THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

NICOLAS CIORĂNESCO

Le problème de Dirichlet pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1929

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__100__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
2063.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. NICOLAS CIORANESCO

1re THÈSE. — LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE.

2e THÈSE. — LES SURFACES MINIMA.

Soutenues le 1929, devant la Commission d'examen.

MM. PAUL MONTEL, *Président.*
H. VILLAT, G. BOULIGAND *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
1929

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen........... C. MAURAIN, Professeur, Physique du Globe.

Doyens honoraires..... P. APPELL, M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires. A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, R. DONGIER, E. HÉROUARD.

Professeurs.............

ÉMILE PICARD........	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KŒNIGS.......... ...	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT...........	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET.	Electrotechnique générale.
WALLERANT........	Minéralogie.
ANDOYER......... ..	Astronomie.
PAINLEVÉ...........	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND..	Chimie biologique.
Mme P. CURIE........	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY..........	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN...........	Chimie générale.
ÉMILE BOREL...... ...	Calcul des probabilités et Physique mathém.
MARCHIS......... ...	Aviation.
JEAN PERRIN...... ...	Chimie physique.
RÉMY PERRIER......	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
ABRAHAM...........	Physique.
M. MOLLIARD..... ..	Physiologie végétale.
CARTAN............	Géométrie supérieure.
LAPICQUE...........	Physiologie générale.
VESSIOT.......... ..	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
COTTON............ .	Physique générale.
DRACH..............	Application de l'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY....... ...	Physique.
CHARLES PÉREZ......	Zoologie.
LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et Géologie régionale.
LESPIEAU...........	Théories chimiques.
RABAUD	Biologie expérimentale.
PORTIER...........	Physiologie comparée.
É. BLAISE......	Chimie organique.
DANGEARD......	Botanique.
PAUL MONTEL........	Mécanique rationnelle.
WINTREBERT	Anatomie et Histologie comparées.
DUBOSCQ............	Biologie maritime.
G. JULIA.............	Mathématiques générales.
A. MAILHE....... ...	Étude des combustibles.
L. LUTAUD..........	Géographie physique.
EUGÈNE BLOCH.......	Physique théorique et physique céleste.
HENRI VILLAT.......	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB...........	Géologie.
P. PASCAL...........	Chimie minérale.
LÉON BRILLOUIN.....	Théories physiques.
N.....................	Chimie appliquée.

PECHARD........	Chimie (Enseigt P. C. N.).
AUGER..........	Chimie analytique.
GUICHARD......	Chimie minérale.
GUILLET........	Physique.
MAUGUIN........	Minéralogie.
BLARINGHEM....	Botanique.
MICHEL-LEVY...	Pétrographie.
DEREIMS........	Géologie.
DENJOY..........	Calcul différentiel et intégral.
BENARD.........	Physique (P. C. N.).
DARMOIS.........	Physique.
BRUHAT.........	Physique.
MOUTON.........	Chimie physique.
JOLEAUD........	Paléontologie.
JAVILLIER.......	Chimie biologique.
DUFOUR........ .	Physique (P. C. N.).
PICARD..........	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY..	Zoologie.
DUNOYER.......	Optique appliquée.
GUILLIERMOND.	Botanique (P. C. N.).
DEBIERNE......	Radioactivité.
FRECHET.......	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.

Secrétaire... .... D. TOMBECK.

86393-29. — Paris, Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

A LA MÉMOIRE DE MON FRÈRE

NELU (JOAN) CIORANESCU

POÈTE

mort à l'âge de 21 ans.

A

MONSIEUR HENRI VILLAT

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PROFESSEUR A LA SORBONNE

Hommage respectueux.

PREMIÈRE THÈSE

LE PROBLÈME DE DIRICHLET

POUR LES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

INTRODUCTION.

On sait en quoi consiste le problème ou le principe de Dirichlet : étant donnée le long d'un contour fermé une succession continue (pour simplifier) de valeurs, il existe alors une fonction harmonique et une seule, continue à l'intérieur du contour ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres et qui prend les valeurs données le long du contour. Il est inutile de rappeler le rôle que jouent en Analyse et en Physique mathématique les fonctions harmoniques et plus généralement les équations du type elliptique [1], c'est-à-dire de la forme suivante (dans le cas de deux variables) :

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y)$$

où $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est le laplacien de u.

[1] *Voir* pour les propriétés générales : E. Picard, *Analyse*, t. II, p. 1-49 ; E. Goursat, *Analyse*, t. III (3e édition), p. 168-286. Pour informations bibliographiques complètes, *voir* G. Bouligand, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XI, ainsi que L. Lichtenstein, *Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften*, II3.3 et II3.12 (8 Hefte), 1924.

On sait que pour une équation de cette forme, si l'on se donne les valeurs de la fonction u sur un contour, on peut déduire cette fonction sous la forme d'une expression intégrale dont le noyau est ce qu'on appelle la fonction de Green. Donc de l'équation $\Delta' u = f$, où Δ' est le symbole d'une expression différentielle linéaire telle que le premier membre de (1), on peut tirer inversement $u = \mathrm{S}f$, S étant le symbole d'une forme intégrale, ce qui permet d'envisager l'équation considérée, comme dit H. Poincaré, au même titre qu'une équation intégrale, comme un système infini d'équations linéaires liant une infinité continue des variables, ou comme une sorte de transformation linéaire d'ordre infini qui permet de passer de f à u. Dans cet ordre d'idées, Δ et S peuvent être regardés comme les symboles de deux transformations linéaires d'ordre infini, inverses l'un de l'autre.

Et cela est vrai non seulement pour l'équation (1), mais pour l'équation plus générale

$$(1') \qquad \Delta_2 u + \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u + bu = c,$$

où $\Delta_2 u = \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u)$ qui est la correspondante de (1) pour un continu riemannien quelconque et se réduit à (1) dans le cas de l'espace euclidien à deux dimensions (ou l'équation correspondante dans le cas de n dimensions). En effet c'est un fait remarquable que, dans une multiplicité riemannienne d'élément linéaire quelconque, $ds^2 = \Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k$, les invariants différentiels : gradient d'un champ scalaire, divergence et laplacien (paramètre différentiel du second ordre) d'un champ vectoriel, donnent lieu à des théorèmes de calcul intégral s'exprimant exactement comme les formules de Green-Ostrogradski et Stokes dans l'espace euclidien, ce qui montre leur caractère amétrique.

On voit, de ce fait même, l'avantage de la notation vectorielle, qui permet d'opérer sur des formes différentielles beaucoup plus étendues que celles commençant par

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad [1]$$

---

[1] C'est M. Bouligand qui m'a conseillé l'introduction de la notation vectorielle, comme étant plus opportune, dans une lettre que les lignes ci-dessus reproduisent à peu près exactement.

Néanmoins, comme dans la plupart des cas, les résultats trouvés vrais pour un espace euclidien se trouvent, d'après ce qui vient d'être dit, vrai pour une variété riemannienne quelconque, si l'on s'est donné la peine de transcrire ce résultat vectoriellement, nous considérons généralement des espaces euclidiens. Bien entendu, il s'agit ici des opérations formelles qu'on effectue sur les expressions considérées.

Après ces considérations préliminaires, revenons à l'objet de la présente étude.

Je me suis proposé de voir, étant donné un système d'équations différentielles du second ordre et du type elliptique, soient :

$$(2)\quad L_i \equiv \Delta u_i + a_{i1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{i2}\frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{i1}\frac{\partial u_2}{\partial x}$$
$$+ b_{i2}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \ldots + l_{i1}u_1 + \ldots + l_{in}u_n = F_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(pour deux variables ici, pour simplifier) s'il n'est pas possible, comme dans le cas de l'équation (1) et (1′), en se donnant u_i sur un contour (par exemple $u_i = 0$), d'obtenir dans tout le domaine

$$u_i(x, y) = S_i(F_1, F_2, \ldots, F_n),$$

S_i étant comme plus haut des expressions intégrales, dont la forme et les noyaux restent à déterminer.

On résout de pareils systèmes et des systèmes un peu différents qu'on rencontre en physique mathématique (les équations de l'hydrodynamique, de l'équilibre élastique, etc.) de la manière suivante : on adjoint au système (2) d'une manière plus ou moins arbitraire un autre système $M_i(v_i)$ en cherchant à généraliser la formule de Green, et l'on prend un système de solutions de M_i, tel que par exemple v_1 ait une singularité d'une nature bien déterminée dans un point du domaine, les $n-1$ autres solutions v_i étant partout régulières, même en ce point. Et l'on fait n fois cette opération, tour à tour pour chaque fonction, en obtenant ainsi les expressions des fonctions $u_i(x, y)$.

A notre point de vue, cette manière de procéder, à l'aide des solutions mixtes (c'est-à-dire composées de telle manière qu'une seule fonction soit fondamentale, les $n-1$ autres étant ordinaires), n'est pas la véritable extension et généralisation de la méthode qu'on emploie dans le cas de l'équation (1) ou (1'). Nous nous sommes attaché au problème suivant : exprimer les solutions du système (2) à l'aide des solutions fondamentales du système adjoint, nulles sur le contour, c'est-à-dire avec des fonctions de Green généralisées pour le système considéré. Pour cela, on a dû examiner de plus près la méthode d'adjonction pour les systèmes différentiels du second ordre, et l'on verra dans la suite le degré de généralité qu'elle comporte.

Le présent travail se divise en cinq Chapitres :

Dans les deux premiers, on donne des théorèmes d'existence pour différents types de systèmes d'équations elliptiques à l'aide de la méthode des approximations successives de M. Picard.

Dans le troisième Chapitre, on établit l'existence des solutions fondamentales (ou élémentaires) dans un cas assez particulier et avec des conditions restrictives (analyticité) en reprenant une méthode qui a servi dans le même but pour l'équation (1).

Dans le quatrième Chapitre, je résous effectivement le problème de Dirichlet pour le système linéaire général du second ordre et du type elliptique, de deux manières différentes, selon la méthode d'adjonction adoptée.

Enfin, dans le dernier Chapitre, je considère une équation particulière qui généralise l'équation des membranes vibrantes et qui échappe à la théorie générale développée dans le Chapitre précédent, comme l'équation des membranes vibrantes échappe à la méthode de résolution générale de l'équation (1).

Pour terminer je ferai la remarque suivante : les difficultés qui se présentent dans l'étude de l'équation (1) peuvent être groupées en deux catégories : 1° celles provenant de la nature des coefficients de l'équation et 2° celles en liaison avec la nature du domaine pour lequel on traite le problème de Dirichlet, et particulièrement de la frontière du domaine et de données sur cette frontière. L'allure de la fonction et de ses dérivées partielles des deux premiers ordres, lorsqu'on s'approche de la frontière du domaine, tient des deux à la fois, ou mieux est à elle seule une difficulté essentielle pour le problème de Dirichlet. Naturellement ces difficultés se retrouvent entièrement dans le cas du système (2) que nous considérons. Mais le but du présent travail n'est pas de résoudre ces difficultés, tout au plus de les signaler lorsqu'elles se présentent. C'est pour cela qu'on a considéré, dans cette première étude du problème, les « cas normaux », si l'on convient d'appeler ainsi le cas dans lesquels ni la nature des coefficients ni la frontière du domaine n'ont fait l'objet de considérations spéciales dans le cas de l'équation (1). Je considère toutes ces questions comme autant de problèmes distincts, qui n'entrent pas dans l'objet de ce travail.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici mes sentiments de reconnaissance à M. Henri Villat, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail. J'adresse aussi mes vifs remerciements à M. Georges Bouligand, professeur à l'Université de Poitiers, qui a suivi mes recherches et dont les remarques m'ont été très utiles pour la rédaction, comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire [1].

[1] Le principal résultat de ce travail a paru dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 188, nº 1, janvier 1929, p. 31.

CHAPITRE PREMIER.

1. Dans ce qui va suivre, nous aurons à nous occuper de domaines plans ou à un nombre quelconque de dimensions. Pour cela nous allons préciser les définitions et notations, d'ailleurs courantes, qu'on emploiera dans la suite.

On appelle *domaine* un ensemble de points dont tous les points sont des points intérieurs, la signification de ce mot étant bien connue, et qui en outre jouit de la propriété que deux quelconques de ses points peuvent être liés par une ligne polygonale d'un nombre fini de côtés et dont tous les points appartiennent à l'ensemble. Soient E l'ensemble des points qui constitue le domaine D, et E' son ensemble dérivé. L'ensemble $(E'-E)$ est la frontière F de D. Comme on voit, on emploie le mot « domaine » pour ce qu'on désigne généralement par domaine ouvert.

Quand on veut préciser et dire qu'une propriété a lieu dans le domaine fermé, on dit simplement qu'elle a lieu dans $D+F$. Si D_1+F_1 est à l'intérieur de D, alors il s'ensuit que F_1 est formé par des points de D; si l'on dit que D_1 est intérieur de D, il est possible que sa frontière F_1 ait des points communs avec F. Les domaines que l'on considère sont supposés connexes, à connexion simple ou multiple, mais l'ordre de connexion étant fini. Si le domaine est multiconnexe, il sera formé, par exemple s'il s'agit d'un domaine plan, par l'intérieur d'une courbe fermée C, et l'extérieur commun des courbes C_1, C_2, ..., C_n, toutes intérieures à C et sans point commun. Dans le même cas de deux variables le domaine sera supposé tracé dans le plan ordinaire, quoique dans certains cas il n'y aurait pas des difficultés spéciales si l'on considérait des contours tracés dans le plan muni de plusieurs feuillets correspondant à une certaine surface de Riemann.

On dira qu'une fonction, solution d'une équation d'ordre p, est *régulière* dans un domaine D si elle est continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p dans D. Nous n'insistons pas sur ces éléments nécessaires dans ce qui va suivre.

2. Rappelons quelques résultats classiques de la théorie de l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

où l'on suppose que $f(x, y)$ est finie continue et bien déterminée, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans $D + F$ et l'on cherche la solution de (1) régulière dans D et nulle sur la frontière F. Cette solution est

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{2}$$

$G(x, y; \xi, \eta)$ étant la fonction de Green pour le domaine D. De (2) on peut obtenir une limitation de $u(x, y)$ dans D. Supposons que l'on ait dans ce domaine $|f(x, y)| < K$ (K étant une constante). Alors on déduit sans difficulté que

$$|u(x, y)| < KM, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < KN \text{ [1]}, \tag{3}$$

M et N étant deux constantes qui ne dépendent que de D et tendent vers zéro avec ce domaine (c'est-à-dire lorsque D est à l'intérieur des cercles de rayons qui tendent vers zéro).

En effet, puisque la fonction de Green garde un signe constant dans D on a

$$|u(x, y)| < \frac{K}{2\pi}\int\int_D G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Mais la fonction

$$v = \frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

est précisément la solution de l'équation $\Delta v + 1 = 0$ qui s'annule sur le contour de D.

---

[1] E. Picard emploie ces limitations dans son Mémoire sur l'approximation successive dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1890. *Voir* aussi H. Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circ. di Palermo*, 1894, p. 64).

Or une solution particulière de cette équation est

$$v_0 = -\frac{x^2+y^2}{4} + \text{const.}$$

On a donc que $v = v_0 + V$, V étant une fonction harmonique qui prend sur le contour de D les valeurs de $-v_0$. Mais comme une fonction harmonique atteint son maximum sur le contour, on en conclut que si $|v_0| < k$ on aura $|v| < 2k$. Si le domaine D peut être renfermé dans un cercle de rayon R centré à l'origine et si l'on prend

$$v_0 = -\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{R^2}{8}$$

on a alors $k \leqq \frac{R^2}{8}$ et $M \leqq \frac{R^2}{4}$. D'une manière générale si $2d$ est la plus grande distance entre deux points de D, alors on peut prendre $M = \frac{d^2}{4}$ (¹).

On peut trouver une limitation analogue pour N à l'aide de d, mais ce qui nous intéresse c'est que M et N sont aussi petits que l'on veut si D est suffisamment petit, dans le sens que son contour s'éloigne très peu d'un point.

Les inégalités (3) sont fondamentales pour l'établissement de l'existence des solutions pour nos systèmes.

3. Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$, ..., $w(x, y)$ m fonctions de deux variables qui satisfont à l'intérieur d'un contour C, qui n'a pas de points à l'infini, au système suivant d'équation

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta u = a_1(x, y)u + b_1(x, y)v + \ldots + h_1(x, y)w + k_1(x, y), \\ \Delta v = a_2(x, y)u + b_2(x, y)v + \ldots + h_2(x, y)w + k_2(x, y), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta w = a_m(x, y)u + b_m(x, y)v + \ldots + h_m(x, y)w + k_m(x, y). \end{cases}$$

On suppose que les coefficients $a_i(x, y)$, $b_i(x, y)$, ..., $h_i(x, y)$, $k_i(x, y)$ sont des fonctions bornées, continues ainsi que leurs dérivées partielles de premier ordre dans D + C. Proposons-nous de trouver dans quel cas un système tel que (1) admettra des solutions régulières dans D. Pour voir quelles doivent être les données pour que le problème soit déterminé, remarquons que (1) est la généralisation immédiate de

(¹) *Voir* le Mémoire de Poincaré déjà cité.

l'équation

$$\Delta u = a(x, y)u + b(x, y)$$

et l'on sait que pour cette équation si l'on se donne u sur le contour, alors u est déterminé dans C, et cette solution est unique si C est dans la région $a > 0$.

Donc, supposons qu'on se donne $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\ldots$, $w(x, y)$ sur le contour C et cherchons si l'on peut trouver des fonctions qui satisfont à (1) sont régulières dans D, et se réduisent aux valeurs données sur son contour.

Comme on voit, le problème ainsi posé est l'extension du problème de Dirichlet, qui est résolu dans le cas d'une seule équation du type elliptique. Nous commençons par le système (1) qui est le plus simple dans ce genre.

Pour apporter plus de précisions dans des cas plus généraux, il est utile et commode, comme on le fait tant de fois en pareil cas, d'introduire un paramètre et de considérer le système

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta u &= \lambda(a_1 u + b_1 v + \ldots + h_1 w) + k_1, \\ \Delta v &= \lambda(a_2 u + b_2 v + \ldots + h_2 w) + k_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta w &= \lambda(a_m u + b_m v + \ldots + h_m w) + k_m, \end{aligned}\right.$$

et chercher après dans quels cas les solutions trouvées existent aussi pour $\lambda = 1$.

Soient

$$u = \varphi_1(s), \qquad \ldots, \qquad w = \varphi_m(s),$$

les valeurs données de u, v, $\ldots$, w sur le contour, s étant l'arc de C, on le suppose comme étant des fonctions continues de s, quoiqu'on pourrait aussi considérer le cas d'un nombre fini de sauts, cela d'autant plus qu'on peut supposer ces valeurs données sur le contour comme étant prises par des fonctions harmoniques.

En effet on peut se borner au cas de données nulles sur le contour, car soient $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, $\ldots$, $w_1(x, y)$ des fonctions harmoniques dans D et se réduisant sur son contour à $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\ldots$, $\varphi_m(s)$.

Si l'on pose

$$u = u_1 + U, \qquad v = v_1 + V, \qquad w = w_1 + W$$

alors le système (1) se transforme en un système de même forme en U, V, . . . , W dans lesquels seulement les derniers termes sont changés et dans ce nouveau système les solutions cherchées sont nulles sur la frontière du domaine. Donc on peut supposer que nous cherchons pour le système (2) les solutions nulles sur C.

Tout d'abord supposons que les $k_i(x, y)$ ne soient pas tous nuls identiquement, c'est-à-dire qu'on n'a pas affaire à un système homogène.

Pour démontrer l'existence des solutions pour le système (2) cherchons ces solutions développées suivant les puissances de λ en appliquant ainsi les approximations successives. Soit donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
u(x,y) &= u_0(x,y) + \lambda u_1(x,y) + \lambda^2 u_2(x,y) + \ldots + \lambda^n u_n(x,y) + \ldots,\\
v(x,y) &= v_0(x,y) + \lambda v_1(x,y) + \lambda^2 v_2(x,y) + \ldots + \lambda^n v_n(x,y) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w(x,y) &= w_0(x,y) + \lambda w_1(x,y) + \lambda^2 w_2(x,y) + \ldots + \lambda^n w_n(x,y) + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Si l'on porte dans le système (2) les expressions de $u, v, \ldots, w$ et l'on identifie les coefficients des mêmes puissances de λ, on obtient ainsi pour déterminer $u_i(x,y)$, $v_i(x,y)$, . . . , $w_i(x,y)$ les équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta u_0 = k_1(x,y), && \Delta v_0 = k_2(x,y),\\
&\Delta u_1 = a_1 u_0 + b_1 v_0 + \ldots + h_1 w_0, && \Delta v_1 = a_2 u_0 + b_2 v_0 + \ldots + h_2 w_0,\\
&\Delta u_2 = a_1 u_1 + b_1 v_1 + \ldots + h_1 w_1, && \Delta v_2 = a_2 u_1 + b_2 v_1 + \ldots + h_2 w_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta u_n = a_1 u_{n-1} + b_1 v_{n-1} + \ldots + h_1 w_{n-1}, && \Delta v_n = a_2 u_{n-1} + b_2 v_{n-1} + \ldots + h_2 w_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta w_0 = k_m(x,y) + \ldots && \Delta w_n = a_m u_{n-1} + b_m v_{n-1} + \ldots + h_m w_{n-1}.
\end{aligned}\right.$$

Comme $u(x,y)$, $v(x,y)$, . . . , $w(x,y)$ sont nuls sur C, il en est de même pour

$$u_i(x,y),\quad v_i(x,y),\quad \ldots,\quad w_i(x,y) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n, \ldots).$$

Alors on trouve facilement les solutions de (4), car ces équations sont de la forme (1) (§ 2) et l'on peut par conséquent appliquer la formule (2) de ce paragraphe. Comme les $k_i(x, y)$ ne sont pas tous nuls, alors $u_0, v_0, \ldots, w_0$ ne sont pas tous nuls et l'on peut déterminer successivement $u_1, v_1, \ldots, w_1$; $u_2, v_2, \ldots$ et ainsi de suite.

Donc les coefficients des puissances de λ dans les séries qui donnent $u(x, y)$, $v(x, y)$, ..., $w(x, y)$ sont tous déterminés. Il reste à montrer que ces séries sont convergentes, au moins sous certaines conditions. Soient pour cela A_i, B_i, ..., H_i, K_i des nombres positifs qui majorent les fonctions

$$a_i(x, y), \quad b_i(x, y), \quad \ldots, \quad h_i(x, y), \quad k_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

dans le domaine D. Si l'on tient compte des inégalités signalées au paragraphe 2 on déduit que

$$u_0 < K_1 M, \qquad v_0 < K_2 M, \qquad \ldots, \qquad w_0 < K_m M,$$

M étant une constante dont la dépendance du domaine a été montrée. Soit K le plus grand nombre des K_i. Si l'on considère les équations suivantes :

$$\Delta u_1 = a_1 u_0 + b_1 v_0 + \ldots + h_1 w_0, \qquad \ldots, \qquad \Delta w_1 = a_m u_0 + b_m v_0 + \ldots + h_m w_0$$

on a

$$a_i u_0 + b_i v_0 + \ldots + h_i w_0 \leqq a_i u_0 + b_i v_0 + \ldots + h_i w_0$$
$$< (A_i + B_i + \ldots + H_i) KM.$$

Donc on déduit, comme tout à l'heure,

$$u_1 < (A_1 + B_1 + \ldots + H_1) KM^2; \qquad v_1 < (A_2 + B_2 + \ldots + H_2) KM^2,$$

Soit L le plus grand nombre de la suite

$$A_i + B_i + \ldots + H_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

On déduit alors que

$$a_i u_1 + b_i v_1 + \ldots + h_i w_1 < (A_i + B_i + \ldots + H_i) LKM^2 \leqq KL^2 M^2,$$

et ainsi de suite, ce qui donne pour le terme général les inégalités suivantes :

$$u_n(x, y) < KL^n M^{n+1}, \qquad v_n(x, y) < KL^n M^{n+1}, \qquad \ldots$$

Donc la série

$$u = \sum_0^\infty \lambda^n u_n$$

et les séries analogues sont majorées par la série

$$KM[1+\lambda LM+\lambda^2(LM)^2+\ldots+\lambda^n(LM)^n+\ldots]$$

qui est convergente si $|\lambda|.L.M<1$.

Si le contour C est donné, alors L et M sont bien déterminés et l'on ne peut disposer que de λ pour satisfaire à la condition de convergence. Par conséquent pour un contour quelconque C on a un système des solutions formelles si λ est suffisamment petit.

Au contraire, si λ est donné [par exemple $\lambda=+1$ pour avoir le système (1)] on ne peut assurer la convergence des séries u, v, ..., w qu'en disposant de M. Mais on a vu la dépendance de M de la forme du contour, ce qui entraîne la condition que le domaine D doit être suffisamment petit dans toutes ses directions.

L dépend aussi de D et il ne peut que croître lorsque le domaine croît. Donc il ne peut pas être question de traiter le problème par cette méthode, pour un contour quelconque et pour le système (1) sans paramètre.

3'. Si l'on est assuré d'une manière ou d'une autre de la convergence des séries $u(x, y)$, ..., $w(x, y)$ alors on peut constater qu'il en est de même des séries qui donnent leurs dérivées partielles du premier ordre. En effet, d'après ce qu'on a dit au paragraphe 2 de ce Chapitre pour la limitation des dérivées premières des solutions de l'équation $\Delta u=f(x, y)$ qui est

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < N.F. \tag{1}$$

On déduit en appliquant cette limitation aux équations

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= a_1 u_{n-1}+b_1 v_{n-1}+\ldots+h_1 w_{n-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta w_n &= a_m u_{n-1}+\ldots+h_m w_{n-1},\end{aligned}$$

que

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| < N(|a_1 u_{n-1}+\ldots+h_1 w_{n-1}|) \leqq K.N.L^n.M^n$$

et ainsi pour les autres, en tenant compte de ce qu'on a établi plus haut. On voit par conséquent que les séries

$$\sum_0^{\infty} \lambda^n \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \ldots$$

sont majorées par la même série

$$\sum_0^{\infty} \lambda^n (\mathrm{LM})^n$$

et si celle-ci est convergente elle l'est absolument et uniformément, donc on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_0^{\infty} \lambda^n \frac{\partial u_n}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_0^{\infty} \lambda^n \frac{\partial w_n}{\partial y}.$$

A vrai dire la question n'est pas si simple. Ces considérations ne sont valables qu'à l'intérieur du domaine D_1 tel que $D_1 + F_1$ soit compris dans le domaine D. Il faut pour cela préciser l'inégalité (1) qui est la base de ces considérations. Considérons avec M. Gevrey [1] l'équation

$$(2) \qquad \Delta z - a \frac{\partial z}{\partial x} - b \frac{\partial z}{\partial y} - c z - f = 0.$$

On sait qu'on peut trouver z comme solution d'une équation intégrale, formée pour la première fois par M. Picard, à savoir l'équation

$$(3) \qquad z(x, y) - \frac{1}{2\pi} \int\!\!\int_D \left[\frac{\partial (aG)}{\partial \xi} + \frac{\partial (bG)}{\partial \eta} - cG \right] z(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \psi(x, y),$$

G étant la fonction classique de Green relative au domaine D.

Si l'on itère deux fois pour que le noyau n'ait plus de singularité et l'on tient compte des limitations de G dans D, on trouve pour les dérivées premières de z, en un point P, les limitations suivantes :

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P < \left(\frac{K_1}{d} + K_2 A^2 d \right) m + (cm + F)(K + K_1 A d) d.$$

[1] M. Gevrey, *Demonstration du thoreme de Picard-Bernstein* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. L, 1926, p. 113).

les K_i étant des constantes numériques, d étant la plus courte distance de P à la frontière de D, A, B, F et C les bornes supérieures de $|a|$, $|b|$, $|f|$ et $|c|$ dans D, m le maximum de $|z|$ dans ce domaine. En particulier pour l'équation $\Delta u = f(x, y)$ on a par conséquent les limitations suivantes :

$$(5) \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P < \frac{k}{d} m + k' F d.$$

Si l'on applique ces inégalités aux équations

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= a_1 u_{n-1} + b_1 v_{n-1} + \ldots + h_1 w_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta w_n &= a_m u_{n-1} + b_m v_{n-1} + \ldots + h_m w_{n-1}, \end{aligned}$$

on trouve que

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|_P, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|_P < \frac{k}{d} \mathrm{KL}^n \mathrm{M}^{n+1} + k' d . \mathrm{KL}^n \mathrm{M}^n = \mathrm{KL}^n \mathrm{M}^n \left(\frac{k}{d} \mathrm{M} + k' d \right).$$

On voit par conséquent que l'on a convergence pour les dérivées premières dans les mêmes cas que pour les solutions, mais que ces limitations deviennent illusoires lorsque le point P s'approche de la frontière de D.

4. Nous avons obtenu $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\ldots$, $w(x, y)$ développés suivant les puissances de λ, en séries uniformément et absolument convergentes dans les conditions précisées. Il faut maintenant montrer que ces fonctions ainsi obtenues sont bien solutions du système (2) (§ 3). Pour cela considérons les équations (4) des approximations successives,

$$\Delta u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + h_1 w_{n-1}, \qquad \ldots, \qquad \Delta w_n = a_m u_{n-1} + \ldots + h_m w_{n-1}.$$

De ces équations on déduit

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} u_n(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int\!\!\int_D [a_1(\xi, \eta) u_{n-1}(\xi, \eta) + \ldots \\ &\qquad + h_1(\xi, \eta) w_{n-1}(\xi, \eta)] \mathrm{G}(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int\!\!\int_D [a_m(\xi, \eta) u_{n-1}(\xi, \eta) + \ldots \\ &\qquad + h_m(\xi, \eta) w_{n-1}(\xi, \eta)] \mathrm{G}(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta, \end{aligned} \right.$$

$\mathrm{G}(x, y; \xi, \eta)$ étant la fonction de Green.

Si l'on multiplie de deux côtés avec λ^n on déduit

$$(2)\quad \lambda^n u_n(x,y) = -\frac{\lambda}{2\pi}\int\int_{\mathrm{D}} [a_1(\xi,\eta)\lambda^{n-1}u_{n-1}(\xi,\eta) + \ldots \\ + h_1(\xi,\eta)\lambda^{n-1}w_{n-1}(\xi,\eta)]\mathrm{G}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Si l'on fait la somme par rapport à n des relations (2) en tenant compte de ce que

$$u(x,y) = \sum_0^\infty \lambda^n u_n(x,y), \quad \ldots, \quad w(x,y) = \sum_0^\infty \lambda^n w_n(x,y),$$

on trouve

$$(3)\quad u - u_0 = -\frac{\lambda}{2\pi}\int\int_{\mathrm{D}} [a_1 u + b_1 v + \ldots + h_1 w]\mathrm{G}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

et de même pour $v - v_0, \ldots, w - w_0$.

De (3) on déduit, d'après la formule de Poisson,

$$\Delta(u - u_0) = \lambda(a_1 u + b_1 v + \ldots + h_1 w);$$

mais comme $\Delta u_0 = k_1(x,y)$, on voit que u satisfait à l'équation

$$\Delta u = \lambda(a_1 u + b_1 v + \ldots + h_1 w) + k_1.$$

De même $v, \ldots, w$ dont les séries

$$\sum_0^\infty \lambda^n u_n, \quad \ldots, \quad \sum_0^\infty \lambda^n w_n$$

représentent bien un système des solutions des équations proposées et satisfaisant aux conditions aux limites imposées. On voit que si les coefficients a_i, h_i, k_i sont analytiques, il en est de même des fonctions $u, \ldots, w$.

5. Nous avons établi l'existence des dérivées du premier ordre pour les solutions du système proposé. En ce qui concerne les dérivées secondes la question présente le même genre de difficultés.

Rappelons d'abord les résultats connus [1] pour les dérivées secondes

(1) L. Lichtenstein, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 2e semestre, 1909, p. 267 et suiv. *Voir* aussi le mémoire de M. Giraud cité à la p. 24.

de l'équation $\Delta z = f(x, y)$, dont la solution nulle sur le contour est

$$(1) \qquad z = -\frac{1}{2\pi}\int\int_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

avec

$$G(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{r} + g(x, y; \xi, \eta),$$

g étant harmonique et régulière dans D. De cette expression de z, on déduit (Dini) l'expression suivante de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, valable pour les points intérieurs de D,

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi}\int\int_D [f(\xi, \eta) - f(x, y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\, d\xi\, d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\int_D f(\xi, \eta)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\, d\xi\, d\eta - \frac{f(x, y)}{2\pi}\int_C \frac{\partial \log r}{\partial \xi}\cos\alpha\, ds,$$

ds étant l'élément linéaire de C et α l'angle de la normale intérieure avec Ox. De cette formule on peut en déduire une limitation de $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|$. Je vais énoncer sous une autre forme le résultat obtenu par M. Lichtenstein.

Soient $D_1 + C_1$ un domaine intérieur à D, dont la frontière est C_1, et $M(x, y)$ un point de D_1 où l'on considère $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Si de M comme centre on décrit un cercle γ de rayon ρ et qui soit tout entier dans D_1 (donc sans points communs avec C_1, qui n'a pas de points communs avec C) on déduit alors, en décomposant les intégrales doubles en deux parties, l'une relative au cercle γ, l'autre à $D - \gamma$ la limitation suivante :

$$(3) \qquad \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| < \lambda_0 K + \mu_0 K',$$

K étant la borne de $|f(\xi, \eta)|$ dans D, K' le maximum de $\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|$, $\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|$ dans $D_1 + C_1$, λ_0 et μ_0 deux constantes qui ne dépendent que des contours considérés $\left(\text{par exemple } \mu_0 = \frac{4\rho}{\pi}\right)$. On en déduit des limitations analogues pour $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|$ et $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|$.

A l'aide des inégalités (3) on peut obtenir des limitations pour les dérivées secondes de $u, v, \ldots, w$ valables dans tout domaine D_1, tel que $D_1 + C_1$ soit intérieur à D.

En effet des équations

$$\Delta u_n = a_1 u_{n-1} + b_1 v_{n-1} + \ldots + h_1 w_{n-1} = f_n(x, y) \ldots \Delta w_n = a_n u_{n-1} + \ldots.$$

on a déduit que

$$|f_n(x, y)| < K.(LM)^m.$$

De même on voit que

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial f_n}{\partial y}\right| < K.N.L^{n-1}M^{n-1} + K.L^{n-1}M^n.L' = K(N + ML')(LM)^{n-1}$$
$$= HK(LM)^{n-1}.$$

L' étant le plus grand des nombres

$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial x} + \frac{\partial b_i}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial h_i}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial a_i}{\partial y} + \frac{\partial b_i}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial h_i}{\partial y}\right|$$

dans D.

Donc on a

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right| < K(\lambda_0 LM + \mu_0 H)(LM)^{n-1},$$

ce qui permet d'affirmer l'existence des dérivées secondes pour $u, v, \ldots, w$ dans D_1. On voit donc qu'on ne peut rien dire lorsqu'on s'approche de la frontière du domaine D, ce qui n'est pas pour nous étonner, étant donnée la complexité de la question même dans le cas du potentiel.

6. Il s'agit à présent, après avoir démontré l'existence d'un système des solutions régulières dans D, de voir si ces solutions sont uniques parmi celles qui satisfont aux mêmes conditions initiales, ou de déterminer les conditions dans lesquelles il en est ainsi.

Supposons que le système (1) du paragraphe 3 admette deux systèmes de solutions, correspondant aux mêmes conditions initiales, soient pour préciser les systèmes $u, v, \ldots, w$ et $u', v', \ldots, w'$. Alors leurs différences

$$U = u - u', \qquad V = v - v', \qquad \ldots, \qquad W = w - w'$$

satisfont au système homogène et sont nulles sur C. Donc la question est de savoir si le système homogène peut avoir des solutions nulles sur C et qui ne sont pas identiquement nulles à son intérieur.

Rappelons que pour l'équation $\Delta u + A(x, y)u = 0$ la solution est unique si C est situé dans la région du plan où l'on a $A(x, y) < 0$. S'il n'en est pas ainsi, il faut que le contour soit suffisammenl petit pour pouvoir affirmer que la solution est unique. (*Voir* par exemple E. Picard, *Analyse*, t. II, p. 25.)

Prenons d'abord le cas d'un système de deux équations

$$(1) \qquad \Delta u = au + bv, \qquad \Delta v = cu + dv,$$

et cherchons si ce système admet des solutions différentes de zéro nulles sur C. Soit pour cela la formule de Green applicable à un couple de fonction U et V continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres,

$$(2) \qquad \int_C \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) ds + \int\int_D (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dx\,dy = 0.$$

Si l'on applique cette formule à nos fonctions définies par (1) et par leurs valeurs sur C, on a

$$(3) \qquad \int\int_D (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy = \int\int_D [cu^2 + (d-a)uv - bv^2]\,dx\,dy = 0.$$

Sous le signe somme on a une forme quadratique en u et v. Si cette forme est définie, c'est-à-dire si l'on a

$$(4) \qquad (d - a)^2 + 4bc < 0,$$

alors il en résulte que u et v sont identiquement nuls dans D. Donc si C est dans la région du plan définie par (4), alors la solution est unique pour le système (1) ou non homogène. Si la condition (4) n'est pas satisfaite dans D, alors il faut que celui-ci soit suffisamment petit pour pouvoir affirmer que la solution est unique. Pour cela nous allons suivre la même marche que dans le cas d'une seule équation.

Si l'on multiplie chaque équation du système (1) respectivement par $u\,dx\,dy$, $v\,dx\,dy$ et l'on intègre dans D, on obtient

$$
(5)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\iint_{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+au^{2}+buv\right]dx\,dy=0.\\
&\iint_{D}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{2}+cuv+dv^{2}\right]dx\,dy=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais comme u et v sont nuls sur C il en résulte que l'on a quelles que soient les fonctions $A(x, y)$, $B(x, y)$ continues dans $D+C$

$$
(6)\qquad \iint_{D}\left[\frac{\partial(Au^{2})}{\partial x}+\frac{\partial(Bv^{2})}{\partial y}\right]dx\,dy=0.
$$

Si l'on ajoute les relations (3), (5) et (6) on obtient

$$
\begin{aligned}
\iint_{D}\Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+Au\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+Bv\right)^{2}&\\
+\left(a+c+\frac{\partial A}{\partial x}-A^{2}\right)u^{2}+(d-a+b+c)uv&\\
+\left(d-b+\frac{\partial B}{\partial y}-B^{2}\right)v^{2}\Bigg]dx\,dy&=0.
\end{aligned}
$$

Les quatre premiers termes sous le signe somme sont essentiellement positifs, tandis que les trois derniers forment une forme quadratique en u et v.

Si cette forme est définie et positive, alors on peut en conclure que $u\equiv 0$, $v\equiv 0$ dans D. Pour qu'il en soit ainsi il faut que

$$
(7)\quad\left\{
\begin{aligned}
&a+c+\frac{\partial A}{\partial x}-A^{2}>0;\\
&(d-a+b+c)^{2}-4\left(a+c+\frac{\partial A}{\partial x}-A^{2}\right)\left(d-b+\frac{\partial B}{\partial y}-B^{2}\right)<0.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut disposer des fonctions A et B, continues dans D, pour que ces inégalités aient lieu, si ce domaine est suffisamment petit. En effet si $a+c>0$ dans D, on peut prendre $A=0$. S'il n'en est pas ainsi, soit alors $-m^{2}$ la borne inférieure de $a+c$ dans D. Prenons A fonction seulement de x, et déterminons-le par l'équation $\frac{dA}{dx}-A^{2}=m^{2}$. La seconde inégalité se ramène à une équation de la même forme pour B. On trouve $A=m\operatorname{tang}(mx+\alpha)$ et l'on voit que $A(x)$ reste continu si x est compris entre deux parallèles à l'axe des y dont l'écart de cet axe est inférieur à $\frac{\pi}{m}$. On peut donc dire que le système homogène a des solutions identiquement nulles si elles sont nulles sur C, si ce contour C peut être renfermé entre deux droites parallèles, pour toute direction, et dont la distance est inférieure à un certain nombre δ, qui peut être assez petit.

Il n'est pas inutile peut-être de donner un exemple, pour voir comment on peut arriver à des conclusions fausses si l'on ne tient pas compte de ce fait.

Considérons le système suivant :

$$\Delta u = 4u - 6v; \qquad \Delta v = 12u - 14v.$$

Pour ce système l'expression

$$(d-a)^2 + 4bc = 36 > 0,$$

donc la condition (4) n'est pas satisfaite et l'on en conclut que pour un contour quelconque, le système peut avoir des solutions nulles sur C, sans qu'elles soient identiquement nulles.

En effet on voit que le système admet les solutions

$$u = \cos x \cos y + \sin 2x \sin 2y; \qquad v = \cos x \cos y + 2 \sin 2x \sin 2y$$

qui sont nulles sur les côtés du carré

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad y = \pm \frac{\pi}{2}$$

sans être nulles identiquement à son intérieur.

Cela tient au fait que ce carré n'est pas assez petit, car si l'on applique les conditions (7) on voit qu'on peut prendre $A = 0$ et B tel que $\frac{dB}{dy} - B^2 > \frac{89}{4}$. Donc $m = 4, 7 \ldots$ et le contour qui porte les données doit avoir sa plus grande dimension inférieure à $\frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{2,3\ldots}$, ce qui n'est pas pour le carré considéré plus haut.

Dans le cas du système de m équations les choses se passent de la même manière. On peut former comme plus haut, à l'aide de la formule de Green $\frac{m(m-1)}{2}$ formes quadratiques en u, v, ..., w. Si quelques-unes de ces formes sont définies dans D, alors on peut conclure à l'unicité de la solution. S'il n'en est pas ainsi, alors comme dans le cas de $m=2$, on peut introduire dans ces formes quadratiques certaines fonctions continues arbitraires $A(x, y)$, $B(x, y)$ et disposer d'elles de manière que les conditions, pour que la forme soit définie, soient satisfaites. Ces conditions nous conduisent à déterminer ces fonctions arbitraires par des équations de la forme $\frac{dA}{dx} - A^2 = m^2$, ce qui permet de dire que les solutions du système considéré sont uniques si le contour est suffisamment petit.

7. Tout ce qui vient d'être dit pour le système (1) du paragraphe 3 peut être appliqué sans aucun changement au système

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta'_1 u = a_1 u + b_1 v + \ldots + h_1 w + k_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta'_m w = a_m u + b_m v + \ldots + h_m w + k_m, \end{array}\right.$$

où

$$\Delta'_i \varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_i \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p_i \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

$p_i(x, y)$ étant une fonction continue ainsi que ses dérivées de deux premiers ordres, et qui en outre est toujours positive dans D, sans s'annuler. En effet ce système peut être ramené à un système de la forme considérée au début, par le changement de fonctions

$$u = \frac{U}{\sqrt{p_1}}, \qquad v = \frac{V}{\sqrt{p_2}}, \qquad \ldots, \qquad w = \frac{W}{\sqrt{p_m}},$$

car avec ce changement le système prend la forme (1). Il suffit pour cela de vérifier que $\Delta'_i \varphi$ devient $\Delta\varphi + \varphi f(p_i)$ à un facteur près, $f(p_i)$ étant une expression différentielle de p_i facile à former. Mais on verra dans le Chapitre suivant des généralisations plus larges que celle-ci.

CHAPITRE II.

1. On peut étendre les résultats précédents dans plusieurs directions.

Considérons toujours des systèmes linéaires à deux variables, comme dans le Chapitre précédent, mais de forme plus générale, en introduisant aussi les dérivées premières des fonctions inconnues.

Pour simplifier l'écriture, considérons le cas de deux équations avec deux fonctions, soit

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u = \lambda\left(a_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + b_1 \dfrac{\partial u}{\partial y} + c_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} + d_1 \dfrac{\partial v}{\partial y} + e_1 u + f_1 v\right) + g_1, \\ \Delta v = \lambda\left(a_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} + c_2 \dfrac{\partial v}{\partial x} + d_2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + e_2 u + f_2 v\right) + g_2, \end{cases}$$

les coefficients $a, b, \ldots, f, g$ étant des fonctions de x et y, finies et continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans un domaine D.

La méthode du cas précédent peut s'appliquer sans aucune modification. Proposons-nous de trouver une solution de (1) telle que u et v soient nuls sur la frontière de D.

Si l'on pose, comme tout à l'heure,

$$u = \sum_0^\infty \lambda^n u_n; \qquad v = \sum_0^\infty \lambda^n v_n$$

pour déterminer u_n et v_n nuls sur C, on a les équations suivantes :

$$\Delta u_0 = g_1(x, y); \qquad \Delta v_0 = g_2(x, y),$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta u_n = a_1 \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b_1 \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c_1 \dfrac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + d_1 \dfrac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + e_1 u_{n-1} + f_1 v_{n-1}, \\ \Delta v_n = a_2 \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c_2 \dfrac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + d_2 \dfrac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + e_2 u_{n-1} + f_2 v_{n-1}, \\ \qquad (n \geqq 1). \end{cases}$$

Soient A_1, B_1, ..., G_2 des nombres qui majorent les fonctions a_1, b_1, ..., g_2 dans D. Comme on a

$$|u_0| < G_1 M; \qquad |v_0| < G_2 M;$$
$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial y}\right| < G_1 N; \qquad \left|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial v_0}{\partial y}\right| < G_2 N,$$

on trouve en désignant par G le plus grand de deux nombres G_1 et G_2 et par L la plus grande des expressions numériques,

$$(A_i + B_i + C_i + D_i) N + (E_i + F_i) M \qquad (i = 1, 2),$$

alors on a immédiatement

$$|u_n|, \quad |v_n| < G . L^n . M,$$
$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| \cdots < G . L^n . N.$$

Ici on doit appliquer ce qu'on a dit à la page 15, en ce qui concerne N. Donc si $|\lambda| . L < 1$ on a convergence, et l'on tire les mêmes conclusions que plus haut, car L est suffisamment petit si (C) l'est, et l'on n'est pas trop rapproché du contour. Il y a donc ici des difficultés spéciales dues à la présence des dérivées du premier ordre dans le système et qu'on mettra mieux en évidence dans un cas plus général (page 30).

En ce qui concerne l'unicité de la solution ainsi trouvée, si l'on applique la même marche que dans le Chapitre précédent on voit que dans le cas $a_1 + c_2 = b_1 + d_2 = 0$ on arrive, en appliquant la formule de Green et des intégrations par partie, à la forme quadratique suivante :

$$\int\!\!\int_D \left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} - 2 e_2 \right) u^2 - 2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial y} - e_1 + f_2 \right) uv \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial d_1}{\partial y} - 2 f_1 \right) v^2 \right] dx\, dy = 0.$$

Si C est tracé dans la région du plan où cette forme est définie, c'est-à-dire si l'on a dans C

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial y} - e_1 + f_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} - 2 e_2 \right) \left(\frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial d_1}{\partial y} - 2 f_1 \right) < 0,$$

alors la solution est unique.

Si l'on n'a pas la relation $a_1 + c_2 = b_1 + d_2 = 0$, on peut s'arranger pour qu'il en soit ainsi dans tous les cas où l'on a

$$\frac{\partial}{\partial y}(a_1 + c_2) = \frac{\partial}{\partial x}(b_1 + d_2)$$

si l'on fait la substitution

$$u = w_1 U, \qquad v = w_2 V,$$

qui change le système (1) dans un système de la même forme.

Dans les autres cas, on déduit que la solution n'est unique que si le contour C est suffisamment petit.

2. Une autre extension du système considéré, indiquée d'ailleurs par M. Picard dans le Mémoire cité, est celle des systèmes non linéaires, c'est-à-dire au système de la forme

$$\Delta u_i = f_i(x, y; u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais, à cause même de la généralité du problème ainsi posé, les précisions qu'on peut apporter sont plus faibles. Naturellement, on peut donner un théorème d'existence, pour des conditions assez larges imposées aux fonctions f_i (conditions de Lipschitz) valables pour des domaines suffisamment petits.

Mais même pour un système de cette forme générale, l'étude du système linéaire tangent peut être utile. Par exemple, pour établir les conditions d'unicité, on peut se servir de ce système.

Comme notre but est l'étude du système linéaire en rapport avec les fonctions inconnues et leurs dérivées premières, nous ne nous arrêterons pas plus longuement sur ces systèmes [1].

3. La généralisation que nous envisagerons de plus près, est celle des systèmes linéaires de la même forme que ceux du Chapitre précédent et du commencement de celui-ci, mais dans le cas de plus de deux variables.

---

[1] L'équation non linéaire du type elliptique a fait l'objet d'une étude récente dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* (t. 43, 1926) par Georges Giraud, *Sur le problème de Dirichlet généralisé*.

Supposons que dans l'espace E_n à n dimensions on se donne un domaine fermé Ω (à n dimensions aussi) situé à distance finie et de frontière Σ. Proposons-nous de trouver m fonctions

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad v(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

régulières dans Ω, qui se réduisent à sa surface Σ à des valeurs données d'avance, et qui à son intérieur satisfait à un système de m équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique que nous supposons ramenées à la forme suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_n u = \lambda[\, a_1(M)u + b_1(M)v + \ldots + h_1(M)w] + k_1(M), \\ \Delta_n v = \lambda[\, a_2(M)u + b_2(M)v + \ldots + h_2(M)w] + k_2(M), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_n w = \lambda[\, a_m(M)u + b_m(M)v + \ldots + h_m(M)w] + k_m(M), \end{cases}$$

en désignant par $\Delta_n\varphi$ ou même $\Delta\varphi$ s'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre, le laplacien dans E_n,

$$\Delta_n\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2},$$

$a(M)$, $b(M)$, $\ldots$, $k(M)$ étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ finies, continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans Ω.

Pour pouvoir appliquer la méthode des approximations successives comme dans le cas de deux variables il faut obtenir une limitation de la solution de l'équation

$$(2) \qquad \Delta_n U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

et qui est nulle sur Σ. Et comme la solution de cette équation est

$$(3) \qquad U(P) = -\frac{1}{(n-2)k_n}\int_\Omega f(M)G(M, P)\,d\omega_M,$$

$k_n = \dfrac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ étant la surface de l'hypersphère de E_n de rayon 1 et $G(M, P)$ la fonction de Green relative à Ω. De cette expression de $U(P)$ on pourrait obtenir comme dans le cas de deux variables, une limitation de $|U|$ et de ses dérivées dans Ω.

Mais considérons le cas plus général d'une équation du type elliptique à n variables, c'est-à-dire de l'équation

$$(4) \qquad E(u) = \sum_{1}^{n} a_{ik}(M) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{1}^{n} b_i(M) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(M)u = f(M)$$

dont (2) est un cas particulier. Les coefficients $a_{ik} = a_{ki}$, b_i, $c(M)$ et $f(M)$ sont des fonctions réelles du point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, finies et continues dans le domaine Ω.

Comme l'équation est du type elliptique dans ce domaine, la forme quadratique

$$\sum_{1}^{n} a_{ik}(M) X_i X_k$$

est définie quel que soit le point M de Ω. Alors, et même dans le cas où cette forme quadratique serait semi-définie, on peut obtenir[1] une limitation de $|u|$ solution de l'équation (4), en fonction de ses valeurs maxima sur la frontière Σ de Ω et du maximum de $|f(M)|$ dans Ω.

Plaçons-nous dans le cas $c(M) \leqq 0$ dans Ω qui nous intéresse et supposons qu'on puisse trouver une fonction positive ω, pour laquelle on ait $E(\omega) < 0$ dans Ω. Alors une intégrale u de (4) ne peut avoir dans un point de Ω un minimum négatif si $f(M) \leqq 0$ ou un maximum positif si $f(M) \geqq 0$. Il en résulte que lorsque $f(M) \leqq 0$ toute intégrale de (4) qui est $\geqq 0$ sur Σ se conserve telle dans Ω et si $f(M) \geqq 0$ toute intégrale de $E(u) = f(M)$ qui est $\leqq 0$ se conserve telle dans Ω. Si l'on tient compte de ces faits on déduit facilement que

$$(5) \qquad |u|_{\text{dans } \Omega} < \max_{\text{sur } \Sigma} \text{ de } |u| + H . \text{maximum dans } (\Omega + \Sigma) \text{ de } |f(M)|,$$

en désignant par H un nombre non inférieur au maximum d'une fonction $w(P)$ non négative dans Ω et pour laquelle on a $E(w) \leqq -1$.

En effet, soient N le maximum de $|u|$ sur Σ; F celui de $|f(M)|$ dans Ω. Si l'on pose $v = F . w$ alors cette fonction v vérifie $E(v) \leqq -F$. Posons plus loin

$$v_1 = u - N; \qquad v_2 = u + N.$$

---

(1) *Voir* M. Picone, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellitico paraboliche alle derivate parziali de secunde ordine* (*Atti d. r. Academia dei Lincei*, vol, V. fasc. 3, 1927).

Il en résulte

$$E(v_1) = f - cN; \qquad E(v_2) = f + cN,$$

donc

$$E(v - v_1) \leqq -F - f + cN \leqq 0; \qquad E(-v - v^2) \geqq F - f - cN \geqq 0,$$

car il ne faut pas oublier que nous avons supposé $c \leqq 0$. Mais comme on a sur Σ

$$v - v_1 \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad -(v + v_2) \leqq 0,$$

il en résulte que l'on aura dans Ω

$$v - v_1 > 0, \qquad v - v_2 \geqq 0$$

d'après ce qu'on a dit plus haut, car on est bien dans les conditions exigées. Donc de $v_1 < v$ on en déduit

$$|u| \leqq N + v = W + F.w \leqq \max_\Sigma |u| + H.F, \tag{5}$$

ce qu'il faudrait établir. On peut assigner diverses expressions pour la constante H (*voir* la Note citée). Nous prenons la suivante, comme étant la plus commode et d'ailleurs applicable dans des cas très étendus.

Si dans Ω on a

$$a_{ii}(M) \geqq 1, \qquad b_i(M) \geqq 0$$

et que la coordonnée x_i est en valeur absolue pour tout point de $\Omega + \Sigma$ plus petite que δ, alors on peut prendre

$$w = 2\delta^2 - \frac{1}{2}(x_i + \delta)^2,$$

car on a bien $E(w) \leqq -1$. Il s'ensuit qu'on peut prendre $H = 2\delta^2$ et l'on a dans ce cas la limitation suivante pour la solution de (4) nulle sur Σ,

$$|u(M)| \leqq 2\delta^2.F. \tag{6}$$

Pour avoir des limitations pour les dérivées partielles de U nous allons nous rapporter au Mémoire de M. G. Giraud [1] déjà cité. Soient toujours l'équation (4) et une hypersphère S de rayon R. Les limita-

---

[1] Mémoire cité à la page 24 (*voir* p. 115-117 spécialement).

tions données par M. Giraud sont valables à l'intérieur de cette hypersphère et pour un point situé à une distance r du centre. Elles sont les suivantes :

$$|u(\mathrm{M})| < \tau[\mathrm{R}^2\mathrm{F} + \max_\Sigma |u|] \log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\rho}, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \tau\left[\frac{\mathrm{R}^2\mathrm{F}}{\mathrm{R}-r} + \frac{\max_\Sigma |u|}{(\mathrm{R}-r)^2}\right] \log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\rho}, \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right| < \tau\left[\frac{\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}-r)^2}\mathrm{F} + \mathrm{RF}' + \frac{\max_\Sigma |u|}{(\mathrm{R}-r)^2}\right] \log\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\log\frac{1}{\rho}, \tag{9}$$

où ρ est un nombre positif assez petit F et F′ les bornes de $|f(\mathrm{M})|$ et de ses dérivées partielles du premier ordre dans S, τ une constante. Comme on voit, à part le fait qu'elles ne sont valables que dans S, même celle qui limite $|u|$ devient illusoire lorsqu'on s'approche de la frontière. C'est pour cela qu'on lui préfère (6) quoiqu'elle soit applicable à une classe d'équations plus particulière. Néanmoins nous utilisons (8) pour avoir des limitations des dérivées premières pour u. Pour pouvoir l'appliquer à notre domaine Ω considérons un point P dans Ω et dont la distance à Σ (la plus courte) est d. Alors de P comme centre décrivons une hypersphère S de rayon d et considérons la solution de (4) qui prend sur S les mêmes valeurs que u qui est nulle sur Σ. Si l'on admet l'unicité de la solution pour les domaines suffisamment petits, ces deux solutions doivent coïncider dans S. Alors on peut appliquer la limitation (8) à u en remplaçant R par d, $r=0$ car on cherche la limitation en P et $\max_\Sigma|u|$ par $\max_\Omega|u|$. On a par conséquent

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \mathrm{N}\left[\mathrm{F}d + \frac{2\mathrm{F}\delta^2}{d}\right] \tag{10}$$

en posant

$$\mathrm{N} = \tau \log 2 \log\frac{1}{\rho}.$$

Celle que nous avons employée dans le cas de deux variables [Chap. I, § 3, form. (3)] est bien de cette forme-ci. De même de (9) on obtient une limitation analogue pour les dérivées secondes.

Avec les limitations (6) et (10), on peut procéder comme dans les cas précédents à la démonstration de l'existence des solutions pour le système (1) et même pour des systèmes plus généraux, soit par exemple :

$$(11)\quad \mathcal{D}u_i+\lambda\left[\sum_1^n{}_k\left(a_{i_1}^k\frac{\partial u_k}{\partial x_1}+a_{i_2}^k\frac{\partial u_k}{\partial x_2}+\ldots+a_{i_m}^k\frac{\partial u_k}{\partial x_m}+b_{i_k}u_k\right)\right]=f_i(\mathrm{M})$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$\mathcal{D}$ étant un symbole différentiel du second ordre.

Si l'on écrit comme toujours

$$u_i=\sum_0^\infty\lambda^p u_i^{(p)}\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

on voit que l'on a convergence pour u_i et leurs dérivées partielles du premier ordre si l'expression

$$\mathrm{LN}\left(d+\frac{2\,\delta^2}{d}\right)+2\,\mathrm{M}\,\delta^2<1;$$

L étant la borne supérieure des nombres

$$\sum_1^n{}_k(\mathrm{A}_{i_1}^k+\mathrm{A}_{i_2}^k+\ldots+\mathrm{A}_{i_m}^k)$$

et M des nombres

$$(\mathrm{B}_{i_1}+\mathrm{B}_{i_2}+\ldots+\mathrm{B}_{i_m})\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

et où $\mathrm{A}_{ij}^k\geqq|a_{ij}^k|$. Cela est possible dès que $d>\varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, car $d\leqq\frac{\delta}{2}$; donc pour les domaines Ω suffisamment petits dans toutes leurs dimensions et pour les points contenus dans Ω_1, tel que $\Omega_1+\Sigma_1$ soit intérieur à Ω, on a convergence. Ici, il apparaît une difficulté qn'on doit mettre en évidence. Comme on voit, dans la condition de convergence obtenue, il entre $\frac{1}{d}$, d étant la plus courte distance du point dans lequel on considère la solution à la frontière du domaine. Il s'ensuit que sur la frontière du domaine, on n'a plus convergence pour les solutions obtenues, ou tout au moins notre méthode ne permet pas de la montrer. Mais, d'après les données mêmes, les u_i sont supposés finis et continus (par exemple, nuls) sur la frontière du domaine. Il y a donc contradiction entre ce fait et la condition de convergence sur la frontière obtenue plus haut. Ce fait apparaît même dans l'étude de l'équation

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = g(x, y)$$

si l'on prend pour la limitation des dérivées premières de l'équation

$$\Delta z = f(x, y)$$

les expressions données à la page 14 du Chapitre précédent. Dans l'étude que M. Picard a faite de cette équation dans un Mémoire de 1890, il prend comme limitation de dérivées premières de z, comme on a déjà eu l'occasion de le dire,

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \ldots < \text{N}.\text{F}. \qquad \text{F} \geq f.$$

et il considère N comme étant fini même sur la frontière du domaine pour éviter ainsi ce genre de difficultés.

Il y a, par conséquent ici, une grosse difficulté en ce qui concerne l'allure même des solutions sur le contour, et qui paraît difficilement surmontable par la méthode des approximations successives.

Je me propose de revenir sur cette question.

On peut remarquer, avant de terminer ces considérations, que, pour le système (1), qui ne contient pas les dérivées premières des fonctions u_i, que les solutions existent dans $\Omega + \Sigma$, et c'est seulement pour les dérivées premières et secondes qu'on a les difficultés indiquées plus haut en ce qui concerne leur allure sur Σ.

Enfin, pour terminer, il n'est peut-être pas inutile d'observer qu'on peut appliquer la même méthode pour démontrer l'existence des solutions à des équations un peu différentes de celles qu'on a considérées jusqu'à présent, par exemple, dans lesquelles les dérivées de second ordre n'entrent pas seulement par le laplacien. Dans ce cas aussi, on peut établir l'existence moyennant des données convenables sur le contour pour que les solutions soient complètement déterminées.

Dans cette catégorie, entrent les équations de l'équilibre élastique

$$\mu\,\Delta u + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \rho X = 0. \ \ldots$$

où

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} V.$$

L'un des problèmes qui se posent comme l'on sait est de trouver u, v, w en connaissant les déplacements à la surface du corps. En écrivant

$$u = \sum_0^\infty \xi^n u_n. \ \ldots$$

où

$$\xi = 1 + \frac{\lambda}{\mu},$$

on arrive à des équations successives qui déterminent les u_n, v_n, w_n toujours par des équations de la forme (2).

En ce qui concerne l'unicité de la solution obtenue, pour un système tel que (7), ou d'autre forme, on peut obtenir des conditions en appliquant toujours la formule de Green au couple des fonctions qui vérifient le système.

Par exemple, pour le système

$$\Delta u = a(M)\,u + b(M)\,v, \qquad \Delta v = c(M)\,u + d(M)\,v,$$

on déduit, comme dans le cas de deux variables, que la solution est unique si Ω est dans la région de E_n définie par

$$[d(M) - a(M)]^2 + 4b(M).c(M) < 0.$$

Dans les autres cas, on en conclut, comme dans le cas de deux variables, que le domaine doit être suffisamment petit pour qu'il en soit ainsi

4. On peut faire une application immédiate de ce qu'on a établi pour les systèmes du type elliptique. Soient

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\Delta^{(2)} u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{(n)} u = \Delta(\Delta^{n-1} u).$$

Considérons alors l'équation suivante :

$$(1) \qquad \Delta^n u + p_1(x, y)\Delta^{n-1} u + \ldots + p_n(x, y) u = f(x, y),$$

qui est d'ordre $2n$ et du type elliptique. Les coefficients p_i sont des fonctions continues et bornées, ainsi que leurs dérivées du premier ordre. On peut écrire cette équation (1) sous la forme d'un système du type de ceux qu'on a déjà envisagé.

En effet, on peut l'écrire

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u = u_1, \quad \Delta u_1 = u_2, \quad \ldots, \quad \Delta u_{n-2} = u_{n-1}, \\ \Delta u_{n-1} + p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \ldots + p_n u = f. \end{cases}$$

Donc, si l'on se donne sur le contour C de D les valeurs $u, u_1, \ldots, u_{n-1}$; d'après ce qu'on a vu, on peut trouver, si C est suffisamment petit, un système de solutions et un seul qui satisfasse à (2) dans D et prenne les valeurs données sur C.

On a résolu de cette manière, pour l'équation (1), le problème suivant : « Trouver pour l'équation (1) une solution $u(x, y)$ régulière dans D et qui se réduit ainsi que les expressions Δu, $\Delta^{(2)} u$, $\ldots$, $\Delta^{(n-1)} u$ sur la frontière C à des valeurs données d'avance. » On voit que l'équation (1) joue un rôle particulier dans la classe des équations du type elliptique et d'ordre $2n$. En effet, le problème qu'on pose pour l'équation générale de cette forme est de trouver une solution connaissant ses valeurs ainsi que celles de ses dérivées jusqu'à l'ordre $2n-1$ sur C.

L'équation du type (1), la plus ancienne connue en analyse, est l'équation biharmonique $\Delta^{(2)} u = 0$ qui intervient dans un problème d'élasticité. Mais le problème aux limites qu'on se pose pour cette équation en est un autre.

Un problème de la nature de celui que nous avons traité et qui est à l'origine de ces considérations, a été traité récemment par Ch. Riquier (¹) qui se propose de trouver pour l'équation $\Delta^n u = 0$ une solution satisfaisant aux conditions suivantes :

(¹) Ch. Riquier, *Sur quelques problèmes relatifs à l'équation aux dérivées partielles $\Delta^{(n)} u = 0$* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1926, p. 297).

1° D'être analytique et régulière à l'intérieur et un peu au delà du contour C;

2° Sur le contour C les n quantités $u, \Delta u, \Delta^{(2)} u, \ldots, \Delta^{(n-1)} u$ doivent se réduire à n fonctions analytiques et régulières données du paramètre qui définit la courbe.

M. Riquier montre l'existence de u avec ces conditions aux limites en réduisant l'équation $\Delta^{(n)} u$ à la forme $\frac{\partial^{2n} W}{\partial X^n \partial y^n} = 0$. Il est vrai que nous n'avons pas envisagé l'allure des solutions des systèmes étudiés au delà du contour C, ni la possibilité de prolongement de solutions trouvées dans C. Mais cela ne change rien à la nature du problème qui reste le même. D'ailleurs, on verra dans le Chapitre suivant la forme analytique sous laquelle se présentent les solutions des systèmes linéaires envisagés [1].

On voit donc bien comment l'équation (1) généralise le problème de M. Riquier et comment on peut l'étendre à plus de deux variables en considérant l'équation

$$(2) \qquad \Delta_n^{(m)} u + p_1(M) \Delta_n^{(m-1)} u + \ldots + p_m(M) u = f(M),$$

qu'on réduit à un système de m équations. Il en résulte pour (2) qu'on peut trouver une solution régulière à l'intérieur d'un domaine Ω et qui se réduit, ainsi que les expressions $\Delta u, \Delta^{(2)} u, \ldots, \Delta^{(m-1)} u$ à des valeurs données.

Nous arrêtons ici ces considérations qu'on pourrait étendre encore à des systèmes beaucoup plus généraux et non seulement du second ordre par exemple, car notre but est la résolution effective du pro-

---

(1) Des équations du type elliptique à caractéristiques confondues et qui se rapprochent de (1), sont considérées par M. Gevrey dans les *Camptes rendus*, t. 173, p. 1445, où il résout à l'aide de la fonction de Green l'équation

$$\Delta_n^{(p)} u \quad \sum b_{k_1 k_2 \ldots k_m} \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} = f(M),$$

et même plus généralement en se donnant u ainsi que ses dérivées de $p-1$ premiers ordres.

blème de Dirichlet pour les systèmes linéaires les plus simples qu'on peut envisager.

Pour cela, nous avons besoin de solutions autres que celles qu'on a considérées jusqu'à présent et qu'on a appelées régulières, mais des solutions ayant certaines singularités dans D de l'ordre de $\log r$ dans le cas de deux variables et de $\frac{1}{r^{n-2}}$ pour n variables.

Nous chercherons à montrer l'existence de telles solutions dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE III.

1. Dans les Chapitres précédents on a montré l'existence des solutions régulières à l'intérieur d'un contour C, pour certaines classes de systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique, et l'on a vu qu'une équation homogène n'admet pas, si le contour est suffisamment petit, de solutions régulières, nulles sur le contour et qui ne soient pas identiquement nulles dans (C).

Proposons-nous de chercher s'il existe des solutions nulles sur le bord et qui ne soient pas régulières dans tout le domaine D : plus précisément ces solutions ont une certaine singularité dans D, par exemple dans le cas de deux variables, elles se comportent au point $P(\xi, \eta)$ de D comme $\log r (r = \overline{PM})$.

On sait que dans le cas de l'équation harmonique $\Delta u = 0$ une solution qui a ce caractère est la fonction de Green

$$g(M, P) = \log \frac{1}{r} + \gamma(M, P),$$

γ étant une fonction harmonique régulière et qui se réduit sur (C) à $(\log r)_c$.

Dans le cas de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

l'existence d'une pareille solution a été signalée d'abord par M. E. Picard et démontrée ensuite même dans des cas plus généraux par MM. Hilbert, Holmgren, Hadamard, Hedrick, E.-E. Levi ([1]), etc.

Cette solution est de la forme $U \log r + V$, et s'appelle *solution fondamentale* (ou bien *solution élémentaire* comme le propose M. Hadamard) de l'équation, et sa recherche est indépendante du contour C. Une solution de cette forme et qui s'annule le long de C peut s'appeler aussi par extension *fonction de Green*, par analogie avec la fonction classique de Green $g(M, P)$.

Nous allons démontrer, en reprenant la méthode que Holmgren a employée dans le cas de l'équation (1), pour le cas d'un système de deux équations à cause des difficultés d'écriture, l'existence de solutions fondamentales.

2. Soit le système

$$(1)\quad \begin{cases} L(u, v) = \Delta u + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + c\dfrac{\partial v}{\partial x} + d\dfrac{\partial v}{\partial y} + e\,u + f\,v = 0, \\ L'(u, v) = \Delta v + a'\dfrac{\partial u}{\partial x} + b'\dfrac{\partial u}{\partial y} + c'\dfrac{\partial v}{\partial x} + d'\dfrac{\partial v}{\partial y} + e'u + f'v = 0, \end{cases}$$

à coefficients analytiques.

Proposons-nous de trouver pour ce système de solutions de la forme suivante

$$(2)\quad \begin{cases} u = U(x, y; \xi, \eta)\log\dfrac{1}{r} + U'(x, y; \xi, \eta), \\ v = V(x, y; \xi, \eta)\log\dfrac{1}{r} + V'(x, y; \xi, \eta), \end{cases}$$

(ξ, η) étant les coordonnées d'un point P intérieur à C, $r = \overline{MP}$, $M(x, y)$ avec la condition que U, U', V, V' soient des fonctions régulières de quatre arguments et qu'en plus

$$U(\xi, \eta; \xi, \eta) = V(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1.$$

([1]) *Voir* par exemple E. Holmgren, *Mathem. Annalen*, 58, 1904, p. 404; J. Hadamard, *Annales de l'École Normale*, 1904, p. 535; Hedrick, *Inaugural Disertation Gottingen*, et E.-E. Levi, *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. XXIV, 1907, p. 275, qui considère le cas de l'équation elliptique d'ordre $2n$, et réduit la recherche de solution fondamentale à une équation intégrale.

Si l'on substitue ces expressions de u, v dans (1) on trouve

$$(3)\qquad \begin{cases} L(U, V)\log\frac{1}{r} + L(U', V') - F_1(x, y\,;\,\xi, \eta) = 0, \\ L'(U, V)\log\frac{1}{r} + L'(U', V') - F_2(x, y\,;\,\xi, \eta) = 0. \end{cases}$$

avec

$$(4)\qquad \begin{cases} F_1 = \frac{1}{r^2}\Big[2(x-\xi)\frac{\partial U}{\partial x} + 2(y-\eta)\frac{\partial U}{\partial x} + a(x-\xi)U \\ \qquad\qquad + b(y-\eta)U + c(x-\xi)V + d(y-\eta)V\Big], \\ F_2 = \frac{1}{r^2}\Big[2(x-\xi)\frac{\partial V}{\partial x} + 2(y-\eta)\frac{\partial V}{\partial y} + a'(x-\xi)U \\ \qquad\qquad + b'(y-\eta)U + c'(x-\xi)V + d'(y-\eta)V\Big]. \end{cases}$$

Pour satisfaire à (3) déterminons U, V et U', V' par les équations suivantes :

$$(\mathrm{I})\qquad L(U, V) = 0, \qquad L'(U, V) = 0\,;$$

$$(\mathrm{II})\qquad L(U', V') - F_1(x, y\,;\,\xi, \eta) = 0, \qquad L'(U', V') - F_2(x, y\,;\,\xi, \eta) = 0.$$

On déterminera U et V solutions de (I) de telle manière que les expressions F_1 et F_2 soient régulières dans D, même au point P, par rapport aux quatre variables x, y ; ξ, η.

Rappelons tout d'abord qu'une fonction analytique, réelle en $x-\xi$, $y-\eta$ convergente pour $|x-\xi|$, $|y-\eta| < R$ peut se mettre sous la forme

$$(5)\qquad \sum_0^\infty r^n P_n(\theta),$$

avec

$$x - \xi = r\cos\theta, \qquad y - \eta = r\sin\theta$$

et $P_n(\theta)$ un polynome trigonométrique d'ordre n

$$(5')\qquad P_n(\theta) = a_n^{n}\cos n\theta + b_n^{n-2}\sin n\theta \\ + a_{n-2}^{(n)}\cos(n-2)\theta + b_{n-2}^{(n)}\sin(n-2)\theta + \ldots.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_0^\infty r^n |P_n|$$

converge si $r < R$ et où

$$|P_n| = |a_n^{(n)}| + |b_n^{(n)}| + |a_{n-2}^{(n)}| + |b_{n-2}^{n}| + \ldots$$

Inversement une série de la forme (5) représente une fonction analytique régulière de x, y dans le voisinage de ξ, η seulement si $|x - \xi|$ et $|y - \eta| < \frac{R}{2}$.

Introduisons le changement de variable

$$x - \xi = r\cos\theta, \qquad y - \eta = r\sin\theta,$$

c'est-à-dire qu'on prend des coordonnées polaires de centre P. dans les équations (I) et dans (4). Alors ces équations deviennent

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial U}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + ar\left(r\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) \\ &\qquad + br\left(r\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + cr\left(r\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) \\ &\qquad + dr\left(r\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + r^2(eU + fV) = 0, \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial V}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + a'r\left(r\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

et

$$F_1(x, y; \xi, \eta), \quad F_2(x, y; \xi, \eta)$$

deviennent

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{r}\left[2\frac{\partial U}{\partial r} + (a\cos\theta + b\sin\theta)U + (c\cos\theta + d\sin\theta)V\right], \\ F_2 &= \frac{1}{r}\left[2\frac{\partial V}{\partial r} + (a'\cos\theta + b'\sin\theta)U + (c'\cos\theta + d'\sin\theta)V\right]; \end{aligned} \right.$$

cherchons U et V solutions de (E) sous la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= 1 + r\alpha_1(\theta) + r^2\alpha_2(\theta) + \ldots + r^n\alpha_n(\theta) + \ldots, \\ V &= 1 + r\beta_1(\theta) + r^2\beta_2(\theta) + \ldots + r^n\beta_n(\theta) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

car on doit avoir

$$U(\xi, \eta; \xi, \eta) = V(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1,$$

et U, V sont supposés réguliers autour du point (ξ, η). Alors il s'ensuit que les coefficients $\alpha_n(\theta)$ et $\beta_n(\theta)$, polynomes trigonométriques d'ordre n, doivent avoir la même forme que $P_n(\theta)$.

En effet si l'on porte les expressions (6) de U et V dans les équations (E) on trouve les équations successives suivantes, qui déterminent les $\alpha_n(\theta)$ et $\beta_n(\theta)$:

$$\frac{d^2\alpha_1}{d\theta^2} + \alpha_1 = 0, \qquad \frac{d^2\beta_1}{d\theta^2} + \beta_1 = 0 \qquad \text{et pour} \qquad n > 1$$

$$(\mathrm{E}') \quad \begin{aligned} \frac{d^2\alpha_n}{d\theta^2} &+ n^2\alpha_n + a_0\left[(n-1)\alpha_{n-1}\cos\theta - \sin\theta\,\frac{d\alpha_{n-1}}{d\theta}\right] \\ &+ a_1\left[(n-2)\alpha_{n-2}\cos\theta - \sin\theta\,\frac{d\alpha_{n-2}}{d\theta}\right] + \ldots \\ &+ b_0\left[(n-1)\alpha_{n-1}\sin\theta + \cos\theta\,\frac{d\alpha_{n-1}}{d\theta}\right] \\ &+ b_1\left[(n-2)\alpha_{n-2}\sin\theta + \cos\theta\,\frac{d\alpha_{n-2}}{d\theta}\right] + \ldots \\ &+ c_0\left[(n-1)\beta_{n-1}\cos\theta - \sin\theta\,\frac{d\beta_{n-1}}{d\theta}\right] \\ &+ c_1\left[(n-2)\beta_{n-2}\cos\theta - \sin\theta\,\frac{d\beta_{n-2}}{d\theta}\right] + \ldots \\ &+ d_0\left[(n-1)\beta_{n-1}\sin\theta + \cos\theta\,\frac{d\beta_{n-1}}{d\theta}\right] \\ &+ d_1\left[(n-2)\beta_{n-2}\sin\theta + \cos\theta\,\frac{d\beta_{n-2}}{d\theta}\right] + \ldots \\ &+ (e_0\alpha_{n-2} + e_1\alpha_{n-3} + \ldots + e_{n-2}) + (f_0\beta_{n-2} + f_1\beta_{n-3} + \ldots + f_{n-2}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2\beta_n}{d\theta^2} &+ n^2\beta_n + a'_0\left[(n-1)\alpha_{n-1}\cos\theta - \sin\theta\,\frac{d\alpha_{n-1}}{d\theta}\right] \\ &+ a'_1[(n-2)\alpha_{n-2}\cos\theta - \ldots] + \ldots, \end{aligned}$$

la même forme, seulement les coefficients sont accentués.

Les coefficients a_i, b_i, ..., e_i, f_i, a'_j, b'_j, ..., f'_j sont ceux des développements des fonctions a, b, ..., f, a', ..., f' sous la forme (4), c'est-à-dire

$$a = \sum_0^\infty r^n a_n(\theta), \qquad b = \sum_0^\infty r^n b_n(\theta), \qquad \ldots,$$

L'intégration des équations (E') introduit chaque fois pour les α_i et β_i des constantes arbitraires.

Il s'agit de montrer maintenant que la condition imposée à U, V de rendre F_1 et F_2 régulières, c'est-à-dire de la forme (4), détermine d'une manière univoque pour chaque α_i et β_i les arbitraires qui s'introduisent par intégration.

En effet, si l'on porte les expressions (6) de U et V dans (4') alors

$$F_1(x, y; \xi, \eta) \quad \text{et} \quad F_2(x, y; \xi, \eta)$$

peuvent être mis sous la forme

$$(7) \qquad F_1 = \sum_1^{\infty} Q_{n-2}(\theta)\, r^{n-2}, \qquad F_2 = \sum_1^{\infty} R_{n-2}(\theta)\, r^{n-2},$$

avec les expressions suivantes des Q et R :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_{n-2} = 2n\alpha_n &+ [(a\cos\theta + b\sin\theta)_0 \alpha_{n-1} \\ &\quad + (a\cos\theta + b\sin\theta)_1 \alpha_{n-2} + \ldots + (a\cos\theta + b\sin\theta)_{n-1}] \\ &+ [(c\cos\theta + d\sin\theta)_0 \beta_{n-1} \\ &\quad + (c\cos\theta + d\sin\theta)_1 \beta_{n-2} + \ldots + (c\cos\theta + d\sin\theta)_{n-1}], \\ R_{n-2} = 2n\beta_n &+ [(a'\cos\theta + b'\sin\theta)_0 \alpha_{n-1} \\ &\quad + (a'\cos\theta + b'\sin\theta)_1 \alpha_{n-2} + \ldots + (a'\cos\theta + b'\sin\theta)_{n-1}] \\ &+ [(c'\cos\theta + d'\sin\theta)_0 \beta_{n-1} \\ &\quad + (c'\cos\theta + d'\sin\theta)_1 \beta_{n-2} + \ldots + (c'\cos\theta + d'\sin\theta)_{n-1}], \end{aligned} \right.$$

en écrivant comme plus haut

$$\varphi(x, y) = \sum_0^{\infty} (\varphi)_n r^n.$$

Admettons que $\alpha_p(\theta)$ et $\beta_p(\theta)$ sont de la forme (5'), c'est-à-dire que

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \alpha_p(\theta) &= A_p^{(p)} \cos p\theta + B_p^{(p)} \sin p\theta + A_{p-2}^{(p)} \cos(p-2)\theta + B_{p-2}^{(p)} \sin(p-2)\theta + \ldots, \\ \beta_p(\theta) &= C_p^{(p)} \cos p\theta + D_p^{(p)} \sin p\theta + C_{p-2}^{(p)} \cos(p-2)\theta + D_{p-2}^{(p)} \sin(p-2)\theta + \ldots \end{aligned} \right.$$

on peut alors montrer que Q_{n-2} et R_{n-2} sont de la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_{n-2}(\theta) &= p_n^{(n-2)} \cos n\theta + q_n^{(n-2)} \sin n\theta + p_{n-2}^{(n-2)} \cos(n-2)\theta \\ &\quad + q_{n-2}^{(n-2)} \sin(n-2)\theta + \ldots, \\ R_{n-2}(\theta) &= r_n^{(n-2)} \cos n\theta + s_n^{(n-2)} \sin n\theta + r_{n-2}^{(n-2)} \cos(n-2)\theta \\ &\quad + s_{n-2}^{(n-2)} \sin(n-2)\theta + \ldots. \end{aligned} \right.$$

en tenant compte que les produits $\cos m\theta$, $\cos n\theta$, etc. peuvent se mettre sous la forme de somme.

On peut calculer les coefficients $p_i^k, \ldots, s_j^l$ si l'on écrit explicitement la forme des coefficients du système proposé.

On a déjà écrit

$$a = \sum_0^\infty a_n(\theta)\, r^n, \qquad b = \sum_0^\infty b_n(\theta)\, r^n, \qquad \ldots \qquad f' = \sum_0^\infty f'_n\, r^n.$$

Soit plus loin

$$(11)\quad \begin{cases} a_n(\theta) = a_{n,n}\cos n\theta + \bar{a}_{n,n}\sin n\theta + a_{n,n-2}\cos(n-2)\theta \\ \qquad\qquad + \bar{a}_{n,n-2}\sin(n-2)\theta + \ldots, \\ b_n(\theta) = b_{n,n}\cos n\theta + \bar{b}_{n,n}\sin n\theta + b_{n,n-2}\cos(n-2)\theta \\ \qquad\qquad + \bar{b}_{n,n-2}\sin(n-2)\theta + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on tient compte de (9) et (11) on déduit, pour les premiers coefficients de $Q_{n-2}(\theta)$ et $R_{n-2}(\theta)$, les expressions suivantes :

$$(12)\quad \begin{aligned} p_n^{(n-2)} &= 2n\,A_n^{n} + \frac{1}{2}\left[a_0 A_n^{(n-1)} - b_0 B_n^{n-1}\right] + \frac{1}{4}(a_{11} - \bar{b}_{11})\, A_{n-2}^{n-2} + \ldots, \\ q_n^{(n-2)} &= 2n\,B_n^{(n)} + \frac{1}{2}\left[b_0 A_n^{(n-1)} + a_0 B_n^{(n-1)}\right] + \frac{1}{4}(a_{11} + \bar{b}_{11})\, A_n^{(n-2)} \\ &\quad + \frac{1}{4}(a_{11} - \bar{b}_{11})\, B_{n-2}^{\prime n-2} + \ldots + \frac{1}{2}(\bar{a}_{n-1,n-1} + b_{n-1,n-1}), \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour r_n^{n-2} et s_n^{n-2}. Ce que l'on doit retenir est que à part les premiers termes qui sont $A_n^{(n)}$, $B_n^{(n)}$, $C_n^{(n)}$ et $D_n^{(n)}$ ces grandes lettres n'entrent dans q_n^{n-2}, s_n^{n-2} que sous la forme $A_i^{(k)}, \ldots, D_j^l$ un au moins des indices étant inférieur à n.

Mais on veut que F_1 et F_2 soient régulières. Donc (7) doit être de la forme (5) et Q_{n-2}, R_{n-2} de la forme (5'); donc on doit avoir pour tout $n \geqq 1$:

$$(13)\qquad p_n^{n-2} = q_n^{n-2} = r_n^{n-2} = s_n^{n-2} = 0.$$

Mais ces conditions déterminent A_n^n, $B_n^{(n)}$, C_n^n et D_n^n en supposant dans (12) les quantités correspondantes et d'indices inférieurs connues. Je dis que ces quatre quantités sont justement les quatre constantes arbitraires qu'introduit l'intégration des équations (E'). En effet admettons que cela soit vrai jusqu'à $n-2$ et que pour $p \leqq n-1$ $\alpha_p(\theta)$ et $\beta_p(\theta)$ aient les expressions (9). Montrons que cela est vrai aussi pour n. En ce cas on voit que les équations (E') sont de la forme

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\alpha_n}{d\theta^2} + n^2\alpha_n &= \sum_0^{n-2} (\mu_p \cos p\theta - \nu_p \sin p\theta), \\ \frac{d^2\beta_n}{d\theta^2} + n^2\beta_n &= \sum_0^{n-2} (\mu'_p \cos p\theta + \nu_p \sin p\theta), \end{aligned} \right.$$

qui, intégrées, donnent

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_n(\theta) &= A_n^{(n)} \cos n\theta + B_n^{n} \sin n\theta + \sum_0^{n-2} \left(\mu_p \frac{\cos p\theta}{n^2-p^2} + \nu_p \frac{\sin p\theta}{n^2-p^2} \right), \\ \beta_n(\theta) &= C_n^{(n)} \cos n\theta + B_n^{n} \sin n\theta + \sum_0^{n-2} \left(\mu'_p \frac{\cos p\theta}{n^2-p^2} + \nu'_p \frac{\sin p\theta}{n^2-p^2} \right), \end{aligned} \right.$$

ce qui montre que si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ sont de la forme (9), il en est de même de α_n et β_n et que $A_n^{(n)}, B_n^{(n)}, C_n^{(n)}, D_n^{(n)}$ sont justement les constantes d'intégration qu'on détermine par les conditions (13).

Mais α_1 et β_1 sont bien de cette forme, comme on voit immédiatement en regardant les premières équations (E'). Donc tous les α_n et β_n sont de la forme (9) et l'on voit en outre que la condition imposée à U et V de rendre régulières les expressions F_1 et F_2 suffit pour déterminer, au moins formellement, sans aucun arbitraire, ces deux fonctions.

3. Il reste à présent à démontrer la convergence des séries (6) qui donnent U et V. Pour éviter les longueurs de calcul, considérons le système particulier

$$(1) \qquad \Delta u + au + bv = 0, \qquad \Delta v + cu + dv = 0.$$

Dans ce cas on a des simplifications notables. Les équations (E') sont alors

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^2\alpha_n}{d\theta^2}+n^2\alpha_n &= -(a_0\alpha_{n-2}+a_1\alpha_{n-3}+\ldots+a_{n-2})\\ &\quad-(b_0\beta_{n-2}+b_0\beta_{n-3}+\ldots+b_{n-2}),\\ \frac{d^2\beta_n}{d\theta^2}+n^2\beta_n &= -(c_0\alpha_{n-2}+c_1\alpha_{n-3}+\ldots+c_{n-2})\\ &\quad-(d_0\beta_{n-2}+d_1\beta_{n-3}+\ldots+d_{n-2}).\end{aligned}\right.$$

Si l'on forme $p_n^{(n-2)}, \ldots, s_n^{(n-2)}$ on trouve que les constantes d'intégration doivent êtres nulles dans ce cas

$$B_n^{(n)}=\ldots=D_n^{(n)}=0.$$

de

$$\alpha_n(\theta)=\sum_0^{n-2}\left(\mu_p\frac{\cos p\theta}{n^2-p^2}+\nu_p\frac{\sin p\theta}{n^2-p^2}\right),\quad \beta_n(\theta)=\sum_0^{n-2}\left(\mu'_p\frac{\cos p\theta}{n^2-p^2}+\nu'_p\frac{\sin p\theta}{n^2-p^2}\right),$$

on en déduit

$$(3)\qquad |\alpha_n|<\frac{1}{4(n-1)}\Sigma(|\mu_p|+|\nu_p|),\qquad |\beta_n|<\frac{1}{4(n-1)}\Sigma(|\mu'_p|+|\nu'_p|).$$

Supposons que les séries

$$a=\sum_0^\infty a_n r^n,\qquad d=\sum_0^\infty r^n d_n$$

convergent pour $|x|$, $|y|<r'$, r' étant le plus petit de quatre nombres correspondant à ces séries. Ces séries convergent indépendamment de ξ, η pour $|\xi|$, $|\eta|<\rho$ si $r<R$ et $\rho+R<r'$. Si l'on désigne par A, B, C, D les bornes supérieures de $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$ dans (c) et $R'\leqq R$, alors on sait que

$$(4)\qquad |a_n|<\frac{A}{R'^n},\qquad \ldots\qquad |d_n|<\frac{D}{R'^n}.$$

Si l'on tient compte de (2), (3) et (4) on déduit facilement de proche en proche

$$|\alpha_2|<\frac{A}{2^2}+\frac{B}{2^2},\quad |\alpha_3|<\frac{1}{4.2}\left(\frac{A}{R'}+\frac{B}{R'}\right)<\frac{AR'}{4.2}\left(\frac{A}{2^2}+\frac{B}{R'^2}\right)+\frac{BR'}{4.2}\left(\frac{B}{2^2}+\frac{1}{R'^2}\right),$$

car on a augmenté le second membre

$$|\alpha_n| < \frac{A}{4(n-1)}\left[\frac{AR'}{4(n-3)}+\frac{1}{R'}\right]\left[\frac{AR'}{4(n-4)}+\frac{1}{R'}\right]\cdots\left(\frac{AR'}{4.2}+\frac{1}{R'}\right)\left(\frac{A}{2^2}+\frac{1}{R'^2}\right)$$
$$+\frac{B}{4(n-1)}\left[\frac{BR'}{4(n-3)}+\frac{1}{R'}\right]\cdots\left(\frac{B}{2^2}+\frac{1}{R'^2}\right),$$

ou si M désigne le plus grand des A. B, on a

$$(5)\qquad |\alpha_n| < \frac{M}{2(n-1)}\left[\frac{MR'}{4(n-3)}+\frac{1}{R'}\right]\left[\frac{MR'}{4(n-4)}+\frac{1}{R'}\right]\cdots$$
$$\times\left(\frac{MR'}{4.2}+\frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2}+\frac{1}{R'^2}\right),$$

et une expression analogue pour $|\beta_n|$.

Ces expressions montrent que les séries

$$1+\sum_1^\infty |\alpha_n| r^n, \qquad 1+\sum_1^\infty |\beta_n| r^n$$

convergent si $r < R'$ indépendamment de ξ et η.

Ainsi se trouve démontrée l'existence des fonctions U et V. Les fonctions U′ et V′ se déterminent à présent, sans aucune difficulté, à l'aide des équations

$$L(U', V') - F_1 = 0, \qquad L'(U', V') - F_2 = 0,$$

car les fonctions F_1 et F_2 sont régulières. Si l'on veut avoir les solutions fondamentales u et v qui sont nulles sur C on doit imposer à U′ et V′ de prendre le long de cette courbe les valeurs $(U\log r)_c$ et $(V\log r)_c$. Les solutions fondamentales (ou élémentaires) ainsi déterminées jouent le même rôle que la fonction de Green, c'est pour cela qu'on peut les appeler ainsi lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre. On verra dans le Chapitre suivant leur rôle dans le problème qui nous intéresse.

4. La démonstration antérieure, qui est la transposition exacte de celle donnée par M. Holmgren dans le cas d'une seule équation, a l'avantage d'être directe. Mais, à part les difficultés d'écriture qui la rendent presque inapplicable dans le cas de plusieurs équations et à

plus de deux variables, elle a le désavantage de supposer l'analyticité des coefficients qui entrent dans les équations considérées.

C'est pour ce motif qu'on doit recourir pour le cas général à la méthode de Eugenio E. Levi [1] qu'il a employée pour le cas d'une seule équation d'ordre $2n$ et du type elliptique, en cherchant ses solutions fondamentales, et en ramenant ce problème à une équation intégrale de Fredholm. Il montre qu'on peut aussi appliquer cette méthode aux systèmes linéaires du type elliptique, notamment aux systèmes de la forme

$$\Delta_{i1} u_1 + \Delta_{i2} u_2 + \ldots + \Delta_{in} u_n + \sum_{j} a^{(i)}_{jl} \frac{\partial^{j+l} u_i}{\partial x^j \partial y^l} + b_i = 0,$$

où

$$\Delta_{ik} \varphi = \lambda^{(ik)}_{k,0} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k} + \lambda^{(ik)}_{k-1,1} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^{k-1} \partial y} + \ldots + \lambda^{(ik)}_{0,k} \frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k},$$

et

$$j + l < k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme on le voit, ce système est beaucoup plus général que ceux que nous avons considérés.

Il se propose de trouver pour ce système des solutions qui dépendent d'un point paramètre $P(\xi, \eta)$ et sont finies et continues partout dans (C), sauf au point P, où leurs dérivées d'ordre $k - 1$ doivent avoir une singularité du premier ordre. Il montre comment ce problème peut se ramener à un système d'équations intégrales du type de ceux qui ont été étudiés par Fredholm. En appliquant cette méthode de E. E. Levi aux systèmes particuliers du second ordre que nous avons envisagés dans le Chapitre précédent, on pourrait apporter plus de précision, comme l'a fait M. Gevrey [2] au cas de l'équation unique à deux et plusieurs variables d'ordre 2 ou $2n$.

Comme ces considérations nous entraîneraient trop loin, je les laisse de côté pour le moment et nous admettrons, dans la suite, le seul fait qui nous intéresse pour notre but, qu'un système linéaire de la forme indiquée a des solutions fondamentales.

---

[1] *Voir* pages 307 et suivantes du Mémoire cité.

[2] *Voir* par exemple les Notes des *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. **171**, p. 610; t. **173**, p. 761 et 1445; t. **177**, p. 571.

CHAPITRE IV.

1. Si l'on a une équation de la forme

$$(1)\qquad L \equiv \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

on sait le rôle que joue son équation adjointe

$$(2)\qquad M \equiv \Delta v - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv = 0$$

et comment, avec une solution fondamentale (ou de Green) de cette équation, on peut exprimer la solution de (1) correspondant à une suite de valeurs données sur (C), par l'expression

$$(3)\qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_C u\frac{dG}{dn}ds - \frac{1}{2\pi}\int\int_D G(x, y ; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

et d'une manière analogue pour plus de deux variables.

On verra dans la suite que si l'on cherche à étendre pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles la notion de système adjoint, celle-ci comporte un grand arbitraire dans le choix possible, arbitraire qui se manifeste par l'introduction des paramètres dans le système adjoint.

Cette circonstance explique en quelque sorte pourquoi la notion de système adjoint n'a pas été précisée encore.

On trouve dans ce qui suit la notion d'adjonction traitée de deux manières différentes, qui présentent, à différents titres, de l'intérêt pour la théorie. La première, quoiqu'elle ne se prête pas à un algorithme simple dans le cas d'un nombre quelconque d'équations, peut présenter certain intérêt dans des cas particuliers. La seconde apparaît comme la généralisation naturelle de la méthode d'adjonction de Lagrange et Darboux.

2. La propriété qui lie les équations (1) et (2) du paragraphe précédent est que l'expression $E = vL - uM$ peut être mise sous la forme $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot$ C'est cette propriété qui va nous servir comme définition du système adjoint et la forme du système adjoint obtenu dépend du choix des expressions telles que E. Considérons d'abord un système de deux équations, que nous écrivons dans ce Chapitre sous la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} L_1 \equiv \Delta u + a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{11}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial v}{\partial y} - c_{11}u + c_{12}v = f_1, \\ L_2 \equiv \Delta v + a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{21}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{21}u + c_{22}v = f_2, \end{cases}$$

susceptible d'être appliquée à un nombre quelconque d'équations et de variables. Soit un autre système de la même forme :

$$(2)\quad \begin{cases} M_1 \equiv \Delta U + A_{11}\frac{\partial U}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial U}{\partial y} + B_{11}\frac{\partial V}{\partial x} - \ldots \\ M_2 \equiv \Delta V + A_{21}\frac{\partial U}{\partial x} - \ldots \end{cases}$$

avec des coefficients indéterminés pour le moment. On les déterminera en écrivant qu'une expression telle que E peut se mettre identiquement sous la forme indiquée plus haut. Dans le choix de E, la seule condition est que les quatre fonctions u, v, U et V soient représentées et cette condition est d'ailleurs suffisante. Par exemple l'expression

$$U L_1 - u M_1 + V L_2 - v M_2$$

peut se mettre sous la forme envisagée précédemment et engendrer le système $(M_1 M_2)$. Mais pour des raisons qu'on verra dans la suite nous prenons l'expression

$$(3)\quad E_2 \equiv U L_1 - u M_2 + V L_2 - u M_2 + U L_2 \quad v M_2$$

comme génératrice du système $(M_1 M_2)$. Il faut mettre E_1 sous la forme

$$(3')\quad E_2 \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$$

avec

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}F &= U\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial U}{\partial x}\\ &\quad + \alpha_{11}uU + \alpha_{12}uV + \alpha_{21}vU + \alpha_{22}vV,\\ G &= U\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial U}{\partial y} + V\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial V}{\partial y} + U\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial U}{\partial y}\\ &\quad + \beta_{11}uU + \beta_{12}uV + \beta_{21}vU + \beta_{22}vV,\end{aligned}\right.$$

les α et β comme les A, B, C étant aussi à déterminer. En faisant les calculs d'identification dans (3′), on trouve

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\alpha_{11} = a_{11} + a_{21}; &&\alpha_{12} = a_{11}; &&\alpha_{21} = b_{11} + b_{21}; &&\alpha_{22} = b_{11},\\ &\beta_{11} = a_{12} + a_{22}; &&\beta_{12} = a_{12}; &&\beta_{21} = b_{12} + b_{22}; &&\beta_{22} = b_{12}.\end{aligned}\right.$$

et, pour les coefficients du système adjoint,

$$A_{11} = -(b_{11} + b_{21});\qquad A_{12} = -(b_{12} + b_{22});\qquad B_{11} = -b_{11};\qquad B_{12} = -b_{12};$$

$$C_{11} = c_{11} + c_{22} - \frac{\partial(b_{11} + b_{21})}{\partial x} - \frac{\partial(b_{12} + b_{22})}{\partial y};\qquad C_{12} = c_{12} - \frac{\partial b_{11}}{\partial x} - \frac{\partial b_{12}}{\partial y};$$

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}A_{21} &= -(a_{11} + a_{21} - b_{11} - b_{21}),\\ A_{22} &= -(a_{12} + a_{22} - b_{12} - b_{22});\\ B_{21} &= -(a_{11} - b_{11}),\\ B_{22} &= -(a_{12} - b_{12});\\ C_{21} &= c_{11} + c_{21} - c_{12} - c_{22} - \frac{\partial(a_{11} + a_{21} - b_{11} - b_{21})}{\partial x} - \frac{\partial(a_{12} + a_{22} - b_{12} - b_{22})}{\partial y},\\ C_{22} &= c_{11} - c_{12} - \frac{\partial(a_{11} - b_{11})}{\partial x} - \frac{\partial(a_{12} - b_{12})}{\partial y};\end{aligned}\right.$$

ce qui donne le système adjoint $(M_1 M_2)$:

$$(I)\quad\left\{\begin{aligned}M_1 &\equiv \Delta U - \frac{\partial}{\partial x}[(b_{11} + b_{21})U] - \frac{\partial}{\partial y}[(b_{21} + b_{22})U] - \frac{\partial(b_{11}V)}{\partial x} - \frac{\partial(b_{21}V)}{\partial y}\\ &\quad + (c_{12} + c_{22})U - c_{12}V,\\ M_2 &\equiv \Delta V - \frac{\partial}{\partial x}[(a_{11} + a_{21} - b_{11} - b_{21})U] - \frac{\partial}{\partial y}[(a_{12} + a_{22} - b_{12} - b_{22})U]\\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x}[(a_{11} - b_{11})V] - \frac{\partial}{\partial y}[(a_{12} - b_{12})V]\\ &\quad + (c_{11} + c_{21} - c_{12} - c_{22})U + (c_{11} - c_{12})V,\end{aligned}\right.$$

et, comme on l'a déjà dit, entre les deux systèmes $(L_1 L_2)$ et $(M_1 M_2)$ on a la relation

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{UL}_1 - u\mathrm{M}_1 + \mathrm{VL}_1 - u\mathrm{M}_2 + \mathrm{UL}_2 - v\mathrm{M}_1 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}.$$

On peut remarquer que si de (6) on déduit inversement les coefficients du système ($\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2$) en fonctions de ceux du système ($\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$) on trouve qu'ils sont exactement de la même forme

$$a_{11} = -(\mathrm{B}_{11} + \mathrm{B}_{21}); \qquad a_{12} = -(\mathrm{B}_{12} + \mathrm{B}_{22}) \qquad \ldots,$$

ce qui montre la réciprocité qui existe entre les deux systèmes ($\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2$), ($\mathrm{M}_1 . \mathrm{M}_2$), ce qui pourrait se voir d'ailleurs sur l'expression même de E_1 qui, à part le signe, se change en elle-même par permutation de L et M et des petites lettres et grandes lettres. Donc réciproquement ($\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2$) est le système adjoint de ($\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$). Comme on a vu d'après la manière qui nous a permis de trouver le système ($\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$) ce système n'est pas le seul qu'on puisse adjoindre à ($\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2$). Sans chercher trop loin, si dans la forme E_1, génératrice du système (I), on fait la permutation circulaire des lettres et indices, on obtient une autre expression E_2, génératrice d'un nouveau système adjoint ($\mathrm{M}'_1\mathrm{M}'_2$). On a ainsi

$$(\mathrm{B})\qquad \mathrm{E}_2 \equiv \mathrm{U}\,\mathrm{L}_2 - v\mathrm{M}'_1 + \mathrm{V}\,\mathrm{L}_1 - u\mathrm{M}'_2 - \mathrm{V}\,\mathrm{L}_2 - v\mathrm{M}'_2 \equiv \frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}'}{\partial y},$$

F et G ayant des expressions pareilles à celles de F et G.

On peut écrire immédiatement le système ($\mathrm{M}'_1\mathrm{M}'_2$) en changeant dans le système ($\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$) le rôle de U et V, des coefficients *a* et *b* et de leurs premiers indices. Le second système adjoint ainsi obtenu est le suivant :

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}'_1 \equiv{}& \Delta\mathrm{U} + \frac{\partial}{\partial x}[(a_{21} + b_{21})\mathrm{U}] + \frac{\partial}{\partial y}[(a_{22} - b_{22})\mathrm{U}] + \frac{\partial}{\partial x}[(a_{11} + a_{21} - b_{11} - b_{21})\mathrm{V}] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}[(a_{12} + a_{22} - b_{12} - b_{22})\mathrm{V}] + (c_{22} - c_{21})\mathrm{U} + (c_{11} + c_{22} - c_{11} - c_{21})\mathrm{V}, \\ \mathrm{M}'_2 \equiv{}& \Delta\mathrm{V} - \frac{\partial(a_{21}\mathrm{U})}{\partial x} - \frac{\partial(a_{22}\mathrm{U})}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}[(a_{11} + a_{21})\mathrm{V}] - \frac{\partial}{\partial y}[(a_{12} + a_{22})\mathrm{V}] \\ &+ c_{21}\mathrm{U} + (c_{11} - c_{21})\mathrm{V}, \end{aligned}\right.$$

et de la même manière on obtient les expressions des coefficients α'_{ik} et β'_{ik} qui entrent dans F′ et G′.

3. Avant d'aller plus loin remarquons qu'on peut présenter cette question d'une manière à la fois plus condensée et beaucoup plus générale, car elle est applicable à un continu euclidien ou riemannien à un nombre quelconque de dimensions. Pour cela écrivons le système (1) sous la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} L_1 \equiv \Delta u_1 + \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_1 + \overrightarrow{b_1}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_2 + c_{11} u_1 + c_{12} u_2, \\ L_2 \equiv \Delta u_2 + \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_1 + \overrightarrow{b_2}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_2 + c_{21} u_1 + c_{22} u_2, \end{cases}$$

où $\Delta\varphi$ désigne à présent le paramètre différentiel du second ordre (ou de Beltrami si l'on veut) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$ et $\vec{a}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi$ représente le produit scalaire

$$\alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$$

du vecteur $\vec{\alpha}$ de composantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ par le vecteur $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi$ de composantes $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ (1).

Considérons alors le système

$$(2)\quad \begin{cases} M_1 \equiv \Delta v_1 - \operatorname{div}\left[v_1\left(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}\right)\right] - \operatorname{div}\left[v_2 \overrightarrow{b_1}\right] \\ \qquad + (c_{12} + c_{22}) v_1 + c_{12} v_2, \\ M_2 \equiv \Delta v_2 - \operatorname{div}\left[v_1\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{b_2}\right)\right] - \operatorname{div}\left[v_2\left(\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{b_1}\right)\right] \\ \qquad + (c_{11} + c_{21} - c_{12} - c_{22}) v_1 + (c_{11} - c_{12}) v_2, \end{cases}$$

$\operatorname{div}\varphi$ étant la divergence de la fonction φ, c'est-à-dire l'opérateur

$$\operatorname{div}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}.$$

Le résultat du calcul du paragraphe précédent peut alors s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} v_1 L_1 - u_1 M_1 + v_2 L_1 - u_1 M_2 + v_1 L_2 - u_2 M_1 \\ \quad = \operatorname{div}\left[v_1 \overrightarrow{\operatorname{grad}} u_1 - u_1 \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_1 + v_2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} u_1 - u_1 \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_2 + v_1 \overrightarrow{\operatorname{grad}} u_2\right. \\ \qquad \left. u_2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_1 - u_1 v_1\left(\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}\right) + u_1 v_2 \overrightarrow{a_1} - u_2 v_1\left(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}\right) + u_2 v_2 \overrightarrow{b_1}\right]. \end{cases}$$

(1) *Voir* pour ces définitions pour un continu riemannien à deux dimensions les *Leçons de Géométrie vectorielle* de M. G. Bouligand (Vuibert, 1924, p. 275-284).

Il est valable pour une variété quelconque et indépendant du nombre de dimensions. On peut écrire de la même manière le système M'_1, M_2

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
M_1 &\equiv \Delta v_1 + \operatorname{div}\left[v_1\left(\vec{a}_2 - \vec{b}_2\right)\right] - \operatorname{div}\left[v_2\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_1 - \vec{b}_2\right)\right] \\
&\qquad + (c_{22} - c_{21})v_2 + (c_{12} + c_{22} - c_{11} - c_{21})v_2 \\
M_2 &\equiv \Delta v_2 - \operatorname{div}\left[v_1 \vec{a}_2\right] - \operatorname{div}\left[v_2\left(\vec{a}_1 - \vec{a}_2\right)\right] + c_{11}v_1 - (c_{11} + c_{21})v_2.
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on a une relation tout à fait analogue à (3) qui se déduit par la permutation indiquée.

4. Considérons la relation (A) du n° 2, et supposons qu'on cherche les solutions du système (1) qui sont régulières à l'intérieur d'un contour fermé (c) et qui se réduisent le long de ce contour à des fonctions données $u(s)$ et $v(s)$. Pour cela on procède comme dans le cas d'une seule équation, donc il faut intégrer (A) dans D. On a

$$
(1)\quad \iint_D \left[U L_1 - u M_1 + V L_1 - u M_2 + U L_2 - v M_1\right] dx\, dy = \int_C F\, dy - G\, dx
$$

Supposons que u et v soient solutions de $L_1 = f_1$, $L_2 = f_2$ et U, V soient solutions fondamentales du système $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, c'est-à-dire de la forme

$$
U = P \log \frac{1}{r}, \quad Q = G_1(x, y, \xi, \eta), \quad V = R \log \frac{1}{r}, \quad S = G_2(x, y, \xi, \eta),
$$

avec

$$
r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad \text{et} \quad P(\xi, \eta) = R(\xi, \eta) = 1
$$

les fonctions P, Q, R, S étant régulières par rapport aux quatre arguments dans D, et s'annulant sur C.

Alors, la relation (1) peut s'écrire, en tenant compte des expressions de F et G

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\iint_D \left[G_1 f_1 + G_2 f_1 - G_1 f_2\right] dx\, dy \\
&\quad = \int_C \left(u \frac{dU}{dn} - U \frac{du}{dn} + u \frac{dV}{dn} - V \frac{du}{dn} + v \frac{dU}{dn} - U \frac{dv}{dn}\right) ds \\
&\qquad - \int_C \left[(\alpha_{11} \cos \omega_1 - \beta_{11} \cos \omega_2) u U \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (\alpha_{12} \cos \omega_1 + \ldots) u V + \ldots + (\ldots) v V\right] ds,
\end{aligned}
\right.
$$

$\frac{d\varphi}{dn}$ désignant, comme d'habitude, la dérivée suivant la normale intérieure à C et ω_1, ω_2 étant les angles de cette demi-normale avec les axes. Introduisons un petit cercle γ de centre (ξ, η) et de rayon ρ, et prenons comme contour dans le second membre de (2) $C' = C + \gamma$, et l'on prend ensuite $U = G_1$, $V = G_2$. On constate que les intégrales de la forme

$$\int_\gamma (\alpha_{11}\cos\omega_1 + \beta_{11}\cos\omega_2)\, ds \ldots \quad \text{et} \quad \int_\gamma G_1 \frac{du}{dn}\, ds \;\ldots$$

tendent vers zéro avec ρ, et il reste seulement les intégrales de la forme

$$\int_\gamma u \frac{dG_1}{du}\, ds = -2\pi u(\xi, \eta) \qquad \text{pour } \rho = 0.$$

On obtient de la sorte la relation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &2\pi[2u(\xi, \eta) + v(\xi, \eta)] \\ &\quad = \int_C \left[u\frac{dG_1}{dn} + u\frac{dG_2}{dn} + v\frac{dG_1}{dn}\right] ds - \int\int_D [f_1 G_1 + f_1 G_2 + f_2 G_1]\, dx\, dy. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait les mêmes opérations sur l'expression (β) en appelant $J_1(x, y; \xi, \eta)$, $J_2(x, y; \xi, \eta)$ les solutions fondamentales du système $M'_1 = M'_2 = 0$, on obtient comme plus haut

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &2\pi[u(\xi, \eta) + 2v(\xi, \eta)] \\ &\quad = \int_C \left[v\frac{dJ_1}{dn} + v\frac{dJ_2}{dn} + u\frac{dJ_2}{dn}\right] ds - \int\int_D [f_2 J_1 + f_2 J_2 + f_1 J_2]\, dx\, dy. \end{aligned}\right.$$

Ces deux relations (3) et (4) permettent de tirer $u(\xi, \eta)$ et $v(\xi, \eta)$ et de résoudre ainsi le problème de Dirichlet pour le système $(L_1 L_2)$. On en tire

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = {} & \frac{1}{3\pi}\int_C \left[u\left(\frac{dG_1}{dn} + \frac{dG_2}{dn}\right) + v\frac{dG_1}{dn}\right] \\ & \frac{1}{6\pi}\int_C \left[v\left(\frac{dJ_1}{dn} + \frac{dJ_2}{dn}\right) + u\frac{dJ_2}{dn}\right] \\ & \frac{1}{3\pi}\int\int_D [(G_1 + G_2)f_1 + G_1 f_2]\, dx\, dy \\ & + \frac{1}{6\pi}\int\int_D [(J_1 + J_2)f_2 + J_2 f_1]\, dx\, dy. \end{aligned}$$

et une expression analogue pour $v(\xi, \eta)$. On voit ainsi la raison pour laquelle on doit adjoindre au système $(L_1 L_2)$ deux systèmes $(M_1 M_2)$ et $(M'_1 M'_2)$. Ce même calcul s'applique au système considéré au n° 3, en remplaçant, pour $\nu > 2$, 2π par le nombre $(\nu - 2)\dfrac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}$. On peut obtenir ainsi $u(M)$ et $v(M)$ dans un domaine Ω connaissant leurs valeurs sur sa frontière Σ.

5. Avant de considérer le cas général faisons quelques applications de ce qu'on a déjà obtenu.

Soit d'abord l'équation classique à une seule fonction

$$(1) \qquad L_1 \equiv \Delta u + \vec{a}.\overrightarrow{\text{grad}}\, u + bu = f.$$

On peut la faire rentrer dans le cas envisagé en lui associant l'équation $L_2 \equiv \Delta v = 0$, et considérer le système dégénéré $(L_1 L_2)$. Donnons-nous u quelconque sur la frontière Σ de Ω, et v nul sur cette frontière. Il s'ensuit que v est nul partout dans Ω. Les deux systèmes adjoints écrits au n° 3 sont dans ce cas :

$$M_1 \equiv \Delta v_1 = 0; \qquad M_2 \equiv \Delta v_2 - \text{div}\left(v_1 \vec{a}\right) - \text{div}\left(v_2 \vec{a}\right) + b(v_1 - v_2) = 0$$

et

$$M'_1 \equiv \Delta v_1 - \text{div}\left(v_2 \vec{a}\right) - bv_2 = 0; \qquad M'_2 \equiv \Delta v_2 - \text{div}\left(v_2 \vec{a}\right) + bv_2 = 0.$$

Si l'on désigne par $g(M\,;\,P)$ la fonction classique de Green, c'est-à-dire la fonction harmonique nulle sur Σ, et ayant une singularité au point $M = P$ de l'ordre de $\frac{1}{MP^{\nu-2}}$, ou bien de $\log \frac{1}{MP}$ pour $\nu = 2$. Alors on a, en désignant par $G(M\,;\,P)$ la fonction de Green, solution de

$$M = \Delta v - \text{div}\left(v.\vec{a}\right) + bv = 0,$$

pour les quatre fonctions fondamentales

$$G_1 = g; \qquad G_2 = G - g; \qquad J_1 = g - G; \qquad J_2 = G,$$

et en tenant compte que G_2 et J_1 sont régulières même au point $M = P$, on retrouve la formule classique qui donne U solution de (1).

De même, comme autre exemple, si l'on considère l'équation du quatrième ordre et du type elliptique

$$\Delta^2 u + a\Delta u + bu = c. \tag{2}$$

qu'on peut écrire sous forme de système, et si l'on ferme les deux systèmes adjoints $(M_1 M_2)$, $(M'_1 M'_2)$, on trouve que les solutions fondamentales de ces systèmes s'expriment à l'aide de la solution fondamentale de l'équation

$$\Delta^2 v - \Delta(av) + bv = 0.$$

l'adjointe de (2). Enfin, on peut se demander s'il ne peut pas arriver que les deux systèmes adjoints $(M_1 M_2)$ et (M'_1, M_2) attachés à $(L_1 L_2)$ se réduisent à un seul. On voit facilement que cela ne peut arriver que pour le système

$$\left\{\begin{aligned} L_1 &\equiv \Delta u_1 + \vec{a}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_1 + \vec{b}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_2 + cu_1 + du_2 = f_1, \\ L_2 &\equiv \Delta u_2 - \vec{b}.\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_1 - \left(\overrightarrow{a - b}\right).\overrightarrow{\operatorname{grad}} u_2 - du_1 + (c - d)u_2 = f_2, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

système qu'on peut appeler *mono-adjoint*, car, pour lui, les deux systèmes adjoints se réduisent à un seul, à savoir :

$$\left\{\begin{aligned} M_1 &\equiv \Delta v_1 - \operatorname{div}\left(v_1 \vec{a}\right) - \operatorname{div}\left(v_2 \vec{b}\right) + cv_1 + dv_2, \\ M_2 &\equiv \Delta v_2 + \operatorname{div}\left(v_1 \vec{b}\right) - \operatorname{div}\left[v_2\left(\overrightarrow{a - b}\right)\right] - dv_1 + (c - d)v_2. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Pour le système (3), on n'a par conséquent besoin que de deux fonctions de Green, les solutions fondamentales du système (4), ce qui est remarquable. L'un des avantages de la méthode d'adjonction adoptée est de mettre en évidence cette classe d'équations. On cherchera plus loin à voir s'il est possible que le système (3) coïncide avec (4) et l'on verra que cela ne peut arriver que si $\vec{a} \equiv 0$, $\vec{b} \equiv 0$.

6. Si l'on considère le cas général d'un nombre quelconque d'équations, on voit qu'en restant dans le même ordre d'idées, l'adjonction

peut se faire de bien des façons. Soit le système suivant

$$(1)\qquad L_i \equiv \Delta u_i + \sum_{j=1}^{i} \left[a^j_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + a^j_{i2} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \ldots + a^j_{in} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right] + \sum_{l=1}^{n} b_{ik} u_k = f_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Pour adjoindre à ce système (L_i) un autre système de la même forme $(M_i^{(1)})$, on doit former une expression génératrice analogue à E_1 et E_2 du cas $n = 2$, composée de termes de la forme

$$v_i L_j - u_k M_j^{1}$$

donc, elle est de la forme

$$(\alpha)\qquad E = \sum_{i, k} (v_i L_k - u_k M_i^{1}).$$

et la seule condition requise est que toutes les fonctions u_i, v_k soient représentées; donc, il faut et il suffit, pour avoir un système adjoint $M_i^{(1)}$, que, dans (α), les indices v et k prennent au moins une fois toutes les valeurs de 1 à n. On voit ainsi le degré de généralité que comporte la question, sans parler du fait qu'on peut introduire dans (α) des paramètres arbitraires λ_{ik} affectant chaque terme de la somme. La manière la plus simple d'y arriver serait la suivante : on forme une expression E symétrique telle que

$$E = \sum_{1}^{n} (v_i L_i - u_i M_i^{1})$$

qu'on asymétrise en lui ajoutant un terme en plus, soit donc l'expression

$$E_1 = E - v_j L_k - u_k M_j^{1}$$

En mettant cette expression sous la forme div w, on a ainsi, comme dans le cas $n = 2$, un premier système adjoint (M_i^{1}). Si l'on connaît les solutions fondamentales de ce système, en suivant la même marche que plus haut, on obtient une relation de la forme

$$(2)\qquad k_v [u_1(M) + u_2(M) + \ldots + u_{k-1}(M) + 2 u_k(M) + u k_n(M) + \ldots + u_n(M)]$$

= (termes connus en fonctions des donnees sur le contour et les solutions fondamentales)

En faisant les permutations circulaires des indices dans E_2, on obtient $n-1$ autres formes génératrices d'autant de systèmes adjoints $(M_1^{i}, M_2^{i}, \ldots, M_n^{i})$ $(i=2, 3, \ldots, 4)$, et l'on a ainsi $n-1$ relations analogues à (2), qui permettent de tirer les $u_i(M)$.

Il nous a fallu pour cela n^2 fonctions fondamentales, solutions de n systèmes adjoints $(M_i^{(k)})$ au système (L_i).

Pour des systèmes particuliers, comme le système mono-adjoint, ce nombre peut se réduire à $n(n-p+1)$, si p des systèmes adjoints coïncident.

Comme on l'a dit plus haut, ce n'est pas la seule manière de résoudre le problème, mais seulement une des plus simples, qui peut présenter quelques avantages dans certains cas particuliers.

Nous allons donner, dans la suite, une méthode d'adjonction uniforme et tout à fait générale, et qui est en outre la plus simple possible.

7. Soit pour cela le système (1) du numéro précédent, ou encore, pour plus de généralité, le système

$$(1)\qquad L_i \equiv \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_i\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{a}_{ik}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_k + b_{ik}\, u_k\right) = f_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

qui se réduit au précédent dans le cas d'un corps euclidien à ν dimensions. Comme on l'a déjà dit au n° 3 dans le cas de deux équations, il y a avantage à écrire les équations du type elliptique sous cette forme, non seulement à cause des simplifications de calcul, mais en outre elles acquièrent par cela même un degré de généralité beaucoup plus grand, car elles sont applicables indifféremment à un espace euclidien ou riemannien.

Prenons comme forme génératrice l'expression suivante :

$$(2)\qquad E = \sum_{1}^{n} \lambda_i (v_i L_i - u_i M_i),$$

les λ_i étant des paramètres arbitraires tous différents de zéro, pour que E soit complète.

En faisant les mêmes calculs qu'au n° 2 (on peut faire le calcul pour simplifier si l'on veut dans le cas euclidien avec $\nu = 2$ et traduire le résultat vectoriellement, et il se trouve par cela même valable dans les conditions les plus générales), on trouve que le système adjoint à (1), obtenu de cette manière, est

$$(3) \qquad M_i \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad} v_i) + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) \operatorname{div}\left(v_k . \overrightarrow{a_{ki}}\right) + \frac{\lambda_k}{\lambda_i} b_{ki} u_k \right]$$

et l'on voit qu'entre (1) et (3) on a la relation

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i L_i - u_i M_i) \\
&\quad = \sum_{1}^{n} \lambda_i \operatorname{div}\left(v_i \overrightarrow{\operatorname{grad}} u_i - u_i \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_i\right) \\
&\quad\quad + \sum_i \sum_k^n \left[\lambda_i v_i \left(\overrightarrow{a_{ik}} . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u_k\right) + \lambda_k u_i \operatorname{div}\left(v_k . \overrightarrow{a_{ik}}\right)\right] \\
&\quad\quad + \sum_i \sum_k \left[\lambda_i b_{ik} v_i u_k - \lambda_k b_{ki} u_i v_k\right];
\end{aligned}$$

mais comme la dernière somme est nulle, et que par le même changement des indices on a

$$\sum_i \sum_k \lambda_k u_i \operatorname{div}\left(v_k . \overrightarrow{a_{ik}}\right) = \sum_i \sum_k \lambda_i u_k \operatorname{div}\left(v_i \overrightarrow{a_{ki}}\right),$$

et comme on sait que

$$\rho \operatorname{div} \overrightarrow{V} + \overrightarrow{V} . \operatorname{grad} \rho = \operatorname{div}\left(\rho \overrightarrow{V}\right),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
(4) \qquad &\sum \lambda_i (v_i L_i - u_i M_i) \\
&= \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(v_i \overrightarrow{\operatorname{grad}} u_i - u_i \overrightarrow{\operatorname{grad}} v_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \left(u_k v_i \overrightarrow{a_{ik}}\right) \right].
\end{aligned}$$

C'est cette relation qui va nous permettre de résoudre le problème de Dirichlet, ainsi que d'autres problèmes aux limites pour le système (1). Avant d'aborder cette question, il n'est peut-être pas inutile de dire que cette manière d'adjonction, que nous appelons *adjonction* *paramétrique*, le système M_i de (3) étant l'adjoint paramétrique de (1), est susceptible d'être appliquée dans le cas des systèmes de nature quelconque et non seulement elliptique, l'expression E étant celle qui engendre le système M_i.

La règle de formation est toujours celle de plus haut. Elle s'applique même à des systèmes dont l'ordre est supérieur à deux, mais qui sont linéaires. C'est toujours par ce même procédé que l'on arrive à leur adjoindre un autre système de la même forme et qui contient des paramètres.

8. Nous avons dit que la relation (4) permet de résoudre, pour le système (1) du paragraphe précédent, les problèmes aux limites. Soit en particulier le problème de Dirichlet pour ce système. Supposons que, dans l'espace euclidien E_ν, on se donne un domaine fermé Ω de frontière Σ, et qu'on se propose de trouver les solutions de (1) régulières dans Ω et qui se réduisent sur Σ à des fonctions données. Pour cela on procède avec (4) comme dans le cas classique d'une seule équation, on l'intègre dans Ω, en entourant le point M de Ω d'une petite hypersphère, que l'on fait ensuite tendre vers zéro. En admettant que l'on connaît les solutions fondamentales du système $M_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, soit

$$G_i(M;\, P,\, \lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n),$$

car elles dépendent des paramètres λ_k, on peut alors trouver les solutions du système $L_i = f_i$. En effet, on trouve ainsi

$$(1)\qquad k_\nu \sum_1^n \lambda_i u_i(M) = \sum_1^n \lambda_i \int_\Sigma u_i(P) \frac{dG_i}{dn}\, d\sigma_P - \sum_1^n \lambda_i \int_\Omega G_i(M;\, P) f(P)\, d\omega_P,$$

où

$$k_2 = 2\pi \qquad \text{et} \qquad k_\nu = (\nu - 2)\frac{\gamma\cdot\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} \qquad \text{pour } \nu > 2.$$

Cette relation (1) nous permet d'avoir la solution du problème considéré. Donnons pour cela aux λ_i une suite de n valeurs λ_i^k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dont aucune n'est nulle et telles que le déterminant $\|\lambda_i^k\| \neq 0$. Alors on obtient ainsi n relations analogues à (1), soit

$$(1')\qquad h_j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j u_i(M) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j\int_\Sigma u_i(P)\frac{dG_{ij}}{dn}\,d\sigma_P - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j\int_\Omega G_{ij} f_i\,d\omega_P \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

et où l'on a désigné par

$$G_{ij} = G_i(M, P; \lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_n^j)$$

les solutions fondamentales du système adjoint correspondant aux paramètres λ_k^j ($k=1, 2, \ldots, n$). Ces n équations algébriques et linéaires en $u_i(M)$ permettent d'obtenir ces fonctions et d'avoir dans la suite la solution du problème de Dirichlet pour le système $L_i = f_i$ et le domaine Ω.

Mais pour que ceci soit valable, il faut montrer que les fonctions ainsi obtenues ne dépendent pas du choix des valeurs λ_i^k pour les n paramètres. Montrons cela dans le cas $n = 2$, la marche à suivre étant la même dans le cas général.

Soit pour cela le système

$$(2)\qquad \begin{cases} L_1 \equiv \Delta u_1 + \vec{a}_1.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_1 + \vec{b}_1.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_2 + c_{11}u_1 + c_{12}u_2 = f_1, \\ L_2 \equiv \Delta u_2 + \vec{a}_2.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_1 + \vec{b}_2.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u_2 + c_{21}u_1 + c_{22}u_2 = f_2. \end{cases}$$

et prenant $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = \lambda$ on a le système adjoint paramétrique suivant :

$$(3)\qquad \begin{cases} M_1 \equiv \Delta v_1 - \mathrm{div}(v_1\vec{a}_1) - \lambda\,\mathrm{div}(v_2\vec{a}_2) + c_{11}v_1 + \lambda c_{21}v_2 = 0, \\ M_2 \equiv \Delta v_2 - \dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{div}(v_1\vec{b}_1) - \mathrm{div}(v_2\vec{b}_2) + \dfrac{1}{\lambda}c_{12}v_1 + c_{22}v_2 = 0 \end{cases}$$

et en désignant par

$$G = G(M, P/\lambda) \qquad \text{et} \qquad H = H(M; P/\lambda)$$

les solutions fondamentales de ce système, on a

$$(4)\qquad k_P[u_1(M) + \lambda u_2(M)] = \int_\Sigma u_1\frac{dG}{dn}\,d\sigma_P + \lambda\int_\Sigma u_2\frac{dH}{dn}\,d\sigma_P - \int_\Omega G f_1(P)\,d\omega_P - \int_\Omega H f_2(P)\,d\omega_P.$$

Donnons à λ deux valeurs particulières soit

$$\lambda = \lambda_1,\ \lambda = \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

et soit

$$G(M\,;P/\lambda_1) = G_1,\quad H(M\,;P/\lambda_1) = H_1$$

et de même G_2 et H_2. On tire alors de (4) $u_1(M)$ et $u_2(M)$. On a par exemple :

$$(5)\qquad u_2(M) = \frac{1}{k_\nu(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\int_\Sigma u_1\left(\frac{dG_1}{dn}-\frac{dG_2}{dn}\right)d\sigma + \int_\Sigma u_2\left(\lambda_1\frac{dH_1}{dn}-\lambda_2\frac{dH_2}{dn}\right)ds\right]$$
$$-\int_\Omega (G_1-G_2)f_1\,d\omega_P - \int_\Omega(\lambda_1 H_1-\lambda_2 H_2)f_2\,d\omega_P.$$

Montrons que $u_2(M)$ ne dépend pas de λ_1 et λ_2. Pour cela on peut observer que $G_1 - G_2$ et $\lambda_1 H_1 - \lambda_2 H_2$ sont solutions nulles sur Σ du système (3) avec $\lambda = 1$, c'est-à-dire que ces fonctions sont solutions d'un système qui ne contient plus de paramètre. En outre $G_1 - G_2$ est partout régulière même au point $P = M$ car le coefficient du $\log r$ ou $\frac{1}{r^{\nu-2}}$ est nul dans ce point; $\lambda_1 H_1 - \lambda_2 H_2$ est nul sur Σ et a une singularité au point $P = M$ ou il devient défini comme $\frac{1}{r^{\nu-2}}$ ou bien $\log\frac{1}{r}$ pour $\nu = 2$ le coefficient de ce terme étant $\lambda_1 - \lambda_2$ dans ce point. Il en résulte que les fonctions $\frac{G_1-G_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ et $\frac{\lambda_1 H_1-\lambda_2 H_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ sont solutions du système (3) dans lequel $\lambda = 1$, nulles sur Σ et se comportent au point $P = M$ de la manière indiquée, seulement le coefficient du terme $\frac{1}{MP^{\nu-2}}$ $\left(\text{ou} \log\frac{1}{MP}\right)$ est en ce point égal à 0 pour la première et égal à 1 pour la dernière. Il en résulte par conséquent que ces fonctions sont indépendantes de λ_1 et λ_2 car ni le système qu'elles vérifient ni les données ne dépendent plus de ces nombres. On peut donc écrire :

$$(6)\qquad \frac{G_1-G_2}{\lambda_1-\lambda_2} = F_1(M\,;P),\qquad \frac{\lambda_1 H_1-\lambda_2 H_2}{\lambda_1-\lambda_2} = F_2(M\,;P).$$

ce qui rend évident le fait que $u_2(M)$ est indépendant du choix des valeurs λ_1, λ_2. De ces expressions (6) on déduit immédiatement que G et H ont la forme suivante par rapport à λ :

$$G(M; P/\lambda) = \lambda F_1 + K_2; \qquad H(M, P/\lambda) = \frac{F_2}{\lambda} + K_2.$$

Si l'on tient compte de ces expressions on voit tout de suite que $u_1(M)$ est aussi indépendant de λ_1, λ_2.

Dans le cas où n est quelconque la démonstration peut se faire de la même manière. On met ainsi en évidence certaines combinaisons des solutions du système adjoint paramétrique qui sont invariantes par rapport aux paramètres.

En ce qui concerne les autres problèmes aux limites pour le système $L_i = f_i$, c'est toujours la relation (4) du n° 7 qui permet de les résoudre. Mais comme nous n'avons pas encore envisagé les conditions de leur existence, nous les laissons de côté pour le moment. On peut seulement remarquer qu'on ne peut pas se donner sur la frontière une relation de la forme

$$\sum_i^n \left(h_i u_i + k_i \frac{du_i}{dn} \right) = l(M),$$

car cela équivaudrait à $2n - 1$ relations auxquels doivent satisfaire V_i et $\frac{dV_i}{dn}$ sur Σ, ce qui n'est pas toujours possible.

Au contraire si l'on se donne sur Σ les n relations suivantes auquelles doivent satisfaire les u_i et $\frac{du_i}{dn}$, à savoir :

$$h_i u_i + k_i \frac{du_i}{dn} = l_i \qquad (i = 1 \ldots n),$$

on trouve que les solutions fondamentales doivent satisfaire sur Σ à des relations de la forme

$$\frac{dv_i}{dn} = \alpha_{i1} v_1 + \alpha_{i2} v_2 + \ldots + \alpha_{in} v_n.$$

Enfin on peut faire la remarque suivante : dans la première méthode que nous avons employée pour résoudre le problème de Dirichlet, nous avons fait adjoindre au système donné n autres systèmes et avec les solutions fondamentales de ces systèmes, c'est-à-dire n^2 fonctions analogues à la fonction de Green, on a trouvé la solution de ce problème. Dans la seconde méthode nous avons fait correspondre au système L_i un seul système adjoint, mais qui contient $n-1$ paramètres effectifs et avec les solutions fondamentales de ce système on a trouvé les fonctions u_i. Il paraîtrait au premier abord qu'il y a une différence fondamentale entre ces deux manières de résoudre le même problème. Il n'en est pas ainsi, car on a vu que la résolution du système adjoint paramétrique revient à la résolution de n systèmes particuliers correspondant aux valeurs numériques λ_i^k des paramètres. Néanmoins la seconde manière d'envisager l'adjonction, en dehors de son degré de généralité et de simplicité, peut avoir des avantages pratiques sur la première.

9. On connaît la relation d'échange des arguments entre la fonction de Green G(M;P) solution de l'adjointe de l'équation

$$\Delta u + \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u + bu = c \tag{1}$$

et H(M;P) la fonction de Green de (1)

$$G(M;P) = H(P;M)$$

On peut étendre cette relation aux systèmes que nous avons considérés. Soient d'abord le système $(L_1 L_2)$ du paragraphe 3 de ce Chapitre et ses deux systèmes adjoints $(M_1 M_2)$ et $(M'_1 M'_2)$. En appelant

$$H_1(M;P),\quad H_2(M;P),\quad G_1(M;P),\quad G_2(M;P);\quad J_1(M;P),\quad J_2(M;P)$$

les solutions fondamentales de ce système, on trouve de la même manière que dans le cas de l'équation (1) les relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} 2H_1(M;P) - H_2(M;P) &= 2G_1(P;M) - G_2(P;M), \\ H_1(M;P) + 2H_2(M;P) &= J_1(P;M) + 2J_2(P;M). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Dans le cas du système mono-adjoint que nous avons défini au paragraphe 5, ces deux relations se réduisent à

$$H_1(M:P) = G_1(P:M); \qquad H_2(M:P) = G_2(P:M) \quad (^1).$$

Dans le cas du système adjoint paramétrique la relation d'échange des arguments, qu'on obtient comme dans le cas classique, est

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [G_i(M:P/\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n) - H_i(P:M)] = 0.$$

De cette relation, en donnant aux λ_i les valeurs particulières λ_i^k, on peut déduire n analogues qui permettent de tirer les $H_i(P:M)$ en connaissant les G_{ik}. On peut remarquer que dans l'expression de H_i entrent justement les combinaissons de G_{ik} qui sont indépendantes du choix des valeurs de λ_i^k.

CHAPITRE V.

1. Le rôle que joue l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda A(x, y) u = 0$$

est très connu dans l'étude des membranes vibrantes et cette étude a conduit à la notion des valeurs caractéristiques avant la théorie de Fredholm des équations intégrales.

En effet, c'est Schwarz qui, le premier, a montré l'existence d'une valeur λ_0 de λ pour laquelle l'équation (1) admet une solution nulle sur un contour (C) et qui n'est pas identiquement nulle. M. Picard a démontré peu après que cette valeur λ_0 correspondait à un pôle et a établi l'existence de la seconde valeur caractéristique. C'est Poincaré (²) qui, le premier, a montré que la solution de l'équation (1) qui prend des

(¹) Dans une Note parue dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (de Paris), t. 188, p. 373, j'ai considéré pour ce système les variations des fonctions G_1, G_2 pour une déformation du contour, en généralisant une relation fonctionnelle bien connue, due à M. Hadamard.

(²) Mémoire cité, p. 7.

valeurs données sur un contour est une fonction méromorphe de λ [1]. Ces conclusions sont immédiates si l'on ramène (1) à l'équation intégrale :

$$(2)\qquad u(x, y) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)A(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\xi d\eta = 0.$$

Ceci rappelé je vais montrer une manière de généraliser ce problème posé par la physique mathématique.

Nous avons déjà considéré (Chap. II) des équations de la forme

$$(3)\qquad \Delta^m u + p_1 \Delta^{(m-1)} u + \ldots + p_m u = f(M)$$

et l'on a montré en ramenant (3) à un système de m équations du type étudié qu'il existe, pour un domaine Ω suffisamment petit, une solution et une seule, telle que u, Δu, ..., $\Delta^{(m-1)} u$ se réduisent à des valeurs données sur la frontière de Ω et que l'équation homogène n'admet pour les données nulles sur le contour d'autre solution que $u \equiv 0$.

2. Considérons, pour simplier, l'équation

$$(1)\qquad \Delta^m u + \lambda A(M).u = 0,$$

d'ordre $2m$ et à n variables et proposons-nous de voir s'il n'existe pas des valeurs de λ pour lesquelles cette équation ait des solutions différentes de zéro, lorsqu'on se donne u, Δu, ..., $\Delta^{(m-1)} U$ nuls sur la frontière de Ω.

Pour cela formons l'équation intégrale correspondant à ce problème, après avoir écrit (1) sous forme de système.

Soit pour simplifier $m = 3$. Alors l'équation

$$\Delta^3 u + \lambda A(M) u = 0$$

peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(2)\qquad \Delta u = v; \qquad \Delta v = w; \qquad \Delta w + \lambda A u = 0.$$

---

[1] Pour plus de détails, voir par exemple S. Sanielevici, *Annales de l'École Normale*, 1909, p. 60 et suiv.).

Désignons par

$$\Gamma(M, P) = -\frac{1}{2\pi} G(M, P), \qquad \text{pour } n = 2$$

et

$$\Gamma(M, P) = \frac{1}{(n-2)\lambda_n} G(M, P), \qquad \text{pour } n > 2,$$

$G(M, P)$ étant la fonction classique de Green, relative au domaine Ω et au point P. On déduit alors de (2)

$$(3) \quad \begin{cases} u(M) = \int_\Omega \Gamma(M, P) V(P) d\omega_P; \\ v(M) = \int_\Omega \Gamma(M, P) W(P) d\omega_P; \\ w(M) = -\lambda \int_\Omega \Gamma(M, P) A(P) u(P) d\omega_P. \end{cases}$$

Si l'on élimine de (3) $v(M)$ et $w(M)$, on obtient que $u(M)$, qui satisfait aux conditions initiales imposées, est solution de l'équation intégrale

$$(4) \qquad u(M) + \lambda \int_\Omega \Gamma^{(3)}(M, P) A(P) u(P) d\omega_P = 0,$$

$\Gamma^{(3)}(M, P)$ étant le troisième itéré de $\Gamma(M, P)$. Pour l'équation (1) on arrive de la même manière pour la solution satisfaisant aux conditions imposées à la frontière de Ω à l'équation

$$(5) \qquad u(M) + \lambda \int_\Omega \Gamma^{(m)}(M, P) A(P) u(P) d\omega_P = 0,$$

$\Gamma^{(m)}(M, P)$ étant le $m^{\text{ième}}$ itéré de $\Gamma(M, P)$.

Maintenant, de (5), il est facile de déduire l'existence d'une infinité de valeurs caractéristiques pour λ. En effet, le noyau de cette équation est un noyau polaire, car dans

$$K(M, P) = A(P) \Gamma^{(m)}(M, P),$$

$\Gamma^{(m)}(M, P)$ est symétrique, $\Gamma(M, P)$ l'étant. $\Gamma^{(m)}(M, P)$ a encore des singularités (ce qui n'arrive pas pour m suffisamment grand), on peut itérer un nombre suffisant de fois pour arriver à une équation équivalente à (5), mais avec un noyau sans singularités en $M = P$. De plus $\Gamma^{(m)}(M, P)$ est positif dans Ω, car $\Gamma(M, P)$ l'est comme étant fonction harmonique nulle sur Ω et infinie au point $M = P$. On peut par conséquent en déduire que l'équation (5) admet une infinité de valeurs caractéristiques, toutes réelles, et que les pôles de la résolvante sont simples.

Lorsque $A(P)$ est positif dans Ω, alors $K(M, P)$ est un noyau de Schmidt et toutes les valeurs caractéristiques sont positives. Donc l'équation (1) admet pour une suite infinie de valeurs de λ des solutions non identiquement nulles dans Ω, nulles ainsi que leurs laplaciens de $m - 1$ premiers ordres à la surface de Ω. On peut traiter de la même manière d'autres problèmes aux limites pour cette même équation (1) et même pour des équations plus générales. Par exemple on aurait pu considérer l'équation

$$\mathcal{D}^m u + \lambda A(M) u = 0, \tag{6}$$

$\mathcal{D}u$ étant un symbole différentiel du second ordre et du type elliptique, et

$$\mathcal{D}^m u = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{m-1} u),$$

en considérant les coefficients comme constants dans ce passage de $\mathcal{D}^{(m-1)}$ à $\mathcal{D}^{(m)}$. On peut réduire de la même manière cette équation à une équation intégrale, $\Gamma(M, P)$ désignant cette fois-ci la fonction de Green, solution de l'équation $\mathcal{D}v = 0$.

Nous n'insistons pas plus longtemps sur ces questions qui se rattachent si aisément à la théorie des équations intégrales. Notre but est seulement d'indiquer les cas qui échappent aux formules de résolution et à la méthode générale exposées dans le Chapitre précédent.

3. Avant de terminer montrons comment on peut traiter le problème de tout à l'heure si l'on ne veut pas faire appel à la théorie des équations intégrales comme on l'a fait pour l'équation

$$\Delta u + \lambda A u = 0.$$

On peut établir de proche en proche les propositions précédentes. Soient, pour simplifier, le cas de deux variables et l'équation

$$\Delta^2 u - \lambda A(x, y) u = 0. \tag{1}$$

Montrons que les valeurs caractéristiques de λ sont réelles. Écrivons (1) sous la forme d'un système

$$\Delta u = v, \qquad \Delta v = \lambda A u. \tag{2}$$

et soient $\lambda = \alpha + i\beta$ une valeur caractéristique et $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$ les solutions correspondantes.

Alors de (2) on déduit :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = v_1, & \Delta u_2 = v_2 ; \\ \Delta v_1 = A(\alpha u_1 - \beta u_2); & \Delta v_2 = A(\beta u_1 + \alpha u_2), \end{cases} \tag{3}$$

et de ce système on tire facilement

$$(v_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta v_1) - (v_2 \Delta u_1 - u_1 \Delta v_2) = A\beta(u_1^2 + u_2^2), \tag{4}$$

$$(u_1 \Delta v_1 - v_1 \Delta u_1) + (u_2 \Delta v_2 - v_2 \Delta u_2) = A\alpha(u_1^2 + u_2^2) - (v_1^2 + v_2^2). \tag{5}$$

Si l'on intègre dans D ces deux relations et si l'on applique la formule de Green au premier membre, on trouve

$$\int_C \left[u_2 \frac{dv_1}{dn} - v_1 \frac{du_2}{dn} + v_2 \frac{du_1}{dn} - u_1 \frac{dv_2}{dn} \right] ds = \beta \int\int_D A(u_1^2 + u_2^2)\,dx\,dy,$$

$$\int_C \left[v_1 \frac{du_1}{dn} - u_1 \frac{dv_1}{dn} + v_2 \frac{du_2}{dn} - u_2 \frac{dv_2}{dn} \right] ds$$

$$= \alpha \int\int_D A(u_1^2 + u_2^2)\,dx\,dy - \int\int_D (v_1^2 + v_2^2)\,dx\,dy.$$

et comme u_1, u_2, v_1, v_2 sont nuls sur C, il en résulte

$$\beta \int\int_D A(u_1^2 + u_2^2)\,dx\,dy = 0$$

et

$$\alpha \int\int_D A(u_1^2 + u_2^2)\,dx\,dy = \int\int_D (v_1^2 + v_2^2)\,dx\,dy,$$

et comme

$$\int\int_D A(u_1^2 + u_2^2)\,dx\,dy \neq 0,$$

on en déduit $\beta = 0$, et si A a un signe constant dans D, α a le même signe. De même pour le cas $m = 3$:

$$\Delta^3 u - \lambda A(x, y) u = 0. \tag{6}$$

On écrit, comme plus haut, (6) sous forme de système et soit $\lambda = \alpha$ si β a une valeur caractéristique. Si l'on forme les combinaisons

$$(u_2 \Delta w_1 - w_1 \Delta u_2) + (w_2 \Delta u_1 - u_1 \Delta w_2) - (v_2 \Delta v_1 - v_1 \Delta v_2) = \beta A (u_1^2 + u_2^2)$$

et

$$(u_1 \Delta w_1 - w_1 \Delta u_1) + (u_2 \Delta w_2 - w_2 \Delta u_2) + (v_1 \Delta v_1 + v_2 \Delta v_2) = - A \alpha (u_1^2 + u_2^2),$$

et si l'on intègre dans D en tenant compte que u_1, u_2, v_1, v_2 w_1 et w_2 sont nuls sur C, on déduit alors

$$\beta \int\int_D A (u_1^2 + u_2^2) \, dx \, dy = 0,$$

et

$$\alpha \int\int_D A (u_1^2 + u_2^2) \, dx \, dy = \int\int \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy,$$

ce qui entraîne $\beta \equiv 0$, sauf si $v =$ const., et comme il est nul sur C, $v = 0$, et par conséquent $u \equiv 0$, $w \equiv 0$; mais cela est contre l'hypothèse, car λ est une valeur caractéristique. Le raisonnement peut se poursuivre ainsi pour m quelconque.

4. On peut démontrer que les pôles sont simples en transposant toujours le procédé employé dans le cas de l'équation des membranes vibrantes. Soit par exemple l'équation

$$\Delta^2 u - \lambda A (M) u = 0; \tag{1}$$

donc le système

$$\Delta u = v, \qquad \Delta v = \lambda A u,$$

et soit λ_0 une valeur caractéristique, pour laquelle on suppose qu'on a pour u et v des pôles d'ordre n. Par conséquent,

$$\left\{ \begin{aligned} u_M &= \frac{a_{-n}(M)}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \frac{a_{-n+1}(M)}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} + \dots, \\ v_M &= \frac{b_{-n}(M)}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \frac{b_{-n+1}(M)}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} + \dots \end{aligned} \right. \tag{2}$$

a_{-n}, a_{-n+1}, ..., b_{-n}, b_{-n+1}, ... étant nuls sur la frontière du domaine comme u et v.

Mais u et v sont solutions du système intégral suivant :

$$
(3)\qquad
\begin{cases}
u_M - \displaystyle\int_\Omega \Gamma(M, P)\, v(P)\, d\omega_P = 0,\\[2mm]
v_M - (\lambda - \lambda_0)\displaystyle\int_\Omega \Gamma(M, P)\, A(P)\, u(P)\, d\omega_P\\[2mm]
\qquad\qquad - \lambda_0 \displaystyle\int_\Omega \Gamma(M, P)\, A(P)\, u(P)\, d\omega_P = 0.
\end{cases}
$$

Si l'on substitue dans ces équations les développements de u et v suivant les puissances de $(\lambda - \lambda_0)$ du n° 2, on trouve par identification des mêmes puissances de $(\lambda - \lambda_0)$ des équations équivalentes aux suivantes :

$$
(5)\qquad
\begin{cases}
\Delta a_{-n} = b_{-n}; \qquad \Delta a_{-n-1} = b_{-n-1},\\
\Delta b_{-n} = \lambda_0 A a_{-n}; \qquad \Delta b_{-n-1} = A a_{-n} + \lambda_0 A a_{-n-1}.
\end{cases}
$$

De ces systèmes on déduit :

$$
(6)\qquad
\begin{cases}
a_{-n}\Delta b_{-n} - b_{-n}\Delta a_{-n} = \lambda_0 A a^2_{-n} - b^2_{-n},\\
(b_{-n-1}\Delta a_{-n} - a_{-n}\Delta b_{-n-1}) - (b_{-n}\Delta a_{-n-1} - a_{-n-1}\Delta b_{-n}) = - A a^2_{-n}
\end{cases}
$$

Si l'on intègre dans Ω et si l'on tient compte que les fonctions a, b sont nulles sur la frontière de Ω, on trouve que

$$
\int_\Omega A a^2_{-n}\, d\omega_M = 0; \qquad \lambda_0 \int_\Omega A a^2_{-n}\, d\omega_M = \int_\Omega b^2_{-n}\, d\omega_M,
$$

ce qui entraîne $b_{-n} \equiv 0$ dans Ω. Mais s'il en est ainsi, de l'équation $\Delta a_{-n} = b_{-n}$ de (5), on en déduit qu'il en est de même de a_{-n}; donc les pôles sont simples. Il n'y a que des difficultés d'écriture pour établir de la même manière ce fait pour l'équation générale

$$
(7)\qquad \Delta^m u - \lambda A u = 0.
$$

De plus, on peut poursuivre la même marche que Schwarz et M. Picard pour déterminer effectivement les pôles λ_1, λ_2, ...

On pourrait même, à la place de l'équation (7) considérer des équations encore plus générales, de la forme que nous avons considérée au

Chapitre II (§ 4) en introduisant d'une manière convenable un paramètre λ dans l'équation et montrer l'existence des valeurs caractéristiques pour les données nulles sur le contour. Mais comme ces considérations nous entraîneraient trop loin, je me contente ici de signaler ce problème.

Vu et approuvé :

Paris, le 21 mars 1929.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 21 mars 1929.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.