DAVID R. WILLIAMS

Compléments au théorème de M. Julia

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__90__1_0>

N° D'ORDRE : 45.

Série U.

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

(MENTION : SCIENCES)

PAR DAVID R. WILLIAMS

1re THÈSE. — COMPLÉMENTS AU THÉORÈME DE M. JULIA.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 JUIN 1928 devant la Commission d'Examen.

MM. FRÉCHET, *Président.*

VALIRON, MILLOUX, } *Examinateurs.*

PALERME

TIPOGRAFIA MATEMATICA G. SENATORE

1928

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

MM.

DOYEN	MULLER (P.) Prof. de Chimie générale et Chimie physique.	
DOYEN HONORAIRE	BATAILLON (E.)	
PROFESSEURS	VALIRON (G.)	Calcul différentiel et intégral.
	FRÉCHET (M.)	Analyse supérieure.
	ESCLANGON (E.)	Astronomie.
	WEISS (P.)	Physique générale.
	OLLIVIER (H.)	Physique générale.
	ROTHÉ (E.)	Physique du Globe.
	HACKSPILL (L.)	Chimie minérale.
	GAULT (H.)	Chimie organique.
	TOPSENT (E.)	Zoologie et Anatomie comparée.
	HOUARD (C.)	Botanique.
	TERROINE (E.)	Physiologie générale.
	LAPPARENT (J. de)	Pétrographie.
	CHATTON (E.)	Biologie générale.
	THIRY (E.)	Mécanique rationnelle.
	CERF (G.)	Mathématiques générales.
	DUBOIS (G.)	Géologie et Paléontologie.
	RIBAUD (G.)	Physique expérimentale.
	BAUER (E.)	Physique mathématique.
	CORNEC (E.)	Chimie appliquée.
	LABROUSTE (H.)	Physique du Globe.
	VLES (F.)	Physique biologique.
	BEAUCHAMP (de)	Biologie générale.
	BOUNOURE (L.)	Zoologie.
	FOEX (G.)	Physique générale.
CHARGÉS DE COURS ET MAÎTRES DE CONFÉRENCES	FRIEDEL (G).	Minéralogie.
	REMPP (G.)	Physique du Globe.
	ROMANN (R.)	Chimie appliquée.
	LAGARDE (J.)	Botanique.
	STAEHLING (Ch.)	Chimie appliquée.
	LACOSTE	Physique du Globe.
	HUGEL	Chimie du Pétrole.
	WEISS (H.)	Physique Chimie du Pétrole.
	MILLOUX (H.)	Mathématique.
	CHERMEZON	Botanique.
	N	Mathématiques.
SECRÉTAIRE	E. BONTEMS.	

À

MONSIEUR GEORGES VALIRON

PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

ET

À

DR. G. A. SCHOTT F. R. S.

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À L'UNIVERSITY COLLEGE
OF WALES ABERYSTWYTH

Témoignage de ma profonde reconnaissance.

Mémoire extrait du tome LII (1928) des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

PREMIÈRE THÈSE.

COMPLÉMENTS AU THÉORÈME DE M. JULIA.

INTRODUCTION.

1. Dans un mémoire classique M. PICARD a démontré qu'*une fonction méromorphe $f(z)$ prend toutes les valeurs sauf peut-être deux* [1]). Son théorème a été l'origine d'une théorie extensive que les recherches de MM. BOREL, SCHOTTKY, LANDAU, MONTEL, VALIRON, JULIA, OSTROWSKI, NEVANLINNA et MILLOUX ont amené à un haut degré de précision. Les résultats peuvent être divisés en deux classes, ceux d'une nature quantitative comme les énoncés de MM. BOREL, VALIRON, NEVANLINNA et MILLOUX et ceux d'une nature qualitative comme les résultats de MM. MONTEL, JULIA, et OSTROWSKI, et qui sont remarquables par leurs simplicité et élégance.

M. BOREL fut le premier à généraliser le théorème de M. PICARD en démontrant que [2]), *si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre p et $g(z)$ une fonction méromorphe quelconque d'ordre inférieur à p, l'exposant de convergence des zéros de $f(z)-g(z)$ est égal à p sauf peut-être pour deux fonctions $g_1(z)$ et $g_2(z)$.*

Pendant la dernière décade beaucoup d'intérêt se manifesta dans les tentatives pour trouver des régions de plus en plus restrictives pour lesquelles on peut dire que la fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs sauf peut-être quelques-unes. En employant la

[1]) É. PICARD, *Mémoire sur les fonctions entières* [Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2e série, t. IX (1880), p. 147-166].

[2]) É. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903). Le résultat pour les fonctions entières avait été donné dans un mémoire: É. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* [Acta Mathematica, t. XX (1896), p. 357-396]. Voir aussi É. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, 2e édition (Paris, Gauthier-Villars, 1921).

théorie des familles normales de M. MONTEL, M. JULIA a donné les propositions suivantes [3]:

1. *Soient $f(z)$ une fonction entière ou une fonction méromorphe ayant une valeur asymtotique, et D' le domaine balayé par un cercle C dont le centre z décrit un chemin L donné aboutissant au point à l'infini, et dont le rayon est $\varepsilon|z|$, où ε est un nombre positif: il existe un domaine D, qui se déduit de D' par une rotation convenable autour de l'origine, et dans lequel la fonction $f(z) - a$ s'annule une infinité de fois pour toutes les valeurs de a sauf deux au plus.*

2. *De plus, soit σ un nombre de module supérieur à 1 et ε un nombre positif arbitraire. Il existe un point z_0 de module compris entre 1 et σ tel que, dans l'ensemble des cercles C_n, $n = 1, 2, \ldots$ de centres $z_0\sigma^n$ et de rayons $\varepsilon|\sigma^n|$, la fonction $f(z) - a$ s'annule une infinité de fois pour toutes les valeurs de a sauf deux au plus.*

Ces propositions découlent immédiatement des résultats obtenus par M. MILLOUX. En s'appuyant directement sur le théorème de M. SCHOTTKY, il a démontré l'existence d'une suite infinie de cercles $\{C(r_n, f)\}$ [4]) dont les centres ont r_n pour modules, r_n croissant indéfiniment avec n, et tels que dans $C(r_n, f)$ la fonction $f(z)$ prenne toute valeur de module inférieur à $\varphi(r_n)$ sauf au plus des valeurs qui peuvent être enfermées dans deux cercles de rayons $\frac{1}{\varphi(r_n)}$, $\varphi(r)$ étant une fonction croissante indéfiniment avec r [5]). M. MILLOUX a donné à ces cercles le nom de cercles de remplissage parce que la fonction $Z = f(z)$ remplit des régions de plus en plus étendues du plan des Z lorsque le centre de $C(r_n, f)$ s'éloigne à l'infini. Dans un mémoire récent [6]) M. VALIRON a précisé les résultats de MM. JULIA et MILLOUX sur le rayon des cercles de remplissage et dans le cas d'une fonction d'ordre fini la borne supérieure obtenue est la plus précise possible à un facteur constant près.

Dans une monographie, parue dans le Mémorial des Sciences Mathématiques, M. VALIRON a fait remarquer que le théorème de M. JULIA peut se généraliser au cas où

---

[3]) G. JULIA, *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières et méromorphes* [Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3^e^ série, t. XXXVI (1919), p. 93-125; t. XXXVII (1920), p. 165-218; t. XXXVIII (1921), p. 165-182].

[4]) Pour la brièveté nous désignerons une infinité dénombrable d'entités $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ par $\{A_n\}$ et une infinité non-dénombrable d'entités A par $\{A\}$.

[5]) H. MILLOUX, *Le théorème de* M. PICARD, *suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières* (Thèse) [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 9^e^ série, t. III (1924), p. 345-]; *Sur le théorème de* M. PICARD [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. LIII (1925), p. 181-217].

[6]) G. VALIRON, *Compléments au théorème de* PICARD-JULIA [Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 51 (1927), p. 167-183].

la constante a est remplacée par un polynome ou par une fonction encore plus générale [7]). Ce sont ces généralisations dont il s'agit dans le présent mémoire.

Nous bornerons notre attention aux fonctions entières. Pour notre but nous aurons besoin d'une inégalité relative aux fonctions $f(z)$ holomorphes et ne prenant pas les valeurs zéro et un dans le cercle-unité. D'après un théorème de M. SCHOTTKY on sait que chaque fonction d'une telle famille est bornée dans le cercle $|z| \leqq \theta < 1$ par une fonction de $f(0)$ et θ. M. VALIRON a donné une expression explicite pour cette fonction, à savoir [8])

$$|f(z)| < [A|f(0)| + A]^{\frac{1+\theta}{1-\theta}},$$

A étant une constante absolue, et dont nous donnerons une démonstration. On peut étendre cet inégalité au cas où $f(z)$ ne devient pas égale à deux fonctions holomorphes dans $|z| < 1$.

Prenant d'abord une fonction entière $f(z)$ et un polynome $P(z)$ de degré $\leqq p$, et en s'appuyant directement sur le théorème de M. SCHOTTKY, nous nous proposons de démontrer qu'il existe un cercle dans lequel $f(z) - P(z)$ a au moins un zéro pour tous les polynomes $P(z)$ sauf peut-être ceux voisins d'un certain polynome, et alors qu'il existe une suite de cercles $\{C_n\}$ de centres s'éloignant indéfiniment tels que dans C_n les fonctions $f(z) - P(z)$ s'annulent pour tous les $P(z)$ de degré $\leqq p(C_n)$ sauf ceux d'un certain ensemble $\{P\}$ dépendant de C_n. Étant donné

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

et en représentant les $p + 1$ premiers coefficients dans $p + 1$ plans, on peut définir un domaine D des $p + 1$ plans dans lequel les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_p$ peuvent varier sans que les nouvelles fonctions obtenues cessent de s'annuler dans C_n. Le rapport du rayon de C_n à la distance r_n de son centre de l'origine décroit lorsque r_n tend vers infini, d'où résulte immédiatement un théorème analogue à la première proposition énoncée ci-dessus de M. JULIA.

Ensuite nous démontrerons que ces résultats s'étendent au cas où $P(z)$ est remplacé par une fonction rationnelle $R(z)$, ou une fonction entière d'ordre nul dont la densité des zéros vérifie l'inégalité

$$n(r) < (\log r)^{1-\beta},$$

où β est un nombre positif mais aussi petit que l'on veut, en supposant dans le second cas que la fonction $f(z)$ donnée soit d'ordre positif.

---

7) G. VALIRON, *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* (Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. II), (Paris, Gauthier-Villars, 1925).

8) G. VALIRON, *Sur les fonctions méromorphes sans valeur asymptotique* [Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences, t. 182 (1926), p. 1266-1269].

La méthode employée exige que $g(z)$ soit d'ordre nul, mais on peut se demander si les résultats restent vrais quand l'ordre de $g(z)$ est positif mais inférieur à celui de $f(z)$.

Il me reste pour terminer cette introduction, à exprimer toute la reconnaissance que j'ai contractée envers M. FRÉCHET, le Directeur, et envers MM. les Professeurs de l'Institut de Mathématiques à Strasbourg, et à remercier tout particulièrement M. VALIRON qui a bien voulu orienter mon travail et près de qui j'ai trouvé une aide constante.

CHAPITRE I.

Quelques théorèmes préliminaires.

2. ***L'inégalité de*** LANDAU-VALIRON.—Pour la démonstration de cette inégalité nous avons besoin de quelques résultats de la théorie de la fonction modulaire. Désignons par ω le rapport des deux périodes ω_1 et ω_2 de la fonction elliptique $\wp(z)$ de WEIERSTRASS. Nous supposerons que la partie imaginaire de ω soit positive, ce qui est loisible. La fonction modulaire

$$J(\omega) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

où g_2 et g_3 ont leurs sens usuels, reste inaltérée quand on effectue sur ω une substitution du groupe modulaire arithmétique. En prenant une nouvelle variable

$$q = e^{2\pi i\omega}$$

on peut obtenir le développement suivant :

$$(1) \qquad y = J(\omega) = \frac{1}{1728q}[1 + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots] = \frac{1}{1728q} F(q)$$

la fonction $F(q)$ étant holomorphe pour $|q| < 1$. La formule (1) nous montre que $J(\omega)$ est holomorphe dans le domaine qui correspond à la couronne $0 < |q| < 1$ au plan des q, c'est-à-dire dans le domaine défini par les inégalités

$$\varepsilon < I(\omega) < M,$$

où $I(\omega)$ désigne la partie imaginaire de ω, ε est arbitrairement petit et M est arbitrairement grand.

La fonction $J(\omega)$ prend une fois et une fois seulement toute valeur dans le triangle curviligne défini par les égalités et les inégalités

$$D: \quad -\frac{1}{2} < R(\omega) \leqq \frac{1}{2}, \quad |\omega| > 1; \quad \text{et} \quad 0 \leqq R(\omega) \leqq \frac{1}{2}, \quad |\omega| = 1.$$

$R(\omega)$ étant la partie réelle de ω. Il suffit de connaître la fonction $J(\omega)$ dans D pour la connaître dans tout le demi-plan positif. La fonction inverse $\omega(y)$ de $J(\omega)$ est une fonction multiforme possédant une infinité de branches. Dans notre discussion nous considérons la branche $\bar{\omega}(y)$ de $\omega(y)$ qui correspond au domaine fondamental de $J(\omega)$. Soit $f(z)$ une fonction qui est holomorphe et qui ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle $|z| < 1$, et soit $f(0) = c_0 \neq 0$. En employant ces propriétés de la fonction modulaire M. VALIRON a démontré, d'après M. LANDAU, que l'inégalité [9])

$$\log|f(z)| < \Psi(f(0))\frac{1}{1-r}$$

est valable pour $|z| \leqq r < 1$, où

$$\Psi(x) = 4\pi\left[I(\omega(x)) + \frac{1}{I(\omega(x))}\right] + \log K,$$

K désignant le module maximum de $qJ(\omega)$ pour $|q| = e^{-2\pi}$.

En faisant une modification legère dans la démonstration de M. VALIRON on aura

$$\log|f(z)| < \varphi(f(0))\frac{1+r}{1-r} \tag{2}$$

avec

$$\varphi(x) = 2\pi\left[I(\omega(x)) + \frac{1}{I(\omega(x))}\right] + \log K.$$

De l'inégalité (2) nous déduirons une autre qui donne une borne supérieure pour $|f(z)|$ très utile pour les applications. Cette inégalité a été déjà énoncée sans démonstration par M. VALIRON [10]).

Soit

$$\bar{\omega}(y) = a_0 + a_1(y - f(0)) + \cdots$$

le développement dans le voisinage du point $y = f(0)$ de la branche de la fonction $\omega(y)$ qui correspond au domaine fondamental D. En remplaçant dans cette série y par $f(z)$ nous aurons le développement

$$g(z) = \bar{\omega}(f(z)) = a_0 + a_1 f'(0)z + \cdots$$

---

[9]) G. VALIRON, *Lectures on the General Theory of Integral Fonctions* (Deighton, Bell and Co., Cambridge, 1923), Chap. 6. Nous renverrons le lecteur à plusieurs reprises à ce livre sous le titre de « Lectures ».

[10]) l. c. [8]).

qui est valable dans le cercle $|z| < 1$. $J(\omega)$ étant l'inverse de $\omega(y)$, la fonction $f(z)$ est égale à $J(g(z))$, et par conséquent au point c_0 dans le plan de $J(\omega)$ correspond un point $\bar{\omega}(c_0)$ dans le triangle fondamental D du ω plan.

Il s'agit de trouver maintenant une borne supérieure du nombre $\varphi(c_0)$ lorsque le point $\bar{\omega}(c_0)$ se trouve dans D. De la géometrie il résulte que

$$\frac{1}{I(\bar{\omega}(c_0))} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

Pour considérer le terme $I(\bar{\omega}(c_0))$ il est commode de diviser D en deux régions selon que $I(\bar{\omega}(c_0)) \leqq K_1$, ou $> K_1$, K_1 étant un nombre que nous allons définir. D'abord, de la formule (1) on déduit que le produit $q\,J(\omega)$ est régulier pour $|q| < 1$ et

$$q\,J(\omega) \rightarrow K_0 = \frac{1}{1728}$$

lorsque q tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque $I(\bar{\omega}(x))$ tend vers infini.

Soit K_1 un nombre tel que l'inégalité

$$|q\,J(\omega)| > K_0^2$$

ait lieu pour $I(\bar{\omega}(x)) > K_1$. En particulier nous aurons pour $I(\bar{\omega}(c_0)) > K_1$

$$|q\,J(\bar{\omega}(c_0))| = |q|\,|c_0| > K_0^2,$$

et ensuite

$$e^{-2\pi I(\bar{\omega}(c_0))}|c_0| > K_0^2,$$

d'où il résulte que

$$2\pi I(\bar{\omega}(c_0)) < \log|c_0| - 2\log K_0 < \log|c_0| + K_2, \tag{4}$$

K_2 une constante bornée.

Considérons l'inégalité (2) pour le cas où

$$I(\bar{\omega}(c_0)) \leqq K_1. \tag{5}$$

Nous aurons

$$\log|f(z)| < \left[2\pi I(\bar{\omega}(c_0)) + \frac{2\pi}{I(\bar{\omega}(c_0))} + \log K\right]\frac{1+r}{1-r}$$

et par suite, en tenant compte des inégalités (3) et (5)

$$\log|f(z)| < \left[2\pi K_1 + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + \log K\right]\frac{1+r}{1-r}$$

$$= (\log A_1)\frac{1+r}{1-r},$$

A_1 une constante bornée; par conséquent

$$|f(z)| < A_1^{\frac{1+r}{1-r}} \tag{6}$$

D'autre part si $I\left(\overline{\omega}(c_0)\right) > K_1$, les inégalités (3) et (4) nous donnent

$$\log|f(z)| < \left[\log|c_0| + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + \log K + K_2\right]\frac{1+r}{1-r}$$
$$= [\log|c_0| + K_3]\frac{1+r}{1-r}$$

et donc

$$|f(z)| < [A_2|c_0|]^{\frac{1+r}{1-r}} \tag{7}$$

A_2 étant une constante bornée. En combinant (6) et (7) nous aurons l'inégalité

$$|f(z)| < [A_2|c_0| + A_1]^{\frac{1+r}{1-r}}$$

ce qui est valable pour $I\left(\overline{\omega}(c_0)\right)$ quelconque dans la région fondamentale D, et par conséquent pour toute valeur de c_0 différente de 0, 1, et ∞ qui sont en effet les valeurs exceptionnelles de $f(z)$ dans $|z| < 1$. Dans le second membre A_1 et A_2 sont des constantes absolues. En désignant par A un nombre plus grand que les trois nombres 1, A_1 et A_2 nous aurons le théorème suivant de M. VALIRON.

THÉORÈME 1. — *Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle de centre l'origine et de rayon un et ne prend pas les valeurs* 0 *et* 1 *dans ce cercle, l'inégalité*

$$|f(z)| < [A|f(0)| + A]^{\frac{1+r}{1-r}} \tag{8}$$

a lieu pour $|z| \leqq r < 1$, A étant une constante absolue supérieure à 1.

En faisant une transformation de variable M. VALIRON a remarqué que les termes $f(z)$ et $f(0)$ dans (8) sont permutables, c'est-à-dire que nous avons aussi

$$|f(0)| < [A|f(z)| + A]^{\frac{1+r}{1-r}} \tag{8^{bis}}$$

pour $|z| \leqq r < 1$ [11]).

Des inégalités (8) et (8^{bis}) nous pouvons en déduire d'autres où la constante A n'apparaît plus, ces dernières n'ayant lieu que pour certaines valeurs de $f(0)$ et $f(z)$.

Si, par exemple, $|f(0)| > 1$ nous aurons de (8)

$$|f(z)| < [2A|f(0)|]^{\frac{1+r}{1-r}}. \tag{9}$$

---

[11]) l. c. [6]).

Soient r_0 un nombre positif < 1, et α un nombre, évidemment positif, tel que

$$|f(0)|^\alpha \geqq (2A)^{\frac{1+r_0}{1-r_0}}.$$

Désignons l'expression $(2A)^{\frac{1+r_0}{\alpha(1-r_0)}}$ par $C(r_0, \alpha)$. Alors si $0 < r < r_0$ et $|f(0)|$ est $\geqq C(r_0, \alpha)$ nous aurons

$$(9') \qquad |f(z)| < |f(0)|^{\frac{1+r}{1-r}+\alpha}.$$

D'une même manière si $|f(z)|$ est supérieur à 1 on a de (8^{bis})

$$(9^{\text{bis}}) \qquad |f(0)| < [2A|f(z)|]^{\frac{1+r}{1-r}}$$

et si $|f(z)|$ est supérieur à un certain nombre positif $C(r_0, \alpha)$ il résulte que

$$(9'^{\text{bis}}) \qquad |f(0)| < |f(z)|^{\frac{1+r}{1-r}+\alpha}, \qquad |z| \leqq r < r_0 < 1; \qquad \alpha > 0.$$

Plus précisement, si $|f(0)| > 2A$, on déduit immédiatement de (9)

$$|f(z)| < |f(0)|^{\frac{3}{1-r}},$$

ce qui est valable pour $|z| \leqq r \leqq \frac{1}{2}$, et si $|f(0)| > 4A^2$ cette inégalité a lieu pour $|z| \leqq r < 1$. Encore, si $|f(z)| > 2A$ on a

$$(10) \qquad |f(0)| < |f(z)|^{\frac{3}{1-r}}$$

pour $|z| \leqq r \leqq \frac{1}{2}$, inégalité qui nous sera utile plus tard, et si $|f(z)| > 4A^2$ on a (10) valable pour $|z| \leqq r < 1$.

Les inégalités (9′) et ($9'^{\text{bis}}$) sont utiles quand les valeurs de $|f(0)|$ ou de $|f(z)|$ sont grandes. Nous trouverons des inégalités analogues pour le cas où $|f(0)|$ ou $|f(z)|$ sont petits. On remarque que la fonction $\frac{1}{f(z)}$ vérifie les mêmes conditions que $f(z)$, c'est-à-dire elle est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle $|z| < 1$.

Supposons que $|f(0)|$ soit petit et par conséquent $\frac{1}{|f(0)|}$ soit grand, par exemple $> C_1$. En un point z_1 pour lequel $|z_1| = r_1$ et

$$\frac{r_1}{1 - r_1} \leqq r < r_0 < 1$$

on aura $\left|\frac{1}{f(z_1)}\right| > 1$; car sinon, en appliquant le théorème de SCHOTTKY au cercle à centre z_1 et de rayon $1 - r_1$, d'après (8) nous aurons pour $|z - z_1| \leqq r_1$

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| < (2A)^{\frac{1+r}{1-r}} = K(r)$$

et par conséquent

$$\left|\frac{1}{f(0)}\right| < K(r).$$

Il ne suffit que de prendre C_1 égal à $2K(r_0)$ pour arriver à une contradiction.

Alors $\left|\frac{1}{f(z_1)}\right|$ étant supérieur à 1, l'inégalité (9^{bis}) nous donne

$$\left|\frac{1}{f(0)}\right| < \left[2A\frac{1}{|f(z_1)|}\right]^{\frac{1+r_1}{1-r_1}},$$

ou

$$|f(z_1)| < 2A(|f(0)|)^{\frac{1-r_1}{1+r_1}}, \tag{11}$$

valable pour $|z_1| \leqq r_1 \leqq \frac{r}{1+r}$, $r < r_0 < 1$.

D'autre part, si $|f(z)|$ est petit on a d'une même façon

$$|f(0)| < 2A(|f(z)|)^{\frac{1-r}{1+r}}, \tag{11^{bis}}$$

inégalité valable pour $|z| \leqq r < r_0 < 1$.

Si $|f(0)|$ est inférieur à un certain nombre $C_1(\alpha)$ tel que $|f(0)|^{-\alpha} > 2A$, α étant nécessairement positif, on a de (11)

$$|f(z_1)| < |f(0)|^{\frac{1-r_1}{1+r_1}-\alpha}, \qquad |z_1| = r_1 \leqq \frac{r}{1+r},$$

et si $|f(z)|$ est inférieur à un certain nombre $C_1(\alpha)$ on a d'après (11^{bis})

$$|f(0)| < |f(z)|^{\frac{1-r}{1+r}-\alpha}, \qquad |z| \leqq r < r_0 < 1.$$

En mettant dans ces deux dernières inégalités $r = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{6}$, on déduit que l'inégalité

$$|f(z)| < |f(0)|^{\frac{1}{3}}$$

a lieu dans le cercle $|z| < \frac{1}{4}$, pourvu que $|f(0)|$ soit inférieur à un certain petit nombre C_1, et l'inégalité

$$|f(0)| < |f(z)|^{\frac{1}{3}}$$

a lieu dans le cercle $|z| < \frac{1}{3}$, pourvu que $|f(z)|$ soit inférieur à un certain petit nombre C_2.

3. *Une généralisation du théorème de* LANDAU-VALIRON. — Nous donnerons maintenant une généralisation de Théorème 1. En employant sa théorie fertile de familles normales et de familles quasi-normales M. MONTEL a démontré le théorème suivant [12]).

Soient

$$f \equiv a_0 + a_1 z + \cdots, \qquad g \equiv b_0 + b_1 z + \cdots, \qquad h \equiv c_0 + c_1 z + \cdots,$$

trois fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < R$. Supposons que les équations

$$f - g = 0, \qquad f - h = 0$$

n'aient pas de racines et que

$$|g| < M, \qquad |h| < M$$

dans ce cercle. Alors, si $b_0 \neq c_0$, on a l'inégalité

$$|f| < \Phi(a_0 - c_0, b_0 - c_0, M, \theta)$$

valable dans le cercle $|z| < \theta R$, Φ ne dépendant que de $a_0 - c_0$, $b_0 - c_0$, M et θ.

Nous considérerons des cas spéciaux et nous donnerons des valeurs explicites pour la fonction Φ. Supposons que h soit identiquement nul et que les fonctions f, g, $f-g$ n'aient pas de zéros, tandis que $|g| < M$ dans le cercle $|z| < 1$. La fonction $\frac{f(z)}{g(z)}$ est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1 pour $|z| < 1$. Par conséquent le théorème 1 s'applique, et nous aurons pour $|z| \leqq r < 1$

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| < \left[A\left|\frac{f(0)}{g(0)}\right| + A\right]^{\frac{1+r}{1-r}},$$

d'où le théorème suivant:

THÉORÈME 2. — *Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomophes et ne s'annulant pas dans le cercle $|z| < 1$. Supposons que l'équation*

$$f(z) - g(z) = 0$$

n'ait pas de racines dans ce cercle, et que $|g(z)| <$ un certain nombre positif M. Alors dans le cercle $|z| \leqq r < 1$ on a

$$(12) \qquad |f(z)| < M\left[A\left|\frac{f(0)}{g(0)}\right| + A\right]^{\frac{1+r}{1-r}}$$

[12]) P. MONTEL, *Sur les familles complexes et leurs applications* [Acta Mathematica, Bd. 49 (1926), pp. 115-161].

D'une manière plus générale soient $f-g$, $g-h$, $f-h$ des fonctions holomorphes et ne s'annulant pas dans $|z|<1$, et soient $|g(z)|<M$, $|h(z)|<M$. La fonction $\frac{f-g}{h-g}$ est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle-unité, et nous voyons facilement que l'inégalité

$$|f(z)|<M+2M\left[A\frac{|f(0)|+M}{|h(0)-g(0)|}+A\right]^{\frac{1+r}{1-r}}$$

est valable pour $|z|\leqq r<1$.

Chapitre 2.

Généralisations des théorèmes de M. Julia.

4. *Un théorème de M.* Valiron. — Dans un mémoire récent [13]) en s'appuyant directement sur le théorème de M. Schottky, M. Valiron a précisé les résultats de M. Milloux sur le rayon des cercles de remplissage. J'indiquerai brèvement ses résultats parce que nous en avons besoin de quelques-uns et la méthode employée nous sera utile.

Soit $f(z)$ une fonction entière ayant une singularité essentielle à l'infini. (M. Valiron a considéré le cas un peu plus général où $f(z)$ est holomorphe au voisinage du point à l'infini qui est un point essentiel). Il existe une suite infinie de cercles de rayons croissants indéfiniment sur lesquels la fonction $f(z)$ prend des valeurs inférieurs à 1 en module. Sinon, nous voyons que pour r supérieur à un certain nombre r_0 la fonction $\frac{1}{f(z)}$ serait bornée, ce qui contredit le fait que $f(z)$ a une singularité essentielle à l'infinie.

Alors soit $|z|=r$ une circonférence C sur laquelle il y a un point au moins où $|f(z)|\leqq 1$, et soit z_1 un point de C en lequel

$$|f(z_1)|=M(r,f),$$

$M(r,f)$ désignant le module maximum de $f(z)$ sur la circonférence C. Il s'agit d'étudier la fonction $f(z)$ dans la couronne circulaire:

$$\Gamma:\quad r(1-2\alpha)<|z|<r(1+2\alpha),$$

où α est une constante positive $<\frac{1}{2}$ ou une fonction convenable de r. Supposons

---

[13]) l. c. [6]).

que la fonction $f(z)$ ne prenne pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle

$$|z - z_1| < 2\alpha r.$$

De l'inégalité (10) il résulte que

$$|f(z)| > M(r, f)^{\frac{1}{6}}$$

pour z à l'intérieur et sur la circonférence du cercle

$$|z - z_1| \leqq \alpha r.$$

Soit z_2 un point où cette circonférence traverse la circonférence C. Si $f(z)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle $|z - z_2| < 2\alpha r$ il résulte que

$$|f(z)| > |f(z_2)|^{\frac{1}{6}} > M(r, f)^{\frac{1}{6^2}}$$

pour $|z - z_2| \leqq \alpha r$. Continuons ce procédé du point z_2. Si nous ne rencontrons aucun cercle dans lequel $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1 nous déduisons que la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$f(z) > M(r, f)^{\frac{1}{6^m}} \tag{13}$$

dans le domaine formé par la suite de cercles de rayons αr et ayant les mêmes centres que les cercles employés dans le procédé, et par conséquent dans une couronne

$$r(1 - \alpha') \leqq |z| \leqq r(1 + \alpha')$$

où α' est un certain nombre $< \alpha$, et le nombre m figurant dans (13) est donné par l'inégalité

$$m < 1 + \frac{\pi}{\arcsin \frac{\alpha}{2}}. \tag{14}$$

Ici nous supposons que le second membre de (13) soit supérieur à un certain nombre C_1 pour que l'inégalité (10) puisse être appliqué.

Mais si r est suffisamment grand $M(r, f)^{\frac{1}{6^m}}$ est supérieur à 1, et nous arrivons à une contradiction avec le fait que $f(z)$ prend une valeur de module inférieur ou égal à 1 sur la circonférence C. Par conséquent il y a au moins un cercle γ de centre z_γ dans la couronne Γ dans lequel $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1.

En appliquant le théorème de M. Schottky au plus grand cercle

$$|z - z_\gamma| < \tau \qquad (\tau < 2\alpha r)$$

dans lequel $f(z)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1 M. Valiron a été amené au théorème suivant:

Soient $f(z)$ une fonction entière ayant une singularité essentielle à l'infini, K un nombre supérieur à une constante absolue, et α un nombre positif fixe ou une fonction convenable de r. Alors il existe des cercles $C(f)$

$$|z - z(f)| < 12\alpha 6^m K \frac{r}{\log M(r, f)} \tag{15}$$

avec

$$r(1 - 2\alpha) < |z(f)| < r(1 + 2\alpha),$$

dont les centres s'éloignent indéfiniment, tels que dans $C(f)$, $f(z)$ prenne toute valeur Z de module inférieur à $\varphi(K)$ sauf peut-être des valeurs qui peuvent être enfermées dans un cercle de rayon $\frac{1}{\varphi(K)}$ du plan des Z, m et $\varphi(K)$ étant donnés respectivement par l'inégalité (14) et l'équation suivante

$$\varphi(K) = \left(\frac{e^K}{65 A^5}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Au point z_γ et au centre du cercle $C(f)$ nous avons l'inégalité

$$|f(z)| > e^K. \tag{16}$$

5. ***Distribution des racines de $f(z) - P(z)$ où $P(z)$ est un polynome.*** — Nous allons considérer la distribution des zéros de $f(z) - P(z)$ où $f(z)$ est une fonction entière donnée et $P(z)$ un polynome quelconque de degré $\leqq p$, et nous démontrerons qu'il existe des cercles possédant des zéros de $f(z) - P(z)$ sauf peut-être pour certains polynomes, ces polynomes dépendant des cercles considérés.

En employant les mêmes notations que dans le numero précédent on sait qu'il y a dans Γ un cercle de remplissage γ de rayon

$$R < 12\alpha 6^m K \frac{r}{\log M(r, f)},$$

tel que à son centre z'_γ

$$|f(z)| > e^K. \tag{16}$$

Soient x le point dans γ où $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1, γ_1 et γ_2 les cercles de centre x et de rayons R et $2R$ respectivement.

Soit

$$P_1(z) = C'_t z^t + \cdots + c'_0$$

un polynome de degré $\leqq p$ tel que la fonction $F_1(z) = f(z) - P_1(z)$ n'ait pas de zéros dans le cercle γ_2. Pour les polynomes $P(z)$ qui diffèrent sensiblement du polynome $P_1(z)$ nous démontrerons que la fonction $f(z) - P(z)$ possèdera un zéro au moins dans γ_2. Car supposons que le contraire soit vrai pour un polynome

$$P(z) = c_n z^n + \cdots + c_0, \qquad n \leqq p.$$

Si q est le plus grand des nombres t et n et si les coefficients $\{c_i\}$ des polynomes $\{P(z)\}$ considérés sont tous inférieurs à K_1, K_1 étant une constante ou une fonction convenable de r, nous aurons pour $|z| \leqq r$ et $r > 1$

$$|P_1(z)| \leqq (q+1)K_1 r^q$$

et

(17) $$|P(z) - P_1(z)| \leqq 2(q+1)K_1 r^q.$$

Le cercle γ_2 et par conséquent le point x se trouveraient dans la couronne

$$\frac{r}{2} < |z| < 2r$$

si

$$2\alpha r + 2R < \frac{r}{2}$$

c'est-à-dire si

(18) $$4\alpha\left[1 + 12\alpha 6^m \frac{K}{\log M(r, f)}\right] < 1.$$

Nous supposerons pour le moment que cette inégalité ait lieu, donnant plus loin les valeurs de α et K pour qu'elle soit satisfaite.

Au point x nous avons

(19) $$\begin{cases} |F_1(x)| \leqq |P_1(x)| + |f(x)| \\ \qquad\quad \leqq (q+1)K_1(2r)^q + 1. \end{cases}$$

En donnant une borne inférieure au premier coefficient de $P(z) - P_1(z)$ on peut trouver une borne inférieure pour $|P(z) - P_1(z)|$. En effet on a

$$|P(z) - P_1(z)| = b_\sigma z^\sigma + b_{\sigma-1} z^{\sigma-1} + \cdots + b_0,$$

avec $\sigma \leqq q$, et $|b_i| < 2K_1$, et alors

$$|P(z) - P_1(z)| \geqq ||b_\sigma||z^\sigma| - |b_{\sigma-1}z^{\sigma-1} + \cdots + b_0||$$

ou

(20) $$|P(z) - P_1(z)| > |b_\sigma| r^\sigma \left|1 - \frac{2K_1}{|b_\sigma|}\frac{1}{r-1}\right|,$$

pourvu que $|z| = r > 1$. En prenant

(21) $$|b_\sigma| > \frac{4K_1}{r}$$

et supposant $r > 3$, le dernier facteur du second membre de (20) sera supérieur à $\frac{1}{4}$. Alors nous avons

$$|P(z) - P_1(z)| > K_1 r^{\sigma-1},$$

et par suite

$$\frac{1}{|P(x)-P_1(x)|}<\frac{2^{q-1}}{K_1 r^{q-1}}, \tag{22}$$

en remarquant que $|x|>r(1-2\alpha)>\frac{r}{2}$ si $\alpha<\frac{1}{4}$. Les fonctions $F_1(z)$, $P(z)-P_1(z)$ et $F_1(z)-[P(z)-P_1(z)]$ sont holomorphes et ne s'annulent pas dans γ_2, et donc la fonction

$$\frac{F_1(z)}{P(z)-P_1(z)}$$

est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans ce cercle. En appliquant l'inégalité de LANDAU-VALIRON et mettant $r=\frac{1}{2}$ dans la formule (12) nous aurons

$$|F_1(z)|<[\text{Max de } |P(z)-P_1(z)| \text{ dans } \gamma_2]\left[A\frac{|F_1(x)|}{|P(x)-P_1(x)|}+A\right]^3$$

valable pour tous les points dans le cercle γ_1, et en tenant compte de (17), (19) et (22) il résulte que

$$|F_1(z)|<CK_1r^{4q+3}$$

et ensuite

$$|f(z)|<C_1K_1r^{4q+3}$$

C et C_1 étant des constantes. Si nous prenons

$$K_1<\frac{\sqrt{r}}{2} \tag{23}$$

nous avons

$$|f(z)|<C_2r^{4q+\frac{7}{2}}\leqq C_2r^{4p+\frac{7}{2}}$$

cette inégalité ayant lieu pour le point $z=z'_r$ en particulier. D'autre part pour ce point on a d'apres (16)

$$|f(z)|>e^K,$$

et donc nous arrivons à une contradiction si

$$e^K>C_2r^{4p+\frac{7}{2}}$$

et donc si

$$K=4(p+1)\log r$$

r étant supérieur à C_2^2.

Il nous reste à choisir α tel que l'inégalité (18) ait lieu. En effet $f(z)$ étant une fonction entière on sait que la fonction $\log M(r, f)$ est une fonction convexe et croissante de $\log r$, d'après un théorème de M. HADAMARD. Par conséquent le rapport de

$\log r$ à $\log M(r, f)$ tend vers zéro lorsque r croit indéfiniment: alors, α étant fixe, m est fixe et

$$12\, 6^m \frac{K}{\log M(r, f)} = 12\, 6^m\, 4(p+1)\frac{\log r}{\log M(r, f)} < 1$$

pour $r >$ un certain nombre r_0. En prenant $\alpha < \frac{1}{8}$ nous voyons que l'inégalité (18) est vérifiée.

Interprétons maintenant l'inégalité (21) ce qui devient, en tenant compte de (23)

$$(21^{\text{bis}}) \qquad |b_\sigma| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Par définition q est le plus grand des nombres t et n, et σ est le degré de $P(z) - P_1(z)$. Quatre cas se presentent:

1° Si $n = t = q = \sigma$ nous avons de (21^{bis})

$$|c_1 - c_1'| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Alors on déduit que la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule dans γ_2 pour tous les polynomes $P(z)$ pour lesquels

$$n = t \qquad \text{et} \qquad |c_1 - c_1'| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

2° Si $n = t = q > \sigma$ on a

$$c_i = c_i' \qquad \text{pour} \qquad q \geqq i > \sigma,$$

et

$$|c_\sigma - c_\sigma'| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Alors la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule pour tous les polynomes $P(z)$ de degré $n = t$ dont les premiers $n - \sigma$ coefficients sont les mêmes que ceux de $P_1(z)$ et

$$|c_\sigma - c_\sigma'| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

3° Si $n > t$ l'inégalité (21^{bis}) devient

$$|c_n| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}},$$

et on voit que la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule dans γ_2 pour les polynomes de degré inférieur à t si $|c_n| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}$.

4° Si $n < t$ on a

$$|c'_t| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Par conséquent si le premier coefficient de $P_1(z)$ est $> \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}$ la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule dans γ_1 pour tous les polynomes de degré $n < t$.

Il est bien entendu que les coefficients des polynomes considérés sont inférieurs à $\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2}$ en module. En rassemblant tous les résultats on a le théorème suivant:

Théorème 3. — *Soient $f(z)$ une fonction entière donnée et*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$$

un polynome de degré $\leqq p$ et tel que $|c_i| < K_1$. Soit $|z| = r$ ($>$ un certain nombre r_0) une circonférence sur laquelle il y a au moins un point où $|f(z)| \leqq 1$. Dans la couronne

$$(1 - 2\alpha) r < |z| < (1 + 2\alpha) r,$$

α étant un nombre fixe $< \frac{1}{8}$, il existe un cercle de remplissage γ de rayon

$$R = H(p, \alpha) \frac{r \log r}{\log M(r, f)},$$

(H une fonction de p et α) possédant la propriété suivante: ou bien la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule dans γ pour tous les polynomes $P(z)$ pour lesquels

$$K_1 < \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2},$$

ou bien parmi les polynomes de cette famille il existe un

$$P_1(z) = c'_t z^t + c'_{t-1} z^{t-1} + \cdots + c'_0$$

tel que la fonction $f(z) - P_1(z)$ ne s'annule pas dans γ, tandis que $f(z) - P(z)$ s'annule dans γ pour tous les polynomes $P(z)$ pour lesquels on a

1° $n = t$ *et* $|c_t - c'_t| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}$,

2° $n = t$ *et* $c_i = c'_i$ *pour* $t \geqq i > \sigma$ *et* $|c_\sigma - c'_\sigma| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}$,

3° $n > t$ *et* $|c_n| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}$, *et pour les polynomes de degré $< t$ pourvu que*

$$|c_i'| > \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

On doit remarquer que le polynome $P_1(z)$ peut dépendre du cercle de remplissage considéré. En outre, plus le cercle de remplissage γ est éloigné plus est étendu l'ensemble admis des polynomes $P(z)$.

Pour les fonctions entières d'ordre fini il existe des couronnes $r < |z| < kr$, k un nombre fini, dont les rayons croissent indéfiniment dans lesquelles $f(z)$ prend l'une des valeurs o et 1 et telles que

$$\log M(kr, f) < h \log M(r, f),$$

h étant un nombre fixe [14]). Cette propriété nous permet d'exprimer la quantité R en fonction du module de l'affixe du centre de γ. En prenant α tel que $1 - 2\alpha > \frac{1}{k}$ des calculs faciles nous amènent au théorème suivant:

THÉORÈME 3_a. — *Soient $f(z)$ une fonction entière donnée d'ordre fini et*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0, \qquad n \leqq p,$$

un polynome quelconque. Il existe une suite infinie de cercles $\{C_\nu(f)\}$ d'équation

$$|z - z_\nu(f)| < \frac{H(f, p)|z_\nu(f)| \log |z_\nu(f)|}{\log M(|z_\nu(f)|, f)}$$

$H(f, p)$ étant un nombre ne dépendant que de $f(z)$ et p, possédant la propriété suivante: ou bien la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule dans $C_\nu(f)$ pour chaque $P(z)$ de l'ensemble de polynomes pour lesquels

$$|c_i| < \frac{|z_\nu(f)|^{\frac{1}{2}}}{6} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

ou bien parmi cet ensemble il y a un polynome

$$P_1(z) = c_t' z^t + c_{t-1}' z^{t-1} + \cdots + c_0', \qquad c_t' \neq 0,$$

tel que $f(z) - P_1(z)$ ne s'annule pas dans $C_\nu(f)$ tandis que $f(z) - P(z)$ s'annule pour tous les polynomes $P(z)$ de degré $n = t$ si

$$|c_t - c_t'| > \frac{6}{|z_\nu(f)|^{\frac{1}{2}}},$$

[14]) l. c. [9]).

ou si $c_i = c'_i$ *pour* $t \geqq i > \sigma$ *et* $|c_\sigma - c'_\sigma| > \dfrac{6}{|z_\nu(f)|^{\frac{1}{2}}}$, *ou de degré* $n < t$ *si*

$$|c_n| > \frac{6}{|z_\nu(f)|^{\frac{1}{2}}},$$

ou de degré $n < t$ *si*

$$|c'_t| > \frac{6}{|z_\nu(f)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Si $P_1(z)$ est un polynome tel que $f(z) - P_1(z)$ ne s'annule pas dans $C_\nu(f)$ nous l'appellerons un polynome exceptionnel pour $C_\nu(f)$, et si $f(z) - P_1(z)$ ne s'annule pas dans aucun cercle de l'ensemble $\{C_\nu(f)\}$ nous dirons que $P_1(z)$ est exceptionnel pour cet ensemble. Le polynome peut être exceptionnel dans chacun des cercles $C_\nu(f)$ sauf pour un nombre fini d'entre eux: dans ce cas nous dirons qu'il est exceptionnel au sens large pour la suite $\{C_\nu(f)\}$. A partir d'un certain cercle de rang assez grand le polynome devient exceptionnel au sens étroit.

Nous ferons une comparaison de ce dernier théorème avec celui de M. Valiron énoncé au § 4. Dans une suite de cercles $\{C_\nu(f)\}$ de centres s'éloignant indéfiniment la fonction $f(z)$ prend toute valeur Z de module inférieur à un certain nombre φ sauf peut-être quelques-unes; ce qui veut dire que si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

on peut faire varier le premier coefficient dans une région déterminée $D(C_\nu, f)$ du plan des c_0, sans que les nouvelles fonctions obtenues cessent de s'annuler dans le cercle $C_\nu(f)$, cette région dépendant de $f(z)$ et du cercle $C_\nu(f)$ et devenant plus grande quand le cercle s'éloigne de l'origine.

Représentons le coefficient c_i $(0 \leqq i \leqq n \leqq p)$ du polynome $P(z)$ dans un plan P_i. Nous allons définir des domaines $\Delta^\sigma_{p,n}$ comprenant des régions dans les plans P_i tels que l'on peut faire varier les coefficients de $P(z)$ dans $\Delta^\sigma_{p,n}$ sans que la fonction $f(z) - P(z)$ cesse de s'annuler dans $C_\nu(f)$. Soit $|z_\nu(f)| = r_\nu$. Traçons dans chaque plan P_i, $0 \leqq i \leqq p$, un cercle D_i avec l'origine pour centre et de rayon $\dfrac{r_\nu^{\frac{1}{2}}}{2}$. Le nombre t désignant le degré et $c'_0, \ldots, c'_t$ les coefficients d'une fonction exceptionnelle ($t = c'_i = 0$ s'il n'y a pas de fonction exceptionnelle) traçons dans le plan P_i, où $0 \leqq i \leqq t$, le cercle d_i d'équation

$$|c_i - c'_i| > \frac{2}{r_\nu^{\frac{1}{2}}},$$

et dans le plan des P_i, $t < i \leqq p$, les cercles d_i d'équation

$$|c_i| > \frac{2}{r_\nu^{\frac{1}{2}}}.$$

L'extérieur des cercles D_i et l'intérieur des cercles d_i seront dits des régions exclues.

Nous définirons le domaine $\Delta^\sigma_{p,n}$ de la façon suivante: il ne contient que les centres des petits cercles d_i dans les plans P_i, $\sigma < i \leqq p$; les points non-exclus dans le plan P_σ; et les points à l'intérieur des cercles D_i dans les plans P_i où $i < \sigma$. A chaque domaine $\Delta^\sigma_{p,n}$ correspond une famille de polynomes $P(z)$ de degré n. A tous les domaines $\Delta^\sigma_{p,n}$ $(\sigma = 0, 1, \ldots, p)$ correspond un ensemble de polynomes de degré $\leqq p$ et pour ces polynomes la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule dans le cercle $C_\nu(f)$. On voit que $n = \sigma$ si $\sigma \geqq t$ et de plus si $t \neq 0$ et le cercle d_t contient l'origine il est évident que les polynomes admis sont de degré $\geqq t$.

Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots + a_p z^p + \cdots.$$

L'addition de $-P(z)$ à $f(z)$ est la même chose que le changement des $n+1$ premiers coefficients de $f(z)$. En faisant jouer au point a_i $(t < i \leqq p)$ le rôle de l'origine dans le plan des c_i, et au point $a_i - c'_i$ le rôle du point c'_i dans le plan des c_i $(i \leqq t)$, nous pouvons définir des domaines $\bar{\Delta}^\sigma_{p,n}$ analogues aux $\Delta^\sigma_{p,n}$. Le théorème 3 nous montre que si nous faisons varier le point $a_0, a_1, \ldots, a_p$ dans un quelconque des domaines $\bar{\Delta}^\sigma_{p,n}$ toutes les fonctions correspondantes s'annulent dans le cercle $C_\nu(f)$, ces domaines dépendant de f et de $C_\nu(f)$.

6. Maintenant nous démontrerons qu'il n'y a qu'un polynome qui est exceptionnel pour l'ensemble de cercles $\{C_\nu(f)\}$. Supposons que

$$P_1(z) = c'_t z^t + \cdots + c'_0$$

soit un tel polynome exceptionnel. Soit

$$P(z) = c_n z^n + \cdots + c_0$$

un autre polynome quelconque: alors $f(z) - P(z)$ s'annule dans un cercle de la suite $\{C_\nu(f)\}$ assez éloigné. Supposons que le contraire soit vrai.

Prenons une suite de circonférences $|z| = r_i$ $(r_i < r_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots)$ telle que sur chacune il y a un point au moins où $|f(z)| \leqq 1$. Alors il existe une suite de cercles $\{C_i(f)\}$ de rayons

$$R_i = H(p, \alpha)\frac{r_i \log r_i}{\log M(r_i, f)}.$$

Désignons par ε_i le rapport

$$\frac{\log r_i}{\log M(r_i, f)}.$$

D'après le théorème de M. HADAMARD cité précédemment on voit que ε_i tend vers zéro lorsque i tend vers infini.

Soit p le plus grand des nombres t et n et prenons λ le plus petit entier tel que

$$4(p+1) < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\lambda}}.$$

Soient K_1 le plus grand des modules des coefficients de $P(z)$ et $P_1(z)$, μ le plus petit entier tel que

$$K_1 < \frac{\sqrt{r_\mu}}{2},$$

et L le plus petit entier tel que

$$|c_i'| > \frac{2}{\sqrt{r_L}}.$$

Les polynomes $P_1(z)$ et $P(z)$ n'étant pas identiques, pour au moins une valeur de i nous avons $c_i - c_i' \neq 0$. Soit K le plus grand de ces nombres i et prenons M le plus petit entier tel que

$$|c_K - c_K'| > \frac{2}{\sqrt{r_M}}.$$

Désignons par N le plus grand des nombres λ, μ, L et M. De la façon du choix de N et des calculs de § 5 il résulte que la fonction $P(z) - P_1(z)$ ne s'annule pas dans $C_N(f)$. Evidemment le même résultat a lieu pour les cercles $C_{N+1}(f)$, $C_{N+2}(f)$, ...

Finalement le rayon du cercle $C_N(f)$ est égal à $H_1(\alpha)\sqrt{\varepsilon_N}\, r_N$, où $H_1(\alpha)$ ne dépend que de α. La distance du centre de $C_N(f)$ à l'origine est inférieure à $\frac{3\, r_N}{2}$ et par suite le rapport du rayon de $C_N(f)$ à la distance de son centre à l'origine tend vers zéro lorsque N croit indéfiniment. Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. — *Étant donnée une fonction entière $f(z)$ il existe une suite de cercles $C_\nu(f)$ de centres z_ν ($|z_\nu| = r_\nu$) s'éloignant indéfiniment et de rayons $d_\nu r_\nu$, d_ν tendant vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$, telle que l'équation*

$$f(z) - P(z) = 0$$

possède une infinité de racines dans l'ensemble des cercles pour tous les polynomes $P(z)$ sauf un au plus.

En faisant usage d'un raisonnement de M. VALIRON [15]) on déduit immédiatement un résultat qui généralise la première proposition de M. JULIA énoncée dans l'intro-

---

[15]) l. c. [9]), Chap. VI.

duction. Soit L une courbe continue procédant de l'origine à l'infini, et franchissant chaque cercle de centre l'origine en un point seulement. On peut la représenter par l'équation

$$\theta = F(r)$$

avec $F(r)$ une fonction de r continue et uniforme pour toutes les valeurs de r. Supposons que $F(1) = \theta_0$. En faisant tourner L autour de l'origine par un angle φ $(0 < \varphi < 2\pi)$ on obtient une courbe L_φ d'équation

$$\theta = F(r) + \varphi.$$

Une telle courbe et une seule passe par chaque point du plan. Soient $L(\nu)$ la courbe qui passe par le centre du cercle $C_\nu(f)$ et $x_\nu = e^{i\psi_\nu}$ le point où $L(\nu)$ franchit le cercle $|z| = 1$. La suite infinie de points $\{x_\nu\}$ a au moins un point limite, soit $X = e^{i\psi}$. La courbe qui passe par le point $X = e^{i\psi}$ se déduit de L par une rotation à travers un angle $\psi - \theta_0$ et par conséquent est d'équation

$$\theta = F(r) - \theta_0 + \psi.$$

Puisque le rapport du rayon de $C_\nu(f)$ à la distance de son centre à l'origine tend vers zéro lorsque ν tend vers infini il est évident que la bande comprise entre les deux courbes

$$\theta = F(r) - \theta_0 + \psi - \varepsilon \quad \text{et} \quad \theta = F(r) - \theta_0 + \psi + \varepsilon,$$

ε étant positif et arbitraire, contient une infinité de ces cercles. Le théorème précédent s'applique à cet ensemble de cercles et nous avons la proposition suivante:

THÉORÈME 4_a. — *Soit L un chemin continu procédant de l'origine à l'infini, et n'ayant qu'un point commun avec chaque cercle de centre l'origine, et B une bande balayée par L en le faisant tourner autour de l'origine à travers un angle d'ouverture aussi petit que l'on veut. Étant donnée une fonction entière $f(z)$ il existe une bande B', dérivée de B par une rotation autour de l'origine, dans laquelle la fonction $f(z) - P(z)$ s'annule une infinité de fois pour tous les polynomes $P(z)$ sauf peut-être un.*

Nous ferons quelques remarques qui généralisent un peu les théorèmes 3-4_a.

1° Il est évident que si $f(z)$ n'est pas holomorphe dans un cercle $|z| < C$ on ne change rien d'essentiel dans les calculs de § 5 pourvu que l'on ne considère que la région à l'extérieur de ce cercle. Alors les théorèmes 3-4_a restent vrais si au lieu d'une fonction entière $f(z)$ nous prenons une fonction $F(z)$ qui est holomorphe à l'extérieur de $|z| < C$ sauf à l'infini où elle possède une singularité essentielle.

2° Au lieu d'un polynome prenons une fonction $\Pi(z)$ holomorphe à l'extérieur d'un cercle $|z| < C$ sauf à l'infini où elle possède un pôle. Le développement de $\Pi(z)$ à l'extérieur de ce cercle est de la forme

$$\Pi(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots.$$

Le théorème 3 s'applique à ces fonctions si les coefficients vérifient l'inégalité

$$|c_i| < \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2}, \qquad (i = n, \ldots, 0, -1, \ldots).$$

En modifiant ce résultat dans l'ordre des idées de théorème 4 et en le combinant avec la remarque 1° nous avons l'énoncé général:

THÉORÈME 5. — *Soient $F(z)$ une fonction donnée holomorphe à l'extérieur d'un cercle $|z| < C$ sauf à l'infini qui est une singularité essentielle et $\Pi(z)$ une fonction holomorphe à l'extérieur d'un cercle $|z| < C_1$ sauf à l'infini qui est un pôle. Alors il existe une bande d'ouverture arbitrairement petite dans laquelle l'équation*

$$F(z) - \Pi(z) = 0$$

possède une infinité de racines pour tous les $\Pi(z)$ sauf un au plus.

7. ***Les zéros de $f(z) - R(z)$ où $R(z)$ est une fonction rationnelle.*** — Puisque les fonctions rationnelles n'ont pas de pôles à l'extérieur d'un certain cercle sauf peut-être à l'infini on peut s'attendre à ce que la méthode employée dans le cas d'un polynome s'étende au cas où $P(z)$ est une fonction rationnelle. C'est cette extension que nous nous proposons de considérer dans ce numero.

Soient C_0 une circonférence sur laquelle il y a un point z_0 où $|f(z_0)| \leqq 1$, et Γ la couronne

$$r(1 - 2\alpha) < |z| < r(1 + 2\alpha), \qquad \alpha < \frac{1}{2}.$$

Il existe dans cette couronne un cercle γ dans lequel $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1 et à son centre on a $|f(z)| > e^K$. Soient x un point où $f(z)$ égale 0 où 1, γ_1 et γ_2 deux cercles de centre x et de rayons R et $2R$ et $R_1(z)$ et $R_2(z)$ deux fonctions rationnelles:

$$R_1(z) = \frac{M_1(z)}{N_1(z)}, \qquad R_2(z) = \frac{M_2(z)}{N_2(z)},$$

avec

$$M_1(z) = a_{m_1} z^{m_1} + a_{m_1-1} z^{m_1-1} + \cdots + a_0,$$

$$M_2(z) = a'_{m_2} z^{m_2} + a'_{m_2-1} z^{m_2-1} + \cdots + a'_0,$$

$$N_1(z) = b_{n_1} z^{n_1} + b_{n_1-1} n^{n_1-1} + \cdots + b_0,$$

$$N_2(z) = b'_{n_2} z^{n_2} + b'_{n_2-1} z^{n_2-1} + \cdots + b'_0.$$

Nous supposerons que le numérateur et le dénominateur de $R_i(z)$ $(i = 1, 2)$ n'aient pas de facteurs communs, et que les nombres m_1, m_2, n_1 et n_2 sont tous inférieurs à un nombre p. Pour simplifier les calculs nous admettrons que le coefficient du terme de degré le plus haut du le dénominateur soit égal à 1. Si cela n'a pas lieu, il ne suffit qu'une division du dénominateur et du numérateur par une même quantité pour que la condition soit vérifiée.

Supposons que la fonction $f(z) - R_1(z)$ ne s'annule pas dans le cercle γ_2. Nous démontrerons que, si les deux fonctions $R_1(z)$ et $R_2(z)$ diffèrent sensiblement, la fonction $R_2(z)$ n'est pas exceptionnelle pour le cercle γ_2. Car supposons que le contraire soit vrai.

Le cercle γ_2 se trouve dans la couronne

$$\frac{r}{2} < |z| < \frac{3r}{2}$$

si

$$2\alpha r + 2R < \frac{r}{2}. \tag{24}$$

Nous supposons pour le moment que cette condition soit vérifiée.

Si les coefficients des polynomes $\{M(z)\}$ et $\{N(z)\}$ sont tous inférieurs à K_1 en module on a pour $|z| = r \geqq 1$:

$$\left\{\begin{array}{ll} |M_1(z)| \leqq (m_1+1)K_1 r^{m_1}, & |N_1(z)| \leqq (n_1+1)K_1 r^{n_1}, \\ |M_2(z)| \leqq (m_2+1)K_1 r^{m_2}, & |N_2(z)| \leqq (n_2+1)K_1 r^{n_2}. \end{array}\right. \tag{25}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |N_1(z)| &\geqq \left||z^{n_1}| - |b_{n_1-1} z^{n_1-1} + \cdots + b_0|\right| \\ &> |r^{n_1} - K_1(r^{n_1-1} + \cdots + r + 1)| \\ &> \left| r^{n_1} - \frac{K_1 r^{n_1}}{r-1} \right| \end{aligned}$$

ou

$$|N_1(z)| > \frac{r^{n_1}}{2} \tag{26}$$

si $|z| = r > 2K_1 + 1$, et d'une même façon on a

$$|N_2(z)| > \frac{r^{n_2}}{2}. \tag{27}$$

La différence des deux fonctions $R_1(z)$ et $R_2(z)$ peut se mettre dans la forme

$$\frac{Q(z)}{N_1(z)N_2(z)}$$

où

$$\begin{aligned} Q(z) = {} & a'_{m_2} z^{m_2+n_1} + (a'_{m_2} b_{n_1-1} + a'_{m_2-1}) z^{m_2+n_1-1} + \cdots \\ & - [a_{m_1} z^{m_1+n_2} + (a_{m_1} b'_{n_2-1} + a_{m_1-1}) z^{m_1+n_2-1} + \cdots]. \end{aligned}$$

Soit q le dégre de $Q(z)$. On peut le mettre sous la forme

$$Q(z) = c_q z^q + c_{q-1} z^{q-1} + \cdots + c_0$$

et ensuite

$$|Q(z)| \geqq \left| |c_q z^q| - |c_{q-1} z^{q-1} + \cdots + c_0| \right|.$$

Quelques calculs faciles nous montrent que la borne supérieure des modules des coefficients $\{c_i\}$ est inférieure à $2(p+1)\,C^2$. Alors on a pour $|z| = r > 1$

$$|Q(z)| > |c_q| r^q \left| 1 - \frac{2(p+1)K_1^2}{|c_q| r} - \cdots - \frac{2(p+1)K_1^2}{|c_q| r^q} \right|$$

$$> |c_q| r^q \left| 1 - \frac{2(p+1)K_1^2}{|c_q|} \frac{1}{r-1} \right|,$$

et par conséquent

$$|Q(z)| > \frac{1}{4} |c_q| r^q > (p+1) K_1^2 r^{q-1}$$

si on prend

$$|c_q| > \frac{4(p+1)K_1^2}{r}, \tag{28}$$

r étant > 3. Nous mettrons

$$K_1 = \left(\frac{r}{4p+4} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{29}$$

et alors l'inégalité (28) devient

$$|c_q| > \left(\frac{4p+4}{r} \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{28'}$$

Maintenant on peut donner une borne inférieure à $|R_2(z) - R_1(z)|$. En effet si $r > 2K_1 + 1$

$$|R_2(z) - R_1(z)| > \frac{p+1}{(n_1+1)(n_2+1)} r^{q-1-n_1-n_2}.$$

La borne inférieure de $q - n_1 - n_2$ est $\geqq -2p$: alors $|x|$ étant compris entre $\frac{r}{2}$ et $2r$ il résulte que

$$|R_2(x) - R_1(x)| > \frac{p+1}{(n_1+1)(n_2+1)} \frac{r^{q-1-n_1-n_2}}{2^{2p-1}}$$

ou

$$|R_2(x) - R_1(x)| > \frac{2^{1-2p}}{(n_2+1)} r^{q-1-n_1-n_2}. \tag{30}$$

cette inégalité ayant lieu pour $r > 4K_1 + 2$.

De plus, d'après (25), (26) et (29), nous avons pour $|z| = r$

$$\left|\frac{M_1(z)}{N_1(z)}\right| < 2(m_1 + 1) r^{m_1 - n_1 + \frac{1}{3}}$$

$$< 2(p+1) r^{p+\frac{1}{3}}.$$

et

$$|R_2(z) - R_1(z)| < 4(p+1) r^{p+\frac{1}{3}}.$$

Par conséquent pour un point z dans la couronne $\frac{r}{2} < |z| < \frac{3r}{2}$

$$\left|\frac{M_1(z)}{N_1(z)}\right| < 2^{p+2}(p+1) r^{p+\frac{1}{3}} \tag{31}$$

et

$$|R_2(z) - R_1(z)| < 2^{p+3}(p+1) r^{p+\frac{1}{3}}. \tag{32}$$

Les zéros des polynomes $N_1(z)$ et $N_2(z)$ se trouvent à l'intérieur du cercle $|z| < 1 + K_1$: par suite à l'extérieur de ce cercle $R_1(z)$ et $R_2(z)$ sont holomorphes si $m_1 \leqq n_1$ et $m_2 \leqq n_2$, et sont holomorphes sauf à l'infini si $m_1 > n_1$ et $m_2 > n_2$. Les fonctions $f(z) - R_1(z)$, $f(z) - R_2(z)$ et $R_2(z) - R_1(z)$ sont holomorphes pour $|z| > 1 + K_1$ sauf à l'infini.

Le nombre K_1 étant nécessairement $\geqq 1$ toutes les conditions que nous avons données pour la borne inférieure de r sont contenues dans la condition

$$r > 4K_1 + 2,$$

ce qui est vérifiée si $r > 8$.

Les fonctions $f(z) - R_1(z)$, $f(z) - R_2(z)$ et $R_2(z) - R_1(z)$ ne s'annulent pas dans γ_2 et donc la fonction

$$\frac{f(z) - R_1(z)}{R_2(z) - R_1(z)}$$

est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans γ_2. Le théorème de M. Schottky s'applique et nous avons pour $|z - x| \leqq R$

$$|f(z)| < [\text{Max. de } |R_2(z) - R_1(z)| \text{ dans } \gamma_2]\left[A\left|\frac{f(x) - R_1(x)}{R_2(x) - R_1(x)}\right| + A\right]^3$$
$$+ [\text{Max. de } |R_1(z)| \text{ dans } \gamma_2].$$

En tenant compte des inégalités (30), (31) et (32) on a

$$|f(z)| < h r^{10p + \frac{13}{3}}$$

h étant une constante. En particulier cette inégalité a lieu pour le centre z'_γ du cercle de remplissage γ. Mais d'après (16) on a aussi pour $z = z'_\gamma$ l'inégalité $|f(z)| > e^K$, et donc nous arrivons à une contradiction si

$$e^K > hr^{10p+\frac{13}{3}}$$

ou si

$$K > \left(10p + \frac{14}{3}\right)\log r$$

pour r assez grand. Prenons

$$K = (10p + 5)\log r.$$

On voit immédiatement que l'inégalité (24) est vérifiée pour r assez grand et $\alpha < \frac{1}{8}$.

Alors pour deux fonctions rationnelles dont les coefficients vérifient les inégalités (28') et (29) il est impossible que les deux fonctions $f(z) - R_1(z)$ et $f(z) - R_2(z)$ ne possèdent pas de zéros dans γ_2. Interprétons maintenant la première de ces inégalités. Pour cela nous mettrons une fonction rationnelle dans la forme

$$R(z) = \frac{a_{n+s}z^{n+s} + a_{n+s-1}z^{n+s-1} + \cdots + a_0}{z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0}$$

où s est un nombre entier qui est positif, zéro ou negatif selon que le degré du numérateur est supérieur, égal ou inférieur à celui du dénominateur. La fonction $R_1(z)$ que nous avons supposée exceptionnelle, s'il y en a, peut s'écrire

$$R_1(z) = \frac{a'_{\nu+t}z^{\nu+t} + a_{\nu+t-1}z^{\nu+t-1} + \cdots + a'_0}{z^\nu + b'_{\nu-1}z^{\nu-1} + \cdots + b'_0}.$$

Nous considérons la famille de fonctions rationnelles pour lesquelles les modules des coefficients du numérateur et du dénominateur sont inférieurs à $\left(\frac{r}{4p+4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Nous supposons que q soit égal au plus grand des entiers $m_2 + n_1$ et $m_1 + n_2$, en d'autres termes nous supposons que $a_{n+s} \neq a'_{\nu+t}$ si $s = t$. Cette restriction est faite pour simplifier l'énoncé du théorème actuel, après lequel nous nous en passerons.

Il y a trois cas à distinguer:

1° Si $m_2 + n_1 = m_1 + n_2$ l'inégalité (28') donne

$$|a'_{m_2} - a_{m_1}| > \frac{1}{K_1}$$

où

$$K_1 = \left(\frac{r}{4p+4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Alors on déduit que la fonction $f(z) - R(z)$ s'annule dans γ_2 pour toutes les fonctions $R(z)$ pour lesquelles

$$s = t \quad \text{et} \quad |a'_{\nu+t} - a_{\nu+t}| > \frac{1}{K_1}.$$

2° Si $m_2 + n_1 > m_1 + n_2$ l'inégalité (28') donne

$$|a'_{m_2}| > \frac{1}{K_1},$$

et on voit que la fonction $f(z) - R(z)$ s'annule dans γ_2 pour les fonctions $R(z)$ si

$$s > t \quad \text{et} \quad |a_{n+s}| > \frac{1}{K_1}.$$

3° Si $m_2 + n_1 < m_1 + n_2$ l'inégalité (28') donne

$$|a_{m_1}| > \frac{1}{K_1},$$

et il résulte que la fonction $f(z) - R(z)$ s'annule dans γ_2 pour les fonctions $R(z)$ où $s < t$ pourvu que

$$|a'_{\nu+t}| > \frac{1}{K_1}.$$

En rassemblant ces résultats on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 6. — *Soient $f(z)$ une fonction entière donnée et $R(z)$ une fonction rationnelle*

$$R(z) = \frac{a_{n+s}z^{n+s} + a_{n+s-1}z^{n+s-1} + \cdots + a_0}{z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0}$$

où les degrés du numérateur et du dénominateur sont inférieurs ou égals à p, et les coefficients sont inférieurs à K_1 en module. Soit $|z| = r$ une circonférence sur laquelle il y a au moins un point où $|f(z)| \leqq 1$. Dans la couronne

$$\frac{r}{2} < |z| < \frac{3r}{2}$$

il existe un cercle γ de rayon

$$R < 24\alpha 6^m(10p + 5)\frac{r \log r}{\log M(r, f)},$$

où $\alpha < \frac{1}{8}$, et $m < \dfrac{\pi}{\arc\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, *possédant la propriété suivante: ou bien la fonction $f(z) - R(z)$ s'annule dans γ pour toutes les fonctions rationnelles $R(z)$ avec*

$$K_1 < \left(\frac{r}{4p+4}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ou bien parmi les fonctions de cette famille il existe une

$$R_1(z) = \frac{a'_{\nu+t} z^{\nu+t} + a'_{\nu+t-1} z^{\nu+t-1} + \cdots + a'_0}{z^\nu + b'_{\nu-1} z^{\nu-1} + \cdots + b'_0}$$

telle que $f(z) - R_1(z)$ *ne s'annule pas dans* γ *tandis que* $f(z) - R(z)$ *s'annule pour toutes les fonctions* $R(z)$ *pour lesquelles*

$$1^\circ \quad s = t \quad si \quad |a_{n+t} - a'_{\nu+t}| > \left(\frac{4p+4}{r}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$2^\circ \quad s > t \quad si \quad |a_{n+s}| > \left(\frac{4p+4}{r}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$3^\circ \quad s < t \quad si \quad |a'_{\nu+t}| > \left(\frac{4p+4}{r}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En supprimant la restriction que nous avons faite sur q nos calculs nous montrent qu'il n'y a qu'une fonction rationnelle qui est exceptionnelle pour une suite infinie de cercles s'éloignant indéfiniment. Car supposons qu'il y ait deux fonctions exceptionnelles

$$R_1(z) = \frac{M_1(z)}{N_1(z)} \quad \text{et} \quad R_2(z) = \frac{M_2(z)}{N_2(z)}.$$

Prenons une suite de circonférences $\{C_i\}$ de rayons r_i respectivement avec $r_i < r_{i+1}$ et $\lim r_i = \infty$, telle que sur chacune il y a un point où $|f(z)| \leqq 1$. Alors il existe une suite de cercles de remplissage $\{C_i(f)\}$ de rayons

$$R_i = 24\alpha 6^m (10p + 5) \frac{r_i \log r_i}{\log M(r_i, f)}.$$

Désignons le rapport $\dfrac{\log r_i}{\log M(r_i, f)}$ par ε_i et soit M_i le plus petit des deux nombres $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}}$ et $(r_i)^\delta$, avec $\delta < 1$. Le nombre p étant le plus grand des degrés de $M_i(z)$ et $N_i(z)$ $(i = 1, 2)$, prenons m le plus petit entier tel que

$$10p + 5 < M_m.$$

Dans ce cas le rayon R_i du cercle $C_i(f)$ est inférieur à $H\sqrt{\varepsilon_i}\, r_i$ pour $i \geqq m$, où H est fixe, d'où il résulte que $\dfrac{R_i}{r_i}$ tend vers zéro lorsque r_i croit indéfiniment. D'autre part pour $i \geqq m$ on a

$$\left(\frac{r_i}{4p+4}\right)^{\frac{1}{3}} > r_i^{\frac{1-\delta}{3}}$$

une quantité qui croit indéfiniment avec i.

Soit C la borne supérieure des coefficients de $R_1(z)$ et $R_2(z)$. Ces fonctions n'étant pas identiquement égales il résulte que

$$Q(z) \equiv M_2(z)N_1(z) - M_1(z)N_2(z) \not\equiv 0$$

et alors il y aura un entier σ tel que $Q(z) = c_\sigma z^\sigma + c_{\sigma-1}z^{\sigma-1} + \cdots + c_0$ où $c_\sigma \neq 0$.

Soient K le plus grand des nombres C, $\frac{1}{|a_{m_1}|}$, $\frac{1}{|a'_{m_2}|}$ et $\frac{1}{|c_\sigma|}$, et N le plus petit nombre $> m$ tel que

$$K < \left(\frac{r_N}{4p+4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Des calculs faits dans la démonstration de théorème 6 il résulte que $R_2(z) - R_1(z)$ ne s'annule pas dans $C_N(f)$ et ensuite en employant le même raisonnement nous arrivons à une contradiction en supposant que les deux fonctions $R_1(z)$ et $R_2(z)$ soient exceptionnelles, d'où :

Théorème 7. — *Soient $f(z)$ une fonction entière donnée et $R(z)$ une fonction rationnelle de la forme*

$$R(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_0}{z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0}$$

où le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteur commun. Il existe une suite infinie de cercles $\{C_\nu(f)\}$ de centres $\{z_\nu\}(|z_\nu| = r_\nu)$ s'éloignant indéfiniment, et de rayons $\{d_\nu r_\nu\}$, d_ν tendant vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$, telle que l'équation $f(z) - R(z) = 0$ possède une infinité de racines dans l'ensemble des cercles pour toutes les $R(z)$ sauf une au plus.

Puisqu'une fonction rationnelle a au plus un pôle à l'infini, on remarque que dans le cas où le degré du numérateur de $R(z)$ est supérieur à celui du dénominateur le théorème 7 est contenu dans théorème 4, le polynome $P(z)$ ayant été remplacé par une fonction $\Pi(z)$ holomorphe à l'extérieur d'un cercle $|z| = r_0$ sauf à l'infini qui est un pôle.

Une bande B' construite à la même façon que dans § 6 contient une infinité des cercles $C_\nu(f)$, d'où on a :

Théorème 7_a. — *Soit $f(z)$ une fonction entière donnée et $R(z)$ une fonction rationnelle définie dans le théorème précédent. Il existe une bande d'ouverture arbitrairement petite dans laquelle la fonction $f(z) - R(z)$ a une infinité de zéros pour toutes les $R(z)$ sauf une au plus.*

Les théorèmes 6-7_a s'appliquent encore si au lieu d'une fonction entière on prend une fonction $F(z)$ holomorphe au voisinage du point à l'infini qui est une singularité essentielle.

8. *Les zéros de $f(z) - g(z)$ où $g(z)$ est une fonction entière d'ordre nul.* — Nous allons généraliser les résultats de § 5 en remplaçant $P(z)$ par une fonction entière d'ordre nul. Nous ferons d'abord quelques remarques.

Premièrement, soient k' supérieur à 1, N un nombre entier >0 et h un nombre tel que

$$h > (\pi + k') + 10\pi(N+1)\alpha. \tag{34}$$

Soient x_0 un point de la circonférence $|z| = r$ où le module de $f(z)$ prend son maximum, et L une courbe quelconque de longueur hr qui part de x_0. En partant de x_0 et en cheminant le long de L moyennant des cercles de rayons $2\alpha r$, à la façon employée dans § 4, nous arrivons au bout de L après un nombre d'opérations au plus égal à $1 + \frac{h}{\alpha}$. Si nous supposons qu'aucun des cercles ne contienne un point où $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1 il résulte des calculs de § 4 que l'inégalité

$$|f(z)| > M(r, f)^{\frac{1}{Q}}$$

où

$$Q = 6^{1+\frac{h}{\alpha}}, \tag{35}$$

sera valable dans la suite (S') de cercles ayant les mêmes centres que les cercles employés au-dessus et de rayons αr.

Nous prendrons dorénavant

$$\alpha = \frac{h'}{\log_2 M(r, f)}$$

h' étant un nombre à déterminer. Alors nous aurons

$$\begin{aligned} Q &= 6^{1+\frac{h}{h'}\log_2 M(r,f)} \\ &= 6 . [\log M(r, f)]^{\frac{h}{h'}\log 6} \\ &= 6 . [\log M(r, f)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

si

$$h' = 2h \log 6. \tag{36}$$

Par suite, si r est assez grand, on a

$$|f(z)| > e^{[\log M(r,f)]^{\frac{1}{4}}} \tag{37}$$

pour z dans la suite de cercles (S').

Deuxièment, d'après un résultat général que M. VALIRON a énoncé pour les fonctions méromorphes [16]) on peut déduire que:

Étant donnée une fonction entière d'ordre positif ρ fini ou infini, on peut trouver une suite infinie de nombres $\{R'_i\}$ croissants indéfiniment et un nombre k' supérieur à 1, *tels que dans chacune des couronnes*

$$\frac{1}{k'} R'_i < |z| < k' R'_i$$

la fonction $f(z)$ prenne l'une des valeurs 0 *et* 1, *et en même temps*

$$M(R'_i, f) > e^{R'^{\sigma}_i}$$

où σ est un nombre positif inférieur à ρ.

Soit k un nombre supérieur à k' et choisissons de la suite $\{R'_i\}$ une autre suite $\{R_i\}$ telle que les couronnes

$$\frac{1}{k} R_i < |z| < k R_i$$

ne soient pas empiétantes, ce qui est évidemment possible.

9. Soient $f(z)$ une fonction entière d'ordre positif et R un des nombres $\{R_i\}$ quelconque. D'après le théorème que nous venons d'énoncer il y a au moins un point dans la couronne

$$\Gamma': \quad \frac{1}{k'} R < |z| < k' R$$

où $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1. Par conséquent il existe dans Γ' une portion d'un domaine B, comprenant un ou plusieurs domaines simplement connexes, tel que sur son contour nous ayons

$$|f(z)| = e^A, \tag{38}$$

et à l'intérieur

$$|f(z)| < e^A, \tag{38bis}$$

A étant un nombre compris entre 0 et $\log M(R, f)$. D'après un principe du module maximum d'une fonction holomorphe on voit que B ne peut pas former une région annulaire entourant l'origine.

Supposons d'abord que l'un (B_0) des domaines constituant B soit contenu dans

---

[16]) G. VALIRON, *Sur une propriété des fonctions méromorphes d'ordre positif* [Bulletin des Sciences Mathématiques: 2e série, t. L (1926), p. 168-174]. M. VALIRON, avait déjà énoncé un résultat analogue pour les fonctions entières d'ordre non entier dans sa monographie: *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* [l. c. 7)]. Le même résultat pour les fonctions d'ordre entier se déduit immédiatement des calculs de § 13 Chap. 3 de son livre: « Lectures », l. c. 9).

un cercle de rayon $\theta(R)\,R$, $\theta(r)$ étant une quantité qui tend vers zéro lorsque r croit indéfiniment et que nous préciserons plus tard. Ce domaine B_0 est compris dans la couronne

$$\left[\frac{1}{k'}-\theta(R)\right]R<|z|<[k'+\theta(R)]R.$$

Alors k étant un nombre supérieur à k', B_0 se trouvera dans la couronne

$$\Gamma:\quad \frac{1}{k}R<|z|<kR,$$

si R est pris assez grand pour que

$$\theta(R)<\frac{1}{k'}-\frac{1}{k}. \tag{39}$$

Si $g(z)$ est une fonction entière d'ordre nul, dont nous désignons le module maximum par $M(r, g)$, et z un point sur le contour de B_0, nous avons

$$|g(z)|<M(kR, g),$$

d'où il résulte que

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1,$$

en prenant

$$A>\log M(kR, g). \tag{40}$$

D'après le théorème de Rouché on voit que les équations

$$f(z)=0$$

$$f(z)-g(z)=0$$

ont le même nombre de racines dans B_0. Mais la fonction $f(z)$ possède au moins un zéro dans B_0; car sinon, la réciproque serait régulière dans B_0, et sur son contour; par suite $\dfrac{1}{f(z)}$ prendrait son maximum sur le contour, ce qui est impossible d'après (38) et (38^{bis}). *La fonction $f(z)-g(z)$ a donc au moins un zéro dans B.*

10. Prenons maintenant le cas où aucun des domaines constituant B n'est contenu dans un cercle de rayon $\theta(R)\,R$. N étant un nombre entier à préciser nous allons démontrer que *dans au moins un cercle (C) de rayon $\theta(R)\,R$, à l'intérieur de la couronne Γ, il existe $N+1$ cercles dans chacun desquelles $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1 et qui sont tels que la distance entre les centres de deux cercles quelconques soit au moins égale à $10\alpha R$.* Nous choisirons N et $\theta(r)$ de sorte que

$$10(N+1)\alpha<\theta(R), \tag{41}$$

c'est-à-dire d'après la valeur donnée pour α dans § 9

$$N+1<\frac{\theta(R)\log_2 M(R,f)}{10h'}.$$

Mais R étant un des nombres $\{R_i\}$, cette inégalité est vérifiée si

$$N+1=\frac{\sigma\theta(R)\log R}{10h'},$$

et à partir d'une certaine valeur de R si

$$N=\frac{\sigma\theta(R)\log R}{11h'}.$$

Prenons

$$\theta(r)=\frac{121h'}{\sigma}(\log r)^{-\beta},$$

où β est un nombre positif aussi petit que l'on veut. Alors on a

$$N=11(\log R)^{1-\beta}.$$

Soient Λ une courbe sur laquelle le module de $f(z)$ prend son maximum, A le point où cette courbe franchit la circonférence $|z|=R$, et L une courbe joignant A à un point à l'intérieur de B. On peut trouver une courbe L de longueur au plus égale à $(\pi+k')R$. Partons de A et cheminons le long de L moyennant des cercles de rayon $2\alpha R$. Nous arrivons dans B après un nombre d'opérations au plus égal à

$$Q_1=\frac{\pi+k'}{\alpha}+1$$

et si nous supposons que $f(z)$ ne prenne pas les valeurs 0 et 1 dans aucun des cercles employés nous aurons l'inégalité

$$|f(z)|>[M(R,f)]^{\frac{1}{Q_1}} \tag{42}$$

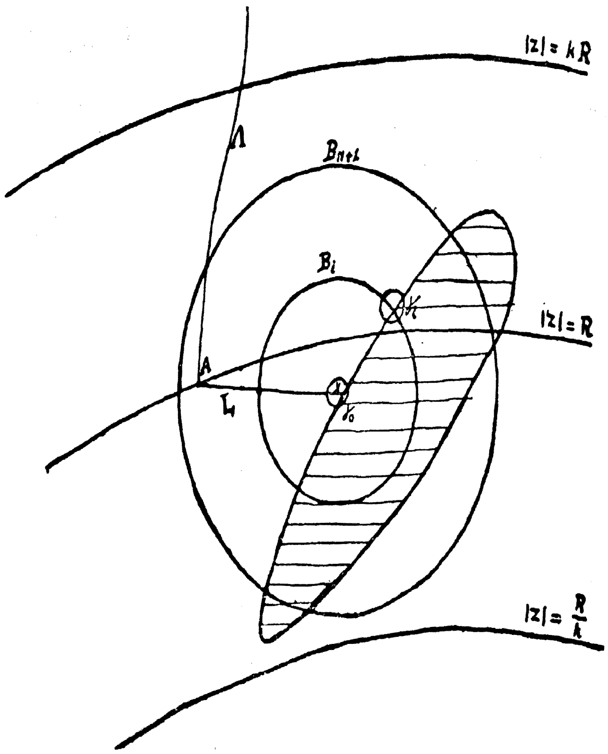
valable sur toute la courbe L. Le second membre de (42) étant supérieur à $e^{[\log M(R,f)]^{\frac{1}{4}}}$ cette inégalité sera en contradiction avec (38^{bis}) quand nous arrivons dans B si

$$A=[\log M(R,f)]^{\delta} \tag{43}$$

δ étant positif et inférieur à $\frac{1}{4}$. Par conséquent l'un au moins des cercles employés sera un cercle de remplissage (S).

On remarque qu'avec la valeur de A donnée en (43) l'inégalité (40) est valable pour des valeurs de R suffisamment grandes. En effet on a $A>R^{\delta\sigma}$, où $\delta\sigma>0$.

D'autre part $g(z)$ étant d'ordre nul
$$\log M(kR, g) < (kR)^{\eta},$$
η étant aussi petit que l'on veut si R est grand. Par suite ce que nous avons constaté devient évident.



Soient γ_0 le premier cercle (S) rencontré en cheminant le long de L et y son centre. Il peut arriver que γ_0 est le premier cercle employé; sinon l'inégalité (42) est vérifiée sur l'arc de L joignant le point A au centre de γ_0. Traçons les $N+1$ circonférences (B_i) d'équations
$$|z - y| = 10 i \alpha R, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N+1).$$

On est assuré que tous ces cercles traversent une région B_0 qui empiète sur γ_0; autrement il y aura un domaine B_0 qui est compris dans un cercle de rayon $10(N+1)\alpha R$ et par conséquent, d'après (41), dans un cercle de rayon $\theta(R)\, R$, ce qui contredit notre hypothèse actuelle sur B.

Partons du point où la circonférence B_i franchit ou bien la courbe Ay ou bien la portion de la courbe Λ à l'extérieur du cercle $|z| < R$, et cheminons le long de B_i moyennant des cercles de rayons $2\alpha R$. Alors nous sommes assurés que l'un des cercles employés est un cercle (S): sinon l'inégalité

$$(44) \qquad |f(z)| > [M(R, f)]^{\frac{1}{Q_2}}$$

où

$$Q_2 = 6^{\frac{\pi+k'}{\alpha}+10\pi(N+1)+1}$$

serait vérifiée sur toute la circonférence B_i, et puisque le second membre de (44) est supérieur à $e^{[\log M(R,f)]^{\frac{1}{4}}}$, d'après la première remarque de § 9, nous aurions une contradiction avec (38^{bis}) quand nous arrivons dans B. En appliquant le même raisonnement à tous les (B_i) nous voyons qu'il existe au moins $N+1$ cercles (S), γ_0 inclu, dans le cercle (C) de rayon $10(N+1)\pi R$. De plus il est évident que la distance entre les centres de deux cercles (S) quelconques est au moins égale à $10\pi R$, et le cercle (C) se trouvera dans la couronne $\frac{1}{k}R < |z| < kR$ si R est suffisamment grand pour que $\theta(R)$ vérifie (39), d'où nous avons le résultat énoncé au debut de ce numero.

11. Nous désignerons par $n(r)$ le nombre de zéros de module $\leqq r$ d'une fonction entière $g(z)$ et nous considérerons la famille des fonctions $g(z)$ d'ordre nul pour lesquelles

$$n(r) < (\log r)^{1-\beta}.$$

Soient $g(z)$ et $g_1(z)$ deux telles fonctions avec les développements

$$\begin{aligned} g(z) &= a_l z^l + a_{l+1} z^{l+1} + \cdots \\ &= a_l z^l \prod_{(n)} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) \\ g_1(z) &= a'_\lambda z^\lambda + a'_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \\ &= a'_\lambda z^\lambda \prod_{(n)} \left(1 - \frac{z}{\alpha'_n}\right). \end{aligned}$$

En mettant $|\alpha_n|$ ou $|\alpha'_n|$ égal à r_n le logarithme des modules maxima des produits infinis est inférieur à

$$\begin{aligned} \log \prod_{(n)} \left(1 + \frac{r}{r_n}\right) &= \int_{r_1}^{\infty} \frac{r\, n(x)}{x(x+r)} dx \\ &< \int_{r_1}^{r} \frac{n(x)}{x} dx + r \int_{r}^{\infty} \frac{n(x)}{x^2} dx \\ &< 2(\log r)^{2-\beta} \end{aligned}$$

pour r suffisamment grand.

Nous supposons que

$$(45) \qquad \begin{cases} |a_l| < R, & l < (\log R)^{\frac{1}{2}} \\ |a'_\lambda| < R, & \lambda < (\log R)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

et par suite, β étant $< \frac{1}{2}$ et $r \geqq R$, nous aurons

$$|g_1(z)| < e^{3(\log r)^{2-\beta}}$$

et

$$|g(z) - g_1(z)| < e^{4(\log r)^{2-\beta}}.$$

En mettant en évidence les zéros de $g(z) - g_1(z)$ nous avons un développement de la forme

$$g(z) - g_1(z) = h_t z^t \prod_{(n)} \left(1 - \frac{z}{\beta_n}\right).$$

Si $n_1(r)$ désigne le nombre des zéros de $g(z) - g_1(z)$ de module $< r$, nous avons d'après la formule de M. Jensen

$$\int_{r_0}^{r} \frac{n_1(x)}{x} dx < \log M(r, g - g_1) - \log |h_t| - t \log r_0,$$

r_0 étant le plus petit des nombres $\{|\beta_n|\}$.

Supposons que

$$(46) \qquad \begin{cases} \log |h_t| > -\log R \\ \log r_0 > -\log R \\ t < (\log R)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Alors si $r > r_1 \geqq R \geqq r_0$ et $\beta < \frac{1}{2}$ on a

$$\int_{r_1}^{r} \frac{n_1(x)}{x} dx \leqq \int_{r_0}^{r} \frac{n_1(x)}{x} dx < 5(\log r)^{2-\beta}.$$

Prenons $r = r_1^{1+\gamma}$, $\gamma > 0$, et puis

$$n_1(r_1) < 5\frac{(1+\gamma)^{2-\beta}}{\gamma}(\log r_1)^{1-\beta}.$$

En choisissant γ tel que l'expression $\frac{(1+\gamma)^2}{\gamma}$ soit un minimum on a

$$n_1(r_1) < 10(\log r_1)^{1-\beta}.$$

Le nombre des zéros dans le cercle $|z| < kR$ est

$$n_1(kR) < 10(\log kR)^{1-\beta}$$
$$< 11(\log R)^{1-\beta}$$

pour R assez grand, et par suite

$$n_1(kR) < N.$$

Considérons les $N+1$ cercles de remplissage (S) dans le cercle (C) et désignons les par γ_i $(i=0, 1, \ldots, N)$ et soit x_i le point dans γ_i où $f(z)$ prend l'une des valeurs 0 et 1. Soit γ'_i le cercle d'équation

$$|z - x_i| < 3\alpha R.$$

Il est évident que les $N+1$ cercles $\{\gamma'_i\}$ n'empietent pas et sont tous contenus dans le cercle (C) et par conséquent dans la couronne Γ. Une fonction entière ayant au plus N zéros dans le cercle $|z| < kR$ ne s'annule pas dans au moins un des $\{\gamma'_i\}$ et donc à chaque couple de fonctions $g(z)$ et $g_1(z)$ correspond au moins un cercle γ'_i dans lequel $g(z) - g_1(z)$ n'a pas de zéros.

Étant donnée une fonction entière $f(z)$ d'ordre positif nous proposons de démontrer que $f(z) - g(z)$ s'annule dans le cercle (C) pour toutes les fonctions $\{g(z)\}$ vérifiant les inégalités (45), sauf peut être quelques-unes. Admettons que la fonction $F(z) = f(z) - g_1(z)$ n'ait pas de zéros dans (C). Nous démontrerons que cela n'arrive pas pour les fonctions de la famille $\{g(z)\}$ qui vérifient les inégalités (46). Car supposons que $g(z)$ soit une autre fonction exceptionnelle dans (C). Il existe un cercle γ'_i dans (C) tel que $g(z)-g_1(z)$ ne s'annule pas dans γ'_i. Les fonctions $F(z)$, $g(z)-g_1(z)$ et $F(z) - [g(z) - g_1(z)]$ sont holomorphes et ne s'annulent pas dans γ'_i. Les conditions du théorème 2 sont vérifiées. En mettant $r = \frac{2}{3}$ dans la formule (12) on aura pour z à l'intérieur du cercle $|z - x_i| < 2\alpha R$

$$(47)\qquad \begin{cases} |F(z)| < e^{4(\log kR)^{2-\beta}}\left[A\dfrac{e^{3(\log kR)^{2-\beta}}+1}{|g(x_i) - g_1(x_i)|} + A\right]^5 \\ \qquad < e^{k_1(\log R)^{2-\beta}}\left[\dfrac{1}{|g(x_i) - g_1(x_i)|} + 1\right]^5 \end{cases}$$

où k_1 est une constante absolue.

Il nous reste à trouver une borne inférieure de $|g(x_i) - g_1(x_i)|$. En mettant en évidence les zéros de $g(z) - g_1(z)$ qui se trouvent dans le cercle $|z| < 2kR$ nous avons

$$g(z) - g_1(z) = b_i z^l \prod_{n<n_1(2kR)} \left(1 - \frac{z}{\beta_n}\right) \prod_{n \geq n_1(2kR)} \left(1 - \frac{z}{\beta_n}\right).$$

Pour le dernier produit — désignons le par $G(z)$ — nous avons $\left|\frac{z}{\beta_n}\right| < \frac{1}{2}$. Lorsque u est positif et inférieur à $\frac{1}{2}$ on a

$$1 - u > e^{-2u},$$

et par conséquent pour $|z| < kR$

$$|G(z)| > \prod_{n \geq n_1(2kR)} \left(1 - \frac{kR}{|\beta_n|}\right)$$

$$> e^{-2kR \sum\limits_{n \geq n_1(2kR)} \frac{1}{|\beta_n|}}.$$

Mais par un calcul facile on obtient la rélation

$$S = \sum_{n \geq n_1(2kR)} \frac{1}{|\beta_n|} = \int_{2kR}^{\infty} \frac{n_1(x)}{x^2} dx - \frac{n_1(2kR)}{2kR}$$

et puisqu'on a $n_1(r) < \log r$ pour r assez grand, il résulte que

$$S < \int_{2kR}^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx = \frac{\log 2kR + 1}{2kR}.$$

Alors pour les points z dans la couronne Γ on aura

$$|G(z)| > e^{-k_0 \log R}$$

où k_0 est une constante bornée.

La fonction $g(z) - g_1(z)$ ne s'annulant pas dans le cercle γ_i' on aura pour $n < n_1(2kR)$

$$|x_i - \beta_n| > 2\alpha R,$$

et

$$\left|1 - \frac{x_i}{\beta_n}\right| > \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{n_1(2kR)}$$

$$> \left(\frac{h^1}{k \log_2 M(R, f)}\right)^{\log 2kR}$$

si $\frac{\alpha}{k}$ est inférieur à 1, ce qui a lieu pour R assez grand. Par conséquent

$$|g(x_i) - g_1(x_i)| > |b_t| \left(\frac{R}{k}\right)^t [A_1 \log_2 M(R, f)]^{-\log 2kR} e^{-k_0 \log R}$$

ou puisque $t \geq 0$ et $|b_t| > e^{-\log R}$

$$|g(x_i) - g_1(x_i)| > e^{-(k_0+1)\log R} [A_1 \log_2 M(R, f)]^{-\log 2kR},$$

où $A_1 = \frac{k}{h}$, et R étant supérieur à k. En portant cette borne inférieure de $|g(x_i) - g_1(x_i)|$ à (47) on a

$$|F(z)| < e^{k_1 (\log R)^{2-\beta}} e^{k_2 [\log_3 M(R,f)] \log R}$$

et par suite pour R suffisamment grand

$$|f(z)| < e^{[\log_3 M(R,f)](\log R)^2}$$

En particulier cette inégalité a lieu pour le centre de γ_i. Mais à ce point on a aussi

$$|f(z)| > e^{[\log M(R,f)]^{\frac{1}{4}}},$$

et nous sommes arrivés à une contradiction si

$$[\log M(R, f)]^{\frac{1}{4}} > [\log_3 M(R, f)](\log R)^2. \tag{48}$$

Supposons en définitif que

$$M(r, f) = e^{r^{\rho(r)}}$$

$\rho(r)$ étant fini si $f(z)$ est d'ordre fini et croissant indéfiniment si $f(z)$ est d'ordre infini. On sait que pour $r = R_i$

$$\rho(r) > \sigma > 0,$$

et par conséquent $(\log R)^2$ est petit en rapport à $\log M(R, f)$. Alors (48) a lieu si

$$\rho(R) \log R > [4 + \varepsilon(R)][\log_2 \rho(R) + \log_3 R],$$

inégalité qui est valable à partir d'une certaine valeur de R, $\varepsilon(r)$ étant une quantité positive tendant vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

Il résulte donc que la fonction $f(z) - g(z)$ s'annule dans le cercle γ'_i. En somme nous avons démontré que la fonction $f(z) - g(z)$ s'annule au moins une fois dans le cercle (C) de rayon $\theta(R)\, R$ pourvu que les inégalités (45) et (46) soient vérifiées.

Interprétons la première des inégalités (46). Si $l = \lambda$ et $a_l \neq a'_\lambda$ il résulte que la fonction $f(z) - g(z)$ s'annule dans (C) si

$$|a_l - a'_\lambda| > \frac{1}{R}.$$

Si $l = \lambda$ et $a_l = a'_\lambda$, $a_{l+1} = a'_{\lambda+1}$, $\ldots$, $a_{t-1} = a'_{t-1}$ tandis que $a_t \neq a'_t$ il résulte que la fonction $g(z)$ n'est pas exceptionnelle pour (C) si

$$t < (\log R)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |a_t - a'_t| > \frac{1}{R}.$$

Si $l < \lambda$ ou $l > \lambda$ la fonction $f(z) - g(z)$ s'annule dans (C) si

$$|a_l| > \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad |a'_\lambda| > \frac{1}{R}$$

respectivement.

Finalement nous avons la proposition suivante:

THÉORÈME 8. — *Soient $f(z)$ une fonction entière d'ordre positif donnée et $g(z)$ une fonction d'ordre nul ayant un développement de la forme*

$$g(z) = a_l z^l \prod_{(n)} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right), \qquad |\alpha_{n-1}| \leqq |\alpha_n|,$$

et telle que la densité des zéros vérifie l'inégalité

$$n(r) < (\log r)^{1-\beta}$$

où β *est un nombre positif aussi petit que l'on veut. Nous supposons que*

$$|a_l| < C$$

$$|z_l| > \frac{1}{C}$$

$$l < (\log C)^{\frac{1}{2}}$$

C étant un nombre positif.

Il existe un nombre $k > 1$ *et une suite infinie de nombres* $\{R_\nu\}$ *croissant indéfiniment,* R_1 *étant* $>$ *un certain nombre* r_0, *tels que dans la couronne*

$$\frac{R_\nu}{k} < |z| < k R_\nu$$

il y ait un cercle $C_\nu(f)$ *de rayon*

$$\frac{H(k)}{\sigma} (\log R_\nu)^{-\beta} R_\nu,$$

$H(k)$ *étant une fonction ne dépendant que de* k *et* σ *un nombre positif inférieur à l'ordre de* $f(z)$, *possédant la propriété suivante: ou bien la fonction* $f(z) - g(z)$ *s'annule dans* $C_\nu(f)$ *pour chaque fonction de la famille* $\{g(z)\}$ *pour laquelle* $C = R_\nu$, *ou bien parmi les fonctions de cette famille il y a une*

$$g_1(z) = a'_\lambda z^\lambda \prod_{(n)} \left(1 - \frac{z}{\alpha'_n}\right)$$

telle que $f(z) - g_1(z)$ *ne s'annule pas dans* $C_\nu(f)$ *tandis que* $f(z) - g(z)$ *s'annule pour toutes les* $g(z)$ *de la famille pour lesquelles*

$$(49)\begin{cases} l = \lambda \quad si \quad |a_l - a'_l| > \dfrac{1}{R_\nu}, \\ l = \lambda \ et \ a_i = a'_i \ pour \ l \leqq i \leqq t-1, \ \cdot \ a_t - a'_t \neq 0 \ si \ t < (\log R_\nu)^{\frac{1}{2}} \cdot \ et \ |a_t - a'_t| > \dfrac{1}{R_\nu}, \\ l < \lambda \quad si \quad |a_l| > \dfrac{1}{R_\nu}, \\ l > \lambda \quad si \quad |a'_\lambda| > \dfrac{1}{R_\nu}. \end{cases}$$

En exprimant le rayon de $C_\nu(f)$ en fonction du module de l'affixe de son centre on obtient immédiatement le corollaire:

Les hypothèses étant les mêmes que dans théorème 8, ***il existe un nombre borné*** $k > 1$ *et une suite infinie de cercles* $\{C_\nu(f)\}$ *d'équation*

$$|z - z_\nu(f)| < \frac{H(k)}{\sigma}[\log |z_\nu(f)|]^{-\beta} |z_\nu(f)|$$

dont les centres s'éloignent indéfiniment tels que, ou bien la fonction $f(z) - g(z)$ *s'annule dans* $C_\nu(f)$ *pour toutes les fonctions* $g(z)$ *pour lesquelles* $C = \frac{|z_\nu(f)|}{k}$ *ou bien parmi ces fonctions il y a une* $g_1(z)$ *telle que* $f(z) - g_1(z)$ *ne s'annule pas dans* $C_\nu(f)$, *tandis que* $f(z) - g(z)$ *s'annule dans* $C_\nu(f)$ *pour toutes les* $g(z)$ *vérifiant les conditions* (49) R_ν *étant remplacé par* $\frac{|z_\nu(f)|}{k}$ *dans chaque inégalité.*

Ainsi nous avons défini une suite de cercles $\{C_\nu(f)\}$ telle que dans $C_\nu(f)$ la fonction $f(z) - g(z)$ s'annule pour toutes les $g(z)$ vérifiant (49) sauf peut-être une ensemble qui dépend de $C_\nu(f)$. D'autre part il n'y a qu'une fonction $g(z)$ qui peut être exceptionnelle pour l'ensemble de cercles $\{C_\nu(f)\}$. Car soient

$$g(z) = a_l z^l + a_{l+1} z^{l+1} + \cdots = a_l z^l \prod_{(n)} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)$$

$$g_1(z) = a'_\lambda z^\lambda + a'_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots = a'_\lambda z^\lambda \prod_{(n)} \left(1 - \frac{z}{\alpha'_n}\right)$$

deux fonctions de la famille $\{g(z)\}$, et supposons que $g_1(z)$ soit exceptionnelle pour l'ensemble de cercles $\{C_\nu(f)\}$.

Si $l = \lambda$, désignons par t le plus petit entier tel que $a_t \neq a'_t$. Soit $\beta_1 \neq 0$ le zéro de la fonction $g(z) - g_1(z)$ qui est le plus proche de l'origine, et désignons par K la borne supérieure des nombres $|a_l|$, $|a'_\lambda|$, $\frac{1}{|a_l|}$, $\frac{1}{|a'_\lambda|}$, $\frac{1}{|a_t - a'_t|}$, t et $\frac{1}{|\beta_1|}$ et ensuite μ le plus petit entier tel que

$$K < \frac{R_\mu}{k}.$$

Prenons ν le plus petit entier tel que

$$l < (\log R_\nu)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \lambda < (\log R_\nu)^{\frac{1}{2}}.$$

Si N est le plus grand des deux nombres μ et ν il résulte du théorème 8 que la fonction $g(z)$ n'est pas exceptionnelle pour le cercle $C_N(f)$ ni a fortiori pour les cercles $C_{N+1}(f)$, $C_{N+2}(f)$, ... Le nombre k que nous avons introduit en choisissant la suite de nombres $\{R_\nu\}$ dépend de $f(z)$ et donc $\frac{H(k)}{\sigma}$ est une constante qui ne dépend que de $f(z)$; alors nous avons le résultat suivant:

THÉORÈME 9. — *Soit $f(z)$ une fonction entière donnée d'ordre positif et $\{g(z)\}$ une famille de fonctions entières d'ordre nul pour lesquelles*

$$n(r) < (\log r)^{1-\beta},$$

où β est un nombre positif aussi petit que l'on veut. Il existe une suite de cercles $\{C_\nu(f)\}$ d'équation

$$|z - z_\nu(f)| = H_1(f)[\log z_\nu(f)]^{-\beta}|z_\nu(f)|$$

$H_1(f)$ un nombre ne dépendant que de f, telle que l'équation

$$f(z) - g(z) = 0$$

ait une infinité de racines dans l'ensemble de $\{C_\nu(f)\}$ pour toutes les fonctions $\{g(z)\}$ sauf peut-être une.

Le rapport du rayon de cercle $C_\nu(f)$ à la distance de son centre à l'origine tend vers zéro lorsque ν augmente indéfiniment. Alors, en appliquant le raisonnement de § 6 on voit qu'*il existe un angle d'ouverture arbitrairement petite dans laquelle $f(z) - g(z)$ s'annule une infinité de fois sauf pour une fonction $g(z)$ au plus.*

Vu et approuvé :
Strasbourg, le 26 mars 1928.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
P. TH. MULLER.

Vu et permis d'imprimer :
Strasbourg, le 28 mars 1928.
LE RECTEUR
PRÉSIDENT DU CONSEIL DE L'UNIVERSITÉ,
CH. PFISTER.