SERBAN A. GHEORGHIU

Sur l'équation de Fredholm

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__94__1_0>

N° D'ORDRE :
2039

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

'AR

SERBAN A. GHEORGHIU

SE. — SUR L'EQUATION DE FREDHOLM.

HÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le décembre 1928 devant la Commission d'examen.

---

sident : MM. GOURSAT, *Membre de l'Institut.*

Examinateurs { BOREL, *Membre de l'Institut.*
JULIA.

Librairie Scientifique
ALBERT BLANCHARD
3 et 3 *bis*, Place de la Sorbonne
PARIS (V^e^)

LIBRAIRIE PICART
59, Boulevard Saint-Michel
PARIS (V^e^)

1928

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..............	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.
Doyens honoraires..	P. APPELL, M. MOLLIARD.
Profess. honoraires..	J. BOUSSINESQ. A. JOANNIS. H. LE CHATELIER. H. LEBESGUE. A. FERNBACH. A. LEDUC. R. DONGIER. E. HÉROUARD.

Professeurs ....

EMILE PICARD......	Analyse supér. et algèbre supérieure.
G. KOENIGS........	Mécanique physique et expérimentale
E. GOURSAT.......	Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET..........	Electrotechnique générale.
F. WALLERANT...	Minéralogie.
H. ANDOYER.......	Astronomie.
P. PAINLEVÉ......	Mécanique anal. et mécanique céleste
GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
Mme P. CURIE......	Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés)
G. URBAIN.........	Chimie minérale
EMILE BOREL	Calcul des probabilités et phys. mathém
L. MARCHIS.......	Aviation.
JEAN PERRIN.......	Chimie physique.
RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM......	Physique.
M. MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
E. CARTAN........	Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE......	Physiologie générale.
E. VESSIOT.......	Théorie des fonct. et th. des transf.
A. COTTON........	Physique générale.
J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
CHARLES FABRY....	Physique.
CHARLES PÉREZ	Zoologie.
LÉON BERTRAND...	Géolog. structurale et géolog. appliquée
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
E. RABAUD........	Biologie expérimentale.
P. PORTIER.......	Physiologie comparée.
E. BLAISE.........	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD..	Botanique.
P. MONTEL.......	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT..	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA	Mathématiques générales.
A. MAILHE........	Etude des combustibles.
L LUTAUD.......	Géogr. physique et géol. dynamique.
EUGÈNE BLOCH.....	Physique théorique et phys. céleste.
HENRI VILLAT.....	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB.........	Géologie.
P. PASCAL........	Chimie appliquée.
N.................	Chimie générale.

E. PECHARD....	Chimie (Ens. P. C. N.)	G. BRUHAT......	Physique.
V. AUGER	Chimie analytique.	H. MOUTON.........	Chimie physique.
M. GUICHARD...	Chimie minérale.	L. JOLEAUD	Paléontologie.
A. GUILLET.....	Physique.	M. JAVILLIER....	Chimie biologique.
C. MAUGUIN....	Minéralogie.	A. DUFOUR......	Physique (P C N.).
L. BLARINGHEM	Botanique.	F. PICARD......	Zoologie (Evolution des êtres organisés.)
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.		
A. DEREIMS.....	Géologie.	ROBERT-LÉVY	Zoologie.
A. DENJOY......	Calcul diff. et int.	L. DUNOYER.......	Optique appliquée.
H. BENARD	Physique (P.C.N.).	A. GUILLIERMOND.	Botanique (P.C.N.).
E. DARMOIS.....	Physique.	A. DEBIERNE.......	Radioactivité.

Secrétaire............ DANIEL TOMBECK

A

Monsieur Edouard GOURSAT

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

A

Monsieur Jacques HADAMARD

Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France, à l'Ecole Polytechnique
et à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures

*Hommage de profonde admiration
et de reconnaissance très respectueuse.*

Au

T. R. Père CRÉCHET

Père Prieur de l'Ecole Saint-Dominique et Lacordaire

Hommage de reconnaissance
très respectueusement dévouée.

INTRODUCTION

Il est bien connu que la solution d'une équation de Fredholm — dans le cas où cette solution existe et est unique — s'obtient sous la forme d'un rapport de deux transcendantes entières. En particulier, le dénominateur de ce rapport — généralement désigné par l'expression *le dénominateur* D(λ) *de Fredholm* — joue dans la théorie des équations intégrales à limites constantes un rôle remarquable.

L'importance de ce dénominateur est d'autant plus grande que, dans les problèmes relatifs aux membranes vibratoires les zéros de la fonction D(λ) correspondante — à ces problèmes — se rattachent aux harmoniques en nombre infini, des membranes dont on étudie le mouvement. Ainsi, l'étude de l'existence et de la distribution asymptotique de ces zéros — d'un côté — et celui du dénominateur D(λ) — d'un autre côté — ont été l'objet de nombreuses recherches.

Depuis que, vers la fin du siècle dernier Schwartz, M. Picard et Poincaré ont démontré successivement l'existence de la première, de la seconde harmonique et d'une infinité d'harmoniques, ces questions n'ont jamais cessé d'avoir, dans les colonnes des périodiques mathématiques, une certaine actualité. Et, sans essayer nullement de donner une bibliographie complète des mémoires qui leur ont été consacrés, nous rappellerons néanmoins que la découverte de Fredholm leur a donné un essor nouveau. M. Picard (1) a montré avec quelle

(1) Voir E. Picard, *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 22, 1906.

élégance la théorie de Fredholm permettait de retrouver les résultats — concernant ces questions — connus antérieurement. De même, M. Herman Weyl en utilisant habilement les singularités et les particularités que présentent les noyaux affectés aux problèmes de la physique mathématique a étudié la distribution asymptotique des valeurs caractéristiques relatives à ces problèmes. Plus récemment M. R. Courant a complété les résultats obtenus par M. Weyl (1).

D'autre part M. Torsten Carleman (2) a démontré que le dénominateur D(λ) relatif à un noyau continu, ou plus généralement tel que la théorie de M. Hibbert lui soit applicable, est au plus de genre un. De même M. Carleman (3) a indiqué un noyau continu pour lequel l'ordre réel du dénominateur D(λ) est égal à deux, par excès.

Dans le présent travail nous nous proposons de faire une étude aussi complète que possible de la croissance du dénominateur D(λ). Cette étude se rattache manifestement aux recherches que nous venons d'indiquer si brièvement.

Il est à remarquer que, l'équation de Fredholm joue, dans la démonstration de l'existence des solutions d'une classe importante de problèmes de la physique mathématique, un rôle fondamental. D'autre part, la transcendante D(λ) de Fred-

(1) Voir pour la bibliographie des travaux de MM. Courant et Weyl concernant ces questions :

R. Courant et D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, I, p. 380, Berlin, 1924.

A ajouter : R. Courant, *Uber die Anwendung der Variations rechnung inder Theorie der Eigenschwingungen, etc.*, Acta Mathematica, 49, 1926.

(2) Voir T. Carleman, *Sur le genre du dénominateur D(λ) de Fredholm.* Arikv for mathematik astronomi och fysik. Bd. 12, nº 15. 1917.

T. Carlemau. *Zur Theorie der Linearen Integralgleichungen.* Mathematische Zeitschrift, t. 9, 1921.

(3) Voir T. Carleman : *Uber die Fourier kœffizienten einer stetigen Funktion.* Acta Mathematica, t. 41, 1918.

Nous désignerons ces trois derniers mémoires respectivement par A, B et C.

holm n'est presque jamais utilisée, dans l'étude des valeurs caractéristiques auxquelles conduisent ces mêmes problèmes de la physique mathématique. L'explication de ce fait nous semble être donnée par les difficultés que présentent l'étude du dénominateur $D(\lambda)$. Et c'est pourquoi nous avons estimé que des recherches dans cette direction ne seraient pas dépourvues de tout intérêt.

Dans notre travail nous nous proposons aussi de chercher, étant donné un noyau arbitraire — mais choisi de manière que la théorie classique des équations intégrales à limites constantes lui soit applicable — lequel de ses attributs détermine l'ordre du dénominateur $D(\lambda)$. Et, si pour éclaircir cet énoncé du problème, une comparaison nous était autorisée, nous reviendrons sur la dépendance — bien connue — qui existe entre l'ordre réel et l'ordre apparent d'une fonction entière. Dans ce travail, nous montrons que — *mutatis mutandis* — il existe une dépendance, dont la nature sera précisée plus loin, entre l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier du noyau donné — ces coefficients étant calculés par rapport à une série arbitraire de fonctions normales et orthogonales — et l'ordre réel du dénominateur $D(\lambda)$ qui correspond à ce même noyau donné.

Ce mémoire est divisé en deux parties.

Dans la première partie, nous envisageons plus spécialement les noyaux obtenus d'un nombre fini de noyaux donnés, à l'aide de l'opération de composition de seconde espèce — selon la terminologie de M. Vito Volterra. Nous y étudions les particularités que présentent de tels noyaux, du point de vue de la croissance du dénominateur $D(\lambda)$. Nous y obtenons un résultat qui contient un théorème de M. J. Schur ainsi qu'un théorème de M. Carleman.

Les noyaux de compositions sont évidemment des noyaux assez particuliers. Dans la seconde partie de notre travail, nous montrons l'intérêt que présente la considération de ces noyaux pour l'étude du dénominateur de Fredholm relatif à des classes plus étendues de noyaux. Nous montrons ainsi, que les résultats exposés dans la première partie, ont une portée assez générale. Nous en déduisons plusieurs conséquences concernant la transcendante de Fredholm.

Enfin, dans une note qui termine ce mémoire, nous montrons sur un cas particulier la différence qui existe entre une fonction entière d'ordre entier et de la classe inférieure et une fonction entière de la première classe, au sens de M. Valiron. Nous démontrons aussi une proposition concernant les fonctions entières du genre zéro. Cette proposition se trouve en rapport avec une autre proposition démontrée par M. Serge Bernstein.

Les résultats contenus dans ce travail ont formé l'objet de plusieurs notes présentées à l'Académie des Sciences (Séances du 4 avril 1927, 30 mai 1927 et 26 mars 1928).

Nous nous faisons un agréable devoir d'exprimer ici l'hommage de notre reconnaissance très respectueusement dévouée à M. Edouard Goursat, Membre de l'Institut et Professeur à la Sorbonne ainsi qu'à M. Jacques Hadamard, Membre de l'Institut et Professeur au Collège de France qui ont bien voulu nous encourager dans nos recherches et nous faire plusieurs remarques fort utiles pour la rédaction de ce mémoire.

Nous tenons aussi à exprimer l'hommage de notre profonde reconnaissance au T. R. Père Créchet, Prieur de l'Ecole Saint-Dominique et Lacordaire qui a bien voulu nous confier une fonction dans son école et nous donner ainsi la possibilité de continuer notre travail, possibilité qui nous était refusée partout ailleurs.

GÉNÉRALITÉS

Pour donner plus de clarté aux considérations qui vont suivre et afin d'éviter des renvois incessants à d'autres mémoires nous commençons par énoncer les principales propositions de la théorie des fonctions entières d'ordre fini, que nous aurons à utiliser par la suite.

Nous rappelons aussi certaines généralités concernant l'équation de Fredholm.

I. Soient

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

une fonction entière et

$$0 \leqslant r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \dots \leqq r_n \leqq \dots$$

les modules des zéros de cette fonction (On suppose ces modules rangés par ordre de grandeur non décroissante). Soit $M(r)$ le maximum du module $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$.

On appelle *ordre apparent de la fonction* f(z) *le plus petit nombre* σ *tel, que si petit que soit* ε, *à partir d'une certaine valeur de* r, *on a*

$$M(r) < e^{r^{\sigma+\varepsilon}}.$$

L'ordre de grandeur des modules des coefficients de la fonction $f(z)$ dépend de l'ordre apparent σ. En effet, *aussi petit que soit le nombre positif* ε, *on peut déterminer un nombre* N *tel, que pour* n > N, *on ait* [1].

$$|a^n| < \left[\frac{e}{\frac{n}{\sigma+\varepsilon}}\right]^{\frac{n}{\sigma+\varepsilon}}.$$

[1] Voir E Borel, *Leçons sur les fonctions entières*. Paris, 1926, p. 63.

On déduit de là, que
Pour

$$\alpha > \sigma$$

on a

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{\alpha}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Il est plus commode, pour les applications que nous allons en faire, d'énoncer cette proposition de la manière suivante :
Si pour $\alpha' < \alpha$ *on a*

$$\lim_{n \to \infty} n^{\alpha'} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$$

on a aussi

$$\sigma \leqq \frac{1}{\alpha}.$$

II. On appelle *ordre réel de la fonction* f(z) *le petit nombre* ρ *tel que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}$$

soit convergente, aussi petit que soit le nombre positif ε.
Si, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\rho}} \qquad \text{(S)}$$

converge, nous dirons — d'après M. Borel — que l'ordre réel de la fonction $f(z)$ est égal à ρ *par excès.*
Si l'ordre apparent σ *est un nombre entier, on a*

$$\rho \leqq \sigma.$$

Si l'ordre apparent σ *n'est pas un nombre entier, on a*

$$\rho = \sigma.$$

Soit p le genre de la fonction $f(z)$. Supposons que la différence $\rho - p$ est positive et non nulle. Supposons de plus, que la série (S) converge. Dans ces conditions :

Aussi petit que soit le nombre positif ε, *on peut déterminer un nombre* R *tel, que pour* r > R, *on a*

$$M(r) < e^{\varepsilon r^{\rho}} \text{ (1)}.$$

Ou, avec les notations de M. Landau, *on a*

$$\log M(r) = o\,(r^{\rho}).$$

Rappelons ces notations. Si l'on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = A$$

A étant une quantité finie, M. Landau écrit l'égalité

$$f(x) = O\,[g(x)].$$

De même M. Landau désigne l'égalité

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$$

par la notation

$$f(x) = o\,[g(x)].$$

III. Considérons maintenant un produit canonique

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{z_n^2} + \dots + \frac{1}{p} \cdot \frac{z^p}{z_n^p}}.$$

de genre p. Posons

$$|z_n| = r_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

soit σ l'ordre (réel et apparent) de la fonction G(z). M. Hadamard a démontré qu'*étant donné un nombre positif* ε, *arbitrairement petit, on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-|z|^{\sigma + \varepsilon}}.$$

Ce théorème a été complété par M. Lindelöf de la manière suivante (2) :

(1) Borel, *loc. cit.*, p. 56-62.

(2) Voir E. Lindelof, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini.* Acta Soc. sc. Fennicæ, t. 31, 1902, p. 11.

Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\sigma}}$$

converge, étant donné un nombre ε *arbitrairement petit, on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-\varepsilon |z|^{\sigma}}.$$

IV. Nous aurons aussi à faire usage, dans notre travail, d'un théorème établi par M. Valiron. Voici ce théorème.

Si l'ordre apparent σ *de la fonction* f(z) *n'est pas un nombre entier, la condition nécessaire et suffisante pour que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\sigma}}$$

converge est que l'intégrale

$$I(R) = \int_{\alpha}^{R} \frac{\log M(r)}{r^{1+\sigma}} \, dr \qquad (\alpha > 0)$$

ait une limite finie, pour R *infini.*

Si l'ordre apparent σ *de la fonction* f(z) *est un nombre entier et si l'intégrale* I(R) *a une limite finie, pour* R *infini, la fonction* f(z) *est de genre* $\sigma - 1$.

M. Valiron a distingué parmi les fonctions entières d'ordre σ, les *fonctions de la classe inférieure* pour lesquelles l'intégrale I(R) converge et les *fonctions de la classe supérieure* pour lesquelles la même intégrale diverge.

V. Considérons l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x).$$

Nous dirons que le noyau $K(x, y)$ est un noyau (A) s'il est réel, s'il est à carré sommable — c'est-à-dire si l'intégrale, au sens de M. Lebesgue

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2 \, dx dy$$

existe — et, si l'une *au moins* des intégrales, au sens de M. Lebesgue

$$\int_0^1 [K(x, s)]^2 \, ds \quad \text{ou} \quad \int_0^1 [K(s, x)]^2 \, ds$$

est bornée pour $0 \leqq x \leqq 1$. De même, nous dirons que le noyau $K(x, y)$ est un noyau (B) s'il est (A) et si — de plus — l'intégrale, au sens de M. Lebesgue

$$\int_0^1 K(s, s) \, ds$$

existe.

Ceci dit, passons à la relation fonctionnelle qui existe entre les dénominateurs de Fredholm relatifs à un noyau donné et aux noyaux itérés.

Posons

$$K^{(2)}(x, y) = \int_0^1 K(x, s) \, K(s, y) \, ds,$$

$$K^{(3)}(x, y) = \int_0^1 K(x, s) \, K^{(2)}(s, y) \, ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K^{(n)}(x, y) = \int_0^1 K(x, s) \, K^{(n-1)}(s, y) \, ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Soient $D(\lambda)$ le dénominateur de Fredholm relatif au noyau $K(x, y)$ et $D^{(n)}(\lambda)$ le dénominateur de Fredholm relatif au noyau $K^{(n)}(x, y)$. ω étant une racine primitive de l'équation

$$z^n = 1$$

on sait [1] que, *pour tout noyau* K(x, y) *borné et sommable, on a*

$$D^{(n)}(\lambda^n) = D(\lambda)D(\omega\lambda) \ldots\ldots D(\omega^{n-1}\lambda).$$

Remarquons rapidement, que *cette relation fonctionnelle est encore vraie* pour tout noyau (B) ou, plus généralement, *pour tout noyau à carré sommable tel, que l'intégrale au sens de M. Lebesgue*

$$\int_0^1 K(s, s)\, ds$$

existe. A cet effet, nous nous contenterons de montrer que les différentes séries entières, qui interviennent dans la démonstration, ont un rayon de convergence non nul. Cela suffit pour nous assurer, que l'identification terme à terme, qu'on effectue dans le cas des noyaux bornés et sommables, est encore permise.

Posons

$$A_n = \int_0^1 K^{(n)}(s, s)\, ds \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et déterminons M de manière à avoir

$$\left| \int_0^1 K(s, s)\, ds \right| \leqq M$$

et

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2\, dxdy \leqq M^2.$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz, on trouve

$$|A_n| \leqq M^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

[1] Voir Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. III, p. 382, Paris, 1923. Nous désignerons ce traité par G.

Donc, la série

$$A_1 + A_2\lambda + \dots + A_n\lambda^{n-1} + \dots$$

est convergente pour

$$|\lambda| < \frac{1}{M}.$$

Soit, maintenant

$$D(\lambda) = 1 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + c_n\lambda^n + \dots$$

On sait (¹), que les coefficients c_n s'expriment au moyen des traces A_n du noyau $K(x, y)$. De plus, on a

$$D(\lambda) = e^{-\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + \dots + A_n\frac{\lambda^n}{n} + \dots\right)}.$$

Donc la fonction $D(\lambda)$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{M}$.

On démontre de la même manière, que le rayon de convergence de la fonction $D^{(n)}(\lambda)$ est au moins égal à la même quantité. La démonstration de la relation fonctionnelle, que nous avons en vue, s'achève ensuite, comme pour les noyaux bornés et sommables.

VI. Dans le cas particulier où le noyau $K(x, y)$ est un noyau de composition, le dénominateur de Fredholm prend une forme remarquable. Cette forme a été indiquée par M. Carleman (²). Nous allons la reproduire.

Soient

$$K_1(x, y),\ K_2(x, y),\ \dots,\ K_p(x, y)$$

p noyaux à carré sommable. Posons

$$K(x, y) = \int_0^1 \dots \int_0^1 K_1(x, s_1)\, K_2(s_1, s_2) \dots K_p(s_{p-1}, y)\, ds_1 ds_2 \dots ds_{p-1}$$

et

$$K_i\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \\ y_1 y_2 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K_i(x_1, y_1) & K_i(x_1, y_2) & \dots & K_i(x_1, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_i(x_n, y_1) & K_i(x_n, y_2) & \dots & K_i(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

(1) Voir G, p. 436.
(2) Voir B, p. 213.

Avec ces notations le dénominateur $D(\lambda)$ relatif au noyau $K(x, y)$, ainsi défini, peut s'écrire

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{(n\,!)^p} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_1 \begin{pmatrix} s_1^{(1)} s_2^{(1)} \dots s_n^{(1)} \\ s_1^{(2)} s_2^{(2)} \dots s_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$K_2 \begin{pmatrix} s_1^{(2)} s_2^{(2)} \dots s_n^{(2)} \\ s_1^{(3)} s_2^{(3)} \dots s_n^{(3)} \end{pmatrix} \dots K_p \begin{pmatrix} s_1^{(p)} s_2^{(p)} \dots s_n^{(p)} \\ s_1^{(1)} s_2^{(2)} \dots s_n^{(1)} \end{pmatrix} ds_1^{(1)} \dots ds_n^{(1)} ds_1^{(2)} \dots ds_n^{(2)} \dots$$

$$ds_1^{(p)} \dots ds_n^{(p)}.$$

M. Carleman a obtenu cette expression de la transcendante de Fredholm, relative aux noyaux de composition, en utilisant une identité due à M. Landesberg [1]. Voici cette identité.

Soient

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \dots,\ \varphi_n(s)$$
$$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \dots,\ \psi_n(s)$$

$2n$ *fonctions sommables, ainsi que leurs carrés. On a*

$$\frac{1}{n\,!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(s_1)\ \varphi_1(s_2) \dots \varphi_1(s_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_n(s_1)\ \varphi_n(s_2) \dots \varphi_n(s_n) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_1(s_1)\ \psi_1(s_2) \dots \psi_1(s_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_n(s_1)\ \psi_n(s_2) \dots \psi_n(s_n) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_n$$

$$= \begin{vmatrix} \int_0^1 \varphi_1\psi_1\, ds & \int_0^1 \varphi_1\psi_2\, ds & \dots & \int_0^1 \varphi_1\psi_n\, ds \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int_0^1 \varphi_n\, \psi_1 ds & \int_0^1 \varphi_n\, \psi_2\, ds & \dots & \int_0^1 \varphi_n\psi_n\, ds \end{vmatrix}.$$

[1] Voir A. Landesberg, *Theorie der Elementartheiler Linearen Integralgleichungen*. Mathematische Annalen Bd. 69, 1910, p. 231.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES NOYAUX DE COMPOSITION

CHAPITRE PREMIER

SUR LES NOYAUX ASSOCIÉS DE SCHMIDT

§ 1. Dans ses travaux, bien connus, concernant l'équation de Fredholm, M. Erhardt Schmidt a introduit deux systèmes orthogonaux de fonctions, associés à tout noyau $K(x, y)$ donné. Pour M. Schmidt les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ forment un couple de fonctions fondamentales associés, si l'on a les relations

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \mu_i \int_0^1 K(x, s)\ \psi_i(s)\ ds \\ \psi_i(x) &= \mu_i \int_0^1 K(s, x)\ \varphi_i(s)\ ds \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

μ_i étant une constante et si, de plus, les relations d'orthogonalité à savoir,

$$\int_0^1 \varphi_i(s)\ \varphi_k(s)\ ds = \int_0^1 {}_i\psi(s)\ \ \psi_k(s)\ \ ds = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = k \\ 0 \text{ pour } i \neq k \end{cases}$$

sont vérifiées.

En éliminant successivement $\psi_i(x)$ et $\varphi_i(x)$ entre les deux égalités (1) on obtient

$$\varphi_i(x) = \mu_i^2 \int_0^1 \overline{K(x, s)}\ \varphi_i(s)\, ds$$

$$\psi_i(x) = \mu_i^2 \int_0^1 \underline{K(x, s)}\ \psi_i(s)\, ds$$

où on a posé

$$\overline{K(x, y)} = \int_0^1 K(x, s)\, K(y, s)\, ds$$

$$\underline{K(x, y)} = \int_0^1 K(s, x)\, K(s, y)\, ds.$$

On appelle les noyaux $\overline{K(x, y)}$ et $\underline{K(x, y)}$ noyaux de Schmidt associés au noyau $K(x, y)$. Ces noyaux sont symétriques. Si le noyau $K(x, y)$ est lui-même symétrique les deux noyaux de Schmidt sont identiques au premier noyau itéré.

Pour tout noyau (A), les noyaux associés de Schmidt sont sommables et l'un *au moins* de ces noyaux est borné à l'intérieur et sur le contour du carré

$$0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Supposons, pour fixer les idées, que c'est le noyau $\overline{K(x, y)}$ qui possède cette propriété. Ce noyau étant borné et sommable, l'existence des constantes μ_i et des fonctions $\varphi_i(x)$ résulte de la théorie classique de Fredholm. Les fonctions $\psi_i(x)$ sont ensuite déterminées, par la seconde relation (1).

Remarquons maintenant, que les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux $\overline{K(x, y)}$ et $\underline{K(x, y)}$ sont identiques terme à terme. En effet, ces noyaux étant des noyaux de composition, on peut utiliser l'expression donnée, par M. Carleman, pour la transcendante de Fredholm relative à de tels noyaux (Voir VI). On obtient ainsi, que le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux $\overline{K(x, y)}$ et $\underline{K(x, y)}$ peut s'écrire

$$D^*(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{(n\,!)^2} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix} \right]^2 dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_n \quad (2)$$

où on a posé

$$K\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & \dots & K(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, y_1) & \dots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

Il nous sera utile de connaître le genre de $D(\lambda)$. Ainsi, nous nous proposons de démontrer que

Le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés à un noyau (A) *est de genre zéro.*

Si l'un des noyaux $\overline{K(x, y)}$ ou $\underline{K(x, y)}$ est *continu* notre proposition n'est qu'un cas particulier d'un théorème général, démontré par M. Mercer, relatif aux noyaux positifs et continus (1).

Pour établir la proposition, que nous avons en vue, nous devons d'abord démontrer plusieurs lemmes.

Lemme A. *L'ordre apparent de la fonction entière* $D^*(\lambda)$ *est au plus l'unité.*

Posons

$$\int_0^1 [K^n(x, s)]^2 \, ds = A(x)$$

D'après nos hypothèses, on peut choisir une constante positive M de manière à avoir

$$A(x) \leqq M$$

pour $0 \leqq x \leqq 1$.

En vertu d'un théorème de M. Hadamard, on a

$$\left[K\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}\right]^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} [K^2(x_1, y_i) + K^2(x_2, y_i) + \dots + K^2(x_n, y_i)]$$

Donc, on a aussi

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left[K\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}\right]^2 dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n$$

$$\leqq \int_0^1 \dots \int_0^1 [A(x_1) + A(x_2) + \dots + A(x_n)]^n \, dx_1 \dots dx_n \leqq n^n M^n.$$

(1) Voir J. Mercer, *Phil. Trans. London*, t. 209 A, p. 415-446, 1909.

Ou, encore

$$|D^*(\lambda)| \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n\,!)^2} M^n \, |\lambda|^n.$$

Cette inégalité démontre le lemme énoncé.

Lemme B. K(x, y) *étant une fonction telle, que l'intégrale au sens de M. Lebesgue*

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2 \, dxdy$$

existe, et ε *étant un nombre positif, arbitrairement petit, on peut déterminer une fonction continue* F(x, y) *de manière à avoir*

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y) - F(x, y)]^2 \, dxdy < \varepsilon.$$

Soit

$$\Phi_1(x, y), \; \Phi_2(x, y), \; \ldots, \; \Phi_n(x, y)$$

une suite *fermé* de fonctions continues, orthogonales et normales. Les relations d'orthogonalité deviennent maintenant

$$\int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(x, y) \, \Phi_k(x, y) \, dxdy = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = k \\ 0 \text{ pour } i \neq k. \end{cases}$$

Posons

$$c_i = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \, \Phi_i(x, y) \, dxdy$$

et

$$f_p(x, y) = \sum_{i=1}^{p} c_i \, \Phi_i(x, y).$$

La suite des fonctions $\Phi_i(x, y)$ étant fermée, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2 \, dxdy = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

Donc, on a aussi

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y) - f_p(x, y)]^2 \, dxdy = \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^2.$$

Or, la série Σc_i^2 étant convergente, on peut choisir l'entier N de manière à avoir

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i^2 < \varepsilon.$$

N étant ainsi déterminé, la fonction

$$F(x, y) = f_N(x, y)$$

satisfait aux conditions exigées par notre énoncé.

Lemme C. *Soient*

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_n(x)$$
$$Y_1(y),\ Y_2(y),\ \ldots,\ Y_n(y)$$

$2n$ *fonctions sommables, arbitraires.*

Le noyau K(x, y) *étant un noyau* (A) *on a*

$$\int_0^1\int_0^1\left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(x)\,\Psi_i(y)}{\mu_i^2}\right] dxdy \leqq \int_0^1\int_0^1 [K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\,Y_i(y)]^2\, dxdy$$

pour $m \leqslant n$.

Dans le cas des noyaux continus, ce lemme a été démontré par M. Schmidt [1]. Sa démonstration s'applique aussi, sans aucune modification, aux noyaux (A).

Lemme D. Le noyau K(x, y) *étant un noyau* (A), *on a*

$$\int_0^1\int_0^1 [K(x, y)]^2\, dxdy = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2}.$$

Dans le cas des noyaux continus, ce lemme aussi, a été démontré par M. Schmidt [2]. Nous allons en déduire que le même lemme est vrai pour tout noyau (A).

(1) Voir E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen.* Mothematische Annalen, t. 63, p. 468-470, 1907.

(2) Voir E. Schmidt, *loc. cit.*, p. 471-472.

La démonstration de M. Schmidt peut être ainsi résumée :

On démontre d'abord que l'on a :

$$\overline{K(x, y)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)}{\mu_i^2}$$

la série du second membre étant *uniformément* convergente par rapport à

ε étant un nombre positif, arbitrairement petit, soit $F_\varepsilon(x, y)$ une fonction continue telle, que l'on ait

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y) - F_\varepsilon(x, y)]^2 \, dxdy < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nous avons démontré (voir *lemme B*) qu'il existe des fonctions continues vérifiant cette inégalité.

Soient

$$\begin{gathered} X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_n(x),\ \ldots \\ Y_1(y),\ Y_2(y),\ \ldots,\ Y_n(y),\ \ldots \end{gathered}$$

les fonctions fondamentales de Schmidt, associées au noyau $F_\varepsilon(x, y)$. Ces fonctions satisfont aux égalités

$$X_i(x) = \nu_i \int_0^1 F_\varepsilon(x, s)\, Y_i(s)\, ds,$$

$$Y_i(y) = \nu_i \int_0^1 F_\varepsilon(s, y)\, X_i(s)\, ds \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

où les ν_i sont les constantes caractéristiques de Schmidt, relatives au noyau $F_\varepsilon(x,y)$.

Or, on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[F_\varepsilon(x, y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{X_i(x)\, Y_i(y)}{\nu_i^2} \right]^2 dxdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 [F_\varepsilon(x, y)]^2 \, dxdy - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\nu_i^2}.$$

chacune des variables x et y. On démontre ensuite, en tenant compte de la continuité des fonctions $\varphi_i(x)$, que la même série est *uniformément* convergente pour l'*ensemble* des deux variables x et y. Ce point établi, il résulte que l'on a

$$\int_0^1 \overline{K(s, s)}\, ds = \int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2 \, dxdy = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\varphi_i^2(x)}{\mu_i^2}\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2}.$$

Le raisonnement par lequel M. Schmidt démontre l'égalité

$$\int_0^1 \overline{K(s, s)}\, ds = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\varphi_i^2(x)}{\mu_i^2}\, dx$$

n'est valable que pour les noyaux continus. Ce raisonnement ne peut pas être appliqué à tout noyau (A).

Notre lemme étant démontré pour les noyaux continus, il s'ensuit qu'on peut déterminer l'entier n de manière à avoir

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[F_\varepsilon(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(x)\, Y_i(y)}{\nu_i}\right]^2 dxdy < \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(x)\, Y_i(y)}{\nu_i}\right]^2 dxdy \leqq 2\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y) - F_\varepsilon(x, y)]^2\, dxdy + 2\int_0^1 \int_0^1 \left[F_\varepsilon(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(x)\, Y_i(y)}{\nu_i}\right]^2 dxdy$$

ou

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(x)\, Y_i(y)}{\nu_i}\right]^2 dxdy < \varepsilon.$$

En tenant compte du *lemme C*, il résulte que pour $m \geqq n$ on a aussi

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\, \psi_i(y)}{\mu_i}\right]^2 dxdy < \varepsilon$$

ou encore

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2\, dxdy - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu_i^2} < \varepsilon.$$

Conclusion :

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2\, dxdy = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu_i^2}.$$

q, c, d.

Si, d'une manière plus générale, au lieu de supposer que le noyau $K(x, y)$ est un noyau (A), on suppose seulement que l'intégrale au sens de M. Lebesgue

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2\, dxdy$$

existe, les *lemmes C* et *D* sont encore vrais, mais, à condition d'avoir démontré — au préalable — l'existence des fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$. Cette démonstration peut être donnée. Mais elle nous entraînerait à des développements peu en rapport avec les questions étudiées dans ce travail. Et, c'est précisément pour les éviter que nous nous bornons, dans ce mémoire, à considérer uniquement des noyaux (A).

Après cette digression, revenons à la fonction entière $D^*(\lambda)$. Les zéros de cette fonction sont les quantités

$$\nu_i = \mu_i^2 \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

On déduit du *lemme D* que l'ordre réel de $D^*(\lambda)$ est au plus égal à un, par excès. D'autre part, son ordre apparent étant au plus égal à l'unité (voir *lemme A*) il résulte que cette fonction admet un développement de *Weierstrass* de la forme

$$D^*(\lambda) = e^{\alpha\lambda} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{r_i}\right).$$

Pour démontrer, que la fonction entière $D^*(\lambda)$ est de genre zéro, il nous reste à montrer que le coefficient α est nul.

Soient

$$B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$$

les traces du noyau $\overline{K(x, y)}$ (Ces traces s'obtiennent du noyau $\overline{K(x, y)}$ de la même manière que les traces $A_1, A_2, \dots, A_n$, considérées au § V, du noyau $K(x, y)$. Pour $|\lambda| \leqq \nu_1$ la dérivée logarithmique du dénominateur $D^*(\lambda)$ s'écrit

$$-\frac{d}{d\lambda}[\log D^*(\lambda)] = -\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r_i} + r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r_i^2} + \dots$$
$$= B_1 + B_2 r + \dots$$

où

$$B_1 = \int_0^1 \overline{K(s, s)}\, ds = \int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2\, dx dy.$$

Or, d'après le *lemme D* on a

$$B_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r_i}.$$

Donc

$$\alpha = 0.$$

q. e. d.

Remarques. I. Il est à observer que la proposition qui forme l'objet de ce § a été établie indépendamment du théorème de M. J. Schur. Du reste le théorème de M. Schur est postérieur aux travaux de M. Hilbert et de M. Schmidt à ce sujet [1].

II. Posons

$$\overline{\mathrm{K}}^{\star}(x,y) = \int^{1} \overline{\mathrm{K}(x,s)}\;\overline{\mathrm{K}(s,y)}\,ds = \int_{0}^{1} \overline{\mathrm{K}(x,s)}\;\overline{\mathrm{K}(y,s)}\,ds =$$
$$\int_{0}^{1} \overline{\mathrm{K}(s,x)}\;\overline{\mathrm{K}(s,y)}\,ds$$

$$\underline{\mathrm{K}^{\star}(x,y)} = \int_{0}^{1} \underline{\mathrm{K}(x,s)}\;\underline{\mathrm{K}(s,y)}\,ds = \text{etc.}$$

Il résulte de la relation fonctionnelle rappelée au § V que les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux $\overline{\mathrm{K}}^{\star}(x,y)$ et $\underline{\mathrm{K}^{\star}(x,y)}$ sont identiques à la fonction entière

$$\Delta^{\star}(\lambda) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{r_i^2}\right).$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{ri}$ converge, *l'ordre de la fonction entière* $\Delta^{\star}(\lambda)$ *est au plus égal à* $\frac{1}{2}$ *par excès* [2].

Soit α l'ordre du dénominateur $\mathrm{D}^{\star}(\lambda)$. *L'ordre du dénominateur* $\Delta^{\star}(\lambda)$ *est* $\frac{\alpha}{2}$.

[1] Le théorème de M. Schur a été publié en 1908 (Voir J. SCHUR, *Ueber die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution*, etc. Mathematische Annalen Bd 66, 1908). Les travaux de M. Hilbert et de M. Schmidt sont parus en 1904 et 1905 (Voir HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Gœttinger, Nachrichten, 1904 et E. SCHMIDT, *Entwicklung wilk. Funktionen*, etc. Dissertation Gœttingen, 1905).

[2] Dans cet énoncé nous n'avons pas précisé qu il s'agit de l'ordre apparent ou de l'ordre réel de la fonction $\Delta^{\star}(\lambda)$. Mais, à ce sujet, aucune confusion n'est possible, car la fonction $\Delta^{\star}(\lambda)$ *étant de genre zéro son ordre apparent est égal à son ordre réel.*

CHAPITRE II

SUR L'ORDRE DU DÉNOMINATEUR D(λ) RELATIF AUX NOYAUX DE COMPOSITION

§ **2**. Soient

$$K_1(x, y) \text{ et } K_2(x, y)$$

deux noyaux (A). Posons

$$G(x, y) = \int_0^1 K_1(x, s)\, K_2(s, y)\, ds.$$

Le dénominateur de Fredholm relatif au noyau $G(x, y)$ peut s'écrire (voir VI)

$$G(\lambda) = 1 + \sum_{\imath = 1}^{\infty} (-1)^n g_n \lambda^n$$

où on a posé

$$g_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_1\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{pmatrix} K_2\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_n.$$

Soient encore

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[K_1\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix} \right]^2 dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_n$$

et

$$b_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[K_2\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix} \right]^2 dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_n.$$

(Les quantités a_n et b_n sont réelles et positives).

En appliquant, dans l'expression de g_n, l'inégalité de Schwartz on obtient

$$|g_n| \leqq \sqrt{a_n b_n}. \tag{3}$$

Donc,

$$|G(\lambda)| \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}\, |\lambda|^n. \tag{4}$$

Les inégalités (3) et (4) nous seront d'une grande utilité.

§ **3**. Soient $D^\star_1(\lambda)$ et $D^\star_2(\lambda)$ les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux de Schmidt associés respectivement aux noyaux $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$. Ces dénominateurs peuvent s'écrire (voir l'égalité (2) du § 1) :

$$D^\star_1(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \lambda^n$$

$$D^\star_2(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \lambda^n.$$

Soient encore, α_1 et α_2 respectivement les ordres des fonctions entières $D^\star_1(\lambda)$ et $D^\star_2(\lambda)$. Ces fonctions étant de genre zéro (voir § 1) on a

$$\alpha_1 \leqq 1 \text{ et } \alpha_2 \leqq 1.$$

Nous nous proposons de démontrer que

L'ordre apparent σ *de la fonction entière* $G(\lambda)$ *vérifie l'inégalité*

$$\sigma \leqq \frac{2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}. \tag{5}$$

Soit α' un nombre arbitraire, inférieur à

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right].$$

Déterminons les nombres positifs, non nuls, ε_1 et ε_2 de manière à avoir

$$\alpha' < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha_1 + \varepsilon_1} + \frac{1}{\alpha_2 + \varepsilon_2}\right].$$

Les fonctions entières $D^{*}_{1}(\lambda)$ et $D^{*}_{2}(\lambda)$ étant respectivement d'ordres α_1 et α_2 on peut déterminer un entier N tel que l'on ait

$$a_n < \left[\frac{e}{\frac{n}{\alpha_1+\varepsilon_1}}\right]^{\frac{n}{\alpha_1+\varepsilon_1}} \text{ et } b_n < \left[\frac{e}{\frac{n}{\alpha_2+\varepsilon_2}}\right]^{\frac{n}{\alpha_2+\varepsilon_2}}$$

pour $n > N$.

En tenant compte de (3) on déduit que pour $n > N$, on a aussi

$$|g|^{\frac{1}{n}} < \frac{A}{n^{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha_1+\varepsilon_1}+\frac{1}{\alpha_2+\varepsilon_2}\right]}}$$

A étant une constante indépendante de n.

Donc, pour tout nombre α' inférieur à

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right]$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha'} |g_n|^{\frac{1}{n}} = 0$$

(Voir § 1) *q. e. d.*

§ 4. Donnons une seconde démonstration de l'inégalité (5). Soient p et q deux nombres positifs, dont la somme est égale à 1 ou

$$p+q=1.$$

L'inégalité (4) du § 2, peut s'écrire encore

$$|G(\lambda)| \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\frac{1}{2}}|\lambda|^{np}\right)\left(b_n^{\frac{1}{2}}|\lambda|^{nq}\right)$$

$$|G(\lambda)|^2 \leqq \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n|\lambda|^{2np}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n|\lambda|^{2nq}\right]. \quad (6)$$

Or, ε étant un nombre positif, arbitrairement petit, on a

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n|\lambda|^{2np} < e^{|\lambda|^{2p\alpha_1+\varepsilon}}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n|\lambda|^{2nq} < e^{|\lambda|^{2q\alpha_2+\varepsilon}} \quad (7)$$

dès que $|\lambda|$ dépasse une certaine quantité R.

Déterminons maintenant p et q de manière à avoir

$$p\alpha_1 = q\alpha_2$$

ou

$$p = \frac{1}{\alpha_1\left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right]}, \qquad q = \frac{1}{\alpha_2\left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right]}.$$

p et q étant ainsi déterminés, en tenant compte des inégalités (6) et (7), on déduit que pour $|\lambda| > R$ on a aussi

$$|G(\lambda)| < e^{|\lambda|^{\frac{2}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}} + \varepsilon}}$$

q. e. d.

§ 5. De l'inégalité (4) du § 2, on déduit

$$|G(\lambda)|^2 \leqq \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\lambda|^n\right]\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n |\lambda|^n\right] \qquad (8)$$

Soient $M(r)$, $M^\star_1(r)$, $M^\star_2(r)$ respectivement les maximums, sur le cercle $|\lambda| = r$, des modules $|G(\lambda)|$, $|D^\star_1(\lambda)|$, $|D^\star_2(\lambda)|$. On a visiblement

$$M^\star_1(r) = D^\star_1(re^{i\pi}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n,$$

$$M^\star_2(r) = D^\star_2(re^{i\pi}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n.$$

Avec ces notations l'inégalité (8) devient

$$[M(r)]^2 \leqq M^\star_1(r)\, M^\star_2(r). \qquad (9)$$

Les fonctions entières $D^\star_1(\lambda)$ et $D^\star_2(\lambda)$ étant de genre zéro, on a

$$\log |D^\star_1(\lambda)| = o(|\lambda|),$$
$$\log |D^\star_2(\lambda)| = o(|\lambda|).$$

Il résulte de l'inégalité (9) que l'on a aussi

$$\log |G(\lambda)| = o(|\lambda|). \qquad (10)$$

Cette égalité montre que la fonction entière $G(\lambda)$ est *au plus* de genre un. Nous allons démontrer plus loin que cette fonction est de genre zéro (Voir § **11**).

Supposons, plus particulièrement, que les noyaux $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$ sont identiques, ou

$$K(x, y) \equiv K_1(x, y) \equiv K_2(x, y).$$

Dans ce cas particulier, le noyau $G(x, y)$ n'est autre que le premier noyau itéré de $K(x, y)$ ou

$$G(x, y) = K^{(2)}(x, y) = \int_0^1 K(x, s)\, K(s, y)\, ds$$

tandis que le dénominateur $G(\lambda)$ est identique à $D^{(2)}(\lambda)$. (Voir § V).

L'égalité (**10**) devient maintenant

$$\log |D^{(2)}(\lambda)| = o(|\lambda|). \qquad \textbf{(11)}$$

Soient $M^{(2)}(r)$ le maximum, sur le cercle $|\lambda| = r$, du module du dénominateur $D^{(2)}(\lambda)$ et $M^*(r)$ le maximum, sur le même cercle, du module du dénominateur $D^*(\lambda)$ relatif aux noyaux de Schmidt, associés au noyau $K(x, y)$. Dans ce cas particulier, l'inégalité (9) devient

$$M^{(2)}(r) \leqq M^*(r).$$

Autrement dit

Le noyau $K(x, y)$ *étant un noyau* (A), *l'ordre apparent de la fonction entière* $D^{(2)}(\lambda)$ *est au plus égal à l'ordre du dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt, associés.*

§ 6. Soient

$$0 < r_1^{(1)} \leqq r_2^{(1)} \leqq \ldots \leqq r_n^{(1)} \leqq \ldots$$

et

$$0 < r_1^{(2)} \leqq r_2^{(2)} \leqq r_3^{(2)} \ldots \leqq r_n^{(2)} \leqq \ldots$$

respectivement les zéros des fonctions entières $D^*_1(\lambda)$ et $D^*_2(\lambda)$. Soient encore

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$$

les zéros de $G(\lambda)$. Supposons que l'on a

$$\alpha_1 < 1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 < 1$$

et que les séries

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[r_n^{(1)}\right]^{\alpha_1}},$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[r_n^{(2)}\right]^{\alpha_2}}$$

sont convergentes. Posons

$$\omega = \frac{2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Nous nous proposons de démontrer que *la série*

$$S = \Sigma \frac{1}{|\rho i|^{\omega}}$$

est convergente.

En d'autres termes

Si les fonctions entières $D^{\star}_1(\lambda)$ *et* $D^{\star}_2(\lambda)$ *sont respectivement d'ordres* α_1 *et* α_2 *par excès, la fonction entière* $G(\lambda)$ *est au plus d'ordre* ω *par excès.*

Les ordres α_1 et α_2 étant supposés inférieurs à un, ω est aussi inférieur à un. En tenant compte du théorème de M. Valiron (voir § IV) il s'ensuit que la série S est convergente ou divergente suivant que l'intégrale

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{1+\omega}}\, dr$$

a un sens ou non.

L'inégalité (4) du § 2 peut s'écrire aussi

$$|G(\lambda)| \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, |\lambda|^{\frac{n\omega}{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(b_n\, |\lambda|^{\frac{n\omega}{\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$[M(r)]^2 \leqq \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\frac{n\omega}{\alpha_1}}\right]\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\omega}{\alpha_2}}\right].$$

Donc, en posant

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^{\infty} \frac{\log\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\frac{n\omega}{\alpha_1}}\right]}{r^{1+\omega}} dr$$

et

$$\mathrm{I}_2 = \int_8^{1} \frac{\log\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\omega}{\alpha_2}}\right]}{r^{1+\omega}} dr$$

on obtient en définitive

$$\mathrm{I} \leqq \frac{1}{2}[\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2].$$

D'autre part, on démontre facilement les égalités suivantes :

$$\mathrm{I}_1 = \frac{\alpha_1}{\omega}\int_1^{\infty} \frac{\log\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n\right]}{r^{1+\alpha_1}} dr = \frac{\alpha_1}{\omega}\int_1^{\infty} \frac{\log \mathrm{M}_1(r)}{r^{1+\alpha_1}} dr$$

et

$$\mathrm{I}_2 = \frac{\alpha_2}{\omega}\int_1 \frac{\log \mathrm{M}_2(r)}{r^{1+\alpha_2}} dr$$

Or, les séries S_1 et S_2 étant supposées convergentes, il résulte du théorème de M. Valiron, que les intégrales I_1 et I_2 sont aussi convergentes. Et, par conséquent, l'intégrale I converge.

q. e. d.

Reprenons maintenant, le cas particulier considéré à la fin du § 5. Supposons pour cela que l'on a

$$\mathrm{K}(x, y) \equiv \mathrm{K}_1(x, y) \equiv \mathrm{K}_2(x, y).$$

Soient

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

les zéros du dénominateur $\mathrm{D}(\lambda)$ relatif au noyau $\mathrm{K}(x, y)$. On sait que les zéros du dénominateur $\mathrm{D}^{(2)}(\lambda)$ (voir § V) sont respectivement

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2, \ldots \text{ (1)}$$

(1) On remarquera que dans ce cas particulier, les λ_n^2 ont le même rôle que les ρ_n du cas général et que l'on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \omega$.

De même, soient

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

les zéros du dénominateur $D^*(\lambda)$ relatif aux noyaux de Schmidt, associés au noyau $K(x, y)$.

Le résultat que nous venons d'établir devient maintenant

Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\alpha}}$$

est convergente, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2\alpha}}$$

est aussi convergente.

Observation. La démonstration, qui précède, suppose que les ordres α_1 et α_2 et que l'exposant α sont inférieurs à l'unité. Cette restriction est imposée par le fait que l'intégrale I et la série S, l'intégrale I_1 et la série S_1, l'intégrale I_2 et la série S_2 sont de la même nature quand ω, α_1 et α_2 ne sont pas entiers. Mais, si par exemple, α_1 est égal à *un* la série S_1 peut être convergente, tandis que l'intégrale I_1 est divergente. Nous donnons dans la note II, de la fin, un exemple où cette circonstance se produit effectivement.

Le lemme que nous démontrons au § suivant, a pour but de nous permettre d'éviter les cas où une telle circonstance peut se produire.

§ 7. Considérons encore le noyau

$$G(x, y) = \int_0^1 K_1(x, s)\, K_2(s, y)\, ds$$

et soient

$$\overline{G(x, y)} = \int_0^1 G(x, s)\, G(y, s)\, ds,$$

$$\underline{K_1(x, y)} = \int_0^1 K_1(s, x)\, K_1(s, y)\, ds,$$

$$\overline{K_2(x, y)} = \int_0^1 K_2(x, s)\, K_2(y, s)\, ds.$$

Nous nous proposons de démontrer le lemme suivant

Le dénominateur $D^{\star}_{G}(\lambda)$ *relatif au noyau* $\overline{G(x, y)}$ *est identique, terme à terme au dénominateur de Fredholm relatif au noyau*

$$H(x, y) = \int_0^1 \underline{K_1(x, s)}\ \overline{K_2(s, y)}\ ds.$$

On a

$$\overline{G(x, y)} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, s_1)\ \overline{K_2(s_1, s_2)}\ K_1(y, s_2)\ ds_1 ds_2$$

ou en posant

$$K_1(y, x) = K'_1(x, y)$$

on a aussi

$$\overline{G(x, y)} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, s_1)\ \overline{K_2(s_1, s_2)}\ K'_1(s_2, y),\ ds_1 ds_2.$$

En désignant les différents déterminants de Fredholm respectivement par

$$K_1\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & \dots & K(x_1, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(x_n, y_1) & \dots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$\underline{K_1}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{K_1(x_1, y_1)} & \dots & \underline{K_1(x_1, y_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{K_1(x_n, y_1)} & \dots & \underline{K_1(x_n, y_n)} \end{vmatrix}$$

$$\overline{K_2}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{K_2(x_1, y_1)} & \dots & \overline{K_2(x_1, y_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{K_2(x_n, y_1)} & \dots & \overline{K_2(x_n, y_n)} \end{vmatrix}$$

$$K'_1\begin{pmatrix} x_1 \dots y_1 \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K'_1(x_1, y_1) & \dots & K'_1(x_1, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K'_1(x_n, y_1) & \dots & K'_1(x_n, y_n) \end{vmatrix} = K_1\begin{pmatrix} y_1 \dots y_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix}$$

et en utilisant l'expression donnée, par M. Carleman, pour les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux de composition (voir VI) on obtient

$$D^{\star}_{G}(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{(n\,!)^3}\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{3n}K_1\begin{pmatrix}s_1^{(1)}\dots s_n^{(1)}\\ s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\end{pmatrix}\overline{K_2}\begin{pmatrix}s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\\ s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\end{pmatrix}$$

$$K'_1\begin{pmatrix}s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\\ s_1^{(1)}\dots s_n^{(1)}\end{pmatrix}ds_1^{(1)}\dots ds_n^{(1)}ds_1^{(2)}\dots ds_n^{(2)}ds_1^{(3)}\dots ds_n^{(3)}$$

ou encore

$$D^{\star}_{G}(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{(n\,!)^3}\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{2n}\overline{K_2}\begin{pmatrix}s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\\ s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\end{pmatrix}ds_1^{(2)}\dots ds_n^{(2)}ds_1^{(3)}\dots ds_n^{(3)}$$

$$\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n}K_1\begin{pmatrix}s_1^{(1)}\dots s_n^{(1)}\\ s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\end{pmatrix}K_1\begin{pmatrix}s_1^{(1)}\dots s_n^{(1)}\\ s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\end{pmatrix}ds_1^{(1)}\dots ds_n^{(1)}.$$

Or, d'après l'identité de M. Laudesberg, reproduite au § VI, on a

$$\frac{1}{n\,!}\int_0^1\cdots\int_0^1K_1\begin{pmatrix}s_1^{(1)}\dots s_n^{(1)}\\ s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\end{pmatrix}K_1\begin{pmatrix}s_1^{(1)}\dots s_n^{(1)}\\ s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\end{pmatrix}ds_1^{(1)}\dots ds_n^{(1)}$$

$$=\underline{K_1}\begin{pmatrix}s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\\ s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\end{pmatrix}.$$

Donc, le dénominateur $D^{\star}_{G}(\lambda)$ devient maintenant

$$D^{\star}_{G}(\lambda)=1+\sum\frac{(-\lambda)^n}{(n\,!)^2}\int_0^1\cdots\int_0^1\underline{K_1}\begin{pmatrix}s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\\ s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$\overline{K_2}\begin{pmatrix}s_1^{(2)}\dots s_n^{(2)}\\ s_1^{(3)}\dots s_n^{(3)}\end{pmatrix}ds_1^{(2)}\dots ds_n^{(2)}ds_1^{(3)}\dots ds_n^{(3)}.$$

D'autre part, on obtient la même fonction entière, pour le dénominateur de Fredholm relatif au noyau

$$H(x,\,y)=\int_0^1\underline{K_1(x,\,s)}\;\overline{K_2(s,\,y)}\,ds.$$

§ 8. Soient $\Delta^\star_1(\lambda)$ et $\Delta^\star_2(\lambda)$ les dénominateurs de Fredholm relatifs respectivement aux noyaux de Schmidt associés, aux noyaux $\overline{K_1(x, y)}$ et $\underline{K_2(x, y)}$. Soient α'_1 et α'_2 les ordres de ces fonctions entières. On a

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha'_2 = \frac{\alpha_2}{2}$$

(Voir § **1**, remarque II).

Soit maintenant α, l'ordre de $D^\star_G(\lambda)$. En tenant compte du lemme que nous venons d'établir et de l'inégalité (5) du § **3**, on déduit

$$\alpha \leqq \frac{2}{\frac{1}{\alpha'_1} + \frac{1}{\alpha'_2}}$$

ou

$$\alpha \leqq \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}. \qquad (\mathbf{12})$$

De plus, si les fonctions entières $D^\star_1(\lambda)$ et $D^\star_2(\lambda)$ sont d'ordres α_1 et α_2 *par excès* les fonctions entières $\Delta^\star_1(\lambda)$ et $\Delta^\star_2(\lambda)$ sont aussi, d'ordres $\frac{\alpha_1}{2}$ et $\frac{\alpha_2}{2}$ *par excès*. Il résulte du § 6, que dans ce cas-là, le dénominateur $D^\star_G(\lambda)$ est, au plus d'ordre

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

par excès.

§ 9. Soient

$$K_1(x, y),\ K_2(x, y),\ \ldots,\ K_n(x, y)$$

n noyaux (A). Posons

$$G_n(x, y) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_1(x, s_1)\ K_2(s_1, s_2) \ldots$$
$$K_n(s_{n-1}, y)\ ds_1 ds_2 \ldots ds_{n-1}.$$

Soient $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les ordres des dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux de Schmidt associés respectivement aux noyaux $G_n(x, y)$, $K_1(x, y)$, ..., $K_n(x, y)$.

On a

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \leqq \frac{1}{\alpha} \tag{13}$$

Cette inégalité a été démontrée pour $n = 2$. (Voir l'inégalité (**12**) du § 8.) On déduit ensuite, de proche en proche, que la même inégalité est vraie pour toute valeur de n.

En tenant compte de l'inégalité (5) du § 3, on déduit de (**13**) que σ étant l'ordre apparent du dénominateur de Fredholm relatif au noyau $G_n(x, y)$, *on a*

$$\sigma \leqq \frac{2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}. \tag{14}$$

Observation. Il est à remarquer qu'il existe des noyaux pour lesquels c'est le signe $=$ qui convient, dans (**14**). Il suffit pour cela, de considérer les noyaux

$$K_1(x, y) \equiv K_2(x, y) \equiv \dots \equiv K_n(x, y) \equiv K(x, y)$$

le noyau $K(x, y)$ étant symétrique et continu ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur et sur le contour du carré

$$0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Pour de tels noyaux le dénominateur $D(\lambda)$ de Fredholm se réduit à un produit canonique de genre zéro, ou

$$D(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right).$$

Le noyau $K(x, y)$ étant supposé symétrique, le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux associés de Schmidt, peut s'écrire

$$D^*(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^2}\right).$$

De même, le dénominateur de Fredholm relatifs au noyau $G_n(x, y)$ devient, dans ce cas particulier,

$$G_n^*(\lambda) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_p^n}\right).$$

Et, il est évident que si α est l'ordre de $D^*(\lambda)$, l'ordre de $G_n(\lambda)$ est $\frac{2\alpha}{n}$.

CHAPITRE III

SUR LE GENRE DU DÉNOMINATEUR D(λ) DE FREDHOLM

§ **10.** Le lemme établi au § 7, va nous permettre de compléter les résultats indiqués au § 6.

Les dénominateurs de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés aux noyaux $\underline{K_1(x, y)}$ et $\overline{K_2(x, y)}$ étant, au plus, d'ordre $\frac{1}{2}$ par excès (voir § 1, remarque II) il résulte que la fonction entière $D^*_G(\lambda)$ est au plus d'ordre $\frac{1}{2}$ par excès (Voir aussi, § 8). On déduit de là, en tenant compte du § 6, que

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|}$$

est convergente.

En particulier, si les noyaux $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$ sont identiques, on peut énoncer le résultat suivant :

Pour tout noyau (A), *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2}$$

est convergente.

Ce résultat, n'est autre que le théorème de M. J. Schur [1].

§ **11.** Il résulte des § 5 et § 10 que le dénominateur $G(\lambda)$ admet un développement de Weierstrass, de la forme

$$G(\lambda) = e^{\alpha\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\rho_n}\right).$$

Nous allons démontrer que le coefficient α est nul.

[1] V. J. Schur, *Mathematische Annalen,* Bd. 66, 1908.

Nous avons démontré au § 5, qu'étant donné un nombre positif ε, arbitrairement petit, on peut déterminer un autre nombre positif R, tel que pour $|\lambda| > R$, on a

$$|G(\lambda)| < e^{\varepsilon|\lambda|}.$$

D'autre part, nous venons de voir que la série

$$\sum \frac{1}{|\rho_n|}$$

converge. D'après le théorème classique de M. Hadamard, complété par M. Lindelöf (voir § III), il résulte qu'étant donné ε, on peut déterminer une suite

$$0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_p < \ldots$$

de nombres positifs, indéfiniment croissants et tels, que sur les cercles

$$|\lambda| = R_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

on ait

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\rho_n}\right)\right| > e^{-\varepsilon|\lambda|}.$$

Donc, quelque petit que soit le nombre positif ε, il existe une infinité de cercles, de rayons indéfiniment croissants, sur chacun desquels on a l'inégalité

$$|e^{\alpha\lambda}| < e^{2\varepsilon|\lambda|}.$$

Conclusion

$$\alpha = 0$$

ou,

Le dénominateur $G(\lambda)$ *est une fonction entière de genre zéro.*

Plus particulièrement,

Le dénominateur $D^{(2)}(\lambda)$ *relatif à un noyau* (A) *est de genre zéro.*

Il est à peine nécessaire d'ajouter, qu'il résulte de l'inégalité (14), démontrée au § 9, que les dénominateurs de Fredholm $D^{(n)}(\lambda)$ relatifs aux noyaux itérés $K^{(n)}(x, y)$ où $n \geqq 3$, sont aussi de genre zéro.

§ **12**. Nous proposons de démontrer à présent, que

Le dénominateur $D(\lambda)$ *relatif à un noyau* (B) *est au plus de genre un.*

Remarquons d'abord, que les considérations qui précèdent, permettent aussi de démontrer que *le dénominateur* $D(\lambda)$ *relatif à un noyau* (B) *est une fonction entière.* En effet, la relation fonctionnelle rappelée au § III, étant vraie pour les noyaux (B), il résulte que si la fonction $D(\lambda)$ admet une singularité à distance finie, l'*une* au moins de fonctions entières

$$
\begin{aligned}
D^{(2)}(\lambda^2) &= D(\lambda)\, D(-\lambda) \\
D^{(3)}(\lambda^3) &= D(\lambda)\, D(\omega_3\lambda)\, D(\omega_3^2\lambda), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D^{(n)}(\lambda^n) &= D(\lambda)\, D(\omega_n\lambda) \ldots D(\omega_n^{n-1}\lambda) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

admettrait aussi des singularités à distance finie. Ce qui est impossible. Dans ces dernières égalités ω_n désigne une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1.$$

Revenons, après cette remarque, à la proposition énoncée.

Nous avons vu (théorème de M. Schur) que l'ordre réel de $D(\lambda)$ est au plus égal à deux, par excès. La fonction entière $D(\lambda)$ admet, donc, un développement de Weierstrass de la forme

$$D(\lambda) = e^{g(\lambda)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}$$

$g(\lambda)$ étant une fonction entière, ou

$$g(\lambda) = g_1\lambda + g_2\lambda^2 + \ldots + g_n\lambda^n + \ldots$$

Or, on a

$$D^{(2)}(\lambda^2) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) = D(\lambda)\, D(-\lambda)$$
$$= e^{g(\lambda)+g(-\lambda)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right)$$
$$g(\lambda) + g(-\lambda) \equiv 0.$$

Donc, tous les coefficients g_{2n} — d'indices pairs — sont nuls.

De même, en considérant

$$D^{(3)}(\lambda^3) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^3}{\lambda_n^3}\right) = D(\lambda)\, D(\omega_3\lambda)\, D(\omega_3^2\lambda)$$
$$= e^{g(\lambda)+g(\omega_3\lambda)+g(\omega_3^2\lambda)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^3}{\lambda_3^n}\right)$$

on déduit que les coefficients g_{3n} sont nuls. Et, ainsi de suite...

On obtient, en définitive, que tous les coefficients de $g(\lambda)$ sont nuls, sauf le premier.

q. e. d.

Il existence des noyaux pour lesquels le coefficient g_1 est différent de zéro. En effet, considérons le noyau $K(x, y)$ défini par les égalités

$$K(x, y) = F(x, y), \qquad \text{pour } x \geqq y,$$
$$K(x, y) = 0 \qquad \text{pour } x < y$$

$F(x, y)$ étant une fonction bornée et intégrable et telle que la valeur de l'intégrale

$$A_1 = \int_0^1 F(s, s)\, ds$$

ne soit pas nulle. Le dénominateur $D(\lambda)$ relatif au noyau $K(x, y)$, ainsi défini, se réduit à

$$D(\lambda) = e^{-A_1\lambda}.$$

La proposition que nous venons d'établir, a été démontrée, d'une autre manière, par M. Carleman [1]. M. Carleman l'avait d'abord démontrée, pour les noyaux continus [2].

(1) Voir B.

(2) Voir A.

CHAPITRE IV

SUR LA DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES VALEURS FONDAMENTALES

§ **13.** Le théorème établi au § **11** est susceptible d'être utilisé pour la détermination de la distribution asymptotique des valeurs fondamentales relatives aux problèmes de la physique mathématique.

Considérons pour fixer les idées, le problème suivant

Chercher la distribution asymptotique des nombres λ_n *pour lesquels il existe des fonctions* $u_n(M)$, *nulles sur un contour* C *et vérifiant à l'intérieur de l'aire* (D) *limitée par ce contour, l'équation*

$$\Delta u_n + \lambda_n a(M)\, u_n(M) = 0 \qquad \text{(E)}$$

On suppose que le contour C est formé d'un nombre fini d'arcs analytiques. Dans ces conditions, il est possible de définir la fonction G(M, P) de Green, relative à ce contour. On suppose de plus, que la fonction $a(M)$ est régulière et positive pour tout point M, situé sur le contour ou dans l'aire limitée par le contour C. Posons

$$0 < \alpha \leqq u(M) \leqq A$$

α et A étant des constantes.

Il est bien connu, que les λ_n sont les zéros du dénominateur de Fredholm relatif au noyau

$$K(M, P) = \frac{1}{2\pi}\, G(M, P)\, a(M).$$

On sait, de plus, que ces nombres sont positifs et que le rapport $\frac{\lambda_n}{n}$ tend vers une limite finie, pour n infini (¹).

Le noyau $K(M, P)$ étant un noyau (A) le théorème du § **11** lui est applicable.

Soit $M^{(2)}(r)$ le maximum sur le cercle $|\lambda| = r$, du module du dénominateur de Fredholm relatif au noyau itéré

$$K^{(2)}(M, N) = \frac{1}{4\pi^2} \int_D G(M, P)\, a(M)\, G(P, N)\, a(P)\, d\sigma_P$$

où $d\sigma_P$ désigne l'élément d'aire relatif à un point P, du domaine (D). Soient de même, $\mathfrak{M}^{(2)}(r)$ et $m^{(2)}(r)$ les maximums, sur le cercle $|\lambda| = r$, des modules des dénominateurs de Fredholm relatifs respectivement aux noyaux

$$\frac{1}{4\pi^2} A^2 \int_D G(M, P)\, G(N, P)\, d\sigma_P$$

et

$$\frac{1}{4\pi^2} \alpha^2 \int_D G(M, P)\, G(N, P)\, d\sigma_P.$$

On a

$$m^{(2)}(r) \leqq M^{(2)}(r) \leqq \mathfrak{M}^{(2)}(r).$$

Le dénominateur de Fredholm relatif au noyau $K^{(2)}(M, N)$ étant de genre zéro, son ordre réel est égal à son ordre apparent. Donc, la recherche de la distribution asymptotique des λ_n et l'étude de la croissance de $\mathfrak{M}^{(2)}(r)$ ou $m^{(2)}(r)$ constituent deux problèmes équivalents.

Posons, maintenant

$$\Delta\begin{pmatrix} M_1 \dots M_p \\ N_1 \dots N_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} G(M_1, N_1) & \dots & G(M_1, N_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ G(M_p, N_1) & \dots & G(M_p, N_p) \end{vmatrix}$$

(¹) Voir R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, p. 349. Berlin, 1924.

et

$$a_p = \frac{1}{(p!)^2}\int \left[\Delta\begin{pmatrix} M_1 \dots M_p \\ N_1 \dots N_p \end{pmatrix}\right]^2 d\sigma_{M_1} \dots d\sigma_{M_p} d\sigma_{N_1} \dots d\sigma_{N_p}$$

le domaine d'intégration coïncidant, pour chacun des points $M_1, \dots M_p, N_1, \dots N_p$ avec le domaine (D).

On a

$$\mathfrak{M}^{(2)}(r) = 1 + a_1 r' + \dots + a_p r'^p + \dots$$

où r' désigne la quantité

$$r' = \frac{A^2}{4\pi^2} r.$$

Pour connaître l'ordre de grandeur des coefficients a_p il suffit de remarquer que ces coefficients augmentent quand on remplace le contour C par un contour C′ l'enveloppant. Cette remarque peut être mise en évidence, en utilisant les propriétés classiques de la fonction de Green. Mais, d'une manière indirecte elle a été démontrée par M. Herman Weyl.

Considérons l'équation

$$\Delta u + \lambda u = 0. \qquad \text{(E')}.$$

Soient

$$\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}, \dots, \rho_n^{(1)}, \dots$$

les valeurs de λ pour lesquelles il existe des fonctions $u_n(M)$ nulles sur le contour C et vérifiant dans l'aire limitée par ce contour, l'équation

$$\Delta u_n + \rho_n^{(1)} u_n(M) = 0$$

Soient, maintenant

$$\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)}, \dots, \rho_n^{(2)}, \dots$$

les valeurs fondamentales relatives à un second contour, C′.

M. H. Weyl a démontré (¹) que si aucun point du contour C' n'est pas contenu dans l'aire intérieure au contour C, on a

$$\rho_1^{(2)} < \rho_1^{(1)},\ \rho_2^{(2)} < \rho_2^{(1)},\ \dots,\ \rho_n^{(2)} < \rho_n^{(1)},\ \dots$$

Or, on a

$$a_p = \sum \frac{1}{\left[\rho_{i_1}^{(1)}\,\rho_{i_2}^{(1)} \dots \rho_{i_p}^{(1)}\right]^2}$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons $i_1\, i_2 \dots i_p$ qu'on peut former avec p nombres entiers. Donc, en vertu du résultat démontré par M. Herman Weyl les coefficients ap augmentent quand on remplace un contour enveloppé, par un contour enveloppant.

Il résulte, en définitive, que pour connaître l'ordre de grandeur des coefficients a_p il suffit de choisir un contour C_ι, intérieur au contour C, et un contour C_e, extérieur au contour C, de manière que les coefficients a_p relatifs aux contours C_i et C_e puissent être facilement déterminés. Ainsi, on peut choisir pour contours C_ι et C_e des carrés ou des cercles.

On retrouve, par cette voie, que nous ne faisons qu'indiquer, les résultats connus concernant la distribution asymptotique des valeurs fondamentales relatives aux problèmes de la physique mathématique.

§ 14. Nous nous proposons d'indiquer maintenant une application des considérations qui précèdent, à l'étude des valeurs caractéristiques relatives aux équations générales du type elliptique.

Considérons les expressions

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u$$

(¹) Voir H. Weyl, *Ueber die Abhäugigkeit der Eigenschwingungen einer Membranen von deren Begrenzung.* J. reine augew. Math., tome 141, p. 1-11, 1912.

et

$$Mu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}[a(x, y)\, u] - \frac{\partial}{\partial y}[b(x, y)\, u] + c(x, y)\, u.$$

On suppose que les fonctions $a(x, y)$, $b(x, y)$ et $c(x, y)$ sont continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, dans un certain domaine (D) défini par un contour C — formé d'un nombre fini d'arcs analytiques et par l'aire intérieure à ce contour. On suppose, de plus, que les dérivées du troisième ordre des fonctions $a(x, y)$, $b(x, y)$ et $c(x, y)$ existent et sont continues, à l'exception de certaines lignes — contenues dans (D) — au long desquelles ces dérivées peuvent admettre des discontinuités de première espèce.

A tout noyau donné on peut associer deux suites de constantes fondamentales, à savoir : les zéros du dénominateur de Fredholm et les valeurs caractéristiques de Schmidt. De la même manière, l'étude de l'équation du type elliptique conduit à envisager deux suites de valeurs fondamentales.

Considérons les constantes ρ_i, pour lesquelles il existe des fonctions $u_i(x, y)$ et $v_i(x, y)$ nulles sur le contour C et vérifiant dans l'aire limitée, par ce contour, le système

$$Lu_i + \rho_i v_i(x, y) = 0, \quad Mv_i + \rho_i u_i(x, y) = 0 \quad (S).$$

Ces constantes sont réelles et on peut supposer qu'elles sont aussi, positives. De plus, M. Geppert [1] a démontré que le rapport

$$\frac{\rho_n}{n}$$

tend vers une limite finie, pour n infini.

Considérons aussi, les constantes λ_i pour lesquelles il existe des fonctions $u_i(x, y)$ nulles sur le contour C et vérifiant dans l'aire (D) l'équation homogène

$$Lu_i + \lambda_i u_i(x, y) = 0. \qquad (E)$$

[1] Voir H. Geppert, *Uber die Eigenwert probleme bei nichtsebbest adjungierten elliptischen Differentialgleichungen Zweiter Ordnung.* Mathematische Annalen, Bd. 95, p. 519-543, 1926.

En utilisant le résultat établi par M. Geppert, nous allons démontrer que *aussi petit que, soit le nombre positif* ε, *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

est convergente.

On sait, que d'après nos hypothèses, il est possible de déterminer une fonction de Green, généralisée $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ de la forme

$$\Gamma(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + G(x, y; \xi, \eta)$$

$G(x, y; \xi, \eta)$ étant continue à l'intérieur et sur le contour C et vérifiant — en outre — les conditions suivantes :

1° Les points de coordonnées x_c, y_c et ξ_c, η_c étant sur le contour C, on a

$$\Gamma(x_c, y_c; \xi, \eta) = 0, \quad \Gamma(x, y; \xi_c, \eta_c) = 0.$$

2° Les points de coordonnées x, y et ξ, η étant dans (D) on a

$$L_{\xi, \eta}\Gamma(x, y; \xi, \eta) = 0 \qquad M_{x, y}\Gamma(x, y; \xi, \eta) = 0$$

pour

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \neq 0.$$

Dans ces dernières égalités $L_{\xi, \eta}$ et $M_{x, y}$ indiquent que les différentiations prévues par les symboles L et M doivent être effectuées respectivement par rapport aux variables indépendantes ξ, η et x, y.

Posons

$$\Gamma_1(x, y; \xi, \eta) = \iint_{(D)} \Gamma(\sigma, \tau; \xi, \eta)\, \Gamma(\sigma, \tau; x, y)\, d\sigma d\tau$$

et

$$\Gamma_2(x, y; \xi, \eta) = \iint_{(D)} \Gamma(x, y; \sigma, \tau)\, \Gamma(\xi, \eta; \sigma, \tau)\, d\sigma d\tau$$

Les fonctions u_i et v_i, qui vérifient le système (S), vérifient aussi les équations

$$u_i(x, y) = \rho_i^2 \iint_{(D)} \Gamma_1(x, y; \xi, \eta)\, u_i(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

$$v_i(x, y) = \rho_i^2 \iint_{(D)} \Gamma_2(x, y; \xi, \eta)\, v_i(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

Donc, les constantes ρ_i^2 sont les zéros du dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés, au noyau

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta).$$

D'autre part, la fonction $u_i(x, y)$ vérifiant l'équation homogène (E) satisfait aussi à l'équation

$$u_i(x, y) = \lambda_i \iint_{(D)} \Gamma(\xi, \eta; x, y) u_i(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Et, par conséquent, les constantes λ_i sont les zéros du dénominateur de Fredholm relatif au noyau

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta).$$

Ce dernier noyau est un noyau (A). M. Geppert ayant démontré que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n^{1+\varepsilon}}$$

est convergente, aussi petit que soit le nombre positif ε, il résulte du § 6 que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

est aussi convergente. *q. e. d.*

SECONDE PARTIE

LES NOYAUX A VARIATION BORNÉE

CHAPITRE V

SUR LES NOYAUX DÉRIVABLES

§ 15. — Soit $K(x, y)$ un noyau (A) ayant une dérivée première. Soit, pour fixer les idées, $\frac{\partial K}{\partial x}$ cette dérivée. Posons

$$K_1(x, y) = \frac{\partial K}{\partial x}.$$

Nous admettons aussi, que le noyau $K_1(x, y)$ est un noyau (A). Supposons enfin, que l'on a

$$K(o, y) = 0,$$

pour $o \leqslant y \leqslant 1$. D'ailleurs, cette dernière hypothèse ne restreint pas la généralité de nos raisonnements [1].

[1] En effet, il suffit de remarquer pour cela que le dénominateur de Fredholm relatif au noyau

$$K(x, y) = \int_0^1 \Omega(x, s) K_1(s, y) ds + f(y) = L(x, y) + f(y$$

est

$$D_K(\lambda) = [1 - \lambda \int_0^1 f(s) ds] D_I(\lambda) - \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 D_L\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \middle| \lambda\right) f(s) ds dt$$

où $D_I(\lambda)$ et $D_I\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ désignent respectivement le dénominateur de Fred-

Dans ces conditions le noyau $K(x, y)$ est un noyau de composition. Car, on a

$$K(x, y) = \int_0^x K_1(s, y)ds \tag{15}$$

Définissons, d'autre part, la fonction $\Omega(x, y)$ de la manière suivante. On a

$$\Omega(x, y) = 1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\Omega(x, y) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < y \leqslant 1.$$

L'égalité (15) devient

$$K(x, y) = \int_0^1 \Omega(x, s) K_1(s, y)ds \tag{16}$$

Le noyau $K(x, y)$ étant un noyau de composition, nous pouvons utiliser l'inégalité (5) du § 3, à fin de déterminer l'ordre du dénominateur $D(\lambda)$ relatif à ce noyau.

Déterminons, pour cela, l'ordre du dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés au noyau $\Omega(x, y)$.

Les fonctions fondamentales $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ et les constantes μ_i de Schmidt relatives à $\Omega(x, y)$ sont définies par les équations

$$\varphi_i(x) = \mu_i \int_0^1 \Omega(x, s)\psi_i(s)ds = \mu_i \int_0^x \psi_i(s)ds$$

$$\psi_i(x) = \mu_i \int_0^1 \Omega(s, x)\varphi_i(s)ds = \mu_i \int_0^1 \varphi_i(s)ds$$

holm et le premier mineur de ce dénominateur, relatifs au noyau $L(x, y)$ On vérifie ensuite que l'ordre apparent des fonctions entières $D_L(\lambda)$ et $D_L\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right)$ est au plus égal à $\dfrac{2}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}}$ où α_1 et α_2 désignent respectivement les ordres des dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux de Schmidt associés aux noyaux $\Omega(x, y)$ et $K_1(x, y)$.

D'une autre manière, on arrive à la même conclusion en remarquant que α étant un exposant arbitraire, les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux $K(x, y)$ t $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha K(x, y)$ sont identiques terme à terme.

ou, en différentiant

$$\varphi_i'(x) = \mu_i \psi_i(x) \qquad \text{et} \qquad -\psi_i'(x) = \mu_i \varphi_i(x)$$

avec les conditions à la limite

$$\varphi(0) = 0, \qquad \psi(1) = 0.$$

On obtient

$$\varphi_i(x) = \sqrt{2} \sin\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$

$$\psi_i(x) = \sqrt{2} \cos\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$

$$\mu_i = i\pi + \frac{\pi}{2},$$

i étant un nombre entier.

Il résulte de là, que le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés à $\Omega(x, y)$ est d'ordre $\frac{1}{2}$.

De même, le noyau $K_1(x, y)$ étant supposé un noyau (A), le dénominateur de Fredholm, relatif aux noyaux associés de Schmidt à ce noyau, est au plus d'ordre 1 (Voir § 1).

En tenant compte de l'inégalité (5) du § 3, nous obtenons en définitive, que *le dénominateur de Fredholm relatif au noyau* K(x, y) *est au plus d'ordre* $\frac{2}{3}$.

Dans le cas particulier, où le noyau $K(x, y)$ est symétrique, ce résultat a été démontré antérieurement par M. Weyl [1].

On déduit aussi, de l'inégalité (12) du § 8, que *le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés à* K(x, y) *est d'ordre* $\frac{1}{3}$.

§ 16. — Supposons maintenant, qu'à son tour, le noyau $K_1(x, y)$ admette une dérivée

$$K_2(x, y) = \frac{\partial K_1}{\partial x}$$

et que le noyau $K_2(x, y)$ est un noyau (A).

[1] Voir H. Wely. *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearen partieller Differentialgleichungen*, Mat. Ann., Bd. 71, 1912, p. 441-479

Les résultats que nous avons obtenu précédemment pour le noyau $K(x, y)$ sont maintenant valables pour le noyau $K_1(x, y)$. Donc, dans ce cas, le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés à $K_1(x, y)$ est au plus d'ordre $\frac{1}{3}$. Par conséquent, en vertu de l'inégalité (5) du § 3, *le dénominateur de Fredholm relatif au noyau* K(x, y) *est au plus d'ordre* $\frac{2}{5}$.

On déduit, de propre en proche, que *si le noyau* K(x, y) *admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre* n *inclus, ces dérivées étant des noyaux* (A), *le dénominateur de Fredholm est au plus d'ordre* $\frac{2}{1+2n}$.

En particulier, si *le noyau* K(x, y) *est indéfiniment dérivable le dénominateur de Fredholm est d'ordre zéro.*

CHAPITRE VI

THÉOREME GÉNÉRAL

§ 17. Le noyau $K(x, y)$ étant toujours un noyau (A), considérons un système complet de fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

normales, orthogonales entre elles et bornées dans leur ensemble. Les relations d'orthogonalité sont dans ce cas

$$\int_0^1 \varphi_i^2(x)\,dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \text{ pour } i \neq k.$$

Nous supposons qu'il existe une constante M, de manière à avoir

$$|\varphi_n(x)| \leqq M \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pour $0 \leqq x \leqq 1$.

Posons

$$f_n(x) = \int_0^1 K(s, x)\,\varphi_n(s)\,ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous supposons aussi, que le noyau $K(x, y)$ est tel qu'il est possible de déterminer deux constantes positives H et α, cette dernière étant *plus grande* que l'unité, de manière à avoir

$$|f_0(x)| \leqq H, \qquad |f(x_n)| \leqq \frac{H}{n^\alpha} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pour $0 \leqq x \leqq 1$.

Dans ces conditions, nous nous proposons de démontrer que

L'ordre réel du dénominateur de Fredholm relatif au noyau K(x, y) *est au plus égal à* $\frac{1}{\alpha}$.

Envisageons pour cela, le noyau symétrique

$$M_\varepsilon(x, y) = \varphi_0(x)\,\varphi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{n^{\alpha-\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

ε étant un nombre positif, arbitrairement petit, tel que l'on ait

$$\alpha - \varepsilon > 1.$$

Le noyau $M_\varepsilon(x, y)$ est un noyau (A). En effet, on a

$$\int_0^1 [M_\varepsilon(x, s)]^2\,ds = \varphi_0^2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2^n(x)}{n^{2(\alpha-\varepsilon)-1}},$$

ou

$$\int_0^1 [M_\varepsilon(x, s)]^2\,ds \leqq M^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(\alpha-\varepsilon)-1}}\right]$$

pour $0 \leqq x \leqq 1$.

Déterminons maintenant, un noyau $N_\varepsilon(x, y)$ satisfaisant à l'équation de première espèce

$$K(x, y) = \int_0^1 M_\varepsilon(x, s)\,N_\varepsilon(s, y)\,ds \qquad (17)$$

y étant considéré, dans cette dernière équation, comme un paramètre.

Les fonctions fondamentales de Schmidt, associées au noyau $M_\varepsilon(x, y)$ sont précisément

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

tandis que les valeurs caractéristiques de Schmidt sont

$$1,\ 1,\ 2^{\alpha-\frac{1}{2}-\varepsilon},\ \ldots,\ n^{\alpha-\frac{1}{2}-\varepsilon},\ \ldots$$

D'autre part, en vertu de nos hypothèses, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2(\alpha-\varepsilon)-1} f_n^2(y)$$

est convergente, car on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2(\alpha-\varepsilon)-1} f_n^2(y) < \mathrm{H}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\varepsilon}}.$$

Il résulte de là, en tenant compte d'un théorème de M. Picard [1], qu'il existe une fonction $\mathrm{N}_\varepsilon(x, y)$, à carré intégrable, satisfaisant à l'équation (**17**).

La solution $\mathrm{N}_\varepsilon(x, y)$, de l'équation (**17**), peut s'écrire

$$\mathrm{N}_\varepsilon(x, y) = \varphi_0(x) f_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}-\varepsilon} \varphi_n(x) f_n(y).$$

Cette solution est un noyau (A). En effet, on a

$$\int_0^1 [\mathrm{N}_\varepsilon(s, x)]^2 \, ds = f_0^2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2(\alpha-\varepsilon)-1} f_n^2(x)$$

la série du second membre étant uniformément convergente pour $0 \leqq x \leqq 1$.

Posons maintenant

$$\mathrm{K}^*(x, y) = \int_0^1 \mathrm{M}_\varepsilon(x, s)\, \mathrm{N}_\varepsilon(s, y) \, ds.$$

Les noyaux $\mathrm{K}(x, y)$ et $\mathrm{K}^*(x, y)$, en tant que fonctions de x, sont égaux presque partout. Autrement dit, on a

$$\int_0^1 [\mathrm{K}(s, y) - \mathrm{K}^*(s, y)]^2 \, ds = 0 \qquad (\mathbf{18})$$

pour $0 \leqq y \leqq 1$.

Il s'ensuit que les noyaux $\mathrm{K}(x, y)$ et $\mathrm{K}^*(x, y)$ ont les mêmes valeurs caractéristiques. Soient en effet λ une valeur caractéris-

[1] Voir E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce* (Rendiconti, Palermo, t. XXIX, 1910).

tique du noyau $K(x, y)$ et $\mu(y)$ une des fonctions fondamentales relatives à λ. $\mu(y)$ vérifie l'égalité

$$\mu(y) = \lambda \int_0^1 K(s, y)\, \mu(s)\, ds$$

et on déduit de l'égalité (18) que l'on a encore,

$$\mu(y) = \lambda \int_0^1 K^\star(s, y)\, \mu(s)\, ds$$

ce qui prouve que λ est aussi, valeur caractéristique pour le noyau $K^\star(x, y)$.

Il résulte en définitive, que l'ordre réel ρ du dénominateur de Fredholm relatif au noyau $K^\star(x, y)$ est égal à l'ordre réel de la transcendante de Fredholm relative à $K(x, y)$.

Soit σ l'ordre apparent du dénominateur de Fredholm relatif au noyau $K^\star(x, y)$. Ce noyau étant un noyau de composition, d'après l'inégalité (5) du § 3, on a

$$\sigma \leqq \frac{2}{2\alpha - 1 - 2\varepsilon + 1} = \frac{1}{\alpha - \varepsilon} < 1$$

car les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux de Schmidt associés à $M_\varepsilon(x, y)$ et à $N_\varepsilon(x, y)$ sont d'ordres $\frac{1}{2\alpha - 1 - 2\varepsilon}$ et au plus 1.

Or, σ étant inférieur à 1, l'ordre réel de la transcendante de Fredholm relative à $K(x, y)$ est égal à son ordre apparent (Voir § II). Donc

$$\rho \leqq \frac{1}{\alpha - \varepsilon}.$$

Je dis davantage. *On a*

$$\rho \leqq \frac{1}{\alpha}.$$

Supposons pour cela que l'on ait

$$\rho = \frac{1}{\alpha} + \eta$$

η étant un nombre positif. On peut alors choisir ε de manière à satisfaire aux deux inégalités

$$\alpha - \varepsilon > 1$$

et

$$\frac{1}{\alpha - \varepsilon} < \frac{1}{\alpha} + \eta .$$

D'autre part, nous venons de démontrer que l'on a

$$\rho \leqq \frac{1}{\alpha - \varepsilon} .$$

Donc

$$\rho < \frac{1}{\alpha} + \eta$$

d'où contradiction. *Q. e. d.*

Observations. — I. — M. Hadamard a eu l'extrême obligeance de nous faire connaître une note de MM. Einar Hille et J. D. Tamarkin. Et, nous regrettons d'avoir connu cette note trop tard pour pouvoir tirer un plus grand profit pour la rédaction de ce mémoire

Nous nous bornons à énoncer la proposition suivante, que MM. Hille et Tamarkin ont établi par une méthode entièrement différente de celle employée par nous, et dont on remarquera l'étroite analogie avec la proposition que nous venons de démontrer.

S'il existe une fonction $K_0(x, s)$ *et une constante* C *telles que*

$$\int_0^1 [K(x, s + h) + K(x, s - h) - 2K_0(x, s)^2] ds < Ch^{2\alpha}$$
$$(0 < \alpha \leqq 1)$$

l'ordre apparent du dénominateur $D(\lambda)$ *relatif au noyau* $K(x, y)$ *est au plus égal à* $\frac{2}{2\alpha + 1}$

Les travaux de ces auteurs, concernant cette question, ont été communiquées au Séminaire Mathématique de l'Université de Princeton (14 février 1928) et à la Société Mathématique américaine (6 avril 1928).

II. — L'ordre réel du dénominateur de Fredholm relatif au noyau

$$\varphi_0(x)\varphi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{n^\alpha} \qquad (\alpha > 1)$$

est effectivement égal à $\frac{1}{\alpha}$.

III. — Si l'on admet *a priori* que le noyau $K(x, y)$ et les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, etc , sont continues, la démonstration qui précède devient plus simple. Dans ce cas-là, les noyaux $K(x, y)$ et $K^*(x, y)$ sont égaux et non seulement égaux presque partout.

CHAPITRE VII

SUR LES NOYAUX CONTINUS ET A VARIATION BORNÉE

§ 18. — Nous terminons ces considérations en démontrant une proposition concernant les noyaux continus et à variation bornée.

M. Carleman a indiqué un noyau continu, tel que l'ordre réel du dénominateur de Fredholm soit égal à deux [1].

Nous nous proposons maintenant de démontrer que :

L'ordre apparent du dénominateur de Fredholm relatif à un noyau continu et à variation bornée est au plus égal à un.

Il est plus commode pour la démonstration, que nous avons en vue, d'écrire l'équation de Fredholm sous la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} K(x, s)\varphi(s)ds + f(x)$$

les limites d'intégration étant 0 et 2π et, non pas 0 et 1 comme jusqu'à présent.

Supposons que le noyau $K(x, y)$ est continu pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$ et $0 \leqq y \leqq 2\pi$ et, que ce noyau — en tant que fonction de x — est à variation bornée, pour toute valeur de y appartenant à l'intervalle fermé $0 \leqq y \leqq 2\pi$.

Posons

$$a_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(s, x)ds,$$

$$a_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K(s, x) \cos msds, \quad b_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K(s, x) \sin msds$$
$$(m = 1, 2, \ldots).$$

(1) Voir C.

Le noyau $K(x, y)$ étant supposé continu et à variation bornée, il est bien connu, que l'on peut déterminer une constante positive H de manière à avoir

$$|a_0(x)| \leqq H,$$

$$|a_n(x)| \leqq \frac{H}{n}, \qquad |b_n(x)| \leqq \frac{H}{n}$$
$$n = 1, 2, \ldots)$$

pour $0 \leqq x \leqq 1$ (L'exposant α, que nous avons supposé au § 17 supérieur à un, est maintenant égal à un).

Envisageons le noyau

$$K(x, y\,; r) = a_0(y) + r[a_1(y) \cos x + b_1(y) \sin x] + \ldots$$
$$+ r^m[a_m(y) \cos mx + b_m(y) \sin mx] + \ldots$$
$$(0 \leqq r < 1)$$

ou

$$K(x, y\,; r) = \int_0^{2\pi} K(\varphi, y) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos (\varphi - x) + r^2} d\varphi$$

et soit

$$P(x, y) = \lim_{r \to 1} K(x, y\,; r).$$

On sait que l'on a

$$P(x, y) = K(x, y) \qquad \text{pour} \quad 0 < x < 2\pi$$

et

$$P(x, y) = \frac{1}{2}[K(0, y) + K(2\pi, y)] \qquad \text{pour} \quad x = 0 \text{ et } x = 2\pi.$$

Il résulte de là, que les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux $K(x, y)$ et $P(x, y)$ sont identiques. De même, les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux de Schmidt associés aux noyaux $K(x, y)$ et $P(x, y)$ sont identiques. Désignons par $D^*(\lambda)$ ce dernier dénominateur. Nous allons démontrer d'abord, que l'ordre σ de la fonction entière $D^*(\lambda)$ est au plus égal à $\frac{1}{2}$. Supposons, pour le moment, que l'on ait

$$\sigma = \frac{1}{2} + \eta$$

η étant une quantité positive. Nous montrerons que cette hypothèse nous conduit à une contradiction.

Considérons, pour cela, le dénominateur $D^*(\lambda\,; x)$ de Fredholm, relatif aux noyaux de Schmidt associés au noyau $K(x, y\,; r)$. On a

$$D^*(\lambda) = \lim_{r \to 1} D^*(\lambda\,; r).$$

D'une manière plus précise, dans tout domaine $|\lambda| \leqq R$ la fonction entière $D^*(\lambda\,; r)$ tend *uniformément* vers $D^*(\lambda)$ quand r tend vers 1. En effet, posons successivement

$$K\left(r \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 \,\ldots\ldots\, x_n \\ y_1 \,\ldots\ldots\, y_n \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1\,; r) & \ldots & K(x_1, y_n\,; r \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(x_n, y_1\,; r & \ldots & K(x_n, y_n\,; r) \end{vmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} x_1 \,\ldots\ldots\, x_n \\ y_1 \,\ldots\ldots\, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} P(x_1, y_1) & \ldots & P(x_1, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P(x_n, y_1) & \ldots & P(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$\delta_n(r) = \frac{1}{(n\,!)^2}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\left[K\left(r \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{matrix}\right)\right]^2 dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_n$$

$$\Delta_n = \frac{1}{(n\,!)^2}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\left[P\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}\right]^2 dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_n$$

Avec ces notations les dénominateurs $D^*(\lambda\,; r)$ et $D^*(\lambda)$ peuvent s'écrire

$$D^*(\lambda\,; r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta_n(r) \lambda^n,$$

$$D^*(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Delta_n \lambda^n.$$

Soit M une constante telle, que l'on ait

$$|P(x, y)| \leqq \frac{M}{(2\pi)^2}, \qquad |K(x, y\,; r)| \leqq \frac{M}{(2\pi)^2}$$

pour

$$0 \leqq x \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq y \leqq 2\pi \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq r \leqq 1.$$

On a

$$|D^{\star}(\lambda\,;\,r)| \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n\,!)^2} M^n |\lambda|^n,$$

$$|D^{\star}(\lambda)| \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n\,!)^2} M^n |\lambda|^n$$

(Voir § 1, lemme A).

Donnons-nous, un nombre positif γ, arbitrairement petit. On peut alors choisir l'entier N, de manière à avoir

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n \delta_n(r) \lambda^n \right| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n^n}{(n\,!)^2} M^n R^n \leqq \frac{\gamma}{3},$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n \Delta_n \lambda^n \right| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n^n}{(n\,!)^2} M^n R^n \leqq \frac{\gamma}{3}$$

pour $|\lambda| \leqq R$.

D'autre part, les coefficients $\delta_n(r)$ peuvent s'exprimer par des séries entières par rapport à r, ces séries étant absolument et uniformément convergentes pour $0 \leqq r < 1$. De plus, on a

$$\delta_n(r) = \Delta_n.$$

Donc, en vertu du lemme d'Abel, on a aussi

$$\lim_{r \to 1} \delta_n(r) = \Delta_n.$$

Par conséquent, étant donné le nombre positif γ, on peut déterminer μ tel que pour

$$1 - r \leqq \mu \qquad \text{et} \qquad |\lambda| \leqq R$$

'on ait

$$\left| \sum_{n=1}^{N} (1)^n \delta_n(r) \lambda^n - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \Delta_n \lambda^n \right| \leqq \frac{\gamma}{3}.$$

Il résulte, en définitive que pour

$$1 - r \leqq \mu \qquad \text{et} \qquad |\lambda| \leqq R$$

on a

$$|D^*(\lambda\,; r) - D^*(\lambda)| \leqq \gamma$$

ce qui prouve que, dans tout domaine $|\lambda| \leqq R$, $D(\lambda, r)$ tend uniformément vers $D(\lambda)$, quand r tend vers 1.

Ce point étant établi, considérons le noyau

$$M_\varepsilon(x, y, r) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x, y)}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} r^n \quad (r < 1)$$

le nombre positif ε satisfaisant aux inégalités

$$\varepsilon < \frac{1}{4}$$

et

$$\frac{1}{2-\varepsilon} < \frac{1}{2} + \eta.$$

On démontre de la même manière qu'au § 17, qu'il existe un noyau $N_\varepsilon(x, y)$ à carré intégrable, ou

$$N_\varepsilon(x, y) = a_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{2}-\varepsilon} [a_m(y) \cos mx + b_m(y) \sin nx]$$

tel, qu'en posant

$$K^*(x, y\,; r) = \int_0^{2\pi} M_\varepsilon(x, s\,; r) N_\varepsilon(s, y)\, ds$$

on a

$$\int_0^{2\pi} [K(x, y\,; r) - K^*(x, y\,; r)]^2\, dx = 0$$

pour

$$0 \leqq y \leqq 2\pi.$$

Remarquons, en passant, que le noyau $N_\varepsilon(x, y)$ est un noyau (A). La remarque II du § 1 est donc valable pour ce noyau.

Remarquons aussi, que les noyaux de Schmidt

$$\underline{K(x, y\,; r)} = \int_0^{2\pi} K(s, x\,; r)\, K(s, y\,; r)\, ds$$

et

$$\underline{K^{*}(x, y ; r)} = \int_0^{2\pi} K^{*}(s, y ; r)\, K^{*}(s, y ; r)\, ds$$

sont identiques. Ces noyaux sont identiques au noyau

$$\int_0^{2\pi} K(s, y ; r)\; K^{*}(s, x ; r)\, ds = \int_0^{2\pi} K^{*}(s, x ; r)\, K(s, y ; r)\, ds.$$

En effet, on a

$$\left| \int_0^{2\pi} K(s, x ; r)\, [K(s, y ; r) - K^{*}(s, y ; r)]\, ds \right|^2$$
$$\leqq \int_0^{2\pi} [K(s, x, r)]^2\, ds \int_0^{2\pi} [K(s, y ; r) - K^{*}(s, y ; r)]^2\, ds = 0$$

On a aussi

$$\int_0^{2\pi} K^{*}(s, x ; r)\, K^{*}(s, y ; r)\, ds = \int_0 K(s, x ; r)\, K^{*}(s, y ; r)\, ds.$$

Il résulte de là, que les dénominateurs de Fredholm relatifs aux noyaux de Schmidt associés aux noyaux $K(x, y ; r)$ et $K^{*}(x, y ; r)$ sont identiques à $D^{*}(\lambda ; r)$.

Or, d'après le lemme démontré au § 7, le dénominateur $D^{*}(\lambda ; r)$ est identique au dénominateur de Fredholm relatif au noyau

$$H_\varepsilon(x, y ; r) = \int_0^{2\pi} \underline{M_\varepsilon(x, s ; r)}\; \overline{N_\varepsilon(s, y)}\, ds$$

où on a posé

$$\overline{M_\varepsilon(x, y ; r)} = \int_0^{2\pi} M_\varepsilon(s, x ; r)\, M_\varepsilon(s, y ; r)\, ds$$

et

$$\overline{N_\varepsilon(x, y)} = \int_0^{2\pi} N_\varepsilon(x, s)\, N_\varepsilon(y, s)\, ds.$$

De même, le dénominateur $D^{*}(\lambda)$ est identique au dénominateur de Fredholm relatif au noyau

$$H_\varepsilon(x, y ; 1) = \lim_{r \to 1} H(x, y ; r) = \int_0^{2\pi} \underline{M_\varepsilon(x, s ; 1)}\; \overline{N_\varepsilon(s, y)}\, ds.$$

Dans cette égalité, le noyau $M_\varepsilon(x, y; 1)$ désigne le noyau limite

$$\lim_{r \to 1} \underline{M_\varepsilon(x, y; r)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-y)}{m^{1-2\varepsilon}}.$$

Ce dernier noyau étant un noyau (A), l'inégalité (5) du § 3 (ou l'inégalité (12) du § 8) est valable pour le noyau $H_\varepsilon(x, y; 1)$. On obtient ainsi

$$\sigma \leqq \frac{2}{2(1-2\varepsilon)+2} = \frac{1}{2-\varepsilon}$$

car, l'ordre du dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés au noyau $\underline{M_\varepsilon(x, y; 1)}$ est $\frac{1}{2(1-2\varepsilon)}$ tandis que, le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés au noyau $\overline{N_\varepsilon(x, y)}$ est au plus d'ordre $\frac{1}{2}$ (Voir § 1, remarque II).

Nous venons de démontrer que l'on a

$$\sigma \leqq \frac{1}{2-\varepsilon} < \frac{1}{2} + \eta$$

d'autre part, nous avons supposé, au début

$$\sigma = \frac{1}{2} + \eta.$$

Et, c'est là, la contradiction que nous avons laissé prévoir plus haut.

Le dénominateur $D^r(\lambda)$ relatif aux noyaux de Schmidt associés à $K(x, y)$ étant au plus d'ordre $\frac{1}{2}$, il résulte du § 6, que l'ordre réel du dénominateur de Fredholm relatif au noyau $K(x, y)$ est au plus 1. Or, en vertu de la proposition démontrée au § 12, le genre de ce dénominateur est au plus égal à un. Il en résulte, que son ordre apparent est au plus égal à un.

NOTE I

Sur l'inégalité de Schwartz.

Il est bien connu qu'étant données deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ intégrables, ainsi que leurs carrés, on à l'inégalité

$$\left|\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx\right|^2 \leqq \int_a^b f_1^2(x)\, dx \int_a^b f_2^2(x)\, dx.$$

On peut espérer qu'étant données $n > 2$ fonctions $f_1, f_2, \ldots$ f_n à carrés intégrables, on a l'inégalité

$$\left|\int_a^b f_1 \ldots f_n\, dx\right|^2 \leqq \int_a^b f_1^2\, dx \int_a^b f_2^2\, dx \ldots \int_a^b f_n^2\, dx.$$

Les restrictions admises concernant les fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ sont insuffisantes pour assurer la validité de cette dernière inégalité. Pour le voir il suffit de considérer le cas particulier où les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont identiques à une même fonction $f(x)$, cette fonction étant telle que l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)\, dx$$

ait un sens, tandis que l'intégrale

$$\int_a^b f^n(x)\, dx \qquad (n > 2)$$

n'en ait pas.

Cette remarque, explique, pourquoi l'inégalité (14) du § 9 a été d'abord démontrée, au § 3 (inégalité (5)), pour les noyaux obtenus par la composition des deux noyaux (A), et ensuite démontrée, pour les noyaux obtenus par la composition d'un nombre fini de noyaux (A).

Dans cette note nous nous proposons de démontrer l'inégalité suivante

On a

$$\left|\int_a^b f_1(x) \dots f_n(x)\, dx\right|^n \leqq \int_a^b |f_1(x)|^n\, dx \int_a^b |f_2(x)|^n\, dx \dots \int_a^b |f_n(x)|^n\, dx.$$

Dans cet énoncé, on suppose que les intégrales qui figurent au second membre ont toutes, un sens.

On sait, que l'on a inégalité [1]

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right|^p \leqq \left\{\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p\right\} \cdot \left\{\sum |b_i|^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{p-1} \qquad (p > 1).$$

Considérons nk nombres réels et positifs

$$\begin{gathered} a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k, \\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_k. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_1,\ l_2,\ \dots,\ l_k. \end{gathered}$$

On déduit facilement de l'inégalité reproduite plus haut, l'inégalité suivante

$$\left[\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \dots l_i\right]^n \leqq \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^n\right]\left[\sum_{i=1}^{k} b_i^n\right] \dots \left[\sum_{i=1}^{k} l_i^n\right] \qquad \text{(A)}$$

Divisons maintenant l'intervalle d'intégration en k parties égales et considérons dans chaque division une valeur arbitraire pour la variable x. Soient

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_k$$

les valeurs ainsi considérées. Posons

$$\begin{gathered} a_1 = |f_1(\xi_1)|,\ a_2 = |f_1(\xi_2)|,\ \dots,\ a_k = |f_1(\xi_k)| \\ b_1 = |f_2(\xi_1)|,\ b_2 = |f_2(\xi_2)|,\ \dots,\ b_k = |f_2(\xi_k)| \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_1 = |f_n(\xi_1)|,\ l_2 = |f_n(\xi_2)|,\ \dots,\ l_k = |f_n(\xi_k)|. \end{gathered}$$

En tenant compte de l'inégalité (A) et en faisant augmenter k indéfiniment on trouve inégalité proposée.

[1] Voir F. Riesz, *Les systèmes d'equations linéaires à une infinité d'inconnues*, p. 43 Paris, 1913.

NOTE II

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE ZÉRO

§ I. Soient $f(z)$ une fonction entière de genre zéro et $M(r)$ le maximum du module $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$. Nous nous proposons de montrer qu'il existe des fonctions $f(z)$ de genre zéro, pour lesquelles l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\log M(r)}{r^2} dr$$

diverge. Ou, autrement dit, il existe des fonctions entières de genre zéro, d'ordre un et qui ne sont pas de la classe inférieure, au sens de M. Valiron.

Supposons que les zéros de $f(z)$ sont réels et positifs (Le dénominateur de Fredholm relatif aux noyaux de Schmidt associés à un noyau (A), possède bien cette particularité). Soient

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \cdots \leqq r_n \leqq \cdots$$

les zéros de $f(z)$. Nous démontrons d'abord que

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale

$$I(R) = \int_1^R \frac{\log M(r)}{r^2} dr$$

ait une limite finie, pour R *infini, est que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log r_n}{r_n} \qquad (s)$$

converge.

La fonction $f(z)$ étant supposée de genre zéro, on a

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n}\right).$$

D'autre part, les zéros r_n étant réels et positifs, on a

$$M(r) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{r_n}\right).$$

Ceci posé, on trouve facilement

$$I(R) = \log M(1) - \frac{\log M(R)}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \log \frac{R(1+r_n)}{r_n + R}.$$

Soit maintenant p, un entier tel que l'on ait

$$r_p \leqq R < r_{p+1}.$$

On a

$$I(R) > \log M(1) - \frac{\log M(R)}{R} + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{r_n} \log \frac{1+r_n}{2}.$$

Donc, si l'intégrale I(R) a une limite pour R infini, la série (s) converge.

D'autre part, on a

$$I(R) < \log M(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \log(1 + r_n).$$

Par conséquent, si la série (s) converge, l'intégrale I(R) a une limite finie, pour R infini.

q. e. d.

Considérons maintenant une suite

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

de nombres réels, positifs, non décroissants et tels que la série $\sum \frac{1}{r_n}$ converge, tandis que la série (s) diverge. La fonction entière, de genre zéro

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_n}\right)$$

est telle, que l'intégrale I(R) diverge.

En particulier, la fonction

$$f(z) = \prod_{n=2}^{\infty}\left[1 - \frac{z}{n(\log n)^{\alpha}}\right] \qquad (1 < \alpha \leqq 2)$$

considérée par M. Lindelöf, jouit de la même particularité.

§ II. *Soit*

$$f(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

une fonction entière de genre zéro. k *étant un entier positif, supérieur à un, la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions entières*

$$f_k(z) = 1 + |a_1|^k z^k + \dots + |a_n|^k z^{kn} + \dots$$

soient aussi de genre zéro est que la fonction f(z) *soit au plus d'ordre* 1 *et de la classe inférieure au sens de M. Valiron.*

Désignons par R_n le rapport rectifié de $|a_{n-1}|$ à $|a_n|$, au sens de M. Valiron ([1]). Il est clair que le rapport rectifié de $|a_{n-1}|^k$ à $|a_n|^k$ est R_n^k.

D'autre part, pour que la fonction entière $f_k(z)$ soit de genre zéro, il faut et il suffit que la fonction

$$g_k(z) = f_k(z^{\frac{1}{k}}) = 1 + |a_1|^k z + \dots + |a_n|^k z^n + \dots$$

soit au plus d'ordre $\frac{1}{k}$ par excès. Or, pour cela d'après un théorème de M. Valiron il faut et il suffit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_n}$$

soit convergente. Mais, la convergence de cette dernière série constitue précisément la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z)$ soit au plus d'ordre 1 et de la classe inférieure.

q. e. d.

Arrêtons-nous un instant sur la fonction $f_2(z)$.

Soit $\mathfrak{M}(r)$ le maximum du module de $f_2(z)$ sur le cercle $|z| = x$. On a évidemment

$$\mathfrak{M}(r) = 1 + |a_1|^2 r^2 + \,.\,.\, + |a_n|^n r^{2n} + \dots$$

([1]) Voir G. Valiron, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, p. 267. Paris, 1921. Voir aussi G. Valiron, *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fascicule II, p. 7 et 8.

D'autre part, on a aussi

$$\mathfrak{M}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Donc, pour toute fonction entière on a

$$\mathfrak{M}(r) < [M(r)]^2.$$

Cette inégalité laisserait espérer que le genre de la fonction $f_2(z)$ est au plus égal, sinon inférieur, à celui de $f(z)$. Or, pour les fonctions entières de genre zéro, d'ordre 1 et qui ne sont pas de la classe inférieure de leur ordre, fonctions que nous avons considéré au § 1, de cette note, c'est le contraire qui se produit : la fonction $f(z)$ est de genre zéro, tandis que la fonction $f_2(z)$ est de genre un.

§ III. — On peut rattacher aux considérations qui précèdent, une proposition démontrée par M. S. Bernstein, concernant les fonctions entières de genre zéro.

Rappelons d'abord un lemme établi par M. Carloman (1).

Si Σu_n est une série convergente à termes positifs, la série

$$\sum \sqrt[n]{u_1, u_2, \ldots, u_n}$$

converge aussi.

Soit

$$f(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

une fonction entière d'ordre apparent k et de la classe inférieure.

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{k}{n}} \qquad \text{(A)}$$

est convergente.

(1) Voir T. Carleman. *Les fonctions quasi-analytiques*, note V, Paris, 1926.

En effet, la fonction $f(z)$ étant supposée d'ordre apparent k et de la classe inférieure, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_n^k}$$

est convergente. Et, puisque on a

$$|a_n| = \frac{1}{R_1, R_2, \ldots, R_n}$$

il résulte du lemme, que nous venons de rappeler que la série (A) est aussi convergente.

La proposition que nous venons d'établir contient une proposition de M. Bernstein. Soit

$$f(z) = 1 + a_1 z^2 + \ldots + a_n z^{2n} + \ldots$$

une fonction paire de genre zéro. M. Bernstein a démontré (1) que *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{|a_n|}$$

converge. Il suffit de remarquer que, si la fonction paire $f(z)$ est de genre zéro, la fonction entière

$$1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

est au plus d'ordre $\frac{1}{2}$ par excès, ou de la classe inférieure, pour nous assurer que la proposition de M. Bernstein est contenue dans la proposition précédente

(1) Voir S. Bernstein. *Leçons sur les proprietés extremales*, note II, Paris, 1926.