

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ANDRÉ CHARRUEAU

**Sur les figures d'équilibre relatif d'une masse liquide en rotation**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1928

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1928\\_\\_89\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__89__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :  
2009

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. André CHARRUEAU

1<sup>re</sup> THÈSE — SUR LES FIGURES D'ÉQUILIBRE RELATIF D'UNE MASSE  
LIQUIDE EN ROTATION.

2<sup>e</sup> THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 juin 1928 devant la Commission d'examen

MM. KOENIGS . . . . . *Président.*  
VILLAT . . . . . }  
A. VÉRONNET. . . . . } *Examineurs.*

1928

AU COMMERCE DES IDÉES  
26, BOULEVARD SAINT-MICHEL  
PARIS (V<sup>e</sup>)

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

<i>Doyen</i> . . . . .	C. MAURAIN, <i>Professeur</i> , Physique du globe.		
<i>Doyens honoraires</i>	P. APPELL, M. MOLLIARD.		
	P. PUISEUX.		
	V. BOUSSINESQ.		
	A. JOANNIS.		
<i>Prof. honoraires</i>	H. LE CHATELIER.		
	H. LEBESGUE.		
	A. FERNBACH.		
	A. LEDUC.		
	Émile PICARD . . . . .	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	
	G. KÖNIGS . . . . .	Mécanique physique et expérimentale.	
	E. GOURSAT . . . . .	Calcul différentiel et calcul intégral.	
	P. JANET . . . . .	Electrotechnique générale.	
	F. WALLERANT . . . . .	Minéralogie	
	H. ANDOYER . . . . .	Astronomie.	
	P. PAINLEVÉ . . . . .	Mécanique analytique et mécanique céleste.	
	Gabriel BERTRAND . . . . .	Chimie biologique.	
	M <sup>me</sup> P. CURIE . . . . .	Physique générale et radioactivité.	
	M. CAULLERY . . . . .	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	
	G. URBAIN . . . . .	Chimie minérale.	
	Émile BOREL . . . . .	Calcul des probabilités et Physique mathém.	
	L. MARCHIS . . . . .	Aviation.	
	Jean FERRIN . . . . .	Chimie physique.	
	Rémy PERRIER . . . . .	Zoologie (Enseignement P. C. N.).	
	H. ABRAHAM . . . . .	Physique.	
	M. MOLLIARD . . . . .	Physiologie végétale.	
	E. CARTAN . . . . .	Géométrie supérieure.	
	L. LAPICQUE . . . . .	Physiologie générale.	
	E. VESSIGT . . . . .	Théorie des fonctions et théories des transformations.	
<i>Professeurs</i>	A. COTTON . . . . .	Physique générale.	
	J. DRACH . . . . .	Application de l'analyse à la géométrie.	
	Charles FABRY . . . . .	Physique.	
	Charles PÉREZ . . . . .	Zoologie.	
	Léon BERTRAND . . . . .	Géologie structurale et géologie appliquée.	
	R. LESPIEAU . . . . .	Théories chimiques.	
	E. RABAUD . . . . .	Biologie expérimentale.	
	P. PORTIER . . . . .	Physiologie comparée.	
	E. BLAISE . . . . .	Chimie organique.	
	P.-A. DANGEARD . . . . .	Botanique.	
	P. MONTEL . . . . .	Mécanique rationnelle.	
	P. WINTREBERT . . . . .	Anatomie et histologie comparées.	
	O. DUBOSQ. . . . .	Biologie maritime.	
	G. JULIA . . . . .	Mathématiques générales.	
	A. JOB . . . . .	Chimie générale.	
	A. MAILHE . . . . .	Étude des combustibles.	
	L. LUTAUD . . . . .	Géographie physique et géologie dynamique.	
	Eugène BLOCH . . . . .	Physique théorique et physique célestes.	
	Henri VILLAT . . . . .	Mécanique des fluides et applications.	
	Ch. JACOB . . . . .	Géologie.	
	P. PASCAL . . . . .	Chimie appliquée.	
E. HÉROUARD . . . . .	Zoologie.	E. DARMOIS . . . . .	Physique.
E. PÉCHARD . . . . .	Chimie (Enseig <sup>t</sup> P. C. N.).	G. BRUHAT . . . . .	Physique.
V. AUGER . . . . .	Chimie analytique.	H. MOUTON . . . . .	Chimie physique.
M. GUICHARD . . . . .	Chimie minérale.	L. JOLEAUD . . . . .	Paléontologie.
A. GUILLET . . . . .	Physique	M. JAVILLIER . . . . .	Chimie biologique.
C. MAUGUIN . . . . .	Minéralogie.	A. DUFOUR . . . . .	Physique (P. C. N.).
L. BLARINGHEM . . . . .	Botanique.	F. PICARD . . . . .	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
A. MICHEL-LÉVY . . . . .	Pétrographie.	ROBERT-LÉVY . . . . .	Zoologie.
A. DEREIMS . . . . .	Géologie	L. DUNOYER . . . . .	Optique appliquée.
R. DONGIER . . . . .	Physique du globe.	A. GUILLIERMOND . . . . .	Botanique (P. C. N.).
A. DENJOY . . . . .	Calcul différ. et intégral.	A. DEBIERNE . . . . .	Radioactivité.
H. BÉNARD . . . . .	Physique (P. C. N.).		
	<i>Secrétaire</i> . . . . .	Daniel TOMBECK.	

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES FIGURES D'ÉQUILIBRE RELATIF  
D'UNE MASSE LIQUIDE EN ROTATION

---

INTRODUCTION

---

L'étude des figures d'équilibre relatif d'une masse liquide homogène, en rotation uniforme, a fait l'objet de nombreuses recherches, en ce qui concerne les masses soumises à l'action des seules forces newtoniennes. Ces théories et celle des masses hétérogènes en rotation ont été appliquées à l'étude de la forme des corps célestes.

En plus de ce problème astronomique des grosses masses, pour lesquelles l'attraction newtonienne est seule à considérer, il existe le problème *physique* des petites masses, pratiquement soumises à la seule tension superficielle, et le problème *théorique* des masses supposées soumises simultanément à une tension superficielle et à une attraction entre leurs particules obéissant à une loi newtonienne.

Au problème physique dont nous venons de parler, se rattache la célèbre expérience de Plateau, sur la masse d'huile tournante, expérience décrite par ce physicien, dans son *Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur (mémoires de l'Académie royale de Bruxelles, tome XVI)*.

Nous étudions, dans ce travail, ces deux problèmes, physique et théorique, en y supposant que la masse liquide est homogène.

L'historique de ces questions est facile à faire, car les auteurs qui s'en sont occupés, au point de vue mathématique, se sont bornés aux généralités du sujet ou à des cas très particuliers (voir les traités sur la *Capillarité*, de Henri Poincaré et de M. Bouasse, les thèses de Doctorat d'Université et d'État de Globa-Mikhaïlenko et le chapitre II de la première partie des *Compléments au tome III du cours de physique mathématique* de M. Boussinesq).

Le présent mémoire est divisé en trois parties.

Dans la première, nous étudions les masses liquides en rotation uniforme, sans axe matériel de rotation. Nous laissons de côté les masses cylindriques, dont nous signalons seulement que l'étude relève de la théorie des fonctions elliptiques, car l'équation différentielle de leur section droite est identique à celle de la courbe élastique plane à pression normale uniforme. Nous ne parlons ici que des masses de révolution, en rotation uniforme autour de leur axe géométrique de révolution et nous discutons complètement ce problème. Nous déterminons, en particulier, la vitesse limite de la masse et la vitesse pour laquelle les deux pôles viennent se confondre. Cette dernière figure est la figure de départ des anneaux. Nous faisons aussi l'étude de la stabilité de l'équilibre. Dans les conditions qui sont précisées dans notre mémoire, les figures, stables à partir de la sphère, cessent de l'être quand la vitesse décroît à partir de la vitesse limite, le rayon équatorial continuant à croître.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous considérons le cas concret de l'expérience de Plateau, où la rotation s'effectue autour d'un axe matériel. Nous donnons les formules exactes qui s'appliquent à une masse centrale entourant un axe matériel et celles qui s'appliquent à un anneau. La discussion de l'évolution d'une telle masse centrale pourrait être faite, à l'aide des formules exactes correspondantes, en calculant certaines intégrales hyperelliptiques par des méthodes approchées ; mais cette discussion peut être remplacée, de façon très suffisante, par celle donnée dans la 1<sup>ère</sup> partie, pour le cas où il n'y a pas d'axe matériel, car, dans les expériences de Plateau, cet axe était de petit diamètre (1 mm. 5), pour une masse qui avait 3 centimètres de rayon quand elle était sphérique, de sorte que la présence de l'axe ne changeait que fort peu l'allure des phénomènes. On constate que la discussion de la 1<sup>ère</sup> partie est en accord avec les résultats de Plateau. Une des expériences de ce physicien conduit, en effet, à la transformation d'une masse centrale, sans anneau, en un

anneau unique, sans masse centrale, comme l'expose Plateau, dans son mémoire précité, au § 11, et par la fig. 3. Comme l'indique encore Plateau, vers la fin de son mémoire, au § 21, ce n'est que par un jeu expérimental assez compliqué, qu'il est parvenu, dans une autre expérience, à réaliser le fractionnement de la masse en une partie centrale et en un anneau, en plaçant le disque horizontal qui entraîne la masse, dans la partie inférieure de celle-ci et non plus dans son plan équatorial et en donnant à ce disque un petit diamètre et une très grande vitesse, toutes dispositions qui rendent la vitesse angulaire extrêmement variable, dans l'étendue de la masse. De sorte que le fractionnement ne relève point de la théorie des figures d'équilibre relatif. Il n'en reste pas moins que l'anneau formé par fractionnement, lorsque la vitesse angulaire des particules y est devenue partout la même, s'identifie avec un anneau provenant de l'évolution d'une masse centrale de Plateau. Négligeant, comme nous l'avons dit, la présence de l'axe matériel mince, nous connaissons, d'après la première partie de notre mémoire, cette évolution de la sphère jusqu'à la figure aux deux pôles confondus. Puis, la masse devient annulaire et nous étudions l'évolution de cet anneau, qui présente une section d'abord *piriforme*, puis *partout convexe*, puis sensiblement *elliptique* et tend vers un *tore* infiniment long et infiniment délié correspondant à une vitesse infiniment petite. Nous étudions aussi la stabilité des anneaux de Plateau.

Enfin, dans la troisième partie, nous considérons des masses soumises simultanément à une tension superficielle et à une attraction, entre leurs particules, obéissant à une loi newtonienne.

Nous tenons à remercier ici, de tout cœur, M. Boussinesq, professeur honoraire à la Sorbonne, membre de l'Institut, qui nous a suggéré l'idée de recherches sur le sujet de la première partie ; M. Villat, professeur à la Sorbonne, membre correspondant de l'Institut, et M. Véronnet, professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg, qui ont bien voulu s'intéresser à nos recherches et encourager nos efforts, avec une bienveillance dont nous leur sommes profondément reconnaissant.

---

## PREMIÈRE PARTIE

**Sur les masses liquides de révolution, non annulaires, homogènes et soumises à la seule tension superficielle, en équilibre relatif dans une rotation uniforme s'effectuant autour de leur axe de révolution, et sans axe matériel de rotation.**

---

### CHAPITRE PREMIER

#### DÉTERMINATION DU MÉRIDIEN D'UNE MASSE LIQUIDE DONNÉE SOUMISE A UNE ROTATION DONNÉE

---

**1. Enoncé du problème.** — Prenons une masse liquide homogène, à tension superficielle, sans pesanteur et sans attraction entre ses particules, libre et d'abord immobile dans un milieu à pression uniforme. Nous savons qu'elle affecte une forme sphérique. Considérons ensuite, dans le même milieu, cette masse, tournant sur elle-même, sans axe matériel de rotation, avec une vitesse uniforme donnée. Nous nous proposons de déterminer la figure de révolution qui est une figure d'équilibre relatif, pour cette masse et pour cette vitesse de rotation. A d'autres vitesses uniformes, correspondront d'autres figures d'équilibre et, dans cette première partie du mémoire, nous étudierons seulement celles qui sont fermées et d'un seul tenant et qui ont des points sur l'axe de rotation et de révolution. Le liquide est supposé incompressible, mais nous ne supposons pas que sa fluidité soit forcément parfaite.

**2. Equation différentielle du méridien.** — Soient  $\delta$ ,  $\omega$  et  $f$ , la densité du liquide, la vitesse angulaire de rotation en radians et la valeur de la tension superficielle. Dans un plan méridien quelconque, prenons pour axe des  $y$ , l'axe de révolution et de rotation et pour axe des  $x$ , une perpendiculaire menée au précédent, en un point encore indéterminé. Nous considérerons la masse comme en équilibre absolu, après avoir appliqué à chacune de ses particules, une force égale à la force centrifuge. Pour une particule distante de  $x$  de l'axe de révolution, la force centrifuge, par unité de masse, est égale à  $\omega^2 x$  et dirigée vers l'extérieur. La force centrifuge dérive donc de la fonction de forces  $\frac{\omega^2 x^2}{2}$ . On déduit facilement des équations de l'hydrostatique que la pression, dans la masse, reste la même sur tout cylindre, de révolution autour de l'axe de rotation, et qu'elle est égale à

$$(1) \quad p = p_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2} \delta$$

sur le cylindre de rayon  $x$ ,  $p_0$  étant la pression le long de l'axe. La pression dans la masse, juste à l'intérieur de la surface libre, est encore égale à

$$(2) \quad p_1 + f\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho}\right),$$

où  $p_1$  est la pression extérieure uniforme ;  $\tau$ , le rayon de courbure du méridien ;  $\rho$ , le second rayon de courbure principal de la surface, c'est-à-dire le segment de normale compris entre la surface et l'axe de révolution. Nous devons regarder  $\tau$  et  $\rho$ , comme positifs quand, les parcourant de la surface vers les centres de courbure, on pénètre dans le liquide, au départ de la surface, et négatifs dans le cas contraire. Nous avons donc, sur toute la surface libre

$$p_1 + f\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho}\right) = p_0 + \frac{\omega^2 \delta}{2} x^2,$$

d'où

$$(3) \quad \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho} = \frac{p_0 - p_1}{f} + \frac{\omega^2 \delta}{2f} x^2.$$

Mais, si  $y'$  et  $y''$  sont les dérivées première et seconde de l'ordonnée  $y$  du méridien par rapport à l'abscisse  $x$ , on a

$$\frac{1}{|\tau|} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \right|, \quad \frac{1}{|\rho|} = \left| \frac{y'}{x\sqrt{1 + y'^2}} \right|,$$

et, de plus,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) + \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right).$$

Si l'on prend la partie, située du côté des  $x$  positifs, d'une courbe quelconque, on vérifie facilement, quel que soit le côté de la courbe vers lequel on compte positivement  $\tau$  et  $\rho$ , que les produits  $y'y''$  et  $\rho\tau$  ont le même signe, en chaque point, et, par suite, que

$$(4) \quad \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho} = \pm \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right).$$

Supposons maintenant que, le long de cette partie de courbe, la tangente se déplace avec continuité ; en un point quelconque de la courbe, choisissons arbitrairement un côté vers lequel nous compterons positivement  $\tau$  et  $\rho$  et que nous appellerons le côté positif ; prenons, en ce point, le signe convenable dans (4) ; si nous conservons, par continuité, le côté positif, nous verrons sans peine que le signe est à changer dans (4), en tous les points à tangente parallèle à l'axe des  $y$ , qui ne sont pas des points d'inflexion et là seulement.

Compte tenu de (4), l'équation (3) s'écrit

$$(5) \quad \pm \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \frac{p_0 - p_1}{f} + \frac{\omega^2 \delta}{2f} x^2$$

et, intégrée, devient

$$(5 \text{ bis}) \quad \pm \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p_0 - p_1}{2f} x^2 + \frac{\omega^2 \delta}{8f} x^4 + \text{Constante.}$$

Comme, par hypothèse, les masses liquides que nous considérons ont des points sur l'axe des  $y$ , l'équation précédente doit être satisfaite pour  $x = 0$  ; donc la constante est égale à zéro, puisque  $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$  n'est jamais infini ; et cette constante reste nulle, lorsque le signe est à changer dans (4) et, par suite, dans la dernière équation, puisque c'est en un point où  $y'$  passe de  $+\infty$  à  $-\infty$ , ou inversement et, par conséquent, le membre de gauche, compte tenu du changement de signe nécessaire, ne présente, en ce point, aucune discontinuité.

Donc, après division par  $x$ , nous avons

$$(6) \quad \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p_0 - p_1}{2f} x + \frac{\omega^2 \delta}{8f} x^3.$$

Prenons, sur notre contour fermé, le point A, le plus éloigné de l'axe de révolution et choisissons, pour axe des  $x$ , la perpendiculaire menée par A à l'axe de révolution.

Posons

$$OA = a, \quad k^2 = \frac{\omega^2 \delta}{8f}, \quad K^2 = k^2 a^3.$$

$k^2$  est une donnée, qui a pour dimensions  $L^{-3}$ ,  $L$  désignant la longueur et, par suite,  $K^2$  est un nombre.

Au-dessus de l'axe des  $x$ , dans la région convexe avoisinant le point A, il est clair qu'en comptant  $\tau$  et  $\rho$  positivement du côté du liquide, la valeur  $\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho}$  s'obtient en prenant le signe —, dans (4), et, pour le point A, où  $y' = -\infty$ , l'équation (6) donne :

$$(7) \quad \frac{p_0 - p_1}{2f} = \frac{1 - k^2 a^3}{a}.$$

Portant cette valeur dans (6), on a :

$$\pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1 - k^2 a^3}{a} + k^2 x^3.$$

Posons

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = t.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= \sqrt{t}(1 - K^2 + K^2 t), \\ y' = \frac{dy}{dx} &= \pm \frac{\sqrt{t}(1 - K^2 + K^2 t)}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2 t)^2}}, \\ dy &= \pm \frac{a}{2} \frac{1 - K^2 + K^2 t}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2 t)^2}} dt. \end{aligned}$$

### 3. Discussion de l'équation précédente.

Posons :

$$\Phi(t) \equiv 1 - K^2 + K^2 t, \quad \Psi(t) \equiv 1 - t(1 - K^2 + K^2 t)^2.$$

$\Psi(t)$  est un polynôme du troisième degré en  $t$ .

On démontre facilement que :

pour  $K < 2$ ,  $\Psi(t) = 0$  n'a que racine réelle,  $+1$  ;

pour  $K = 2$ ,  $\Psi(t) = 0$  a ses trois racines réelles et positives, la racine double  $+\frac{1}{4}$  et la racine simple  $+1$  ;

pour  $K > 2$ ,  $\Psi(t) = 0$  a ses trois racines réelles et positives,  $+1$  et deux autres nombres compris entre zéro et  $+1$ .

Toutes les figures d'équilibre qui nous occupent ici, satisfont à l'équation différentielle trouvée. Il convient de voir ce que représente cette équation, pour toutes les valeurs de  $K$ , et de retenir les intervalles de  $K$  correspondant réellement à des figures d'équilibre.

1<sup>er</sup> cas.  $K < 2$

$\Psi(t) = 0$  n'admettant que la seule racine réelle  $t = +1$ , nous ne rencontrerons, entre le point A le plus éloigné de l'axe et cet axe, aucun point à tangente verticale, autre que A, et  $y'$  est réel dans tout l'intervalle zéro à  $a$ , de  $x$ . Partant du point A, avec le signe  $+$ , d'une part, et le signe  $-$ , d'autre part, nous atteindrons donc l'axe de révolution, après avoir décrit deux branches de courbe,

$$x = a\sqrt{t}, \quad y = -\frac{a}{2} \int_1^t \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{\Psi(t)}}$$

et

$$x = a\sqrt{t}, \quad y = +\frac{a}{2} \int_1^t \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{\Psi(t)}}$$

symétriques par rapport à l'axe des  $x$  et dont l'ordonnée reste partout finie, puisque 1 est la seule racine réelle de  $\Psi(t) = 0$  et qu'elle est racine simple.

Profitant de la symétrie, nous étudierons la partie de courbe dirigée vers le haut, au départ de A, pour laquelle

$$(8) \quad y' = -\frac{\sqrt{t}(1 - K^2 + K^2t)}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2}} = -\frac{\Phi(t)\sqrt{t}}{\sqrt{\Psi(t)}}$$

$$(9) \quad dy = -\frac{a}{2} \frac{1 - K^2 + K^2t}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2}} dt = -\frac{a}{2} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{\Psi(t)}} dt,$$

$$(10) \quad y = -\frac{a}{2} \int_1^t \frac{(1 - K^2 + K^2t) dt}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2}} = -\frac{a}{2} \int_1^t \frac{\Phi(t)}{\sqrt{\Psi(t)}} dt.$$

Nous reviendrons sur ce cas, après avoir intégré (10), pour  $K < 2$ .

2<sup>e</sup> cas.  $K = 2$

$\Psi(t) = 0$  admet la racine double  $t = +\frac{1}{4}$ , tandis que  $\Phi(t)$  est différent de zéro et d'ailleurs négatif, pour cette valeur de  $t$ . L'intégrale donnant l'ordonnée qui correspond à  $t = +\frac{1}{4}$  est égale à  $-\infty$ . Il n'y a donc pas de figure d'équilibre finie pour  $K = 2$

3<sup>e</sup> cas.  $K > 2$

$\Psi(t) = 0$  a ses trois racines réelles et positives,  $t_1$ ,  $t_2$  et 1, avec  $0 < t_1 < t_2 < 1$ . Entre  $t_1$  et  $t_2$ ,  $y'$  est imaginaire. A l'intervalle de  $t_2$  à 1 ne correspond pas un anneau, parce que, si l'on tient compte d'une identité qui sera donnée plus loin, après (18), on voit, en l'intégrant de  $t_2$  à 1, que la courbe comprise dans cet intervalle ne peut se fermer que pour un volume renfermé qui serait nul. Reste l'intervalle de zéro à  $t_1$ , qui donne bien une courbe fermée, de rayon équatorial  $a_1$ , mais elle entre dans le cas I ( $k^2 a_1^2 < 4$ ), puisqu'il n'y a pas de point à tangente verticale entre zéro et  $a_1$ .

L'intervalle de  $K$ , de zéro à 2, reste donc seul à considérer.

#### 4. Intégration de l'équation (10) pour $K < 2$ .

Nous supposons que  $0 < K < 2$

$\Psi(t) = 0$  n'ayant que la seule racine réelle + 1, on peut écrire

$$\Psi(t) \equiv K^4(1-t)[(t-\mu)^2 + \nu^2],$$

où  $\mu$  et  $\nu$  sont des nombres réels, tels que

$$\mu = \frac{K^2 - 2}{2K^2}, \quad \mu^2 + \nu^2 = \frac{1}{K^4}.$$

Posons

$$(11) \quad 1-t = \lambda \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2},$$

avec  $\lambda$  positif et tel que

$$\lambda^2 = (1-\mu)^2 + \nu^2$$

Posons aussi

$$c^2 = \frac{1-\mu+\lambda}{2\lambda},$$

et remarquons que la quantité appelée  $c^2$  est toujours positive et inférieure à 1.

Il vient

$$(12) \quad \frac{dt}{\sqrt{(1-t)[(t-\mu)^2 + \nu^2]}} = \frac{-d\varphi}{\sqrt{\lambda} \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}$$

et

$$\int_t^1 \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{\Psi(t)}} = \frac{1}{K^2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{1 - K \lambda \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Posons

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = F(c, \varphi),$$

intégrale elliptique de première espèce de Legendre ;

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(c, \varphi),$$

intégrale elliptique de deuxième espèce de Legendre.

La différentiation de  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$  conduit à

$$\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} + F(c, \varphi) - 2E(c, \varphi).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_t^1 \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{\Psi(t)}} &= \frac{1}{K^2 \sqrt{\lambda}} [F(c, \varphi) - K^2 \lambda \{ 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} + F(c, \varphi) - 2E(c, \varphi) \}], \\ \frac{y}{a} &= \sqrt{\lambda} \left[ - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} - \frac{K^2 \lambda - 1}{2K^2 \lambda} F(c, \varphi) + E(c, \varphi) \right] \end{aligned}$$

On trouve facilement que

$$(13) \quad \lambda^2 = \frac{1 + 2K^2}{K^4},$$

$$(14) \quad c^2 = \frac{1}{2} + \frac{2 + K^2}{4\sqrt{1 + 2K^2}},$$

$$(15) \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} \left[ - \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\sqrt{1 + 2K^2} - 1}{2\sqrt{1 + 2K^2}} \frac{F(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} + \frac{E(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right],$$

où

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{K\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{1+2K^2}}.$$

$\operatorname{Tg} \frac{\varphi}{2}$  varie entre zéro et  $\frac{K}{\sqrt{1+2K^2}}$ .

D'après ce que nous verrons plus loin nos (10 et 11,)  $\frac{F(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$  et  $\frac{E(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$  sont encore des fonctions continues de  $\varphi$ , pour  $\varphi$  voisin de zéro ou égal à zéro et, pour  $\varphi$  suffisamment petit, si l'on pose  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u$ , on a ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{F(c, \varphi)}{u} &= 1 - \frac{u^2}{3}(1 - 2c^2) + \frac{u^4}{5}(1 - 6c^2 + 6c^4) \dots \\ \frac{1}{2} \frac{E(c, \varphi)}{u} &= 1 - \frac{u^2}{3}(1 + 2c^2) + \frac{u^4}{5}(1 + 6c^2 - 2c^4) \dots \end{aligned}$$

Nous donnerons, aux nos 10 et 11, les termes généraux de ces séries et, au n° 12, le développement  $\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  en série entière en  $u$ .

On calculera  $y$ , pour les petites valeurs de  $u$  (par exemple, jusqu'à 0,1), à l'aide de cette dernière série et avec une excellente approximation. Au delà de la valeur de  $u$  sus-indiquée et bien que ce développement soit valable dans tout l'intervalle  $0 \leq u < 1$ , on emploiera les tables d'intégrales elliptiques de Legendre qui seront alors plus commodes que la série.

Désignons par  $b$  le demi axe polaire. Posons :

$$(16) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = \frac{K}{\sqrt{1 + 2K^2}}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= -\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi_0} - \frac{\sqrt{1 + 2K^2} - 1}{2\sqrt{1 + 2K^2}} \frac{F(c, \varphi_0)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{E(c, \varphi_0)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}, \\ \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2K^2 + K^2}}, \\ (17) \quad \frac{b}{a} &= -\frac{1}{\sqrt{1 + 2K^2 + K^2}} - \frac{\sqrt{1 + 2K^2} - 1}{2\sqrt{1 + 2K^2}} \frac{F(c, \varphi_0)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{E(c, \varphi_0)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}. \end{aligned}$$

Pour effectuer l'intégration, nous avons supposé que  $0 < K < 2$ .

Or, pour  $K = 0$ , c'est-à-dire pour l'équilibre absolu, on voit, en tenant compte des vraies valeurs de  $\frac{F(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$  et de  $\frac{E(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$ , pour  $\varphi = 0$ , que (15)

devient  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , équation d'une circonférence. C'est à quoi conduirait l'intégration de (10), après y avoir fait  $K = 0$ , confirmant le résultat bien connu

que la sphère est la figure d'équilibre absolu. Il s'ensuit donc que (15) reste valable pour  $K = 0$  et s'applique dans tout l'intervalle  $0 \leq K < 2$ .

La facilité d'emploi des formules précédentes résulte de ce que *l'ordonnée du méridien s'exprime à l'aide des seules intégrales elliptiques de première espèce et de deuxième espèce de Legendre.*

### 5. Forme générale de la courbe méridienne.

1°  $K \leq 1$ . Reprenons (8), (9) et (10) qui correspondent au quart du méridien dirigé vers le haut, à partir de l'équateur. L'équation (8) montre que, pour  $K \leq 1$ ,  $y' = \frac{dy}{dx}$  décroît continuellement, de zéro à  $-\infty$ , quand  $t$  croît de zéro à 1. Le méridien est donc partout convexe.

2°  $K > 1$ .  $y'$ , nulle au pôle, prend d'abord des valeurs positives croissantes, lorsqu'on suit le méridien en partant du pôle; la dérivée de  $y'$  par rapport à  $t$  s'annule pour  $t = \frac{K^2 - 1}{3K^2}$ , en passant du positif au négatif. A cette valeur de  $t$  correspond donc un point d'inflexion du méridien. Enfin,  $y' = 0$ , pour  $t = \frac{K^2 - 1}{K^2}$ , ainsi qu'on le voit sur (8). Le méridien affecte la forme de la figure 1.

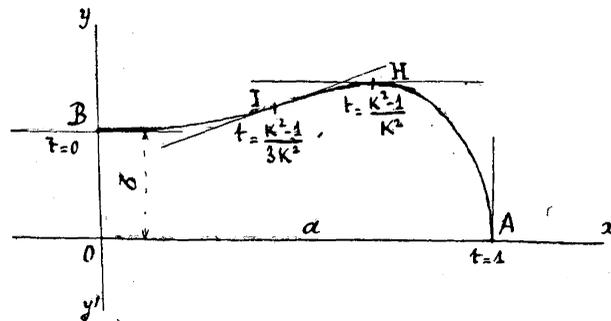


Fig. 1.

Nous verrons (n° 7) que  $\frac{b}{a}$  est positif pour  $K^2 < 2,32$  environ, s'annule pour une valeur de  $K^2$  voisine de 2,32 et reste négatif dans l'intervalle de 2,32 à 4. Les figures pour lesquelles  $b$  est négatif, présentent, considérées en entier, deux points doubles situés sur l'axe des  $x$ . Elles ne peuvent constituer des figures d'équilibre, car l'arc BHA continue bien à être un contour d'équilibre pour notre

liquide placé au-dessous de BHA, mais la courbe entière n'enveloppe plus ce liquide.

Les figures d'équilibre non annulaires sont donc ou partout convexes, ou concaves aux pôles, comme celle de la figure 1, la figure extrême de ce dernier type étant celle où les deux pôles sont confondus et qui correspond sensiblement à  $K = \sqrt{2,32} = 1,52$ .

### 6. Equation exprimant l'invariabilité du volume.

Soit  $\frac{4}{3}\pi R^3$  le volume invariable de la masse liquide. AB étant le quart de de méridien situé dans l'angle  $xoy$ , nous avons

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi \int_{AB} x^2 dy.$$

Compte tenu de (9), il vient

$$(18) \quad \frac{4}{3}R^3 = a^3 \int_0^1 \frac{t \cdot \Phi(t) dt}{\sqrt{\Psi(t)}}.$$

Mais on a identiquement

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\Psi(t)} = -\frac{3K^2}{2} \frac{t\Phi(t)}{\sqrt{\Psi(t)}} - \frac{1-K^2}{2} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{\Psi(t)}}.$$

Intégrant entre 0 et 1, tenant compte de (18) et de la valeur de  $\frac{b}{a}$  qu'on tire de (10), il vient :

$$-1 = -2K^2 \frac{R^3}{a^3} - (1-K^2) \frac{b}{a}$$

et la relation fondamentale.

$$(19) \quad 2K^2 R^3 = 1 - (1-K^2) \frac{b}{a}.$$

Si  $\tau_0$  est le rayon de courbure du méridien aux pôles, lesquels sont des ombilics de la surface, (3) montre que

$$(20) \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{p_0 - p_1}{2f}.$$

Compte tenu de (7), on a

$$(21) \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{1-K^2}{a},$$

et la relation (19) prend la forme suivante

$$(22) \quad 2k^2R^3 = 1 - \frac{b}{\tau_0}.$$

L'équation (19) nous servira seule pour l'exécution des calculs. C'est une équation transcendante en  $K^2$ , où  $\frac{b}{a}$  est la fonction de  $K^2$  définie par (17).

**7. Étude de la courbe**  $X = K^2, Y = 1 - (1 - K^2)\frac{b}{a}$ .

Nous avons :

$$(23) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{b}{a} - (1 - K^2) \frac{d\frac{b}{a}}{dX}$$

et nous savons que

$$(24) \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\Phi(t)dt}{\sqrt{\Psi(t)}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - K^2 + K^2t}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2}} dt.$$

La dérivée, par rapport à  $X = K^2$ , de la fonction sous le signe d'intégration, est égale à

$$\frac{t - 1}{[1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

dont le dénominateur contient le facteur  $(1 - t)^{\frac{3}{2}}$ .

Considérons les deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{1 - K^2 + K^2t}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2}} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t - 1}{[1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2]^{\frac{3}{2}}} dt.$$

Après division par  $1 - t$ , du numérateur et du dénominateur, dans la seconde, on voit que, dans l'une et l'autre,  $1 - t$  figure au dénominateur avec l'exposant  $\frac{1}{2}$ . De plus, si nous supposons  $0 \leq K < 2$ , il n'existe aucune racine du dénominateur, autre que 1, entre zéro et 1. Donc, ces deux intégrales ont un sens pour toute valeur de  $K$ , telle que  $0 \leq K < 2$ . On peut facilement démontrer que la deuxième intégrale représente la dérivée de la première, par rapport à  $X$ , dans tout l'intervalle considéré (voir GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, 1917, p. 237).

Ainsi, pour  $0 \leq K < 2$ , nous avons

$$(25) \quad \frac{d\frac{b}{a}}{dX} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(t - 1)dt}{[1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour  $K = 0$ , (24) et (25) donnent, par une intégration élémentaire :

$$\frac{b}{a} = 1, \quad \frac{d\frac{b}{a}}{dX} = -1.$$

Remarquons tout de suite que  $\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$  est toujours négatif, quel que soit  $K$ , compris dans l'intervalle considéré, l'élément différentiel de (25) étant toujours négatif.

Pour  $K \neq 0$ , si  $\varphi, \varphi_0, \lambda$  et  $c$  ont le même sens qu'au N° 4 et si l'on pose

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}, \quad \Delta_0 = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi_0}, \quad d^2 = 1 - c^2,$$

on a :

$$\frac{d\frac{b}{a}}{dX} = -\frac{1}{2K^6 \lambda^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos^4 \frac{\varphi}{2}}{\Delta^3} d\varphi,$$

et l'on arrive à :

$$(26) \quad \frac{d\frac{b}{a}}{dX} = -\frac{1}{8K(1+2K^2)^{\frac{3}{4}}} \left[ \frac{F(c, \varphi_0)}{c^2} + \frac{c^2 - d^2}{c^2 d^2} E(c, \varphi_0) - \frac{c^2 - d^2}{2d^2} \frac{\sin 2\varphi_0}{\Delta_0} + \frac{2 \sin \varphi_0}{\Delta_0} \right].$$

Cette expression est calculable à l'aide des tables de Legendre. Pour  $K$  petit, l'emploi de (26) n'est plus possible, pratiquement, car certains termes tendent vers une forme indéterminée ; on emploiera alors le développement

(n° 14) de  $\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$ , en série entière en  $K^2$ .

Par (23), nous aurons ensuite  $\frac{dY}{dX}$ .

Remarquons que pour  $K = 2$ , l'intégrale donnant  $\frac{b}{a}$  devient égale à  $-\infty$ , puisque (n° 3) l'ordonnée du méridien, correspondant à  $t = +\frac{1}{4}$ , est égale à  $-\infty$  et qu'en outre, l'élément différentiel de (24) est négatif, pour cette valeur de  $K$ , dans tout l'intervalle de  $t$  compris entre 0 et  $\frac{1}{4}$ .

Le tableau suivant indique les valeurs de  $\frac{b}{a}$ , de  $\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$ , de  $Y$  et de  $\frac{dY}{dX}$ , pour quelques valeurs de  $K^2$  :

$X = K^2$	$\frac{b}{a}$	$\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$	$Y = 1 - (1 - K^2)\frac{b}{a}$	$\frac{dY}{dX} = \frac{b}{a} - (1 - K^2)\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$
0	+ 1	- 1	0	+ 2
1	+ 0,431		+ 1	+ 0,431
1,5	+ 0,259	- 0,322	+ 1,1295	+ 0,098
$\frac{5}{3}$	+ 0,2062	- 0,314	+ 1,1375	- 0,003
2	+ 0,1032		+ 1,1032	
2,32	0		+ 1	
2,5	- 0,056		+ 0,916	
3	- 0,236		+ 0,528	
3,5	- 0,518		- 0,294	
4	- $\infty$	- $\infty$	- $\infty$	- $\infty$

D'où les courbes suivantes de  $\frac{b}{a}$  et de  $Y$ , en fonction de  $X = K^2$  (fig. 2 et 3).

Nous allons démontrer que la concavité de la courbe  $(X, Y)$  est partout dirigée vers le bas.

Nous avons déjà vu que, pour  $0 \leq K^2 < 4$ , on a, quelque soit  $K$

$$\frac{d\frac{b}{a}}{dX} < 0.$$

On montre qu'on peut dériver (25), par rapport à  $X$ , sous le signe d'intégration et l'on trouve que l'élément différentiel de  $\frac{d^2\frac{b}{a}}{dX^2}$  est positif, au moins dans l'intervalle

$$0 \leq K^2 < 1,$$

donc que, dans cet intervalle au moins, on a :

$$\frac{d^2\frac{b}{a}}{dX^2} > 0.$$

On montre encore qu'on peut dériver (25), une nouvelle fois, par rapport à  $X$ , sous le signe d'intégration ; on trouve que l'élément différentiel de  $\frac{d^3\frac{b}{a}}{dX^3}$  est négatif, dans tout l'intervalle

$$0 \leq K^2 < 4,$$

et que, par suite, dans tout cet intervalle,

$$\frac{d^3 \frac{b}{a}}{dX^3} < 0.$$

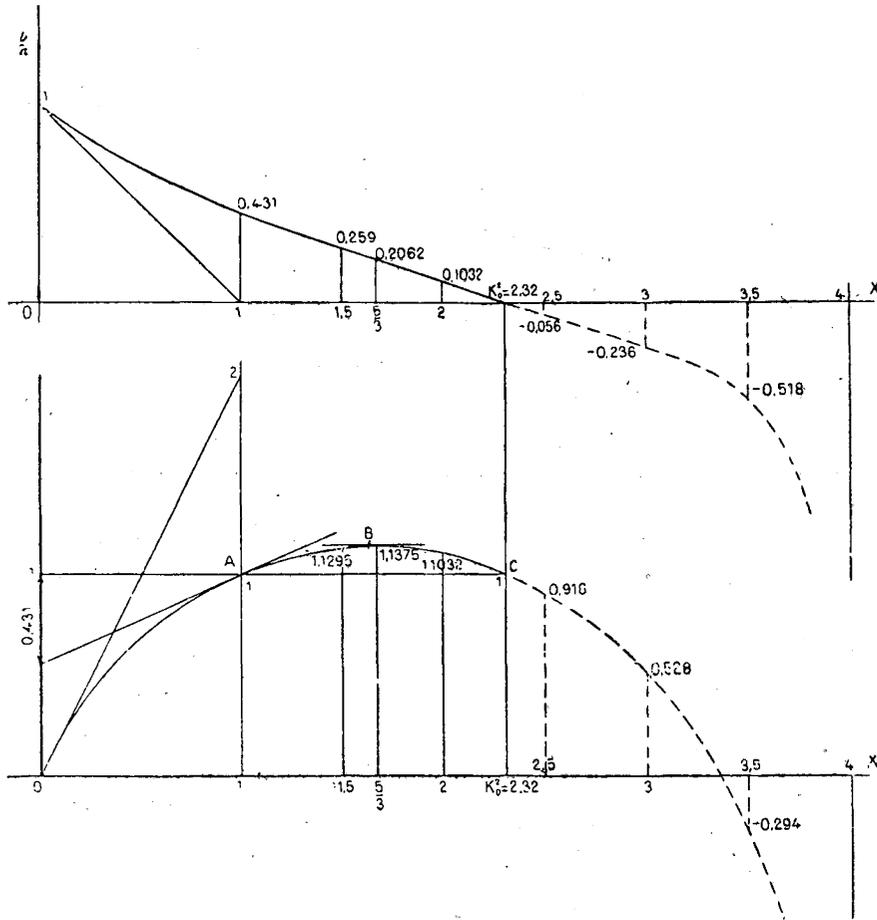


Fig. 2 et 3.

En dérivant (23) par rapport à X, on a :

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 2 \frac{d \frac{b}{a}}{dX} + (X - 1) \frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}.$$

Pour  $K^2 = X \leq 1$ , on a bien  $\frac{d^2 Y}{dX^2} < 0$ .

Supposons maintenant

$$1 < X < 4.$$

Nous savons que  $\frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}$  décroît continuellement d'une valeur positive à  $-\infty$ ,

quand  $X$  croît de 0 à 4, puisque  $\frac{d^3 \frac{b}{a}}{dX^3}$  est négative, dans tout l'intervalle  $0 \leq X < 4$ ,

et que, pour  $X$  tendant vers 4,  $\frac{b}{a}$  et par suite  $\frac{d \frac{b}{a}}{dX}$  et  $\frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}$  tendent vers  $-\infty$ .

Soit  $X_1$  la valeur de  $X$  pour laquelle  $\frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}$  s'annule et au-dessus de laquelle  $\frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}$  est toujours négative ;  $X_1$  ne peut qu'être supérieur à 1, d'après ce qui a été dit

sur le signe de  $\frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}$  pour  $X$  inférieur ou égal à 1. Et l'on voit que, pour

$$X \geq X_1 > 1,$$

on a bien

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} < 0.$$

Il ne reste donc à considérer que l'intervalle de  $X$ ,

$$1 < X < X_1,$$

dans lequel  $\frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}$  est positive.

Comme  $\frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2}$  est positive et toujours décroissante dans cet intervalle, on a, pour toute valeur de  $X$  de cet intervalle,

$$\int_1^X \frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2} dX = \left[ \frac{d \frac{b}{a}}{dX} \right]_X - \left[ \frac{d \frac{b}{a}}{dX} \right]_{X=1}$$

et

$$(X-1) \left[ \frac{d^2 \frac{a}{b}}{dX^2} \right]_X < \left[ \frac{d \frac{b}{a}}{dX} \right]_X - \left[ \frac{d \frac{b}{a}}{dX} \right]_{X=1}.$$

On a donc, dans l'intervalle considéré,

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 2 \frac{d \frac{b}{a}}{dX} + (X-1) \frac{d^2 \frac{b}{a}}{dX^2} < 3 \frac{d \frac{b}{a}}{dX} - \left[ \frac{d \frac{b}{a}}{dX} \right]_{X=1}.$$

Le maximum du membre de droite aura lieu pour la valeur  $X_1$  qui correspond au maximum de  $\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$  et à un point d'inflexion de la courbe de  $\frac{b}{a}$  en fonction de  $X$ . Par quelques applications numériques de (26), pour des points de la région de cette inflexion, on s'assure que le maximum de  $\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$  est inférieur à  $-0,25$ . D'autre part, on peut calculer, toujours par (26), la valeur de  $-\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$  pour  $X = 1$  ; elle est inférieure à  $+0,40$ . Donc, le maximum de  $\frac{d^2Y}{dX^2}$  est inférieur à  $-0,25 \times 3 + 0,40 = -0,35$ .

Donc  $\frac{d^2Y}{dX^2}$  est bien partout négative le long de la courbe de la figure 3.

Des valeurs numériques données précédemment, on déduit, par interpolation, que  $\frac{dY}{dX}$  s'annule et que, par suite,  $Y$  est maximum, pour  $K^2 = 1,662$  ; ce maximum est égal à  $+1,1375$ .

Remarquons aussi que, pour

$$K^2 = 1 \quad \text{et} \quad K^2 = 2,32, \quad \text{on a} \quad Y = +1.$$

C'est pour  $K^2 = 2,32 \dots$ , qu'on a  $\frac{b}{a} = 0$  et pour  $K^2 > 2,32 \dots$ ,  $\frac{b}{a}$  est négatif, d'après la remarque faite sur le signe de  $\frac{d\frac{b}{a}}{dX}$ . D'après ce qui a été dit n° 5, les parties en trait continu des figures 2 et 3 correspondent seules à des figures d'équilibre.

### 8. Résolution de l'équation transcendante en $K^2$ .

Nous avons trouvé l'équation (19)

$$(19) \quad 2k^2R^3 = 1 - (1 - K^2) \frac{b}{a}$$

où  $\frac{b}{a}$  est, d'après (17), une fonction connue de  $K^2$ . Nous avons là une équation transcendante, d'où nous pourrions tirer  $K^2$ , puisque  $k^2$  et  $R$  sont des données du problème.

Menons, sur la figure 3, une parallèle à  $OX$ , d'ordonnée égale à  $+2k^2R^3$ .

L'abscisse d'un point d'intersection de cette parallèle et de cette courbe est une valeur de  $K^2$  répondant au problème. Il y a :

- Une solution si  $2k^2R^3 < 1$  ;
- Deux solutions si  $1 \leq 2k^2R^3 < 1,1375$  ;
- Une solution limite pour  $2k^2R^3 = 1,1375$ .

Il n'y a plus de solution pour  $2k^2R^3 > 1,1375$ .

Nous reviendrons plus loin sur cette discussion (n° 17). En traçant la courbe de la figure 3, à une échelle assez grande, on peut déterminer  $K^2$  graphiquement avec une erreur absolue d'un ou deux millièmes. Cette première valeur pourra suffire le plus souvent. Si l'on a besoin de plus de précision, on partira de cette valeur de  $K^2$ , pour résoudre (19), par approximations successives, à l'aide des tables de Legendre. De la valeur de  $K^2$ , on déduira facilement  $a$ , puisque  $K^2$  est égal à  $k^2a^3$  et que  $k^2$  est donné.

Si  $k^2R^3$  est très petit, cette méthode ne peut plus être pratiquement employée, car il faudrait calculer numériquement la fonction  $\frac{b}{a}$ , avec une approximation que les tables de Legendre ne permettent plus d'atteindre. Cette difficulté ne commencera à se faire sentir dans les calculs que pour  $k^2R^3 < 0,1$ . Or, nous donnerons au n° 16, des développements de  $K^2$  et de  $\frac{a^3}{R^3}$ , en séries entières en  $k^2R^3$ , qui résolvent alors la question.

**9. Tracé du méridien.** — Ayant calculé  $K^2$  et  $a$ , on pourra, à l'aide de (15), calculer l'ordonnée de tout point du méridien dont on se donne l'abscisse.

Au n° 4, nous avons indiqué, au sujet de (15), une méthode de calcul de  $\frac{F(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$  et de  $\frac{E(c, \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$ , pour  $\varphi$  petit, qu'il convient de justifier. C'est l'objet des n°s 10 et 11 ci-après.

#### 10. Développement de $F(c, \varphi)$ en série entière en $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .

Posons, comme au n° 4,  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u$ .

Alors

$$\sin \varphi = \frac{2u}{1+u^2}, \quad d\varphi = \frac{2du}{1+u^2},$$

$$\frac{F(c, \varphi)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-2cu^2+u^4}},$$

où

$$\alpha = 2c^2 - 1, \quad \text{avec} \quad c^2 \leq 1.$$

Posons :  $z = u^2$ .

On sait développer  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2az + z^2}}$ , en série entière en  $z$ . On trouve (1)

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2az + z^2}} = 1 + P_1 z + \dots + P_n z^n + \dots,$$

où  $P_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  polynome de Legendre relatif à  $\alpha$  :

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} [(\alpha^2 - 1)^n],$$

avec

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \alpha, \quad P_2 = \frac{3\alpha^2 - 1}{2}, \quad P_3 = \frac{5\alpha^3 - 3\alpha}{2}, \dots,$$

$$(n + 1)P_{n+1} = (2n + 1)\alpha P_n - nP_{n-1}.$$

En nous reportant à la théorie de la formule de Lagrange (2), nous voyons que, pour  $\alpha$  réel et  $|\alpha| \leq 1$ , ce qui est le cas ici, (27) est valable pour  $|z| < 1$ .

Ici,  $u$  et  $z$  sont réels et positifs.

Par suite, pour  $u < 1$ , on a :

$$(28) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2au^2 + u^4}} = 1 + P_1 u^2 + \dots + P_n u^{2n} + \dots$$

En intégrant (28), terme à terme, on obtient, pour  $u < 1$ ,

$$\frac{F(c, \varphi)}{2} = u + \frac{P_1}{3} u^3 + \dots + \frac{P_n}{2n + 1} u^{2n+1} + \dots,$$

et, par suite, dans le même intervalle,

$$(29) \quad \frac{F(c, \varphi)}{u} = 1 + \frac{P_1}{3} u^2 + \dots + \frac{P_n}{2n + 1} u^{2n} + \dots$$

Cherchons une limite de l'erreur qu'on commet en s'arrêtant au terme en  $u^{2n}$ , ce terme étant pris.

D'après une formule donnée par Jacobi,

$$P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi.$$

(1) GOURSAT. — Cours d'analyse mathématique, t. I, 1917, p. 465 et 466.

(2) GOURSAT. — Cours d'analyse mathématique, t. II, 1911, p. 121 à 124.

Ici,  $\alpha$  est réel et tel que  $|\alpha| \leq 1$ ; donc, ici,

$$|(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \cos \varphi)^n| = (\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi})^n \leq 1,$$

et, par suite, ici

$$|P_n| \leq 1.$$

Si  $\varepsilon_n$  est l'erreur qu'on commet, en s'arrêtant dans (29) au terme en  $u^{2n}$ , ce terme étant pris, on voit que

$$(30) \quad |\varepsilon_n| < \frac{u^{2n+2}}{2n+3} \frac{1}{1-u^2}.$$

En calculant les polynômes de Legendre, par la formule classique de récurrence et en se rappelant que  $\alpha = 2c^2 - 1$ , on trouve facilement

$$\frac{1}{2} \frac{F(c, \varphi)}{u} = 1 - \frac{u^2}{3} (1 - 2c^2) + \frac{u^4}{5} (1 - 6c^2 + 6c^4) + \dots,$$

formule indiquée au n° 4.

### 11. Développement de $E(c, \varphi)$ en série entière en $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .

$$E(c, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \frac{1 - c^2 \sin^2 \varphi}{2\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} \, d\varphi = \frac{1 - \frac{4c^2 u^2}{(1+u^2)^2}}{\sqrt{1 - 2cu^2 + u^4}} \, du.$$

Nous savons que, pour  $u < 1$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2cu^2 + u^4}} = 1 + P_1 u^2 + \dots + P_n u^{2n} + \dots$$

En outre, pour  $u < 1$ , la formule du binôme conduit facilement à

$$1 - \frac{4c^2 u^2}{(1+u^2)^2} = 1 - 4c^2 u^2 + 8c^2 u^4 - \dots + (-1)^{n+1} 4(n+1)c^2 u^{2(n+1)} + \dots$$

Posons

$$A_{n+1} = (-1)^{n+1} 4(n+1)c^2,$$

avec la convention  $A_0 = 1$ .

Les deux séries précédentes sont des séries entières en  $u$ , absolument convergentes pour  $u < 1$ . En les multipliant, on obtient une série absolument

convergente dans le même intervalle et l'on a, en groupant les termes de même degré en  $u$ ,

$$\frac{1 - \frac{4c^2 u^2}{(1+u^2)^2}}{\sqrt{1-2cu^2+u^4}} = 1 + u^2(P_1 - 4c^2) + u^4(P_2 - 4c^2P_1 + 8c^2) + \dots + B_n u^{2n} + \dots$$

où

$$B_n = \sum P_i A_j,$$

$i$  et  $j$  prenant toutes les valeurs entières, positives ou nulles, telles que

$$i + j = n.$$

Après intégration et division par  $u$ , nous avons

$$(31) \quad \frac{1}{2} \frac{E(c, \varphi)}{u} = 1 + \frac{u^2}{3}(P_1 - 4c^2) + \frac{u^4}{5}(P_2 - 4c^2P_1 + 8c^2) + \dots + B_n \frac{u^{2n}}{2n+1} + \dots$$

En calculant les polynômes successifs de Legendre et en se rappelant que  $\alpha = 2c^2 - 1$ , on trouve facilement

$$\frac{1}{2} \frac{E(c, \varphi)}{u} = 1 - \frac{u^2}{3}(1 + 2c^2) + \frac{u^4}{5}(1 + 6c^2 - 2c^4) \dots,$$

formule indiquée au n° 4.

### 12. Développement de l'ordonnée de la courbe en série entière en $\text{tg} \frac{\varphi}{2}$ .

Ce qui a été dit aux nos 4, 10 et 11 montre que l'emploi de (15) est général, grâce aux tables de Legendre, si  $\varphi$  n'est pas très petit et grâce à (29) et (31), si  $\varphi$  est petit.

Mais, dans ce dernier cas, on simplifiera beaucoup les calculs, en utilisant la série que nous allons donner.

Au n° 4, nous avons trouvé que

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2} \int_t^1 \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{\Psi(t)}} = \frac{1}{2K^2 \sqrt{\lambda}} \int_0^\varphi \frac{1 - K^2 \lambda \text{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{y}{a} &= \frac{1}{K^2 \sqrt{\lambda}} \int_0^u \frac{1 - K^2 \lambda u^2}{\sqrt{1 - 2\alpha u^2 + u^4}} du, \\ (32) \quad \frac{y}{a} &= \frac{1}{K \sqrt{1 + 2K^2}} \int_0^u \frac{1 - u^2 \sqrt{1 + 2K^2}}{\sqrt{1 - 2\alpha u^2 + u^4}} du, \end{aligned}$$

où  $K$  est supposé différent de zéro.

Tenant compte de (28), remarquant que la série du membre de droite de (28) est absolument convergente pour  $u < 1$ , on peut, après multiplication de cette série, terme à terme, par  $1 - u^2\sqrt{1 + 2K^2}$ , grouper les termes de même degré en  $u$  et l'on a :

$$\frac{1 - u^2\sqrt{1 + 2K^2}}{\sqrt{1 - 2\alpha u^2 + u^4}} = 1 + u^2(P_1 - \sqrt{1 + 2K^2}) + \dots + u^{2n}(P_n - P_{n-1}\sqrt{1 + 2K^2}) + \dots,$$

valable pour  $u < 1$  ; par intégration, il vient :

$$\frac{y}{a} = \frac{u}{K\sqrt{1 + 2K^2}} \left[ 1 + \frac{u^2}{3}(P_1 - \sqrt{1 + 2K^2}) + \dots + \frac{u^{2n}}{2n + 1}(P_n - P_{n-1}\sqrt{1 + 2K^2}) + \dots \right],$$

qui s'écrit encore :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2K^2}} \left[ 1 + \frac{u^2}{3}(P_1 - \sqrt{1 + 2K^2}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{u^{2n}}{2n + 1}(P_n - P_{n-1}\sqrt{1 + 2K^2}) + \dots \right], \end{array} \right.$$

valable pour  $u < 1$ .

Cette formule, qui n'a pas été établie pour  $K = 0$ , se réduit, dans ce cas, qui est celui de l'équilibre absolu, à  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , équation d'une circonférence ; (33) reste donc valable pour  $K = 0$ , puisqu'on sait que la figure d'équilibre absolu est la circonférence.

Pour toutes les figures d'équilibre relatif d'un seul tenant, à points sur l'axe de révolution, nous savons (n° 5), que

$$0 \leq K^2 < 2, 32;$$

d'où, entre ces limites de  $K$ ,

$$u \leq \frac{K}{\sqrt{1 + 2K^2}} < 1.$$

*Il s'ensuit que (33) est valable pour tous les points de toutes les figures d'équilibre ayant des points sur l'axe de rotation et de révolution.*

Cherchons une limite de l'erreur qu'on commet en s'arrêtant au terme en  $u^{2n}$  de (33), ce terme étant pris.

D'après la formule de Jacobi sur les polynômes de Legendre (n° 10), on a, ici,  $\alpha$  étant réel et  $|\alpha| \leq 1$ ,

$$P_n - P_{n-1}\sqrt{1 + 2K^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \varphi)^{n-1} (\alpha - \sqrt{1 + 2K^2} + i\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \varphi) d\varphi,$$

où  $i = \sqrt{-1}$ .

On vérifie que

$$\begin{aligned} | \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \varphi | &= \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} \leq 1 ; \\ | \alpha - \sqrt{1 + 2K^2} + i\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \varphi | &\leq \sqrt{(\alpha - \sqrt{1 + 2K^2})^2 + 1 - \alpha^2} ; \\ (\alpha - \sqrt{1 + 2K^2})^2 + 1 - \alpha^2 &= K^2. \end{aligned}$$

D'où

$$| P_n - P_{n-1} \sqrt{1 + 2K^2} | \leq K,$$

quel que soit  $n$ .

L'erreur commise sur  $\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ , en s'arrêtant au terme en  $u^{2n}$  de (33), ce terme étant pris, est, par suite, inférieure à

$$(34) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + 2K^2}} \frac{u^{2n+2}}{2n + 3} \frac{K}{1 - u^2}.$$

## CHAPITRE II

### ÉTUDE SPÉCIALE DU CAS DE K PETIT

**13. Cas où les termes de l'ordre de  $K^4$  sont négligeables devant 1.**  
On déduit facilement de (33) que le méridien est alors une *ellipse*.

**14. Développement de  $\frac{d^b}{dX}$  en série entière en  $K^2$**

Partant de (25) et posant

$$1 - t = v^2,$$

il vient :

$$(35) \quad \frac{d^b}{dX} = - \int_0^1 \frac{dv}{[1 + K^2(1 - v^2)(2 - K^2v^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Par des calculs fort longs que nous ne pouvons reproduire ici, on arrive à

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^b}{dX} = -1 + 2K^2 - \frac{21}{5}K^4 + \frac{60}{7}K^6 - \frac{365}{21}K^8 \\ + \frac{386}{11}K^{10} - \frac{30317}{3 \times 11 \times 13}K^{12} + \dots + M_p K^{2p} + \dots, \end{array} \right.$$

série alternée valable pour  $2K^2 < 1$ , avec

$$(37) \quad M_p = (-1)^{p+1} \sum 2^{n-m} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{(2n+3)(2n+5) \dots (2p+1)} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m+2) \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m},$$

où  $m$  et  $n$  prennent toutes les valeurs entières, positives où nulles, telles que  $m + n = p$ ,  $0 \leq m \leq n$ ,  $p \geq 1$  et où chacun des facteurs fractionnaires est à prendre égal à 1, pour  $m = 0$ .

On démontre que :

1° Quel que soit  $p$ , on a  $\frac{M_{p+1}}{M_p} > 2$ ;

2° Les quantités  $\frac{M_p}{2^p}$  forment une suite croissante convergente;

3°  $\left| \frac{M_{p+1}}{M_p} \right|$  tend vers 2 quand  $p$  tend vers l'infini.

Ces propriétés servent pour calculer certaines limites d'erreurs.

**15. Développement de  $\frac{b}{a}$  et de  $\mathcal{K}^2 = k^2 R^3$  en séries entières en  $K^2$ .**

Intégrant (36) par rapport à  $X$  et remarquant que  $\frac{b}{a} = 1$ , pour  $X = 0$ , il vient

$$(38) \quad \frac{b}{a} = 1 - K^2 + K^4 - \frac{7}{5}K^6 + \frac{15}{7}K^8 - \frac{73}{21}K^{10} + \frac{193}{33}K^{12} - \frac{4331}{429}K^{14} + \dots + \frac{M_{p-1}}{p}K^{2p} + \dots,$$

série alternée valable pour  $2K^2 < 1$ .

De (19) et de (38), on tire :

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{K}^2 &= K^2 - K^4 + \frac{6}{5}K^6 - \frac{62}{35}K^8 + \frac{59}{21}K^{10} - \frac{359}{77}K^{12} + \frac{1140}{143}K^{14} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{M_{p-2}}{p-1} - \frac{M_{p-1}}{p} \right) K^{2p} + \dots, \end{aligned} \right.$$

série alternée valable aussi pour  $2K^2 < 1$ .

**16. Développement de  $\frac{a^3}{R^3}$  en série entière en  $\mathcal{K}^2$ .**

L'inversion de la série (39) donne :

$$(40) \quad K^2 = \mathcal{K}^2 + \mathcal{K}^4 + \frac{4}{5}\mathcal{K}^6 + \frac{27}{35}\mathcal{K}^8 + \frac{493}{525}\mathcal{K}^{10} + \frac{7136}{5775}\mathcal{K}^{12} + \frac{1481176}{875875}\mathcal{K}^{14} + \dots$$

Nous avons fait l'étude détaillée de cette série; nous ne pouvons la reproduire ici, faute de place.

Divisant les deux membres de (40) par  $\mathcal{K}^2$ , il vient :

$$(41) \quad \frac{a^3}{R^3} = 1 + \mathcal{K}^2 + \frac{4}{5}\mathcal{K}^4 + \frac{27}{35}\mathcal{K}^6 + \frac{493}{525}\mathcal{K}^8 + \frac{7136}{5775}\mathcal{K}^{10} + \frac{1481176}{875875}\mathcal{K}^{12} + \dots$$



## CHAPITRE III

### DISCUSSION DU PROBLÈME

---

#### 17. Discussion du problème dans le cas d'une pression extérieure nulle

Dans la masse liquide en rotation, c'est le long de l'axe de révolution et de rotation qu'on a la plus faible pression,  $p_0$ , d'après (1).

Nous avons montré que, dans le cas général d'une pression extérieure uniforme,  $p_1$  quelconque, on a la relation (7) qui peut s'écrire

$$p_0 - p_1 = \frac{2f}{a}(1 - K^2).$$

Si  $p_1 = 0$ , il vient

$$p_0 = \frac{2f}{a}(1 - K^2).$$

Comme, par hypothèse, le liquide ne peut résister qu'à des efforts de compression, il faut que

$$p_0 \geq 0,$$

donc que

$$K \leq 1.$$

Ainsi, dans le cas d'une pression extérieure nulle,  $K$  reste compris entre zéro et 1.

Nous avons déjà vu (n° 5) que, pour  $0 \leq K \leq 1$ , la courbe méridienne est partout convexe.

En outre, compte tenu de (19), et puisque  $\frac{b}{a}$  est positif et que, pour  $K = 0$ ,  $\frac{b}{a} = 1$ , on a, dans ce même cas d'une pression extérieure nulle

$$0 \leq 2k^2R^3 \leq 1.$$

Nous avons déjà dit (n° 8) qu'il n'existe alors qu'une seule figure d'équilibre.

Le cas de  $K = 1$  est un cas extrême ; comme, pour  $K^2 = k^2 a^3 = 1$ , l'équation (19) donne

$$2k^2 R^3 = 1,$$

on voit que, dans ce cas extrême,

$$(42) \quad a = R\sqrt[3]{2}.$$

Tenant compte de la définition de  $k^2$  donnée au n° 2, on voit que la vitesse limite  $\omega_0$ , pour une pression extérieure nulle, est déterminée par

$$2\frac{\omega_0^3 \delta}{8f} R^3 = 1,$$

d'où

$$(43) \quad \omega_0^3 = 4\frac{f}{R^3 \delta}.$$

### 18. Discussion du problème dans le cas d'une pression extérieure non nulle.

Nous allons montrer que de nouvelles figures d'équilibre deviennent alors possibles.

La condition  $p_0 \geq 0$  s'écrit ici

$$(44) \quad p_1 + \frac{2f}{a}(1 - K^2) \geq 0$$

c'est-à-dire

$$K^2 \leq 1 + \frac{ap_1}{2f}.$$

Les figures d'équilibre possibles alors comprendront donc :

1° Les figures convexes en tout point, correspondant aux valeurs de  $K$  inférieurs ou égales à 1 ;

2° Les figures correspondant à des valeurs de  $K$  supérieurs à 1, par suite concaves aux pôles (fig. 1) et satisfaisant à l'inégalité précédente.

Compte tenu de (21), l'inégalité (44) peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{1}{\tau_0} \geq -\frac{p_1}{2f}.$$

Pour les figures concaves aux pôles,  $\tau_0$  est négatif et nous verrons plus tard (n° 31) que la valeur minimum de  $\frac{1}{\tau_0}$  est, pour ces figures, égale à  $\frac{-1}{1,27 \times R}$ , où  $R$

est toujours le rayon de la sphère ayant un volume égale à celui de la masse liquide. Si donc, on a

$$p_1 \geq \frac{2f}{1,27 \times R},$$

on n'aura pas de cas limite dû à la pression extérieure.

Dans la discussion qui va suivre, nous supposons que  $p_1$  est assez grand pour satisfaire à cette condition.

Considérons une masse liquide donnée, dans des états permanents d'équilibre relatif, correspondant à une vitesse de rotation d'abord nulle, puis à des vitesses de rotation de plus en plus élevées.

Dans la quantité  $k^2 = \frac{\omega^2 \delta}{8f}$ ,  $\omega$  sera la seule variable.

La quantité  $2k^2R^3$  prendra des valeurs successives croissantes, à partir de zéro et, tant que  $2k^2R^3$  sera inférieur à 1, la forme d'équilibre, d'abord sphérique, s'aplatira de plus en plus, en restant partout convexe ; nous avons, en effet, remarqué au n° 7, un peu après la formule (25), que la dérivée de  $\frac{b}{a}$  par rapport à  $K^2$  est toujours négative et, d'autre part, le long de l'arc OA de la courbe de la figure 3,  $K^2$  et  $k^2R^3$  croissent ensemble ; donc  $\frac{b}{a}$  décroît bien quand  $2k^2R^3$  croît de zéro à 1.

Lorsque  $2k^2R^3$  dépasse 1,  $K^2$  prend une valeur supérieure à 1, comme le montre la figure 3 et nous savons qu'alors, la surface de la masse liquide devient concave aux pôles. Lorsque  $2k^2R^3$  atteint la valeur 1,1375, pour  $K^2 = 1,662$ , on est arrivé au point limite B (fig. 3). Si l'on parcourt ensuite l'arc BC, en faisant décroître  $2k^2R^3$  et par suite  $\omega$ , on a une nouvelle suite de figures d'équilibre ; et, nous montrerons plus tard (n° 38) que ces dernières figures sont instables. Enfin, les deux pôles de ces figures se touchent pour une valeur de  $K^2$  voisine de 2,32.

Calculons la vitesse limite  $\omega_1$ , correspondant à la valeur 1,1375 de  $2k^2R^3$  ; nous avons :

$$2 \frac{\omega_1^2 \delta}{8f} R^3 = 1,1375 ;$$

d'où

$$(45) \quad \omega_1^2 = 4,55 \frac{f}{R^3 \delta}.$$

*Le carré de la vitesse limite est donc proportionnel à la tension superficielle et inversement proportionnel à la masse du liquide en rotation.*

**19. Remarque relative aux figures d'équilibre correspondant à une même valeur de  $K^2 = k^2R^3$ .**

Considérons différentes masses liquides de révolution, de natures, de volumes et de vitesses de rotation quelconques, telles que, pour toutes, l'expression  $k^2R^3$  ait la même valeur.

Nous avons vu au n° 8 qu'à une valeur de  $k^2R^3$  correspond une valeur ou correspondent deux valeurs de  $X = K^2$ . En outre, toutes les figures d'équilibre relatives à une même valeur de  $K^2$  sont semblables : en effet, dans toutes ces figures, à une même valeur de  $t = \left(\frac{x}{a}\right)^2$ , correspond, d'après (10), une même valeur de  $\frac{y}{a}$ , les notations étant celles des nos 2 et 3 ; si donc, toutes ces figures sont placées de manière que les axes de révolution et les centres soient confondus, elles sont toutes homothétiques à l'une quelconque d'entre elles, par rapport à leur centre commun.

On en déduit immédiatement, en se reportant aux nos 8 et 18, que, si pour différentes masses liquides, animées de différentes vitesses,  $k^2R^3$  a la même valeur, toutes ces figures d'équilibre sont semblables, si  $2k^2R^3 < 1$  et se décomposent en deux groupes de figures semblables, si  $2k^2R^3 \geq 1$ .

**20. Remarque relative aux figures correspondant à une même valeur de  $a$ .**

Il s'agit donc des figures ayant un même rayon équatorial.

Dans (10), supposons  $a$  donné et faisons varier  $X = K^2$ , de 0 à 2,32.

En dérivant (10), sous le signe d'intégration, par rapport à  $X$ , on voit, d'après le raisonnement fait au n° 7, que

$$\frac{d\frac{y}{a}}{dX} = \frac{1}{2} \int_t^1 \frac{(t-1)dt}{[1 - t(1 - K^2 + K^2t)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

quantité négative puisque l'élément différentiel est toujours négatif. Ainsi donc, pour  $a$  et  $t$  donnés, la dérivée de  $y$  par rapport à  $X$  est toujours négative ; ce qui prouve que  $y$  décroît quand  $X$  croît.

Considérons maintenant deux courbes de même rayon équatorial,  $a$ , et correspondant respectivement aux valeurs  $X_1$  et  $X_2$  de  $X$ , avec  $X_2 > X_1$ . On aura, pour la différence  $y_2 - y_1$  entre deux ordonnées de ces courbes, correspondant à une même abscisse  $x = a\sqrt{t}$ ,

$$\frac{y_2 - y_1}{a} = \frac{1}{2} \int_{X_1}^{X_2} dX \int_t^1 \frac{(t-1)dt}{[1 - t(1 - X + Xt)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour  $X_1$  et  $X_2$  donnés, on voit qu'à chaque valeur de  $X$  correspond une intégrale en  $t$ , toujours négative et d'autant plus petite, en valeur absolue, que  $t$  est plus voisin de 1.

Donc,  $y_2 - y_1$  est toujours négatif et décroît constamment, en valeur absolue, quand  $t$  croît de zéro à 1.

Par la remarque du n° 19 et par ce qui précède, on arrive à la conception suivante de la résolution du problème. Supposons construites, une fois pour toutes, dans une certaine circonférence, toutes les courbes ayant pour rayon équatorial le rayon de la circonférence, pour centre celui de la circonférence, pour axes de symétrie deux diamètres rectangulaires de la circonférence et correspondant à des valeurs de  $X$  variant, par exemple, de 0,1 en 0,1, de zéro à 2,32 ; chacune de ces courbes contient en entier la suivante, d'après ce que nous venons de dire. Avec la courbe de la figure 3 ou avec l'équation transcendante (19), on déterminera  $X$ , pour une masse de volume, de nature et de vitesse de rotation donnés. Il n'y aura plus qu'à choisir parmi les courbes types, ou à déterminer par interpolation, celle qui correspond à la valeur  $X$  trouvée ou les deux qui correspondent aux deux valeurs  $X$  trouvées. Puis, on agrandira la courbe ou chacune des deux courbes, homothétiquement à elle-même par rapport à son centre, et dans un rapport convenable, facile à calculer, pour avoir le méridien cherché.

#### 21. Remarque sur l'intersection de deux méridiens convexes.

Considérons deux quarts de méridien, partout convexes, de mêmes axes de symétrie, correspondant aux combinaisons suivantes des paramètres  $a$  et  $X$  :

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & a_1, \quad X_1, \\ \text{(II)} & a_2, \quad X_2, \end{array}$$

avec  $a_2 = (1 + \alpha)a_1$ ,  $\alpha$  étant positif.

Considérons la courbe

$$\text{(III)} \quad \text{de paramètres } a_2, \quad X_1.$$

D'après le n° 19, elle est homothétique à (I), par rapport au centre commun et (I) est tout entière dans (III).

Pour que (II) soit aussi intérieure à (III), il faut, d'après le n° 20, que  $X_2 > X_1$ .

Supposons qu'il en soit ainsi et qu'en outre, les quarts considérés des courbes (I) et (II) se coupent en un point P.

Je dis que ces quarts des courbes (I) et (II) ne peuvent pas avoir d'autre point d'intersection.

En effet, soit  $m$  la différence entre l'ordonnée de (III) et celle de (I), correspondant à une même abscisse,  $x(1 + \alpha)$ . Si  $y(x)$  est l'ordonnée de (I) correspondant à l'abscisse  $x$ , on voit facilement, sur une figure, que

$$m = (1 + \alpha)y(x) - y(x + \alpha x)$$

$y(x + \alpha x)$  étant la valeur de la fonction  $y(x)$ , quand on y remplace  $x$  par  $x + \alpha x$ .

On a

$$\frac{dm}{dx} = (1 + \alpha)[y'(x) - y'(x + \alpha x)]$$

où  $y'(x + \alpha x)$  est la dérivée de  $y(x)$  par rapport à  $x$ , où l'on a remplacé  $x$  par  $x + \alpha x$ . Sur nos méridiens convexes,  $y'(x)$  décroît quand  $x$  croît de zéro à  $a$ .

Donc, toujours,  $\frac{dm}{dx} > 0$ . Par suite,  $m$ , qui est d'ailleurs toujours positif ici, décroît quand  $x$  décroît de  $a$  à zéro. Mais, d'après le n° 20, la quantité  $n$ , positive, dont l'ordonnée de (III) surpasse celle de (II), de même abscisse, croît constamment quand  $x$  décroît de  $a$  à zéro. En dehors du point P, où  $m = n$ , il ne pourra donc pas y avoir de point où cette égalité se reproduira.

Ainsi donc, le quart du méridien (II), extérieur au quart du méridien (I), auprès de l'équateur, le traverse en un point unique et reste ensuite à l'intérieur du quart du méridien (I), jusqu'à l'axe commun de révolution.

La démonstration précédente reste valable quand (II) devient concave aux pôles, (I) restant partout convexe.

Nous ne parlerons pas du cas de deux méridiens concaves aux pôles, parce que nous n'aurons à utiliser, dans la suite, que ce qui précède.

## CHAPITRE IV

### PROPRIÉTÉS DIVERSES DES FIGURES D'ÉQUILIBRE

---

#### 22. Courbure, développée et rectification du méridien.

Nous renverrons, sur ces points, à notre mémoire inséré dans les Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 1926, p. 129 à 176.

Nous rappellerons seulement (p. 156 de notre mémoire précité) que, si  $\tau$  est le rayon de courbure du méridien, en un point distant de  $x$  de l'axe de révolution et  $\tau_0$ , le rayon de courbure du méridien aux pôles, on a :

$$(46) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + 3k^2x^2,$$

où  $k^2$  est toujours égal à  $\frac{\omega^2\delta}{8f}$ .

#### 23. Aire d'une section méridienne.

Nous avons calculé dans notre mémoire précité, à la page 170, l'aire du quart complet de la section méridienne, à l'aide des deux premières intégrales F et E de Legendre.

Ajoutons qu'à l'aide de ces seules intégrales F et E et de fonctions élémentaires, on peut exprimer l'aire d'une partie de section méridienne, comprise entre l'axe équatorial de symétrie et une parallèle à cet axe.

On peut aussi développer  $\frac{A}{a^2}$ , où A est l'aire du quart complet de la section méridienne et  $a$  le rayon équatorial, en série entière en  $X = K^2$ , pour  $2K^2 < 1$ .

On procède à peu près comme au n° 7, en calculant d'abord  $\frac{d\left(\frac{A}{a^2}\right)}{dX}$ , par une dérivation, sous le signe d'intégration, par rapport à X, de

$$(47) \quad \frac{A}{a^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{t(1-K^2+K^2t)} dt}{\sqrt{1-t(1-K^2+K^2t)^2}}.$$

On trouve

$$(48) \quad \frac{d\left(\frac{A}{a^2}\right)}{dX} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(t-1)\sqrt{t} dt}{[1-t(1-K^2+K^2t)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

On arrive aux séries alternées

$$(49) \quad \frac{d\left(\frac{A}{a^2}\right)}{dX} = \frac{\pi}{4} \left( -1 + \frac{9}{4} K^2 - \frac{39}{8} K^4 + \frac{325}{32} K^6 - \dots + N_p K^{2p} + \dots \right)$$

et

$$(50) \quad \frac{A}{a^2} = \frac{\pi}{4} \left( 1 - K^2 + \frac{9}{8} K^4 - \frac{13}{8} K^6 + \frac{325}{128} K^8 - \dots + \frac{N_{p-1}}{p} K^{2p} + \dots \right),$$

valables pour  $2K^2 < 1$  et dans lesquelles

$$(51) \quad N_p = \sum \frac{(-1)^{p+1} 3 \cdot 5 \dots (2n+1) n(n-1) \dots (n-m+1)}{2^m 1 \cdot 2 \dots n 1 \cdot 2 \dots m} J_{mn}$$

où

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{mn} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \zeta \cdot \cos^{n+2} \zeta \cdot d\zeta \\ &= \frac{(2n+1)(2n-1)\dots 1}{(2m+1)(2m+3)\dots(2m+2n+1)} \frac{\pi 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2n+2)}. \end{aligned} \right.$$

m et n prennent toutes les valeurs entières positives ou nulles, telles que

$$m+n=p, \quad m \leq n, \quad p \geq 1;$$

$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}$  est à prendre égal à 1 pour  $m=0$ .

#### 24. Sur quelques propriétés géométriques des figures d'équilibre

Appelons  $\zeta$  un angle analogue à l'anomalie excentrique de l'ellipse :

$$\cos \zeta = \frac{x}{a}.$$

Nous l'avons utilisé, pour certains développements, dans une note des Comptes rendus de l'Académie des Sciences, à laquelle nous renvoyons <sup>(1)</sup>.

Dans une autre note <sup>(2)</sup>, nous avons indiqué des propriétés intéressantes de la courbure des surfaces d'équilibre, de leurs lignes géodésiques et de leurs lignes asymptotiques.

Nous renvoyons aussi, pour les lignes géodésiques, à notre mémoire précité des Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure (pages 165 à 169).

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 184, 1927, p. 1043.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 182, 1926, p. 1601 à 1603.

## CHAPITRE V

### CALCUL DE L'ÉNERGIE TOTALE DE LA MASSE LIQUIDE EN ROTATION

#### 25. Aire de la surface libre de la masse liquide.

Le calcul de cette aire a été fait dans notre mémoire précité (p. 163).

Avec les notations des nos 3 et 4, on a pour cette aire  $\Omega$  :

$$(53) \quad \Omega = \frac{2\pi a^2}{K\sqrt{1+2K^2}} F(c, \varphi_0).$$

On peut développer  $\frac{\Omega}{4\pi a^2}$  en série entière en  $K^2$ .

D'après la formule (38) du mémoire précité,

$$(54) \quad \frac{\Omega}{4\pi a^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t(1-K^2+K^2t)^2}}.$$

En posant, comme au n° 14,  $1-t = v^2$ , on trouve que

$$(55) \quad \frac{\Omega}{4\pi a^2} = \int_0^1 \frac{dv}{[1+K^2(1-v^2)(2-K^2v^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

et l'on arrive à la série

$$(56) \quad \frac{\Omega}{4\pi a^2} = 1 - \frac{2}{3} K^2 + \frac{13}{15} K^4 - \dots,$$

valable pour  $2K^2 < 1$  et dans laquelle le coefficient de  $K^{2p}$  s'obtient par une formule analogue à (37).

Mais, de (41) on tire

$$(57) \quad a^2 = R^2 \left( 1 + \frac{2}{3} K^2 + \frac{19}{45} K^4 + \dots \right).$$

Partant dans (56), cette valeur (57) de  $a^2$  et la valeur (40) de  $K^2$ , on trouve

$$(58) \quad \Omega = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{8}{45} K^2 \dots\right).$$

On remarque l'absence d'un terme en  $K^2$ .

### 26. Moment d'inertie de la masse liquide par rapport à son axe.

Le calcul de ce moment d'inertie,  $J$ , a été fait dans notre mémoire précité (p. 171 à 173).

Nous avons trouvé

$$(59) \quad J = \frac{4f}{5\omega^2} \left(\Omega - \frac{3V}{\tau_0}\right)$$

où  $V$  est le volume connu de la masse liquide.

### 27. Développement de $J$ en séries entières en $K^2$ et en $K^4$ .

D'après la formule (51) de notre mémoire précité,

$$(60) \quad \frac{J}{\pi a^3 \delta} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2(1 - K^2 + K^2 t) dt}{\sqrt{1 - t(1 - K^2 + K^2 t)^2}}.$$

En raisonnant comme au n° 7, on voit que

$$(61) \quad \frac{d\left(\frac{J}{\pi a^3 \delta}\right)}{dX} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(t-1)t^2 dt}{[1 - t(1 - K^2 + K^2 t)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

où  $X = K^2$ .

Si l'on pose  $1 - t = v^2$ , on parvient à développer l'intégrale ci-dessus en série entière en  $K^2$ ; puis on arrive à :

$$(62) \quad J = \frac{8}{15} \pi a^3 \delta (1 - K^2 + \frac{9}{7} K^4 - \dots + \frac{15}{8} \frac{P_p}{p+1} K^{2p+2} + \dots),$$

avec

$$(63) \quad P_p = \sum \frac{(-1)^{p+1} 3 \cdot 5 \dots (2n+1) n(n-1) \dots (n-m+1)}{2^m 1 \cdot 2 \dots n 1 \cdot 2 \dots m} I_{mn},$$

où  $m$  et  $n$  prennent toutes les valeurs entières, positives ou nulles, telles que

$$m + n = p, \quad m \leq n, \quad p \geq 1.$$

où  $\frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}$  est à prendre égal à 1 pour  $m = 0$  et où

$$(64) \quad I_{mn} = \frac{2n+4}{2m+1} \cdot \frac{2n+2}{2m+3} \cdot \frac{2n}{2m+5} \dots \frac{2}{2m+2n+3} \frac{1}{2m+2n+5}.$$

De (40), (41), (57) et (62), on tire :

$$(65) \quad J = \frac{8}{15} \pi R^3 \delta (1 + \frac{2}{3} \mathcal{K}^2 + \frac{32}{63} \mathcal{K}^4 + \dots).$$

**28. Force vive de la masse liquide en rotation.**

Si  $m$  et  $v$  sont la masse et la vitesse d'une particule quelconque, la force vive de la masse liquide est

$$\sum mv^2 = J\omega^2;$$

d'où, d'après (59)

$$(66) \quad \sum mv^2 = \frac{4f}{5} \left( \Omega - \frac{3V}{\tau_0} \right).$$

Pour  $K = 1$ ,  $\tau_0$  est infini et

$$(67) \quad \sum mv^2 = \frac{4f\Omega}{5}.$$

**29. Énergie totale de <sup>la</sup> masse liquide en rotation.**

La masse liquide est, pour le moment, supposée sans pesanteur, comme dans tout ce qui précède.

Il n'y a donc pas d'énergie potentielle de pesanteur.

L'énergie totale,  $\varepsilon$ , à considérer comprendra donc seulement l'énergie actuelle ou cinétique  $\frac{1}{2} \sum mv^2$  et l'énergie potentielle de la surface libre, qui est égale à  $f\Omega$  (voir BOUSSINESQ, *Cours de Physique mathématique*, t. III, 1924, p. 188 à 196).

Tenant compte de (66), il vient

$$(68) \quad \varepsilon = \frac{f}{5} \left( 7\Omega - \frac{6V}{\tau_0} \right).$$

Pour  $K = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{7f\Omega}{5}$ .

## CHAPITRE VI

### VARIATION DES DIVERSES QUANTITÉS RELATIVES A UNE MÊME MASSE LIQUIDE ET STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE

30. Courbe de variation du rayon équatorial  $a$  en fonction de la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation.

Soient, à nouveau,  $b$ , le demi-axe polaire ;  $\rho$ , la densité ;  $f$ , la valeur de la tension superficielle ;  $\frac{4}{3}\pi R^3$ , le volume de la masse liquide. Rappelons que nous avons posé (n° 2)

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{8f}, \quad K^2 = k^2 a^3.$$

Nous avons montré au n° 4 que  $\frac{b}{a}$  est une fonction de la seule variable  $K^2$ , définie par (17). Posons

$$\frac{b}{a} = \theta(K^2).$$

La formule (19) s'écrit

$$2k^2 R^3 = 1 - (1 - K^2) \cdot \theta(K^2).$$

Elle définit  $k$  en fonction de  $K$  :

$$(69) \quad k = \sqrt{\frac{1 - (1 - K^2) \cdot \theta(K^2)}{2R^3}}.$$

Donc

$$(70) \quad a = R \sqrt[3]{\frac{2K^2}{1 - (1 - K^2) \cdot \theta(K^2)}}.$$

Ainsi  $k$  et  $a$  sont définis en fonction d'une même variable  $K^2$ , qu'on fera croître de zéro à 2,32 (voir fin du n° 5). On pourra donc tracer la courbe de variation de  $a$  en fonction de  $k$ .

Au n° 7, nous avons étudié la courbe :

$$X = K^2, \quad Y = 1 - (1 - K^2) \cdot \theta(K^2).$$

On voit que

$$(71) \quad k^2 = \frac{Y}{2R^3},$$

$$(72) \quad a^3 = R^3 \frac{2X}{Y}.$$

On déduira donc facilement les coordonnées  $k$  et  $a$ , de  $X$  et  $Y$ .

Mais, pour que la courbe  $(a, k)$  soit la même pour toutes les masses liquides et représente directement la variation de  $a$ , en fonction de  $\omega$ , nous ferons correspondre à chaque masse liquide, un système d'unités tel que

$$R = 1, \quad \delta = 1, \quad f = \frac{1}{8}.$$

Alors  $k^2$  et  $\omega^2$  sont exprimés par le même nombre et nous avons, pour (71) et (72)

$$\omega^2 = \frac{Y}{2}, \quad a^3 = \frac{2X}{Y}.$$

On en tire

$$2\omega \frac{d\omega}{dX} = \frac{1}{2} \frac{dY}{dX},$$

$$3a^2 \frac{da}{dX} = 2 \frac{Y - X \frac{dY}{dX}}{Y^2},$$

et

$$(73) \quad \omega = \sqrt{\frac{Y}{2}},$$

$$(74) \quad a = \sqrt[3]{\frac{2X}{Y}}.$$

On voit que  $\frac{d\omega}{dX}$  a le signe de  $\frac{dY}{dX}$ .

Pour  $\frac{da}{dX}$ , si l'on a  $0 < X \leq 2,32$ , on a  $Y > 0$  et  $\frac{dY}{dX}$  décroissant continuellement pour  $X$  croissant (n° 7), on voit facilement que

$$Y > \frac{dY}{dX} X.$$

Donc  $\frac{da}{dX} > 0$ , pour  $X > 0$ .

En outre, pour  $X$  petit, la série (41) qui s'écrit ici

$$a^3 = 1 + \omega^2 + \frac{4}{5}\omega^4 + \dots$$

et qui donne

$$(75) \quad a = 1 + \frac{1}{3}\omega^2 + \dots$$

montre que

$$(76) \quad \frac{da}{d\omega} = \frac{2}{3}\omega + \dots$$

De la valeur précédemment donnée de  $\frac{d\omega}{Xd}$  et vu que  $\frac{dY}{dX} \rightarrow 2$ , quand  $X \rightarrow 0$  (n° 7), on voit que, pour  $X = 0$ ,

$$\frac{da}{dX} = +\frac{1}{3}.$$

Donc  $\frac{da}{dX}$  est toujours positive.

On déduit facilement de tout ceci que le signe de  $\frac{da}{d\omega}$  est toujours celui de  $\frac{dY}{dX}$ .

Des résultats donnés dans le tableau du n° 7, on tire ceux qui figurent dans les trois premières colonnes du tableau ci-dessous; nous y avons ajouté les valeurs de  $\frac{b}{a}$ ,  $\tau_0$ ,  $\Omega$ ,  $J$ ,  $\varepsilon$ , qu'on tire des formules (17), (21), (53), (59) et (68).

$X = K^2$	$\omega$ (en radians)	$a$	$\frac{b}{a}$	$b$	$\tau_0$	$\frac{\Omega}{2\pi}$	$\frac{J}{2\pi}$	$\frac{\varepsilon}{2\pi}$
0	0	1	1	1	1	2	0,267	0,25
1	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$	1,260	0,431	0,543	$\left\{ \begin{array}{l} + \infty \\ + \infty \end{array} \right.$	2,23	0,44	0,39
1,5	0,751	1,385	0,259	0,359	- 2,770	2,50	0,57	0,47
1,662 (figure limite)	0,754	1,430	0,208	0,297	- 2,160	2,62	0,62	0,50
$\frac{5}{3}$	0,754	1,431	0,206	0,295	- 2,146			
2	0,743	1,536	0,103	0,158	- 1,536	2,95	0,77	0,58
2,32	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$	1,67	0	0	- 1,27	3,4	1,0	0,67

Revenons au rayon équatorial  $a$ ; pour  $\omega = 0$ , on a, d'après (76),  $\frac{da}{d\omega} = 0$ ,

et la tangente à la courbe  $(\omega, a)$  est, en ce point, parallèle à l'axe des  $\omega$ . On verrait facilement qu'en ce même point, le rayon de courbure de cette courbe est égal à  $\frac{3}{2}$ .

Pour  $\omega = 0,754$ ,

$$\frac{dY}{dX} = 0, \quad \frac{d\omega}{dX} = 0,$$

$\frac{da}{dX}$  est fini et, par suite,  $\frac{da}{d\omega}$  est infini.

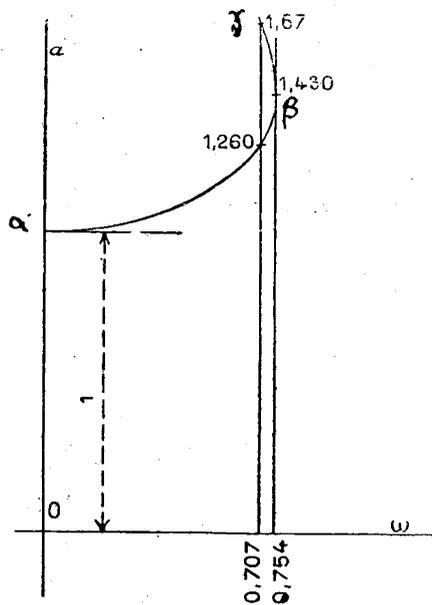


Fig. 4.

La figure 4 représente la courbe de variation de  $a$ , en fonction de  $\omega$ , pour une même masse liquide.

### 31. Variation de $b$ et de $\tau_0$ , en fonction de $\omega$ .

Connaissant  $\omega$ , en fonction de  $X$  et, d'autre part,  $\frac{b}{a}$  et  $a$ , et par suite  $b$ , en fonction de  $X$ , on pourra tracer la courbe de  $b$  en fonction de  $\omega$ .

Démontrons d'abord que  $\frac{db}{dX}$  est toujours négatif.

D'abord, d'après le n° 21, pour  $0 \leq X \leq 1$ , on a  $\frac{db}{da} < 0$  et, comme  $\frac{da}{dX}$  est toujours positif (n° 30),  $\frac{db}{dX}$  est toujours négatif dans cet intervalle.

Supposons maintenant  $X > 1$ ; on trouve facilement que

$$\frac{1}{a} \frac{db}{dX} = \frac{d \frac{b}{a}}{dX} + \frac{1}{3} \frac{b}{a} \frac{1}{X} + \frac{1}{3} \frac{b}{a} \left( -\frac{1}{Y} \frac{dY}{dX} \right);$$

$\frac{b}{a}$  et  $\frac{1}{X}$  sont des fonctions décroissantes de  $X$ ; et  $-\frac{1}{Y} \frac{dY}{dX}$  est une fonction croissante de la même variable, car sa dérivée par rapport à  $X$  est égale à

$$\frac{1}{Y^2} \left[ -\frac{d^2Y}{dX^2} Y + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right]$$

qui est toujours positive, puisque (n° 7),  $\frac{d^2Y}{dX^2}$  est toujours négative.

On sait (n° 7) calculer  $\frac{d \frac{b}{a}}{dX}$  et l'on peut s'assurer que toujours  $\frac{d \frac{b}{a}}{dX} < -0,25$ ; en considérant successivement deux intervalles, de 1 à 1,662 et de 1,662 à 2,32, on trouvera, pour chacun d'eux, une borne supérieure négative de  $\frac{1}{a} \frac{db}{dX}$ .  
Donc  $\frac{db}{dX}$  est toujours négatif.

Il en résulte, comme  $\frac{d\omega}{dX}$  a toujours le signe de  $\frac{dY}{dX}$  (n° 30), que  $\frac{db}{d\omega}$  a toujours un signe opposé à celui de  $\frac{dY}{dX}$ . On voit tout de suite l'allure de la courbe de  $b$  en fonction de  $\omega$ .

Considérons maintenant la variation du rayon de courbure  $\tau_0$  du méridien aux pôles, en fonction de  $\omega$ . On tracera aisément cette courbe, puisque  $\tau_0$  et  $\omega$  sont des fonctions connues de  $X$ . D'après (21) et (74),

$$\tau_0^3 = \frac{2X}{Y(1-X)^3}.$$

Pour  $X < 1$ , cette formule, où  $\frac{Y}{X}$  et  $1 - X$  décroissent quand  $X$  croît, montre que  $\tau_0$  croît avec  $X$ .

Pour  $X > 1$ , on peut montrer facilement que

$$\frac{d(\tau_0^3)}{dX} = \frac{2Y + 2X(X-1) \frac{dY}{dX} + 4XY}{Y^2(1-X)^4}$$

est toujours largement positif. Donc, sauf une discontinuité pour  $X = 1$ , pour laquelle  $\tau_0$  passe de  $+\infty$  à  $-\infty$ ,  $\tau_0$  croît constamment avec  $X$ . Ceci et la valeur  $-1,27$  de  $\tau_0$ , pour  $X = 2,32$  (voir les résultats numériques du n° 30) justifient une indication donnée au n° 18, un peu après (44). Comme  $\frac{d\omega}{dX}$  a le signe de  $\frac{dY}{dX}$ , on voit que  $\frac{d\tau_0}{d\omega}$  a aussi constamment le signe de  $\frac{dY}{dX}$ . On en déduirait immédiatement l'allure de la courbe de  $\tau_0$  en fonction de  $\omega$ .

**32 Démonstration de la formule  $\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2f}{\omega^2}$ .**

Reprenons, pour ce numéro, un système quelconque d'unités.

Soient  $dJ$  et  $d\Omega$ , les différentielles de  $J$  et de  $\Omega$ , pour une même masse liquide, lorsqu'on passe d'un état d'équilibre relatif correspondant à la vitesse  $\omega$ , à un état d'équilibre relatif infiniment voisin, correspondant à la vitesse  $\omega + d\omega$ . Nous allons démontrer, par des considérations générales, que

$$(77) \quad \frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2f}{\omega^2}.$$

Considérons notre masse liquide, tournant avec une vitesse angulaire uniforme  $\omega$ , et un système d'axes rectangulaires comprenant l'axe de révolution et de rotation de la masse liquide et tournant aussi, autour de ce dernier, avec la vitesse  $\omega$ .

On sait que l'on obtient les équations de l'équilibre relatif d'un point, en considérant les axes mobiles comme fixes et en écrivant qu'il y a équilibre entre les forces directement appliquées et la force centrifuge.

La masse peut donc être regardée comme en équilibre absolu sous l'action des forces suivantes, si on la suppose débarrassée de sa couche superficielle de masse négligeable :

- 1° la force centrifuge appliquée à chaque particule ;
- 2° la pression due à la couche superficielle ;
- 3° la pression extérieure que transmet la couche superficielle et que nous supposons toujours uniforme.

Le liquide, qui est parfait ou visqueux, peut être supposé parfait pour notre démonstration ; car s'il est visqueux et en équilibre, il sera encore en équilibre si sa viscosité disparaît, puisque les équations de l'hydrostatique sont les mêmes pour les liquides visqueux ou non. Par suite, la démonstration peut être faite en regardant les liaisons comme exprimées par ce fait que le

liquide est homogène, incompressible et sans frottement. On sait que, pour un déplacement virtuel *quelconque*, le travail de la force centrifuge est égal à

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot \delta J$$

où le signe  $\delta$  indique une variation.

Celui de la pression due à la couche superficielle est égal à

$$- f \cdot \delta \Omega$$

(BOUSSINESQ, *Cours de physique mathématique*, t. III, 1921, p. 192 à 194).

Celui de la pression extérieure uniforme  $p_1$  est

$$- p_1 \cdot \delta V,$$

$\delta V$  étant la variation du volume.

Pour un déplacement virtuel *respectant les liaisons*,  $\delta V = 0$ .

Parmi les déplacements virtuels respectant les liaisons, choisissons celui qui déforme la masse de manière que sa surface libre devienne celle qui correspond à la vitesse  $\omega + d\omega$ . Nous reportant à la définition de  $dJ$  et de  $d\Omega$ , indiquée au début de ce numéro, nous voyons que, pour ce déplacement virtuel, le travail des forces directement appliquées est égal à

$$\frac{\omega^2}{2} dJ - f \cdot d\Omega.$$

La condition d'équilibre est, d'après le principe du travail virtuel, que le travail des forces directement appliquées soit nul, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Donc

$$\frac{\omega^2}{2} \cdot dJ - f \cdot d\Omega = 0$$

et la relation (77) est démontrée.

Cette démonstration reste naturellement valable pour des masses annulaires.

**33. Vérification de la relation  $\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2f}{\omega^2}$  sur les formules particulières à notre problème actuel.**

Nous avons procédé à cette vérification ; elle exige des calculs pénibles que nous ne reproduirons pas.

**34. Signe de  $\frac{d\Omega}{dX}$ .**

Nous allons démontrer qu'on a toujours

$$\frac{d\Omega}{dX} > 0.$$

Pour  $0 \leq X \leq 1$ , la remarque faite au n° 21, sur l'intersection de deux méridiens dont l'un au moins est partout convexe, montre que deux quarts de méridiens correspondant aux rayons équatoriaux  $a$  et  $a + da$  (avec  $da > 0$ ) se coupent en un seul point et puisque, ici, le volume total est conservé,  $dJ$  est forcément positif, puisqu'un volume de liquide, de l'ordre de  $da$ , passe de la région de l'axe à celle de l'équateur. Donc, dans l'intervalle  $0 \leq X \leq 1$ , il est démontré que  $\frac{dJ}{da} > 0$ ; d'où, puisque  $\frac{da}{dX}$  est toujours positif (n° 30) et d'après (77), il est bien établi que  $\frac{d\Omega}{dX}$  est toujours positif, dans cet intervalle, sauf pour  $\omega = 0$ , où il est nul, comme le montre (77).

Pour  $X \geq 1$ , il faut recourir au calcul. On parvient à la formule :

$$(78) \quad \frac{1}{2\pi a^2} \frac{d\Omega}{dX} = \frac{d\left(\frac{\Omega}{2\pi a^2}\right)}{dX} + \frac{2}{3} \frac{\Omega}{2\pi a^2} \frac{1}{X} + \frac{2}{3} \frac{\Omega}{2\pi a^2} \left(-\frac{1}{Y} \frac{dY}{dX}\right).$$

On démontre par dérivations de (54) sous le signe d'intégration, que  $\frac{d^2\left(\frac{\Omega}{2\pi a^2}\right)}{dX^2}$  est toujours *positive*. Donc  $\frac{d\left(\frac{\Omega}{2\pi a^2}\right)}{dX}$  est une fonction de  $X$  toujours *croissante*,  $\frac{1}{X}$  est toujours *décroissante*, et l'on a vu (n° 31) que  $-\frac{1}{Y} \frac{dY}{dX}$  est toujours *croissante*.

On peut, à l'aide de (54) tracer la courbe de  $\frac{\Omega}{2\pi a^2}$  en fonction de  $X$ , qui présente un minimum unique, puisque la dérivée seconde est toujours positive.

Dès que  $\frac{d\left(\frac{\Omega}{2\pi a^2}\right)}{dX}$  est supérieure à zéro, on a  $\frac{d\Omega}{dX} > 0$ , puisque (n° 30)  $\frac{da}{dX}$  est toujours positif. Il restera à partager l'intervalle entre 1 et la valeur de  $X$  rendant minimum  $\frac{\Omega}{2\pi a^2}$ , en 3 ou 4 intervalles partiels, dans chacun desquels on saura déterminer une borne inférieure des trois produit figurant au membre de

droite de (78), donc une borne inférieure de  $\frac{1}{2\pi a^2} \frac{d\Omega}{dX}$ . On constate que cette borne est partout largement positive. *Donc, toujours,*

$$\frac{d\Omega}{dX} > 0.$$

Dans ce qui précède, on calcule  $\frac{d\left(\frac{\Omega}{2\pi a^2}\right)}{dX}$  par la formule

$$\frac{d\left(\frac{\Omega}{2\pi a^2}\right)}{dX} = -\frac{(1+3K^2) \cdot F(c, \varphi_0)}{2K^2(1+2K^2)^{\frac{5}{4}}} + \frac{K^2-1}{8K(1+2K^2)^{\frac{3}{4}}} \left[ \frac{E(c, \varphi_0)}{c^2 d^2} - \frac{F(c, \varphi_0)}{c^2} - \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\Delta_0 d^2} \right] + \frac{1+K^2}{K^2(1+2K^2)},$$

qu'on obtient en dérivant, par rapport à X, la valeur de  $\frac{\Omega}{2\pi a^2}$  qu'on tire de (53), et dans laquelle les notations sont les mêmes qu'au n° 7.

### 35. Courbe de variation de $\Omega$ en fonction de $a$ .

Nous avons tracé la courbe de la figure 5, en portant, en abscisses et en

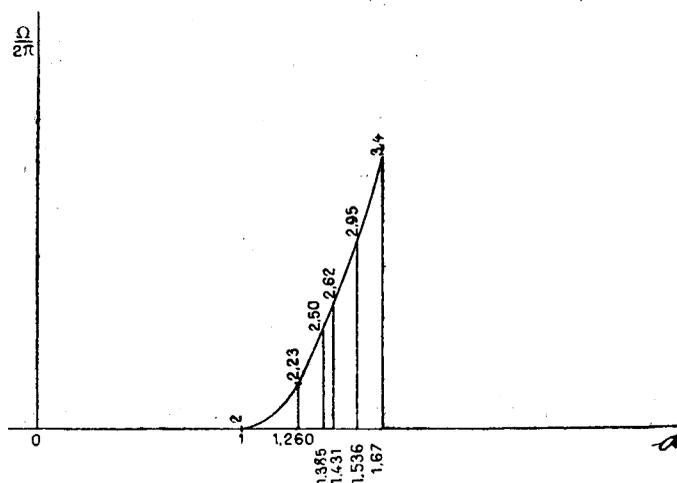


Fig. 5.

ordonnées, les valeurs de  $a$  et de  $\frac{\Omega}{2\pi}$  correspondant à des valeurs de  $X = K^2$  croissant continuellement de zéro à 2,32. De même que la courbe de la figure 4,

celle de la figure 5 est valable pour toutes les masses liquides, à la condition d'adopter, pour chacune d'elles, le système d'unités défini au n° 30.

Pour  $\omega = 0$ , la courbe  $(\frac{\Omega}{2\pi}, a)$  est tangente à l'axe des abscisses. En effet, avec notre système spécial d'unités, (58) s'écrit

$$(79) \quad \Omega = 4\pi(1 + \frac{8}{45}\omega^2 + \dots)$$

et, tenant compte de (75), on voit bien que  $\frac{d\Omega}{da} = \frac{\frac{d\Omega}{d\omega}}{\frac{da}{d\omega}} = 0$ , pour  $\omega = 0$ .

La courbe de  $\Omega$  en fonction de  $a$  est partout croissante :

$$\frac{d\Omega}{da} = \frac{d\Omega}{dX} \cdot \frac{dX}{da};$$

d'après le n° 34, le premier facteur est toujours positif; il en est de même du second (n° 30). Donc la croissance continue de  $\Omega$  est établie.

**36. Courbe de variation de J en fonction de  $\Omega$ .**

Supposons encore qu'on ait pris le système spécial d'unités indiqué au

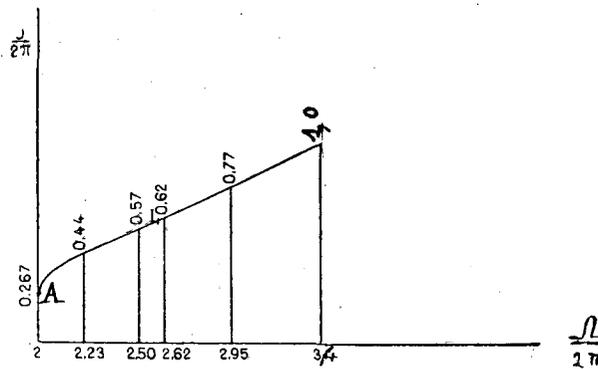


Fig. 6.

n° 30. Nous avons porté en abscisses et ordonnées les valeurs de  $\frac{\Omega}{2\pi}$  et de  $\frac{J}{2\pi}$ , correspondant à des valeurs de  $X = K^2$  croissant continuellement de zéro à 2,32.  $\Omega$  croît constamment avec  $X$ , car  $\frac{d\Omega}{dX}$  est toujours positif (n° 34) et, par suite,  $J$  croît aussi avec  $X$ , d'après (77).

La série (65) s'écrit ici

$$(80) \quad J = \frac{8}{15}\pi(1 + \frac{2}{3}\omega^2 + \frac{32}{63}\omega^4 + \dots)$$

et nous avons déjà écrit (79).

La tangente à la courbe, au point de départ A, lequel correspond à  $\omega = 0$ , n'est donc autre que l'axe des ordonnées.

*Je dis que la courbe de la figure 6 présente un point d'inflexion I, correspondant à la vitesse limite  $\omega_1 = 0,754$ .*

En effet, d'après (77), le coefficient angulaire  $\frac{dJ}{d\Omega}$  de la courbe est toujours positif et décroît de  $+\infty$  à  $\frac{1}{4\omega_1^2}$ , quand  $\omega$  varie de zéro à la vitesse limite  $\omega_1 = 0,754$ , puis croît quand  $\omega$  décroît jusqu'à la valeur 0,707 (fig. 4), valeur pour laquelle les deux pôles de la surface se touchent.

Il s'ensuit que  $\frac{d^2J}{d\Omega^2}$ , d'abord négatif de A en I, s'annule en I, pour devenir positif au delà du point d'inflexion I.  $\frac{d^2J}{d\Omega^2}$  représente la dérivée seconde de J par rapport à  $\Omega$ , J étant regardée comme la fonction de  $\Omega$ , obtenue par l'élimination de la variable commune X.

### 37. Courbes de variation, en fonction de $\omega$ , de l'énergie cinétique de l'énergie de surface et de l'énergie totale de la masse liquide en rotation.

Conservons encore le système spécial d'unités du n° 30.

L'énergie cinétique est  $\frac{1}{2}J\omega^2$ .

L'énergie potentielle de surface,  $f\Omega$ , est ici égale à  $\frac{\Omega}{8}$ .

L'énergie totale,  $\mathcal{E}$ , est égale à  $\frac{1}{2}J\omega^2 + f\Omega$ .

Les résultats numériques contenus dans le tableau du n° 30 nous donnent les trois courbes suivantes

On démontre, sans peine, qu'au point  $\omega = 0$ , les 3 courbes ont leur tangente parallèle à  $O\omega$ .

Pour  $\omega$  croissant de zéro à 0,754, puis décroissant jusqu'à 0,707 (figure aux pôles confondus),  $\Omega$  croît constamment puisque X croît constamment (n° 30) et que  $\frac{d\Omega}{dX} > 0$  (n° 34).

Il en est de même de  $J\omega^2$  d'après (66), compte tenu de la croissance de  $\Omega$

et en remarquant que  $-\frac{1}{\tau_0}$  croît aussi constamment, comme on peut le déduire du n° 31.

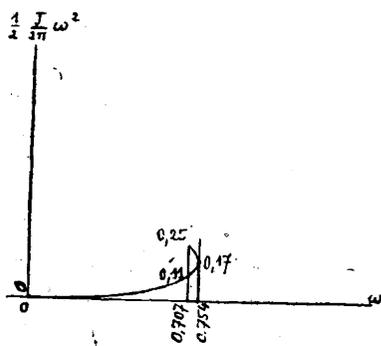


Fig. 7.

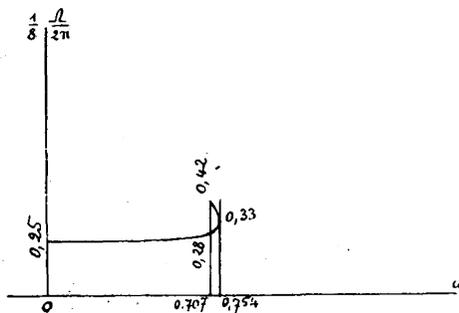


Fig. 8.

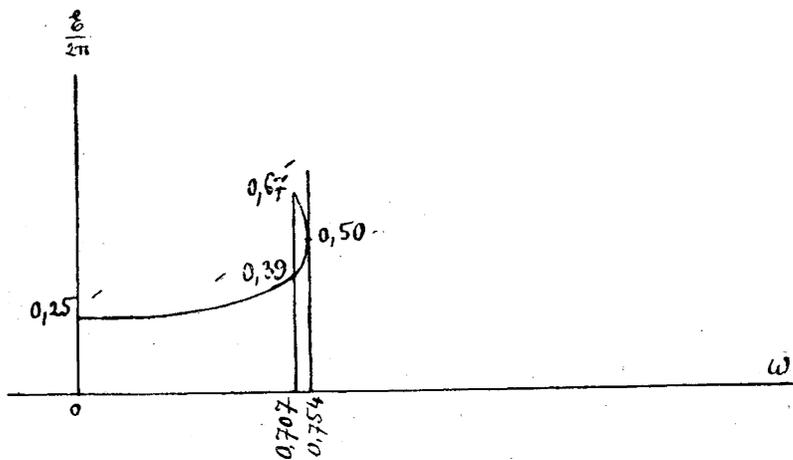


Fig. 9.

La croissance continue de  $J\omega^2$  et celle de  $\Omega$  entraînent celle de l'énergie totale,  $E$ , pour  $\omega$  variant toujours de 0 à la vitesse limite 0,754, puis décroissant jusqu'à 0,707, vitesse correspondant à la figure aux deux pôles confondus.

**38. Étude de la stabilité de l'équilibre.**

Si nous considérons toutes les courbes d'équation (10) ou (13), elles consti-

tuent une famille de courbes dépendant de deux paramètres  $a$  et  $k$ , les notations étant toujours celles du n° 2.

Prenons maintenant celles de ces courbes qui correspondent à une même masse liquide; la condition de l'invariabilité du volume s'exprime par une relation (19) qui, en tenant compte de (17), est une relation entre  $a$  et  $k$ . Nos courbes méridiennes relatives à une même masse liquide constituent donc une famille à un paramètre,  $a$ ,

$$(81) \quad \varphi(x, y, a) = 0,$$

et la connaissance du seul rayon équatorial  $a$  définit la forme de la courbe; par suite, le moment d'inertie correspondant et l'aire de la surface correspondante sont ainsi des fonctions  $J(a)$  et  $\Omega(a)$  de  $a$ .

En adoptant toujours le même système d'unités propre à la masse liquide étudiée, la courbe de  $\Omega(a)$ , en fonction de  $a$ , est évidemment celle de la figure 5 (au facteur  $\frac{1}{2\pi}$  près) et la courbe donnant  $J(a)$  en fonction de  $\Omega(a)$  est naturellement celle de la figure 6.

Nous supposons toujours que notre fluide est soumis à une pression extérieure uniforme.

L'étude de la stabilité va être faite, en ne considérant, comme surfaces déformées possibles, infiniment voisines, que des surfaces de révolution autour du même axe, avec une courbe de la famille (81) comme méridien.

Supposons, comme au n° 32, notre masse en équilibre absolu, après avoir appliqué, à chaque particule, une force égale à la force centrifuge. D'après ce qui a été dit dans ce n° 32, sur le travail produit par une déformation de la masse, la fonction de forces  $U$ , correspondant à la force centrifuge et à la tension superficielle est telle que

$$\delta U = \frac{\omega^2}{2} \delta J - f \cdot \delta \Omega;$$

d'où

$$U = \frac{\omega^2}{2} J - f \Omega + \text{constante.}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit, d'après le principe des travaux virtuels, que la variation première de  $U$  soit nulle, pour toute déformation infiniment petite, respectant les liaisons, c'est-à-dire conservant le volume. En

particulier, il faut, si l'on considère comme surfaces déformées infiniment voisines, des surfaces de révolution de la famille (81) que

$$(82) \quad \frac{\partial U(\omega, a)}{\partial a} \equiv \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ(a)}{da} - f \frac{d\Omega(a)}{da} = 0.$$

C'est, au fond, le résultat (77) déjà trouvé.

Nous admettrons que des forces dissipatives agissent toujours dès que le liquide se meut et que l'équilibre est stable, si  $U$  est maximum et instable, dans le cas contraire <sup>(1)</sup>.

Le fait de n'admettre comme surfaces déformées infiniment voisines que des surfaces de révolution dont le méridien satisfait à (81) revient à dire que l'équilibre est stable, si la dérivée seconde, par rapport à  $a$ , de la fonction

$$(83) \quad U(\omega, a) \equiv \frac{\omega^2}{2} J(a) - f \cdot \Omega(a)$$

est négative, pour les valeurs  $\omega$  et  $a$  de la position d'équilibre considérée, c'est-à-dire si, pour ces valeurs,

$$\frac{\partial^2 U(\omega, a)}{\partial a^2} < 0$$

et que l'équilibre est instable, si, pour ces valeurs

$$\frac{\partial^2 U(\omega, a)}{\partial a^2} > 0.$$

Remarquons que toute position d'équilibre  $(\omega, a)$  devant satisfaire à l'équation (82), la courbe de la figure 4 n'est autre que la courbe correspondant à cette équation.

Nous poserons

$$\alpha = \frac{\partial^2 U(\omega, a)}{\partial a^2}$$

et nous dirons que  $\alpha$  est le coefficient de stabilité.

Prenons d'abord le cas de  $\omega = 0$ .

C'est le cas connu de l'équilibre absolu. La masse liquide est alors sphérique. Les séries (75) et (79) permettent de calculer  $\alpha = -\frac{d^2\Omega(a)}{da^2}$ , pour  $\omega = 0$ .

---

<sup>(1)</sup> Voir l'analogie avec le cas de l'attraction newtonienne dans APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. IV, 1921, p. 254.

On le trouve égal à  $-\frac{64}{5}\pi$ , nombre négatif. L'équilibre est donc stable, comme on le savait.

Passons au cas de  $\omega \neq 0$ .

Alors (n° 35)

$$\frac{d\Omega}{da} \neq 0.$$

On a identiquement

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a} &= \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{da} - f \frac{d\Omega}{da} \\ \frac{\partial U}{\partial a} &= \frac{\omega^2}{2} \frac{d\Omega}{da} \left( \frac{dJ}{d\Omega} - \frac{2f}{\omega^2} \right) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} &= \frac{\omega^2}{2} \frac{d^2\Omega}{da^2} \left( \frac{dJ}{d\Omega} - \frac{2f}{\omega^2} \right) + \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{d\Omega}{da} \right)^2 \frac{d^2J}{d\Omega^2}, \end{aligned}$$

où  $\frac{d^2J}{d\Omega^2}$  est la dérivée seconde de  $J$ , par rapport à  $\Omega$ ,  $J$  étant regardée comme fonction de  $\Omega$ , par élimination de la variable commune  $a$ .

Il s'ensuit, d'après (77), que, pour les valeurs  $\omega$ ,  $a$ , d'une position d'équilibre, on a

$$(84) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{d\Omega}{da} \right)^2 \frac{d^2J}{d\Omega^2}.$$

Donc,

$$(85) \quad \alpha = \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{d\Omega}{da} \right)^2 \frac{d^2J}{d\Omega^2}.$$

La courbe de la figure 6 n'est autre que celle de  $J(a)$ , en fonction de  $\Omega(a)$ , ainsi que nous l'avons déjà dit. Donc, en tenant compte de la fin du n° 36, nous voyons que :

1° Lorsque la vitesse  $\omega$  croît de zéro à la vitesse limite, le point figuratif  $(\omega, a)$  de l'équilibre parcourant l'arc  $\alpha\beta$  de la courbe de la figure 4,  $\frac{d^2J}{d\Omega^2}$  est négatif,  $\alpha$  est négatif et l'équilibre est stable ;

2° Lorsque le point figuratif parcourt l'arc  $\beta\gamma$  de cette même courbe,  $\frac{d^2J}{d\Omega^2}$  est positif,  $\alpha$  est positif et l'équilibre est instable.

En fait, cette démonstration revient à déterminer, par rapport à la courbe  $(\omega, a)$  de la figure 4 et d'équation

$$\frac{\partial U(\omega, a)}{\partial a} = 0,$$

et tout le long de cette courbe, le côté où  $\frac{\partial U(\omega, a)}{\partial a}$  est positif.

*La stabilité s'est changée en instabilité au passage du point limite  $\beta$  (fig. 4).*

## DEUXIÈME PARTIE

**Application de la théorie précédente à l'expérience de Plateau, étude des masses annulaires et discussion de cette expérience.**

---

### CHAPITRE PREMIER

**SUR LES FORMULES APPLICABLES AUX MASSES CENTRALES  
ENTOURANT UN AXE MATÉRIEL DE ROTATION  
ET SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES MASSES ANNULAIRES**

---

**39. Formules applicables à une masse liquide de révolution, soumise à la seule tension superficielle, entourant un axe matériel et en rotation avec cet axe.**

Supposons encore, jusqu'à nouvel ordre, que la masse liquide est sans pesanteur et qu'elle est placée dans un milieu à pression  $p_1$  uniforme.

L'axe matériel est supposé cylindrique et de révolution autour d'un axe géométrique, lequel est l'axe de rotation. Soit  $a'$ , le rayon de l'axe matériel.

Conservons les notations du n° 2 de ce mémoire, en signalant que, ici,  $p_0$  ne sera plus qu'une simple constante, d'ailleurs positive ou négative, sans avoir le sens mécanique du n° 2, où elle représentait la pression, dans la masse, sur l'axe géométrique de la rotation, alors que la masse n'a plus, ici, aucun point sur cet axe géométrique.

Nous poserons toujours

$$\frac{\omega^2 \rho}{8f} = k^2$$

et nous poserons en outre

$$\frac{p_0 - p_1}{2f} = A.$$

Les axes des coordonnées seront, pour les  $y$ , l'axe géométrique de rotation et de révolution et pour les  $x$ , la droite perpendiculaire au précédent, menée par le point du méridien le plus éloigné de l'axe géométrique de rotation.

Nous appellerons encore  $a$ , la distance de ce point à cet axe.

Ici, (3) s'écrira

$$(86) \quad \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho} = 4k^2x^2 + 2A$$

et, pour le quart de méridien situé dans l'angle  $xoy$ , on a, d'après (4), où il faut prendre le signe —,

$$(87) \quad \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right).$$

L'équation (5 bis) s'écrira donc, ici, pour le quart de méridien considéré

$$(88) \quad -\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = k^2x^4 + Ax^2 + B,$$

d'où

$$(89) \quad -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = k^2x^3 + Ax + \frac{B}{x},$$

où  $B$  est une constante non nulle ; donc  $y' = \frac{dy}{dx}$  est toujours de signe opposé à celui de  $k^2x^4 + Ax^2 + B$  et l'on a

$$(90) \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{k^2x^4 + Ax^2 + B}{\sqrt{x^2 - (k^2x^4 + Ax^2 + B)^2}}.$$

Remarquons que  $\frac{1}{\tau} = \frac{d}{dx} \left( \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)$  est égal à

$$(91) \quad \frac{1}{\tau} = 3k^2x^2 + A - \frac{B}{x^2}$$

et, d'après (86)

$$(92) \quad \frac{1}{\rho} = k^2x^2 + A + \frac{B}{x^2}.$$

Nous admettrons que la surface libre de la masse liquide se raccorde tangentielllement avec la surface cylindrique de l'axe matériel, ce qui est sensible-

ment vrai dans l'expérience de Plateau ; nous supposons, de plus, que le liquide mouille l'axe matériel.

Il s'ensuit que

$$\text{pour } x = a', \quad \text{on a } y' = -\infty ;$$

et, d'ailleurs, pour  $x = a$ , on a aussi  $y' = -\infty$ .

Donc

$$a - (k^2 a^4 + A a^2 + B) = 0$$

$$a' - (k^2 a'^4 + A a'^2 + B) = 0.$$

D'où

$$(93) \quad A = \frac{1}{a + a'} - k^2(a^2 + a'^2).$$

$$(94) \quad B = \frac{aa'}{a + a'} + k^2 a^2 a'^2.$$

Ainsi, B est toujours positif, avec nos hypothèses, pour une masse attenant à l'axe.

Comme  $k^2 x^4 + A x^2 + B$  est positif, pour  $x = a'$  et pour  $x = a$ , on aura zéro ou deux points à tangente parallèle à Ox, selon que  $k^2 x^4 + A x^2 + B = 0$  aura ou non ses deux racines en  $x^2$  réelles et comprises entre  $a'^2$  et  $a^2$ . La discussion de la forme du méridien est aisée.

Le volume de la masse liquide est donné par l'intégrale

$$(95) \quad 2\pi \int_{a'}^a \frac{x^2(k^2 x^4 + A x^2 + B) dx}{\sqrt{x^2 - (k^2 x^4 + A x^2 + B)^2}}.$$

Elle est hyperelliptique, comme celle qui donnerait l'ordonnée du méridien.

Etant donnés  $\omega$  et le rayon  $a'$  de l'axe matériel, on pourrait déterminer par des tâtonnements, le méridien d'une figure d'équilibre renfermant un volume donné et correspondant à la vitesse donnée. On se donnerait  $a$  ; on calculerait A et B, par (93) et (94), puis, par une méthode approchée, l'intégrale hyperelliptique (95) ; on ferait varier  $a$  et l'on arriverait, par des interpolations, à déterminer la valeur qu'il faut lui donner pour que (95) soit égale au volume donné. Ces calculs seraient naturellement assez pénibles. Il n'est heureusement pas utile d'y procéder, lorsque  $a'$  est petit, ce qui est le cas de l'expérience de Plateau.

En effet pour  $a'$  petit, B est de l'ordre de  $a'$ , d'après (94) et A ne diffère que d'une quantité voisine de  $\frac{a'}{a^2}$ , de sa valeur pour  $a' = 0$ , d'après (93). Or, les

équations du présent numéro ne diffèrent des équations correspondantes de la première partie du mémoire que par ce que  $a'$  est, là-bas, à prendre égal à 0, dans les valeurs (93) et (94) de A et de B et que, ici,  $a'$  est différent de zéro. On voit donc qu'en prenant l'axe matériel assez fin, c'est-à-dire  $a'$  suffisamment petit, on aura A et B aussi voisins qu'on le voudra de leurs valeurs pour  $a' = 0$  et l'on se rapprochera autant qu'on le voudra du problème de la première partie. Le raccordement de la surface libre avec l'axe matériel s'atténue de plus en plus, quand  $a'$  est pris de plus en plus petit, car, d'après (91), (93) et (94), la valeur de  $\tau$ , pour  $x = a'$ , est voisine de  $-a'$ , pour  $a'$  petit. Or, dans l'expérience de Plateau <sup>(1)</sup>,  $a' = 0$  cm. 075, alors que  $a$ , pour la masse attachée toujours à l'axe matériel, varie de 3 à 5 centimètres environ;  $a'$  est donc relativement très petit. Rappelons que, dans cette expérience, la masse est soustraite à l'action de la pesanteur, par immersion dans un liquide de même densité et nous montrerons plus loin (n° 54) que le problème correspondant à cette expérience est, mathématiquement, le même que celui du présent numéro, où la pression extérieure est supposée uniforme et la masse non pesante.

Les résultats expérimentaux étant assez imprécis, pour différentes causes, comme nous l'indiquerons au n° 55, nous admettrons ici, comme approximation suffisante, que les résultats de la première partie de ce mémoire peuvent servir à la discussion de l'évolution de la masse centrale de Plateau, jusqu'au moment où celle-ci devient annulaire.

Il ne restera donc ainsi qu'à étudier les figures annulaires, pour pouvoir faire une discussion de l'expérience de Plateau.

#### 40. Formules applicables à une masse annulaire de révolution, en rotation uniforme autour de son axe de révolution et soumise à la seule tension superficielle.

Soient  $a'$  et  $a$ , les rayons équatoriaux, intérieur et extérieur. La masse est toujours supposée non pesante et la pression extérieure, uniforme.

Les formules (86) à (92) du n° précédent sont encore applicables.

On a encore, ici,  $y' = -\infty$ , pour  $x = a$ , mais, par contre, pour  $x = a'$ ,

(1) PLATEAU. — Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre soustraite à l'action de la pesanteur. Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles, t. XVI.

$y' = +\infty$ . Comme nous savons, d'après (90), que  $k^2x^4 + Ax^2 + B$  est de signe opposé à celui de  $y'$ , nous avons

$$\begin{aligned} a - (k^2a^4 + Aa^2 + B) &= 0, \\ a' + (k^2a'^4 + Aa'^2 + B) &= 0. \end{aligned}$$

On en tire

$$(96) \quad A = \frac{1}{a - a'} - k^2(a^2 + a'^2),$$

$$(97) \quad B = \frac{-aa'}{a - a'} + k^2a^2a'^2.$$

Comme  $k^2x^4 + Ax^2 + B$  est négatif, pour  $x = a'$  et positif, pour  $x = a$ , d'après les formules dont nous avons tiré A et B, nous voyons que  $k^2x^4 + Ax^2 + B = 0$  n'a qu'une racine en  $x^2$  comprise entre  $a'^2$  et  $a^2$ . Chaque quart de section méridienne de l'anneau ne présente donc qu'un seul point à tangente parallèle à Ox. On constate aisément que c'est  $a'^2$  qui sépare les deux racines de l'équation précédente; de sorte que le point à tangente parallèle à Ox, correspond à la plus grande de ces deux racines et, par suite, son abscisse,  $x_H$  est

$$(98) \quad x_H = \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 - 4k^2B}}{2k^2}}.$$

A l'aide de (91), (96) et (97), on trouve, pour les rayons de courbure du méridien aux sommets, intérieur, A' et extérieur, A,

$$(99) \quad \tau_{A'} = \frac{a'(a - a')}{a + a'} \frac{1}{1 - 2k^2(a - a')^2a'}$$

$$(100) \quad \tau_A = \frac{a(a - a')}{a + a'} \frac{1}{1 + 2k^2(a - a')^2a}$$

Pour  $a'$  petit,  $\tau_{A'}$  est sensiblement égal à  $a'$ .

En prenant  $a'$  suffisamment petit, on a B aussi petit qu'on veut et, par suite, l'anneau correspondant est aussi voisin qu'on veut de la figure aux deux pôles confondus, étudiée dans la première partie de ce mémoire et qui correspond à  $B = 0$  et à  $A = \frac{1}{a} - k^2a^2 = \frac{1 - k^2a^3}{a}$ , avec  $k^2a^3 = K^2 = 2,32$  (n° 5).

**41. Sur le tore infiniment long et infiniment déliée de vitesse infiniment petite.**

Soit  $\frac{4}{3}\pi R^3$  le volume de la masse liquide.

Supposons  $\omega$  infiniment petit et cherchons à satisfaire aux équations du problème par un tore dont nous désignerons par  $a'$  et  $a$ , les rayons intérieur et extérieur.

On a, d'abord, en ce qui concerne le volume

$$(101) \quad (a + a')(a - a')^2 = \frac{16R^3}{3\pi}.$$

Le tore doit aussi satisfaire à (140), avec  $\tau_\lambda = \frac{a - a'}{2}$ . Ce qui donne

$$(102) \quad 2k^2(a^2 - a'^2)a = 1.$$

De (101) et (102), on tire exactement par division

$$(103) \quad \frac{a - a'}{a} = 1 - \frac{a'}{a} = \frac{32k^2R^3}{3\pi}$$

et de (102) et (103), il vient

$$(104) \quad a^3 = \frac{9\pi^2}{128k^4R^3(3\pi - 16k^2R^3)}.$$

Comme  $\omega$  est supposé infiniment petit,  $k$  est infiniment petit de l'ordre de  $\omega$  et l'on pourra écrire

$$(105) \quad a^3 = \frac{3\pi}{128k^4R^3}.$$

Cherchons maintenant à vérifier si le tore ainsi déterminé satisfait à l'équation différentielle d'un méridien d'équilibre, que nous prendrons sous la forme (91) et que nous écrirons

$$\frac{a - a'}{\tau} = 2 = 3k^2(a - a')x^2 + 1 - k^2(a^2 + a'^2)(a - a') - \frac{-aa' + k^2a^2a'(a - a')}{x^2}.$$

Il suffit de s'assurer que, pour  $x$  variant de  $a'$  à  $a$ , le membre de droite reste constant, à des infiniment petits près, car, pour notre tore,  $\tau$  est constant et égal à  $\frac{a - a'}{2}$  et par suite, le membre de gauche est constant et égal à 2 ; et nous savons, en outre, que l'équation est déjà satisfaite, exactement, pour  $x = a$ . On voit sans peine que les termes en  $x^2$  et  $\frac{1}{x^2}$  varient chacun d'une quantité de l'ordre de  $k^2$  seulement. L'équation est donc satisfaite dans les conditions envisagées.

Pour ce tore, on trouve, par (96) et (97), que

$$A = +\infty \quad \text{et} \quad B = -\infty.$$

On montre facilement que son moment d'inertie,  $J$ , par rapport à l'axe de rotation, est infini ; que son énergie cinétique,  $\frac{1}{2} J\omega^2$ , est égale aussi à  $+\infty$  et qu'il en est de même de son énergie potentielle de surface,  $f\Omega$ . Son énergie totale,  $\frac{1}{2} J\omega^2 + f\Omega$ , est donc aussi égale à  $+\infty$ .

**42. Relation entre  $J$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $a$  et  $a'$  pour une masse annulaire.**

Posons  $x^2 = t$ .

Le moment d'inertie d'une masse annulaire, de densité  $\delta$ , par rapport à l'axe de révolution et de rotation est

$$(106) \quad J = \pi\delta \int_{a'}^a \frac{x^4(k^2x^4 + Ax^2 + B)dx}{\sqrt{x^2 - (k^2x^4 + Ax^2 + B)^2}} = \frac{\pi\delta}{2} \int_{a'^2}^{a^2} \frac{t^2(k^2t^2 + At + B)dt}{\sqrt{t - (k^2t^2 + At + B)^2}}.$$

L'aire de la surface libre est

$$(107) \quad \Omega = 4\pi \int_{a'}^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - (k^2x^4 + Ax^2 + B)^2}} = 2\pi \int_{a'^2}^{a^2} \frac{t dt}{\sqrt{t - (k^2t^2 + At + B)^2}}.$$

Le volume de la masse liquide est

$$(108) \quad V = 2\pi \int_{a'}^a \frac{x^2(k^2x^4 + Ax^2 + B) dx}{\sqrt{x^2 - (k^2x^4 + Ax^2 + B)^2}} = \pi \int_{a'^2}^{a^2} \frac{t(k^2t^2 + At + B)dt}{\sqrt{t - (k^2t^2 + At + B)^2}}.$$

En outre, puisque la section est fermée, on a

$$(109) \quad \int_{a'}^a dy = \frac{1}{2} \int_{a'^2}^{a^2} \frac{(k^2t^2 + At + B)dt}{\sqrt{t - (k^2t^2 + At + B)^2}} = 0.$$

Mais,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{t - (k^2t^2 + At + B)^2} \right\} = \frac{2t - (k^2t^2 + At + B)(5k^2t^2 + 3At + B)}{2\sqrt{t - (k^2t^2 + At + B)^2}}.$$

Intégrant entre  $a'^2$  et  $a^2$ , on a, en tenant compte de (106), (107), (108) et (109),

$$0 = \frac{\Omega}{2} - \frac{5J}{\delta} k^2 - \frac{3AV}{2}.$$

D'où

$$(110) \quad J = \frac{\delta}{10k^2}(\Omega - 3AV),$$

$$(111) \quad J = \frac{4f}{5\omega^2}(\Omega - 3AV).$$

En plaçant  $\Omega$ , dans le premier membre, on a encore

$$(112) \quad \Omega = \frac{5J\omega^2}{4f} + 3AV,$$

$$(113) \quad \Omega = \frac{5J\omega^2}{4f} + 3V \left[ \frac{1}{a - a'} - k^2(a^2 + a'^2) \right].$$

Avec un système d'unités spécial à la masse considérée et tel que  $V = \frac{4}{3}\pi$ ,  $\delta = 1$ ,  $f = \frac{1}{8}$ , (113) devient

$$(114) \quad \Omega = 10J\omega^2 + 4\pi A.$$

#### 43. Démonstration de cette relation par des considérations générales.

De même que pour la formule (59) de la première partie, nous donnerons plus loin, dans la troisième partie, au n° 61, une autre démonstration de la formule (111), comme application particulière d'un théorème général applicable aux masses soumises à l'attraction newtonienne et à la tension superficielle.

#### 44. Énergie cinétique, énergie potentielle de surface et énergie totale de l'anneau.

L'énergie cinétique est  $\frac{1}{2}J\omega^2$ , c'est-à-dire d'après (111),

$$(115) \quad \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{2f}{5}(\Omega - 3AV).$$

L'énergie potentielle de surface est  $f\Omega$ .

L'énergie totale  $\mathcal{E}$  est

$$(116) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}J\omega^2 + f\Omega$$

ou

$$(117) \quad \mathcal{E} = \frac{f}{5}(7\Omega - 6AV).$$

avec  $A$  donné toujours par (96).

Avec le système spécial d'unités défini au n° 42, on a

$$(118) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{40}(7\Omega - 8\pi A)$$

$$(119) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{4}(7J\omega^2 + 2\pi A).$$

## CHAPITRE II

### VARIATION DES DIVERSES QUANTITÉS RELATIVES A UNE MASSE ANNULAIRE ET STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE ANNULAIRE

#### 45. Sur une propriété d'homothétie des anneaux.

Soit  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , le volume invariable de la masse liquide considérée, ici annulaire.

Prenons le système spécial d'unités indiqué au n° 42 et pour lequel

$$R = 1, \quad f = \frac{1}{8}, \quad \delta = 1.$$

Nous avons alors  $k^2 = \omega^2$ .

Considérons une autre surface annulaire satisfaisant à l'équation différentielle du problème, pour une vitesse  $\omega_1$ , et renfermant un volume  $V_1$  égal à  $V\lambda^3$ .

*Je dis qu'en dilatant cette surface, homothétiquement à elle-même, par rapport à son centre, et dans le rapport  $\frac{1}{\lambda}$ , on obtient la figure d'équilibre qu'affecte notre première masse de volume  $V$ , pour la vitesse  $\omega$  égale à  $\omega_1\lambda^{\frac{3}{2}}$ .*

Considérons, en effet, l'équation différentielle du problème, par exemple, sous la forme (90), avec  $A$  et  $B$  définis par (96) et (97) et, ici, avec  $k^2 = \omega^2$ .

On vérifie, sans peine, que si la figure de volume  $V_1$  satisfait à (90), pour la vitesse  $\omega_1$ , la figure homothétique de celle-ci, par rapport à son centre et dans le rapport  $\frac{1}{\lambda}$ , satisfait à (90) pour la vitesse  $\omega$  telle que  $\omega^2 = \omega_1^2\lambda^3$ . La proposition est ainsi démontrée. Remarquons que, pour ces deux surfaces homothétiques,  $\omega^2 a^3$  a la même valeur.

Ceci établi, donnons-nous une vitesse de rotation  $\omega_1$  et cherchons à déterminer une figure d'équilibre annulaire, qui lui corresponde, sans nous imposer, pour le moment, aucune condition de volume.

*Nous donnerons plus loin une méthode par développements en séries, qui s'applique dans une grande partie du problème et qui donne des résultats immédiats. Mais, pour la partie du problème où cette méthode des séries ne s'applique pas, il nous faut recourir à des tâtonnements, en nous donnant une valeur de  $a$  et en essayant différentes valeurs de  $a'$ , jusqu'à ce que, par interpolation, nous en ayons trouvé une, telle que*

$$(120) \quad \int_{a'}^a \frac{(\omega^2 x^4 + Ax^2 + B) dx}{\sqrt{x^2 - (\omega^2 x^4 + Ax^2 + B)^2}} = 0,$$

$A$  et  $B$  étant déterminés par (96) et (97), avec, ici,  $k^2 = \omega^2$ .

Le calcul de cette intégrale hyperelliptique sera fait par une méthode approchée classique, permettant d'avoir une limite de l'erreur commise. Auprès des sommets équatoriaux de la section, une disposition spéciale de calcul s'impose, parce que l'élément différentiel de (120) devient infini, en ces sommets; mais, on peut, pour chacun d'eux, à l'aide de (91), calculer les rayons de courbure du méridien, aux deux extrémités d'un petit intervalle partant du sommet considéré et assimiler le méridien, dans ce petit intervalle, à un arc de circonférence de rayon égal à la moyenne des rayons de courbure aux deux bouts. On peut aisément déterminer une limite de l'erreur commise, dans chacun des deux intervalles à considérer. Pour le reste de l'intervalle  $(a', a)$ , pas de difficulté.

Ayant ainsi calculé  $a'$  et  $a$ , pour une vitesse  $\omega_1$ , calculons le volume renfermé par la surface, en intégrant  $4\pi \int_{a'}^a xy dx$ , par une méthode approchée, et nous obtenons un volume  $V_1$  qui, généralement, différera de  $V = \frac{4}{3}\pi$  et sera égal à  $V\lambda^3$ . D'après une remarque précédente, la figure trouvée, dilatée dans le rapport  $\frac{1}{\lambda}$ , sera la figure d'équilibre de notre masse de volume  $\frac{4}{3}\pi$ , pour la vitesse  $\omega = \omega_1 \lambda^{\frac{3}{2}}$ .

Nous aurons ainsi, pour une vitesse connue  $\omega$ , les ordonnées  $a'$  et  $a$ , des courbes  $(\omega, a')$  et  $(\omega, a)$  correspondant à notre masse liquide de volume invariable  $\frac{4}{3}\pi$ .

Nous pourrions déterminer autant de points que nous le voudrions. La détermination de chacun de ces points est évidemment assez laborieuse, quoique des considérations analytiques qui vont suivre (n° 46), la facilitent singulièrement, mais il faut remarquer qu'avec le système d'unités spécial à chaque masse, les courbes  $(\omega, a')$  et  $(\omega, a)$ , une fois tracées, sont valables pour toutes les masses liquides, quels que soient leur volume et leur nature.

On peut aussi calculer le moment d'inertie,  $J$ , de la masse, par rapport à l'axe, toujours par une intégration approchée, en calculant  $4\pi \int_{a'}^a yx^2 dx$ . On en déduit, par (119), l'énergie totale,  $\mathcal{E}$ , de la masse.

#### 46. Etude analytique du problème.

Conservons le système d'unités défini au n° 42.

Grâce à la propriété d'homothétie signalée au n° 45, la difficulté de la question se ramène à trouver des courbes fermées satisfaisant à l'équation différentielle hyperelliptique (90).

Considérons donc l'intégrale

$$\int_{a'}^a \frac{-(\omega^2 x^4 + Ax^2 + B)dx}{\sqrt{x^2 - (\omega^2 x^4 + Ax^2 + B)^2}}$$

avec

$$A = \frac{1}{a - a'} - \omega^2(a^2 + a'^2),$$

$$B = -\frac{aa'}{a - a'} + \omega^2 a^2 a'^2.$$

Il s'agit de trouver, pour  $\omega$  et  $a$  donnés, les valeurs de  $a'$  rendant cette intégrale nulle.

Posons :

$$\frac{a'}{a} = \xi, \quad \frac{x}{a} = x_1$$

et, comme dans la première partie,

$$X = \omega^2 a^3.$$

On voit facilement que l'intégrale ci-dessus est égale à

$$a \int_{\xi}^1 \frac{-(Xx_1^4 + A_1 x_1^2 + B_1)dx_1}{\sqrt{x_1^2 - (Xx_1^4 + A_1 x_1^2 + B_1)^2}}$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{1-\xi} - X(1 + \xi^2),$$

$$B_1 = \xi \left( -\frac{1}{1-\xi} + X\xi \right).$$

Considérons, maintenant, dans l'intervalle  $0 \leq \xi \leq 1$ , la famille de courbes dont les coordonnées sont  $\xi$  et  $\eta$ , avec

$$\eta(\xi, X) = \int_{\xi}^1 \frac{-(Xx_1^4 + A_1x_1^2 + B_1)dx_1}{\sqrt{x_1^2 - (Xx_1^4 + A_1x_1^2 + B_1)^2}}.$$

Posons

$$\Phi = Xx_1^4 + A_1x_1^2 + B_1.$$

Nous avons, par un calcul facile,

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{-\Phi}{\sqrt{x_1^2 - \Phi^2}} \right) = \frac{-x_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X}}{(x_1^2 - \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = x_1^4 + x_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{\partial B_1}{\partial X},$$

avec

$$\frac{\partial A_1}{\partial X} = -(1 + \xi^2),$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial X} = \xi^2,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = x_1^4 - x_1^2(1 + \xi^2) + \xi^2 = -(1 - x_1^2)(x_1^2 - \xi^2).$$

Mais,

$$x_1^2 - \Phi^2 = (1 - x_1^2)(x_1^2 - \xi^2) \cdot \varphi(x_1, \xi, X),$$

avec

$$\varphi(x_1, \xi, X) \equiv X^2 x_1^4 + \left[ \frac{2X}{1-\xi} - X^2(1 + \xi^2) \right] x_1^2 + \left( -\frac{1}{1-\xi} + X\xi \right)^2.$$

On montre que, pour  $0 \leq X < \frac{27}{8}$ , on a  $\varphi(x_1, \xi, X) > 0$ , pour  $0 \leq \xi < 1$ , quel que soit  $x_1$ . Pour  $X \geq \frac{27}{8}$ , nous n'aurons à considérer ici, pour chaque valeur de  $X$ , que des valeurs de  $\xi$  assez voisines de 1, pour qu'on ait

$$4 - X(1 + \xi)(1 - \xi^2) > 0,$$

ce qui exprime qu'on a encore  $\varphi(x_1, \xi, X) > 0$ , quel que soit  $x_1$ .

On a :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( -\frac{\Phi}{\sqrt{x_1^2 - \Phi^2}} \right) = \frac{x_1^2}{\sqrt{(1 - x_1^2)(x_1^2 - \xi^2)[\varphi(x_1, \xi, X)]^3}}.$$

Considérons l'intégrale

$$(121) \quad \int_{\xi}^1 \frac{x_1^2 dx_1}{\sqrt{(1 - x_1^2)(x_1^2 - \xi^2)[\varphi(x_1, \xi, X)]^3}}.$$

Elle a un sens et est uniformément convergente, pour chacune de ses limites  $\xi$  et 1 (les cas  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$  réservés), car elle est comparable soit à une intégrale  $\int_{\xi}^1 \frac{M dx_1}{\sqrt{1 - x_1^2}}$ , soit à une intégrale  $\int_{\xi}^1 \frac{M dx_1}{\sqrt{x_1^2 - \xi^2}}$ , où M est un nombre fini.

Il s'ensuit que l'intégrale (121) est égale à  $\frac{\partial \eta(\xi, X)}{\partial X}$ , d'après le principe de la différentiation sous le signe d'intégration.

Or, (121) est toujours positive, puisque son élément différentiel est toujours positif. Donc, toujours,

$$(122) \quad \frac{\partial \eta(\xi, X)}{\partial X} > 0.$$

Ainsi donc, pour  $\xi$  donné,  $\eta$  croît constamment avec X.

Cette propriété n'a pas été démontrée pour  $\xi = 0$ , mais elle est encore vraie alors, car, pour  $\xi = 0$ ,  $B = 0$  et l'on verrait facilement que  $\eta(0, X)$  est identique à la fonction  $-\Theta(X)$ , où  $\Theta(X)$  est la fonction définie au n° 30 et il a été démontré, au n° 7, que

$$\Theta'(X) < 0.$$

Donc, pour  $\xi = 0$ , on a encore

$$\frac{\partial \eta(\xi, X)}{\partial X} > 0.$$

Nous allons maintenant démontrer que toutes les courbes de la famille  $\xi, \eta(\xi, X)$  sont tangentes à l'axe des  $\eta$ .

Posons

$$(123) \quad \frac{x_1^2 - \xi^2}{1 - \xi^2} = t.$$

Il vient

$$(124) \quad \eta(\xi, X) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\Phi dt}{\sqrt{\xi^2 + (1 - \xi)^2 t} \sqrt{t(1 - t)} \psi(t, \xi, X)},$$

avec  $\psi(t, \xi, X) > 0$ , pour  $0 \leq t \leq 1$ , et où  $\Phi$  est toujours la fonction  $Xx_1^2 + Ax_1 + B_1$ , mais dans laquelle on a remplacé  $x_1$  par sa valeur en  $t$ , tirée de (123).

Par un calcul facile, on trouve que :

$$\Phi(t, \xi, X) \equiv \Phi(t, 0, X) - \xi(1-t) + \xi^2 X(2 - \xi^2)t(1-t).$$

où

$$\Phi(t, 0, X) = (1-X)t + Xt^2.$$

Posons :

$$\theta(t, \xi, X) = X(2 - \xi^2)t(1-t).$$

On a donc, en désignant par  $N(t, \xi, X)$  le dénominateur de (124)

$$\eta(\xi, X) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\Phi(t, 0, X) dt}{N(t, \xi, X)} + \frac{\xi}{2} \int_0^1 \frac{(1-t) dt}{N(t, \xi, X)} - \frac{\xi^2}{2} \int_0^1 \frac{\theta(t, \xi, X) dt}{N(t, \xi, X)}.$$

On voit facilement que, pour  $\xi$  infiniment petit, la première intégrale reste finie, à cause de la présence au numérateur du facteur  $t$ , ce qui permet de diviser, par  $\sqrt{t}$ , le dénominateur et le numérateur et l'intégrale ainsi obtenue est bien finie. Au facteur  $-\frac{1}{2}$  près, et à une quantité près égale à  $\xi$  multiplié par un nombre fini <sup>(1)</sup>, elle est d'ailleurs égale à la fonction

$$\eta(0, X) = -\theta(X).$$

De même, la troisième intégrale est finie.

Quant à la seconde, elle tend vers une valeur infinie, quand  $\xi$  tend vers zéro, car elle est comparable à

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\xi^2 + (1 - \xi^2)t} \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} L \left\{ t + \frac{\xi^2}{2(1 - \xi^2)} + \sqrt{t^2 + \frac{\xi^2 t}{1 - \xi^2}} \right\},$$

à prendre entre 0 et 1, et qui est égale à  $+\infty$ , pour  $\xi = 0$ .

Donc,

$$\limite \frac{\eta(\xi, X) - \eta(0, X)}{\xi} = +\infty \quad \text{pour} \quad \xi \rightarrow 0.$$

Autrement dit,

$$(125) \quad \frac{\partial \eta(\xi, X)}{\partial \xi} = +\infty, \quad \text{pour} \quad \xi = 0, \quad \text{quel que soit } X.$$

(1) Il est facile, en effet de démontrer que  $\frac{1}{\xi} \int_0^1 \Phi(t, 0, X) \left[ \frac{1}{N(t, \xi, X)} - \frac{1}{N(t, 0, X)} \right] dt$  tend vers une quantité finie quand  $\xi$  tend vers zéro.

Par des calculs à peu près analogues, sur lesquels nous aurons d'ailleurs à revenir au n° 48, on peut démontrer aussi que,

$$\left. \begin{aligned} (126) \quad & \eta(\xi, X) = 0 \\ (127) \quad & \frac{\partial \eta(\xi, X)}{\partial \xi} = 0 \\ (128) \quad & \frac{\partial^2 \eta(\xi, X)}{\partial \xi^2} = -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \text{ pour } \xi = 1 \text{ et quel que soit } X.$$

Ainsi donc, toutes les courbes de la famille passent par le point  $\xi = 1$ ,  $\eta = 0$ , y sont tangentes à l'axe des  $\xi$  et y tournent leur concavité vers le bas.

Ces remarques faites, considérons la courbe  $(\xi, \eta)$  correspondant à  $X = 2,32$ . D'après la première partie de ce mémoire,  $\eta(0, X) = -\Theta(X) = 0$ , pour  $X = 2,32$ . Quelques intégrations approchées décèlent une partie positive de la courbe, au départ du point  $\xi = 0$ , où l'on sait, d'ailleurs, que  $\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = +\infty$ , d'après (125), et, tenant compte de (126), (127) et (128), on voit que l'ordonnée  $\eta$  deviendra négative près de  $\xi = 1$ , pour s'annuler au point  $\xi = 1$ , où la courbe devient tangente à l'axe des  $\xi$ .

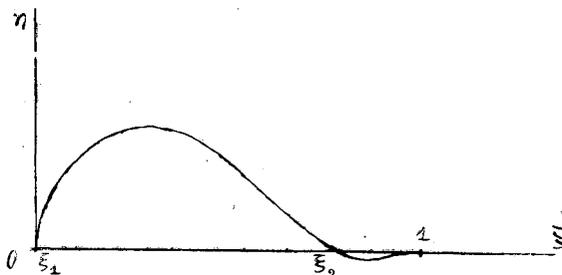


Fig. 10.

On en déduit que pour  $X = 2,32$ , la courbe  $(\xi, \eta)$  affecte la forme de la figure 10.

On voit donc ainsi apparaître, pour  $X = 2,32$ , deux racines de  $\eta = 0$ , l'une  $\xi_1$ , nulle ici, l'autre  $\xi_2$ , voisine ici de 0,90 <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Et, quel que soit  $X$ , il n'existe pas de racine entre  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Il serait assez malaisé de démontrer de façon absolument rigoureuse ce dernier point, mais il devient évident, lorsqu'on procède, comme nous avons eu à le faire, au tracé des courbes  $(\xi, \eta)$ , pour des valeurs  $X$  variant graduellement entre 2,32 et sa valeur minima voisine de 0,9.

Pour résoudre notre problème, il nous suffit, maintenant, de suivre ces racines  $\xi_1$  et de  $\xi_2$ , par continuité, quand X varie.

D'après (122), quand X décroît, pour  $\xi$  constant,  $\eta$  décroît, quel que soit  $\xi$ . Il s'ensuit donc que pour X décroissant à partir de 2,32,  $\xi_1$  croît continuellement et  $\xi_2$  décroît continuellement, jusqu'au moment où  $\xi_1 = \xi_2$ , pour une valeur minima de X, au-dessous de laquelle il n'y aurait plus de racine. Par contre, pour X croissant à partir de 2,32,  $\eta$  croît, la racine  $\xi_1$  n'existe plus et la racine  $\xi_2$  croît continuellement.

Dans notre problème de physique mathématique, pour  $X = 2,32$ , nous avons la figure aux pôles confondus ( $n^0 \delta$ ), correspondant à  $\xi_1 = 0$ . La racine  $\xi_1$  qui part de zéro, pour  $X = 2,32$ , correspond donc aux formes annulaires qui suivent la forme aux pôles confondus et, par suite, à la solution du problème, jusqu'à ce que X ait atteint sa valeur minima. A ce moment, X va croître nécessairement et nous aurons encore une solution du problème, en suivant maintenant la racine  $\xi_2$ , qui est égale à  $\xi_1$ , pour le minimum de X, et qui va maintenant croître continuellement pour X croissant.

La partie de droite des courbes ( $\xi, \eta$ ) devient donc seule intéressante pour  $X > 2,32$ . Par la suite, la partie de gauche devient d'ailleurs imaginaire, dans un certain intervalle de  $\xi$ , mais sans qu'on ait à s'en préoccuper.

Soit  $\xi_{1,2}$  la fonction continue de X, identique à la racine  $\xi_1$ , pour X décroissant de 2,32 jusqu'à son minimum, et identique à la racine  $\xi_2$ , pour X croissant ensuite indéfiniment à partir de son minimum.

Posons

$$(129) \quad v(X) = \int_{\xi_{1,2}}^1 \frac{x_1^2 (Xx_1^4 + A_1x_1^2 + B_1) dx_1}{\sqrt{x_1^2 - (Xx_1^4 + A_1x_1^2 + B_1)^2}},$$

avec, toujours

$$(130) \quad A_1 = \frac{1}{1 - \xi_{1,2}} - X(1 + \xi_{1,2}^2),$$

$$(131) \quad B_1 = \xi_{1,2} \left( -\frac{1}{1 - \xi_{1,2}} + X\xi_{1,2} \right).$$

Si nous considérons la figure de volume égal à  $\frac{4}{3}\pi$  et de rayons équatoriaux  $a'$  et  $a$ , avec  $a' = a\xi_{1,2}$ , nous voyons que

$$\frac{4}{3}\pi = 2\pi \int_{a'}^a \frac{x^2(\omega^2x^4 + Ax^2 + B)dx}{\sqrt{x^2 - (\omega^2x^4 + Ax^2 + B)^2}};$$

et, si l'on pose encore

$$\frac{x}{a} = x_1, \quad X = \omega^2a^3,$$

on trouve facilement que

$$\frac{4}{3} \pi = a^3 \cdot 2\pi v(X),$$

d'où

$$(132) \quad a^3 = \frac{2}{3v(X)}$$

et

$$(133) \quad \omega^2 = \frac{3X \cdot v(X)}{2}.$$

Nous avons donc ainsi exprimé  $a$  et  $\omega$ , en fonction de la seule variable  $X$ .

Nous avons

$$(134) \quad \frac{d(a^3)}{dX} = 3a^2 \frac{da}{dX} = -\frac{2}{3} \frac{v'(X)}{v^2(X)}$$

$$(135) \quad \frac{d(\omega^2)}{dX} = 2\omega \frac{d\omega}{dX} = \frac{3}{2} [v(X) + Xv'(X)].$$

Nous allons faire quelques remarques sur  $\rho(X)$  et  $\rho'(X)$ .

Pour  $X = 2,32$ ,  $\frac{\partial \eta(0, X)}{\partial X} = -\Theta'(X)$  a une valeur finie et égale à  $-0,31$ , environ, d'après la formule (26) de la première partie.

A une variation  $dX$  du premier ordre, à partir de  $2,32$ , correspond donc, pour  $\eta(0, X)$ , une variation négative et du premier ordre. Comme la courbe  $(\xi, \eta)$  est toujours tangente à l'axe des  $\eta$ , au point  $\xi = 0$ , il s'ensuit que la fonction  $\xi_{1,2}$ , ici égale à  $\xi_1$ , varie à partir de zéro, d'une quantité du second ordre; de sorte que

$$(136) \quad \frac{d\xi_{1,2}}{dX} = 0, \quad \text{pour } X = 2,32.$$

Si, d'après (129), on regarde  $\rho(X)$  comme une fonction de  $X$ , par l'intermédiaire de  $\xi_{1,2}$ , pour une part, et par  $X$ , directement, pour une autre part, on a

$$v'(X) = \frac{\partial v}{\partial \xi_{1,2}} \frac{d\xi_{1,2}}{dX} + \frac{\partial v}{\partial X}.$$

Donc, d'après (136), et comme  $\frac{\partial v}{\partial \xi_{1,2}}$  est fini pour  $\xi_{1,2} = 0$  <sup>(1)</sup>, on a :

$$v'(X) = \frac{\partial v}{\partial X}, \quad \text{pour } X = 2,32,$$

---

(1) Il suffit, pour le voir, de raisonner à peu près comme après (124), mais, ici, la présence de  $x_1^2$  au numérateur fait que le rapport  $\frac{v(\xi, X) - v(0, X)}{\xi}$  tend vers une quantité finie, quand  $\xi$  tend vers zéro, pour  $X$  constant.

$\frac{\partial v}{\partial X}$  représentant la dérivée de l'intégrale (129), par rapport à X, après qu'on y a fait  $\xi_{1,2} = 0$ .

Mais, si l'on se reporte à la définition de  $v(X)$  et à la formule (74) de la première partie de ce mémoire et si l'on compare (74) à (132), on constate que quel que soit X,

$$v(X) \equiv \frac{Y}{3X}, \quad \text{pour} \quad \xi_{1,2} = 0$$

Y(X) étant la fonction de X étudiée au n° 7.

D'où, pour  $\xi_{1,2} = 0$  et quel que soit X.

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{X \frac{dY}{dX} - Y}{3X^2}.$$

On en déduit que, pour  $X = 2,32$ , on a, d'après (134) et (135), sur la courbe  $(\omega, a)$  des anneaux

$$(137) \quad \frac{d(a^3)}{dX} = 3a^2 \frac{da}{dX} = -\frac{2v'(X)}{3v^2(X)} = 2 \frac{Y - X \frac{dY}{dX}}{Y^2}$$

$$(138) \quad \frac{d(\omega^2)}{dX} = 2\omega \frac{d\omega}{dX} = \frac{3}{2}[v(X) + Xv'(X)] = \frac{1}{2} \frac{dY}{dX}.$$

Ce sont les valeurs trouvées pour les masses non annulaires, juste avant (73), pour X quelconque compris entre 0 et 2,32.

On en déduit tout de suite qu'au point de départ des anneaux, pour  $X = 2,32$ , la courbe  $(\omega, a)$  relative aux anneaux est tangente à la courbe  $(\omega, a)$  relative aux figures à points sur l'axe de révolution, étudiées dans la première partie de ce mémoire.

Pour cette valeur  $X = 2,32$ , on a (n° 7)  $Y = 1$  et, environ,  $\frac{dY}{dX} = -0,40$ ; on trouve, d'après (137) et (138), que

$$(139) \quad \frac{d(a^3)}{dX} = +3,8, \quad \frac{d(\omega^2)}{dX} = -0,20, \quad \text{pour } X = 2,32.$$

#### 47. Remarques sur la variation des rayons équatoriaux $a$ et $a'$ en fonction de $\omega$ .

D'après ce qui vient d'être dit, la courbe  $(\omega, a)$  des anneaux est tangente à la courbe  $(\omega, a)$  des masses centrales, au point  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ ,  $a = 1,67$ , pour

lequel  $X = \omega^2 a^3 = 2,32$  et qui est le point de départ des anneaux (voir tableau de résultats numériques de n° 30). Comme le long de l'évolution de la masse centrale  $X$  croissait continuellement de 0 à 2,32, tandis que, pour les anneaux,  $X$  décroît d'abord en partant de 2,32 (n° 46), on voit que les courbes  $(\omega, a)$  de la masse centrale et de l'anneau sont *tangentes au point de départ des anneaux en y formant à elles deux un rebroussement*; en effet, d'après (137) et (138), valables en ce point, pour les deux courbes, le changement de signe de  $dX$  entraîne celui de  $da$  et de  $d\omega$ .

De (139), on déduit facilement que le coefficient angulaire de la tangente commune au point  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$  et  $a = 1,67$  est égal à :

$$\frac{da}{d\omega} = -3,2.$$

Considérons maintenant le petit rayon équatorial,  $a'$ , de l'anneau. On a, d'après le n° 46, la relation écrite après 131),

$$(140) \quad a' = a\xi_{1,2}$$

$$(141) \quad \frac{da'}{d\omega} = \xi_{1,2} \frac{da}{d\omega} + a \frac{d\xi_{1,2}}{dX} \frac{dX}{d\omega}.$$

Mais pour  $X = 2,32$ , on a  $\xi_{1,2} = 0$  et aussi, d'après (136),  $\frac{d\xi_{1,2}}{dX} = 0$ .

$\frac{da}{d\omega}$  et  $\frac{dX}{d\omega}$  étant finis, d'après (139), pour  $X = 2,32$ , on a donc, au point de départ des anneaux,

$$(142) \quad \frac{da'}{d\omega} = 0,$$

c'est-à-dire que la courbe  $(\omega', a)$  est tangente à l'axe des  $\omega$ , au point  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ .

Remarquons aussi que  $\xi_{1,2} = \frac{a'}{a}$  croît continuellement pendant que  $X$  décroît de 2,32 jusqu'à son minimum et pendant que  $X$  croît ensuite de son minimum jusqu'à  $+\infty$  (n° 46). Ainsi donc  $\frac{a'}{a}$  croît continuellement lorsqu'on parcourt la courbe d'équilibre  $(\omega, a)$  des anneaux, en partant de la figure aux deux pôles confondus et en se dirigeant vers le tore infiniment long et délié.

Il est intéressant d'étudier la section méridienne quand  $\xi_{1,2}$  se rapproche de 1. C'est ce que nous allons faire dans le n° suivant où nous désignerons  $\xi_{1,2}$  par  $\xi$ , sans indice, pour simplifier l'écriture.

**48. Etude de la surface, par développements en séries, quand  $\frac{a'}{a}$  est suffisamment voisin de 1.**

Nous savons déjà (41) que, pour  $\omega$  infiniment petit,  $1 - \frac{a'}{a}$  est un infiniment petit de l'ordre de  $\omega^2$  et que la surface d'équilibre est, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, un tore infiniment long et infiniment délié.

Cherchons à déterminer une surface beaucoup plus approchée, utilisable pour  $\frac{a'}{a} = \xi$  moins voisin de 1.

Posons

$$1 - \xi = \varepsilon.$$

Reprenons l'intégrale en  $x_1$  du commencement du n° 46, en lui donnant  $x_1$ , comme limite supérieure, et posons

$$(143) \quad y_1 = \int_{\xi}^{x_1} \frac{-(Xx_1^2 + A_1x_1^2 + B_1)dx_1}{\sqrt{x_1^2 - (Xx_1^2 + A_1x_1^2 + B_1)^2}}$$

avec, toujours,

$$(144) \quad A_1 = \frac{1}{1-\xi} - X(1+\xi^2) = \frac{1}{\varepsilon} - X - X(1-\varepsilon)^2,$$

$$(145) \quad B_1 = \xi \left( -\frac{1}{1-\xi} + X\xi \right) = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + X(1-\varepsilon)^2.$$

Remarquons que

$$A_1 + B_1 = 1 - X.$$

On trouve facilement que

$$(146) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1^2 - (Xx_1^2 + A_1x_1^2 + B_1)^2 &\equiv (1-x_1^2)(x_1^2 - \xi^2) \left\{ X^2x_1^2 + \left[ \frac{2X}{1-\xi} - X^2(1+\xi^2) \right] x_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{1-\xi} + X\xi \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Le dernier facteur de (146) est égal à

$$(147) \quad X^2x_1^2 + \left[ \frac{2X}{\varepsilon} - X^2 - X^2(1-\varepsilon)^2 \right] x_1^2 + \left[ -\frac{1}{\varepsilon} + X(1-\varepsilon) \right]^2.$$

Posons

$$(148) \quad \frac{x_1 - \xi}{1 - \xi} = t.$$

D'où

$$\begin{aligned} x_1 - \xi &= \varepsilon t, & x_1 + \xi &= 2 - \varepsilon(2-t), \\ x_1 &= 1 - \varepsilon(1-t) \\ 1 - x_1 &= \varepsilon(1-t), & 1 + x_1 &= 2 - \varepsilon(1-t), \\ 1 - x_1^2 &= 2\varepsilon(1-t) - \varepsilon^2(1-t)^2 \\ dx_1 &= \varepsilon dt. \end{aligned}$$

L'expression (147) est égale à  $\frac{1}{\varepsilon^3} D_1$ , avec,

$$\begin{aligned} D_1 &= [-1 + X\varepsilon(1 - \varepsilon)]^2 + [2X - \varepsilon X^2 - \varepsilon^2 X(1 - \varepsilon)^2] \varepsilon x_i^2 + \varepsilon^2 X^2 x_i^4 \\ &= 1 + 2\varepsilon X(-1 + x_i^2) + \varepsilon^2(2X + X^2 - 2X^2 x_i^2 + X^2 x_i^4) - 2\varepsilon^3 X^2(1 - x_i^2) + X^2 \varepsilon^4(1 - x_i^2) \\ &= 1 - 2\varepsilon X(1 - x_i^2) + \varepsilon^2[2X + X^2(1 - x_i^2)^2] - 2\varepsilon^3 X^2(1 - x_i^2) + \varepsilon^4 X^2(1 - x_i^2) \\ &= 1 + 2\varepsilon^2 X(-1 + 2t) + 2\varepsilon^3 X(1 - t)^2 - 4\varepsilon^4 X^2(1 - t)t + 2\varepsilon^5 X^2(1 - t)t(3 - 2t) \\ &\quad + \varepsilon^6 X^2(1 - t)^2 t(t - 2). \end{aligned}$$

Considérons maintenant

$$(1 - x_i^2)(x_i^2 - \xi^2) = 4\varepsilon^2 t(1 - t) \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 - t)\right] \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(2 - t)\right].$$

Nous poserons

$$D_2 = \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 - t)\right] \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(2 - t)\right]$$

Passons enfin à  $Xx_i^4 + Ax_i^2 + B$ , qui est égal à

$$\begin{aligned} &Xx_i^4 + (1 - X - B)x_i^2 + B \\ &= x_i^2 - Xx_i^2(1 - x_i^2) + B(1 - x_i^2) \\ &= 1 + (1 - x_i^2)(-1 + B - Xx_i^2) \\ &= 1 + (1 - x_i^2) \left[-\frac{1}{\varepsilon} - 2\varepsilon X + \varepsilon^2 X + X(1 - x_i^2)\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} N \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} N &= \varepsilon + (1 - t)[2\varepsilon - \varepsilon^2(1 - t)] \left\{-1 - 2\varepsilon^2 X + \varepsilon^3 X + X(1 - t)[2\varepsilon^2 - \varepsilon^3(1 - t)]\right\} \\ &= -\varepsilon(1 - 2t) + \varepsilon^2(1 - t)^2 - 4\varepsilon^3 X t(1 - t) + 2\varepsilon^4 X t(1 - t)(3 - 2t) - \varepsilon^5 X(1 - t)^2 t(2 - t). \end{aligned}$$

Nous avons, en tenant compte de (148)

$$(149) \quad y_1 = -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{N dt}{\sqrt{t(1-t)} \sqrt{D_1} \sqrt{D_2}},$$

et nous savons, d'après le n° 41, que pour  $\omega$  infiniment petit,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2 X = \alpha$  sont tous deux infiniment petits de l'ordre de  $\omega^2$ .

Nous allons développer

$$N D_1^{-\frac{1}{2}} D_2^{-\frac{1}{2}}$$

en une série entière en  $\varepsilon$  et  $\alpha$ .

On a

$$(150) \quad \begin{cases} N = -\varepsilon(1 - 2t) + \varepsilon^2(1 - t)^2 - 4\alpha\varepsilon(1 - t)t \\ \quad + 2\alpha\varepsilon^2 t(1 - t)(3 - 2t) - \alpha\varepsilon^3(1 - t)^2(2 - t). \end{cases}$$

Passons à  $D_1$

$$D_1 = 1 + 2\alpha(-1 + 2t) + 2\alpha\epsilon(1 - t)^2 - 4\alpha^2(1 - t)t \\ + 2\alpha^2\epsilon(1 - t)t(3 - 2t) + \alpha^2\epsilon^2(1 - t)^2t(t - 2).$$

Par la formule du binôme, il vient

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1^{-\frac{1}{2}} = 1 - \alpha(-1 + 2t) - \alpha\epsilon(1 - t)^2 + \frac{\alpha^2}{2}[3 - 8t(1 - t)] \\ \quad + \alpha^2\epsilon(1 - t)[-3 + 2t(3 - 2t)] \\ \quad - \frac{\alpha^3}{2}(-1 + 2t)[5 - 8t(1 - t)] \\ \quad \dots \end{array} \right.$$

Passons à  $D_2$

Par la formule du binôme, il vient

$$(152) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2^{-\frac{1}{2}} = [1 + \frac{\epsilon}{4}(1 - t) + \frac{3}{32}\epsilon^2(1 - t)^2 + \frac{5}{128}\epsilon^3(1 - t)^3 \dots] \\ \quad \times [1 + \frac{\epsilon}{4}(2 - t) + \frac{3}{32}\epsilon^2(2 - t)^2 + \frac{5}{128}\epsilon^3(2 - t)^3 \dots] \\ \quad = 1 + \frac{\epsilon}{4}(3 - 2t) + \frac{\epsilon^2}{32}(19 - 24t + 8t^2) + \frac{\epsilon^3}{128}(63 - 114t + 72t^2 - 16t^3) \dots \\ \quad \dots \end{array} \right.$$

La méthode de développement de  $D_1^{-\frac{1}{2}}$  est valable à la condition que, dans tout l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ , la quantité  $D_1 - 1$  soit inférieure à 1, en valeur absolue et qu'il en soit de même de la somme des valeurs absolues de ses cinq termes, afin que les groupements de termes opérés pour obtenir (151) soient légitimes.

Pour  $D_2$ , le développement est toujours valable, puisque  $\epsilon < 1$ .

Effectuons le produit  $ND_1^{-\frac{1}{2}}D_2^{-\frac{1}{2}}$ , en multipliant entre elles les séries (150), (151) et (152), toutes absolument convergentes dans tout l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ .

Multipliant le produit  $ND_1^{-\frac{1}{2}}D_2^{-\frac{1}{2}}$  par  $\frac{-dt}{2\sqrt{t(1-t)}}$  et intégrant entre zéro et  $t$ , on obtient  $y_1$  sous la forme suivante, dont la validité est facile à montrer :

$$(153) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = P_1\epsilon + P_2\epsilon^2 + P_3\alpha\epsilon + P_4\epsilon^3 + P_5\alpha\epsilon^2 + P_6\alpha^2\epsilon \\ \quad + P_7\epsilon^4 + P_8\alpha\epsilon^3 + P_9\alpha^2\epsilon^2 + P_{10}\alpha^3\epsilon + \dots \\ \quad \dots \end{array} \right.$$

où les  $P$  sont des fonctions de  $t$ , qu'on obtient toutes par des intégrations élémentaires, quel que soit le rang de  $P$ .

Tous les termes de (153) renferment  $\varepsilon$ , car tous les termes de N le contiennent.

Pour  $x_1$  donné, différent de 1, les P varient avec  $\varepsilon$ , car la limite supérieure des intégrations dépend de  $\varepsilon$ , d'après (148). Mais, pour  $x_1 = 1$ , on a  $t = 1$ , quel que soit  $\varepsilon$ , et les P deviennent tous des constantes,  $P_n^1$ , indépendantes de  $\varepsilon$ .

Comme le méridien se ferme, on doit avoir

$$(154) \quad 0 = P_1^1 \varepsilon + P_2^1 \varepsilon^2 + P_3^1 \alpha \varepsilon + \dots,$$

d'où l'on peut tirer le développement de  $\varepsilon$  en série entière en  $\alpha$ , ou inversement.

On trouve

$$(155) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1^{-\frac{1}{2}} D_2^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \alpha(-1 + 2t) + \frac{\varepsilon}{4} (3 - 2t) + \frac{\varepsilon^2}{32} (19 - 24t + 8t^2) \\ &\quad - \frac{\alpha \varepsilon}{4} + \frac{\alpha^2}{2} (3 - 8t + 8t^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^3}{128} (63 - 114t + 72t^2 - 16t^3) - \frac{\alpha \varepsilon^2}{32} (5 - 2t) \\ &\quad + \frac{\alpha^2 \varepsilon}{8} (-15 + 42t - 40t^2 + 16t^3) \\ &\quad - \frac{\alpha^3}{2} (-5 + 18t - 24t^2 + 16t^3). \end{aligned} \right.$$

$$(156) \quad \left\{ \begin{aligned} ND_1^{-\frac{1}{2}} D_2^{-\frac{1}{2}} &= -\varepsilon(1 - 2t) + \frac{\varepsilon^2}{4} - \alpha \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{32} (5 - 2t) \\ &\quad + \frac{\alpha \varepsilon^2}{4} (5 - 6t) + \frac{3}{2} \alpha^2 \varepsilon (-1 + 2t) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^4}{128} (13 - 8t) + \frac{\alpha \varepsilon^3}{32} (-3 + 8t - 8t^2) \\ &\quad + \frac{3\alpha^2 \varepsilon^2}{8} (9 - 24t + 16t^2) \\ &\quad + \frac{\alpha^3 \varepsilon}{2} (-5 + 16t - 16t^2) \end{aligned} \right.$$

D'où

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-2t)dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \sqrt{t(1-t)},$$

$$P_2 = -\frac{1}{8} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = -\frac{1}{8} \arcsin(2t-1) - \frac{\pi}{16},$$

$$P_3 = -4P_2,$$

$$\begin{aligned}
 P_3 &= -\frac{1}{64} \int_0^t \frac{t(5-2t)dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{P_2}{2} - \frac{P_1}{32}, \\
 P_5 &= -\frac{1}{8} \int_0^t \frac{t(5-6t)dt}{\sqrt{t(1-t)}} = -\frac{3}{4} P_1 + 2P_2, \\
 P_6 &= +\frac{3}{4} \int_0^t \frac{t(1-2t)dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{3}{2} P_1, \\
 P_7 &= -\frac{1}{256} \int_0^t \frac{t(13-8t)dt}{\sqrt{t(1-t)}} = -\frac{P_1}{32} + \frac{9P_2}{32}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

et l'on a, pour  $t = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 P_1^1 &= 0, & P_2^1 &= -\frac{\pi}{8}, & P_3^1 &= \frac{\pi}{2}, \\
 P_4^1 &= -\frac{\pi}{16}, & P_5^1 &= -\frac{\pi}{4}, & P_6^1 &= 0, \\
 P_7^1 &= -\frac{9\pi}{256}, & P_8^1 &= \frac{\pi}{32}, & P_9^1 &= -\frac{9}{16}\pi, \\
 P_{10}^1 &= \frac{3\pi}{4}, & & & & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

La relation (154) s'écrit, après division par  $\varepsilon$ ,

$$(157) \quad -\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{\alpha\varepsilon}{4} - \frac{9\varepsilon^3}{256} + \frac{1}{32}\alpha\varepsilon^2 - \frac{9}{16}\alpha^2\varepsilon + \frac{3}{4}\alpha^3 \dots = 0.$$

Les termes non écrits sont d'ordre égal ou supérieur à 4.

On en déduit que

$$(158) \quad 4\alpha = \varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{29}{32}\varepsilon^3 \dots$$

Et, comme  $\alpha = X\varepsilon^2$ , on peut en tirer que

$$(159) \quad X = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 + \frac{29}{32}\varepsilon \dots \right).$$

Pour  $\varepsilon$  infiniment petit, on a donc, à des infiniment petits près d'ordre supérieur

$$(160) \quad \varepsilon = \frac{1}{4X}.$$

Ce résultat est en accord avec les formules (103) et (105) relatives au tore infiniment long et délié.

Si l'on porte dans (153) cette valeur (158) de  $\alpha$ , puis, si l'on y remplace les P par leurs valeurs en  $t$ , on a :

$$(161) \quad y_1 = \varepsilon\sqrt{t(1-t)} - \frac{1}{8}\varepsilon^3\sqrt{t(1-t)} + \frac{\varepsilon^5}{128}(-19 + 6t)\sqrt{t(1-t)} \dots,$$

où l'on remarque l'absence d'un terme en  $\varepsilon^2$ .

On déterminerait, dans chaque cas, une limite de l'erreur commise sur  $y_1$ , en déterminant une limite du reste de la série (153), ce qu'on peut faire en calculant une borne supérieure, dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ , de l'erreur commise sur chacun des facteurs  $N$ ,  $D_1^{-\frac{1}{2}}$ ,  $D_2^{-\frac{1}{2}}$ , puis sur  $y_1$ , en s'arrêtant aux termes d'un certain rang.

On voit, sur (161), que la courbe méridienne de la surface d'équilibre, pour  $\varepsilon$  petit, ne diffère du premier terme de son développement

$$\varepsilon\sqrt{t(1-t)},$$

que d'une quantité du 3<sup>e</sup> ordre en  $\varepsilon$ .

Or  $\varepsilon\sqrt{t(1-t)}$  représente l'ordonnée de la section méridienne du tore, ayant les mêmes rayons équatoriaux  $1 - \varepsilon$  et  $1$ .

*L'erreur commise en assimilant la surface d'équilibre à un tore, pour  $\varepsilon$  petit, est donc de l'ordre de  $\varepsilon^3$ .*

Si nous conservons les termes du 3<sup>e</sup> ordre, nous avons, avec une erreur du 4<sup>e</sup> ordre,

$$y_1 = \varepsilon\sqrt{t(1-t)} \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \right)$$

équation d'une ellipse dont le rapport des axes est égal à  $1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2$ .

*L'erreur commise en assimilant la section méridienne de l'anneau, à une ellipse, pour  $\varepsilon$  petit, est donc de l'ordre de  $\varepsilon^4$ .*

On trouverait, par des calculs analogues, le développement en série entière en  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ , de la fonction  $\nu$  du n<sup>o</sup> 46, puis son développement en série entière en  $\varepsilon$ , en tenant compte de (157).

On trouve

$$(162) \quad \nu = \frac{\pi}{4} \left( \frac{3}{2}\varepsilon^2 - 2\alpha\varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon^3 + 3\alpha\varepsilon^2 \dots \right)$$

$$(163) \quad \nu = \frac{\pi}{4}\varepsilon^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \dots \right).$$

De la même manière, on peut développer en séries entières en  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ , puis

en série entière en  $\varepsilon$ , le moment d'inertie de la masse annulaire de rayons équatoriaux  $1 - \varepsilon$  et  $1$ .

On trouve que ce moment d'inertie est égal à

$$(164) \quad \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{5\varepsilon^2}{4} - \alpha\varepsilon - \frac{15}{8} \varepsilon^3 + \frac{5}{2} \alpha\varepsilon^2 \dots \right),$$

ou à

$$(155) \quad \frac{\pi^2\varepsilon^2}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \varepsilon \dots \right).$$

*En pratique*, on calculera  $\nu$  et le moment d'inertie à des quantités du 5<sup>e</sup> ordre près, en considérant la masse comme ayant une section elliptique, dont le rapport des axes est  $1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2$ . Le volume et le moment d'inertie de la masse sont ceux du tore de mêmes circonférences équatoriales, multipliés par  $1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2$ . Ayant  $\nu$ , on calculera  $a^3$  par (132), puis  $X$  par (159), puis  $\omega^2$  par (133).

#### 49. Résultats numériques et courbes $(\omega, a)$ et $(\omega, a')$ pour les anneaux.

$X = \omega^2 a^3$	$\frac{a'}{a}$	$\varepsilon = 1 - \frac{a'}{a}$	$a$	$a'$	$\omega^2$	$\omega$	$\frac{J}{2\pi}$	$\frac{\Omega}{2\pi}$	$\frac{\text{Energie}}{2\pi}$
2,32	0	1	1,67	0	$\frac{1}{2}$	0,707	1,0	3,4	0,67
1,75	0,054	0,846	1,48	0,08	0,54	0,734	0,71	2,89	0,55
1,00	0,31	0,69	1,47	0,46	0,31	0,56	0,74	2,85	0,47
0,9 (minimum approximatif)									
1,00	0,63	0,37	2,0	1,26	0,125	0,35			
$\infty$	1	0	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Les nombres de la première ligne correspondent à la figure aux pôles confondus étudiée dans la première partie de ce mémoire. Ils résultent donc de calculs effectués à l'aide des intégrales elliptiques de Legendre.

Ceux des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> lignes ont été calculés à l'aide d'intégrations approchées.

Les autres résultent de l'application de notre méthode de développements en séries. La section de la surface annulaire y a été assimilée à une ellipse.

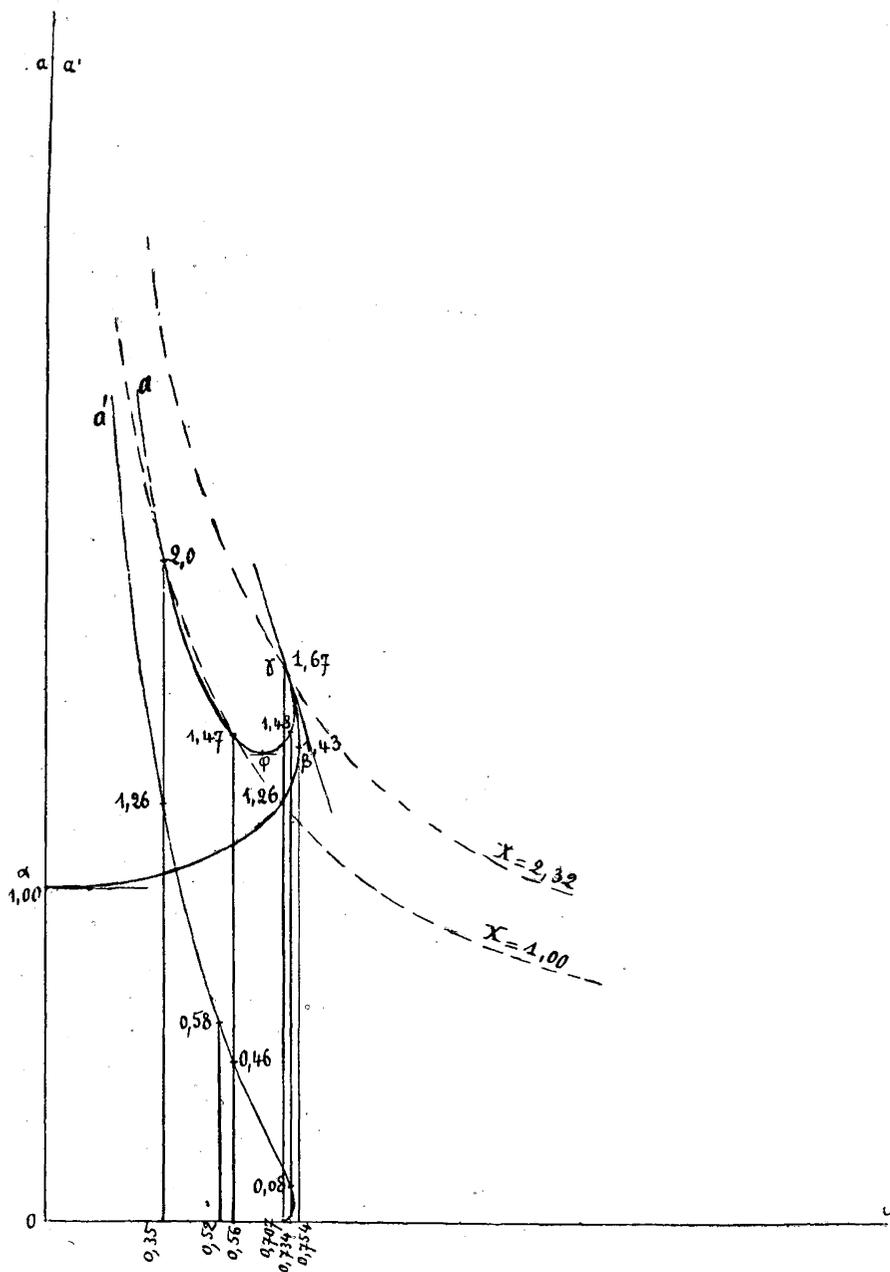


Fig. 11.

Ceux de la dernière ligne correspondent au tore infiniment long et infiniment délié de vitesse infiniment petite.

La partie  $\alpha\beta\gamma$  de la courbe  $(\omega, a)$  de la figure 11 est relative aux masses centrales (n° 30 de la première partie).

Nous avons tracé en pointillé, les courbes  $X = 1$  et  $X = 2,32$ .

D'après ce qui a été dit au n° 47, la courbe  $(\omega, a)$  des anneaux se raccorde tangentiellement, au point  $\gamma$ , avec la courbe  $(\omega, a)$  des masses centrales et ces courbes forment, à elles deux, un rebroussement; et la courbe  $(\omega, a')$  est tangente à l'axe  $0\omega$ , au point  $\omega = 0,707$ .

Pour  $\omega$  tendant vers zéro, les deux courbes  $(\omega, a)$  et  $(\omega, a')$  des anneaux tendent asymptotiquement vers l'axe des  $0a$ .

La courbe  $(\omega, a)$  des anneaux est tangente à une courbe  $X = \text{constante}$ ; cette constante est voisine de 0,9; au point de tangence, on a, puisque  $X$  est minimum,

$$(166) \quad \frac{da}{d\omega} = -\frac{2a}{3\omega}.$$

#### 50. Formes successives des anneaux.

La figure correspondant au point  $\gamma$  de la courbe  $(\omega, a)$  est pointue d'un bout, arrondie de l'autre, si l'on considère la moitié de la section méridienne de la masse centrale aux deux pôles confondus.

Ensuite, pour  $a'$  très petit, on a une section *piriforme*, avec deux points d'inflexion dans chaque quart de méridien. D'après (91), ces points d'inflexion sont déterminés par les abscisses  $x$  telles que

$$(167) \quad 3\omega^2 x^4 + Ax^2 - B = 0,$$

c'est-à-dire telles que

$$(168) \quad x = \sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 12B\omega^2}}{6\omega^2}}.$$

Si le long de la courbe d'équilibre de la figure 11, on étudie la réalité de la quantité (168), on voit que les inflexions disparaissent vite, leurs abscisses devenant imaginaires.

Déjà, pour  $a' = 0,08$ ,  $a = 1,48$ ,  $\omega = 0,734$ , la figure est partout convexe. Elle affecte la forme de la figure 12, déterminée par des intégrations approchées.

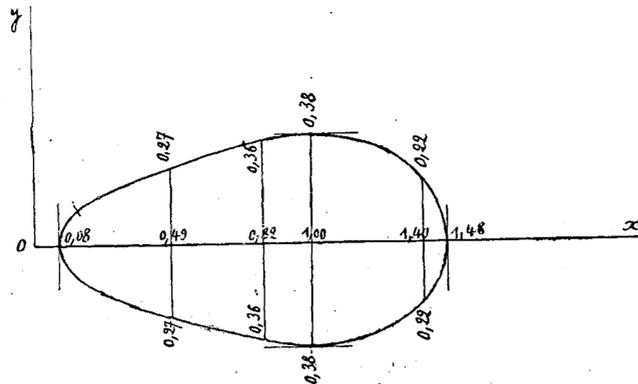


Fig. 12.

Puis,  $\frac{a'}{a}$  croissant toujours, la figure continue à s'arrondir.

Pour  $a' = 0,46$ ,  $a = 1,47$ ,  $\omega = 0,56$ , on a la forme de la figure 12 bis.

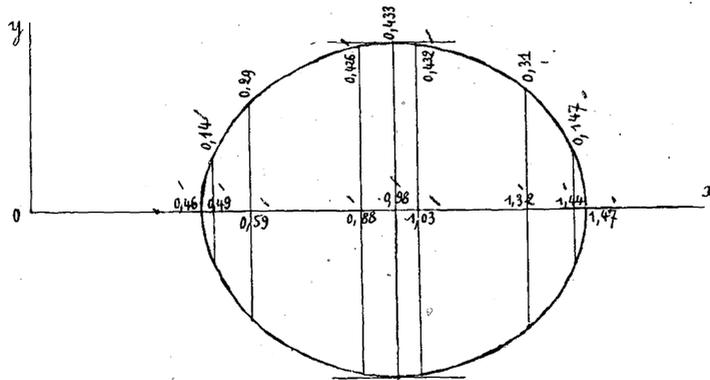


Fig. 12 bis.

Pour cette figure,  $\varepsilon = 1 - \frac{a'}{a} = 0,69$ . Nous sommes déjà très près d'une section elliptique.

Et nous savons (n° 48) que la section diffère de moins en moins d'une ellipse, au fur et à mesure que,  $\omega$  décroissant,  $\frac{a'}{a}$  tend vers 1.

51. Courbes de variation du moment d'inertie  $J$ , en fonction de  $\omega$  et de l'aire  $\Omega$  de la surface libre.

La figure 13 représente la courbe de  $J$ , en fonction de  $\omega$ , pour une masse liquide donnée. La partie inférieure est relative aux masses centrales et la partie supérieure, aux figures annulaires. Le système d'unités est toujours le système spécial à la masse considérée.

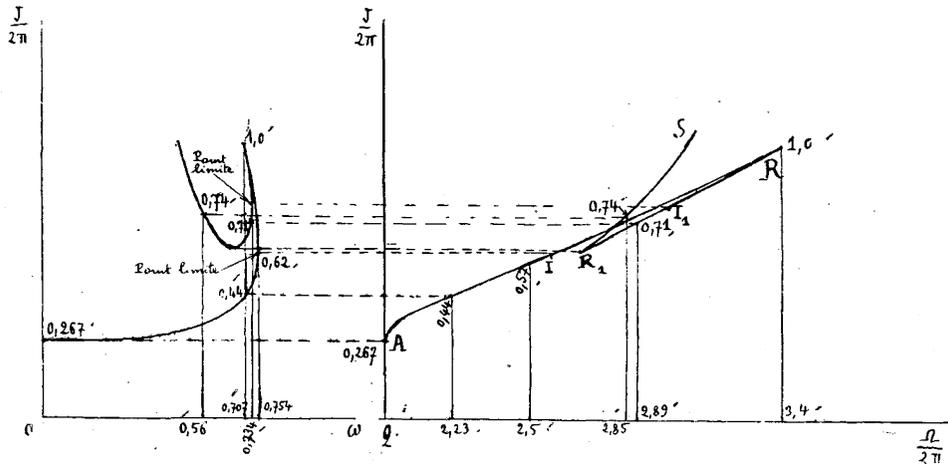


Fig. 13.

Fig. 14.

Le moment d'inertie d'une masse annulaire de rayons équatoriaux  $a'$  et  $a$  est égal à

$$J = \pi \int_{a'}^a \frac{x^4(\omega^2 x^4 + Ax^2 + B)dx}{\sqrt{x^2 - (\omega^2 x^4 + Ax^2 + B)^2}}$$

et, en reprenant les notations du n° 46, employées entre (129) et (132), on a :

$$J = \pi a^5 \int_{\xi}^1 \frac{x_1^4 (Xx_1^4 + A_1 x_1^2 + B_1) dx_1}{\sqrt{x_1^2 - (Xx_1^4 + A_1 x_1^2 + B_1)^2}}$$

et, en regardant  $\xi$ ,  $A_1$  et  $B_1$ , comme des fonctions de  $X$  et en désignant par  $j(X)$  l'intégrale précédente, on a

$$J = \pi a^5 \cdot j(X).$$

En raisonnant sur  $j(X)$ , comme on l'a fait pour  $v(X)$ , au n° 46, après (136), on voit que la courbe  $(\omega, J)$  des anneaux est tangente à celle des masses cen-

trales, au point de départ des anneaux *et que ces deux courbes y constituent un rebroussement.*

La figure 14 représente la courbe  $(\Omega, J)$  pour une même masse liquide. La partie AIR est relative à une masse centrale ; c'est la reproduction de la figure 6 de la 1<sup>re</sup> partie. La partie  $RI_1R_1S$  est relative aux masses annulaires.

La formule  $\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2f}{\omega^2}$ , qui s'écrit  $\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{1}{4\omega^2}$ , dans notre système d'unités, est valable pour les masses annulaires comme pour les masses centrales (n° 32).

Cette relation et le rapprochement des figures 13 et 14 permettent de constater que la courbe  $(\Omega, J)$  des anneaux forme un rebroussement R, avec la partie de courbe AIR relative aux masses centrales, puis présente une inflexion  $I_1$  correspondant à la vitesse maxima des anneaux, puis un autre rebroussement  $R_1$  correspondant aux minima simultanés de J et de  $\Omega$ , puis croît avec une tangente dont le coefficient angulaire va en croissant, puisque  $\omega$  décroît.

On a donc,

entre R et  $I_1$ ,  $\frac{d^2J}{d\Omega^2} > 0$  ;

entre  $I_1$  et  $R_1$ ,  $\frac{d^2J}{d\Omega^2} < 0$  ;

à partir de  $R_1$ , vers S,  $\frac{d^2J}{d\Omega^2} > 0$ .

## 52. Etude de la stabilité de l'équilibre des anneaux.

Raisonnant comme nous l'avons fait au n° 38, pour les masses centrales, nous voyons encore que le coefficient de stabilité  $\alpha$  peut s'écrire

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{d\Omega}{da} \right)^2 \frac{d^2J}{d\Omega^2},$$

où  $a$  est le rayon équatorial extérieur de l'anneau.

Si  $\alpha$  est négatif, nous disons que l'équilibre est stable ; si  $\alpha$  est positif, l'équilibre est instable.

D'après ce qui a été dit au n° 51, sur le signe de  $\frac{d^2J}{d\Omega^2}$ , on voit que :

1° Les anneaux sont *instables*, entre R et  $I_1$  de la figure 14 ;

2° Les anneaux sont *stables*, entre  $I_1$  et  $R_1$  de la figure 14 ;

3° Les anneaux sont *instables*, à partir de  $R_1$ , vers S, de cette même figure.

Les anneaux sont instables, depuis leur vitesse de départ  $\omega = 0,707$ , jusqu'à leur vitesse limite voisine de  $0,74$ .

Ils deviennent stables, entre leur vitesse limite et la vitesse qui rend minimum le moment d'inertie de la masse et l'aire de la surface libre et qui est voisine de  $0,66$ .

Ils deviennent instables pour  $\omega$  compris entre  $0,66$  et  $0$ .

### 53. Courbe de variation en fonction de $\omega$ de l'énergie totale $\mathcal{E}$ de l'anneau.

La figure 15 représente la courbe de variation de  $\mathcal{E}$  en fonction de la vitesse de rotation  $\omega$ .

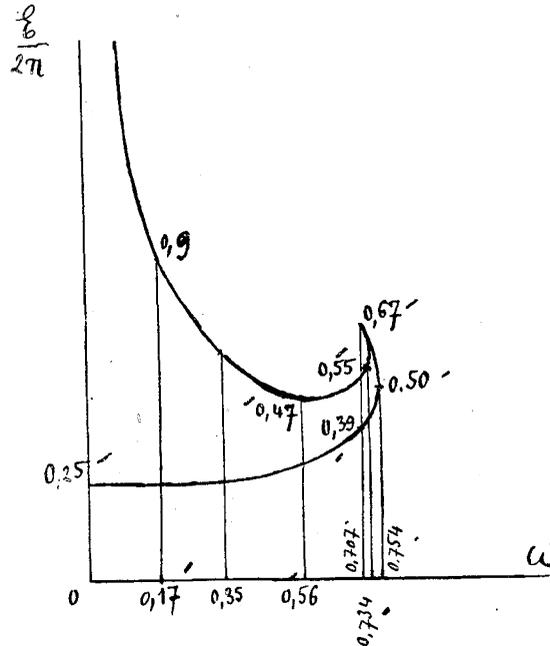


Fig. 15

La partie inférieure est relative aux masses centrales ; c'est la reproduction de la figure 9 de la première partie. La partie supérieure s'applique aux anneaux.

La courbe  $(\omega, J)$  et, par suite, la courbe  $(\omega, \Omega)$ , présentant un rebroussement (n° 51), au point de départ des anneaux, il en est de même de la courbe  $(\omega, \varepsilon)$ , puisque

$$\varepsilon = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{\Omega}{8}.$$

Comme nous l'avons dit au n° 41,  $\varepsilon$  tend vers l'infini, quand  $\omega$  tend vers zéro.

---

## CHAPITRE III

### DISCUSSION DE L'EXPÉRIENCE DE PLATEAU

---

**54. Les théories précédentes sont applicables au problème de cette expérience.**

La théorie de la première partie de ce mémoire, sur les masses centrales et la théorie précédente des anneaux supposent que la masse est sans pesanteur et que la pression extérieure est uniforme. De plus, en ce qui concerne les masses centrales, la théorie suppose qu'il n'y a pas d'axe matériel de rotation.

Mais, sur ce dernier point, nous avons déjà montré au n° 42, que la présence du petit axe, fin, de l'expérience de Plateau pouvait être négligée, comme ne changeant pas sensiblement les phénomènes d'évolution de la masse centrale.

Il reste à considérer ensuite le fait que la masse est pesante, dans l'expérience de Plateau. Mais, comme elle est immergée dans un liquide de même densité, on voit, en écrivant les équations du problème, dans ces conditions, qu'elles sont identiques à celles du n° 2 de la première partie, avec la seule différence que  $p_0$  et  $p_1$  représenteront ici les pressions, dans la masse en rotation et dans le liquide environnant, au pôle supérieur de la masse en rotation.

Enfin, en ce qui concerne la pression extérieure, il faut d'abord remarquer que la relation (77) reste valable, dans le cas présent d'une pression extérieure qui est fonction linéaire de la profondeur, à la seule condition de choisir, comme surface déformée, pour la démonstration du n° 32, une surface de révolution du genre qui y est indiqué, mais ayant même plan équatorial que la surface initiale; car, le travail dû à la pression extérieure, dans une telle déformation, conservant en outre le volume, est encore nul, comme celui de la pesanteur, et les conclusions du n° 32 subsistent, valables, comme nous l'avons dit, pour les masses centrales et pour les anneaux.

Il s'ensuit que nos conclusions restent également applicables à l'expérience de Plateau — la présence de l'axe négligée — en ce qui concerne la stabilité.

Pratiquement, on peut, d'ailleurs, supposer que la pression est uniforme, autour de la masse en rotation, dans l'expérience de Plateau, car cette masse a, tout au plus, quelques centimètres de hauteur, d'où une variation de pression qui est de quelques grammes seulement par  $\text{cm}^2$ , sur une pression qui, comprenant déjà la pression atmosphérique, a une valeur supérieure à 1 000 grammes par  $\text{cm}^2$ .

Disons tout de suite que le cas limite dû à la faiblesse de la pression extérieure, et signalé au n° 18, n'est pas à craindre dans l'expérience de Plateau, car la pression extérieure est considérablement supérieure à la limite inférieure fixée au n° 18. Avec les notations de ce numéro, si l'on écrit, dans le système C. G. S.,  $f = 55$ ,  $R = 3$ , on trouve, pour cette limite inférieure,

$$\frac{1}{981} \frac{2f}{1,27 \times R} = 0,03 \text{ gramme par cm}^2, \text{ alors que } p_1 \text{ est supérieure à } 1\,000 \text{ gr./cm}^2.$$

#### 55. Les résultats expérimentaux de Plateau.

En se reportant à son « Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur <sup>(1)</sup> », on voit que Plateau faisait tourner dans un mélange d'eau et d'alcool, une masse d'huile d'olive qui, au repos, affectait la forme d'une sphère de 3 centimètres de rayon. Il introduisait dans cette sphère un petit disque métallique de 1 cm. 75 de rayon, qu'il faisait tourner sur lui-même, au moyen d'un axe, le traversant perpendiculairement et en son centre; l'axe avait 1 millimètre  $\frac{1}{2}$  de diamètre. Le disque était placé de manière à avoir son centre confondu avec celui de la sphère et le disque, en tournant, entraînait l'huile par son adhérence avec elle.

En faisant tourner la masse d'huile, on constate qu'elle s'aplatit aux pôles et se renfle à l'équateur, puis se creuse en dessus et en dessous (§ 11 du mémoire de Plateau), en s'étendant dans le sens horizontal, pour arriver à la figure aux deux pôles confondus, lorsque le disque tourne à la vitesse d'un tour par seconde environ. Puis, si l'on porte la vitesse du disque à une valeur supérieure, on obtient un anneau qui, dans son état de complet développement, semble avoir pour section génératrice un cercle, et dont le diamètre moyen est compris entre 9 et 10 centimètres (§ 11 du mémoire de Plateau). On arrête ensuite le disque. L'anneau se maintient pendant quelques secondes dans le

(<sup>1</sup>) *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles*, t. XVI.

même état, puis revient peu à peu sur lui-même et se transforme de nouveau en onduloïde, autour du disque et de son axe (§ 11) Comme le fait remarquer Plateau (§ 16), il y a une grande différence de vitesse angulaire entre les portions qui avoisinent l'axe et celles qui avoisinent l'équateur <sup>(1)</sup>.

**56. Les résultats théoriques et discussion de l'expérience de Plateau, en ce qui concerne l'évolution d'une masse.**

Il faut d'abord constater que la théorie nous a exactement donné toutes les figures réalisées expérimentalement, d'abord partout convexes, puis concaves aux pôles, puis ayant leurs pôles confondus, puis annulaires. L'anneau auquel aboutit Plateau a un diamètre moyen de 9 à 10 centimètres, pour une sphère initiale de 3 centimètres de rayon. En adoptant le système d'unités spécial à cette masse, le rayon moyen de l'anneau, qui peut être pris égal à 4,9 cm., à pour mesure  $\frac{4,9}{3} = 1,63$ ; d'après notre figure 11, on voit que cet anneau a sensiblement pour petit et grand rayons équatoriaux

$$a' = 1,26, \quad a = 2,$$

soit en centimètres,

$$a' = 3,8 \text{ cm.}, \quad a = 6 \text{ centimètres,}$$

avec

$$\varepsilon = 1 - \frac{a'}{a} = 0,37$$

et, d'après la théorie du n° 48, sa section est sensiblement elliptique, avec un rapport des axes voisin de  $1 - \frac{\varepsilon^2}{8} = 0,98$ , donc très arrondie, comme on le constate dans l'expérience.

*Donc, au point de vue de la forme des figures affectées par la masse liquide, au cours de son évolution, il y a accord complet entre la théorie et l'expérience.*

Pour ce qui est des vitesses, les résultats expérimentaux de Plateau ne renferment aucun renseignement précis. D'abord, comme l'a reconnu Plateau lui-même, la masse ne tourne pas tout d'un seul bloc, bien qu'il n'y ait pas, en ce qui concerne les formes successives de la masse et d'après ce qui précède, de différence à signaler entre l'expérience et la théorie. Mais, il faut bien se garder d'attribuer à la vitesse angulaire de la masse en rotation, dans les formules théoriques, la valeur de la vitesse angulaire du disque. Cette dernière serait beaucoup trop grande, car le disque n'entraîne la masse que par frottement

---

<sup>(1)</sup> Nous prendrons, en C. G. S.,  $f = 55$  (huile-eau alcoolisée) et, pour la densité de l'huile,  $\delta = 0,915$ .

sur l'huile et sur une faible surface; et cette action d'entraînement devient très faible quand on arrive aux figures aplaties, très étendues dans leur plan équatorial et pour lesquelles la plus grosse partie de la masse est loin de l'axe et du disque; elle décroît encore, au fur et à mesure de la croissance du rayon intérieur de l'anneau et devient nulle, quand ce rayon dépasse celui du disque. On voit donc que la vitesse du disque ne représente pas du tout la valeur à donner, dans nos formules, à la vitesse de la masse.

C'est ainsi que Plateau fait tourner le disque à raison de 1 tour par seconde, pour obtenir la figure aux deux pôles confondus; en prenant le système d'unités propre à la masse considérée, cette vitesse d'un tour par seconde est égale à 1,49, au lieu de la valeur théorique 0,707 (pour notre masse, l'unité de temps dans ce système spécial, est égal à 0<sup>s</sup>.237).

Ce qu'il faut considérer, c'est que le disque, par le frottement produit sur le liquide, communique à la masse, de l'énergie qui se transforme soit en énergie cinétique, soit en énergie potentielle de surface et qui, pour une part, est absorbée par le travail de frottement de la masse sur le liquide environnant et par les frottements intérieurs provenant de la déformation de la masse.

Lorsqu'on va, avec une vitesse variant, avec continuité, de la sphère à la figure aux pôles confondus, on constate (n° 37 et fig. 9) que l'énergie totale de la masse croît continuellement, par suite de l'apport d'énergie que lui fait le disque et qui surpasse le travail de frottement de la masse d'huile sur elle-même et sur le liquide extérieur. A partir du moment où la masse devient annulaire, son énergie totale décroît, en théorie (fig. 15), si l'on suppose que la masse prend successivement toutes les figures théoriques d'équilibre. Son rayon équatorial décroîtrait avant de croître (fig. 11). Plateau n'a pas signalé cette décroissance. Il est probable qu'elle ne se produit pas, et que, pour la raison donnée plus loin, on passe, dans l'expérience, d'une forme d'équilibre précédant le point  $\beta$  de la figure 11, à une forme annulaire d'équilibre située au delà du point  $\varphi$ , par des formes intermédiaires qui ne sont que des états successifs parcourus par la masse pendant sa déformation, mais qui ne sont pas des figures d'équilibre. Et, se reportant à la courbe de la figure 15, on comprend ainsi que, dans l'expérience, l'énergie totale de la masse puisse croître continuellement, ce qui paraît vraisemblable, puisqu'on fournit du travail à la masse, en même temps que cette croissance de l'énergie est accompagnée de celle du rayon équatorial, les deux pointes des courbes des figures 11 et 15 paraissant être remplacées par un trajet plus direct.

Ce passage d'une forme d'équilibre précédant  $\beta$  (fig. 11) à une surface annulaire d'équilibre située au-delà de  $\varphi$ , par une suite d'états de déformation, peut fort bien être due à la force vive radiale que la masse acquiert dans l'expérience et à la différence des vitesses angulaires dans la masse, lorsqu'elle devient très étendue dans son plan équatorial. En effet, nous avons trouvé que la masse tourne, d'après la théorie, à une vitesse angulaire de 0,757, en  $\beta$ , tandis que, dans l'expérience, le disque tourne à une vitesse de 1,49. Il en résulte que, la masse étant très plate, toute sa partie centrale comprise dans le cylindre ayant pour directrice le bord du disque, tourne beaucoup plus vite que le reste de la masse, et il faut penser que cette partie centrale sera rejetée loin de l'axe et le disque mis à nu, par l'effet de cette forte vitesse angulaire du disque. Et, avant que le reste de la masse ait atteint la vitesse correspondant à la forme  $\beta$ , on aura obtenu une figure aux pôles confondus qui, sous l'influence des vitesses radiales, se développera en anneau, par des états de déformation, pour reprendre ensuite la série des figures annulaires d'équilibre relatif, quand le rayon intérieur de l'anneau sera supérieur à celui du disque et quand la vitesse angulaire se sera uniformisée dans la masse. L'anneau d'équilibre auquel aboutit Plateau et dont les rayons équatoriaux sont indiqués au début de ce numéro, correspond sensiblement, dans notre système spécial d'unités et d'après la figure 11, à une vitesse de 0,35, soit à peu près un quart de tour par seconde. D'après la même figure 11, on peut voir que le disque, dont le rayon a pour mesure  $\frac{1^{\text{cm}},75}{3^{\text{cm}}} = 0,58$  dans notre système d'unités, continue à agir sur les anneaux, mais de moins en moins, tant que le rayon équatorial intérieur  $a'$  est inférieur à 0,58, c'est-à-dire (fig. 11) jusqu'à la vitesse de 0,52 environ. La masse ne pourra affecter une véritable figure annulaire d'équilibre qu'après s'être séparée du disque et après que sa vitesse angulaire se sera uniformisée ; la force vive radiale que possède la masse lorsqu'elle se sépare du disque lui permet d'atteindre un état final d'équilibre relatif, dont l'énergie totale sera celle qui correspond à  $\omega = 0,35$ , sur la figure 15 ; la partie de cette force vive radiale que les résistances n'auront pas absorbée, se sera transformée en énergie cinétique de rotation ou en énergie potentielle de surface.

L'anneau tournant seul, maintenant, sans recevoir d'énergie et en perdant, par le travail des résistances passives, revient sur lui-même, pendant que  $\varepsilon$  décroît (fig. 15) et rencontre le bord du disque, pour  $\omega = 0,52$ , avant que  $\varepsilon$  ait atteint son minimum (fig. 15) ; la masse s'étend alors sur le disque en passant

par des états qui ne sont pas des figures d'équilibre, pour reprendre au-dessous de  $\beta$  (fig. 11), la série des figures d'équilibre, et continue à perdre de son énergie totale, par l'effet des résistances intérieures et des frottements sur le liquide extérieur, sur l'axe et le disque maintenant immobiles, pour arriver à son état initial correspondant à une vitesse nulle et à la valeur minima de son énergie totale.

### 57. Sur le fractionnement d'une masse de Plateau.

Pour ce qui est de l'évolution d'une masse de Plateau, on peut donc, en continuant à admettre, pour le calcul, que la masse tourne tout d'une pièce, dans la plus grande partie de cette expérience, concilier les résultats de la théorie et de l'expérience; l'accord est complet, en ce qui concerne la forme des surfaces d'équilibre.

Pour ce qui est du fractionnement d'une masse de Plateau, la théorie des figures d'équilibre est insuffisante à expliquer ce phénomène, si l'on conserve l'hypothèse d'une masse tournant tout d'un bloc, puisqu'on obtient ainsi l'évolution et non le fractionnement d'une masse.

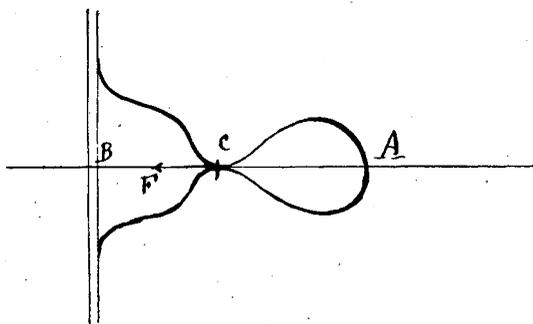


Fig. 16.

Pour réaliser ce fractionnement, Plateau a, d'ailleurs, comme nous le signalions dès l'introduction de ce mémoire, employé un jeu expérimental assez compliqué, assurant une très grande inégalité des vitesses angulaires dans la masse : petit disque, placé au-dessous du plan équatorial, près du pôle inférieur de la sphère d'huile et très grande vitesse de rotation de ce disque (15 tours, environ, par seconde, § 21 du mémoire précité de Plateau).

Il faudrait donc avoir une première idée de la loi des vitesses angulaires,

dans la masse, pour entreprendre l'étude de ce fractionnement. Mais, ce serait encore insuffisant, pour une partie, au moins, du phénomène. En effet, si l'on supposait qu'on puisse parvenir au fractionnement par une suite continue de figures permanentes, on arriverait à un moment à une surface ayant la forme de la figure 16, avec un parallèle double.

Pour que la partie de droite AC pût servir de figure de départ à des figures annulaires permanentes, il faudrait qu'elle-même en fût une, pour qu'on pût s'attendre à en avoir d'autres infiniment voisines. Or, la partie AC, supposée isolée n'est pas une figure permanente, des forces CF devant être ajoutées pour équilibrer les efforts de la tension superficielle sur le parallèle C.

Le fractionnement de la masse de Plateau nous paraît donc exiger, pour son étude, non seulement l'hypothèse d'une loi de vitesses angulaires variables dans la masse, mais aussi, au moins pour une partie du phénomène, l'assimilation du problème à celui d'un mouvement de déformation d'une masse.

Par contre, nous pensons avoir donné du phénomène de l'évolution, où les vitesses restent assez faibles et assez uniformes dans la masse, une théorie qui s'accorde bien avec les faits expérimentaux.

---

## TROISIÈME PARTIE

**Sur les masses fluides en rotation, soumises simultanément à une tension superficielle et à une attraction entre leurs particules obéissant à une loi newtonienne.**

---

### CHAPITRE UNIQUE

---

#### 58. Equation intégrro-différentielle de la surface.

Considérons une masse quelconque, de révolution ou non, à tension superficielle, avec attraction newtonienne entre ses particules. Nous la supposons d'un seul tenant, libre dans un milieu à pression uniforme et en équilibre relatif dans sa rotation uniforme autour d'un axe géométrique fixe.

Soient :

$\chi$ , la constante de Newton ;

$\varpi$ , la densité du liquide ;

$f$ , la valeur de la tension superficielle ;

$\omega$ , la vitesse angulaire de rotation ;

$p_1$ , la pression extérieure ;

$R_1$  et  $R_2$ , les rayons de courbure principaux de la surface libre, en un point distant de  $x$  de l'axe de rotation, rayons comptés positivement quand le centre de courbure correspondant est situé du côté du liquide ;

$P$ , le potentiel dû à la masse liquide ( $P = \chi \Sigma \frac{m}{r}$ ).

Si  $p$  est la pression, en un point de la masse liquide, distant de  $x$  de l'axe de rotation, l'équation de l'équilibre relatif s'écrit

$$(169) \quad \frac{1}{\varpi} dp = d\left(P + \frac{\omega^2 x^2}{2}\right),$$

d'où

$$(170) \quad p = \varpi\left(P + \frac{\omega^2 x^2}{2}\right) + \text{constante.}$$

Sur la face intérieure de la couche superficielle, d'épaisseur négligeable, on a

$$p = p_1 + f\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

D'où, sur la surface libre,

$$\varpi\left(P + \frac{\omega^2 x^2}{2}\right) + \text{constante} = p_1 + f\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Autrement dit, la surface libre satisfait à l'équation intégrale-différentielle

$$(171) \quad \left(P + \frac{\omega^2 x^2}{2}\right)\varpi - f\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \text{constante.}$$

### 59. Théorème étendant une formule de Poincaré.

En plus des notations du numéro précédent, désignons par  $U_0$ , la valeur constante, pour une surface d'équilibre, du membre de gauche de (171) ;

$W$ , l'énergie potentielle de la masse ( $W = \chi \Sigma \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$ ) ;

$J$ , le moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe de rotation ;

$V$ , le volume de la masse ;

$\Omega$ , l'aire de sa surface libre.

Ajoutons à notre masse liquide une couche quelconque, infiniment mince du même liquide et soient  $\delta W$ ,  $\delta \Omega$ ,  $\delta J$  et  $\delta V$ , les variations correspondantes de  $W$ ,  $\Omega$ ,  $J$  et  $V$ . Nous supposons que la nouvelle surface libre et la surface libre primitive sont deux surfaces infiniment voisines d'une même famille continue de surfaces.

Soient  $d\sigma$ , un élément de la surface primitive  $\Omega$  et  $e$ , l'épaisseur, en cet élément, de la couche liquide ajoutée, épaisseur comptée positivement à partir de l'élément  $d\sigma$  et vers l'extérieur de la masse liquide primitive.

On démontre que

$$\delta W = \varpi \int_{\Omega} P e d\sigma,$$

intégrale s'étendant à toute la surface primitive (voir APPEL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. IV, 1921, p. 95, où la densité est supposée égale à 1.)

On démontre aussi que

$$\delta\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) e d\sigma$$

(voir BOUSSINESQ, *Cours de physique mathématique*, t. III, 1921, p. 192 à 194).

Si  $x$  est encore la distance d'une particule à l'axe de rotation, on sait que

$$\delta J = \varpi \int_{\Omega} x^2 \cdot e \cdot d\sigma.$$

Enfin

$$\delta V = \int_{\Omega} e d\sigma.$$

Donc

$$\delta W - f \cdot \delta\Omega + \frac{\omega^2}{2} \delta J = \int_{\Omega} \left[ \varpi P - f \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \varpi \frac{\omega^2 x^2}{2} \right] e d\sigma.$$

Mais d'après (171), cette dernière intégrale est égale à

$$U_0 \int_{\Omega} e d\sigma = U_0 \cdot \delta V.$$

Donc,

$$(172) \quad \delta W - f \cdot \delta\Omega + \frac{\omega^2}{2} \delta J = U_0 \cdot \delta V.$$

Considérons maintenant un accroissement spécial, infiniment petit, tel que la nouvelle masse soit homothétique à la première, le centre d'homothétie étant sur l'axe de rotation. Toutes les distances linéaires, y compris les distances des particules à l'axe de rotation, sont multipliées par  $1 + \varepsilon$ , ou  $\varepsilon$  est un infiniment petit.

Dans  $W$  et  $J$ , chacune des masses élémentaires, égale à la densité  $\varpi$ , multipliée par un élément de volume, devient  $(1 + \varepsilon)^3$  fois plus grande. On en déduit facilement que, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à 1,

$$\begin{aligned} W + \delta W &= W(1 + \varepsilon)^3 = W + 3\varepsilon W, \\ J + \delta J &= J(1 + \varepsilon)^3 = J + 3\varepsilon J, \\ V + \delta V &= V(1 + \varepsilon)^3 = V + 3\varepsilon V, \\ \Omega + \delta\Omega &= \Omega(1 + \varepsilon)^2 = \Omega + 2\varepsilon\Omega, \end{aligned}$$

D'où

$$5W\varepsilon - 2f\Omega\varepsilon + \frac{\omega^2}{2} 5J\varepsilon = 3U_0V\varepsilon,$$

et, par suite, en divisant par  $3\varepsilon$ ,

$$(173) \quad \frac{5}{3} \left( W + \frac{\omega^2}{2} J \right) - \frac{2}{3} f\Omega = VU_0.$$

Cette formule est une extension de celle qu'a donnée Poincaré, pour les masses sans tension superficielle <sup>(1)</sup>.

**60. Sur une application de ce théorème aux masses non annulaires soumises uniquement à la tension superficielle.**

Considérons une masse de révolution, non annulaire, à points sur l'axe et sans attraction entre particules, comme dans la première partie de ce mémoire.

Ici donc

$$\chi = 0, \quad W = 0, \quad P = 0.$$

Soit toujours  $\tau_0$  le rayon de courbure du méridien aux pôles.

La valeur constante  $U_0$ , de la fonction (171), sur la surface libre, calculée aux pôles, après y avoir fait  $P = 0$ , est égale à

$$-\frac{2f}{\tau_0}.$$

Donc (173) s'écrit

$$\frac{5}{3} \frac{\omega^2}{2} J - \frac{2}{3} f\Omega = -\frac{2f}{\tau_0} V$$

et

$$J = \frac{4f}{5\omega^2} \left( \Omega - \frac{3V}{\tau_0} \right).$$

C'est bien la formule (59) déjà établie sur les formules particulières au problème.

**61. Sur une application du même théorème aux masses annulaires soumises uniquement à la tension superficielle.**

Calculons  $U_0$  sur la surface libre de l'anneau, en choisissant, pour faire ce calcul, un point de la circonférence équatoriale extérieure de rayon  $a$ .

---

<sup>(1)</sup> Voir APPEL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. IV, 1921, p. 96 où les notations sont différentes des nôtres et où les unités ne sont pas quelconques.

Reprenant les notations du n° 40, on a, sur la circonférence équatoriale extérieure

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 4k^2a^2 + 2A,$$

d'après la formule (86) valable pour les anneaux, comme il est dit au n° 40.

Donc, d'après (171).

$$U_0 = \frac{\omega^2 a^2}{2} \varpi - f(4k^2 a^2 + 2A).$$

Mais (n° 39)

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varpi}{8f}.$$

Donc

$$U_0 = -2A f.$$

D'où, (173) s'écrit

$$\frac{5}{3} \frac{\omega^2}{2} J - \frac{2}{3} f \Omega = -2A V f$$

et

$$J = \frac{4f}{5\omega^2} (\Omega - 3AV).$$

C'est bien la formule (111) déjà établie sur les formules particulières des anneaux.

**62. Sur la figure d'équilibre, de révolution, d'une masse en rotation, soumise à une tension superficielle et à une attraction entre ses particules obéissant à une loi newtonienne, dans le cas où  $\omega^4$  est négligeable.**

Dans les n°s 58 à 61, nous avons désigné la densité par  $\varpi$ , au lieu de  $\delta$  employé précédemment, pour éviter des confusions dans ces numéros, avec le signe  $\delta$  indiquant une variation.

Nous recommencerons maintenant à désigner la densité par  $\delta$ .

Soient donc  $\frac{4}{3} \pi R^3$ , le volume d'une masse liquide tournant autour de son axe de révolution, sans axe matériel de rotation;  $\chi$ ,  $\delta$  et  $f$ , la constante de Newton, la densité du liquide et sa tension superficielle. La sphère est la figure d'équilibre absolu.

Dans un travail antérieur <sup>(1)</sup> nous avons déterminé, pour de petites valeurs

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 184, 1927 p. 961 à 963 et 1140.

de la vitesse de rotation  $\omega$ , et en négligeant les quantités d'ordre égal ou supérieur à 4 en  $\omega$ , la surface de révolution voisine de la sphère, qui est une figure d'équilibre relatif, pour notre masse liquide soumise *simultanément* à des actions newtonienne et superficielle et à une pression extérieure uniforme.

Nous nous bornerons à rappeler que cette surface d'équilibre de révolution correspondant à la petite vitesse  $\omega$  se confond :

1° avec le maclaurin correspondant à la même masse liquide, supposée soumise uniquement à l'action newtonienne et à une rotation  $\omega_1$ , telle que,

$$(174) \quad \omega_1 = \omega \sqrt{\frac{2\pi\chi\delta^2 R^3}{2\pi\chi\delta^2 R^3 + 15f}}$$

2° avec la figure d'équilibre de la même masse, supposée uniquement soumise à l'action superficielle et à une rotation  $\omega_2$  telle que

$$(175) \quad \omega_2 = \omega \sqrt{\frac{15f}{2\pi\chi\delta^2 R^3 + 15f}}$$

**63. Sur la figure d'équilibre de révolution, d'une masse en rotation, soumise à une tension superficielle et à une attraction entre ses particules obéissant à une loi newtonienne, lorsqu'on ne néglige que les termes en  $\omega^6$ .**

Nous allons étendre le résultat précédent et déterminer une surface de révolution renfermant un volume égal à celui de la masse  $(\frac{4}{3}\pi R^3)$  et satisfaisant à (174), le tout aux quantités près de l'ordre de  $\omega^6$ .

Considérons la surface de révolution dont le méridien est défini par

$$(176) \quad \frac{x}{R} = a \cos \varphi, \quad \frac{y}{R} = b \sin \varphi + c \sin^3 \varphi,$$

l'axe des  $y$  étant l'axe de révolution et de rotation et  $a, b, c$  étant de la forme

$$(177) \quad \begin{cases} a = 1 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 \\ b = 1 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 \\ c = c_2\omega^4. \end{cases}$$

Posons

$$\alpha = \pi\chi\delta, \quad \beta = \frac{f}{R^3\delta}.$$

On voit, par une intégration facile, que l'équation du volume s'écrit exactement

$$(178) \quad a^2 \left( \frac{b}{3} + \frac{c}{5} \right) = \frac{1}{3}.$$

On démontre ensuite qu'au degré d'approximation considéré,  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  est un polynôme du second degré en  $\sin^2 \varphi$ . En effet, si  $x'$  et  $y'$  sont les dérivées de  $x$  et  $y$ , par rapport à  $\varphi$ , on a

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{xx'} \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{xy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right].$$

Calculant  $x'$  et  $y'$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{x'}{R} &= -a \sin \varphi = -(1 + a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4) \sin \varphi \\ \frac{y'}{R} &= b \cos \varphi + 3c \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ &= (1 + b_1 \omega^2 + b_2 \omega^4 + 3c_2 \omega^4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \\ \frac{x'^2 + y'^2}{R^2} &= 1 + 2b_1 \omega^2 + (b_1^2 + 2b_2) \omega^4 \\ &\quad + [2(a_1 - b_1) \omega^2 + (a_1^2 - b_1^2 + 2a_2 - 2b_2 + 6c_2) \omega^4] \sin^2 \varphi \\ &\quad - 6c_2 \omega^4 \sin^4 \varphi. \end{aligned}$$

Développant  $(x'^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$  par la formule du binôme, effectuant les opérations et dérivations, on trouve

$$(179) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= -\frac{1}{aR} \left[ 2 \left\{ -1 + (-a_1 + b_1) \omega^2 + \left( -\frac{a_1^2 + 3b_1^2}{2} + 2a_1 b_1 - a_2 + b_2 \right) \omega^4 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (a_1 - b_1) \omega^2 + (2a_1^2 - 5a_1 b_1 + 3b_1^2 + a_2 - b_2 + 3c_2) \omega^4 \right\} 4 \sin^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. - 18 \left\{ c_2 + \frac{(a_1 - b_1)^2}{2} \right\} \omega^4 \sin^4 \varphi \right]. \end{aligned} \right.$$

Nous aurons besoin du potentiel de notre masse, sur sa surface libre d'équation (176). Nous vérifierons, à la fin de nos calculs, que  $a_1 > 0$ ,  $b_1 < 0$ ,  $c < 0$ ; nous avons donc  $a > b$ , puisque  $\omega$  est petit, et comme, de plus,  $c < 0$ , nous pouvons calculer le potentiel, sur notre surface, dû à l'ellipsoïde qu'on obtient en faisant  $c = 0$  dans (176), en partant des formules qui donnent le potentiel à l'intérieur d'un ellipsoïde de révolution aplati.

Posons  $l^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ ; d'après (177)  $l^2$  est de l'ordre  $\omega^2$ .

On a, pour le potentiel dû à l'ellipsoïde, à l'intérieur de sa surface, et à une constante près

$$-\frac{P}{2} x^2 - \frac{P'}{2} y^2,$$

avec

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\chi\delta \frac{1+l^2}{l^3} \left( \operatorname{arc\,tg} l - \frac{l}{1+l^2} \right), \\ P' &= 2\pi\chi\delta \frac{1+l^2}{l^3} (2l - 2 \operatorname{arc\,tg} l), \\ 2P + P' &= 4\pi\chi\delta. \end{aligned}$$

Limitant leurs développements à leurs termes en  $l^4$ , on a :

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\chi\delta \left( \frac{2}{3} - \frac{2l^2}{15} + \frac{2l^4}{35} \right), \\ P' &= 2\pi\chi\delta \left( \frac{2}{3} + \frac{4l^2}{15} - \frac{4l^4}{35} \right). \end{aligned}$$

Aux quantités en  $\omega^6$  près, on trouve

$$\begin{aligned} l^2 &= 2(a_1 - b_1)\omega^2 + [(a_1 - b_1)^2 + 2b_1^2 - 2a_1b_1 + 2a_2 - 2b_2]\omega^4 \\ l^4 &= 4(a_1 - b_1)^2\omega^4 \end{aligned}$$

et, tous calculs faits, on parvient, à une constante près, pour le potentiel dû à l'ellipsoïde considéré, sur la surface (176), à l'expression

$$(180) \quad \left\{ \pi\chi\delta R^2 \left[ \left\{ \frac{8}{15}(a_1 - b_1)\omega^2 + \left( \frac{44}{105}a_1^2 - \frac{32}{105}a_1b_1 - \frac{4}{35}b_1^2 \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{8}{15}a_2 - \frac{8}{15}b_2 \right) \omega^4 \right\} \sin^2 \varphi - \frac{4}{3}c_2\omega^4 \sin^4 \varphi \right] \right\}.$$

Nous allons maintenant calculer le potentiel, sur la surface (176), dû à la *mince couche* qu'il faut ajouter à l'ellipsoïde précédent pour obtenir la surface (176). Aux termes en  $\omega^6$  près, l'épaisseur de cette mince couche ellipsoïdale, mesurée normalement à l'ellipsoïde est égale à

$$(181) \quad \zeta = c_2 R \omega^4 \sin^4 \varphi$$

$\zeta$  et le potentiel à ajouter à celui de l'ellipsoïde ont le signe de  $c_2$ .

Avec des erreurs d'ordres supérieurs ou égaux à 6, en  $\omega$ , on peut successivement :

1° Remplacer, en un point de la surface (176), le potentiel dû à la couche d'épaisseur  $\zeta$ , par celui d'une simple couche, d'épaisseur nulle, répandue sur l'ellipsoïde, et de densité superficielle égale à  $\zeta\delta$ ;

2° Remplacer, en un point de la surface (176), le potentiel dû à la simple couche ellipsoïdale, dont la densité superficielle est  $\zeta\delta$ , au point  $x = aR \cos \varphi$ ,

$y = bR \sin \varphi$ , par le potentiel dû à la couche sphérique de rayon  $aR$  dont la densité superficielle est  $\zeta\delta$ , au point  $x = aR \cos \varphi$ ,  $y = aR \sin \varphi$  ;

3° Remplacer le potentiel de cette couche sphérique, au point  $x = aR \cos \varphi$ ,  $y = bR \sin \varphi + cR \sin^3 \varphi$  de la surface (176), par le potentiel de cette même couche sphérique, au point  $x = aR \cos \varphi$ ,  $y = aR \sin \varphi$ .

Nous avons donc, en somme, à calculer sur la sphère de rayon  $aR$ , le potentiel d'une simple couche répandue sur cette sphère et de densité superficielle égale à  $c_2 R \delta \omega^4 \sin^4 \varphi$ .

Posons  $\sin \varphi = t$  et raisonnons d'abord sur une sphère de rayon 1.

Si  $Y_0(t) = 1$ ,  $Y_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}$ ,  $Y_4(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8}$  sont les polynômes de Legendre de degrés 0, 2 et 4, on a :

$$t^4 = \frac{1}{5} Y_0 + \frac{4}{7} Y_2 + \frac{8}{35} Y_4.$$

Nous avons ainsi développé  $t^4$  en une somme de *fonctions sphériques* de la seule variable  $t = \sin \varphi$  et, par suite, d'après une formule classique <sup>(1)</sup>, le potentiel cherché, pour la couche de rayon  $aR$ , est égal à

$$4\pi c_2 R \omega^4 \cdot aR \cdot \gamma \delta \left( \frac{1}{5} \frac{Y_0}{1} + \frac{4}{7} \frac{Y_2}{5} + \frac{8}{35} \frac{Y_4}{9} \right)$$

et, tous calculs faits, égal à

$$(182) \quad 4\pi \gamma a c_2 R^2 \omega^4 \left( \frac{1}{9} \sin^4 \varphi + \frac{8}{105} \sin^2 \varphi + \frac{16}{105} \right).$$

Il est à ajouter à (180) pour donner le potentiel P, qui figure dans l'équation intégral-différentielle (171) de la surface libre.

Tenant compte de (179), (180) et (182), on parvient, pour l'équation (171), à la forme suivante :

$$(183) \quad \left\{ \begin{aligned} & \omega^2 \sin^2 \varphi \left[ \frac{8}{15} \pi \delta^2 R^3 (a_1 - b_1) - \frac{R^3 \delta}{2} + 4f(a_1 - b_1) \right] \\ & + \omega^4 \sin^2 \varphi \left[ 4\pi \gamma \delta^2 R^3 \left( \frac{5}{21} a_1^2 - \frac{22}{105} a_1 b_1 - \frac{b_1^2}{35} + \frac{2}{15} a_2 - \frac{2}{15} b_2 + \frac{8}{105} c_2 \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{2} R^3 \delta a_1 + 4f(2a_1^2 + 3b_1^2 - 5a_1 b_1 + a_2 - b_2 + 3c_2) \right] \\ & + \omega^4 \sin^4 \varphi \left[ -\frac{8}{9} \pi \gamma \delta^2 R^3 c_2 - 48f \left\{ c_2 + \frac{(a_1 - b_1)^2}{2} \right\} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

(1) APPELL. — *Traité de mécanique rationnelle*, t. IV, 1921, p. 117.

Cette équation devant être satisfaite quel que soit  $\varphi$  et quel que soit  $\omega$  petit, chacun des coefficients de  $\omega^2 \sin^2 \varphi$ ,  $\omega^4 \sin^2 \varphi$ ,  $\omega^4 \sin^4 \varphi$  devra être nul. D'où 3 équations entre les 5 inconnues  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ .

Mais, l'équation (178) du volume s'écrit, en tenant compte de (177) et après quelques simplifications :

$$(184) \quad 5(2a_1 + b_1)\omega^2 + (5a_1^2 + 10a_1b_1 + 10a_2 + 5b_2 + 3c_2)\omega^4 = 0,$$

qui devra être satisfaite quel que soit  $\omega$  petit, ce qui exige que les coefficients de  $\omega^2$  et de  $\omega^4$  soient tous deux nuls.

D'où 2 nouvelles équations entre les 5 inconnues  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ . Nos 5 équations résolues donnent :

$$a_1 = \frac{5}{8(2\alpha + 15\beta)}, \quad b_1 = \frac{-5}{4(2\alpha + 15\beta)}, \quad a_2 = \frac{5(740\alpha^2 + 16548\alpha\beta + 59535\beta^2)}{448(2\alpha + 15\beta)^3(4\alpha + 81\beta)},$$

$$b_2 = \frac{5(-1280\alpha^2 + 11046\alpha\beta + 246645\beta^2)}{896(2\alpha + 15\beta)^3(4\alpha + 81\beta)}, \quad c_2 = \frac{-18225\beta}{128(2\alpha + 15\beta)^2(4\alpha + 81\beta)}.$$

# TABLE DES MATIÈRES

## PREMIÈRE THÈSE

INTRODUCTION.....	Pages 3
-------------------	------------

### PREMIÈRE PARTIE

SUR LES MASSES LIQUIDES DE RÉVOLUTION, NON ANNULAIRES, HOMOGENES ET SOUMISES A LA SEULE TENSION SUPERFICIELLE, EN ÉQUILIBRE RELATIF DANS UNE ROTATION UNIFORME AUTOUR DE LEUR AXE DE RÉVOLUTION ET SANS AXE MATÉRIEL DE ROTATION.

#### CHAPITRE PREMIER

*Détermination du méridien d'une masse liquide donnée soumise à une rotation donnée*

1. Enoncé du problème.....	6
2. Equation différentielle du méridien.....	7
3. Discussion de l'équation précédente.....	9
4. Intégration de l'équation (10), pour $K < 2$ .....	11
5. Forme générale de la courbe méridienne.....	14
6. Equation exprimant l'invariabilité du volume.....	15
7. Etude de la courbe $X = K^2, Y = 1 - (1 - K^2) \frac{b}{a}$ .....	16
8. Résolution de l'équation transcendante en $K^2$ .....	21
9. Tracé du méridien.....	22
10. Développement de $F(c, \varphi)$ en série entière en $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .....	22
11. Développement de $E(c, \varphi)$ en série entière en $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .....	24
12. Développement de l'ordonnée de la courbe en série entière en $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .....	25

## CHAPITRE II

*Etude spéciale du cas de K petit*

	Pages
13. Cas où les termes de l'ordre de $K^4$ sont négligeables devant 1.....	28
14. Développement de $\frac{d}{dX} \frac{b}{a}$ en série entière en $K^2$ .....	28
15. Développement de $\frac{b}{a}$ et de $\mathcal{K}^2$ , en séries entières en $K^2$ .....	29
16. Développement de $\frac{a^3}{R^3}$ en série entière en $\mathcal{K}^2$ .....	29

## CHAPITRE III

*Discussion du problème*

17. Discussion du problème dans le cas d'une pression extérieure nulle.....	30
18. Discussion du problème dans le cas d'une pression extérieure non nulle.....	31
19. Remarque relative aux figures d'équilibre correspondant à une même valeur de $\mathcal{K}^2 = k^2 R^3$ .....	33
20. Remarque relative aux figures correspondant à une même valeur de $a$ .....	33
21. Remarque sur l'intersection de deux méridiens convexes.....	34

## CHAPITRE IV

*Propriétés diverses des figures d'équilibre*

22. Courbure, développée et rectification du méridien.....	36
23. Aire d'une section méridienne.....	36
24. Sur quelques propriétés géométriques des figures d'équilibre.....	37

## CHAPITRE V

*Calcul de l'énergie totale de la masse liquide en rotation*

25. Calcul de l'aire de la surface libre de la masse liquide.....	39
26. Calcul du moment d'inertie de la masse liquide par rapport à son axe de révolution.....	40
27. Développement de $J$ en séries entières en $K^2$ et en $\mathcal{K}^2$ .....	40
28. Force vive de la masse liquide en rotation.....	41
29. Energie totale de la masse liquide en rotation.....	41

## CHAPITRE VI

*Variation des diverses quantités relatives à une même masse liquide et stabilité de l'équilibre*

30. Courbe de variation du rayon équatorial $a$ , en fonction de la vitesse $\omega$ de rotation.....	42
31. Variation de $b$ et de $\tau_0$ , en fonction de $\omega$ .....	45

	Pages
32. Démonstration de la formule $\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2f}{\omega^3}$ .....	47
33. Vérification de la formule $\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2f}{\omega^3}$ sur les formules particulières à notre problème. ....	48
34. Signe de $\frac{d\Omega}{dX}$ .....	49
35. Courbe de variation de $\Omega$ en fonction de $a$ .....	50
36. Courbe de variation de $J$ en fonction de $\Omega$ .....	51
37. Courbes de variation, en fonction de $\omega$ , de l'énergie cinétique, de l'énergie de surface et de l'énergie totale de la masse liquide en rotation .....	52
38. Etude de la stabilité de l'équilibre .....	53

## DEUXIÈME PARTIE

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE A L'EXPÉRIENCE DE PLATEAU,  
ÉTUDE DES MASSES ANNULAIRES ET DISCUSSION DE CETTE EXPÉRIENCE

### CHAPITRE PREMIER

*Sur les formules applicables aux masses centrales entourant un axe matériel  
de rotation et sur les propriétés générales des masses annulaires*

39. Formules applicables à une masse liquide de révolution soumise à la seule tension superficielle, entourant un axe matériel et en rotation avec cet axe .....	57
40. Formules applicables à une masse annulaire de révolution, en rotation autour de son axe de révolution et soumise à la seule tension superficielle .....	60
41. Sur le tore infiniment long et infiniment délié de vitesse infiniment petite .....	61
42. Relation entre $J$ , $\Omega$ , $\omega$ , $a$ et $a'$ , pour une masse annulaire .....	63
43. Démonstration de cette relation par des considérations générales .....	64
44. Energie cinétique, énergie potentielle de surface et énergie totale de l'anneau .....	64

### CHAPITRE II

*Variation des diverses quantités relatives à une masse annulaire  
et stabilité de l'équilibre d'une masse annulaire*

45. Sur une propriété d'homothétie des anneaux .....	65
46. Etude analytique du problème .....	67
47. Remarque sur la variation des rayons équatoriaux $a'$ et $a$ , en fonction de $\omega$ .....	74
48. Etude de la surface par développements en séries quand $\frac{a'}{a}$ est suffisamment voisin de 1 .....	76
49. Résultats numériques et courbes $(\omega, a)$ et $(\omega, a')$ .....	82
50. Formes successives des anneaux .....	84
51. Courbes de variation du moment d'inertie $J$ , en fonction de $\omega$ et de l'aire $\Omega$ de la surface libre .....	86

	Pages
52. Etude de la stabilité de l'équilibre des anneaux.....	87
53. Courbe de variation, en fonction de $\omega$ , de l'énergie totale $\mathcal{E}$ de l'anneau.....	88

## CHAPITRE III

*Discussion de l'expérience de Plateau*

54. Les théories précédentes sont applicables à cette expérience.....	90
55. Les résultats expérimentaux de Plateau.....	91
56. Les résultats théoriques et discussion de l'expérience de Plateau, en ce qui concerne l'évolution d'une masse.....	92
57. Sur le fractionnement d'une masse de Plateau.....	95

## TROISIÈME PARTIE

SUR LES MASSES FLUIDES EN ROTATION, SOUMISES SIMULTANÉMENT A UNE TENSION SUPERFICIELLE ET A UNE ATTRACTION ENTRE LEURS PARTICULES OBÉISSANT A UNE LOI NEWTONNIENNE

## CHAPITRE UNIQUE

58. Equation intégral-différentielle de la surface.....	97
59. Théorème étendant une formule de Poincaré.....	98
60. Sur une application de ce théorème aux masses non annulaires soumises uniquement à la tension superficielle.....	100
61. Sur une application de ce théorème aux masses annulaires soumises uniquement à la tension superficielle.....	100
62. Sur la figure d'équilibre, de révolution, d'une masse en rotation, soumise à une tension superficielle et à une attraction entre ses particules, obéissant à une loi newtonnienne, dans le cas où $\omega^4$ est négligeable.....	101
63. Sur la figure d'équilibre, de révolution, d'une masse en rotation, soumise à une tension superficielle et à une attraction entre ses particules, obéissant à une loi newtonnienne, lorsqu'on ne néglige que les termes en $\omega^6$ .....	102

## DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.....	111
--	-----