	101
§ 2, 5. — Trajectoire du cylindre dans le cas où le rayon du vase devient très grand . . . . .	102
 CHAPITRE III. — <i>Influence d'une paroi rectiligne sur le mouvement d'un cylindre circulaire.</i>	
§ 3, 1. — Calcul des éléments fondamentaux . . . . .	104
§ 3, 2. — Influence de la paroi rectiligne sur la distribution des vitesses dans le liquide . . . . .	107

	Pages
§ 3, 21. — Importance du mouvement cyclique au point de vue de l'influence des bords . . . . .	112
§ 3, 3. — Variation de l'énergie cinétique du liquide . . . .	114
§ 3, 4 — Forces perturbatrices . . . . .	117
§ 3, 5. — Trajectoires perturbées du cylindre . . . . .	119

---