ALEXANDRE PANTAZI

Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développables

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__92__1_0>

No. D'ORDRE :
2021

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. ALEXANDRE PANTAZI

LICENCIÉ ES SCIENCES

1re THÈSE.— SUR L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE DES HYPERSURFACES DÉVELOPPABLES

2e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 1928 devant la Commission d'Examen

MM. ELIE CARTAN — *Président.*

PAUL MONTEL, ARNAUD DENJOY — *Examinateurs.*

BUCAREST

IMPRIMERIE DE L'ÉTAT

1928

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.	
Doyens honoraire . . .	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX.	
	V. BOUSSINESQ	
	A. JOANNIS.	
	H. LE CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
Professeurs	ÉMILE PICARD . . .	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	G. KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET	Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT . . .	Minéralogie.
	H. ANDOYER	Astronomie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel BERTRAND . .	Chimie biologique.
	M-me P. CURIE . . .	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	Rémy PERRIER . . .	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY . . .	Physique.
	Charles PÉREZ . . .	Zoologie.
	Leon BERTRAND . . .	Géologie structurale et géologie appliquée.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	É. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD . .	Botanique.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle
	P. WINTREBERT . .	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. JOB	Chimie générale.
	A. MAILHE	Étude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Eugène BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie appliquée.

E. HÉROUARD . .	Zoologie.	E. DARMOIS . . .	Physique
E. PÉCHARD . . .	Chimie (Enseigt P. C. N.).	G. BRUHAT . . .	Physique.
V. AUGER	Chimie analitique.	H. MOUTON . . .	Chimie physique.
M. GUICHARD . .	Chimie minérale.	L. JOLEAUD . . .	Paléontologie
A. GUILLET . . .	Physique.	M. JAVILLIER . .	Chimie biologique.
G. MAUGUIN . . .	Minéralogie.	A. DUFOUR . . .	Physique (P. C. N.)
L. BLARINGHEM .	Botanique.	F. PICARD. . . .	Zoologie (Évolution des êtres organisés.
A. MICHEL-LÉVY.	Pétrographie.		
A. DEREIMS . . .	Géologie.	ROBERT-LÉVY . .	Zoologie.
R. DONGIER . . .	Physique de globe.	L. DUNOYER . .	Optique appliquée.
A. DENJOY . . .	Calcul différentiel et intégral.	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.)
H. BENARD . . .	Physique (P. C. N.).	A. DEBIERNE . .	Radioactivité.

Secrétaire . . . . Daniel TOMBECK.

À la mémoire de mon Père

À ma Mère

À Mon Cher Maître

M. Elie Cartan

À Mes Premiers Maîtres

MM. Georges Tzitzeïca

Trajan Lalesco

Hommage de profonde reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE

SUR L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE DES HYPERSURFACES DÉVELOPPABLES

PAR

M. ALEXANDRE PANTAZI

INTRODUCTION

Le problème de l'applicabilité projective des surfaces posé et étudié par M. FUBINI [1]), puis développé et complété par M. CARTAN [2]), a été aussi l'objet de nombreux travaux dans les dix dernières années, mais dans tous ces travaux le cas des variétés développables occupe une place très peu importante; ce sont pourtant parmi les hypersurfaces d'un espace à un nombre plus grand que trois de dimensions les seules qui admettent, comme l'a montré M. CARTAN, une déformation projective du second ordre. C'est donc à l'étude dela déformation des hypersurfaces développables qu'a été consacrée la plus grande partie du présent travail.

L'étude des correspondances qui généralisent celle posée par l'applicabilité de M. FUBINI et qui ont fait l'objet d'un travail de M. FÉRAUD[3]), m'a conduit à certaines correspondances entre deux hypersurfaces développables données ne dépendant que d'une fonction arbitraire d'un argument et qui s'obtiennent en établissant une correspondance ponctuelle arbitraire entre les arêtes de rebroussement des deux hypersurfaces.

Les différentes correspondances établissant des applicabilités projectives, au sens de M. FÉRAUD, entre ces arêtes des rebroussement même et dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument, donnent naissance, d'un autre côté, à des correspondan-

[1]) *Rend. Circ mat. Pal.* 41, 1916, pp. 135—162.

[2]) *Ann sc. Ec. norm* 37, 1920, pp. 259—356.

[3]) *Thèse* 1928, Ed. Presses nouvelles.

ces ponctuelles bien dèterminées entre les deux hypersurfaces et la comparaison de ces diverses correspondances m'a conduit à certaines propriétés intéressantes, qui jouissent d'un grand degré de généralité. Ces propriétés, qui se trouvent développées dans le chapitre III C, ont fait d'ailleurs l'objet d'une note parue aux Comptes Rendus[1]).

L'étude du contact des variétés correspondantes sur deux hypersurfaces applicables l'une sur l'autre, qui dans notre cas se laisse traiter sans difficulté, (Chapitre III E), conduit également à certaines propriétés intéressantes. Cette étude se trouve présenter une importance pour deux principales raisons. Elle est d'abord liée au problème qui pour les surfaces projectivement déformables de l'espace ordinaire, consiste à la recherche des réseaux de déformation projective. En effet, en chaque point d'une telle surface, les directions de déformation projective sont celles des courbes passant par ce point et qui par l'homographie unique qui réalise l'application C_{24} (au sens de M. Féraud), ont un contact de $3^{\text{-me}}$ ordre avec les courbes correspondantes[2]).

Un deuxième point important de cette étude c'est qu'elle conduit naturellement à la découverte de certaines classes de variétés v_k qui admettent une correspondance C_{23}, qui de cette manière s'obtiennent plus facilement que par une méthode directe. C'est ainsi que j'ai obtenu, *sans intégration*, une classe importante de couples de surfaces reglées de l'espace à quatre dimensions, admettant une C_{23} et dépendant de sept fonctions arbitraires d'un argument, tandis que les couples les plus généraux de v_2 de cette espèce dépendent de huit fonctions arbitraires d'un argument. De la même manière je ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires d'une forme élémentaire, la recherche de couples de surfaces de E_4 spéciales (à une famille de caractéristiques planes et à une transformée de Laplace dégénérée), admettant une C_{23} et dépendant de huit fonctions arbitraires d'un argument, qui d'ailleurs est le degré de généralité d'un tel couple de variétés.

Le problème de la recherche des différentes applicabilités

---

1) *C. R.* 185. 1927. pp. 1178–79.

2) Ce théorème dû à M. Cartan a été exposé dans les leçons professées à la Sorbonne 1927–28.

possibles entre deux hypersurfaces développables m'a conduit, en dernier lieu, à des propriétés concernant des variétés très générales, propriétés qui se trouve être l'extension d'un théorème de M. ČECH et d'un autre théorème de M. FUBINI relatifs à l'applicabilité projective des surfaces de l'espace ordinaire. Ces propriétés, développées au Chapitre I, ont été trouvé en partie par M. BERSANO[1]), mais à un degré beaucoup moins avancé.

Je dois le succès de ces résultats à l'attention que mon cher Maître M. CARTAN a voulu porter à mon travail. L'emploi de la méthode du repère mobile et des systèmes de Pfaff en involution dont M. CARTAN a été le créateur et l'animateur, m'a été d'un secours certain pour simplifier, d'un côté, les démonstrations dans bien des cas et dans d'autre cas, comme par exemple celui où sont poussées plus loin les recherches de M. BERSANO, comme moyen unique d'investigation. Qu'il me soit permis de lui exprimer par cet hommage, avec mon admiration, ma plus profonde gratitude.

CHAPITRE PREMIER

Généralités sur l'applicabilité projective

A. *Préliminaires*

Nous avons employé, pour démontrer les résultats du présent travail, la méthode du repère mobile, développée par M. CARTAN et par d'autres auteurs dans des nombreux travaux de géométrie infinitésimale. J'indiquerai dans ce chapitre, entre autres, brièvement, quels sont dans cette théorie les principaux résultats dont nous nous sommes notamment servi. La plùpart ont été résumés par M. CARTAN dans son article *Sur les variétés à courbure constante d'un espace enclidien ou non en lidien* (Bull. soc. math. 1919 et 1920); une autre partie se trouve développée dans la thèse de M. LALAN (*Variétés à trois dimensions* etc. J. Mat. pures et appl. 1924).

1⁰. — **Le repère mobile.** Un point *analytique* est défini par l'ensemble de ses $n+1$ coordonnées homogènes par rapport à

[1]) *Rend. r. Inst. lombardo* 56. 1923 pp. 267—275.

un système fixe de coordonnées. Nous désignerons par des lettres majuscules, comme il est d'usage, aussi bien un point analitique que l'ensemble de ses $n+1$ coordonnées homogènes.

Un repère mobile sera défini par $n+1$ points analytiques A_0, $A_1, \ldots, A_n$ non liés par aucune relation linéaire de la forme

$$\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n = o$$

dont on comprend facilement les sens. Il dépend en général de $(n+1)^2 - 1$ paramètres, par ex. les rapports mutuels des coordonnées homogènes des $n+1$ points $A_0, A_1, \ldots, A_n$ qu'on appelle aussi les *sommets* du repère. On sera souvent conduit à considérer des repères moins généraux, en soumetant les sommets du repère à satisfaire à certaines conditions que nous préciserons dans la suite.

En donnant à tous les paramètres dont dépend la position du repère des accroissements infiniment petits, les coordonnées homogènes des sommets du repère subiront des variations dA_0, $dA_1, \ldots, dA_n$ qui satisferont à des relations de la forme

$$(1) \qquad dA_i = \sum_{h=o}^{n} \omega_{ih} A_h \qquad (i = o, 1, \ldots, n)$$

$\omega_{00}, \ldots, \omega_{nn}$ étant des formes linéaires des différentielles des paramètres, les coéfficients étant des fonctions de ces paramètres. On appelle ces formes de Pfaff ω_{ih} *les composantes relatives du mouvement instantané du repère mobile.* Nous remplacerons souvent dans la suite, pour simplifier les écritures, A_0 qu'on appelle l'origine du repère par A et ω_{oi} $(i \neq o)$ par ω_i Les quantités ω_{ih} satisfont aux relations extérieurs

$$\omega'_{ih} = \sum_{j=o}^{n} [\omega_{ij} \ \omega_{jh}]$$

dont nous ferons implicitement usage dans la suite des calcules. Nous nous servirons souvent également du théorème suivant :

Lorsqu'on a une relation de la forme

$$[\omega_1 \chi_1] + [\omega_2 \chi_2] + \ldots + [\omega_k \chi_k] = 0$$

et $\omega_1, \ldots, \omega_k$ *sont des formes linéaires indépendantes par rapport aux différentielles des variables, les* χ_i *sont des fonctions linéaires des* ω_h *avec des coéfficients formant un tableau symétrique* [1])

[1]) CARTAN (7) p 151. Dorénovant par des désignations de cette nature nous renvoyons à la bibliograhie placée à la fin du volume

D'aprés celà nous pourrons écrire.

$$\varkappa_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$\Phi = \sum_{i=1}^{k} \omega_i \varkappa_i$ étant un polynome homogène du 2[d] degré en $\omega_i, \ldots, \omega_k$.

2⁰.— *Repères attachés à une variétés* V_k. Une variété à k dimensions V_k de E_n sera définie par les relations qui expriment les coordonnées non homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par rapport à un système de coordonnés fixe d'un de ses points courants M en fonction de k paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Nous considérerons une suite de repères où le point A sera confondu avec le point M et les sommets $A_1, A_2, \ldots, A_k$ seront situés dans le E_k tangent à la variété en M. Certains paramètres dont dépend en général la position du repère mobile, seront ainsi déterminés en fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_k$ par l'intermédiaire des fon tions x_i et leurs dérivées partielles du 1[r] ordre $\frac{\partial x_i}{\partial u_k}$. Nous dirons qu'un repère satisfaisant à ces conditions, considéré dans toute sa généralité, ou pour lequel on a particularisé arbitrairement les paramètres non déterminés, est un repère *du 1[r] ordre*. Les conditions imposées se traduisent par les relations

$$\omega_{k+1} = 0 \ , \ldots , \ \omega_n = 0$$

On déduit des relations extérieurs et du théorème cité les relations

$$(2) \qquad \omega_{i\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i} = \sum_{y=1}^{k} m_{iy\alpha}\, \omega_y \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ \alpha = k+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

les Φ_α étant certains polynomes homogénes du 2[d] degré en $\omega_1, \ldots, \omega_k$ et les quantités $m_{ij\alpha} = m_{ji\alpha}$ étant des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_k$ (par l'intermédiaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées de 1[r] et de 2[d] ordre) et de certains paramètres restants $v_1, \ldots, v_\beta$.

Lorsqu'on aura donné des valeurs particulières à ces paramètres le repère sera dit *du 2[d] ordre*. Si nous désignons d'ailleurs par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les coordonnées non homogènes d'un point de la variété par rapport à un repère quelconque du 1[r] ordre ayant le point M pour origine, les équations de la variété, supposée analytique, pourront s'écrire par rapport aux k premières coordonnées prises comme paramètres

$$X_\varrho = \frac{1}{2}\varphi_\varrho^{(2)}(X_1, \ldots, X_k) + \frac{1}{6}\varphi_\varrho^{(3)}(X_1, \ldots, X_k) + \ldots \quad (\rho = k+1, \ldots n)$$

$\varphi_\varrho^{(s)}$ étant des polynomes homogènes de degré s en $X_1, X_2, \ldots, X_k$ et on aura [1])

$$\varphi_\varrho^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) = \Phi_\varrho$$
$$(\rho = k+1, \ldots, n)$$

La dérivation extérieure des relations (2) nous conduira à des relations de la forme

$$\sum_{j=1}^{k} [\omega_j (dm_{ij\alpha} + \pi_{ij\alpha})] = 0$$

$\pi_{ij\alpha}$ étant des expressions linéaires à coefficients numériques connus des ω_{ij}. Nous pourrons donc écrire

$$(3) \qquad dm_{ij\alpha} + \pi_{ij\alpha} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial\omega_i\,\partial\omega_j} = \sum_{l=1}^{k} m_{ijl\alpha}\,\omega_e$$

où l'on a

$$F_\alpha = \varphi_\alpha^{(3)}(\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_k), (\alpha = k+1, \ldots, n)$$

$m_{ijl\alpha}$ dépendant des éléments du 3[me] ordre de la variété et de certains paramètres auxiliaires qui une fois particularisés déterminent un repère *du 3[me] ordre.*

Remarquons que pour fixer les valeurs des paramètres auxiliaires $v_1, \ldots, v_\beta$, les relations (3) suffisent. Si nous fixons en effet les valeurs des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_k$, ce qui revient à poser

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \ldots, \omega_k = 0$$

et si nous disignons par δ une variation compatible avec ces conditions et par e_{ij}, $e_{ij\alpha}$ les expressions $\omega_{ij}(\delta)$, $\pi_{ij\alpha}(\delta)$ nous déduisons de (3)

$$\delta\, m_{ij\alpha} = -\, e_{ij\alpha}$$

où les expressions $e_{ij\alpha}$ sont connues. Les quantités $m_{ij\alpha}$ subissent ainsi les substitutions d'un groupe dont les transformations in-

[1]) Lalan (14) p. 248—255.

finitésimales se déduisent facilement des expressions $e_{ij\alpha}$[1]). Nous pourrons donc assigner aisément *à priori* des valeurs numériques convenables aux fonctions $m_{ij\alpha}$, ou suivant les cas des valeurs égales aux invariants du groupe ainsi déterminé qui seront d'ailleurs des invariants projectifs de la variété considérée.

Nous avons esquissé ainsi un procébée de *normalisation* du repère de proche par ordres successifs[2]), jusqu'à un certain ordre ou jusqu'à l'épuisement complet des paramètres lorsque cela est possible; dans le cas contraire on est conduit naturellement à certaines variétés algébriques dont l'étude joue un rôle important dans l'étude même des variétés les plus générales.

3°. — **Coordonnées plückeriennes d'un élément plan.** Lorsqu'un élément plan E_{h-1} est défini par h points $M_1, M_2, \ldots, M_h$, ses coordonnées plückeriennes sont par définition l'ensemble de tous les mineurs d'ordre h de la matrice formée avec les $h\,(n+1)$ coordonnées homogènes des points $M_1, M_2, \ldots, M_h$. Nous désignerons l'ensemble de ces coordonnées par le symbole

$$[\, M_1\, M_2 \ldots M_h \,]$$

auquel on appliquera, le cas échéant, les règles de différentiation des déterminants.

Si $(M_1, M_2, \ldots, M_h)$ et $(N_1, N_2, \ldots, N_h)$ sont deux séries de poins de définition d'un même E_{h-1}, les coordonées de E_{h-1} définies de ces deux manières sont proportionnelles, ce que nous exprimerons dans la suite par la relation

$$[\, M_1\, M_2 \ldots M_h \,] = \rho\, [\, N_1\, N_2 \ldots N_h \,]$$

Des règles plus complètes concernant ce calcul symbolique, pour $n = 3$, ont été exposées par M. Mentré dans sa thèse (*Les variétés réglées* etc. Ed. Presses Universitaires). Ces règles se généralisent sans peine pour n quelconque et nous en ferons constamment usage.

4°. — **Eléments plans osculateurs à une variété V_k.** Si nous considérons l'ensemble de toutes les courbes passant par un certain point d'une variété V_k et les E_h osculateurs en ce point à

---

1) Si en effet on a $e_{ij\alpha} = \Sigma_{(lh)}\, m_{ij\alpha}^{(lh)}\, e^{lh}$ les transformations infinitésimales du groupe seront $\varkappa^{(lh)} f = \sum\limits_{(ij\alpha)} m_{ij\alpha}^{(lh)} \dfrac{\partial f}{\partial m_{ij\alpha}}$.

2) v par ex. Cartan (8) p. 280—286.

chacune de ces courbes, on appelle hyperplan osculateur du $(h-1)^{me}$ ordre[1]) ou plan h — tangent [2]), le plus petit élément plan contenant tous ces E_h osculateurs.

Si nous choisissons le repère de manière que.

$$[A\, A_1 \ldots A_k]\ ,\ [A \ldots A_k \ldots A_{k+Q}],$$
$$[A \ldots A_k \ldots A_{k+Q} \ldots A_{k+Q+R}],$$
$$[A \ldots A_k \ldots A_{k+Q} \ldots A_{k+Q+R} \ldots A_{k+Q+R+S}].$$

soit le plan tangent, 2 — tangent, 3 — tangent, etc.... nous aurons

$$\varphi_\lambda^{(2)} = 0\ ,\ \varphi_\mu^{(3)} = 0\ ,\ \varphi_\nu^{(4)}\, 0\ , \ldots$$
$$(\lambda > k+Q\ ,\ \mu > k+Q+R\ ,\ \nu > k+R+R+S\ , \ldots)$$

quant aux formes

$$\varphi_\lambda^{(2)}\ ,\ \varphi_\mu^{(3)}\ ,\ \varphi_\nu^{(4)}\ , \ldots$$

avec

$$k < \lambda \leqq k+Q < \mu \leqq k+Q+R < \nu \leqq k+Q+R+S < \ldots,$$

on les appelle les formes assymptotiques du 1^r, 2^d, 3^{me}, ... ordre; elles jouissent de la propriété remarquable suivante :

Les dérivées partieles d'ordre h *d'une forme assymptotique d'ordre* m *est une forme assymptotique d'ordre* m — h [3]).

On a en fin les relations suivantes qui nous serons utiles[4]):

$$(4) \qquad \varphi_\mu^{(3)} = \sum_{\lambda=k+1}^{k+Q} \varphi_\lambda^{(2)}\, \omega_{\lambda\mu} \qquad (\mu > k+Q)$$

5⁰. — **Dualité**. Nous pouvons aussi déterminer un repère mobile par les $(n+1)^2$ coordonnées tangentielles des $n+1$ hyperplans (E_{h-1}) formés en associant les sommets du repère n à n. En désignant par a_i l'hyperplan (ou la face) opposé au sommet A_i, ou bien l'ensemble de ses $n+1$ coordonnées tangentielles et par le symbole $(a\ A)$ une expression de la forme

$$v_0\, x_0 + v_1\, x_1 + \ldots + v_n\, x_n$$

$v_0, v_1, \ldots, v_n$ étant les coordonnées tangentielles d'un hyperplan a et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées homogènes d'un point A, nous aurons pour définir les coordonnées a_i les relations

$$(5) \qquad (a_i\ A_j) = o \qquad (i \neq j;\ i, j = o, 1, \ldots, n)$$

1) Cartan (7) pp. 146—156.
2) v. Tubini (12) p. 731.
3) Cartan (7) p. 155.
4) d⁰ (7) p. 153.

qui expriment que le point A_j est situé sur la face a_i. Nous pouvons achever de déterminer les coordonnées des E_{n-1} *analytiques* a_i par les relations

$$(6) \qquad (a_i\, A_i\,) = 1 \qquad (i = o, 1, .\,.\,, n)$$

car les premiers membres ne sont pas nuls. Nous aurons alors des relations de la forme

$$(7) \qquad d\, a_i = \sum_{h=o}^{n} \overline{\omega}_{ih}\, a_h\,. \qquad (i = o, 1, .\,.\, n)$$

De la différentiation des relations (5) et (6), en tenant compte de ces relations et des relations (1) et (7), nous deduirons facilement

$$(8) \qquad \overline{\omega}_{ij} + \omega_{ji} = o.$$

Cela étant la corrélation particulière

$$x_0 = v_0\,,\; x_1 = v_1, .\,.\,, x_n = v_n$$

fera correspondre à un repère dont les faces sont a_0, a_1,..., a_n, un autre repère ayant pour sommets les points analytiques $\overline{A}_0$, $\overline{A}_1$, ..., $\overline{A}_n$ tels qu'on ait

$$\overline{A}_0 = a_0\,,\; \overline{A}_1 = a_1\,, .\,.\,, \overline{A}_n = a_n$$

et par conséquent

$$d\,\overline{A}_i = \sum_{h=o}^{n} \overline{\omega}_{ih}\,\overline{A}_h \qquad (i = o.\; 1,\, ...,\, n)$$

À une variété V_k correspond par dualité une hypersurface $\Sigma^{(k)}$ dont le plan tangent dépend de k paramètres. À des repères d'ordre h attachés à V_k correspondront des repères attachés à $\Sigma^{(k)}$ et les équations de $\Sigma^{(k)}$ en coordonnées tangentielles par rapport à un de ces repères mobiles seront les mêmes que celles de V_k en coordonnées ponctuelles par rapport au repère correspondant. Les relations (8) font passer des composantes du mouvement instantané des repères attachés à V_k aux composantes relatives au mouvement des repères correspondants attachés à $\Sigma^{(k)}$.

6⁰. **Systèmes différentiels en involution.** Nous aurons souvant besoin dans la suite d'appliquer la théorie des systèmes de Pfaff en involution, aux systèmes différentiels que nous rencontrerons et qui seront posés par les différents problèmes de déformation que nous traiterons, quand il y aura à determiner le degré de généralité de la solution.

La théorie des systèmes de Pfaff en involution a été édifiée par M. CARTAN dans deux mémoires fondamentaux parus dans les *Annales de l'Ecole Normale (Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* t. 18, 1901 et *Sur la structure des groupes infinis de transformations* ch. I, t. 21, 1904) et exposé par ailleurs en résumé dans un mémoire cité [1]). Nous renvoyons à ces travaux pour toutes les fois que nous aurons besoin d'appliquer les résultats de cette théorie fondamentale.

B. *L'applicabilité projective. Extension d'un théorème de Čech.*

7°. — D'après M. CARTAN [2]) le problème de l'applicabilité projective peut s'enoncer de la manière suivante :

„Deux variétés à p dimensions s et S d'un espace projectif à n dimensions sont dites déformées l'une de l'autre d'ordre h si l'on peut établir entre ces variétés une correspondance ponctuelle telle que deux morceaux infiniment petits correspondants des deux variétés puissent être amenés en coincidence, aux infiniment petits près d'ordre $h+1$, par un déplacement projectif convenablement choisi (et variable avec le morceau considéré)".

Ce problème a été généralisé par M. FÉRAUD [3]); j'emprunte au travail de ce dernier la notion de correspodance C_{hk} entre deux variétés s et S à p dimensions d'un éspace E_n, qui est une généralisation de l'applicabilité d'ordre h de M. FUBINI, qui n'est que la correspondance C_{hh} (ou simplement C_h) :

„Une correspondance C_{hk} entre deux variétés s et S est telle que par un déplacement projectif convenablement choisi H (variable d'un point à l'autre) on peut amener un point A quelconque de S sur son homologue a de s de telle sorte qu'au point commun les deux variétés aient après le déplacement une application C_h et un contact d'ordre $k \geqq h$".

La recherche des équations différentielles que ce problème pose est très simple. On choisit le long de s un repère (r) ou A...

1) CARTAN (7) pp. 136 – 146.
2) d° (9) Le problème général de la déformation.
3) FÉRAUD (10) Thèse p. 2.

A_n d'ordre k (§ 2^0), qui sera défini par un certain nombre d'équations linéaires en ω_{ij}, les composantes du déplacement instantané de ce repère. On écrit que ce mêmes equations sont satisfaites par les composantes Ω_{ij} relatives au repère (R) ou $B_{...}$ B_n attaché à S, repère qui se déduit de (r) par l'homographie H^{1} inverse de H; ceci est une conséquence du fait que ces équations linéaires résultent de la structure des formes $\varphi^{(i)}_{\rho}$ (§ 2^{1}) qui doivent être les mêmes pour les deux varétés si $i \leq k$, parce qu' il y a contact d'ordre k. On écrit ensuite les équations que posent la C_h.

Pour écrire ces dernières équations M. Cartan a donné une méthode dans la communication faite au congrès de Strasbourg et une deuxième méthode valable pour la C_2 des hypersurfaces dans son mémoire sur la déformation des surfaces[1]).

Nous donnerons ici une troisième méthode pour $h = 2$, 3, 4, méthode inspirée des leçons professées par M. Cartan à la Sorbonne (1927—28) et qui a l'avantage de s'appliquer aussi aux problèmes déformation *avec contact géométrique* dont nous parlerons plus loin et mêmes aux problèmes de déformation avec un troisième genre de contact, que nous définirons égallement et que nous appellerons *contact de Čech,* parce qu'il a été considéré pour la première fois par cet auteur dans un beau théorème sur l'applicabilité projective des surfaces.

8^0.—Suivant la notion de déformation *avec contact géométrique,* deux variétés s et S sont applicables avec contact géométrique d'ordre h, si on peut établir une correspondance (que nous désignerons par G_h), telle que par une homographie convenable H on puisse amener deux points correspondants en coïncidence de manière que deux courbes correspondantes quelconques, passant par ces points, aient entre elles après le déplacement un contact d'ordre h[2]).

De même nous dirons qu'une correspondance (que nous désignerons par Γ_h) établit une applicabilité d'ordre h *avec contact de Čech,* lorsque par un déplacement projectif convenable on peut amener en coïncidence les E_h osculateurs à deux courbes correspondantes en deux points correspondants.

1) Cartan (8) pp. 268 - 272.

2) Cf. Fubini (11) p 141 et aussi Cartan (8) p. 264.

M. FUBINI avait déjà démontré que pour les V_2 de E_3 et pour $h = 2$ on a les deux propriétés suivantes:

A. *Une applicabilité* G_h *est nécessairement une* C_{h-1} [1].

B. *Une applicabilité* G_h *est aussi une* C_h, *si ou applique au besoin une nouvelle transformation homographique à la variété* S [2].

D'un autre côté M. ČECH, dans les mêmes cas également, a démontré le thèorème suivant [3].

C. *Une* Γ_h *est aussi une* G_h *si on applique au besoin une nouvelle homographie à* S (qui peut d'ailleurs varier d'un point à l'autre).

Ces trois propriétés montrent l'identité pour les surfaces de l'espace ordinaire entre les trois genres d'applicabilitè projective du second ordre.

Les propriétés A et B ont été généralisées par M. CARTAN pour $h = 2$ et pour les V_{n-1} de E_n; M. BERSANO a généralisé aussi les propriétés A et C pour $h = 2$ et 3 et la propriété B pour $h = 2$ pour toutes les variétés d'un espace projectif E_n.

Il est remarquable le fait que toutes ces généralisations ont un caractère à part. Comme on peut parler d'applicabilité projective en un seul couple de points correspondants [4], ces propriétés sont valables *isolément*, c'est à dire qu'il *suffit* de supposer la validité des hypothèses en un seul couple de points correspondants pour que les conclusions soient justes en ce même couple de points.

La propriété A est très générale; quant aux autres propriétés, que nous avons tâchés de pousser plus loin, *il faut*, pour qu'elles soient valables dans les cas que nous avons traités, que les hypotèses soient vérifiées dans tous les points, correspondants des deux variétés.

9⁰.—En empruntant pour le moment l'analyse de M. BERSANO [5], nous considérerons deux courbes (x) et (X) d'un espace E_n dont les coordonnées non homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'un point courant seront exprimées en fonction d'un même paramètre u. Pour qu'en un point correspondant à la valeur u_0

---

1) FUBINI (11) p. 144.

2) d⁰ (11) p. 148.

3) Cf. FUBINI (12) p. 120.

4) FUBINI (11) p. 146

5) BERSANO (1) p. 267—275.

du paramètre il y ait un contact du 4^{me} ordre, il faut que pour $u = u_0$ on ait les relations suivantes :

$$X_i = x_i\,; \qquad X_i' = \rho\, x_i'\,; \qquad X_i'' = \rho^2 x_i'' + \sigma x_i'\,;$$
$$X_i''' = \rho^3 x_i''' + 3\rho\sigma x_i'' + \chi x_i'\,; \quad X_i^{(IV)} = \rho^4 x_i^{(IV)} + 6\rho^2\sigma x_i''' +$$
$$+ (4\rho\chi + 3\sigma^2)\, x_i'' + \delta x_i'\,; \qquad (i = 1, 2, .\,, n)$$

les accents désignant des dérivées par rapport à u et ρ, σ, χ, δ étant des constantes. Les deux premières relations sont relatives au contact du 1^r ordre, les trois premières relations au contact du 2^d ordre, les quatre premières relations au contact du 3^{me} ordre.

Considérons maintenant deux variétés V_k et v_k à k dimensions, rapportées biunivoquement de manière qu'à deux points correspondants, correspondent les mêmes valeurs des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_k$ par rapport auxquels sont exprimées les coordonnées X_i, x_i des points courants des deux variétés; pour qu'elles aient en un point correspondant aux même valeurs $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_k^0$ des paramètres un contact géométrique du 2^d , 3^{me} ou 4^{me} ordre, il faut que, lorsqu'on remplace $u_1, u_2, \ldots, u_k$ par des fonctions arbitraires d'un paramètre u, assujeties simplement aux conditions que pour $u = u_0$, on ait

$$u_1(u_0) = u_1^0, \ldots, u_k(u_0) = u_k^0$$

les relations suivantes soient satisfaites:

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} X_i = x_i\,, \quad D_1 X_i = \rho D_1 x_i\,; \quad D_2 X_i = \rho^2 D_2 x_i + \sigma D_1 x_i\,; \\ D_3 X_i = \rho^3 D_3 x_i + 3\rho\sigma D_2 x_i + \chi D_1 x_i\,; \\ D_4 X_i = \rho^4 D_4 x_i + 6\rho^2\sigma D_3 x_i + (4\rho\chi + 3\sigma^2) D_2 x_i + \delta D_1 x_i; \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, .\,, n) \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$D_1 f = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_r} u_r'\,; \quad D_2 f = \sum_{r,\,s=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial u_r\, \partial u_s} u_r' u_s' + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_r} u_r''\,;$$

$$D_3 f = \sum_{r,s,t=1}^{k} \frac{\partial^3 f}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t} u_r' u_s' u_t' + 3 \sum_{r,\,s=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial u_r\, \partial u_s} u_r' u_s'' +$$
$$+ \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_r} u_r'''\,;$$

$$D_4 f = \sum_{r,s,t,q=1}^{k} \frac{\partial^4 f}{\partial u_r \, \partial u_s \, \partial u_t \, \partial u_q} u_r' \, u_s' \, u_t' \, u_q' +$$

$$+ 6 \sum_{r,s,t=1}^{k} \frac{\partial^3 f}{\partial u_r \, \partial u_s \, \partial u_t} u_r' \, u_s' \, u_t'' + 3 \sum_{r,s=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial u_r \, \partial u_s} u_r'' \, u_s'' +$$

$$+ 4 \sum_{r,s=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial u_r \, \partial u_s} u_r' \, u_s''' + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_r} u_r^{(IV)} \; ;$$

φ, σ, χ et δ dépendront fonctionellement de $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Les deux premières relations (9) sont relatives au contact du 1r ordre, etc.

Contact géométrique du 2d ordre. Les deux premières relations (9) devant avoir lieu quelque soient u_r', u_s'' on montre sans difficulté qu'il faut que l'on ait

$$\rho = 1 \; ; \qquad \sigma = 2 \sum_{r=1}^{k} \sigma_r \, u_r'$$

et par conséquent

$$(10) \qquad X_i = x_i \; ; \; \frac{\partial \chi_i}{\partial u_r} = \frac{\partial x_i}{\partial u_r}, \; \frac{\partial^2 X_i}{\partial u_r \, \partial u_s} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \, \partial u_s} +$$

$$+ \sigma_r \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \sigma_s \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \; ;$$

$$\left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \ldots, n \\ r, s = 1, \ldots, k \end{array} \right)$$

d'où l'on déduit qu'on contact géométrique du 2d ordre est nécessairement analitique du 1r ordre.

Contact géométrique du 3me ordre. De la troisième relation (9) on tire immédiatement en tenant compte des relations précédentes

$$\sigma = 0 \qquad \chi = 3 \sum_{r,s=1}^{k} \chi_{rs} \, u_r' \, u_s'$$

et par conséquent

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i = x_i \quad ; \quad \dfrac{\partial X_i}{\partial u_r} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad ; \quad \dfrac{\partial^2 X_i}{\partial u_r \, \partial u_s} = \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \, \partial u_s} \; ; \\ \dfrac{\partial^3 X_i}{\partial u_r \partial u_s \partial u_t} = \dfrac{\partial^3 x_i}{\partial u_r \, \partial u_s \partial u_t} + \chi_{rs} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_t} + \chi_{st} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r} + \\ \qquad \chi_{tr} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_s} \; ; \qquad \left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \ldots, n \\ r, s, t = 1, \ldots k \end{array} \right) \end{array} \right.$$

et on déduit comme précédemment qu'un contact géométrique du 3^{me} ordre est néceesairement analityque du 2^{d} ordre.

Contact géométrique du 4^{me} ordre. De la dernière relation (9) nous tirerons facilement en tenant compte des relations précédentes

$$\varkappa = o \; , \; \delta = \sum_{r,\,s,\,t=1}^{k} \delta_{rst}\, u'_r\, u'_s\, u'_t$$

et par conséquent

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i = x_i \; ; \; \dfrac{\partial X_i}{\partial u_r} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r} \; ; \; \dfrac{\partial^2 X_i}{\partial u_r\, \partial u_s} = \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s} \; ; \; \dfrac{\partial^3 X_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t} = \\[2ex] \dfrac{\partial^3 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t} \; ; \; \dfrac{\partial^4 X_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t\, \partial u_q} = \dfrac{\partial^4 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t\, \partial u_q} + \delta_{rst} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_q} \\[2ex] + \delta_{stq} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r} + \delta_{tqr} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_s} + \delta_{qrs} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_t} , \quad \begin{pmatrix} i = 1\ 2 \,..,n \\ r,s,t\ q = 1\,.\,,k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

ce qui montre en particulier qu'un contact géométrique du 4^{me} ordre est nécessairement analytique du 3^{me} ordre. On reconnaît immédiatement que le procédé est général ; on peut donc considérer la propriété A (§ 8^0) vraie dans toute sa génèralité.

10^0 Nous considérons comme évident, que lorsque deux variétés V_k et v_k ont en un point un contact de Čech d'ordre h, elles auront par le fait même un contact de Čech d'ordre $i < h$ [1]).

Contact de Čech du 1^r ordre. On doit avoir évidemment

$$(13) \qquad X_i = x_i \; , \; D_1\, X_i = \rho\, D_1\, x_i \;\; donc \;\; \frac{\partial X_i}{\partial u_r} = \rho \frac{\partial x_i}{\partial u_r}$$

par conséquent un contact de Čech du 1^r ordre est géométrique du 1^r ordre ce qui était évident *à priori*.

Contact de Čech du 2^d ordre. On doit avoir les relations (13) et

$$D_2\, X_i = \alpha\, D_2\, x_i + \sigma\, D_1\, x_i$$

ce qui donne par identification en tenant compte de (13)

$$\alpha = \rho \quad , \quad \sigma = 2 \sum_{r=1}^{k} \sigma_r\, u'_r$$

1) Il faut pour cela évidemment qu'une des variétés au moins ne soit pas située toute entière dans un E_h.

et par conséquent on aura (13) et

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u_r \partial u_s} = \varrho \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \partial u_s} + \sigma_r \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \sigma_s \frac{\partial x_i}{\partial u_r};$$

il sera alors facile de voir que par l'homothétie

$$\overline{x}_i = \varrho\, x_i$$

on peut réduire ϱ à l'unité. On a ainsi démontré la théorème de Čech (proposition C, § 8⁰) dans toute sa généralité.

11⁰. Pour démontrer la propriété B (§ 8⁰) pour $h = 2$, nous considérerons pour simplifier un système de référence ayant le point considéré comme origine et tel que le E_k tangent en ce point soit défini par les équations

$$x_{k+1} = o, \;.\; x_n = o$$

Nous prendrons ensuite x_1, $x_2, \ldots, x_k$ comme paramètres u_r et nous écrirons les équations de la variété v_k sous la forme

$$(14)\quad x_\varrho = \frac{1}{2}\varphi_\varrho^{(2)}(x_1, \ldots, x_k) + \frac{1}{6}\varphi_\varrho^{(3)}(x_1, \ldots, x_k) + \quad (\varrho = k+1, \ldots n)$$

$\varphi_\varrho^{(h)}$ étant des polynomes homogènes en $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de degré h. Avec ce choix les conditions (10) deviennent

$$X_i = x_i\,, \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} \;(\varepsilon_{pp} = 1, \varepsilon_{pq} = o, p \neq q)$$

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j\, \partial x_e} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_j\, \partial x_e} + \sigma_j\, \varepsilon_{il} + \sigma_e\, \varepsilon_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j, l = 1, \ldots, k \end{pmatrix}$$

On voit alors immédiatement que l'homologie

$$\overline{x}_i = \frac{x_i}{1 - \sum_{h=1}^{k} \sigma_h\, x_h} \qquad (i = 1\; 2, \ldots, n)$$

transformera v_k en une variété $\overline{v_k}$ telle que pour $x_1 = \cdots = x_k = o$ on aura

$$X_i = \overline{x_i}\; ; \; \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \overline{x_i}}{\partial x_j}\; ; \; \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j\, \partial x_e} = \frac{\partial^2 \overline{x_i}}{\partial x_j\, \partial x_e}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j, l = 1, \ldots, k \end{pmatrix}$$

et la proposition B se trouve ainsi démontré pour $h = 2$.

12°. — Supposons en dernier lieu, que deux variétés aient en un point commun un contact de Čech du 3^{me} ordre. On pourra par une substitution homographique convenable faire en sorte, d'après ce qu'il précède, qu'elles aient en ce point un contact analytique du 2^{d} ordre. Nous aurons alors, après le déplacement, les relations (10) avec $\sigma = o$, et si nous en tenons compte, la relation

$$D_3 X_i = A D_3 x_i + B D_2 x_i + C D_1 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui exprimera la dernière condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait contact de Cech du 3^{me} ordre, donnera par identification

$$A = 1 \quad , \quad B = o \quad , \quad C = 3 \sum_{r, s=1}^{k} \varkappa_{rs} u'_r u'_s$$

et on déduira les relations (11). La propriété C se trouve donc également démontré pour $h = 3$ dans toute sa généralité. Les démonstrations que nous venons de donner diffèrent peu de celles de M. Bersano et les simplifie légèrement.

13°. — Pour aller plus loin, nous allons considèrer un repère mobile (r) que nous ferons varier *d'une manière déterminée* le long de la variété v_k. Supposons V_k projectivement applicable sur v_k avec G_3 *en tous les points correspondants des deux variétés* et considérons le long de V_k le repère (R) avec lequel viendra coïncider (r) par l'homographie qui réalise en chaque couple de points correspondants le contact géométrique du 3^{me} ordre. Déplaçons r_k le long de V_k de manière qu'à chaque instant (à k paramètres) ce contact soit réalisé. Un point de V_k de coordonnés *non homogènes* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ aura par rapport à (r) un mouvement *relatif* dont les composantes par rapport à (r) se calculent facilement. Ce sont:

$$\Delta X_i = d X_i + \omega_i + X_i (\omega_{ii} - \omega_{oo}) + \sum_{j \neq i=1}^{n} X_j \omega_{ji} - X_i \sum_{h=1}^{n} X_h \omega_{ho} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Mais comme ce point est fixe, on aura d'un autre côté

$$0 = d X_i + \Omega_i + X_i (\Omega_{ii} - \Omega_{oo}) + \sum_{j \neq i=1}^{n} X_j \Omega_{ji} - X_i \sum_{h=1}^{n} X_h \Omega_{ho} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et en faisant la différence et posant

$$E_{ij} = \Omega_{ij} - \omega_{ij}$$

on aura

$$(15) \qquad \Delta X_i = - E_i - X_i (E_{ii} - E_{oo}) - \sum_{j \neq i=1}^{n} X_j E_{ji} + X_i \sum_{h=1}^{n} X_h E_{ho}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

On tire d'autre part des relations (11) qui expriment les conditions de contact géométrique du 3[me] ordre, le développement suivant :

$$(15 \text{ bis}) \begin{cases} X_i = (x_i)_o + \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\right)_o (u_r - u_r^o) + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \partial u_s}\right)_o \\ (u_r - u_r^o)(u_s - u_s^o) + \frac{1}{6} \sum_{r,s,t=1}^{k} \left(\frac{\partial^3 x_i}{\partial u_r \partial u_s \partial u_t} + \chi_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial u_t} + \right. \\ \left. + \chi_{st} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \chi_{tr} \frac{\partial x_i}{\partial u_s}\right)_o (u_r - u_r^o)(u_s - u_s^o)(u_t - u_t^o) + \ldots \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

D'après ces relations on a

$$(15 \text{ ter}) \begin{cases} X_i = x_i + \frac{1}{6} \sum_{r,s,t=1}^{k} \left(\chi_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial u_t} + \chi_{st} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \chi_{tr} \frac{\partial x_i}{\partial u_s}\right)_o \\ (u_r - u_r^o)(u_s - u_s^o)(u_t - u_t^o) + \ldots \end{cases}$$

Si nous faisons maintenant varier $u_1^o, u_2^o, \ldots, u_k^o$ nous tirerons en différentiant les relations (15 bis) après simplification

$$\Delta X_i = - \frac{1}{2} \sum_{r,s,t=1}^{k} \left(\chi_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial u_t} + \chi_{st} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \chi_{tr} \frac{\partial x_i}{\partial u_s}\right)_o$$

$$(u_r - u_r^o)(u_s - u_s^o)\, d u_t^o + \ldots$$

Revenons alors au choix fait au § 11[0] du système de référence et des paramètres ; avec ce choix on a

$$u_r = x_r \ , \ u_r^o = o \ , \ d u_r^o = \omega_r$$

et par conséquent

$$(16) \begin{cases} \Delta X_i = - \frac{1}{2} \sum_{r,s,t=1}^{k} (\chi_{rs} \varepsilon_{it} + \chi_{st} \varepsilon_{ir} + \chi_{tr} \varepsilon_{is}) x_r x_s \omega_t + \ldots \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

avec ce même choix les relations (15 ter) deviennent

$$(16\text{ bis})\left\{\begin{array}{l} X_i = x_i + \dfrac{1}{6} \sum_{r,s,t=1}^{k} (\chi_{rs}\,\varepsilon_{it} + \chi_{st}\,\varepsilon_{ir} + \chi_{tr}\,\varepsilon_{is}) x_r\, x_s\, x_t + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right.$$

et ces relations donnent *l'écart* qui existe entre deux points correspondants.

Posons dans (14)

$$(17) \qquad \overset{(2)}{\varphi}_\varrho = \sum_{i,j=1}^{k} m_{ij\varrho}\, x_i\, x_j \qquad (\rho = k+1, \ldots, n)$$

et en tentant compte de ces expressions, introduisons les valeurs des x_ϱ d'après les développement (14) dans (16 bis) et ces dernières ainsi modifiées dans (15) et identifions avec (16). L'identification des termes constant, du 1^r et du 2^d ordre en $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nous donnera sans difficulté les relations suivantes, *qui formeront la système différentiel de la G_3* :

$$(18)\left\{\begin{array}{ll} (a)\left\{\begin{array}{l} E_i = o, \quad E_\varrho = o \\ E_{ii} - E_{oo} = o, \quad E_{ij} = o, \quad E_{i\varrho} = o \quad (i \neq j) \\ m_{ij\varrho}\,(E_{\varrho\varrho} - E_{oo}) + \displaystyle\sum_{o \neq \varrho = k+1}^{n} m_{ijo}\, E_{o\varrho} = o \end{array}\right. \\ \\ (b)\left\{\begin{array}{l} 2\, E_{io} - \displaystyle\sum_{\varrho=k+1}^{n} m_{ii\varrho}\, E_{\varrho i} = -\chi_{ii}\,\omega_i - 2\sum_{h=1}^{k} \chi_{ih}\,\omega_h \\ E_{jo} - \displaystyle\sum_{\varrho=k+1}^{n} m_{ij\varrho}\, E_{\varrho i} = -\chi_{ij}\,\omega_i - \sum_{h=1}^{k} \chi_{jh}\,\omega_h \quad (i \neq j) \\ -\displaystyle\sum_{\varrho=k+1}^{n} m_{jl\varrho}\, E_{\varrho i} = -\chi_{jl}\,\omega_i \qquad (j, l \neq i) \\ \qquad\qquad \left(\begin{array}{c} i, j, l = 1, 2, \ldots, k \\ \rho = k+1, \ldots, n \end{array}\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Si dans ces relations on fait $\chi_{ij} = o$, on obtient la système de la C_3.

14⁰. — Soit alors Q le nombre des formes $\overset{(2)}{\varphi}_\varrho$ linéairement indépendantes ; on a $Q \leqq \frac{1}{2} k\,(k+1)$ et $k + Q$ est le nombre de dimensions de l'hyperplan asculateur de 1^r ordre (§ 4⁰) à v_k [1]. Cela étant, on a entre les coéfficients $m_{ij\varrho}$ des formes $\overset{(2)}{\varphi}_\varrho$.

[1] *Cartan* (7) p 150.

$$S = \tfrac{1}{2} k(k+1) - Q$$

relations linéaires *indépendantes* de la forme

$$(19) \qquad \sum_{i,\,j=1}^{k} A_{ij}^{(a)}\, m_{ij\varrho} = o \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, S \\ \varrho = k+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

De ces relations et de (18 b) on déduit immédiatement des relations telles que

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Theta_i^{(a)} &\equiv 2 \sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(a)} \left(E_{jo} + \sum_{h=1}^{k} \chi_{jh}\, \omega_h \right) = \\ &= - \omega_i \sum_{h,l=1}^{k} A_{hl}^{(a)}\, \chi_{hl} \end{aligned} \right. \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, s \\ i = 1, 2, \ldots k \end{pmatrix}.$$

Si alors la forme quadratique;

$$\sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}^{(a)} \zeta^{(i)} \zeta^{(j)} = o,$$

qui définit dans un E_k un *cône caractéristique*, a son discriminant nul, on voit facilement que

$$(21) \qquad \sum_{h,l=1}^{k} A_{hl}^{(a)}\, \chi_{hl} = o\,;$$

dans ce cas, en effet, on a entre les premiers membres $\Theta_i^{(a)}$ des relations (20) une relation linéaire et homogène à coéfficients ν_i non tous nuls dela forme

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i\, \Theta_i^{(a)} = o$$

et par conséquent

$$\sum_{h,l=1}^{k} A_{hl}^{(a)}\, \chi_{hl} \times \sum_{i=1}^{k} \nu_i\, \omega_i = o,$$

ce qui démontre la relation (21).

Cela étant plusieurs cas sont à distinguer.

I. $S = o$. Il n'y a aucune relation de la forme (19) et parmi les formes $\varphi_\varrho^{(2)}$ il y en a $\frac{1}{2}\, k\,(k+1)$ linéairement indépendentes. On peut trouver dans ce cas des coéfficients $\varkappa_\varrho$ tels qu'on ait

$$(22) \qquad \sum_{i,\,j=1}^{k} \chi_{ij}\, \zeta^{(i)} \zeta^{(j)} = \sum_{\varrho=k+1}^{n} \varkappa_\varrho\, \varphi_\varrho^{(2)} (\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(k)}),$$

ou:

$$(23) \qquad \chi_{ij} = \sum_{\varrho=k+1}^{n} m_{ij\varrho}\, \chi_\varrho \,.$$

II. $S \geqq 2$; on peut toujours s'arranger de manière que $S - 1$ cônes de base du réseau de cônes caractéristiques soient dégénérés. On aura $S - 1 \geqq 1$ relations telles que (21). Si le S^{me} cône du réseau est lui aussi dégénéré on aura une S^{me} relation telle que (21). Dans le cas contraire supposons, par exemple, que la forme:

$$\sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}^{(1)}\, \zeta^{(i)}\, \zeta^{(j)}$$

n'est pas dégénérée. On tire des relations (20) correspondant à $a = 1$ des relations telles que

$$E_{io} + \sum_{h=1}^{k} \chi_{ih}\, \omega_h = -\frac{1}{2}\, \chi \sum_{l=1}^{k} a_{il}^{(1)}\, \omega_l$$

où:

$$\chi = \sum_{l=1}^{k} A_{hl}^{(1)}\, \chi_{hl}$$

et où les $a_{il}^{(1)}$ désignent les mineurs du déterminant des $A_{il}^{(1)}$ divisés par la valeur même de ce déterminant. Si nous tenons compte de ces expressions une quelconque des relations (20) relative à $a = 2$ deviendra:

$$\chi \sum_{l=1}^{k} \omega_l \left(\sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(2)}\, a_{jl}^{(1)} \right) = 0,$$

et comme les quantités,

$$\lambda_{il} = \sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(2)}\, a_{j}^{(1)},$$

ne peuvent pas être toutes nulles[1]) on aura nécessairement

$$(21) \qquad \chi \equiv \sum_{h,l=1}^{k} A_{hl}^{(1)}\, \chi_{hl} = 0.$$

---

1) Car autrement le système d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(2)}\, z_j = 0, \qquad (i = 1, 2, .., k),$$

admettrait k systèmes de solutions $z_j = a_{jl}^{(1)}$, $(l = 1, 2, . k)$, *indépendantes* ce qui est impossible.

III. S = 1 et le cône caractéristique unique est dégénéré. On aura dans ce cas également d'après ce qui précède.

$$\sum_{h,l=1}^{k} A_{hl}^{(1)} \chi_{hl} = 0 \tag{21}$$

Dans tous ces trois cas par conséquent le cône

$$\sum_{i,j=1}^{k} \chi_{ij} \xi^{(i)} \xi^{(j)} = 0$$

appartient au réseau assymptotique et on aura toujours des relations telles que (22) et (23). Cela étant, l'homologie

$$\overline{x}_i = \frac{x_i}{1 - \sum\limits_{\varrho=k+1}^{n} \chi_\varrho x_\varrho} = (i = 1, 2, \ldots, n)$$

transformera v_k en une variété $\overline{v}_k$ qui aura avec V_k un contact analytique du 3^{me} ordre comme le montre un calcul facile.

15°. — Le cas S = 1, où le cône caractéristique n'est pas dégénéré, doit être traité à part. Nous verrons justement qu'il présentera un cas d'exception. Nous voulons d'abord caractériser d'une autre manière les variétés appartenant à cette catégorie. On a dans ce cas, en effet, une seule relation de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}\, m_{ij\varrho} = 0 \qquad (\varrho = k+1, \ldots, n) \tag{24}$$

Soit alors

$$x_i = \frac{\alpha_{i0}\, \overline{x}_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \overline{x}_j}{\alpha_{00}\, \overline{x}_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\, \overline{x}_j}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

les équations dela substitution homographique qui font passer d'un repère fixe (caractérisé par les coordonnées *homogènes* $\overline{x}_j$) au repère choisi au § 11°. On a les relations

$$\sum_{m=0}^{n} \alpha_{im} (\overline{x}_m)_0 = 0 \quad \sum_{m=0}^{n} \alpha_{\varrho m} \left(\frac{\partial \overline{x}_m}{\partial u_r}\right)_0 = 0 \tag{26}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ r = 1, \ldots, k \\ \varrho = k+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

qui expriment que le point qui correspond à $u_r = u_r^0$ est l'origine du nouveau repère et que le plan tangent en ce point a pour équations par rapport à ce nouveau repère

$$x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

Nous aurons d'un autre côte les développements

$$\bar{x}_i = (\bar{x}_i)_0 + \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u_r}\right)_0 (u_r - u_r^0) + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial u_r \partial u_s}\right)(u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0) + \\ + \cdots$$

$$(i = 0, 1, \dots, n)$$

d'où, en remplaçant dans (25), par suite des relations (26)

$$x_\rho = \frac{\frac{1}{2} \sum\limits_{r,s=1}^{k} \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_{\rho j} \left(\frac{\partial^2 \bar{x}_j}{\partial u_r \partial u_s}\right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0) + \dots}{\sum\limits_{h=0}^{n} \alpha_{oh} (\bar{x}_h)_0 + \dots}$$

$$x_j = \frac{\sum\limits_{r,s=1}^{k} \sum\limits_{q=0}^{n} \alpha_{jq} \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial u_r}\right)_0 (u_r - u_r^0) + \dots}{\sum\limits_{h=0}^{n} \alpha_{oh} (\bar{x}_h)_0 + \dots}$$

$$\begin{pmatrix} \rho = k+1, \dots, n \\ j = 1, \dots, k \end{pmatrix}$$

Si nous remplaçons enfin ces valeurs dans les relations (14) que nous écrirons de nouveau d'après (17) sous la forme:

$$x_\rho = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} m_{ij\rho}\, x_i x_j + \dots \qquad (\rho = k+1, \dots, n)$$

nous trouverons l'identité

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{h=0}^{n} \alpha_{oh}\, \alpha_{\rho i} (\bar{x}_h)_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial u_r \partial u_s}\right)_0 = \sum_{ij=1}^{k} \sum_{p,q=0}^{n} m_{ij\rho}\, \alpha_{ip} \alpha_{jq} \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{x u_r}\right)_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_q}{\partial u_s}\right)_0$$

$$\begin{pmatrix} \rho = k+1, \dots, n \\ r,s = 1, \dots, k \end{pmatrix}$$

Nous pourrons alors déterminer les quantités θ_{rs} de manière que l'on ait

$$\sum_{r,s=1}^{k} \sum_{p,q=0}^{n} \theta_{rs}\, \alpha_{ip} \alpha_{jq} \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u_r}\right)_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_q}{\partial u_s}\right)_0 = A_{ij}$$

ce qui est toujours possible et nous aurons d'après (24)

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{r,s=1}^{k} \alpha_{\varrho i} \theta_{rs} \left(\frac{\partial^2 \overline{x}_i}{\partial u_r \partial u_s} \right)_0 = 0$$

relations qui expriment que le point de coordonnées homogènes

$$\overline{\xi}_i = \sum_{r,s=1}^{k} \theta_{rs} \left(\frac{\partial^2 \overline{x}_i}{\partial u_r \partial u_s} \right)_0 \qquad (i = 0, 1, \quad n)$$

par rapport au repère fixe, se trouve dans le plan tangent et qu'on a par conséquent

$$(27) \qquad \sum_{r,s=1}^{k} \theta_{rs} \frac{\partial^2 \overline{x}_i}{\partial u_r \partial u_s} + \sum_{i=1}^{k} \theta_r \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial u_r} + \theta \overline{x}_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ . n)$$

en supprimant l'indice 0.

Il n'y aura évidemment qu'une seule relation de la forme (27) car autrement, s'il y en evait deux, en remontant en sens inverse nous aurons tiré deux relations de la forme (24) ce qui est contre les hypothèses.

Les variétés appartenant à cette catégorie sont donc les variétés que M: Bersano [1]) appelle des variétés Φ, par généralisation du nom de variétés Φ donné au v_2 de cette espèce par C. Segre [2]), qui dans le même travail a donné lui-même un aperçu très général sur ces variétés, en donnant entre autres une définition géométrique du cône ayant dans un E_k pour équations

$$\theta_{rs} \xi_r \xi_s = o$$

qu'il appelle *le cône caractéristique.*

16^0 — Il résulte ainsi des deux paragraphes précédent que *si une variété v_k n'est pas une variété* Φ (les variétés V_k applicables avec G_3 sur v_k ne le seront pas non plus, en vertu des équations de la G_3) *la proposition* B *se trouve vérifiée pour h* = 3.

Il nous sera facile de montrer que chaque fois que la proposition B se trouve vérifiée pour $h = 3$, la propriété C se vérifiera elle-même pour $h = 4$.

Supposons, en effet, que deux variétés, pour lesquelles nous sachions que la propriété B se trouve vérifiée, sont applicables l'une

1) Bersano. (2) p. 261.
2) Segre. (16) p. 1079.

sur l'autre avec contact de Čech de 4^{me} ordre (Γ_4) en un certain couple de points correspondants; il y a par hypothèse une homographie qui amène les deux variétés à avoir un contact analytique du 3^{me} ordre et par conséquent telle qu'on ait après le déplacement les relations (11) avec $\varkappa = o$; on a en vertu de ces relations et tenant compte de la relation

$$(28) \qquad D_4 X_i = \lambda D_4 x_i + \mu D_3 x_i + \nu D_2 x_i + \theta D_1 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui exprime le contact de Čech de 4^{me} ordre, en identifiant

$$\lambda = 1, \quad \mu = \nu = o$$

$$\theta = 4 \sum_{r,s,t,q=1}^{k} \delta_{rstq}\, u_r'\, u_s'\, u_t'\, u_q'$$

d'où les relations (12), ce qui démontre le théorème.

Pour toutes les variétés autres que les variétés Φ, *le théorème de* Čech (propriété C, § 8^0) *est vérifié pour* $h = 4$.

17^0 — Revenons aux variétés Φ. Nous pourrons toujours par un déplacement convenable des sommets $A_1, A_2, \ldots, A_k$ du repère nous arranger de manière que la relation (24) unique ait la forme

$$m_{11\varrho} - m_{22\varrho} - \cdots - m_{kk\varrho} = 0,$$

et par une modification appropriée des sommets $A_{k+1}, \ldots, A_n$, de manière qu'on ait

$$(29) \begin{cases} \varphi^{(2)}_{(jj)} = x_1^2 + x_j^2, & \varphi^{(2)}_{(1j)} = 2\, x_1\, x_j \\ \varphi^{(2)}_{(jl)} = 2\, x_j\, x_l\,; & \varphi^{(2)}_{\lambda} = o \end{cases}$$

$$(j \neq l, \quad j\ l = 2, \ldots k \qquad \lambda > k + Q)$$

où l'on a désigné par

$$(22), (33), \ldots, (k\,k), (12), \ldots, (1\,k), \ldots, (k-1, k)$$

les indices

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2k-1,\ 2k \ldots,\ 3k-1, \ldots\ k+Q$$

Si nous prenons enfin comme nouveau sommets $A_{(ij)}$ les points

$$\overline{A}_{(ij)} = A_{(ij)} + \varkappa_{ij} A$$

nous annulerons tous les $\overline{\varkappa}_{ij}$ (sauf $\overline{\varkappa}_{11}$) et si nous posons

$$\overline{\varkappa}_{11} = -2\varkappa.$$

le système (18) de la G_3 s'écrira sous la forme

$$(30)\left\{\begin{array}{l} F_i = 0,\ E_\varrho = 0,\ F_\lambda = 0 \\ E_{ii} - E_{00} = 0,\ E_{ij} = 0,\ E_{i\varrho} = 0,\ F_{i\gamma} = 0\ (i \neq j) \\ E_{\varrho\varrho} - E_{00} = 0,\ E_{\varrho 0} = 0 \qquad (\sigma \neq \varrho) \\ E_{10} = 3\varkappa\,\omega_1,\ E_{j0} = -\varkappa\,\omega_j \\ E_{(1h)1} = -\varkappa\,\omega_h,\ E_{(he)1} = 0 \\ E_{(jj)j} = -2\varkappa\,\omega_j\ ,\ E_{(1j)j} = \varkappa\,\omega_j\ ,\ E_{(hl)j} = 0,\ E_{(lj)j} = -\varkappa\,\omega_l\ , \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{lll} i, k \neq j & l = 1, 2, \ldots, k\ ; & k < \rho,\ \sigma \leq k + Q \\ & j = \ 2, \ldots\ k\ ; & \lambda > k + Q \end{array}\right)$$

si dans ses équations ou fait $\varkappa = 0$, on obtient le système de la C_3.

18⁰.—D'après un théorème énoncé plus haut (§ 4⁰), les formes $\varphi_\varrho^{(3)}$ ont pour $\varrho > k + Q$, des dérivées partielles qui sont toutes des combinaisons linéaires des formes (29); ces formes $\varphi_\varrho^{(3)}$ seront alors elles-mêmes des combinaisons des formes suivantes :

$$x_1^3 + 3\,x_1\,x_j^2, \qquad x_j^3 + 3\,x_1^2\,x_j\ , \qquad 3\,x_j\,(x_1^2 + x_h^2),$$
$$6\,x_1\,x_j\,x_h\ , \qquad 6\,x_j\,x_h\,x_l\ .$$
$$\left(\begin{array}{l} j, h, l \ \text{ différents entre eux} \\ \qquad = 2, \ldots, k \end{array}\right).$$

Nous ne considérerons que des variétés Φ que nous appellerons *exceptionnelles* pour lesquelles le nombre de dimensions de l'espace 3-tangent (§ 4⁰) est maximum c'est à dire :

$$R = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+4)\,;$$

on pourra dans ce cas choisir les sommets $A_{k+Q+1}, \ldots, A_{k+Q+R}$, A_μ $(\mu > k + Q + R)$ de manière que

$$(31)\left\{\begin{array}{l} \varphi^{(3)}_{k+Q+1} = x_1^3 + 3\,x_1\,x_2^2,\ \varphi^{(3)}_{k+Q+2} = x_1^3 + 3\,x_1\,x_3^2, \ldots \\ \qquad \ldots, \varphi^{(3)}_{k+Q+R} = 6\,x_{k-2}\,x_{k-1}\,x_k\ ,\ \varphi_\mu = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\mu > k + Q + R) \end{array}\right.$$

Pour plus de clarté nous allons faire $k = 3$. On aura alors d'après (29) et conformément aux relations (2)

$$\omega_{14} = \omega_1 \ , \ \omega_{15} = \omega_1 \ , \ \omega_{16} = \omega_2 \ , \ \omega_{17} = \omega_3 \ , \ \omega_{18} = 0$$
$$\omega_{24} = \omega_2 \ , \ \omega_{25} = 0 \ , \ \omega_{26} = \omega_1 \ , \ \omega_{27} = 0 \ , \ \omega_{28} = 0$$
$$\omega_{34} = 0 \ , \ \omega_{35} = \omega_3 \ , \ \omega_{36} = 0 \ , \ \omega_{37} = \omega_1 \ , \ \omega_{38} = \omega_2$$

et de même d'après (31) et (4)

$$\omega_{49} = \omega_1 \ , \ \omega_{59} = 0 \ , \ \omega_{69} = \omega_2 \ , \ \omega_{79} = 0 \ , \ \omega_{89} = 0$$
$$\omega_{4,10} = 0 \ , \ \omega_{5,10} = \omega_1 \ , \ \omega_{6,10} = 0 \ , \ \omega_{7,10} = \omega_3 \ , \ \omega_{8,10} = 0$$
$$\omega_{4,11} = \omega_2 \ , \ \omega_{5,11} = 0 \ , \ \omega_{6,11} = \omega_1 \ , \ \omega_{7,11} = 0 \ , \ \omega_{8,11} = 0$$
$$\omega_{4,12} = 0 \ , \ \omega_{5,12} = \omega_3 \ , \ \omega_{6,12} = 0 \ , \ \omega_{7,12} = \omega_1 \ , \ \omega_{8,12} = 0$$
$$\omega_{4,13} = 0 \ , \ \omega_{5,13} = \omega_2 \ , \ \omega_{6,13} = \omega_1 \ , \ \omega_{7,13} = 0 \ , \ \omega_{8,13} = \omega_3$$
$$\omega_{4,14} = \omega_3 \ , \ \omega_{5,14} = 0 \ , \ \omega_{6,14} = 0 \ , \ \omega_{7,14} = \omega_1 \ , \ \omega_{8,14} = \omega_2$$
$$\omega_{4,15} = 0 \ , \ \omega_{5,15} = 0 \ , \ \omega_{6,15} = \omega_3 \ , \ \omega_{7,15} = \omega_2 \ , \ \omega_{8,15} = \omega_1$$
$$\omega_{\gamma,\mu} = 0 \qquad (\lambda = 4, 5, .., 8 \ ; \mu > 15),$$

Nous en tirerons par dérivation extérieure les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega_{44} - 2\omega_{11} + \omega_{00} + \omega_{54} &= a_4\omega_1 + b_4\omega_2 + c_4\omega_3 \\
\omega_{64} - \omega_{12} - \omega_{21} &= b_4\omega_1 + e_4\omega_2 + f_4\omega_3 \\
\omega_{74} - \omega_{31} &= c_4\omega_1 + f_4\omega_2 + g_4\omega_3 \\
\omega_{44} - 2\omega_{22} + \omega_{00} &+ e_4\omega_1 + h_4\omega_2 + i_4\omega_3 \\
\omega_{84} - \omega_{32} &= f_4\omega_1 + i_4\omega_2 + j_4\omega_3 \\
\omega_{54} &= g_4\omega_1 + j_4\omega_2 + l_4\omega_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{45} \ \ \omega_{55} - 2\omega_{11} + \omega_{00} &= a_5\omega_1 + b_5\omega_2 + c_5\omega_3 \\
\omega_{65} - \omega_{21} &= b_5\omega_1 + e_5\omega_2 + f_5\omega_3 \\
\omega_{75} - \omega_{13} - \omega_{31} &= c_5\omega_1 + f_5\omega_2 + g_5\omega_3 \\
\omega_{45} &= e_5\omega_1 + h_5\omega_2 + i_5\omega_3 \\
\omega_{85} - \omega_{23} &= f_5\omega_1 + i_5\omega_2 + j_5\omega_3 \\
\omega_{55} - 2\omega_{33} + \omega_{00} &= g_5\omega_1 + j_5\omega_2 + l_5\omega_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{46} + \omega_{56} - 2\omega_{12} &= a_6\omega_1 + b_6\omega_2 + c_6\omega_3 \\
\omega_{66} - \omega_{22} - \omega_{11} + \omega_{00} &= b_6\omega_2 + e_6\omega_2 + f_6\omega_3 \\
\omega_{76} - \omega_{32} &= c_6\omega_1 + f_6\omega_2 + g_6\omega_3 \\
\omega_{46} - 2\omega_{21} &= e_6\omega_1 + h_6\omega_2 + i_6\omega_3 \\
\omega_{86} - \omega_{31} &= f_6\omega_1 + i_6\omega_2 + j_6\omega_3 \\
\omega_{56} &= g_6\omega_1 + j_6\omega_2 + l_6\omega_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{47} + \omega_{57} - 2\omega_{13} &= a_7\omega_1 + b_7\omega_2 + c_7\omega_3 \\
\omega_{67} - \omega_{23} &= b_7\omega_1 + e_7\omega_2 + f_7\omega_3 \\
\omega_{77} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{00} &= c_7\omega_1 + f_7\omega_2 + g_7\omega_3 \\
\omega_{47} &= e_7\omega_1 + h_7\omega_2 + i_7\omega_3 \\
\omega_{87} - \omega_{21} &= f_7\omega_1 + i_7\omega_2 + j_7\omega_3 \\
\omega_{57} - 2\omega_{31} &= g_7\omega_1 + j_7\omega_2 + l_7\omega_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{48}+\omega_{58} &= a_8\omega_1+b_8\omega_2+c_8\omega_3\\
\omega_{68}-\omega_{13} &= b_8\omega_1+e_8\omega_2+f_8\omega_3\\
\omega_{78}-\omega_{12} &= c_8\omega_1+f_8\omega_2+g_8\omega_3\\
\omega_{48}-2\omega_{23} &= e_8\omega_1+h_8\omega_2+i_8\omega_3\\
\omega_{88}-\omega_{33}-\omega_{22}+\omega_{00} &= f_8\omega_1+i_8\omega_2+j_8\omega_3\\
\omega_{58}-2\omega_{32} &= g_8\omega_1+j_8\omega_2+l_8\omega_3
\end{aligned}$$

et par une nouvelle dérivation extérieure de ces relations on se rend compte qu'on peut annuler tous les a_i, b_i, ... , l_i *ce qui revient d'ailleurs à la possibilité du choix d'un repère tel que* $\varphi_\rho^{(3)}=o$ $(4\leq\rho\leq 8)$ (cf. § 2°).

Les équations

$$E_{10}=3\varkappa\,\omega_1\ ,\ E_{20}=-\varkappa\,\omega_2\ ,\ E_{30}=-\varkappa\,\omega_3$$

qui figurent parmi les équations (30) nous donneront par dérivation extérieure, en tenant compte de toutes ces relations et du choix simplifié du repère (r),

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
3d\varkappa+E_{40}+E_{50}-6\varkappa\,\overline{\omega_{11}-\omega_{00}} &= A_0\omega_1+B_0\omega_2+C_0\omega_3\\
E_{60}-2\varkappa\,\omega_{12} &= B_0\omega_1+F_0\omega_2+F_0\omega_3\\
E_{70}-2\varkappa\,\omega_{14} &= C_0\omega_1+F_0\omega_2+G_0\omega_3\\
-d\varkappa+E_{40}+2\varkappa\,\overline{\omega_{11}-\omega_{00}} &= E_0\omega_1+H_0\omega_2+I_0\omega_3\\
E_{80} &= F_0\omega_1+I_0\,\omega_2+J_0\omega_3\\
-d\varkappa+E_{50}+2\varkappa\,\overline{\omega_{11}-\omega_{00}} &= G_0\omega_1+J_0\,\omega_2+L_0\omega_3;
\end{aligned}\right.$$

si $\varkappa=o$, c'est à dire dans le cas de la C_3, on a

$$A_0=F_0+G_0,\ B_0=H_0+J_0,\ C_0=I_0+L_0$$

Le système formé par (30) et (32) est en involution. On le démontrera en prenant les équations extérieures (les seules qui ne soient pas identiquement nulles) des groupes suivants :

$$\begin{array}{rl}
\text{I} & E_{44}-E_{00}=o\ ,\ E_{54}=o\ ,\ E_{64}=o\ ,\ E_{74}=o\ ,\ F_{84}=o\\
\text{II} & E_{45}=o\ ,\ E_{55}-E_{00}=o\ ,\ E_{65}=o\ ,\ E_{75}=o\ ,\ E_{85}=o.\\
\text{III.} & E_{46}=o\ ,\ E_{56}=o\ ,\ E_{66}-E_{00}=o\ ,\ E_{76}=o\ ,\ E_{86}=o.\\
\text{IV.} & E_{47}=o\ ,\ E_{57}=o\ ,\ E_{67}=o\ ,\ E_{77}-E_{00}=o\ ,\ E_{87}=o\\
\text{V} & E_{48}=o\ ,\ E_{58}=o\ ,\ E_{68}=o\ ,\ E_{78}=o\ ,\ E_{88}-E_{00}=o.\\
\text{VI} & E_{41}=o\ ,\ E_{51}=o\ ,\ E_{61}=-\varkappa\omega_2\ ,\ E_{71}=-\varkappa\omega_3\ ,\ E_{81}=o\\
\text{VII} & E_{42}=-2\varkappa\omega_2\ ,\ E_{52}=o\ ,\ F_{62}=\varkappa\,\omega_1\ ,\ E_{72}=o\ ,\ E_{82}=-\varkappa\omega_3\\
\text{VIII.} & E_{43}=o\ ,\ E_{53}=-2\varkappa\omega_3\ ,\ F_{63}=o\ ,\ E_{73}=\varkappa\omega_1\ ,\ E_{83}=-\varkappa\omega_2
\end{array}$$

et des équations (32).

Les équations extérieures de chacun des groupes I—VIII se mettent toujours sous la forme.

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{ll} [\omega_1 E_i] & +[\omega_2 H_i]+[\omega_3 I_i]=o \\ [\omega_1 G_i] & +[\omega_2 J_i]+[\omega_3 L_i]=o \\ [\omega_1 (H_i+J_i)] & +[\omega_2 F_i]+[\omega_3 F_i]=o \\ [\omega_1 (I_i+L_i)] & +[\omega_2 F_i]+[\omega_3 G_i]=o \\ [\omega_1 F_i] & +[\omega_2 I_i]+[\omega_3 J_i]=o \end{array}\right. \qquad (i=1,\ldots,8)$$

où toutes les formes $E_1, \ldots, L_8$ sont linéairement indépendantes. Chacun des groupes I—VIII est ainsi en involution avec $s_2 = 2$,

Les équations extérieures du système (32) s'écriront par contre si $\varkappa \neq 0$, sous la forme

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} [\omega_1 A_0]+[\omega_2 B_0]+[\omega_3 C_0]=o \\ [\omega_1 B_0]+[\omega_2 E_0]+[\omega_3 F_0]=o \\ [\omega_1 C_0]+[\omega_2 F_0]+[\omega_3 G_0]=o \\ [\omega_1 E_0]+[\omega_2 H_0]+[\omega_3 I_0]=o \\ [\omega_1 F_0]+[\omega_2 I_0]+[\omega_3 J_0]=o \\ [\omega_1 G_0]+[\omega_2 J_0]+[\omega_3 L_0]=o \end{array}\right.$$

et ce système est en involution avec $s_3 = 1$.

Ainsi pour $k=3$, *le système différentiel qui donne les variétés* V_k *applicables avec contact géométrique du* 3^{me} *ordre sur une variété* v_k *appartenant à l'espèce* Φ *exceptionnelle admet des solutions dépendant d'une fonction arbitraire de* k *arguments.*

Si $\varkappa = o$ on a au contraire.

$$A_0 = E_0 + G_0,\ B_0 = H_0 + J_0,\ C_0 = I_0 + L_0$$

et le système (34) a lui aussi la forme (33).

Pour $k = 3$, *les solutions du système différentiel qui donne les variétés* V_k *applicable avec contact analytique du* 3^{me} *ordre sur une variété* v_k *appartenant à l'espèce* Φ *exceptionnelle ne dépend que des fonctions arbitraires de* $k-1$ *arguments.*

Ces deux résultats sont très généraux; ils s'appliquent a toute valeur de k et montrent la différence essentielle entre l'applicabilité projective analytique et géométrique du 3^{me} ordre des variétés Φ exceptionnelles.

19°.—Proposons-nous maintenant de voir si le théorème de Cech est valable pour les var étés Φ exceptionnelles.

Nous reviendrons pour cela aux considérations du § 13°; cette fois (R) designera le repère avec lequelvient coïncider (r)

par l'homographie qui réalise le contact de Čech du 4[me] ordre et en même temps un contact géométrique du 3[me], ce qui est possible d'après les résultats de M. Bersano (§ 12⁰). On aura alors les relations (11) et nous déduirons cette tois de (28) en tenant compte de (11)

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad \nu = 6 \sum_{r\, s=1}^{k} \chi_{rs}\, u_r'\, u_s',$$

$$\Theta = 12 \sum_{r,\, s=1}^{k} \chi_{rs}\, u_r'\, u_s'' + 4 \sum_{r,\, s,\, t=1}^{k} \delta_{rst}\, u_r'\, u_s'\, u_t'$$

et on aura par conséquent (11) et

$$\frac{\partial^4 X_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t\, \partial u_q} = \frac{\partial^4 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t\, \partial u_q} + \chi_{rs} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_t\, \partial u_q} + \chi_{st} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_q} +$$

$$\chi_{tr} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_s\, \partial u_q} + \chi_{tq} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s} + \chi_{rq} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_s\, \partial u_t} + \chi_{sq} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_t\, \partial u_r} +$$

$$+ \delta_{rst} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} + \delta_{stq} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \delta_{tqr} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \delta_{qrs} \frac{\partial x_i}{\partial u_t}\,.$$

En tenant compte de ces relations nous aurons comme précédemment (§ 13⁰) le développement suivant

$$X_i = (x_i)_0 + \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\right)_0 (u_r - u_r^0) + \sum_{r,s=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s}\right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0) +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{r,s,t=1}^{k} \left(\frac{\partial^3 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t} + \chi_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial u_t} + \chi_{st} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \chi_{tr} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \right)_0$$

$$(u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)(u_t - u_t^0) +$$

$$+ \frac{1}{24} \sum_{r,s,t,q=1}^{k} \left(\frac{\partial^4 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t\, \partial u_q} + \chi_{rs} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_t\, \partial u_q} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \delta_{rstq} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} + \quad + \delta_{qrs} \frac{\partial x_i}{\partial u_t} \right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)(u_t - u_t^0)(u_q - u_q^0) +$$

et par conséquent

$$\Delta X_i = -\frac{1}{2} \sum_{r,s,t} \left(\chi_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial u_t} + \chi_{st} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \chi_{tr} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)\, du_t^0 +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{r,s,t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_t}\, d\chi_{rs} + \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\, d\chi_{st} + \frac{\partial x_i}{\partial u_s}\, d\chi_{tr} \right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)(u_t - u_t) -$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{r,s,t,q} \left(\chi_{rq} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_t\, \partial u_s} + \chi_{sq} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_t} + \chi_{tq} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s} + \right.$$

$$\left. + \delta_{rst} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} + \ldots \right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)(u_t - u_t^0)\, du_q^0 + .$$

et avec le choix du § 11⁰.

$$\Delta X_i = -\tfrac{1}{2} \sum_{r,s,t} (\chi_{rs}\,\varepsilon_{it} + \chi_{st}\,\varepsilon_{ir} + \chi_{ir}\,\varepsilon_{ts})\, x_r\, x_s\, \omega_t +$$

$$+\tfrac{1}{6} \sum_{r,s,t} (\varepsilon_{it}\, d\chi_{rs} + \varepsilon_{ir}\, d\chi_{st} + \varepsilon_{is}\, d\chi_{tr})\, x_r\, x_s\, x_t -$$

$$-\tfrac{1}{6} \sum_{r,s,t,q} (\chi_{rq}\, m_{tsi} + \chi_{sq}\, m_{rti} + \chi_{tq}\, m_{rsi} +$$

$$+ \delta_{rst}\,\varepsilon_{iq} + \delta_{stq}\,\varepsilon_{ir} + \delta_{tqr}\,\varepsilon_{is} + \delta_{qrs}\,\varepsilon_{it})\, x_r\, x_s\, x_t\, \omega_q + \ldots$$

où $n_{rti} = o$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, et les $m_{rt\varrho}$ $(\varrho = k+1, \ldots, n)$ sont les coéfficients qui figurent dans les formes $\varphi^{(2)}_{\varrho}$ (17). En faisant l'identification avec (15) par l'intermédiaire de (16 bis) jusqu'aux termes du 2^0 ordre en $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nous retrouverons évidemment les équations (18) de la G'_3 tandis que l'identification des termes du 3^{me} ordre nous donnera des nouvelles relations, que nous écrirons, pour fixer les idées pour $k = 3$, pour les variétés Φ exceptionnelles avec le choix simplifié du repère (r) et des quantités χ_{ij}, comme il suit:

$$(35)\quad \begin{cases}
-E_{91} - E_{10,1} + 3E_{40} + 3E_{50} = 3\,d\chi - 4\,\delta_{111}\,\omega_1 - 3\,\delta_{112}\,\omega_2 - 3\,\delta_{113}\,\omega_3 \\
-E_{11,1} - E_{13,1} + 2E_{60} = -3\,\delta_{112}\,\omega_1 - 2\,\delta_{122}\,\omega_2 - 2\,\delta_{123}\,\omega_3 \\
-E_{12,1} - E_{14,1} + 2E_{70} = -3\,\delta_{113}\,\omega_1 - 2\,\delta_{123}\,\omega_2 - 2\,\delta_{133}\,\omega_3 \\
-E_{91} + E_{40} = -2\,\delta_{122}\,\omega_1 - \delta_{222}\,\omega_2 - \delta_{223}\,\omega_3 \\
-E_{15,1} + E_{80} = -2\,\delta_{123}\,\omega_1 - \delta_{223}\,\omega_2 - \delta_{233}\,\omega_3 \\
-E_{10,1} + E_{50} = -2\,\delta_{133}\,\omega_1 - \delta_{233}\,\omega_2 - \delta_{233}\,\omega_3 \\
-E_{11,1} = -\delta_{122}\,\omega_1 \\
-E_{14,1} = -\delta_{223}\,\omega_1 \\
-E_{13,1} = -\delta_{233}\,\omega_1 \\
-E_{12,1} = -\delta_{333}\,\omega_1 \\
\\
-E_{92} - E_{10,2} = -\delta_{111}\,\omega_2 \\
-E_{11,2} - E_{13,2} + E_{40} + E_{50} = 2\,d\chi - \delta_{111}\,\omega_1 - 2\,\delta_{112}\,\omega_2 - \delta_{113}\,\omega_3 \\
-E_{12,2} - E_{14,2} = -\delta_{113}\,\omega_2 \\
-E_{92} + 2E_{60} = -2\,\delta_{112}\,\omega_1 - 3\,\delta_{122}\,\omega_2 - 2\,\delta_{123}\,\omega_3 \\
-E_{15,2} + E_{70} = -\delta_{113}\,\omega_1 - 2\,\delta_{123}\,\omega_2 - \delta_{133}\,\omega_3 \\
-E_{10,2} = -\delta_{133}\,\omega_2 \\
-E_{11,2} + 3E_{40} = -3\,\delta_{122}\,\omega_1 - 4\,\delta_{222}\,\omega_2 - 3\,\delta_{223}\,\omega_3 \\
-E_{14,2} + 2E_{80} = -2\,\delta_{123}\,\omega_1 - 3\,\delta_{223}\,\omega_2 - 2\,\delta_{233}\,\omega_3 \\
-E_{13,2} + E_{50} = -\delta_{133}\,\omega_1 - 2\,\delta_{233}\,\omega_2 - \delta_{333}\,\omega_3 \\
-E_{12,2} = -\delta_{333}\,\omega_2
\end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
-E_{93}-E_{10,3} & = -\delta_{111}\,\omega_3 \\
-E_{11,3}-E_{13,3} & = -\delta_{112}\,\omega_3 \\
-E_{12,3}-E_{14,3}+E_{40}+E_{50} & = 2\,a\,\chi-\delta_{111}\,\omega_1-\delta_{112}\,\omega_2-2\,\delta_{113}\,\omega_3 \\
-E_{93} & = -\delta_{122}\,\omega_3 \\
-E_{15,3}+E_{60} & = -\delta_{112}\,\omega_1-\delta_{122}\,\omega_2-2\,\delta_{123}\,\omega_3 \\
-E_{10,3}+2\,E_{70} & = -2\,\delta_{113}\,\omega_1-2\,\delta_{123}\,\omega_2-3\,\delta_{133}\,\omega_3 \\
-E_{11,3} & = -\delta_{222}\,\omega_3 \\
-E_{14,3}+E_{40} & = -\delta_{122}\,\omega_1-\delta_{222}\,\omega_2-2\,\delta_{223}\,\omega_3 \\
-E_{13,3}+2\,E_{80} & = -2\,\delta_{123}\,\omega_1-2\,\delta_{223}\,\omega_2-3\,\delta_{233}\,\omega_3 \\
-E_{12,3}+3\,E_{50} & = -3\,\delta_{133}\,\omega_1-3\,\delta_{233}\,\omega_2-4\,\delta_{333}\,\omega_3
\end{array}
\right. \tag{35}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
-E_{94}-E_{10,4}+3\,E_{10} & = -\chi\omega_1 \\
-E_{11,4}-E_{13,4}+E_{20} & = 0 \\
-E_{12,4}-E_{14,4}+E_{30} & = 0 \\
-E_{94}+E_{10} & = -\chi\omega_1 \\
-E_{15,4} & = 0 \\
-E_{10,4} & = 0 \\
-E_{11,4}+3\,E_{20} & = 0 \\
-E_{14,4}+E_{30} & = 0 \\
-E_{13,4} & = 0 \\
-E_{12,4} & = 0 \\
 & \\
-E_{95}-E_{10,5}+3\,E_{10} & = -\chi\,\omega_1 \\
-E_{11,5}-E_{13,5}+E_{20} & = 0 \\
-E_{12,5}-E_{14,5}+E_{30} & = 0 \\
-E_{95} & = 0 \\
-E_{15,5} & = 0 \\
-E_{10,5}+E_{10} & = -\chi\,\omega_1 \\
-E_{11,5} & = 0 \\
-E_{14,5} & = 0 \\
-E_{13,5}+E_{20} & = 0 \\
-E_{12,5}+3\,E_{30} & = 0 \\
 & \\
-E_{96}-E_{10,6} & = 0 \\
-E_{11,6}-E_{13,6}+2\,E_{10} & = -2\,\chi\,\omega_1 \\
-E_{12,6}-E_{14,6} & = 0 \\
-E_{96}+2\,E_{20} & = 0 \\
-E_{15,6}+E_{30} & = 0 \\
-E_{10,6} & = 0 \\
-E_{11,6} & = 0 \\
-E_{14,6} & = 0 \\
-E_{13,6} & = 0 \\
-E_{12,6} & = 0
\end{array}
\right. \tag{36}
$$

$$
(36)\quad \left\{
\begin{array}{llcl}
-\,E_{.7} & -\,E_{10\,7} & = & o \\
-\,E_{11,7} & -\,E_{13,7} & = & o \\
-\,E_{2,7} & -\,E_{14,7} + 2\,E_{10} & = & -\,2\,\chi\,\omega_1 \\
 & -\,E_{97} & = & o \\
 & -\,E_{15,7} + E_{20} & = & o \\
 & -\,E_{10,7} + 2\,E_{30} & = & o \\
 & -\,E_{11,7} & = & o \\
 & -\,E_{14,7} & = & o \\
 & -\,E_{13,7} & = & o \\
 & -\,E_{12,7} & = & o \\[1ex]
-\,E_{.8} & -\,E_{10,8} & = & o \\
-\,E_{11,8} & -\,E_{13,8} & = & o \\
-\,E_{12,8} & -\,E_{14\,8} & = & o \\
 & -\,E_{98} & = & o \\
 & -\,E_{15,8} + E_{10} & = & -\,2\,\chi\,\omega_1 \\
 & -\,E_{10,8} & = & o \\
 & -\,E_{11,8} & = & o \\
 & -\,E_{14,8} + E_{20} & = & o \\
 & -\,E_{13,8} + E_{30} & = & o \\
 & -\,E_{12,8} & = & o \\[1ex]
\multicolumn{4}{l}{E_{\alpha\alpha} - E_{00} = o \quad , \quad E_{\alpha\beta} = o} \\
\multicolumn{4}{l}{\qquad E_{\alpha\lambda} = o. \qquad \left(\begin{array}{c}\alpha \neq \beta, \quad \alpha\ \beta = 9, 10, \dots, 15 \\ \lambda > 15\end{array}\right)}
\end{array}
\right.
$$

on voit tout de suite du groupe de relations (36) et de (30) que l'on a $\chi = o$. *Pour les variétés Φ exceptionnelles le contact géométrique du 3^{me} ordre subordonné à un contact de Čech du 4^{me} ordre est nécessairement un contact analytique du 3^{me} ordre.*

Nous pouvons alors appliquer la remarque du § 16^0 et conclure que *pour les variétés Φ exceptionnelles le théorème de Čech est vérifié pour $h = 4$.*

On peut même aller un peu plus loin. Nous tirons, en effet, des relations (35) les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
-\,2\,E_{40} - 2\,E_{50} &= (4\,\delta_{111} - 2\,\delta_{122} - 2\,\delta_{133})\,\omega_1 + (3\,\delta_{112} - \delta_{222} - \delta_{233})\,\omega_2 + \\
&\quad + (3\,\delta_{113} - \delta_{223} - \delta_{333})\,\omega_3 \\
-\,2\,E_{60} &= (3\,\delta_{112} - \delta_{222} - \delta_{233})\,\omega_1 + 2\,\delta_{122}\,\omega_2 + 2\,\delta_{123}\,\omega_3 \\
-\,2\,E_{70} &= (3\,\delta_{113} - \delta_{223} - \delta_{333})\,\omega_1 + 2\,\delta_{123}\,\omega_2 + 2\,\delta_{133}\,\omega_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2E_{60} &= 2\delta_{112}\omega_1 + (3\delta_{122} - \delta_{111} + \delta_{133})\omega_2 + 2\delta_{123}\omega_3 \\
-2E_{40} &= (3\delta_{122} - \delta_{111} + \delta_{133})\omega_1 + (4\delta_{222} - 2\delta_{112} + 2\delta_{233})\omega_2 \\
&\qquad + (3\delta_{223} - \delta_{113} + \delta_{333})\omega_3 \\
-2E_{80} &= 2\delta_{123}\omega_1 + (3\delta_{223} - \delta_{113} + \delta_{333})\omega_2 + 2\delta_{233}\omega_3 \\[1ex]
-2E_{70} &= 2\delta_{113}\omega_1 + 2\delta_{123}\omega_2 + (3\delta_{123} - \delta_{111} + \delta_{122})\omega_3 \\
-2E_{80} &= 2\delta_{123}\omega_1 + 2\delta_{223}\omega_2 + (3\delta_{233} - \delta_{112} + \delta_{222})\omega_3 \\
-2F_{50} &= (3\delta_{133} - \delta_{111} + \delta_{122})\omega_1 + (3\delta_{233} - \delta_{112} + \delta_{222})\omega_2 \\
&\qquad + (4\delta_{333} - 2\delta_{113} + 2\delta_{223})\omega_3
\end{aligned}
$$

Par la comparaison de ces relations nous déduirons facilement.

$$
\delta_{111} = \delta_{122} + \delta_{133}\ ;\ \delta_{112} = \delta_{222} + \delta_{233}\ ;\ \delta_{113} = \delta_{223} + \delta_{333}
$$

et si nous prenons comme nouveaux sommets du repère (r) les points:

$$
\begin{gathered}
\overline{A}_9 = A_9 + \delta_{122} A,\ \overline{A}_{10} = A_{10} + \delta_{133} A,\ \overline{A}_{11} = A_{11} + \delta_{222} A,\ \overline{A}_{12} = A_{12} + \delta_{333} A, \\
\overline{A}_{13} = A_{13} + \delta_{233} A,\ \overline{A}_{14} = A_{14} + \delta_{223} A,\ \overline{A}_{15} = A_{15} + \delta_{123} A,
\end{gathered}
$$

les autres sommets restant inchangés (ce qui revient à faire une certaine homographie sur v_3, qui ne change pas les hypothèses), les nouveaux $\overline{\delta}_{ijk}$ seront tous nuls et le contact du 4^e ordre sera analytique. *La propriété* B (§ 8^0) *se trouve elle aussi vérifiée au* 4^{me} *ordre pour les variétés* Φ *exceptionnelles.*

Le cas des variétés Φ n'appartenant pas à la classe exceptionnelle est plus compliqué. Nous reviendrons dans un autre travail.

CHAPITRE II

Propriétés projectives des courbes gauches

A. *Les repères attachés à une courbe gauche*

20^0.— Suivant la méthode générale indiquée dans le chapitre premier (§ 2^0) nous attacherons à une courbe C des repères determinés par ordres successifs de la manière suivante :

Au premier ordre le repère sera déterminé par les conditions.

$$
(37_1) \qquad \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \ldots = \tilde{\omega}_n = o
$$

en désignant dans ce chapitre par $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{\omega}_{ij}$ les composantes du mouvement instantané du repère. Les équations de la courbe par rapport à un tel repère auront la forme

$$x_\varrho = \alpha_\varrho^{(2)} x_1^2 + \ldots + \alpha_\varrho^{(i)} x_1^i + \ldots$$
$$(\rho = 2, 3 \ldots, n)$$

Pour déterminer le repère *au second ordre*, nous pourrons prendre

$$\alpha_2^{(2)} = 1 \qquad \alpha_\sigma^{(2)} = o \qquad (\sigma \geqq 3)$$

ce qui revient à poser

$$(37_2) \qquad \tilde\omega_{12} = \tilde\omega_1, \qquad \tilde\omega_{13} = \tilde\omega_{14} = \ldots = \tilde\omega_{1n} = o,$$

cette particularisation n'etant pas possible pour les lignes droites.

Au trosième ordre nous poserons les conditions nouvelles

$$(37_3) \quad \tilde\omega_{22} - 2\tilde\omega_{11} + \tilde\omega_{00} = o \quad \tilde\omega_{32} = \tilde\omega_{12} \quad \tilde\omega_{24} = \ldots = \tilde\omega_{2n} = o$$

cette particularisation excluant les courbes planes

... etc. ... etc. ... etc. ...

D'une manière générale *au* p^{me} *ordre* figurerons les $n-1$ nouvelles conditions $(p \leq n+1)$

$$(37_p) \left\{ \begin{array}{l} \tilde\omega_{p-1,1} - C^1_{p-1}\tilde\omega_{p-2,1} + C^2_{p-1}\tilde\omega_{p-3,0} = o \\ \tilde\omega_{p-1,3} - C^1_{p-2}\tilde\omega_{p-2,2} + C^2_{p-2}\tilde\omega_{p-3,1} - C^3_{p-2}\tilde\omega_{p-4,0} = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde\omega_{p-1,i} - C^1_{p-i+1}\tilde\omega_{p-2,i-1} + C^2_{p-i+1}\tilde\omega_{p-3,i-2} - \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^i C^i_{p-i+1}\tilde\omega_{p-i-1,0} = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde\omega_{p-1,p-1} - 2\tilde\omega_{p-2,p-2} + \tilde\omega_{p-3,p-3} = o \\ \tilde\omega_{p-1,p} = \tilde\omega_{p-2,p-1} \qquad (p \leqq n) \\ \tilde\omega_{p-1,k} = o \qquad (k \geqq p+1, \ p < n) \end{array} \right.$$

où C_r^s sont les nombres binomiaux et $C_r^s = o$ pour $s > r$;

.... etc. ... etc. ... etc. ...

Enfin *au* $(n+2)^{me}$ *ordre* nous ajouterons les nouvelles conditions

$$(37_{n+2}) \left\{ \begin{array}{l} -C^1_{n+1}\tilde\omega_{n1} + C^2_{n+1}\tilde\omega_{n-1,o} = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -C^1_{n-i+3}\tilde\omega_{n,i-1} + C^2_{n-i+3}\tilde\omega_{n-1,i-2} - \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^i C^i_{n-i+3}\tilde\omega_{n-i+1,o} = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -3\tilde\omega_{n,n-1} + 3\tilde\omega_{n-1,n-2} - \tilde\omega_{n-2,n-3} = o \end{array} \right.$$

Les particularisations ainsi imposeés sont possibles pour toutes les *courbes gauches* de l'espace (c'est-à-dire celles qui ne sont pas entièrement situées dans un hyperplan E_{n-1}) en tout point *ordinaire* d'une telle courbe.

21°. — La dérivation extérieure des relations (37_{n+2}) donne en tenant compte de $(37_1) \ldots (37_{n+2})$ des nouvelles relations de la forme

$$(37_{n+3}) \quad \tilde{\omega}_{no} = a_2\,\tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\omega}_{n1} = a_3\,\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_{n,\,n-2} = a_n\,\tilde{\omega}_1$$

$a_2, a_3, \ldots, a_n$ étant des fonctions des paramètres dont dépend la position du repère mobile non encore déterminés au $(n+3)^{me}$ ordre et des coordonées du point correspondant de la courbe et de leurs dérivées par rapport à l'une d'elles jusqu'au $(n+3)^{me}$ ordre.

Cela étant si δ désigne un déplacement compatible avec (37_1), $(37_2) \ldots (37_{n+3})$ et laissant le sommet A fixe (par conséquent tel que $\tilde{\omega}_1(\delta) = o$), on aura en dérivant extérieurement (37_{n+3}) et posant $\tilde{\omega}_{ij}(\delta) = e_{ij}$

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta a_n = 3\,a_n \quad \overline{e_{11} - e_{00}} \\ \delta a_n = 4\,a_{n-1}\,\overline{e_{11} - e_{00}} - \frac{n-2}{n}\,a_n\,e_{n\cdot n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta a_{n-i+1} = (i+2)\,a_{n-i+1}\,\overline{e_{11} - e_{00}} - \frac{(i-1)\,(n-i)}{n}\,a_{n-i+2}\,e_{n,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta a_2 = (n+1)\,a_2\,\overline{e_{11} - e_{00}} - \frac{n-2}{n}\,a_3\,e_{n,\,n-1} \end{array} \right.$$

En général, en un point ordinaire de la courbe on aura $a_n \neq o$.

Un point sera dit *singulier de 1^{re} espèce* si $a_n = o$, $a_{n-1} \neq o$; ou *singulier de 2^{de} espèce* si $a_n = a_{n-1} = o$, $a_{n-2} \neq o$;

.... etc. ... etc. ....

d'une manière générale un point sera dit *singulier de la i^{me} espèce* $(i \leqq n-2)$ si $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-i+1} = o$, $a_{n-i} \neq o$

... etc. ... etc. ... etc. ...

enfin il sera dit *sestatique* (ou de la $n-1^{me}$ espèce) si

$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_2 = o$$

D'une manière analogue nous appellerons *courbe singulière de la i^{me} espèce* une courbe qui aura tous ses points singuliers de i^{me} espèce. Ces courbes existent et dépendent de $n-i-1$ fonctions arbitraires d'un argument, comme il est facile de voir en écrivant le système différentiel qui les définit, qui se compose des relations (37_1), $(37_2), \ldots$, (37_{n+2}) et

$$\tilde{\omega}_{n,n-2} = \tilde{\omega}_{n\ n-3} = \ldots = \tilde{\omega}_{n,n-i+1} = o$$

et en montrant qu'il est en involution avec $s_1 = n - i - 1$.

Les courbes de 1[re] espèce sont connues dans un E_3. Ce sont celles dont les tangents appartiennent toutes à un complexe linéaire. Nous n'insisterons pas pour la démonstration. Ces courbes jouissent donc d'une propriéte géométrique d'ensemble qui malheureusement ne se généralise pas pour $n > 3$ aux courbes singulières définies précédement[1]). Il semble très difficile de trouver pour ces courbes une propriété géométrique globale; il faudra pour se rendre compte de la difficulté, trouver une deuxième propriété de cette nature aux courbes de E_3 dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Nous donnerons par contre plus loin plusieurs propriétés géométriques locales caractérisant les points singuliers d'espèce i.

Les courbes d'espèce $n-1$ (qu'on appelle aussi courbes normales) ont une définition simple; nous verrons que ce sont les courbes algébriques de degré n.

22°. — *Formules de Frenet.* Nous, nous servirons dans la suite aussi d'une autre particularisation du repère mobile qui se conserve par une trasformation dualistique; nous considérerons pour cela la courbe comme engendrée par ses *éléments osculateurs* définis par l'ensemble d'un point de la courbe, de la tangente en ce point, du E_2 osculateur en ce point, etc.. du E_{n-1} osculateur en ce point; une première détermination du repère consiste à faire coïncider le sommet A avec le point considéré de la courbe et à prendre le point A_1 sur la tangente, le point A_2 dans le E_2 osculateur,..., le sommet A_{n-1} dans le E_{n-1} osculateur. Celà entraine les conditions (qui existaient déjà avec le choix précédent).

$$(39_1) \qquad \tilde{\omega}_{ij} = o \quad (i < j-1,\ j = 2, 3, \ldots, n)$$

La dérivation extérieure de ces relations nous conduit à poser

$$\tilde{\omega}_{12} = \alpha_1 \tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_{23} = \alpha_2 \tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_{n-1,n} = \alpha_{n-1} \tilde{\omega}_1$$

1) Une telle propriété appartient en quelque sorte aux courbes étudiées par M Borel (*Sur l'équation adjointe* etc... A. F. N. 1892) qui sont différentes de celles que nous étudions.

et une nouvelle dérivation extérieure nous montre qu'on peut, *pour les courbes gauches*, déterminer le repère de manière que l'on ait

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 1.$$

c'est—à—dire

$$(39_2) \qquad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_{12} = \ldots = \tilde{\omega}_{n-1, n}$$

La dérivation extérieure de ces relations nous conduira de nouveau à poser

$$\tilde{\omega}_{22} - 2\tilde{\omega}_{11} + \tilde{\omega}_{00} = \beta_2 \tilde{\omega}_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{\omega}_{nn} - 2\tilde{\omega}_{n-1, n-1} + \tilde{\omega}_{n-2,n-2} = \beta_n \tilde{\omega}_1$$

et en suivant la même mèthode on pourra annuler $\beta_2, .., \beta_n$. On aura alors

$$(39_3) \qquad \tilde{\omega}_{11} - \tilde{\omega}_{00} = \tilde{\omega}_{22} - \tilde{\omega}_{11} = \ldots = \tilde{\omega}_{nn} - \tilde{\omega}_{n-1, n-1}$$

puis de nouveau par dérivation extérieure

$$\tilde{\omega}_{32} - 3\tilde{\omega}_{21} + 3\tilde{\omega}_{10} = \gamma_2 \tilde{\omega}_1$$
$$\tilde{\omega}_{43} - 3\tilde{\omega}_{32} + 3\tilde{\omega}_{21} - \tilde{\omega}_{10} = \gamma_3 \tilde{\omega}_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- 3\tilde{\omega}_{n, n-1} + 3\tilde{\omega}_{n-1, n-2} - \tilde{\omega}_{n-2, n-3} = \gamma_n \tilde{\omega}_1$$

et nous pourrons annuler $\gamma_2, .., \gamma_n$. Nous obtiendrons enfin par une autre dérivation extérieure

$$\tilde{\omega}_{42} - 4\tilde{\omega}_{31} + 6\tilde{\omega}_{20} = \varepsilon_2 \tilde{\omega}_1$$
$$\text{— — — — — — — — — —}$$
$$- 6\tilde{\omega}_{n, n-2} + 4\tilde{\omega}_{n-1, n-3} - \tilde{\omega}_{n-2, n-4} = \varepsilon_n \tilde{\omega}_1$$

A partir de maintenant deux cas sont à considérer :

I°. Tous les ε_i ne sont pas nuls. On peut alors poser

$$(39_4) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_{20} = \tilde{\omega}_{n, n-2} = \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_{31} = \tilde{\omega}_{42} = \ldots = \tilde{\omega}_{n-1, n-3} = 0 \end{cases}$$

et tirer en dérivant extérieurement, des relations de la forme

$$\tilde{\omega}_{30} = \chi_3 \tilde{\omega}_1 , \quad \tilde{\omega}_{41} = \chi_4 \tilde{\omega}_1 , \quad \ldots , \quad \tilde{\omega}_{n, n-3} = \chi_n \tilde{\omega}_1$$
$$\tilde{\omega}_{11} - \tilde{\omega}_{00} = \chi_2 \tilde{\omega}_1$$

et on poura poser $\chi_2 = 0$, $\chi_4 = \ldots \chi_{n-1} = 0$, $\chi_3 = \chi_n = k_1$: k_1 sera un invariant projectif. De

$$(39_5) \qquad \tilde{\omega}_{11} - \tilde{\omega}_{00} = 0$$

nous tirerons

$$\tilde{\omega}_{1 \cdot} = n \rho \tilde{\omega}_1$$

et ρ sera un nouveau invariant ; puis

$$\tilde{\omega}_{40} = \tilde{\omega}_{n,n-4} = k_2 \tilde{\omega}_1 \ ; \ \tilde{\omega}_{51} = \ldots = \tilde{\omega}_{n-1,n-5} = 0,$$

k_2 étant un troisième invariant, etc. . ; on posera finalement

$$\tilde{\omega}_{n-1,0} = \tilde{\omega}_{n1} = k_{n-3} \tilde{\omega}_1 \ ; \ \tilde{\omega}_{n0} = k_{n-2} \tilde{\omega}_1$$

k_{n-3}, k_{n-2} étant également des invariants projectifs. $\tilde{\omega}_1$ sera alors une différentielle exacte, que nous pourrons désigner par $d\sigma$, le paramètre σ ainsi déterminé sera »l'arc projectif« de la courbe gauche considérée.

II⁰. Tous les ε_i sont nuls. On a alors

$$\tilde{\omega}_{20} = \tilde{\omega}_{31} = \ldots = \tilde{\omega}_{n,n-2} = 0$$

et par dérivation extérieure on obtient des relations de la forme

$$\tilde{\omega}_{30} = \chi_3 \tilde{\omega}_1 \ , \ \tilde{\omega}_{41} = \chi_4 \tilde{\omega}_1 \ , \ \ldots \ , \ \tilde{\omega}_{n,n-3} = \chi_n \tilde{\omega}_1$$

Dans ce cas une nouvelle distinction pourra se présenter suivant que les χ_i ne sont pas, ou sont tous nuls. Dans le premier cas nous retrouvons les courbes de 1^re^ espèce [1]). Des particularisations successives, analogues à celles considérées précédemment nous conduiront à poser dans ce cas

$$\begin{array}{ll}
\tilde{\omega}_{30} = \tilde{\omega}_{n,n-3} = \tilde{\omega}_1 \ , & \tilde{\omega}_{41} = \ldots = \tilde{\omega}_{n-1,n-4} = 0 \\
\tilde{\omega}_{11} - \tilde{\omega}_{00} = 0 \ , & \tilde{\omega}_{10} = n \rho \tilde{\omega}_1 \\
\tilde{\omega}_{40} = \tilde{\omega}_{n,n-4} = k_2 \tilde{\omega}_1 \ , & \tilde{\omega}_{51} = \ldots = \tilde{\omega}_{n-1,n-5} = 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\tilde{\omega}_{n-1,0} = \tilde{\omega}_{n1} = k_{n-3} \tilde{\omega}_1 \ , & \tilde{\omega}_{n0} = k_{n-2} \tilde{\omega}_1
\end{array}$$

k_2, ρ, k_3 ... , k_{n-2} étant des invariants projectifs.

Dans le second cas on aura

$$\tilde{\omega}_{30} = \tilde{\omega}_{41} = \ldots = \tilde{\omega}_{n,n-3} = 0$$

et ainsi de suite. En posant dans tous les cas $\tilde{\omega}_1 = d\sigma$ nous arriverons à écrire pour toutes les courbes gauches, sauf pour les courbes normales, les *formules de Frenet* suivantes:

$$\frac{dA}{d\sigma} = A_1$$

$$\frac{dA_1}{d\sigma} = n \rho A + A_2$$

---

[1]) Il sera, en effet, facile de montrer que le système différentiel qui les définit et qu'on obtient de cette manière est identique à celui qu'on obtient par la voie du § précédent.

$$\frac{d\,A_2}{d\,\sigma} = k\,A + 2\,(n-1)\,\rho\,A_1 + A_3$$

$$\frac{d\,A_3}{d\,\sigma} = k_1\,A + 3\,(n-2)\,\rho\,A_2 + A_4$$

....

$$\frac{d\,A_{n-1}}{d\,\sigma} = k_{n-3}\,A + 2\,(n-1)\,\rho\,A_{n-2} + A_n$$

$$\frac{d\,A_n}{d\,\sigma} = k_{n-2}\,A + k_{n-3}\,A_1 + k_{n-4}\,A_2 + \ldots + k_1\,A_{n-3} + k\,A_{n-2} + n\,\rho\,A_{n-1}$$

où l'on a
pour les *courbes générales* $k = 1$; $\rho, k_1 = , \ldots , k_{n-2}$ étant des invariants; pour les *courbes de* 1^{re} *espèce* $k = o$, $k_1 = 1$; ρ, $k_2, \ldots ,k_{n-2}$ étant des invariants, etc...
pour les courbes de la $(n-2)^{me}$ *espèce* $k = k_1 = \ldots = k_{n-3} = o$ · $k_{n-2} = 1$; ρ étant un invariant.

23⁰. — On voit immédiatement qu'a un repère ainsi déterminè correspond par dualité un repère de même nature. D'après ce qu'il a été dit précédemment (§ 5⁰), les coordonnées tangentielles des faces $a_0, a_1, \ldots, a_n$ du repère sont les mêmes que les coordonnées homogènes des sommets $\overline{A}_0, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ du repère transformé et entre les composantes du mouvement instantané des deux repères il y a les relations (8). Mais comme le E_{n-1} osculateur de la courbe donneé c'est a_n, le E_{n-2} esculateur l'intersection de a_n, et a_{n-1}, le E_{n-3} osculateur l'intersection de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, etc. . . , on voit que pour l'hypersurface développable transformée $\overline{A}_n$ sera le point de l'arête de rebroussement, $\overline{A}_n\,\overline{A}_{n-1}$ la tangente, $\overline{A}_n$, $\overline{A}_{n-1}\,\overline{A}_{n-2}$ le E_2 osculateur en $\overline{A}_n$, etc... En changeant alors les indices

$$n,\ n-1, \ldots ,\ 1,\ o$$

en

$$o,\ 1, \ldots ,\ n-1,\ n$$

les relations (8) deviendront

$$\overline{\omega}_{ij} = -\,\omega_{n-j\ \ n-i} \tag{40}$$

et on passera des composantes du mouvement instantané du repère de Frenet d'une courbe à celles relatives à la courbe dualistique par une symétrie par rapport à la seconde diagonale et un changement de signe du tableau de ces composantes. Cette remarque met en évidence le caractère dualistique d'une point singulier d'espèce k quelconque.

24⁰. — Pour les courbes normales on ne peut pas achever la détermination du système de référence mobile; toutes les courbes normales sont projectivement égales entre elles; de plus elles admettent chacune un groupe projectif à trois paramètres de transformations en elles mêmes et en chaque point de la courbe il existe ∞^2 transformations de ce groupe qui laissent ce point invariant. On peut achever arbitrairement la détermination du repère en ajoutant, par exemple, aux conditions du § 20^0, les conditions supplémentaires

$$\tilde{\omega}_{10} = o, \qquad \tilde{\omega}_{11} = \tilde{\omega}_{00} = o$$

$\tilde{\omega}_1$ sera alors une différentielle exacte: nous pourons poser $\tilde{\omega}_1 = ds$ et l'on aura

$$\frac{dA}{ds} = A_1, \quad \frac{dA_1}{ds} = A_2, \quad \ldots, \quad \frac{dA_{n-1}}{ds} = A_n, \quad \frac{dA_n}{ds} = o$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{d^{n+1} A}{d s^{n+1}} = o, \quad A = A^{(0)} + s A_1^{(0)} + \frac{1}{2} s^2 A_2^{(0)} + \ldots + \frac{1}{n!} s^n A_n^{(0)}.$$

$A^{(0)}, A_1^{(0)}, \ldots, A_n^{(0)}$ étant la position du repère pour $s = o$, qu'on peut d'ailleurs faire coïncider avec un quelconque des repères du $(n+2)^{me}$ ordre attachés à la courbe normale en un point quelconque de cette courbe.

Il en résulte que les équations paramétriques de la courbe normale s'écriront par rapport à un repère d'ordre $n+2$ en coordonnées homogenès

$$Z_0 = 1, \quad Z_1 = s, \quad Z_2 = \frac{1}{2} s^2, \ldots, Z_n = \frac{1}{n!} s^n$$

et en coordonnées non homogènes

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2, \quad x_3 = \frac{1}{6} x_1^3, \ldots, x_n = \frac{1}{n!} x_1^n.$$

On voit par conséquent qu'une courbe normale est une courbe algébrique de degré n, c'est à dire telle que tout E_{n-1} la coupe en n points distincts ou confondus. On démontre aussi facilement que par un point quelconque de l'espace on peut mener, en général, n E_{n-1} osculateurs à une courbe normale quelconque.

25°.—Deux courbes gauches arbitraires C et C_1 peuvent toujours être amenées par un déplacement projectif convenable de l'une d'elles de manière qu'un point M_1 de C_1 vienne coïncider avec un point déterminé M de C et que les deux courbes aient, au point commun, un contact d'ordre $n+2$. Il suffit, en effet, de considérer l'homographie qui amène un quelconque des ∞^2 repères[1]) d'ordres $n+2$ de C_1 en M_1 en coïncidence avec un repère d'ordre $n+2$ déterminé de C en M. On obtient évidemment de cette manière toutes les transformations homographiques qui réalisent le contact voulu.

En particulier on peut amener une courbe normale à avoir un contact d'ordre $n+2$ avec une courbe donnée C en un point donné M mais cette courbe normale sera unique car les ∞^2 transformations de la courbe normale en elle-même maintiennent évidemment le contact d'ordre $n+2$. On appelle la courbe normale ayant un contact d'ordre $n+2$ avec une courbe donné C en un point donné, *la courbe normale surosculatrice*[2]).

26°.—Les équations d'une courbe par rapport à un repère d'ordre $n+2$ s'écriront d'aprés les considérations précédentes.

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2}\, x_1^2 + m_2\, a_2\, x_1^{n+3} + \ldots \\[2mm] x_3 = \frac{1}{6}\, x_1^3 + m_3\, a_3\, x_1^{n+3} + \ldots \\[2mm] \text{— — — — — — — — — —} \\[2mm] x_i = \frac{1}{i!}\, x_1^i + m_i\, a_i\, x_1^{n+3} + \ldots \\[2mm] \text{— — — — — — — — — —} \\[2mm] x_n = \frac{1}{n!}\, x_1^n + m_n\, a_n\, x_1^{n+3} + \ldots \end{array}\right.$$

1) Par un déplacement δ (§ 21°) on a en effet [cf. (38)]

$\delta A = e_{00} A$, $\quad \delta A_1 = e_{10} A + \frac{n-2}{n} e_{00} A_1$, $\quad \delta A_2 = \frac{2(n-1)}{n} e_{10} A_1 + \frac{n-4}{n} e_{00} A_2$,

$\ldots \quad \delta A_i = \frac{i(n-i+1)}{n} e_{10} A_{i-1} + \frac{n-2i}{n} e_{00} A_i, \ldots, \delta A_n = e_{10} A_{n-1} - e_{00} A_n$;

il y a donc bien ∞^2 repères d'ordre $n+2$ attachés à une courbes gauche en un point donné.

2) cf. *Berzolari* (3) p. 13.

$m_2, m_3, .., m_n$ étant certaines constantes numériques, $a_2, a_3, \ldots, a_n$ étant les quantités introduites plus haut (§ 21⁰).

27⁰.—Il y aurait intérêt à attacher à une courbe gauche un repère satisfaisant à des conditions dualistiques par rapport à celles que nous avons établies au § 20⁰. Nous supposerons pour cela que les équations de la courbe s'écriront par rapport à un tel repère, *en coordonnées tangentielles non homogènes*

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\,\xi_1^2 + m_2 a_2\,\xi_1^{n+3} + \ldots$$

$$\xi_3 = \frac{1}{6}\,\xi_1^3 + m_3 a_3\,\xi_1^{n+3} + \ldots$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\xi_n = \frac{1}{n!}\,\xi_1^n + m_n a_n\,\xi_1^{n+3} + \ldots$$

les composantes $\tilde{\omega}_{ij}$ du mouvement instantané de ce repère satisferont comme on sait aux relations qu'on déduira de celles imposées au § 20⁰ par la substitution (40).

La courbe qui par rapport à un tel repère aura comme équations en coordonnées tangentielles

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\,\xi_1^2\,, \quad \xi_3 = \frac{1}{6}\,\xi_1^3\,, \ldots, \quad \xi_n = \frac{1}{n!}\,\xi_1^n$$

est une courbe normale. C'est *la seconde courbe normale surosculatrice* à la courbe donnée au point considéré; elle joint de la propriété d'avoir avec cette courbe $n+3$ hyperplans (E_{n-1}) osculateurs confondus en ce point.

28⁰. — Nous voulons écrire les équations des deux courbes normales surosculatrices par rapport à un même repère que nous choisirons pour la symétrie des résultats être le repère de Frenet (§ 22₀). J'indique sans développer les calculs, les moyens d'obtenir ces équations.

Remarquons d'abord que les équations dela courbe s'écriront par rapport à un repère de Frenet, en coordonnées ponctuelles non homogènes, sous la forme (d'après § 2⁰)

$$
(41 \text{ bis}) \left\{
\begin{array}{l}
x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + m_{02}\, x_1^5 + m_{12}\, x_1^6 + m_{22}\, x_1^7 + m_{32}\, x_1^8 + \dots \\
x_3 = \frac{1}{6} x_1^3 + m_{03}\, x_1^6 + m_{13}\, x_1^7 + m_{23}\, x_1^8 + \dots \\
- - - - - - - - - - - \\
x_i = \frac{1}{i!} x_1^i + m_{0i}\, x_1^{i+3} + m_{1i}\, x_1^{i+4} + \dots + m_{hi}\, x_1^{i+h+3} + \dots \\
- - - - - - - - - - - \\
x_n = \frac{1}{n!} x_1^n + m_{0n}\, x_1^{n+3} + m_{1n}\, x_1^{n+4} + \dots .
\end{array}
\right.
$$

où m_{hi} est une expression linéaire à coéfficients numériques des termes de la forme

$$
\left(\frac{d^p k_a}{d\sigma^p}\right)^\alpha \times \left(\frac{d^q k_b}{d\sigma^q}\right)^\beta \times \left(\frac{d^r k_c}{d\sigma^r}\right)^\gamma \times \dots
$$

avec

$$
\alpha(a+p) + \beta(b+q) + \gamma(c+r) + \dots = h;
$$

en particulier m_{0i} ont certaines valeurs numériques, les m_{1i} sont à des facteurs numériques près égaux à k_1, etc....

Nous écrirons ensuite les équations d'une courbe normale sous la forme

$$
\frac{a_1 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n}{x_1} =
$$

$$
= \frac{a_2 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n}{x_2} =
$$

$$
- - - - - - - - -
$$

$$
= \frac{a_n + a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n}{x_n},
$$

ces relations exprimant que la courbe normale est le lieu des intersections des rayons homologues de deux gerbes homographiques, le sommet d'une de ces gerbes étant l'origine[1]).

En remplaçant dans ces équations préalablement mises sous forme entière, $x_2, x_3, \dots, x_n$ par les expressions (41 bis) et en identifiant jusqu'aux termes en x_1^{n+2} inclus[2]), on trouvera $(n-1)$. $(n+2)$, équations linéaires et homogènes des $[n(n+1)-1]$ quantités indéterminées a_i, a_{ij} $(i \neq j)$, $a_{ii}-a_{jj}$, qui les définiront complètement. On obtiendra de cette manière les équations de la courbe normale surosculatrice R, qui s'écriront avec un paramètre η, sous la forme

---

[1]) *Berzolari* (3) p. 7

[2]) Un calcul analogue pour $n=3$, se trouve dans le célèbre mémoire de *Halphen* (13) p. 360 et pour n quelconque dans *Berzolari* (3) p. 13.

$$(42)\quad \begin{cases} x_0 = 1 + M_{00}\,\eta^3 + M_{10}\,\eta^4 + \dots + M_{n-3,0}\,\eta^n, \\ x_1 = \eta + M_{01}\,\eta^4 + M_{11}\,\eta^5 + \dots + M_{n-4,1}\,\eta^n, \\ - - - - - - - - - - \\ x_{n-3} = \frac{1}{(n-3)!}\,\eta^{n-3} + M_{0,n-3}\,\eta^n, \\ x_{n-2} = \frac{1}{(n-2)!}\,\eta^{n-2}, \\ x_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\,\eta^{n-1}, \\ x_n \;\; = \frac{1}{n!}\;\eta^n \end{cases}$$

où les M_{ki} ont la même forme que les m_{ki}.

Si dans les équations (42) on change $x_0, x_1, \dots, x_n$, respectivement en $\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_0$ ou obtient les équations paramétriques de la seconde courbe normale surosculatrice r, *en coordonnées tangentielles.* Les équations de r en coordonnées ponctuelles s'obtiendront ensuite facilement ; elles auront la forme

$$(43)\quad \begin{cases} y_0 = 1 + \overline{M}_{00}\,\eta^3 + \overline{M}_{10}\,\eta^4 + \dots + \overline{M}_{n-3,0}\,\eta^n, \\ y_1 = \eta + \overline{M}_{01}\,\eta^4 + \dots + \overline{M}_{n-4,1}\,\eta^n \\ - - - - - - - - - - \\ y_n = \frac{1}{n!}\,\eta_n \end{cases}$$

les $\overline{M}_{ki}$ étant analogues aux m_{ki}.

29°. — Des équations (41) on peut tirer sans complications les deux théorèmes suivants déjà énoncés par M. BERZOLARI [1]) :

1) *Dans un point singulier d'espèce* k *le* E_2 *principal* [2]) *de la courbe donnée et de la courbe normale surosculatrice est situé dans le* E_{n-k} *osculateur commun aux deux courbes, mais coupe le* E_{n-k-1} *osculateur commun suivant la tangente*, et

2) *Si nous projettons suivant le* E_{n-k-2} *osculateur sur un* E_{k+1} *arbitraire la courbe donnée, la projection du point considéré* M *étant l'intersection* M' *de ce* E_{k+1} *avec le* E_{n-k-1} *osculateur en* M, *on obtient une courbe pour laquelle* M' *est un point singulier sestatique.*

30°.—Nous ajoutons à ces théorèmes, deux autres, que nous démontrerons facilement avec les considérations du § 28°.

---

1) *Berzolari* (3) p. 17—21.

2) On appelle ainsi, pour deux courbes ayant au plus un contact d'ordre p, le E_2 tel que les projections à partir d'un point de ce E_2 des deux courbes aient un contact d'ordre $p+1$ au moins. Cf. *Berzolari* (3) p. 18.

3) *En un point singulier d'espèce k, les lieux géométriques des points d'intersection des E_{n-k-2} osculateurs à chacune des deux courbes normales surosculatrices avec le E_{k+2} osculateur en* M *à la courbe donnée forment une même courbe normale* R_{k+2} (*ou* r_{k+2}) *de ce* E_{k+2}, *passant par* M, et

4) *Les lieux des intersections des* E_{n-k-3} *osculateurs à chacune des deux courbes normales avec le* E_{k+3} *osculat ur en* M *sont deux courbes normales* R_{k+3} *et* r_{k+3} *de ce* E_{k+3}, *passant par* M *et situées sur un même cône* C_2^0 *(à deux dimensions) du second ordre ayant son sommet au point* M.

Pour les demontrer nous remarquerons d'abord que, d'après leurs expressions, les M_{hi} et $\overline{M}_{hi}$ sont nuls pour $h < k$. Les équations de R_{k+2} et r_{k+2} qui se déduisent facilement de (42) et (43) seront les mêmes ce qui démontre le théorème 3. Ces équations s'écrivent.

$$x_0 = 1 \quad x_1 = \Theta_{n\,k}^{(1)}\, \eta, .., x_i = \frac{1}{i\,!}\, \Theta_{n\,k}^{(1)}\, \eta^i \;, \,.\,.\, , x_{k+2} = \frac{1}{k+2\,!}\, k_{n\,k}^{(k+2)}\, \eta^{k+2},$$

en mettant

$$\Theta_{n k}^{(i)} = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n-1}\right) \cdot\;\cdot\;\cdot \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{k+3}\right)$$

Les épuations de R_{k+2} et r_{k+2} s'obtiennent aussi immédiatement. Ce sont.

$$(R_{k+3}) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 + \Theta_{n,\,k+1}^{(1)}\, M_{k\,o}\, \eta^{k+3} \\ x_1 = \Theta_{n\;k+1}^{(k)}\, \eta \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ x_{k+3} - \dfrac{1}{(k+3)\,!} \;\; \Theta_{n,\,k+1}^{(k+3)}\, \eta^{k+3} \end{array} \right.$$

$$(r_{k+3}) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 + \Theta_{n,\,k+1}^{(k)}\; \overline{M}_{ko}\; \eta^{k+3} \\ x_1 = \Theta_{n,\,k+1}^{(1)}\; \eta \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ x_{k+3} = \dfrac{1}{(k+3)!}\; \Theta_{n,\,k+1}^{(k+3)}\; \eta^{k+3} \end{array} \right. \qquad ;$$

elles permettent de vérifier immédiatement le théorème 4.

Ou remarque qu'à l'encontre des théorèmes de M. Berzolari, les propriétés de ce paragraphe montrent bien le caractère dualistique que possède un point singulier de n'importe qu'elle espèce et par conséquent les courbes singulières correspondantes.

B. *L'applicabilité projective des courbes gauches. Les c rrespondances* T_1, T_2, T_3, T_4. *Paramètres projectifs.*

31⁰. — En nous rapportant aux notions et méthodes envisagés au § 7⁰, sur l'applicabilité projective des variétés d'un E_n, nous commencerons par l'étude de l'applicabilité $C_{2,\,n+2}$ entre deux courbes gauches données C et C_1. Nous choisirons pour cela le long de C un repère particulier (r) ou $A A_1 \ldots . A_n$ satisfaisant aux conditions (37_1), $(37_2), \ldots, (37_{n+2})$ qui définissent le long de C un repère d'ordre $n+2$; nous ajouterons pour achever de le déterminer la condition supplémentaire.

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \ldots + \omega_{nn} = 0$$

et d'autres conditions qu'il est inutile de préciser. Les composantes du repère $B^{(1)} B_1^{(1)} \ldots B_n^{(1)}$ ou $(R^{(1)})$ qui se déduit de (r) par l'application $C_{2,\,n+2}$, devront satisfaire à des relations *analogues* aux relations (37_1), (37_2), . . . , (37_{n+3}) c'est à dire se déduisant de celles-ci en remplaçant les ω_{ij} par les $\pi_{ij}^{(1)}$ correspondants et les paramètres α_i par des nouveaux paramètres $A_i^{(1)}$. Les $\pi_{ij}^{(1)}$ étant supposées être les composantes des repères $(R^{(1)})$ *les plus généraux satisfaisant à ces conditions,* les seules équations qui résolvent l'applicabilité $C_{2,\,n+2}$ sont celles de la C_2, c'est à dire

$$\pi_1^{(1)} = \omega_1, \quad \pi_{11}^{(1)} - \pi_{00}^{(1)} = \omega_{11} - \omega_{00} \tag{44}$$

qui conduisent à la seule équation extérieure qui ne soit pas identiquement vérifiée

$$[\omega_1 \, (\pi_{10}^{(1)} - \omega_{10})] = 0$$

d'où l'on tire

$$\pi_{10}^{(1)} - \omega_{10} = \bar{a} \, \omega_1 \tag{45}$$

$\bar{a}$ étant un certain paramètre.

Le système (44) est donc en involution et sa solution dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. On peut poser.

$$\pi_1^{(1)} = \lambda \, d\,t$$

t ésant un paramètre de position sur le courbe C_1. Si $\omega_1 = d\,\tau$, l'équation $\pi_1^{(1)} = \omega_1 = d\,\tau$ nous donne $t = f(\tau)$. La correspondance ponctuelle qui réalise l'application peut être une correspondance arbitraire entre les deux courbes.

Nous aurons besoin d'écrire le système différentiel qui donne le repère $(R^{(1)})$ sous une forme équivalente nouvelle. En posant

$$E_{ik} = \pi_{ik} \quad \tilde{\omega}_{ik}$$

où π_{ik} sont les composantes du repère *le plus général attaché* à C_{11} ce système s'écrira

$$(I^{(1)}) \left\{ \begin{array}{ll} (T_0^{(1)}) \left\{ \begin{array}{ll} E_{ik} = 0 & (i < k) \\ E_{00} = E_{11} = \ldots = E_{nn} = 0 & \end{array} \right. \\ (T_1^{(1)}) & \dfrac{E_{10}}{n} = \dfrac{E_{21}}{2(n-1)} = \ldots = \dfrac{E_{n,n-1}}{n} \\ (T_2^{(1)}) & \dfrac{E_{20}}{n-1} = \dfrac{E_{31}}{3(n-2)} = \ldots = \dfrac{E_{n,n-2}}{C_n^2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (T_{n-1}^{(1)}) & n\, E_{n-1,0} = 2\, E_{n1} \end{array} \right.$$

Nous remarquerons en plus, qu'en vertu des relations $(T^{(1)})$, (37_{n+3}) et (45) on aura toujours des relations telles que

$$(46) \qquad E_{ij} = \alpha_{ij}\, \tilde{\omega}_1$$

Imaginons alors le »mouvement projectif« de la courbe C, sur la courbe C_1 qui à chaque instant réalise l'application $C_{2,n+2}$; $\tilde{\omega}_{ij}$ sont les composantes du mouvement absolu, $\pi_{ij}^{(1)}$ celles du mouvement relatif, par conséquent — E_{ij} celles du mouvement d'entraînement du repère $(R^{(1)})$ suposé invariablement lié à (r). Si nous appellons Δ un déplacement d'entraînement laissant fixe le point A ($\tilde{\omega}_1(\Delta) = 0$), on aura d'après (46).

$$(47) \qquad \Delta A = 0, \; \Delta A_1 = 0, \; \ldots, \; \Delta A_n = 0$$

antrement dit la position du repère $(R^{(1)})$ est parfaitement déterminée par rapport à (r), par le systéme $(T^{(1)})$. On voit de plus que dans le mouvement le E_i osculateur $[B^{(1)} B_1^{(1)} \ldots B_i^{(1)}]$ à C_1 coïncide à chaque instant avec le E_i osculateur $[A\, A_1 \ldots A_i]$ à C au point correspondant.

32^0. — La transformation homographique qui réalise l'application $C_{2,n+2}$ est d'après (47) unique pour chaque couple de doints correspondants. On déduit de ce fait une correspondance bien déterminée entre les éléments plans générateurs $[A\, A_1 \ldots A_i]$ et $[B^{(1)} B_1^{(1)} \ldots B_i^{(1)}]$ des deux variétés développables à $i+1$ dimensions v_{i+1} et V_{i+1} $(1 \leqq i \leqq n-2)$, ayant C et C_1 comme arêtes de rebroussement. Nous appellerons (T_1) cette correspondance, que nous recontrerons plus tard (§ § 42^0 — 48^0) dans plusieurs propriétés interessantes relativement à l'applicabilité projective des hypersurfaces développables.

33^0. — Nous nous occuperons en second lieu de l'applicabilité $C_{n-1,\,n+1}$. Nous choisirons le long de la courbe C le même repère *(r)* du § 12^0. Le repère $B^{(2)} B_1^{(2)} \ldots B_n^{(2)}$ ou $(R^{(2)})$ qui se déduit le long de C_1 par la transformation homographique qui réalise l'application $C_{n-1,n+1}$ devra être du $(n+1)^{me}$ ordre; les composantes $\pi_{ij}^{(2)}$ du repère $(R^{(2)})$ seront supposées assujetties à vérifier les relations (37_1), (37_2), ..., (37_{n+1}) qui par dérivation extérieure nous conduiront aux relations.

$$(37_{n+2}\text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} -(n+1)\,\pi_{n1}^{(2)} + C_{n+1}^2\, \pi_{n-1,0}^{(2)} = B_1\, \pi_1^{(2)} \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ -(n-i+3)\,\pi_{n,i-1}^{(2)} + \pi_{n,i-1}^{(2)} + C_{n-i+3}^2\, \pi_{n-1,i-2}^{(2)} - \ldots \\ \qquad\qquad = B_{i-1}\, \pi_1^{(2)} \\ - - - - - - - - - - - - \\ -3\,\pi_{n,n-1}^{(2)} + 3\,\pi_{n-1,n-2}^{(2)} - \pi_{n-2,n-3}^{(2)} = B_{n-1}\, \pi_1^{(2)} \end{array} \right.$$

Le système de Pfaff imposé par l'applicabilité C_{n-1} s'écrit

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} \pi_1^{(2)} - \tilde{\omega}_1 = 0,\ \pi_{11}^{(2)} - \pi_{00}^{(2)} = \tilde{\omega}_{11} - \tilde{\omega}_{00} \\ \pi_{21}^{(2)} - 2\,\pi_{10}^{(2)} = \tilde{\omega}_{21} - 2\,\tilde{\omega}_{10}, \ldots\ldots, \\ \pi_{n\ 2,1}^{(2)} - (n-2)\,\pi_{n-3,0}^{(2)} = \tilde{\omega}_{n-2,1} - (n-2)\,\tilde{\omega}_{n-3,0} \end{array} \right.$$

il donne lieu à la seule équation extérieure non identiquement vèrifiée

$$(49) \qquad \left[\tilde{\omega}_1 \left(\pi_{n-1\ 1}^{(2)} - \overline{n-1}\, \pi_{n-2,0}^{(2)} - \tilde{\omega}_{n-1,1} + \overline{n-1}\, \tilde{\omega}_{n-2,0}\right)\right] = 0$$

qui montre que le système (48) auquel se réduit le système de la $C_{n-1,n+1}$, est aussi en involution et sa solution dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. Comme pour la $C_{2\ n+2}$ l'application peut être réalisée avec une correspondance ponctuelle arbitraire entre les deux courbes.

Nous écrirons également le système de la $C_{n-1,n+1}$ sous la forme équivalente:

$$
(T^{(2)}) \left\{ \begin{array}{ll}
(T_0^{(2)}) & \left\{ \begin{array}{ll} E_{ih} = o & (i < h) \\ E_{00} = E_{11} = \ldots = E_{nn} = o & \end{array} \right. \\
(T_1^{(2)}) & E_{10} = \dfrac{E_{21}}{2} = \ldots = \dfrac{E_{n,\,n-1}}{n} \\
(T_2^{(2)}) & E_{20} = \dfrac{E_{31}}{3} = \dfrac{E_{42}}{6} = \ldots = \dfrac{E_{n,\,n-2}}{C_n^2} \\
 & - - - - - - - - - - - \\
(T_{n-3}^{(2)}) & E_{n-3,\,o} = \dfrac{E_{n-2,\,1}}{n-2} = \dfrac{E_{n-1,\,2}}{C_{n-1}^2} = \dfrac{E_{n3}}{C_n^3} \\
(T_{n-2}^{(2)}) & E_{n-2,\,o} = \dfrac{E_{n-1,\,1}}{n-1} = \dfrac{E_{n\,2}}{C_{n-1}^2}
\end{array} \right.
$$

En vertu de $(T^{(2)})$, $(37_{n+2}$ bis) et (49) on aura

$$
(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta A = \Delta A_1 = \ldots = \Delta A_{n-2} = o \\ \Delta A_{n-1} = E_{n-1,\,o}(\Delta).\, A \;,\; \Delta A_n = E_{n\,o}(\Delta)\, A + \tfrac{1}{2}\, n\, E_{n-1,\,o}(\Delta).\, A_1 \end{array} \right.
$$

ce qui montre que la transformation homografique qui effectue l'application $C_{n-1,n+1}$ n'est plus unique ; elle dépend, pour chaque couple de points correspondants de deux paramètres arbitraires ; il existe par conséquent ∞^2 transformations qui effectuent l'application. Toutes ces transformations, pourtant, déterminent comme on le voit facilement une même correspondance ponctuelle entre les éléments générateurs $[A\, A_1 \ldots A_i]$ et $[B^{(2)}\, B_1^{(2)} \ldots B_i^{(2)}]$ $(i \leq n-2)$ des deux varietés développables v_{i+1} et V_{i+1} qui ont été considérées précédemment (§ 32⁰). Nous désignerons par (T_2) cette correspondance.

34⁰. — Les correspondances dualistiques T_3 et T_4. Remarquons que chacune des homographies qui réalisent les deux applicabilités $C_{2,n+2}$ et $C_{n-1,n+1}$, font correspondre à des E_{n-1} passant par le E_{n-i-1} osculateur à C $(1 \leq i \leq n-2)$ des E_{n-1} bien déterminés passant par les E_{n-i-1} osculateur à C_1. En effet les relations (47) ou (50) montrent qu'on a

$$\Delta\, |A\, A_1\, A_{i_1} \ldots A_{i_{n-2}}| = o \;,$$

quelque soient les indices $i_1, \ldots, i_{n-2}$ différents de O et 1 et cela démontre immédiatement la propriété. Appellons θ_1 et θ_2 les deux correspondances d'hyperplans que nous venons de mettre en évidence.

Soient alors γ et γ_1 les transformées de C et C_1 par une même corrélation; de toute correspondance ponctuelle entre C et C_1 on déduit une correspondance ponctuelle entre γ et γ_1. Envisageons les correspondances θ_1 et θ_2 qui se rapportent aux courbes γ et γ_1. Par la corrélation envisagée plus haut on déduira de θ_1 et θ_2, inversement, deux correspondances *ponctuelles* nouvelles entre les éléments osculateurs $[A\ A_1\ ...\ A_i]$ et $[B\ B_1\ ...\ B_i]$, correspondances que nous désignerons par T_3 et T_4; elles vont jouer un rôle analogue aux correspondances T_1 et T_2

Pour écrire les systèmes différentiels de la T_3 et T_4, considérons les homographies (h_1) et (h_2) qui réalisent les applications $C_{2,n+2}$ et $C_{n-1,n+1}$ entre γ et γ_1 (par conséquent les correspondances θ_1 et θ_2) et soient (H_1) et (H_2) les homographies qui se déduisent en sens inverse par la corrélation envisagée ((H_1) et (H_2) réaliseront par conséquent T_3 et T_4); soient enfin $B^{(3)}\ ...\ B_n^{(3)}$ ou $(R^{(3)})$ et $B^{(4)}\ ...\ B_n^{(4)}$ ou $(R^{(4)})$ les repères qui se déduisent de (r) (§ 31°) par (H_1) et (H_2). Comme il a déjà été expliqué ailleurs (§ 23°) les systèmes qui donnent $(R^{(3)})$ et $(R^{(4)})$ se déduiront des systèmes $(T^{(1)})$ et $(T^{(2)})$ en échangeant partout d'après (40)

$$E_{ik} \quad \text{en} \quad -E_{n-k,\,n-i}$$

ces systèmes s'écriront par conséquent

$$(T^{(3)})\left\{\begin{array}{ll}
(T_0^{(3)}) & \left\{\begin{array}{l} E_{ik}=o \qquad\qquad (i<k) \\ E_{00}=E_{11}=\ldots=E_{nn}=o \end{array}\right. \\[2mm]
(T_1^{(3)}) & \dfrac{E_{10}}{n}=\dfrac{E_{21}}{2\,(n-1)}=\ldots=\dfrac{E_{n,\,n-1}}{n} \\[2mm]
(T_2^{(3)}) & \dfrac{E_{20}}{C_n^2}=\ldots=\dfrac{E_{n-1,\,n-3}}{3\,(n-2)}=\dfrac{E_{n,\,n-2}}{n-1} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(T_{n-1}^{(3)}) & 2\,E_{n-1,\,0}=n\,E_{n1}
\end{array}\right.$$

et

$$(T^{(4)})\left\{\begin{array}{ll}
(T_0^{(4)}) & \left\{\begin{array}{l} E_{ik}=o \qquad\qquad (i<k) \\ E_{00}=E_{11}=\ldots=E_{nn}=o \end{array}\right. \\[2mm]
(T_1^{(4)}) & \dfrac{E_{10}}{n}=\dfrac{E_{21}}{n-1}=\ldots=\dfrac{E_{n-1,\,n-2}}{2}=E_{n,\,n-1} \\[2mm]
(T_2^{(4)}) & \dfrac{E_{20}}{C_n^2}=\ldots=\dfrac{E_{n-1,\,n-3}}{3}=E_{n,\,n-2} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(T_{n-3}^{(4)}) & \dfrac{E_{n-3,\,0}}{C_n^3}=\dfrac{E_{n-2,\,1}}{C_{n-1}^2}=\dfrac{E_{n-1,\,2}}{n-2}=E_{n3} \\[2mm]
(T_{n-2}^{(4)}) & \dfrac{E_{n-2,\,0}}{C_{n-1}^2}=\dfrac{E_{n-1,\,1}}{n-1}=E_{n2}
\end{array}\right.$$

35°. — **Paramètres projectifs.** Considérons en dernier lieu l'applicabilité $C_{3,n+2}$ Le système qui résout cette applicabilité s'obtiendra en ajoutant aux équations (44) de la $C_{2,n+2}$ et aux conditions envisagées au § 31°, l'équation nouvelle

$$\pi_{21}^{(1)} - 2\,\pi_{0}^{(1)} = \omega_{21} - 2\,\omega_{10}$$

qui en vertu des relations $(T_1^{(1)})$ devient

$$\pi_{10}^{(1)} = \omega_{10}^{(1)}. \tag{51}$$

On trouve facilement que le système formé par (44) et (51) est complétement intégrable; sa solution dépend de trois constantes arbitraires.

En particulier l'applicabilité $C_{3,n+2}$ entre une courbe quelconque C_1 et une courbe normale C conduit à une notion nouvelle interessante.

Choisissons, en effet, pour la courbe normale le repère défini plus haut (§ 24°). Les conditions auxquelles doivent satisfaire les $\pi_{ij}^{(1)}$ (§ 31°) nous permettront facilement de poser succesivement

$$\pi_1^{(1)} = \lambda\, dt$$

$$\pi_{11}^{(1)} - \pi_{00}^{(1)} = -\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{u}{n}dt,$$

$$\pi_{10}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{du}{\lambda} - \frac{u^2}{4_n\lambda}dt + \frac{\Psi(t)}{\lambda}dt$$

La résolution du système complètement intégrable formé par (44) et (51) qui dans notre cas s'écrit

$$\pi_1^{(1)} = ds\,, \quad \pi_{11}^{(1)} - \pi_{00}^{(1)} = 0, \quad \pi_{10}^{(1)} = 0$$

nous donne

$$s = f(t)\,, \quad \lambda = f'(t) \quad u = n\frac{f''(t)}{f'(t)}$$

$$\frac{f'''(t)}{f'(t)} - \frac{3}{2}\frac{f''^2(t)}{f'^2(t)} + \frac{2}{n}\Psi(t) = 0.$$

La forme de cette équation nous montre que si $\tau\,(t)$ en est une solution particulière toutes les autres solutions sont des fonctions homographiques de τ. Nous pouvons prendre τ comme paramètre dela courbe C_1 ; nous l'appellerons *paramètre projectif.* Tous les paramètres projectifs sont des fonctions homographiques de l'un d'entre eux. Cette notion nous permettra entre autres de définir la notion de »rapport anharmonique de quatre points« de la courbe C_1, d'une manière intrinsèque, comme étant le rapport anharmonique des quatre valeurs de τ correspondant à ces points.

Il est évident qu'en prenant τ comme paramètre de la courbe C_1, les points se correspondants par la $C_{3,n+2}$ se déduisent d'une même valeur donnée au paramètre commun $s=\tau$. Mais s est un paramètre *rationnel* de la courbe normale. Tout autre paramètre rationnel se déduit de s par une substitution homographique. On peut donc dire qu'une correspondance réalisant la $C_{3,n+2}$ étant donnée, ou obtient toutes les autres en effectuant une substitution homographique sur un des paramètres rationnels de la courbe normale. Si C_1 est elle même normale on a $\Psi(\tau)=0$ et τ est un paramètre rationnel.

D'une manière analogue la $C_{3,n+2}$ entre deux courbes quelconques C et C_1 s'obtiendra en établissant une relation homographique arbitraire entre les paramètres projectifs des deux courbes. Car de la forme des conditions imposées par l'application, on voit immédiatement que si une correspondance entre C et une courbe normale Γ et une $C_{3,n+2}$, la correspondance qui s'en déduit entre Γ et C_1 sera une $C_{3,n+2}$ pour ces deux derniéres.

CHAPITRE III

Les hypersurfaces développables

A. *Détermination du repère mobile*

36°. — Nous désignerons par ω_{ij} les composantes du repère mobile $A\ A_1 \ldots A_n$ ou (r) attaché en chaque point d'une hypersurface. En faisant coïncider A avec le point considéré et en prenant $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ dans le E_{n-1} tangent nous obtenons un repère déterminé *au* 1[r] *ordre* par la condition

$$(51_1) \qquad \omega_n = o$$

$\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ seront alors $n-1$ formes de Pfaff linéaments indépendants par rapport aux différentielles des $n-1$ paramètres définissant la position du point sur l'hypersurface.

Si l'hypersurface est développable, c'est-à-dire que son E_{n-1} tangent dépend d'un paramètre, on peut ramener la forme.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \, \omega_{in}$$

assymptotique du 1^r ordre (§ 4⁰) à la forme

$$\varphi = \omega_1^2$$

ce qui revient à poser

$$(51_2) \qquad \omega_{1n} = \omega_1 \ , \ \omega_{2n} = \omega_{3n} = \ldots = \omega_{n-1,n} = 0$$

L'équation de l'hypersurface par rapport à un repère quelconque du 2^d ordre s'écrira alors

$$x_n = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{6} \varphi_3 (x_1, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{24} \varphi_4 (x_1, \ldots x_{n-1}) + \ldots$$

$\varphi_3, \varphi_4, \ldots$, étant des polynomes du 3^{me}, 4^{me}, ... degré en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Suivant la méthode générale indiquée au début (§ 2^0), nous devons, pour déterminer le repère au 3^{me}, 4^{me}, ... ordre, simplifier successivement φ_3, φ_4, etc. ... Nous pouvons d'abord prendre $\varphi_3 = 0$, ce qui revient à poser,

$$(51_3) \qquad \begin{cases} \omega_{nn} - 2\,\omega_{11} + \omega_{00} = 0 \\ \omega_{21} = \omega_{31} = \ldots = \omega_{n-1,1} = 0 \end{cases}$$

puis ramener φ_4 à la forme.

$$\varphi_4 = 4\, x_1^3 \, x_2$$

en posant

$$(51_4) \qquad \begin{cases} 3\,\omega_{10} - 3\,\omega_{n1} = \omega_2 \\ \omega_{20} = \omega_1 \ , \ \omega_{30} = \ldots = \omega_{n-1,0} = 0 \end{cases}$$

et l'on excepte par cette particularisation le cas d'une hypersurface dont le E_{n-1} tangent passe par un E_{n-2} fixe.

37⁰. — Pour rendre plus facile l'étude de la corespondance C_{24} (§ 7⁰) nous poursuivrons un peu différemment les particularisations successives du repère mobile.

Nous remarquerons d'abord que les relations

$$\omega_{30} = \omega_{40} = \ldots = \omega_{n-1,0}$$

écrites sous (51_4) nous donnent par dérivation extérieure

$$\omega_{32} = a_3\, \omega_1 , \ a_{42} = a_4\, \omega_1 , \ \ldots \ \omega_{n-1,2} = a_{n-1}\, \omega_1$$

il nous sera permis de prendre $a_3 = 1$, $a_4 = \ldots = a_{n-1} = o$, par conséquent

$$(51_5) \qquad \omega_{32} = \omega_1 \ , \ \omega_{42} = \ldots = \omega_{n-1,2} = o$$

si nous écartons le cas des hypersurfaces développables dont le E_{n-1} tangent contient un E_{n-3} fixe.

De la même manière nous pourrons poser *pour toutes les hypersurfaces à arête de rebroussement proprement dite*, successivement les conditions suivantes :

$$(51_6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{43} = \omega_1 \ , \ \omega_{53} = \ldots = \omega_{n-1,3} = o \\ \omega_{54} = \omega_1 \ , \ \omega_{64} = \ldots = \omega_{n-1,4} = o \\ - - - - - - - - - - - \\ \omega_{n-2,n-3} = \omega_1, \ \omega_{n-1,n-3} = o \\ \omega_{n-1,n-2} = \omega_1 \end{array} \right.$$

38⁰. Dans le repère ainsi déterminé, le point A_{n-1} décrit toujours l'arête de rebroussement car

$$d\ A_{n-1} = \omega_1\ A_{n-2} + \omega_{n-1,n-1}\ A_{n-1}\,;$$

ou s'aperçoit aussi immédiatement que le sommet A_{n-2} est sur la tangente en A_{n-1} à l'arête de rebroussement, le sommet A_{n-3} dans le E_2 osculateur en ce point, d'une manière générale le sommet A_{n-k-1} est situé dans le E_k osculateur au point A_{n-1} à l'arête de rebroussement ; le E_{n-2}

$$[\,A_{n-1}\ A_{n-2} \ldots A_2\ A\,]$$

étant osculateur en A_{n-1} c'est l'élément générateur de l'hypersurface développable.

La dérivation extérieure des relations

$$(51 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{21} = \omega_{2n} = \ldots = \omega_{n-1,n} = 0 \\ \omega_{ik} = 0 \qquad (i > k+1\ ;\ k = 1,\ldots, n-3) \\ \omega_{1n} = \omega_1 = \omega_{20} = \omega_{32} = \ldots = \omega_{n-1,n-2} \end{array} \right.$$

qui figurent parmi les conditions écrites, entraîne des relations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{22} - 2\,\omega_{00} + \omega_{11} = b_2\,\omega_1 \\ \omega_{33} - 2\,\omega_{22} + \omega_{00} = b_3\,\omega_1 \\ - - - - - - - - - - - - \\ \omega_{n-1,n-1} - 2\,\omega_{n-2,n-2} + \omega_{n-3,n-3} = b_{n-1}\,\omega_1 \end{array} \right.$$

et la dérivation extérieure de ces nouvelles relations nous donnera $n-2$ relations telles que

$$[\,\omega_1\,(d\,b_i - b_i\,\overline{\omega_{11}-\omega_{00}} + \beta_i\,\omega_2 + \beta'_i\,\omega_{10} + \beta''_i\,\omega_{n1} + \sum_{k=2}^{n-2} \beta_i^{(k+1)}\,\omega_{k,\,k+1}\,)\,] = 0$$

β_i, β'_i,... étant certains coéfficients numériques. Si nous désignons maintenant par δ un déplacement compatible avec toutes les conditions écrites et laissant en plus le point A fixe, (c'est-à-dire tel que $\omega_1(\delta) = \omega_2(\delta) = \ldots = \omega_{n-1}(\delta) = 0$) et par e_{ij} les quantités $\omega_{ij}(\delta)$, nous aurons

$$\delta\, b_i = -(\beta'_i + \beta''_i)\, e_{10} - \sum_{k=2}^{n-2} \beta_i^{(k+1)}\, e_{k,\,k+1} + b_i\,(e_{11} - e_{00})$$

avec $n-2$ paramètres indépendants

$$e_{10}\,,\quad e_{23}\,,\quad e_{34}\,,\ldots,\quad e_{n-2,\,n-1}\,;$$

nous pourrons annuler tous les b_i et poser par conséquent.

$$(51_7)\qquad \begin{cases} \omega_{22} - 2\,\omega_{00} + \omega_{11} = 0 \\ \omega_{33} - 2\,\omega_{22} + \omega_{00} = 0 \\ - - - - - - - - - - \\ \omega_{n-1,\,n-1} - 2\,\omega_{n-2,\,n-2} + \omega_{n-3,\,n-3} = 0 \end{cases}$$

et par suite des dérivations extérieures

$$\beta_i\,\omega_2 + \beta'_i\,\omega_{10} + \beta''_i\,\omega_{n1} + \sum_{k=2}^{n-2} \beta_i^{(k+1)}\,\omega_{k,\,k+1} = c_i\,\omega_1$$
$$(i = 1\ldots,\, n-2)$$

Ces relations et la relation

$$(52)\qquad 3\,\omega_{10} - 3\,\omega_{n1} = \omega_2$$

qui figure sous (51_4) nous permettront d'écrire

$$(52\text{ bis})\qquad \begin{cases} \omega_{10} = \overline{c_0}\,\omega_1 + \overline{\beta_0}\,\omega_2\,, \quad \omega_{n1} = \overline{c_0}\,\omega_1 + \overline{\beta_1}\,\omega_2 \\ \omega_{k,\,k+1} = \overline{c_k}\,\omega_1 + \overline{\beta_k}\,\omega_2 \qquad (k = 2\,.\,.,\, n-2) \end{cases}$$

les $\overline{c_i}$ étant des combinaisons linéaires à coéficients numériques connus des c_i, les $\overline{\beta_k}$ étant des nouvelles constantes numériques. On a d'ailleurs

$$\overline{\beta_0} - \overline{\beta_1} = \frac{1}{3}\,.$$

La dérivation extérieure de la relation (52) nous donne

(53) $$6\,\omega_{n\,0} - 4\,\omega_{12} = a\,\omega_1 - \omega_3$$

et la dérivation extérieure des relations (52 bis) nous montrera qu'on peut annuler $\overline{c_2}$, $\overline{c_3}$,..., $\overline{c_{n-2}}$ et nous aurons

(51_8) $$\omega_{k,\,k+1} = \overline{\beta_k}\,\omega_2 \qquad (k = 2,\dots\, n-2).$$

En dérivant extérieurement ces relations, ou trouvera en tenant compte de (53), des relations telles que

$$\begin{aligned} \omega_{n\,0} &= e_0\,\omega_1 + \overline{\gamma_0}\,\omega_3 \\ \omega_{12} &= e_1\,\omega_1 + \overline{\gamma_1}\,\omega_3 \\ \omega_{k,\,k+2} &= e_k\,\omega_1 + \overline{\gamma_k}\,\omega_3 \qquad (k = 2\,..,\, n-3) \end{aligned}$$

avec

$$6\,e_0 - 4\,e_1 = a \qquad \text{et} \qquad 6\,\overline{\gamma_0} - 4\,\overline{\gamma_1} + 1 = 0,$$

les $\overline{\gamma_k}$ étant certaines constantes numériques.

Nous pourrons annuler e_1, e_2,..., e_{n-3} et tirer

(51_9)' $$\omega_{n\,0} = \frac{1}{6}\,a\,\omega_1 + \overline{\gamma}\,\omega_3$$

(51_9) $$\begin{cases} \omega_{12} = \overline{\gamma_1}\,\omega_3. \\ \omega_{k,\,k+2} = \overline{\gamma_k}\,\omega_3 \qquad (k = 2\,\dots,\, n-3) \end{cases}$$

et la dérivation extérieure de (51_9) nous donnera

(51_{10})' $$\begin{aligned} \omega_{n\,2} &= f_0\,\omega_1 + \overline{\varepsilon_0}\,\omega_4 - \overline{c_0}\,\omega_2 \\ \omega_{13} &= f_1\,\omega_1 + \overline{\varepsilon_1}\,\omega_4 \\ \omega_{k,\,k+3} &= f_k\,\omega_1 + \overline{\varepsilon_k}\,\omega_4 \qquad (k = 2,\dots,\, n-4) \end{aligned}$$

les $\overline{\varepsilon_k}$ étant des coéfficients numériques.

En annulant f_1 ,..., f_{n-4} ce qui est possible, nous aurons

$$(51_{10})\ \omega_{13} = \overline{\varepsilon_1}\,\omega_4\ ,\ \omega_{k,\,k+3} = \overline{\varepsilon_k}\,\omega_4 \qquad (k = 2,\,\dots,\, n-4)$$

et ainsi de suite. On arrivera finalement aux relations

$$\begin{aligned} (51_{\,n+5})'\ \omega_{n,\,n-3} &= m_0\,\omega_1 + \overline{\lambda_0}\,\omega_{n-1} - \overline{c_0}\,\omega_{n-3} \\ \omega_{1,\,n-2} &= m_1\,\omega_1 + \overline{\lambda_1}\,\omega_{n-1} \end{aligned}$$

$\overline{\lambda_0}$ et $\overline{\lambda_1}$ étant deux nombres déterminés. Nous pourrons annuler m_1 et nous aurons

$$(51_{\,n+5})\ \omega_{1,\,n-2} = \overline{\lambda_1}\,\omega_{n-1}$$

et en dérivant extérieurement

$$(51_{\,n+6})\ (1 + \overline{\lambda_1})\,\omega_{1,\,n-1} - \overline{\lambda_1}\,\omega_{n,\,n-2} + \overline{c_0}\,\omega_{n-2} = n_1\,\omega_1$$

B. *La cooresponda*n*ce* C_{24}. *L'homographie* H.

39°. — Supposons choisi sur une hypersurface développable (s) en chaque point un repère (r) dont les composantes ω_{ik} soient restreintes en particulier à toutes las conditions (51_1), (51_2), . . , (51_{n+5}). Nous considérerons alors en chaque point d'une deuxième hypersurface (S) le repère $B\ B_1 \dots B_n$ ou (R) qui se déduit de (r) par la transformation homographique qui réalise l'application C_{24} de (s) sur (S) supposée possible.

Les composantés Ω_{ij} du repère (R) devront satisfaire à des conditions analogues à (51_1), (51_2), (51_3) et (51_4). L'applicabilité C_2 impose les relations [1])

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 = \omega_1\,, \Omega_2 = \omega_2\ \dots, \Omega_{n-1} = \omega_{n-1}\\
&\Omega_{ii} - \Omega_{00} = \omega_{ii} - \omega_{00}\ (i = 1, 2\ \dots, n-1)\\
&\Omega_{ij} = \omega_{ij}\,, \Omega_{in} = \omega_{in}\ (i \neq j, i\ j = 1, 2, \dots, n-1)
\end{aligned}$$

et cela montre d'abord que les Ω_{ij} devront satisfaire en plus aux relations analogues à (51_5), (51_6), ... , (51_{n+2}). Nous considérerons en fin de compte les repéres les plus généraux attachés à (S) et satisfaisant à toutes ces conditions. Celà est toujours possible si (s) est une hypersurface développable à arête de rebroussement proprement dite. Si celà est les Ω_{ij} satisferont également à toutes les relations analogues à $(51_3)'$, ... , $(51_{n+5})'$ et $(51_{n+6})'$ qu'on déduit par dérivation extérieure.

Dans ces conditions le système de Pfaff qui résout l'applicabilité C_{24} se réduit aux seules équations

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Omega_1 = \omega_1\,, \Omega_2 = \omega_2\,, \dots\ \Omega_{n-1} = \omega_{n-1}\\
&\Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}\,, \Omega_{1,\,n-1} = \omega_{1,\,n-1}
\end{aligned}\right.$$

qui conduisent à la seule equation extérieure

$$[\ \omega_1 (\Omega_{n,\,n-1} - \omega_{n,\,n-1} + A_{10}\,\omega_{n-1})\ ] = o$$

où $A_{10} = \overline{C}_0 - \overline{c}_0$ et $\overline{C}_0$ est le paramètre analogue à $\overline{c}_0$ relatif à (S) (§ 38°).

Le système (54) est en involution et sa solution depend d'une fonction arbitraire d'un argument.

40°. — De toutes les relations écrites on déduit facilement que si $i \neq n$ on a

$$(55)\quad \Omega_{ij} - \omega_{ij} = A_{ij}\,\omega_1$$

[1]) *Cartan* (8) p. 272.

de même

$$(55_1)\ \Omega_{ni} - \omega_{ni} = A_{ni}\,\omega_1\ ;\ (\iota = o, 1)$$

d'autre part

$$(55_2)\ \Omega_{nh} - \omega_{nh} = A_{nh}\,\omega_1 - A_{10}\,\omega_h \qquad (h = 2, 3, \ldots, n-1)$$

Si nous considérons alors un mouvement d'entrainement qui laisse le point A_{n-1} de l'arête de rebroussement fixe, c'est à dire tel que $\omega_1 = o$ on aura

$$\Omega_{ij} - \omega_{ij} = o \qquad (\iota \neq n)$$

autrement dit la correspondance entre les arêtes de rebroussement (peut qui être arbitraire) étant donnée, la correspondance ponctuelle entre les E_{n-2} générateurs est projective. De plus si on considère un déplacement laissant le point A lui méme fixe ($\omega_1 = \ldots = \omega_{n-1} = 0$) on a pour toute (ij)

$$\Omega_{ij} - \omega_{ij} = 0$$

Il en résulte qu'il y a une seule transformation homographique qui amène deux points correspondants en coïncidence de façon que l'application C_{24} ait lieu. Nous appellerons H cette homographie, dont nous verrons plus loin (§ 51^0 et suivants) des propriétés projectives intéressantes.

41^0. — Considérons maintenant le long de la coutbe C, arête de rebroussement de (s) le repère (r) qui se déduit de (r) en faisant d'écrire au point A une certaine courbe de (s) non situé dans un E_{n-2} générateur et soit $\omega_1 = d\tau$ ét $\omega_{ij} = \alpha_{ij}\,d\tau$, τ étant un paramètre de position sur C; les α_{ij} sont des fonctions bieu déterminées de τ. Soient $A, A_1, \ldots, A_n$ les sommets du repère (r) que nous allons faire correspondre respectivement à

$$A_{n-1},\ A_{n-2},\ \ldots,\ A_2,\ A,\ A_1,\ A_n$$

et nous allons désigner par $\tilde{\omega}_{ij}$ les composantes du mouvement instantané de (r), Les $\tilde{\omega}_{ij}$ se déduisent des $\omega_{i,j,} = \alpha_{i,j,}\,d\tau$ par la substitution d'indices

$$n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 2,\ 0,\ 1,\ n$$

respectivement en

$$0,\ 1,\ \ldots,\ n-3,\ n-2,\ n-1,\ n$$

et doivent satisfaire en particulier aux relations suivantes qu'on tire de (51_1), (51_2), (51_3) et (51_4) par cette substitution:

$$(56)\left\{\begin{array}{l} \tilde{\omega}_{n-2,\,n}=0 \\ \tilde{\omega}_{n-1,\,n}=\tilde{\omega}_{n-2,\,n-1},\ \tilde{\omega}_{n}=\tilde{\omega}_{1n}=\ldots=\tilde{\omega}_{n-3,\,n}=0 \\ \tilde{\omega}_{nn}-2\,\tilde{\omega}_{n-1,\,n-1},\ \tilde{\omega}_{n}+\tilde{\omega}_{n-2,\,n-2}=0 \\ \tilde{\omega}_{n-1}=\tilde{\omega}_{1,\,n-1}=\tilde{\omega}_{2,\,n-1}=\ldots=\tilde{\omega}_{n-3,\,n-1} \\ \tilde{\omega}_{n-2,\,n-3}-3\,\tilde{\omega}_{n-1,\,n-2}+3\,\tilde{\omega}_{n,\,n-1}=0 \\ \tilde{\omega}_{n-3\;n-2}=\tilde{\omega}_{n-2,\,n-1},\ \tilde{\omega}_{n-2}=\tilde{\omega}_{1,\,n-2}=\ldots=\tilde{\omega}_{n-4,\,n-2}=0 \end{array}\right.$$

et de même aux relations qu'on déduit de (51 bis) par la même substitution.

Remarquons bien que les repères définis plus haut (§ 31°) satisfont à ces conditions. Nous allons désigner par $B\,B_1\ldots B_n$ ou (R) le repère le long de l'arête de rebroussement C_1 de (S), qui se déduit de (r) de la même manière que (R) de (r) et par π_{ij} ses composantes du mouvement instantané. Les π_{ij} satisferont eux aussi aux relations suivantes

$$(57)\left\{\begin{array}{l} \pi_{n-2,\,n}=0 \\ \pi_{n-1,\,n}=\pi_{n-2,\,n-1},\ \pi_{n}=\pi_{1n}=\ldots=\pi_{n-3,\,n}=0 \\ \pi_{nn}-2\,\pi_{n-1,\,n-1}+\pi_{n-2,\,n-2}=0 \\ \pi_{n-1}=\pi_{1,\,n-1}=\pi_{2,\,n-1}=\ldots=\pi_{n-3,\,n-1}=0 \\ \pi_{n-2,\,n-3}-3\,\pi_{n-1,\,n-2}+3\,\pi_{1,\,n-1}=0 \\ \pi_{n-3,\,n-2}=\pi_{n-2,\,n-1},\ \pi_{n-2}=\pi_{1,n-2}=\ldots=\pi_{n-4,\,n-2}=0 \\ \pi_{n-2,\,i}=\tilde{\omega}_{n-2,\,i}\ \ (i=0,\,1,\,\ldots,\,n-3\ \text{et}\ n-1) \\ \pi_{ii}-\pi_{00}=\tilde{\omega}_{ii}-\tilde{\omega}_{00},\ \pi_{n}=\tilde{\omega}_{in}\ \ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n-1) \\ \pi_{ij}=\tilde{\omega}_{ij}\ \ (i\neq j;\ i,j=0,\,1,\,\ldots,\,n-3\ \text{et}\ n-1) \end{array}\right.$$

relations qui d'ailleurs ne sont pas toutes indépendentes si l'on tient compte de (56).

Avec ces considérations nous pourrons écrire le système de relations (57), en se servant des notations déjà employées (§ 31°) sous la forme équivalente :

$$(T^{(0)})\left\{\begin{array}{ll} (T_0^{(0)}) & \left\{\begin{array}{l} E_{ik}=0 \\ E_{00}=E_{11}=\ldots=E_{nn} \end{array}\right. \\ (T_1^{(0)}) & E_{10}=E_{21}=\ldots=E_{n-2,\,n-3}=0,\ E_{n-1,\,n-2}=E_{n,\,n-1} \\ (T_2^{(0)}) & E_{20}=E_{31}=\ldots=E_{n-1,\,n-3}=0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (T_{n-1}^{(0)}) & E_{n-1,\,0}=0 \end{array}\right.$$

C. *Relations entre les correspondances* C_{24}, T_1, T^2, T_3 *et* T_4.

42^0. — Une comparaison des systèmes de relations $(T^{(0)})$, $(T^{(1)})$, $(T^{(2)})$, $(T^{(3)})$ et $(T^{(4)})$ (§§ 41^0, 31^0, 33^0, et 34^0) qui se refèrent aux correspondances C_{24}, T_1, T_2, T_3 et T_4 nous permettra aisément de tirer plusieurs conclusions intéressantes.

Remarquons en premier lieu que dans tous ces systémes le premier groupe de relations $(T_o^{(i)})$ $(i = o, 1, \ldots, 4)$ est le même et que de ces relations seules on tire tout d'abord.

$$E_{10} = A_{10}\,\tilde{\omega}_1,\ E_{21} = A_{21}\,\tilde{\omega}_1 \ldots,\ E_{n,\,n-1} = A_{n,\,n-1}\,\tilde{\omega}_1.$$

Si Δ est alors un déplacement d'entraînement compatible avec ces relations et laissant fixe le point A $(\tilde{\omega}_1(\Delta) = o)$, on aura

$$\Delta\,A = o, \quad \Delta\,A_1 = o, \quad \Delta\,[AA_2] = o, \quad \Delta\,[AA_1\,A_3] = o, \quad \text{etc...}$$

ce qui prouve que lorsque la correspondance entre les arêtes de rebroussement est donnée, ces relations déterminent à elles seules les positions des points B et B_1, de la droite $[B\,B_2]$ de l'élément plan $[B\,B_1\,B_3]$ etc... autrement dit on a

$$B_1 = B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = B_1^{(3)} = B_1^{(4)} \tag{58}$$

puis

$$\left\{\begin{array}{l} B_2^{(i)} = B_2 + u_2^{(i)}\,B \\ B_3^{(i)} = B_3 + u_3^{(i)}\,B_1 + v_3^{(i)}\,B \\ \text{— — — — — — — —} \end{array}\right. \tag{59}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

On tire d'un autre côté des relations dont on parle au début en tenant compte des relations (56) et analogues

$$\pi_{ij} = o \qquad (i < j - 1, \quad j = 2 \ldots, n)$$

puis

$$\pi_1 = \pi_{12} = \ldots = \pi_{n-1,\,n} \tag{60}$$

et

$$\pi_{00} + \pi_{11} + \ldots + \pi_{nn} = o \tag{61}$$

ce qui nous permettra de poser

$$\pi_1 = \lambda\,dt \tag{62}$$

t étant un paramètre de position sur C_1 et λ un paramètre arbitraire.

De la dérivation extérieure de relations (60^1) en tenant compte de (61) et (62) nous tirerons

$$\pi_{ii} = \frac{n-2i}{2}\left(\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{u}{n}dt\right) = (i = o, 1, \dots, n)$$

et par un calcul simple, en dérivant de nouveau extérieurement ces dernières relations, nous trouverons,

$$(63)\quad \pi_{i+1,\,i} = \frac{(i+1)\ (n+i)}{2\,n}\left(\frac{du}{\lambda} - \frac{u^2}{2\,n\,\lambda}\,dt + \frac{\varphi(t)}{\lambda}\,dt\right) +$$

$$(c_{i+2} - c_{i+1})\,dt \qquad (i = o, \dots, n-1)$$

avec $c_1 = c_{n+1} = o$, u et les c_i étant des nouveaux paramètres, $\varphi(t)$ une fonctions bien déterminée de t. Nous aurons alors

$$(64)\qquad \pi_{10} + \pi_{21} + \dots + \pi_{n,\,n-1} = \frac{(n+1)\ (n+2)}{12} \times$$

$$\left(\frac{du}{\lambda} - \frac{u^2}{2n\lambda}\,dt + \frac{\varphi}{\lambda}\,dt\right)$$

Enfin la dérivation extérieure des relations (63), nous permettra de poser

$$(65)\qquad \pi_{20} + \pi_{31} + \dots + \pi_{n,\,n-2} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=2}^{n} d\,c_i - \frac{d\lambda}{\lambda^2}\sum_{i=2}^{n} c_i +$$

$$+\left(\frac{2\,u}{n\,\lambda}\sum_{i=2}^{n} c_i + \frac{\Psi(t)}{n\,\lambda^2}\right)dt$$

$\Psi(t)$ étant une nouvelle fonction déterminée de t.

Posons d'autre part avec les notations du § précédent

$$(66)\qquad \alpha_{10} + \dots + \alpha_{n,\,n-1} = \frac{1}{12}(n+1)\ (n+2)\,\alpha$$

et

$$(67)\qquad \alpha_{20} + \dots + \alpha_{n,\,n-2} = \beta$$

Celà étant nous tirerons de $E_1 = o$

$$\lambda\,dt = d\,\tau$$

d'où

$$\tau = f(t)\ ,\ \lambda = f'(t)$$

puis de $E_{00} = o$.

$$u = n\,\frac{f''}{f'} - 2\,\alpha_{00}\,f'.$$

On déduit de là, par (64) et (66), en tenant campte des valeurs de u et λ

$$
(68) \quad \left\{ \begin{aligned} & E_{10} + E_{21} + \ldots + E_{n,n-1} = \\ & \quad = \frac{(n+1)(n+2)}{12} \left(\frac{du}{\lambda} - \frac{u^2}{2n\lambda} dt + \frac{\varphi}{\lambda} dt - \alpha f' dt \right) = U \omega_1 \end{aligned} \right.
$$

où

$$
U = \frac{(n+1)(n+2)}{12} \left\{ n \left(\frac{f'''}{f'^3} - \frac{3}{2} \frac{f''^2}{f'^2} \right) - 2\alpha'_{00} + 2\alpha_{00} \frac{f''}{f'^2} + \frac{4}{n} \alpha_{00}^2 + \frac{\varphi}{f'^2} - \alpha \right\}
$$

et *si la correspondance entre les arêtes de rebroussement est donné* (donc si la fonction $f(t)$ est connue) U sera une fonction bien déterminée de t.

43°. — Ces considérations générales ayant été développées prenons pour commencer le cas $n = 3$. Soit M un point quelconque de la surface développable (S); nous aurons

$$
M = A_1 + \alpha A
$$

Soient N, N_1, N_2, N_3 et N_4 les points de (S) qui correspondent à M par les correspondances C_{24}, T_1, T_2, T_3 et T_4. On aura

$$
\begin{aligned} N &= B_1 + \alpha B \\ N_i &= B_1^{(i)} + \alpha B^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}
$$

et d'après (58)

$$
N = N_1 = N_2 = N_3 = N_4,
$$

par conséquent *les correspondances* C_{24}, T_1 T_2, T_3 *et* T_4 *sont identiques dans l'espace à trois dimensions.*

44°. — Soit maintenant dans un E_4, M un point de l'hypersurface développable (S) et N, N_1 N_2, N_3 et N_4 les points qui se déduisent de M par les correspondances C_{24}, T_1, T_2, T_3 et T_4. Nous aurons

$$
\begin{aligned} M &= A_2 + \alpha A_1 + \beta A \\ N &= B_2 + \alpha B_1 + \beta B \\ N_i &= B_2^{(i)} + \alpha B_1^{(i)} + \beta B^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}
$$

et d'après (58) et (59)

$$
N = N + u_2^{(i)} B
$$

par conséqent *dans un espace à quatre dimensions les points* N, N_1, N_2, N_3 *et* N_4 *sont en ligne droite avec le point correspondant* B *de l'arête de rebroussement.*

Les relations $(T_1^{(h)})$ nous donnent ensuite en tenant compte de (68)

$$E_{10}^{(0)} = o, \qquad E_{10}^{(1)} = \frac{U}{5}\,\tilde{\omega}_1 \quad E_{10}^{(2)} = \frac{U}{10}\,\tilde{\omega}_1,$$
$$E_{10}^{(3)} = \frac{U}{5}\,\tilde{\omega}_1, \quad E_{10}^{(4)} = \frac{2U}{5}\,\tilde{\omega}_1.$$

D'autre·part les relations

$$B_1^{(0)} = B_1^{(i)}$$

nous donnent en différentiant et identifiant le coéfficients de B:

$$\pi_{10}^{(i)} = \pi_{10}^{(0)} - u_2^{(i)}\,\pi_1$$

par conséquent

$$E_{10}^{(i)} = E_{10}^{(0)} - u_2^{(i)}\,\pi_1 = - u_2^{(i)}\,\tilde{\omega}_1$$

ou aura ainsi

$$u_2^{(1)} = -\frac{1}{5}\,U, \qquad u_2^{(2)} = -\frac{1}{10}\,U,$$
$$u_2^{(3)} = -\frac{1}{5}\,U, \qquad u_2^{(4)} = -\frac{2}{5}\,U,$$

par conséquent

$$N_1 = N - \frac{1}{5}\,U\,B, \qquad N_2 = N - \frac{1}{10}\,U\,B$$
$$N_3 = N - \frac{1}{5}\,U\,B, \qquad N_4 = N - \frac{2}{5}\,U\,B.$$

Nous déduisons ainsi que *les points* N_1 *et* N_3 *sont confundus et quatre quelconques des cinq points* B, N, N_1, N_2 *et* N_4 *forment des rapports anharmoniques numériques fixes.*

45^0. — Passons maintenant au cas $n=5$. Nous aurons d'après les relations $(T_1^{(h)})$ et (68)

$$E_{10}^{(0)} = o \quad , \quad E_{21}^{(0)} = o$$
$$E_{10}^{(1)} = \tfrac{1}{7}\,U\,\tilde{\omega}_1 \quad , \quad E_{21}^{(1)} = \tfrac{8}{35}\,U\,\tilde{\omega}_1$$
$$E_{10}^{(2)} = \tfrac{1}{15}\,U\,\tilde{\omega}_1 \quad , \quad E_{21}^{(2)} = \tfrac{2}{15}\,U\,\tilde{\omega}_1$$
$$E_{10}^{(3)} = \tfrac{1}{7}\,U\,\tilde{\omega}_1 \quad , \quad E_{21}^{(3)} = \tfrac{8}{35}\,U\,\tilde{\omega}_1$$
$$E_{10}^{(4)} = \tfrac{1}{3}\,U\,\tilde{\omega}_1 \quad , \quad E_{21}^{(4)} = \tfrac{4}{15}\,U\,\tilde{\omega}_1$$

et de

$$d\,B_1 = d\,B_1^{(i)}$$

nous déduirons par l'identification des coéfficients en B

$$u_2^{(1)} = -\tfrac{1}{7}\,U \;,\; u_2^{(2)} = -\tfrac{1}{15}\,U \;,\; u_2^{(3)} = -\tfrac{1}{7}\,U \;,\; u_2^{(4)} = -\tfrac{1}{3}\,U$$

De même la différentiation des relations

$$B_2^{(i)} = B_2 + u_2^{(i)}\,B$$

et l'identification des coéfficients de B_1 nous donne

$$(69)\qquad u_3^{(1)} = -\tfrac{13}{35}\,U,\; u_3^{(2)} = -\tfrac{1}{5}\,U,\; u_3^{(3)} = -\tfrac{13}{35}\,U,\; u_3^{(4)} = -\tfrac{1}{5}\,U$$

tandis que l'identification des coéfficients en B nous donnera

$$(70)\qquad v_3^{(i)}\,\tilde{\omega}_1 = -\pi_{20}^{(i)} + \pi_{20}^{(o)} + du_2^{(i)} = -E_{20}^{(i)} + du_2^{(i)}$$

relations qui nous se viront plus tard (§ 46°).

M, N, N_1, N_2, N_3 et N_4 ayant toujours la même signification on aura

$$\begin{aligned} M &= A_3 + \alpha A_2 + \beta A_1 + \gamma A \\ N &= B_3 + \alpha B_2 + \beta B_1 + \gamma B \\ N_i &= B_3^{(i)} + \alpha B_2^{(i)} + \beta B_1^{(i)} + \gamma B^{(i)} \end{aligned}$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

et en vertu des relations (59)

$$N_i = N + u_3^{(i)}\,B_1 + (\alpha\,u_2^{(i)} + v_3^{(i)})\,B$$

par conséquent

$$[B\,N_i] = [B\,N] + u_3^{(i)}\,[B\,B_1]$$

ainsi *dans un espace à cinq dimensions les points* N, N_1, N_2, N_3 *et* N_4 *sont dans un même* E_2 *passant par la tangente* $B\,B_1$ *correspondante de l'arête de rebroussement.*

Les expressions trouvées pour les $u_3^{(i)}$ nous montrent en plus que *les droites* $B\,N_1$ *et* $B\,N_3$ *sont confondues et que les rapports anharmoniques de quatre quelconques des cinq droites* $B\,B_1$, $B\,N_1$, $B\,N$, $B\,N_2$ *et* $B\,N_4$ *sont des nombres fixes.*

46°. — Nous pouvons aller plus loin. Posons

$$V = \frac{1}{5}(\Psi - \beta) \quad , \quad U' = \frac{d\,U}{d\,t}$$

Ψ et β étant les fonctions de t et de τ qui figurent au § 42°; des relations auxquelles sont supposées satisfaire les $\vartheta_{i+1,i}$ en particulier (§ 31⁰) et de (66) nous tirerons d'abord

$$\alpha_{i+1,i} = \frac{(i+1)(n-1)}{2n}\alpha$$
$$(n=5,\ i=o,\ 1,\ \dots,\ 4)$$

d'où en tenant comte de (63) et (68),

$$\mathrm{E}_{i+1,i} = \frac{(i+1)(n-i)}{2n}\left(\frac{du}{\lambda} - \frac{u^2}{2n\lambda}dt + \frac{\varphi}{\lambda}dt - \alpha f' dt\right) + (c_{i+2} - c_{i+1})dt =$$
$$= \frac{(i+1)(n-i)}{2n}\mathrm{U}\,\tilde{\omega}_1 + (c_{i+2} - c_{i+1})\,dt.$$

Un calcul direct des $\mathrm{E}^{(h)}_{i+1,i}$ d'après les relations $(\mathrm{T}^{(h)}_1)$ comme nous l'avons fait plus haut pour $\mathrm{E}^{(h)}_{10}$ et $\mathrm{E}^{(h)}_{21}$ (§ 45⁰) nous donnerons par comparaison $c^{(h)}_2$, $c^{(h)}_3$, $c^{(h)}_4$ et $c^{(h)}_5$, que nous introduirons dans (65) et obtiendrons ainsi les expressions de

$$\pi^{(h)}_{20} + \pi^{(h)}_{31} + \pi^{(h)}_{42} + \pi^{(h)}_{53}\ (h=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

et en tenant compte de (67) pour

$$\mathrm{E}^{(h)}_{20} + \mathrm{E}^{(h)}_{31} + \mathrm{E}^{(h)}_{42} + \mathrm{E}^{(h)}_{53}.$$

Lés relations $(\mathrm{T}^{(h)}_2)$ nous donneront après, en particulièr,

$$\mathrm{E}^{(0)}_{20} = 0,\ \mathrm{E}^{(1)}_{20} = \frac{4}{35}\mathrm{V},\ \mathrm{E}^{(2)}_{20} = \frac{3}{40}\mathrm{U}' + \frac{1}{20}\mathrm{V}$$
$$\mathrm{E}^{(3)}_{20} = \frac{2}{7}\mathrm{V},\ \mathrm{E}^{(4)}_{20} = \frac{3}{4}\mathrm{U}' + \frac{1}{2}\mathrm{V}$$

et par conséquent (d'après (69) et (70))

$$v^{(1)}_3 = -\frac{1}{f'}\left(\frac{1}{5}\mathrm{U}' + \frac{4}{35}\mathrm{V}\right)\quad v^{(2)}_3 = -\frac{1}{f'}\left(\frac{7}{40}\mathrm{U}' + \frac{1}{20}\mathrm{V}\right)$$
$$v^{(3)}_3 = -\frac{1}{f'}\left(\frac{1}{5}\mathrm{U}' + \frac{2}{7}\mathrm{V}\right),\quad v^{(4)}_3 = \frac{1}{f'}\left(\frac{7}{20}\mathrm{U}' - \frac{1}{2}\mathrm{V}\right).$$

d'où enfin par (59) nous obtiendrons la relation définitive

$$24\,\mathrm{N} + 35\,\mathrm{N}_1 - 60\,\mathrm{N}_2 + 7\,\mathrm{N}_3 - 6\,\mathrm{N}_4 = 0.$$

Considérons alors les points

$$\mathrm{Q}_1 = 5\,\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_3,\ \mathrm{Q}_2 = 10\,\mathrm{N}_2 + \mathrm{N}_4$$
$$\mathrm{P} = \mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_3,\ \mathrm{P}_1 = \mathrm{N}_2 - \mathrm{N}_4$$
$$\mathrm{P}_2 = 11\,\mathrm{Q}_1 - 6\,\mathrm{Q}_2\,;$$

le point P se confond avec B tandis que P_1 et P_2 sont sur la tangente à l'arête de rebroussement. D'autre part on a

$$24\,N = 6\,Q_2 - 7\,Q_1$$

par conséquent

$$(P\,Q_1\,N_1\,N_3) = -5,\ (M_1\,Q_2\,N_2\,N_4) = -10,\ (M_2\,N\,Q_1\,Q_2) = \frac{7}{11}.$$

Ainsi *la droite* $N_3\,N_4$ *coupant la tangente en* B *à l'arête de rebroussement en un point* P_1, *il existe une droite* $Q_1\,N\,Q_2\,P_2$ *passant par* N, *qui coupe la droite* $N_1\,N_3$ (qui passe par B) *en un point* Q_1, *la droite* $N_2\,N_4$ *en un point* Q_2 *et la tangente en* B *à l'arête de rebroussement en un point* P_2 *et telle que les raports anharmoniques* $(B\,Q_1\,N_1\,N_3)$, $(P_1\,Q_2\,N_2\,N_4)$ *et* $(P_2\,N\,Q_1\,Q_2)$ *sont des nombres fixes*

47⁰. — Tous ces théorèmes peuvent se généraliser facilement pour $n > 5$. Nous en enoncerons quelques uns sans donner aucune démonstration, qui d'ailleurs n'offre pas de difficulté.

Les points N, N_1, N_2, N_3, N_4 *sont dans un même* E_{n-3} *passant par le* E_{n-4} *osculateur à l'arête de rebroussement en* B.

Le E_{n-4} *osculateur et trois quelconques des* E_{n-4} *passant par le* E_{n-5} *osculateur et par un des points* N, N_1, N_2, N_3, N_4 *font des rapports anharmoniques numériques fixes.*

48⁰. — On a un cas particulier intéressant si $U = 0$. Celà correspond au cas où la correspondance entre les arêtes de rebroussement est homographique (§ 35⁰). On a, en effet, dans ce cas

$$E_{10}^{(1)} = 0$$

par conséquent la $C_{2,n+2}$ entre C et C_1 (qui servait à la définition de la correspondance T_1) est aussi une $C_{3,n-2}$ (cf. § 35⁰).

On a alors les théorèmes suivants pour lesquels nous passerons la démonstration :

Les points N, N_1, N_2, N_3, N_4 *sont dans un même* E_{n-4} *passant par le* E_{n-5} *osculateur.*

Pour $n = 5$, *le rapport anharmonique de quatre quelconques des points* B, N, N_1, N_2, N_3, N_4 *sont des nombres fixes.*

Pour $n \geqq 6$, *le* E_{n-5} *osculateur et trois quelconques des* E_{n-5} *passant par le* E_{n-6} *osculateur et par un quelconque des points* N, N_1, N_2, N_3, N_4 *font des rapports anharmoniques numériques fixes.*

Enfin par une démonstration un peu plus compliquée on pourrait obtenir pour $n=6$, dans le cas où la correspondance entre les arêtes de rebroussement est homographique, le théorème suivant, analogue à celui qui a été trouvé plus haut (§ 46⁰).

Si les droites $N_1 N_3$ *et* $N_2 N_4$ *coupent la tangente en* B *à l'arête de rebroussement aux points* P_1 *et* P_2 *il existe une droite passant par* N *qui coupe les droites* $N_1 N_3$, $N_2 N_4$ *et la tangente en* B *respectivement en* Q_1, Q_2 *et* P_3, *telle que les rapports anharmoniques* $(P_1 Q_1 N_1 N_3)$, $(P_2 Q_2 N_2 N_4)$ *et* $(P_3 N Q_1 Q_2)$ *sont des nombres fixes.*

D. *La correspondance* C_{25}.

49⁰. — Nous dirons, dans ce qui suit, quelques mots sur les correspondances C_{2k} $(k \geq 5)$.

Si nous tenons compte les formules (51_5), (53) la forme φ_5 devient pour l'hypersurface (s)

$$\varphi_5 = a x_1^5 - 5 x_1^4 x_3$$

et pour l'hypersurface (S)

$$\Phi_5 = A X_1^5 - 5 X_1^4 X_3$$

et si le deux hypersurfaces ont un contact du $5^{\text{-me}}$ ordre on a

$$a = A$$

d'où nous déduirons

(71) $$\Omega_{n0} = \omega_{n0}.$$

C'est cette équation qu'il faut ajouter au système de la C_{24} pour obtenir celui de la C_{25}.

Mais la dérivation extérieure de la relation (53) et de la relation analogue nous donne

$$[\omega_1 (d a + 3 a \overline{\omega_{11} - \omega_{00}} + \theta_1 \omega_{13} + \theta_2 \omega_4 + \frac{1}{3} \overline{c_0} \omega_2)] = 0$$

$$[\Omega_1 (d A + 3 A \overline{\Omega_{11} - \Omega_0} + \theta_1 \Omega_{13} + \theta_2 \Omega_4 + \frac{1}{3} \overline{C_0} \Omega_2)] = 0$$

θ_1 et θ_2 étant deux nombres déterminés, $\overline{c_0}$ le paramètre introduit dans (52 bis) et $\overline{C_0}$ le paramètre analogue pour (S). Si $a = A$ on déduit

$$\frac{1}{3} (\overline{C_0} - \overline{c_0}) [\omega_1 \omega_2]$$

par conséquent

$$\overline{C_0} = \overline{c_0}$$

et en tenant compte de (52 bis)

(72) $$\Omega_{10} = \omega_{10}$$

Avec les notations du § 41^0 de (71) et (72) on déduit:

(73) $$\begin{cases} E_{n-1,\, n-2} \left(= E_{n,\, n-1} \right) = 0 \\ E_{n,\, n-2} = 0. \end{cases}$$

La première relation montre que $U = 0$, par conséquent *la correspondance entre les arête de rebroussement est homographique*, mais cette condition n'est pas suffisante, car il faut tenir compte de la 2-me relation (73).

Réciproquement si (73) sont satisfaites pour les repères à un paramètre que nous venons de considérer, les relations (71) et (72) seront aussi satisfaites pour les repères à plusieurs paramètres (§ 41^0), comme on se rend compte par un calcul facile que nous omettrons et alors la C_{24} sera une C_{25}.

Les équations $(T_1^{(0)})$, $(T_2^{(0)})$ et $(T_3^{(0)})$ dela C_{24} prennent dans notre cas la forme très simple

$$E_{ik} = 0 \qquad i < k + 2$$

et on se rend facilement compte que ces équations sont indépendantes du choix du repère (r) pourvu qu'il soit tel que le E_i

$$[\, A\, A_1 \; . \, A_i \,]$$

soit le E_i osculateur à l'arête de rebroussement. Nous pourrons alors prendre comme repère (r) le rèpere de Frenet défini au § 22^0; le repère (R) ne sera pas nécessairement un repère de Frenet pour C_1. Deux cas peuvent se présenter.

a) La courbe C est singulière de 1re expèce. La 2me relation (73) exige alors que C_1 soit aussi *au moins* de la 1re expéce et cette relation se satisfera alors d'elle-même. Il suffit alors d'établir entre les arêtes de rebroussement C et C_1 une correspondance homographique pour que la C_{24} soit une C_{25}.

La C_{25} entre deux hypersurfaces dout les arêtes de rebroussement sont des courbes singulières est toujours possible et dépend de trois constantes arbitraires.

b) La courbe C n'est pas singulière. On a alors

$$\tilde{\omega}_{20} = d\sigma \;,\; \tilde{\omega}_{10} = n\rho\, d\sigma$$

σ étant l'are projectif et ρ un invariant projectif de C (§ 22⁰).
Mais on a aussi

$$\pi_{20} = d\Sigma \ , \ \pi_{10} = n \, \mathrm{R} \, d \, \Sigma$$

Σ étant l'are projectif et R l'invariant de C_1 analogue à ρ, car les relations (39_1), (39_2),.., (39_5) du § 22^0, qui suffisent à définir ces éléments, seront vérifiées.

Nous aurons alors

$$d\,\Sigma = d\sigma \ , \ \mathrm{R} = \rho.$$

et ces conditions seront alors suffisantes. Par conséquent *la* C_{25} *entre deux hypersurfaces* (*s*) *et* (S) *dont les arêtes de rebroussement ne sont pas singulières, n'est pas toujours possible; lorsqu'elle est possible elle dépend tout au plus d'une constante arbitraire.*

50^0. — Quelque soit le cas où la C_{25} est possible, dans un E_5 par exemple, nous aurons d'après § 46^0

$$\mathrm{V} = o$$

et nous concluerons que *pour* $n = 5$ *les correspondances* C_{25}, T_1, T_2, T_3 *et* T_4 *sont identiques.*

Ce rèsultat nous fait déjà pressentir le théorème suivant que nous énoncerons sans démonstration :

Pour $n = 6$, *les points* N, N_1, N_2, N_3 *et* N_4 *sont en ligne droite avec le point* B *de l'arête de rebroussement et les rapports anharmoniqnes de quatre quelconques des points* B, N_1, N_2, N_3 *et* N_4 *sont des nombres fixes.*

De la même manière on peut énoncer la théorème plus géneral :

Pour $n \geq 7$ *les points* N, N_1, N_2, N_3 *et* N_4 *sont dans un même* E_{n-5} *passant par le* E_{n-6} *osculateur et trois quelconques des* E_{n-6} *passant par le* E_{n-7} *osculateur et par un quelconque des points* N, N_1, N_2, N_3 *et* N_4 *forment des rapports anharmoniques numériques fixes.*

Des résultats analogues s'obtiennent si nous considérons les correspondances C_{2k} avec $k > 5$. Nous n'insisterons pas davantage.

E. *Propriétés spéciales de l'homographie* H *dans un* E_3 *ou* E_4.

51°. — Le problème que nous nous proposons maintenant est d'une façon générale le suivant : Trouver en chaque couple de points correspondants quelles sont sur deux hypersurfaces développables (s) et (S) les variétés v_k et V_k se correspondant par la C_{24} et passant par ces points, qui par l'homographie H (§ 41°) viendront en contact du 3^{me} ordre (elles auront toutes d'après la définition de la C_2 un contact du 2^e ordre).

Pour traiter ce problème nous reviendrons aux considérations du § 13°. Suivant les conditions de la C_2, si $x_1,\dots, x_n$; $X_1,\dots, X_n$ sont les coordonnées non homogènes des points des deux variétés exprimées paramétriquement en fonction de $u_1,\dots, u_k$ de manière qu'à deux points se correspondant par la C_2 correspondent les mêmes valeurs des paramètres, on a pour $u_1 = u_1^0,\dots,$ $u_k = u_k^0$

$$X_i = x_i \quad , \quad \frac{\partial X_i}{\partial u_r} = \frac{\partial x_i}{\partial u^r} \quad , \quad \frac{\partial^2 X_i}{\partial u_r\, \partial u_s} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s}$$

par conséquent on aura

$$X_i = (x_i)_0 + \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\right)_0 (u_r - u_r^0) + \tag{74}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s}\right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)$$
$$+ \frac{1}{6}\, P_i^{(3)}(u_r - u_r^0) + \frac{1}{24}\, P_i^{(4)}(u_r - u_r^0) + \ldots$$

$P_i^{(s)}$ désignant d'une manière générale un polynome homogène de degré s en $u_1 - u_1^0,\dots, u_k - u_k^0$, les coéfficients étant des fonctions de $u_1^0,\dots, u_k^0$. On aura aussi par conséquent

$$X_i = x_i + \frac{1}{6}\, \overline{P}_i^{(3)}(u_r - u_r^0) + \dots$$

où

$$\overline{P}_i^{(3)} = P_i^{(3)} - \sum_{r,s,t=1}^{k} \left(\frac{\partial^3 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s\, \partial u_t}\right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)(u_t - u_t^0)$$

et avec le choix du § 11°.

$$X_i = x_i + \overline{P}_i^{(3)}(x_1, \ldots x_k) + \ldots \tag{75}$$

En dérivant les formules (74) par rapport aux u_r^0, on aura, comme ailleurs, après simplifications

$$\Delta X_i = \frac{1}{2} \sum_{r,s,t=1}^{k} \left(\frac{\partial^3 x_i}{\partial u_r \partial u_s \partial u_t}\right)_0 (u_r - u_r^0)(u_s - u_s^0)\, du_t^0 - $$
$$- \frac{1}{6} \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial P_i^{(3)}}{\partial (u_r - u_r^0)}\, du_r^0 + \dots$$

et avec le choix du § 11°.

(76)
$$\Delta X_i = \frac{1}{2} \sum_{r,s,t=1}^{k} \left(\frac{\partial^3 x_i}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t}\right)_0 x_r x_s \omega_t - \frac{1}{6} \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial P_i^{(3)}}{\partial x_r} \omega_r + \dots$$

L'identification de ce développement avec le développement (15) nous fournira dans la suite les relations qui nous seront utiles.

52°. — Pour traiter le cas des hypersurfaces développables nous prendrons comme repères (r) et (R) du § 13° les repères (r) et (R) du § 39° et nous tiendrons compte des relations auxquelles ces repères sont assujetis satisfaire.

Considérons d'abord le cas des surfaces développables de E_3. Nous avons d'après § 36°.

(77)
$$x_3 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{6} x_1^3 x_2 + \dots$$

Les relations (76) deviennent ici

(78)
$$\Delta X_i = -\frac{1}{6} \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial P_i^{(3)}}{\partial x_r} \omega_r + \dots \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Suivant les relations (55) on a

(79)
$$\left\{\begin{aligned} E_{10} &= E_{31} = A_{10}\, \omega_1 \\ E_{30} &= A_{30}\, \omega_1 \\ E_{32} &= A_{32}\, \omega_1 - A_{10}\, \omega_2 \end{aligned}\right.$$

les autres E_{ij} étant nuls. Ces relations nous donnent d'ailleurs par dérivation extérieure immédiatement les relations suivantes

(80)
$$\left\{\begin{aligned} d\, A_{10} &= (A_{10}^{(1)} - A_{30})\, \omega_1 - 4\, A_{10}\, \omega_{00} \\ d\, A_{30} &= A_{30}^{(1)}\, \omega_1 - \frac{4}{3} A_{10}\, \omega_2 - 6\, A_{30}\, \omega_{00} \\ d\, A_{32} &= A_{32}^{(1)}\, \omega_1 - A_{10}^{(1)}\, \omega_2 - 2\, A_{10}\, \omega_{12} - 8\, A_{32}\, \omega_{00} \end{aligned}\right.$$

et la nouvelle dérivation extérieure de la première de ces relations nous donne

$$(81) \qquad d\,A_{10}^{(1)} = (A_{10}^{(11)} + A_{30}^{(1)})\,\omega_1 - \frac{8}{3} A_{10}\,\omega_2 - 6\,A_{10}^{(1)}\,\omega_{00}$$

Si nous tenons compte de (75) et (79) le développement (15) s'écrit

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2} A_{10}\, x_1^2\,\omega_1 + \ldots$$

$$\Delta X_2 = (-\frac{1}{2} A_{32}\, x_1^2 + A_{10}\, x_1\, x_2)\,\omega_1 + \frac{1}{2} A_{10}\, x_1^2\,\omega_2 + \ldots$$

$$\Delta X_3 = \ldots$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au 2^{me}. La comparaison avec (78) nous donnera tout de suite

$$P_1^{(3)} = -A_{10}\, x_1^3$$
$$P_2^{(3)} = A_{32}\, x_1^3 - 3\,A_{10}\, x_1^2\, x_2$$
$$P_3^{(3)} = 0$$

et par conséquent

$$(82) \quad \begin{cases} X_1 = x_1 - \dfrac{1}{6} A_{10}\, x_1^3 + \ldots \\ X_2 = x_2 + \dfrac{1}{6} A_{32}\, x_1^3 - \dfrac{1}{2} A_{10}\, x_1^2\, x_2 + \ldots \\ X_3 = x_3 + \ldots \end{cases}$$

Celà étant l'équation d'une courbe passant par A pourra s'écrire d'après (77)

$$x_2 = m\, x_1 + n\, x_1^2 + p\, x_1^3 + \ldots$$
$$x_3 = \frac{1}{2} x_1^2 + \ldots$$

et si cette courbe a un contact du 3^{me} ordre avec sa correspondante on doit avoir

$$X_2 = m\, X_1 + n\, X_1^2 + p\, X_1^3 + \ldots$$
$$X_3 = \frac{1}{2} X_1^2 + \ldots$$

Remplaçons dans ces relations X_1, X_2, X_3 par les développements (82) et identifions; nous trouverons

$$(83) \qquad 2\,A_{10}\, m = A_{32}\,.$$

Supposons d'abord $A_{10} \neq o$, condition dont nous verrons plus loin la signification géométrique ; l'équation de la tangente à la courbe repondant au problème s'écrit par rapport au repère (r)

$$2\, A_{10}\, x_2 = A_{32}\, x_1\,, \qquad x_3 = o$$

autrement dit l'équation différentielle des courbes cherchées sur la surface (s) s'écrira

$$(84) \qquad 2\, A_{10}\, \omega_2 = A_{32}\, \omega_1 \quad .$$

La première relation (80) montre que A_{10} est à un facteur près constant le long d'une génératrice ($\omega_1 = o$) et d'après (T^0) et (68) si $A_{10} = o$ on a $U = o$, c'est à dire que la correspondance entre les arêtes de rebroussement est homographique. La condition écrite plus haut exprime donc que la correspondance entre les arêtes de rebroussement, qui définit la C_{21}, n'est pas homographique.

53°. — L'équation (84) est complétement intégrable. Les courbes cherchées dépendent d'une constante arbitraire ; elles forment une famille et par chaque point dela surface (s) il passe une courbe et une seule. Ces courbes jouissent d'une propriété géométrique caractéristique. Considérons, en effet, le point

$$P = A_{10}^{(1)}\, A + 2\, A_{10}\, A_1 + A_{32}\, A_2$$

qui se trouve à la tangente à la courbe passant par A. Si δ désigne un déplacement le long d'une génératrice ($\omega_1\, (\delta) = o$) on a d'après (80) et (81)

$$\delta\, P = o$$

ce qui montre que *les tangentes aux courbes de la famille en tous les points d'une même génératrice passent par un même point* P. De cette propriété découle d'ailleurs immédiatement que *quatre courbes quelconques coupent les génératrices de la surface sous le même rapport anharmonique.*

Réciproquement étant donnée sur (s) une famille de courbes satisfaisant à ces propriétés il existe toujours une surface (S) et une C_{21} entre (s) et (S) telles que les courbes de la famille considérée et les courbes correspondantes sur (S) soient des courbes répondant au problème proposé. En effet la position du point P nous donnera à un facteur arbitraire près (fonction du paramètre τ de définition sur l'arête de rebroussement) les quantités $A_{10}^{(1)}$, A_{10}, A_{32} et la 1ère relation (80) nous donnera A_{30}. Le système complètement intégrable formé par les relations (55) nous donnera la surface (S).

Si maintenant $A_{10} = o$ c'est à dire si la correspondance entre les arêtes de rebroussement qui définit la C_{24} est homographique, pour qu'il y ait une direction répondant au problème, autre que la direction de la génératrice, il faut d'après (83) que A_{32} soit nul. Mais d'après (80) on a dans ce cas

$$A_{10}^{(1)} = A_{30}$$
$$d\, A_{32} = A_{32}^{(1)} \omega_1 - A_{30}\omega_2 - 8\, A_{32}\, \omega_{00}$$

si donc $A_{30} \neq o$, c'est à dire (cf. § 49°) *si la C_{24} n'est pas une C_{25}* la relation

$$A_{32} = o$$

ne peut pas être identiquement vérifiée. Elle définit sur la surface une ligne (Q) telle que toute courbe passant par un point quelconque de (Q) a un contact du 3me ordre avec sa correspondante; de plus d'après (82) les surfaces auront en un tel point *un contact analytique du 3me ordre* (au sens de M. Fubini). Nous pourrons pour cette raison appeler la courbe (Q) une *ligne flécnodale de déformation* et par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut montrer que la courbe (Q) peut être une courbe quelconque tracée sur (s) en ce sens qu'il y a une infinité de surfaces (S) telle qu'une courbe quelconque tracée sur (s) soit la ligne flecnodale de déformation pour une C_{24} spéciale entre (s) et (S).

On se rendra compte aussi facilement, en dernier lieu que si la C_{24} est une C_{25} ou bien il n'y a aucune direction en aucun point (sauf sur l'arête de rebroussement) jouissant de la propriété demandée, ou bien les deux surfaces sont projectivement égales.

54°. — Passons au cas $n = 4$. On aura de même d'après § 36°

$$x_4 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{6} x_1^3 x_2 + \dots$$

et d'après les relations (55)

$$\begin{aligned} E_{10} &= E_{41} = A_{10}\, \omega_1 \\ E_{40} &= A_{40}\, \omega_1 \\ E_{42} &= A_{42}\, \omega_1 - A_{10}\, \omega_2 \\ E_{43} &= A_{43}\, \omega_1 - A_{10}\, \omega_3 \end{aligned}$$

les autres E_{ij} étant nuls. Ces relations dérivées extérieurement nous donnent

$$(85)\quad \begin{cases} d\,A_{10} = (A_{10}^{(1)} - A_{40})\,\omega_1 - 2\,A_{10}\,\omega_{22} \\ d\,A_{40} = A_{40}^{(1)}\,\omega_1 - \frac{4}{3}\,A_{10}\,\omega_2 - 3\,A_{40}\,\omega_{22} \\ d\,A_{42} = A_{42}^{(1)}\,\omega_1 - A_{10}^{(1)}\,\omega_2 - 2\,A_{10}\,\omega_{12} - 4\,A_{42}\,\omega_{22} \\ d\,A_{43} = A_{43}^{(1)}\,\omega_1 - A_{42}\,\omega_{23} - A_{10}^{(1)}\,\omega_3 - 2\,A_{10}\,\omega_{13} - 5\,A_{43}\,\omega_{22} \end{cases}$$

et la nouvelle dérivation extérieure de la première de ces relations nous donnera

$$d\,A_{10}^{(1)} = (A_{10}^{(11)} + A_{40}^{(1)})\,\omega_1 - 2\,A_{10}\,\omega_2 - 3\,A_{10}^{(1)}\omega_{22}$$

Avec celà les développements (15) deviennent

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= \tfrac{1}{2}\,A_{10}\,x_1^2\,\omega_1 + \,.\,. \\ \Delta X_2 &= \left(-\tfrac{1}{2}\,A_{42}\,x_1^2 + A_{10}\,x_1\,x_2\right)\omega_1 + \tfrac{1}{2}\,A_1\;\,x_1^2\,\omega_2 + \ldots \\ \Delta X_3 &= \left(-\tfrac{1}{2}\,A_{43}\,x_1^2 + A_{10}\,x_1\,x_3\right)\omega_1 + \tfrac{1}{2}\,A_{10}\,x_1^2\,\omega_3 + \ldots \\ \Delta X_4 &= . \end{aligned}$$

et la comparaison avec (76) nous donnera

$$\begin{aligned} P_1^{(3)} &= -\,A_{10}\,x_1^3 \\ P_2^{(3)} &= A_{42}\,x_1^3 - 3\,A_{10}\,x_1^2\,x_2 \\ P_3^{(3)} &= A_{43}\,x_1^3 - 3\,A_{10}\,x_1^2\,x_3 \\ P_4^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

par conséquent

$$(86)\quad \begin{cases} X_1 = x_1 - \frac{1}{6}\,A_{10}\,x_1^3 + \ldots \\ X_2 = x_2 + \frac{1}{6}\,A_{42}\,x_1^3 - \frac{1}{2}\,A_{10}\,x_1^2\,x_2 + \ldots \\ X_3 = x_3 + \frac{1}{6}\,A_{43}\,x_1^3 - \frac{1}{2}\,A_{10}\,x_1^2\,x_3 + \ldots \\ X_4 = x_4 + \ldots \end{cases}$$

Cherchons d'abord les courbes répondant au problème. Les équations d'une telle courbe passant par A s'écriront

$$\begin{aligned} x_2 &= m\,x_1 + n\,x_1^2 + p\,x_1^3 + \ldots \\ x_3 &= \;q\,x_1 + r\,x_1^2 + s\,x_1^3 + \ldots \\ x_4 &= \tfrac{1}{2}\,x_1^2 + \ldots \end{aligned}$$

et celles de la courbe correspondante

$$\begin{aligned} X_2 &= m\,X_1 + n\,X_1^2 + p\,X_1^3 + \ldots \\ X_3 &= \;q\,X_1 + r\,X_1^2 + s\,X_1^3 + \ldots \\ X_4 &= \tfrac{1}{2}\,X_1^2 + \ldots \end{aligned}$$

en identifiant d'après (86) nous obtiendrons immédiatement

$$(87) \qquad \begin{cases} 2\, A_{10}\, m = A_{42} \\ 2\, A_{10}\, q = A_{43} \end{cases}$$

par conséquent les équations différentielles qui donne les courbes cherchées s'écriront, si la correspondance entre les arêtes de rebroussement n'est pas homographique ($A_{10} \neq o$),

$$(88) \qquad \begin{cases} 2\, A_{10}\, \omega_2 = A_{42}\, \omega_1 \\ 2\, A_{10}\, \omega_3 = A_{43}\, \omega_1 \end{cases}$$

Ce système est complétement intégrable. Les courbes cherchées forment donc sur l'hypersurface (*s*) une congruence de courbes (Γ) dépendant de deux paramètres arbitraires et telle que par tout point de (*s*) il passe une courbe de la congruence et une seule. Ces courbes jouiront, comme pour $n = 3$, de la propriété caractéristique d'après laquelle *les tangentes aux courbes de la congruence* (Γ) *le long d'un élément plan générateur de* (*s*) *passent toutes par un même point* P. En effet le point

$$P = A_{10}^{(1)} A + 2\, A_{10}\, A_1 + A_{42}\, A_2 + A_{43}\, A_3$$

est fixe car si

$$\omega_1\,(\delta) = o \quad , \quad \omega_{22}\,(\delta) = e$$

on a

$$\delta P = -\, 3\, e\, P$$

De la propriété précédente il résulte immédiatement que *les courbes de la congruence* (Γ) *tracent sur les plans générateurs de* (*s*) *des configurations homographiques.*

Si la correspondance entre les arêtes de rebroussement est homographique on a $A_{10} = o$, par conséquent d'après (85)

$$A_{10}^{(1)} = A_{40}\,;$$

si alors la C_{24} n'est pas une C_{25} ($A_{40} \neq o$) il n'y a aucune relation identiquement vérifiée entre A_{42} et A_{43} et pour qu'il y ait une courbe répondant au problème il faut d'après (87) que l'on ait

$$A_{42} = o \quad , \quad A_{43} = o$$

et ces deux relations définiront sur (*s*) une certaine courbe (Q) qui sera une ligne flecnodale de déformation dans le sens qu'en chaque point de cette courbe la C_{24} est une C_{34}.

Enfin si la C_{24} est une C_{25} ou bien il n'y a aucune courbe en aucun point (sauf celles situées dans un E_2 générateur ou en des points de l'arête de rebroussemens) répondant à la question, ou bien les deux hypersurfaces développables (s) et (S) sont projectivement égales.

La congruence (Γ) aussi bien que la courbe (Q) peuvent être d'ailleurs comme dans le cas précédent une congruence jouissant de la propriété énoncée plus haut ou une courbe quelconque tracée sur (s).

55^0. — Passons maintenant au cas des surfaces. L'équation d'une surface située sur (s) et passant par A pourra s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} x_3 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + P_2(x_1, x_2) + P_3(x_1, x_2) + \dots \\ x_4 &= \frac{1}{2} x_1^2 + \dots \end{aligned}\right.$$

P_2, P_3, ... étant des polynomes homogénes du 2^d, 3^{me}, ... degré en x_1, x_2. Si cette surface a un contact du 3^{me} ordre avec la surface correspondante on aura aussi

$$\left\{\begin{aligned} X_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 + P_2(X_1, X_2) + P_3(X_1, X_2) + \dots \\ X_4 &= \frac{1}{2} X_1^2 + \dots \end{aligned}\right.$$

et par identification d'après (86) on obtiendra

$$A_{43} = 2\alpha A_{10} + \beta A_{42} \tag{89}$$

Si la correspondance entre les arêtes de rembroussement n'est pas homographique ($A_{10} \neq o$), l'équation différentielle des surfaces cherchées s'écrira

$$(2 A_{10} \omega_3 - A_{43} \omega_1) = \alpha (2 A_{10} \omega_2 - A_{42} \omega_1)$$

avec un paramètre α. La dérivation extérieure de cette équation nous montre que ces surfaces dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument; de plus on trouve par cette voie que les caractéristiques de cette équation sont données par les équations (88) c'est-à-dire ce sont les courbes de la congruence (Γ). Les surfaces cherchées (σ) sont donc engendrées par les courbes de la congruence (Γ).

56^0. — La nature des surfaces (σ) est facile à définir d'après la propriété géométrique énoncée précédemment des courbes de la congruence (Γ). Les plans générateurs de (s) coupent en effet une surface (σ) suivant une famille de courbes projectivement égales, qui forment d'ailleurs une première famille de lignes caractéristiques de (σ); la transformée de Laplace correspondante se réduit à la courbe décrite par le point P. La deuxième famille de courbes caractéristiques est formée par les courbes de la congruence (Γ) génératrices de (σ) et la transformée de Laplace correspondante est la surface développable ayant la même arête de rebroussement *(c)* que l'hypersurface *(s)*. La surface (Σ) qui correspond à (σ) par la C_{24} entre *(s)* et (S), donnera alors avec (σ) un couple de surfaces dépendant de huit fonctions arbitraires d'un argument (six fonctions déterminant *(s)* et (S), une autre fonction déterminant la C_{24} et une huitième définissant la loi d'après laquelle on associe les courbes de la congruence (Γ) pour engendrer (σ)), et d'après la manière dont on les a obtenues les surfaces (σ) et (Σ) admettent une C_{23}. *La détermination d'un tel couple de surfaces et de la correspondance C_{23} se réduit donc simplement à l'intégration du système complétement intégrable* (88).

Si la correspondance entre les arêtes de rebroussement est homographique la relation (87) devient

$$A_{43} = \beta A_{42}$$

et l'équation des surfaces répondant au problème se réduit à

$$A_{43}\,\omega_2 - A_{42}\,\omega_3 = \alpha\,\omega_1$$

avec le paramètre $\bar{\alpha}$. La dérivation extérieure de cette relation nous montrera également que la solution de cette équation dépend d'une fonction arbitraire d'un argument et que les caractéristiques sont données par

$$\omega_1 = 0, \; A_{43}\,\omega_2 - A_{42} = 0$$

Ces caractéristiques sont par conséquent des lignes situées dans les éléments plans générateurs de *(s)* qui recontrent la courbe (Q). Mais le long d'une telle ligne on a

$$d\,A = \frac{\omega_2}{A_{42}}(A_{42}\,A_2 + A_{43}\,A_3)$$

$$d\,(A_{42}\,A_2 + A_{43}\,A_3) = -\left(\frac{A_{40}}{A_{42}}\,\omega_2 + 3\,\omega_{22}\right)(A_{42}\,A_2 + A_{43}\,A_3)$$

cette ligne est donc une droite. Les surfaces (ρ) répondant à la question sont par conséquent *les surfaces réglées engendrées par des droites rencontrant la courbe* (Q). Si nous considérons maintenant la surface reglée (R) correspondant à (ρ) par la C_{24} nous aurons en (ρ) et (R) un couple de surfaces reglées admettant une C_{23} et dépendant de sept fonctions arbitraires d'un argument, qu'on obtient ainsi *sans aucune intégration.*

Enfin si la C_{24} entre (*s*) et (S) est une C_{25} sans que les deux hypersurfaces développables soient projectivement égales, je signale sans démonstration que les surfaces répondant au problème sont les surfaces reglées engendrées par des droites situées dans les plans générateurs de (*s*) et rencontrant l'arête de rebroussement (*c*) de l'hypersurfaces (*s*).

BIBLIOGRAPHIE

1) C. Bersano. – *Contatti del secondo e del terzo ordine tra varietà iperspaziali.* Rend Instituto Lombardo, t. 56, 1923, p. 267–275.

2) C. Bersano. — *Sulla applicabilità proiettiva di una particolare clase di varietà iperspaziali.* Rend. Lincei, t. 32, 1923, p. 260—263.

3) L. Berzolari. — *Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio.* Annali di Matematica t. 26, 1897, p. 1—58.

4) E. Borel. — *Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles.* A. E. N. t. 9 (1892) p. 63—90.

5) E. Cartan. — *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales.* A. E. N. t. 18 (1901) p. 241—311.

6) E. Cartan. — *Sur la structure des groupes infinis de transformations.* Ch. I. A. E. N. t. 21, 1904, p. 153—175.

7) E. Cartan. — *Les variétés à courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien.* Bull. Soc. Math. t. 47, 1919, p. 125—160 et t. 48, 1920, p. 132—208.

8) E. Cartan. — *Sur la déformation projective des surfaces.* A. E. N. t. 37, 1920, p. 259 - 356.

9) E. Cartan.— *Sur le probléme général de la déformation.* Comptes rendus du Congrès International de Strasbourg (Sept. 1920). Toulouse, Impr. E. Privat.

10) L. Féraud. — *Sur une généralisation des correspondances ponctuelles qui établissent l'applicabilité projective.* Thése. 1928. Ed. Les Presses modernes, Paris.

11) G. FUBINI. — *Applıcabi ità proiettiva di due superficie.* Rend. del Circ. mat. di Palermo. t. 41, 1916, p. 135—162.

12) G. FUBINI & E. CECH. — *Géometria proietiiva differenziale.* 1926. Ed. Zanichelli, Boulogne.

13) G, H. HALPHEN. -- *Sur les invariants différentiels des combes gauches.* Oeuvres. t. II. 1918. p. 353—446. Ed. Gauthier-Villars.

14) V. LALAN. — *Sur les proprietés infinitésimales projectives des variétés à trois dimensions* J-al de Math. pures et appl. t. 3. 1924, p, 241—318.

15. P. MENTRÊ. — *Les variétés de l'espace réglé.* Thèse 1923. Ed. Les Presses Universitaires, Paris.

16) C. SEGRE. — *Sulle superficie degli imperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali del 2º ordine.* Atti della R. Ac. Torino. t. 52, 1907, p. 1052—1079.