ALEXANDRE FRODA

Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables réelles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1929
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__102__1_0>

N° D'ORDRE :
2080
SÉRIE A ; N° 1212

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. ALEXANDRE FRODA

1re THÈSE — SUR LA DISTRIBUTION DES PROPRIÉTÉS DE VOISINAGE DES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1929 devant la Commission d'Examen

MM. ÉMILE BOREL *Président*
PAUL MONTEL } *Examinateurs*
ARNAUD DENJOY

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN & Cie
6, Rue de la Sorbonne (5e)

1929

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.	
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
Professeurs honoraires	A. JOANNIS.	
	H. LE CHATELIER	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
	R. DONGIER.	
	E. HÉROUARD.	
Professeurs	EMILE PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	G. KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET	Electrotechnique générale.
	F. WALLERANT	Minéralogie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique
	M-me P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN	Chimie générale.
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	Léon BERTRAND	Géologie structurale et géologie appliquée.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	É. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O DUBOSCQ	Biologie maritime.
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. MAILHE	Étude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Eugène BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie minérale.
	Léon BRILLOUIN	Théories physiques.
	V. ANGER	Chimie appliquée.
	N.	Astronomie.

E. PÉCHARD	Chimie (Enseigt. P. C. N.).
M. GUICHARD	Chimie minérale.
A. GUILLET	Physique.
C. MAUGUIN	Minéralogie.
L. BLARINGHEM	Botanique.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie
A. DEREIMS	Géologie.
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.
H. BÉNARD	Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS	Physique.
G. BRUHAT	Physique.
H. MOUTON	Chimie physique.
L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.
A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés)
ROBERT-LÉVY	Zoologie.
L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE	Radioactivité.
M. FRÉCHET	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.

Secrétaire . . . . . A. PACAUD.

A

MONSIEUR ÉMILE BOREL

MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage d'admiration.

A

MONSIEUR D. POMPEIU

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE BUCAREST

Hommage de respectueux dévouement.

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA DISTRIBUTION

DES

PROPRIÉTÉS DE VOISINAGE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES

INTRODUCTION.

Depuis *Dirichlet*, on définit une fonction y de la variable x, en faisant correspondre à chaque valeur de x une valeur pour y.

Il ne subsiste dans cette définition que l'idée de correspondance. Or, en conservant la définition générale de *Dirichlet*, il paraissait difficile d'aller plus loin. Certains croyaient même impossible d'obtenir des résultats concernant les fonctions les plus générales. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Dans l'introduction à sa thèse[1]) *M. Baire*, qui étudia des propriétés très générales des fonctions de variables réelles trouve qu'on est conduit après avoir défini la fonction la plus générale, „à distinguer les fonctions en différentes catégories, suivant qu'elles possèdent ou ne possèdent pas telle ou telle propriété“.

On sait combien ce point de vue s'est montré fécond, en menant à la classification des fonctions représentables analytiquement, selon la dénomination de *M. H. Lebesgue* [2]).

Dans ce qui suit, nous allons abandonner d'une manière systéma-

---

[1]) *R. Baire,* Sur les fonctions de variables réelles, Annali di Matematica, Milan, 1899.

[2]) *H. Lebesgue,* Sur les fonctions représentables analytiquement, Journal de math. pures et app., 1905.

tique ce point de vue commun et nous appliquer à distinguer des propositions concernant toutes les fonctions de variables réelles, définies au sens de *Dirichlet*, c'est-à-dire sans aucune restriction préalable

On a douté parfois s'il peut exister des propriétés communes à toutes les fonctions[1]), à moins qu'elles ne se réduisent à des tautologies. On devrait, semble-t-il, pouvoir se donner une fonction de variables réelles, qui contredise toute propriété donnée à l'avance.

C'est même l'objection qu'on fit — *à priori* — à la première proposition de ce genre, que nous avons trouvé :

Toute fonction de variable réelle ne peut posséder, tout au plus, qu'une infinité dénombrable de discontinuités de première espèce [2]).

Mais ce résultat et la plupart de ceux dont je m'occuperai ont deux caractères communs, qui les rendent possibles.

Premièrement, les propriétés qui figurent dans nos propositions se définissent en chaque point à l'aide des valeurs de la fonction aux points infiniment voisins. C'est pourquoi je propose de les nommer *»propriétés de voisinage«*.

En second lieu, l'énoncé détermine toujours un caractère spécial de l'ensemble E des points, où la propriété de voisinage en question se présente. On l'exprime d'habitude en définissant une classe d'ensembles, à laquelle l'ensemble E doit nécessairement appartenir.

Et comme il s'agit de la distribution des points, où la propriété envisagée est satisfaite, j'ai été conduit à nommer en général le caractère spécial en question, un *»caractère de distribution«* de la propriété de voisinage [3]).

La distribution des propriétés de voisinage a un caractère nettement statistique, en ce sens que la propriété ne doit jamais apparaître sur un ensemble déterminé de points, puisqu'elle peut être contredite en n'importe quel point d'un tel ensemble, en choisissant convenablement la fonction au voisinage de ce point. Mais puisque cela ne peut être fait simultanément et d'une manière arbitraire, lorsqu'il existe un caractère de distribution, on voit qu'il s'agit là d'une propriété statistique.

En présentant nos résultats, selon l'ordre inductif qui — (sauf les généralités que nous présentons tout d'abord, dans un but de simplifi-

---

[1]) *M. H. Lebesgue,* se demande, au contraire, dans le mémoire cité (page 140, note) si certaines propriétés, appartenant à toutes les fonctions représentables analytiquement, »n'appartiennent pas à toutes les fonctions«.

[2]) Voir les définitions plus bas.

[3]) Voir au Chap. V les définitions précises.

cation) — fut celui même de nos recherches, nous avons renvoyé à la fin de ce travail, quelques vues synthétiques, à ce sujet. Elles contribueront, espérons-nous, à mieux éclaircir le paradoxe moins réel qu'apparent, exposé plus haut [1]).

On y verra que les propriétés de voisinage peuvent être regardées d'un point de vue abstrait et exposées d'une manière systématique, en rattachant aussi d'anciens résultats connus, qui acquièrent ainsi une signification nouvelle.

J'indiquerai en quelques lignes la nature des questions traitées dans ce travail.

Après avoir repris et précisé, dans le Chapitre I, quelques définitions et généralités indispensables, je présente dans le Chapitre II deux classifications distinctes des discontinuités d'une fonction de variables réelles, selon deux points de vue différents (Chap. II, A. et B).

Dans la première classification, tout point de discontinuité appartient à l'un des trois genres, que l'on définit suivant que la fonction oscillation ω *(P)* d'une fonction *f (P)* tend ou non vers une limite unique, lorsque *P* tend vers le point de discontinuité $\mathfrak{P}$ et qúe ω $(\mathfrak{P})$ diffère ou non de cette limite, lorsque celle-ci existe. La distribution des discontinuités de chaque genre a lieu sur un ensemble, appartenant à une classe particulière, pour chacun d'eux.

Dans la deuxième classification, tout point de discontinuité appartient à l'un des deux genres, que l'on définit, selon qu'au point $\mathfrak{P}$ de discontinuité il existe ou non une fonction μ *(P)*, continue en $\mathfrak{P}$, qui est une fonction moyenne pour *f (P)*, c'est-à-dire dont les valeurs sont comprises en chaque point *P* entre le maximum *M (P)* et le minimum *m (P)* de la fonction *f (P)* en $\dot{P}$. Cette classification est même complétée, en considérant les deux cas différents, qui peuvent se présenter

1) En signalant quelques résultats simples de même nature, dans une conférence à l'Université de Strasbourg sur «La symétrie de structure des fonctions de variables réelles», (Bull. des Sc. Math, tome *L II*, Juillet 1928), *M. W. H. Young* trouve qu'ils contredisent l'opinion selon laquelle «en dehors de toute hypothèse il ne peut être question de rechercher des propriétés» et fait remarquer qu'on a su pourtant »allier ces mots primitivement contradictoires: la loi et le hasard; qu'ainsi, par le seul fait qu'ils arrivent les menus évènements de la vie réelle se trouvent soumis a un certain ordre, de même en vertu de leur seule existence, nos concepts mathématiques les plus généraux révèlent à l'examen des caractères d'une apparence paradoxale«. Ce passage est assez caractéristique pour la position vague du problème jusqu'à ce jour.

lorsqu'il existe une fonction $\mu(P)$, continue en $\mathfrak{S}$. Selon que la valeur de $\mu(P)$ est déterminée en $\mathfrak{S}$ d'une manière unique ou non, par la continuité de $\mu(P)$, on distingue deux espèces de discontinuités. On donne des conditions équivalentes à ces définitions et l'on constate que les discontinuités des genres et des espèces, tellement définies, se distribuent toujours sur certains ensembles particuliers.

Dans le Chapitre III, on reprend les définitions classiques des points où une fonction continue $f(P)$ présente un maximum ou un minimum et l'on pose des définitions pareilles pour la fonction uniforme la plus générale. On distingue entre les maximums atteints ou non et l'on recherche la distribution de ces genres de points. Le cas des fonctions continues est traité en détail (Chap. III, A), vu son intérêt particulier. Cela paraît nous éloigner de l'objet de ce travail qui est de distinguer des propositions applicables à toute fonction de variables réelles, mais constitue une introduction naturelle à l'étude correspondante du cas général (Chap. III, B).

Dans le Chapitre IV, on rencontre enfin des propositions, dont le caractère est assez difficile à préciser, puisqu'elles énoncent des propriétés qui mettent en rapport sur certains ensembles particuliers les valeurs de la fonction en un point et ses valeurs limites au même point. Le résultat, établi en dehors de toute hypothèse spéciale sur la fonction, a l'air de n'en impliquer aucune.

On trouve par exemple, parmi les résultats les plus simples, le fait que toute valeur d'une fonction uniforme ou multiforme en un point est en même temps l'une des valeurs limites de la fonction au même point et cela est vrai en tout point, sauf pour un ensemble fini ou dénombrable de points exceptionnels.

L'explication abstraite de tous ces résultats, qui s'introduisent naturellement, est abordée au Chapitre V. On y signale la différence essentielle entre une propriété strictement ponctuelle et une propriété ponctuelle de voisinage et l'on y présente un schéma abstrait des caractères de distribution de ces dernières. On y prouve aussi que la distribution des propriétés de voisinage ne peut introduire, du point de vue de la mesure, que les ensembles de mesure nulle et leurs complémentaires en tout intervalle, ainsi que les ensembles non mesurables qui généralisent ces ensembles [1]).

---

[1]) Cf. Chap. V. 81–82.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances du 19 mars, 14 mai et 30 juillet 1928, 14 janvier et 25 février 1929.

CHAPITRE I.

Définitions et généralités.

1. En attribuant à la notion de fonction, le sens de *Dirichlet*, nous allons considérer exclusivement les fonctions réelles de n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, pour n fini. Ce sont des *fonctions de point*, car on a par définition

$$f(P) = f\ (x_1, x_2, \ldots x_n),$$

où P représente, suivant une convention usuelle, un point de l'espace à n dimensions, possédant les coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$.

La fonction de point $f(P)$ peut être définie partout, c'est-à-dire pour tout point P ou seulement sur un ensemble E de points P, ce qui est le cas général.

La fonction $f(P)$ est *uniforme*, si à chaque point P de l'ensemble E, sur lequel la fonction est définie, correspond une valeur et une seule pour $f(P)$. Elle est *multiforme*, si à chaque point P de l'ensemble E correspond, en général, [1]) un ensemble de valeurs pour $f(P)$. On désignera en ce cas par $f(\mathfrak{P})$ l'une quelconque des valeurs de la fonction $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$ et par $f_0(\mathfrak{P})$ une valeur déterminée, parmi les valeurs $f(\mathfrak{P})$ [2]). On peut aussi considérer $f_0(P)$, comme une fonction uniforme *extraite* de la fonction multiforme $f(P)$.

La fonction $f(P)$ est *finie*, si toutes les valeurs $f(\mathfrak{P})$ sont finies. Si l'on admet aussi les valeurs $+\infty$ et $-\infty$, parmi celles que $f(P)$ peut prendre, la fonction $f(P)$ sera *finie ou non* [3]). Ce sont en principe ces fonctions générales, que nous allons considérer, sauf indication contraire.

---

[1]) On considère la fonction uniforme, comme un cas particulier de la fonction multiforme.

[2]) Cette notation est importante, dans ce qui suit.

[3]) Ces fonctions s'introduisent naturellement, quand les valeurs d'une fonction se définissent comme valeurs limites. Tel est le cas de la dérivée infinie, qui a une signification géométrique tout aussi précise, que celle d'une dérivée finie

2. Il faut remarquer pourtant, que — avec les définitions habituelles — il nous faudrait, le plus souvent, reprendre les démonstrations données pour le cas des fonctions finies et les compléter pour le cas des fonctions infinies. Or, lorsque les propriétés considérées subsistent, c'est qu'il y a probablement des caractères communs à ces fonctions, que les définitions différentes, posées dans les deux cas, ne laissent pas apparaître.

Voici les définitions et notations uniques, qu'on pourra adopter en vue de remédier à cet inconvénient :

On peut écrire — pour toute quantité a finie—la double inégalité

$$-\infty < a < +\infty$$

et pour toute quantité A, finie ou infinie

$$-\infty \leqq A \leqq +\infty .$$

Complétons aussi la définition habituelle de la limite : Une suite de quantités réelles, finies ou infinies

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots ,\ x_n, \ldots$$

tend vers la valeur A, finie ou non, qui est la *limite* de ces quantités, si — quel que soit ε positif — l'une au moins des deux inégalités

$$| x_n - A | < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{A} \right| < \varepsilon$$

a un sens et est satisfaite, en même temps [1]) que $A x_n \geqq 0$, pour tout $n > N$.

On voit facilement que cette définition comprend comme cas particuliers les trois définitions distinctes, qu'on donne d'habitude pour A fini, égal à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Mais cette nouvelle définition, qui se réduit à l'ancienne, lorsqu'on sait d'avance que la limite ne peut être qu'une quantité finie, a l'avantage de faire ressortir clairement la parenté intime entre les trois définitions apparemment différentes de la limite.

En tenant compte du sens général, ci - dessus indiqué, des notions de grandeur relative de deux quantités (finies ou non), ainsi que de celle de limite d'une suite de quantités (finies ou non), les définitions qu'on

---

[1]) Cette condition est indispensable, si l'on veut distinguer entre les quantités $+\infty$ et $-\infty$ et on peut l'abandonner dans le cas contraire.

posera ci-après, au cours de ce travail, sans spécifier qu'il s'agit de quantités finies garderont un sens précis, lorsque les quantités considérées ne seront plus finies.

On pourra pourtant — afin d'éviter des difficultés éventuelles — ne considérer d'abord les énoncés des propositions comme valables, que pour le cas des quantités finies [1]). L'extension au cas général se fera toujours, à l'aide d'un raisonnement canonique, qui sera indiqué plus loin (83) [2]).

3. Nous allons reprendre maintenant quelques-unes des notions de la théorie des ensembles, que nous recontrerons dans la suite, afin d'en préciser les définitions.

On appellera *intervalle* (à n dimensions), l'ensemble de tous les points P, dont les n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prennent chacune toutes les valeurs permises par les n doubles inégalités

$$a_i < x_i < b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

C'est un *intervalle ouvert* et chacun de ses points lui est intérieur (au sens *strict*). Mais c'est un *intervalle fermé*, si dans la définition ci-dessus on remplace respectivement, les signes $<$ et $>$, par $\leq$ et $\geq$ [3]).

Soit donné un ensemble E et désignons par cE son complémentaire par rapport à l'espace à n dimensions. Un point P est point *intérieur* ou point *extérieur* de l'ensemble E, dans l'espace à n dimensions, si un intervalle Δ à n dimensions, contenant P à l'intérieur, appartient à l'ensemble E ou respectivement à son complémentaire cE.

Un point P est point *frontière* de l'ensemble E, dans l'espace à n dimensions, si tout intervalle à n dimensions, contenant le point P à l'intérieur, contient des points de E et des points de cE.

Un ensemble E à n dimensions peut toujours être considéré comme un ensemble appartenant à un espace à un nombre plus grand de dimensions. Or, la définition du complémentaire cE d'un ensemble E et la distinction des points de l'espace en points intérieurs, extérieurs et frontières de E, ce sont des notions *relatives* au nombre des dimensions. Il faut

---

[1]) Cela adviendra, en général, dans le cas des fonctions bornées.

[2]) cf. *R. Baire,* Leçons sur les fonctions discontinues, 1905, pages 120 et suivantes.

[3]) Ce ne sont pas les seuls cas possibles. A un intervalle peuvent appartenir seulement quelques-uns de ses points frontières.

donc préciser, en chaque cas, l'espace que l'on considère pour ces définitions. [1])

Un ensemble dont tous les points sont des points intérieurs, dans l'espace à n dimensions, c'est un *ensemble ouvert*. Cette notion est aussi relative au nombre des dimensions.

On appellera *voisinage d'un point P*, dans l'espace à n dimensions, un intervalle Δ à n dimensions, contenant le point P à l'intérieur.

Un point $\mathfrak{S}$ est *point limite* de l'ensemble E, s'il existe un point P, de l'ensemble E, distinct de $\mathfrak{S}$, dans tout voisinage Δ du point $\mathfrak{S}$.

On peut se demander si cette définition descriptive n'a pas un caractère relatif au nombre des dimensions, comme la notion de voisinage elle-même. Il n'en est rien, car on peut prouver immédiatement, en partant de la définition, que c'est une notion indépendante du nombre des dimensions de l'espace où plonge l'ensemble E. Il y a d'ailleurs une définition métrique équivalente [2]) à la précédente, qui fait ressortir immédiatement ce caractère :

Un point P est *point limite* de l'ensemble E, s'il existe en E une suite indéfinie de points $P^1, P^2, \ldots\ \ ,$ dont la *distance* à P tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La distance d de deux points $P'(x'_1, x'_2, \qquad x'_n)$ et $P''(x''_1, x''_2, \ldots \qquad)$ est définie par l'égalité

$$d = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \qquad\qquad + (x'_n - x''_n)^2}$$

et elle est visiblement invariante par rapport au nombre des dimensions.

Un ensemble, qui contient tous ses points limites est *fermé*. Le complémentaire d'un ensemble ouvert est fermé et réciproquement [3]).

4. Nous utiliserons souvent, dans la suite, les notions de *maximum* $M_0(\mathfrak{S})$ et *minimum* $m_0(\mathfrak{S})$ d'une fonction $f(P)$ de n variables réelles *au voisinage d'un point $\mathfrak{S}$.*

---

[1]) Un point frontière de E, dans l'espace à n dimensions, reste point frontière de E dans les espaces à un nombre plus grand de dimensions, mais peut cesser de l'être pour un nombre plus petit de dimensions, comme le montre l'exemple d'un ensemble linéaire, dont tout point est point frontière si on le considère comme ensemble plan mais pas toujours réciproquement.

[2]) On en démontrera facilement l'équivalence en partant des définitions.

[3]) La notion d'ensemble fermé E ayant un caractère absolu, par rapport au nombre n des dimensions de l'espace où plonge E et les notions d'ensemble ouvert et d'ensemble complémentaire ayant, au contraire, un caractère relatif par rapport à n, ce résultat classique est remarquable, malgré son caractère élémentaire.

Rappelons d'abord la définition du *maximum* (*minimum*) d'une fonction $f\,(P)$ de n variables réelles *en un point* $\mathfrak{S}$ [1]).

Soit Δ un voisinage de $\mathfrak{S}$ dans l'espace à n dimensions. La borne supérieure (inférieure) des valeurs, que prend la fonction $f\,(P)$ en Δ, c'est par définition $M\,(f,\ \Delta)$ et $m\,(f,\ \Delta)$, respectivement, c'est-à-dire le *maximum (minimum) de* $f\,(P)$ *en* Δ. La limite inférieure (supérieure) de ces nombres, lorsque l'intervalle Δ tend vers le point $\mathfrak{S}$, c'est par définition le *maximum (minimum) de* $f\,(P)$ *en* $\mathfrak{S}$ et sera noté par $M\,(f, \mathfrak{S})$ et $m\,(f, \mathfrak{S})$ respectivement. On emploie aussi les notations plus simples $M\,(\mathfrak{S})$ et $m\,(\mathfrak{S})$, avec la même signification respective [2]).

Si parmi les valeurs de la fonction $f\,(P)$, utilisées dans la définition précédente, on ne fait figurer aucune des valeurs de la fonction $f\,(P)$ au point $\mathfrak{S}$, le nombre trouvé c'est — par définition — *le maximum (minimum) de* $f\,(P)$ *au voisinage de* $\mathfrak{S}$ et s'écrit $M_0\,(f,\ \mathfrak{S})$ et $m_0\,(f, P)$ respectivement ou d'une manière plus simple $M_0\,(\mathfrak{S})$ et $m_0\,(\mathfrak{S})$.

Il est important de remarquer, que les deux définitions ci-dessus s'appliquent tout aussi bien aux fonctions multiformes [3]) qu'aux fonctions uniformes.

5. Complétons ces définitions par d'autres équivalentes.

Soit une suite indéfinie de points $P_1,\ P_2, \ldots$ tendant vers un point limite $\mathfrak{S}$ et considérons la limite, supposée unique, d'une suite indéfinie de valeurs correspondantes de la fonction multiforme ou uniforme $f\,(P)$, c'est-à-dire

$$f_0\,(P_1)\quad f_0\,(P_2),\quad f_0\,(P_3), \ldots\ldots\ldots, f_0\,(P_n\,), \ldots$$

Pour un même point $\mathfrak{S}$ on obtient de cette manière des *valeurs limites* de $f\,(P)$, que nous désignons par $\lambda\,(f,\ \mathfrak{S})$ ou $\lambda\,(\mathfrak{S})$.

En un point $\mathfrak{S}$, *l'ensemble des valeurs limites* $\lambda\,(\mathfrak{S})$ *de la fonction* $f\,(P)$ *est fermé* [4]).

---

1) Cf. *R. Baire,* op. cit., pages 70 et suiv.

2) Sur la signification abstraite des doubles notations, voir plus loin (Chap. V, 71).

3) cf. *Baire,* (thèse), Chap. I.14.

4) Faisons remarquer, dès maintenant, que tout ensemble de valeurs réelles peut être envisagé aussi comme un ensemble linéaire de points et qu'on peut donc lui appliquer toutes les définitions respectives.

Si l'on se donne, en effet, une suite indéfinie

$$\lambda^1(\mathfrak{S}), \quad \lambda^2(\mathfrak{S}), \ldots \ldots ,$$

de valeurs limites de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$, tendant vers un nombre λ, considérons dans la suite des valeurs

$$f_0(P_1^n), \quad f_0(P_2^n), \quad \ldots \ldots ,$$

qui tendent vers $\lambda^n(\mathfrak{S})$, la valeur $f_0(P_n^n)$. Cela étant fait pour chaque valeur n, la suite des $f_0(P_n^n)$ tend visiblement vers λ, qui est donc l'une des valeurs limites de $f(P)$ au point $\mathfrak{S}$. Ces valeurs forment par conséquent un ensemble fermé.

Considérons la plus grande et la plus petite des quantités $\lambda(\mathfrak{S})$, qui existent donc toujours. On les nomme d'habitude *limite supérieure (inférieure) de la fonction $f(P)$, pour $P = \mathfrak{S}$* [1].

Il s'agit de prouver, que l'on a (avec des notations évidentes), pour $P = \mathfrak{S}$,

$$\lim\sup f(P) = M_0(\mathfrak{S}) \quad \text{et} \quad \lim\inf f(P) = m_0(\mathfrak{S}).$$

Donnons nous en effet un ε positif. Selon la définition de $M_0(\mathfrak{S})$, il existe dans tout voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ au moins un point P distinct de $\mathfrak{S}$ et tel que

$$f_0(P) > M_0(\mathfrak{S}) - \varepsilon,$$

car le contraire est visiblement absurde. Mais de cette inégalité il s'ensuit qu'il y a une valeur $\lambda(\mathfrak{S})$, au moins, telle que

$$\lambda(\mathfrak{S}) \geqq M_0(\mathfrak{S}) - \varepsilon$$

et donc *a fortiori*

$$\lim\sup f(P) \geqq M_0(\mathfrak{S}) - \varepsilon$$

pour tout ε et donc

$$\lim\sup f(P) \geqq M_0(\mathfrak{S}).$$

Mais si l'on avait

$$\lim\sup f(P) > M_0(\mathfrak{S})$$

---

[1]) Ce sont les limites supérieure et inférieure d'indétermination de $f(P)$ au point $\mathfrak{S}$, selon *du Bois-Reymond*.

il y aurait aussi, pour un ε positif convenable

$$\lim\sup f(P) > M_0(\mathfrak{S}) + 2\varepsilon.$$

Or, on a, par la définition de la limite, une infinité de points P, dans tout voisinage de $\mathfrak{S}$, tels que

$$f_0(P) > \lim\sup f(P) - \varepsilon$$

et donc

$$f_0(P) > M_0(\mathfrak{S}) + \varepsilon$$

en ces points, ce qui est également absurde.

Géométriquement, cela prouve que $M_0(\mathfrak{S})$ et $m_0(\mathfrak{S})$ sont les bornes de l'ensemble des valeurs limites de $f(P)$ pour $P = \mathfrak{S}$, si l'on ne considère pas les valeurs $f(\mathfrak{S})$ de $f(P)$ au point $\mathfrak{S}$ parmi ces valeurs limites, comme on le fait pour déterminer $M(\mathfrak{S})$ et $m(\mathfrak{S})$.

6. Il y a enfin encore une définition à donner à ces quantités, en introduisant la notion de *coupure* ou *nombre séparatif*, de *Dedekind*.

On désignera par $M_0(\mathfrak{S})$ la coupure, déterminée en classant le nombre α dans une classe ou une autre, suivant qu'il existe ou non un voisinage Δ non nul du point $\mathfrak{S}$, tel que en Δ l'on ait

$$f_0(P) > \alpha$$

sur un ensemble fini de points. [1]) Pour définir $m_0(\mathfrak{S})$ le signe $>$ est à remplacer par $<$.

L'équivalence des définitions s'établit facilement en tenant compte de la position de la coupure par rapport à l'ensemble des valeurs limites $\lambda(\mathfrak{S})$ de la fonction $f(P)$ [2]).

S'il arrive que l'on ait

$$M_0(\mathfrak{S}) = m_0(\mathfrak{S})$$

où, ce qui est la même chose

---

[1]) Il est intéressant d'observer que pour la définition de $M(\mathfrak{S})$ et $m(\mathfrak{S})$ on pourrait suivre une marche analogue. Seulement la coupure serait déterminée par la condition qu'il existe ou non un voisinage $\triangle$ de $\mathfrak{S}$, tel que en $\triangle$ l'ensemble $E[f_0(P) > \alpha]$ soit nul.

[2]) Dans ce qui suit on emploiera, selon le cas, l'une quelconque des trois définitions équivalentes du maximum $M_0(\mathfrak{S})$ ou minimum $m_0(\mathfrak{S})$ de la fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ au voisinage du point $\mathfrak{S}$. Pour les extensions de cette notion, voir plus loin (Chap. IV, 50, 51 et 52).

$$lim\ sup\ f\ (P) = lim\ inf\ f\ (P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}$$

alors l'on peut convenir d'écrire simplement

$$lim\ f\ (P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S},$$

pour désigner la limite unique des valeurs de $f\ (P)$ au point $\mathfrak{S}$.

Si la fonction $f\ (P)$ est uniforme, elle est continue au point $\mathfrak{S}$ ou y présente une discontinuité de première espèce et l'on peut y établir la continuité, en changeant la valeur de la fonction en $\mathfrak{S}$ et en posant

$$f\ (\mathfrak{S}) = lim\ f\ (P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

7. On montre d'habitude que $M\ (P)$ est une fonction semi-continue supérieurement et $m\ (P)$ semi-continue inférieurement. [1]) Nous allons montrer que les mêmes propriétés appartiennent respectivement à $M_0\ (P)$ et $m_0\ (P)$.

La fonction $M_0\ (P)$ est semi-continue supérieurement.

Car, en $\mathfrak{S}$ on a évidemment, pour tout ε positif donné

$$M_0\,(\mathfrak{S}) < M_0\,(\mathfrak{S}) + \varepsilon.$$

Or, à tout ε il correspond un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que

$$M_0\ (f,\ \Delta) < M_0\,(\mathfrak{S}) + \varepsilon.$$

Considérons un voisinage Δ' d'un point P de Δ, distinct de $\mathfrak{S}$ et soit Δ' contenu en Δ. Il en résulte, par définition,

$$M_0\,(P) \leqq M_0\,(f,\ \Delta') \leqq M_0\,(f,\ \Delta)$$

donc

$$M_0\ (P) < M_0\ (\mathfrak{S}) + \varepsilon.$$

On prouve de même, que *la fonction $m_0\ (P)$ est semi-continue inférieurement.*

L'on déduit facilement les propriétés suivantes:

a) *Etant donné un nombre ε positif, il existe un voisinage Δ du point $\mathfrak{S}$, tel qu'en tout point P de ce voisinage, sauf peut-être en $\mathfrak{S}$, l'on ait pour toute valeur $f\ (P)$ de la fonction*

$$f\ (P) < M_0\ (\mathfrak{S}) + \varepsilon.$$

---

[1]) Rappelons qu'une fonction uniforme $f\ (P)$ est semi-continue supérieurement (ou inférieurement) en $\mathfrak{S}$, lorsqu'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que l'on ait en tout point P de ce voisinage $f\ (P) < f\ (\mathfrak{S}) + \varepsilon$ ou respectivement $f\ (P) > f\ (\mathfrak{S}) - \varepsilon$.

b) *Etant donné un nombre positif et un voisinage* Δ *du point* $\mathfrak{P}$, *il existe toujours en* Δ *un point* P, *distinct de* $\mathfrak{P}$, *tel que pour une valeur* $f_0(P)$ *de la fonction, en* P, *l'on ait*

$$f_0(P) > M_0(\mathfrak{P}) - \varepsilon.$$

Car il suffit de supposer le contraire et de se rapporter aux définitions posées ci-dessus, pour saisir l'absurdité de ces hypothèses [1]).

8. Nous allons poser maintenant des définitions géométriques, qui n'introduisent au fond que des conventions de langage, permettant parfois d'abréger et de préciser les développements ultérieurs [2]).

Elles se rapportent aux manières différentes d'envisager géométriquement une fonction de variables réelles, en usant des moyens offerts par la théorie des ensembles de points.

a) On peut étudier la fonction $f(P)$ de n variables réelles, en portant son attention sur les ensembles de points à n dimensions, définis dans l'espace à n dimensions, où $f(P)$ est elle-même définie. Un tel ensemble de points, ce sera un *ensemble support.*

Donnons pour exemples l'ensemble support des valeurs de $f(P)$, ou l'ensemble support des points où une fonction continue $f(P)$ atteint un maximum, ou bien l'ensemble support des discontinuités d'une fonction uniforme $f(P)$, ou enfin l'ensemble support d'une propriété ponctuelle donnée de $f(P)$.

b) On peut, de même, étudier la fonction $f(P)$ de n variables réelles, en portant son attention sur les ensembles de points à $(n+1)$ dimensions, définis dans l'espace où $f(P)$ peut être représentée par des points à $(n+1)$ coordonnées, dont $x_1, x_2,.., x_n$ sont les coordonnées du point $\mathfrak{P}$ support de $f(P)$ et x_{n+1} prend une valeur $f_0(\mathfrak{P})$ de la fonction, au point $\mathfrak{P}$. Un tel ensemble de points, ce sera un *ensemble image* [3]).

c) On peut aussi étudier la fonction $f(P)$ de n variables réelles, en portant son attention sur les ensembles linéaires des points t, définis sur l'axe où l'on représente les valeurs $f_0(\mathfrak{P})$ de la fonction $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$.

---

[1]) Il est inutile d'insister sur les démonstrations, qui reproduisent, sauf l'omission des valeurs $f(\mathfrak{P})$, des raisonnements de M. *Baire* devenus classiques. Voir *Baire* op. cit. pages 70 et suivantes.

[2]) On évitera d'en charger l'exposition, lorsque cela sera possible.

[3]) C'est un procédé géométrique, qui appliqué dans le cas de la fonction d'une variable a rendu des grands services. L'ensemble image de $f(P)$ a été appelé *image* par *M. Lebesgue*, qui a introduit cette désignation.

Un tel ensemble de points, ce sera un *ensemble vertical* [1]).

Cette notion est très utile dans l'étude des relations entre les valeurs de la fonction $f(P)$ et ses valeurs limites en un même point $\mathfrak{P}$.

d) On peut enfin étudier la fonction $f(P)$ de n variables réelles, en portant son attention sur les ensembles linéaires des points x_{n+1}, définis sur l'axe où l'on représente toutes les valeurs que la fonction $f(P)$ prend dans son domaine de définition. Un tel ensemble de points, ce sera un *ensemble cote* [2]).

Par exemple, si une fonction est bornée, l'ensemble cote de $f(P)$ est borné ; si elle ne prend que des valeurs rationnelles, son ensemble cote est fini ou dénombrable ; si elle est continue, son ensemble cote est fermé et borné.

CHAPITRE II.

Discontinuités des fonctions de variables réelles.

A. *Propriétés définies à l'aide de la fonction oscillation.*

9. On distingue habituellement, en analyse, deux sortes de discontinuités d'une fonction uniforme $f(x)$ d'une variable réelle. Si ξ est un point de discontinuité de $f(x)$, la discontinuité est dite de *première espèce* lorsque $f(\xi + h)$ et $f(\xi - h)$ tendent chacune vers une limite, pour h positif et tendant vers zéro d'une manière arbitraire. On pose, par définition (selon *Dirichlet*)

$$f(\xi + o) = \lim f(\xi + h) \quad \text{et} \quad f(\xi - o) = \lim f(\xi - h).$$

Tout point de discontinuité qui n'est pas de première espèce est dit de *seconde espèce*.

Il résulte de ces définitions qu'en tout point de seconde espèce l'une au moins des valeurs $f(\xi + h)$ et $f(\xi - h)$ ne tend vers aucune limite, lorsque h tend vers zéro par des valeurs positives arbitraires.

---

[1]) C'est un terme employé souvent pour la fonction d'une variable pour désigner la direction parallèle à l'axe des ordonnées.

[2]) On emploiera parfois au cours de ce travail des expressions comme point support, axe vertical, point image, axe des cotes, etc., dont le sens est clair, puisqu'il ne s'agit que d'éviter des confusions éventuelles et d'abréger le langage.

On connaît, depuis longtemps, la proposition suivante:

I. *Si une fonction uniforme $f(x)$ ne présente que des discontinuités de première espèce, il n'y en a jamais qu'une infinité dénombrable, au plus.*

G. Darboux, dans son »*Mémoire sur les fonctions discontinues*«[1]), en s'occupant des fonctions susceptibles d'intégration, selon *Riemann*, se rapproche de ce résultat, sans le formuler toutefois d'une manière explicite. Nous allons reprendre, en la précisant un peu, sa démonstration qui est intéressante, malgré son caractère élémentaire.

Soit $f(x)$ la fonction définie en (a, b) et n'y présentant, que des discontinuités de première espèce. Alors $f(x+o)$ et $f(x-o)$ existent pour tout x. Si ε est un nombre positif arbitrairement choisi, il existe en (a, b) une valeur x_1, la plus grande possible, telle que l'on ait (en valeur absolue)

$$|f(x) - f(a+o)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

lorsque x est comprise dans l'intervalle ouvert (a, x_1). Il existe de même en (x_1, b) une valeur x_2, la plus grande possible, telle que l'on ait

$$|f(x) - f(x_1+o)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

lorsque x est comprise dans l'intervalle ouvert (x_1, x_2) et ainsi de suite, sans nous arrêter avant d'avoir atteint (ou dépassé) le point b.

Or, on peut montrer que b sera atteint ou dépassé après un nombre fini des opérations décrites. Car, s'il existait une suite indéfinie de points

$$a < x_1 < x_2 < \ldots\ldots,$$

elle tendrait, en cas contraire, vers un point limite $x_\omega < b$.

Soit l'intervalle ouvert non nul $(x_\omega - h, x_\omega)$ déterminé par la condition, que pour toute valeur x comprise dans cet intervalle, l'on ait

$$|f(x) - f(x_\omega - o)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

---

[1]) *G. Darboux*, Annales de l'Ecole Normale supérieure, 2-e série, t. IV., 1875, Chap VI.

Il y a une suite indéfinie de valeurs x_p, x_{p+1}, ..., comprises dans cet intervalle, puisque x_ω en est le point limite. Faisons tendre dans l'inégalité précédente x vers x_p en décroissant, alors $f(x)$ tend vers $f(x_p + o)$ et il y a, à la limite,

$$|f(x_p + o) - f(x_\omega - o)| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

ce qui avec l'inégalité précédente donne l'inégalité

$$|f(x) - f(x_p + o)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

valable pour tout point x de l'intervalle ouvert $(x_\omega - h, x_\omega)$. En y faisant $x = x_{p+q}$, avec $q > 1$, on trouve un résultat absurde, puisque x_{p+1} est par définition la borne supérieure des valeurs de x, qui satisfont à cette inégalité.

Dégageons de cette démonstration de *Darboux*, qui en conclut que $f(x)$ est intégrable (selon *Riemann)*, la proposition ci-dessus.

Soit (x_i, x_{i+1}) l'un des intervalles ouverts, que l'on vient de déterminer. On a, pour deux valeurs quelconques strictement intérieures à l'intervalle,

$$|f(x') - f(x_i + o)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(x'') - f(x_i + o)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Il en résulte que l'on a, pour tout x intérieur à cet intervalle

$$\omega(x) \leq \varepsilon$$

par simple passage à la limite, $\omega(x)$ étant l'oscillation de $f(x)$ au point x.

On n'aura donc $\omega(x) > \varepsilon$, qu'en certains des points x_i, qui sont en nombre fini. En se donnant une suite indéfiniment décroissante de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, l'ensemble E, support de toutes les discontinuités de $f(x)$ se décomposera en une infinité dénombrable d'ensembles E_n, ne contenant chacun qu'un nombre fini de points, c'est-à-dire

$$E[\omega(x) > o] = E_1[\omega(x) > \varepsilon_1] + E_2[\omega(x) > \varepsilon_2] + \cdots\cdots,$$

ce qui prouve finalement que l'ensemble des discontinuités de $f(x)$ est fini ou dénombrable.

10. Il suffit de remarquer, que l'essentiel dans la démonstration de *G. Darboux* c'est l'inexistence du point limite des x_i. Ce sont d'ailleurs, comme il est indiqué ci-dessus (9), les points où $\omega(x) > \varepsilon$. Cela conduit directement à la proposition générale

II. *Tout point limite ξ d'une suite de points de discontinuité x_n d'une fonction uniforme $f(x)$, pour lesquels l'oscillation $\omega(x_n)$ de la fonction dépasse un nombre positif ε est un point de discontinuité de seconde espèce.*

Soit en effet un point limite ξ. Il y a, par hypothèse et pour fixer les idées, une suite croissante indéfinie de valeurs $x_1, x_2, \ldots\ldots,$ points de discontinuité pour $f(x)$, tels que $\omega(x_n) > \varepsilon$, pour tout n entier positif.

Attachons à chaque x_n l'intervalle δ_n

$$\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}, \frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)$$

contenant x_n. On va montrer qu'il existe en chaque δ_n deux points ξ'_n et ξ''_n, tels que l'on ait, l'inégalité

$$f(\xi'_n) - f(\xi''_n) > 2\varepsilon.$$

En effet, pour tout δ_n contenant x_n intérieurement, il existe en δ_n un point ξ'_n tel que

$$f(\xi'_n) > M(f, \delta_n) - \frac{\varepsilon}{2}$$

et un point ξ''_n tel que

$$f(\xi''_n) < m(f, \delta_n) + \frac{\varepsilon}{2},$$

comme il résulte directement de la définition du maximum et du minimum d'une fonction dans un intervalle.

Mais, l'on a

$$M(x_n) \leq M(f, \delta_n) \qquad \text{et} \qquad m(x_n) \geq m(f, \delta_n).$$

On aura donc

$$f(\xi'_n) > M(x_n) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad f(\xi''_n) < m(x_n) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui avec l'hypothèse

$$\omega(x_n) = M(x_n) - m(x_n) > \varepsilon$$

donne l'inégalité à démontrer.

Mais, cette inégalité est valable, avec des valeurs convenables pour ξ'_n et ξ''_n, pour tout n. Or, cela est visiblement incompatible avec l'existence d'une limite unique pour $f(x)$, lorsque x tend vers ξ en croissant. Donc ξ est nécessairement un point de discontinuité de seconde espèce.

11. Le résultat précédent (10, II) a pour conséquence une proposition concernant toute fonction uniforme de variable réelle, extension de la proposition connue, rappelée plus haut (9, I), qui ne s'applique qu'à une classe particulière de fonctions.

III. *Une fonction uniforme de variable réelle ne peut présenter, qu'un ensemble fini ou dénombrable de discontinuités de première espèce* [1]).

Avant d'en présenter la démonstration, nous allons rappeler succintement une propriété connue de la théorie des ensembles, qui nous sera utile plus d'une fois :

Un ensemble de points isolés [2]) *est fini ou dénombrable.* En effet, si E est l'ensemble donné, soit E_n le sous-ensemble de E, dont la distance de chaque point aux autres points de E dépasse ε_n, ε_n étant un nombre positif. En attachant à chaque point de E_n une sphère de rayon ε_n, on obtient un ensemble de sphères, sans point commun deux à deux, dont il résulte, selon Cantor, qu'il n'y en a, au plus, qu'une infinité dénombrable. Donc E_n est fini ou dénombrable et si l'on se donne une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tendant vers zéro, tout point de E appartient à l'un des E_n, donc E est fini ou dénombrable, comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables E_n.

---

[1]) On était loin d'y voir une propriété appartenant à toute fonction uniforme, puisque l'on démontrait, par exemple, indépendamment, que »*Une fonction à variation bornée ne peut avoir, au plus, qu'une infinité dénombrable de discontinuités*« et que „*Tous les points de discontinuité d'une fonction à variation bornée sont de première espèce*“, sans remarquer que la première propriété n'est qu'une conséquence de la seconde.

[2]) Un *point isolé* d'un ensemble E, c'est un point de E qui n'est pas un point limite de E.

Cela prouvé, il n'y a qu'à appeler E l'ensemble des discontinuités de première espèce et en définir les sous-ensembles E^n des points, où l'oscillation $\omega(x)$ dépasse un nombre positif ε_n

On a vu plus haut (10, II) que E^n est un ensemble de points isolés, puisque tout point limite de E^n ne lui appartient pas, comme étant point de discontinuité de seconde espèce. Donc E^n est fini ou dénombrable, comme ensemble de points isolés et E, qui est la somme des ensembles E^n, définis pour une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tendant vers zéro, est aussi fini ou dénombrable. La proposition (III) est démontrée.

12. On peut étendre ces résultats, en dégageant au préalable le caractère distinctif de la discontinuité de première espèce, par la proposition suivante :

IV. *L'oscillation $\omega(x)$ d'une fonction de variable réelle $f(x)$ tend vers zéro, lorsque x tend vers un point de discontinuité de première espèce ξ de $f(x)$.*

Soit ε un nombre positif et ξ un point de discontinuité de première espèce. Il existe un intervalle ouvert $(\xi, \xi + h)$, tel que pour tout x intérieur l'on ait

$$|f(x) - f(\xi + o)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité ayant lieu pour deux valeurs quelconques x' et x'' de l'intervalle $(\xi, \xi + h)$ il en résulte

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

et donc en tout point x de l'intervalle $(\xi, \xi + h)$

$$\omega(x) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que

$$\lim \omega(x) = o,$$

lorsque x tend vers ξ en décroissant. Même résultat si x tend vers ξ en croissant, donc d'une manière quelconque aussi.

La propriété énoncée appartient encore visiblement aux points de continuité. Il faut ajouter la condition

$$\omega(\xi) > o$$

pour avoir *réciproquement* un point de discontinuité ξ de première espèce.

13. Reprenons la démonstration de la proposition antérieure (11, III), en nous appuyant sur le résultat précédent (12, IV) :

Soit E l'ensemble des points de discontinuité de première espèce. Ce sont les points où l'on a simultanément

$$\omega(x) \neq o \quad \text{et} \quad \lim \omega(x) = o, \quad \text{pour } x = \xi,$$

au sens indiqué ci-dessus (6). On se donne la suite décroissante vers zéro des ε_q positifs. Distinguons le sous-ensemble E_q de E par la condition suivante, où x est un point de E :

$$E_q = E\,[\omega(x) > \varepsilon_q\,].$$

L'ensemble E_q est *isolé* [1]). Cela résulte simplement de la définition d'une valeur limite, car pour toute suite indéfinie de points x_q de E_q, tels que $\omega(x_q) > \varepsilon_q$ et tendant vers un point limite ξ, on a

$$\lim \omega(x_q) \geqq \varepsilon_q,$$

ce qui prouve que le point ξ n'appartient pas à E_q, qui est un sous-ensemble de E et comme tel on devrait avoir pour $x = \xi$

$$\lim \omega(x) = o.$$

Mais E_q ne contenant aucun de ses points limites est isolé, donc fini ou dénombrable de même que E, puisque

$$E = E_1 + E_2 + \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + E_q + .\;.\;.$$

Il ressort visiblement de cette démonstration que la nature particulière de $\omega(x)$ n'y joue plus aucun rôle et que l'on a donc pour les mêmes motifs, avec un α arbitraire donné

V. *Une fonction uniforme $f(x)$ ne peut présenter qu'un nombre fini ou dénombrable de points ξ, où l'on ait simultanément*

$$f(\xi) \neq \alpha \quad \textit{et} \quad \lim f(x) = \alpha, \qquad \textit{pour } x = \xi.$$

Ce résultat est toutefois une conséquence directe de la proposition antérieure (11, III), puisqu'en ξ il y a

$$\omega(\xi) > o \quad \text{et} \quad \lim \omega(x) = o, \qquad \text{pour } x = \xi.$$

---

[1]) C'est-à-dire, par définition, un ensemble dont tous les points sont des points isolés par rapport à l'ensemble.

Mais la remarque qui nous a permis d'établir la proposition (V) n'est nullement superflue. Elle permettra d'étendre les résultats précédents.

14. Soient, pour passer au cas général, $f(P)$ une fonction uniforme ou multiforme de n variables réelles et $\omega(f, P)$ la fonction oscillation, définie en chaque point P.

La fonction $f(P)$ présente, par définition, une *discontinuité de genre I en* $\mathcal{S}$, quand $\omega(f, P)$ tend vers une limite unique, lorsque P tend vers $\mathcal{S}$ d'une manière quelconque et qu'en même temps

$$\omega(f, \mathcal{S}) > \lim \omega(f, P), \quad \text{pour } P = \mathcal{S}.$$

On peut désigner par α la quantité

$$\lim \omega(f, P) = \alpha.$$

Pour les fonctions uniformes d'une seule variable $f(x)$ et pour $\alpha = 0$, les discontinuités de genre I se réduisent aux discontinuités de première espèce.

Un exemple classique de discontinuité de genre I pour une fonction $f(P) = f(x, y)$, de deux variables réelles, c'est la discontinuité que présente pour $x = o$, $y = o$, la fonction de *Dini*

$$f(P) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2}.$$

Si $\mathcal{S}$ est le point (o,o), il y a $\omega(f, \mathcal{S}) = +\infty$, tandis qu'au voisinage de $\mathcal{S}$, il y a $\omega(f, P) = o$ et donc $\lim \omega(f, P) = o$, pour $P = \mathcal{S}$.

Il suffit de reprendre mot pour mot la démonstration valable dans le cas d'une fonction uniforme $f(x)$ pour avoir

VI. *Une fonction uniforme $f(P)$ ne peut présenter, tout au plus, qu'un ensemble fini ou dénombrable de points $\mathcal{S}$, tels que l'on ait simultanément, pour un α donné*

$$f(P) \neq \alpha \quad \text{et} \quad \lim f(P) = \alpha, \quad \text{pour} \quad P = \mathcal{S}.$$

15. On a la proposition

VII. *Une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble fini ou dénombrable de discontinuités de genre I.*

La démonstration s'appuie sur la remarque suivante :
Considérons la fonction $\omega_1 (f, P)$, définie par l'égalité

$$\omega_1 (f, P) = \omega' (\omega, P).$$

Puisque $\omega (P)$ c'est l'oscillation de $f (P)$, $\omega_1 (P)$ qui est l'oscillation de la fonction $\omega (P)$ pourrait s'appeler *la réoscillation* de $f (P)$.

En tout point $\mathfrak{S}$, où $f (P)$ possède une discontinuité de genre *I* l'on a

$$\omega_1 (f, \mathfrak{S}) = \omega (\omega, \mathfrak{S}) = \omega (f, \mathfrak{S}) - \alpha > o,$$

tandis que

$$lim\ \omega_1 (f, P) = o, \quad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

En effet, pour un ε positif, il y a un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que en Δ

$$\alpha - \varepsilon < \omega (P) < \alpha + \varepsilon$$

pour tout $P \neq \mathfrak{S}$. Mais alors l'oscillation de $\omega (P)$ en Δ est au plus 2ε, avec ε aussi petit qu'on veut et Δ convenable.

Mais $\omega_1 (P)$ est une fonction uniforme et on peut lui appliquer la proposition précédente (14. VI), en prenant $\alpha = o$ et l'on aura un ensemble fini ou dénombrable de points $\mathfrak{S}$, tels que

$$\omega_1 (\mathfrak{S}) \neq o \quad \text{et} \quad lim\ \omega_1 (P) = o, \quad \text{pour } P = \mathfrak{S},$$

condition satisfaite en tout point $\mathfrak{S}$ de discontinuité de genre *I*.

16. Appelons *point de discontinuité de genre I.a, tout point* $\mathfrak{S}$ *tel que*

$$\omega_1 (\mathfrak{S}) > o \quad \text{et} \quad lim\ \omega_1 (P) = o, \quad \text{pour} \quad P = \mathfrak{S}.$$

La proposition antérieure (15.VII) est applicable à ces discontinuités qui ne peuvent se présenter donc qu'en nombre fini ou dénombrable. C'est une généralisation, qui résulte de la démonstration même.

Tout point de discontinuité de genre *I* est aussi de genre *Ia*, mais réciproquement cela n'a pas lieu toujours, comme il est facile de le voir. Nous allons indiquer en effet un exemple de point de discontinuité de genre *Ia*, qui n'est pas un point de discontinuité de genre *I*.

Soit $f(P)$ une fonction uniforme d'une variable, définie sur l'intervalle $(-1,1)$, comme il suit: Au point $\mathfrak{P}$ d'abscisse $x = o$, on pose $f(\mathfrak{P}) = 4$, aux points d'abscisse $x \neq o$ il y a $f(P) = o$, sauf aux points d'abscisse x rationnelle, où $f(P) = 1$ ou $f(P) = 2$, suivant que $x < o$ ou $x > o$. Le point $\mathfrak{P}$ répond à la question, car on a $\omega_1(P) = o$, en tout point, sauf en $\mathfrak{P}$, où $\omega_1(\mathfrak{P}) = 3$.

Dès lors, il est légitime de se demander si la propriété, qui nous occupe, ne pouvait s'étendre par itération indéfinie de l'opération oscillation. En définissant par exemple

$$\omega_2(f, \mathfrak{P}) = \omega(\omega_1, \mathfrak{P}),$$

il n'y aurait qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de points où $\omega_2 > o$ et $\lim \omega_2 = o$. Mais cela ne donne plus rien de neuf, puisque

L'itération de l'opération oscillation, appliquée à la fonction réoscillation la reproduit[1].

Il y a en effet

$$\omega_2(f, \mathfrak{P}) = \omega_1(f, \mathfrak{P}),$$

puisque

$$M(\omega_1, \mathfrak{P}) = \omega_1(f, \mathfrak{P}) \quad \text{et} \quad m(\omega_1, \mathfrak{P}) = o,$$

car, selon *Baire*,[2]) le maximum en un point d'une fonction semi-continue supérieurement reproduit sa valeur et le minimum, en un point, de l'oscillation d'une fonction semi-continue supérieurement est nul. Il y a

$$\omega_2(f, \mathfrak{P}) = \omega(\omega_1, \mathfrak{P}) = M(\omega_1, \mathfrak{P}) - m(\omega_1, \mathfrak{P}) = \omega_1(f, \mathfrak{P}) - o = \omega_1(f, \mathfrak{P}).$$

c. q. f. d.

17. Il y a une analogie visible entre les résultats, que nous venons de trouver et le théorème connu de *M. Baire*

---

[1]) Cette remarque importante, que nous avons retrouvé, avait déjà été faite implicitement par *M. Arnaud Denjoy* (Bulletin de la soc. math. de France, t. XXXIII; 1905) et ultérieurement par *M. W. Sierpinski* (Bulletin de l'Ac. des Sciences de Cracovie, 1910, p. 33).

[2]) *R. Baire* (Thèse), chap. I.

„*Une fonction ponctuellement discontinue ne peut présenter qu'un ensemble de première catégorie de points de discontinuité*“ [1]).

C'est-ce qui suggère de nouvelles définitions :

Soient $f(P)$ une fonction uniforme ou multiforme de n variables réelles et $\omega(f, P)$ la fonction oscillation, qui lui correspond.

La fonction $f(P)$ présente, par définition, une *discontinuité de genre II en* $\mathfrak{P}$, quand $\omega(f,P)$ ne tend pas vers une limite déterminée lorsque P tend vers $\mathfrak{P}$ d'une manière quelconque.

Il y a

$$M_o(\omega,\mathfrak{P}) > m_o(\omega,\mathfrak{P}).$$

On peut immédiatement remarquer, par exemple, que si une fonction $\varphi(x)$ de variable réelle possède au point ξ une discontinuité isolée de seconde espèce, une fonction $f(x)$ nulle partout, sauf aux points d'abscisse rationnelle, où $f(x) = \varphi(x)$, possède au point ξ, une discontinuité de genre *II*. On a la proposition :

VIII. *Une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble de première catégorie de discontinuités de genre II.*

On établit le résultat à l'aide de la fonction réoscillation $\omega_1(f, P)$. Car, en tout point $\mathfrak{P}$ de discontinuité de genre *II*, il y a

$$\omega(f, \mathfrak{P}) = M(\omega, \mathfrak{P}) \geqq M_o(\omega, \mathfrak{P}) > m_o(\omega, \mathfrak{P}) \geqq m(\omega, \mathfrak{P}) = \alpha.$$

Donc

$$M(\omega, \mathfrak{P}) - m(\omega, \mathfrak{P}) > o$$

c'est-à-dire

$$\omega(\omega, \mathfrak{P}) = \omega_1(f, \mathfrak{P}) > o.$$

Mais $\omega(\mathfrak{P})$ est une fonction semi-continue supérieurement et ses points de discontinuité forment un ensemble de première catégorie. Aux

[1]) Rappelons que, par définition, un ensemble *de première catégorie* est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Tout ensemble, qui n'est pas de première catégorie, est *de seconde catégorie.*

points de discontinuité de ω (P) l'inégalité précédente est satisfaite, par définition. L'ensemble des points de discontinuité de genre *II* est un sous-ensemble du précédent et comme tel il est de première catégorie.

Mais lorsqu'on a démontré qu'une propriété doit apparaître seulement sur un ensemble de première catégorie, comme c'est ici le cas, il est toujours nécessaire de s'assurer que cela peut avoir lieu effectivement sur un ensemble non dénombrable et dense, car sinon l'ensemble de première catégorie se réduirait toujours à un ensemble dénombrable ou non dense. Pour éliminer cette hypothèse il faut donc toujours faire appel à un exemple effectif.

18. Donnons un exemple de fonction uniforme $f(P)$ d'une variable, dont les discontinuités de genre *II* se présentent sur un ensemble linéaire de première catégorie, dense en (a, b) et non dénombrable.

Soit E_1 l'ensemble parfait non dense de *Cantor* [1]), défini en (a, b) et appelons (C) l'opération géométrique par laquelle cet ensemble est défini en (a, b). Répétons l'opération (C) en chaque intervalle *contigu à* E_1 et désignons par E_2 la somme de l'infinité dénombrable d'ensembles parfaits, sans point commun deux à deux, que l'on obtient de cette manière. On répète (C) en chaque intervalle contigu à $(E_1 + E_2)$ et l'on obtient E_3 et ainsi de suite, indéfiniment.

L'ensemble E, somme des ensembles E_n, parfaits et non denses en (a, b), c'est un ensemble de première catégorie [2]).

On pose $f(P) = \frac{1}{n}$ aux points de E_n, quel que soit n et $f(P) = o$ aux points de cE, complémentaire de E. Cette fonction répond à la question.

Elle est continue aux points de cE, car un point $\mathcal{P}$ de cE ne peut être point limite de points P_n, appartenant à une suite finie d'ensembles E_n, puisque pour $n \leqq N$, ce point $\mathcal{P}$ devrait appartenir à l'ensemble somme des E_n, $\sum_1^n E_n$ qui est parfait. Si le point $\mathcal{P}$ de cE est point limite d'une infinité de points isolés P_n, appartenant à une infinité d'ensembles E_n, on a

$$lim\, f(P_n) = lim\, \frac{1}{n} = o$$

[1]) Cf. *E. Borel*, Leçons sur les fonctions de variables réelles, 1905, pages 12—13.
[2]) Cf. *R. Baire*, op. cit. pages 79—80.

et d'ailleurs $f(P)$ est continue sur cE, puisqu'elle y est identiquement nulle.

En un point $\mathfrak{P}$ de E, donc de E_n pour n déterminé, on a $f(\mathfrak{P}) = \frac{1}{n}$ et ce point est isolé des points de $(E_1 + E_2 + \ldots \ldots + E_{n-1})$, puisqu'il est strictement intérieur à un intervalle contigu à cet ensemble parfait. Dès lors, au voisinage de $\mathfrak{P}$, on a $f(P) \leqq \frac{1}{n}$ et $\omega(\mathfrak{P}) = \frac{1}{n}$. Or, en tout point P de cE, l'on a $\omega(P) = o$ et cE est dense en (a, b) comme ensemble de seconde catégorie, en tout intervalle. Par suite $m_0(\omega, \mathfrak{P}) = o$ et comme $\mathfrak{P}$ appartient à un ensemble parfait de E_n dont tous les points sont tels que $\omega(P) = \frac{1}{n}$, il résulte $M_0(\omega, \mathfrak{P}) = \frac{1}{n}$, puisque $\mathfrak{P}$ est point limite des ensembles $E_{n+1}, E_{n+2}, \ldots$ et qu'on y a $\omega(P) \leqq \frac{1}{n+1}$.

Tout point $\mathfrak{P}$ de E est donc point de discontinuité de genre *II*, puisque $\omega(P)$ n'y possède pas une limite unique.

19. Les résultats obtenus plus haut permettent de définir une classification complète des points de discontinuité d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ en trois genres *I*, *II* et *III*. Une discontinuité est de genre *III*, lorsqu'elle n'est ni de genre *I*, ni de genre *II*. En voici une définition équivalente :

La fonction $f(P)$ présente, par définition, une *discontinuité de genre III en* $\mathfrak{P}$, quand $\omega(f, \mathfrak{P})$ tend vers une limite unique, lorsque P tend vers $\mathfrak{P}$ d'une manière quelconque et qu'en même temps

$$\omega(f, \mathfrak{P}) = lim\, \omega(f, P), \quad \text{pour } P = \mathfrak{P}.$$

Il est supposé aussi, bien entendu, $\omega(\mathfrak{P}) > o$, car si l'on avait $\omega(\mathfrak{P}) = o$, l'on obtiendrait des points de continuité de $f(P)$.

On a la proposition

IX. *Une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble nul ou de seconde catégorie de points de discontinuité de genre III.*

En effet, ou bien il n'y a aucun point de discontinuité de genre *III* ou bien il y en a au moins un point. Le premier cas arrive effectivement, puisqu'il existe des fonctions continues et des fonctions possédant seulement des discontinuités de genre *I* ou *II*. Or dès qu'il y a un point de discontinuité de genre *III*, il y en a un ensemble de seconde catégorie. Car si l'on a, pour $P = \mathfrak{S}$,

$$\omega(f, \mathfrak{S}) = \lim \omega(f, P) = \alpha > o$$

il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que pour tout point P de Δ l'on ait, pour un ε positif arbitraire et nous le prendrons plus petit que $\frac{\alpha}{2}$

$$\omega(f, P) > (\alpha - \varepsilon) > \frac{\alpha}{2}.$$

Or, soit E l'ensemble des points de discontinuité de $\omega(P)$ en Δ et E_1 le complémentaire de E, par rapport à Δ. Puisque $\omega(P)$ est ponctuellement discontinue, E est de première catégorie et E_1 de seconde catégorie. En tout point $\mathfrak{S}$ de E_1, la fonction $\omega(P)$ est continue et donc en $\mathfrak{S}$, $f(P)$ présente une discontinuité de genre *III*, car on a

$$\omega(f, \mathfrak{S}) = \lim \omega(f, P) \geqq \frac{\alpha}{2} > o$$

et l'ensemble E_1 des points $\mathfrak{S}$ est de seconde catégorie. *c. q. f. d.*

20. Il ressort nettement de ce qui précède, que la classification présentée des discontinuités pourrait s'énoncer aussi comme il suit : Les points de discontinuité de $\omega(P)$, tels que $\lim \omega(P)$ existe sont les discontinuités de genre *I* de $f(P)$; ceux pour lesquels $\lim \omega(P)$ n'existe pas sont les discontinuités de genre *II* de $f(P)$ et les points de continuité de $\omega(P)$ sont les discontinuités de genre *III* de $f(P)$ ou ses points de continuité.

Faisons aussi remarquer explicitement qu'une fonction ponctuellement discontinue ne possède que des discontinuités des genres *I* et *II*, une fonction totalement discontinue par contre possède toujours des discontinuités de genre *III*.

B. *Propriétés définies à l'aide des fonctions moyennes.*

21. La classification des discontinuités des fonctions uniformes ou multiformes en trois genres distincts a eu pour point de départ la généralisation d'une propriété des discontinuités de première espèce d'une fonction de variable réelle.

Une autre propriété de ces discontinuités est aussi susceptible de généralisation et mène facilement à une nouvelle classification des discontinuités des fonctions uniformes ou multiformes.

On commencera par remarquer pour cela, que l'oscillation $\omega(f, \mathfrak{P})$ d'une fonction $f(P)$ en un point $\mathfrak{P}$ donne en quelque sorte une mesure de la dispersion des valeurs de la fonction au voisinage d'un point $\mathfrak{P}$, autour d'une valeur moyenne, dont la définition est d'ailleurs assez arbitraire.

On peut prendre, par exemple

$$\tfrac{1}{2}[M(P) + m(P)]$$

pour valeur moyenne en P ou bien, d'une manière générale, si $\alpha(P)$ et $\beta(P)$ sont deux nombres non négatifs, tels que

$$\alpha(P) + \beta(P) = 1,$$

la valeur moyenne en P c'est

$$\mu(P) = \alpha(P) . M(P) + \beta(P) . m(P).$$

Cette *valeur moyenne* est un nombre. On peut la considérer, de même que l'oscillation, comme une fonction de P et c'est une *fonction moyenne* $\mu(P)$. Sa définition comprend donc une grand part d'arbitraire.

Il est inutile d'aller plus loin pour remarquer un fait intéressant. Soit $f(x)$ la fonction uniforme de variable réelle, égale à $+1$ pour $x > o$ et à -1 pour $x < o$. Elle ne possède qu'une discontinuité de première espèce pour $\xi = o$, quelle que soit la valeur $f(\xi)$. Or, de quelque manière qu'on choisisse les fonctions $\alpha(P)$ et $\beta(P)$ ci-dessus, la valeur moyenne $\mu(P)$ ce sera une fonction uniforme, *discontinue* au point ξ.

Considérons cependant la fonction, apparemment moins simple, de *Dirichlet* $\varphi(x)$, égale à zéro aux points d'abscisse rationnelle et à 1 aux points d'abscisse irrationnelle. On aura partout[1] $M(x) = 1$ et $m(x) = o$. La fonction moyenne $\mu(x) = \frac{1}{2}$ sera continue et même toute fonction continue, dont les valeurs sont comprises entre o et 1, peut jouer le même rôle.

D'autre part, si l'on s'impose la condition de ne considérer en un point que les fonctions moyennes qui y sont continues, on peut remarquer aussi qu'il y a un cas où la valeur moyenne y est parfaitement déterminée, même si la fonction $f(P)$ est discontinue en ce point.

---

[1]) On emploiera parfois, pour abréger, l'expression »partout«, au lieu de: »en tout point (support)«.

Soit en effet $\psi(x)$ une fonction nulle partout, sauf pour les valeurs rationnelles de x, où elle est égale à $+1$ ou à -1, selon que x est positif ou négatif. Toute fonction moyenne $\mu(x)$, continue au point $\xi = o$, n'y pourra prendre que la valeur zéro.

Ces observations mènent à une suite de définitions, que nous allons exposer.

22. Toute fonction uniforme $\mu(P)$ est une fonction moyenne de la fonction uniforme ou multiforme $f(P)$, si l'on a en tout point P

$$m(P) \leq \mu(P) \leq M(P).$$

Les points $\mathfrak{S}$ de *discontinuité* d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles, peuvent appartenir à l'un des deux genres distincts suivants :

Le point $\mathfrak{S}$ est une *discontinuité de genre* (α) pour $f(P)$, lorsque aucune fonction moyenne $\mu(P)$ de $f(P)$ n'est continue au point $\mathfrak{S}$.

Le point $\mathfrak{S}$ est une *discontinuité de genre* (β) pour $f(P)$, lorsqu'il existe au moins une fonction moyenne $\mu(P)$ de $f(P)$, continue au point $\mathfrak{S}$.

Sur les exemples ci-dessus (21), $f(x)$ présente une discontinuité de genre (α), tandis que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ possèdent des discontinuités de genre (β), pour $x = o$.

En ce qui concerne le cas des discontinuités de genre (β), il y a à distinguer deux espèces différentes (β_1) et (β_2). La discontinuité de genre (β) en $\mathfrak{S}$ appartient à *l'espèce* (β_1), lorsque toutes les fonctions moyennes continues $\mu(P)$ prennent au point $\mathfrak{S}$ la même valeur $\mu(\mathfrak{S})$ et à *l'espèce* (β_2) lorsque cela n'a pas lieu.

C'est $\varphi(x)$, qui offre un exemple de discontinuité d'espèce (β_1) et $\psi(x)$ l'exemple d'une discontinuité d'espèce (β_2), pour $x = o$ (21).

23. Voici maintenant les caractères distinctifs des discontinuités ainsi définies, selon leur genre :

I. *Une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ présente au point $\mathfrak{S}$, où $\omega(\mathfrak{S}) > o$, une discontinuité de genre* (α), *lorsque*

$$\text{lim inf } M(P) < \text{lim sup } m(P), \quad \text{pour } P = \mathfrak{S}$$

et une discontinuité de genre (β), *lorsque l'on a, au contraire*

$$\text{lim inf } M(P) \geq \text{lim sup } m(P), \quad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

En effet, si la première condition est remplie, toute fonction moyenne $\mu(P)$ de $f(P)$ est discontinue en $\mathfrak{S}$. Car on déduit immédiatement de la définition d'une fonction moyenne

$$m(P) \leqq \mu(P) \leqq M(P),$$

les inégalités

$$lim\ inf\ \mu(P) \leqq lim\ inf\ M(P) \text{ et } lim\ sup\ \mu(P) \geqq lim\ sup\ m(P).$$

Avec la première condition de l'énoncé, cela donne

$$lim\ sup\ \mu(P) - lim\ inf\ \mu(P) \geqq lim\ sup\ m(P) - lim\ inf\ M(P) > o.$$

Or cela prouve que $\mu(P)$ est discontinue en $\mathfrak{S}$, quelle que soit la valeur $\mu(\mathfrak{S})$.

Si la seconde condition est par contre remplie, il est aisé de définir une fonction $\mu(P)$ continue en $\mathfrak{S}$. Donnons nous en effet une valeur pour $\mu(\mathfrak{S})$ satisfaisant aux inégalités

$$lim\ sup\ m(P) \leqq \mu(\mathfrak{S}) \leqq lim\ inf\ M(P).$$

Alors, en un point P,

a) si	$m(P) \leqq \mu(\mathfrak{S}) \leqq M(P)$	on pose	$\mu(P) = \mu(\mathfrak{S})$
b) si	$m(P) > \mu(\mathfrak{S})$	on pose	$\mu(P) = m(P)$
c) si	$M(P) < \mu(\mathfrak{S})$	on pose	$\mu(P) = M(P)$.

Prouvons la continuité de la fonction $\mu(P)$, ainsi définie, en $\mathfrak{S}$.

Il existe en effet un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que pour tout $P \neq \mathfrak{S}$, intérieur à Δ, l'on ait

$$m(P) - \varepsilon \leqq \mu(\mathfrak{S}) \leqq M(P) + \varepsilon,$$

puisque la valeur $\mu(\mathfrak{S})$ a été choisie à cette fin. Or des inégalités écrites plus haut, il s'ensuit qu'on a toujours en Δ

$$|\mu(P) - \mu(\mathfrak{S})| \leqq \varepsilon,$$

comme on le vérifie séparément en chacun des cas *a*, *b* et *c*, qui peuvent se présenter.

24. Voici de même les caractères distinctifs des espèces (β_1) et (β_2), définies plus haut (22) :

II. *Une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ présente au point P, où $\omega(P) > o$, une discontinuité d'espèce (β_1), lorsque*

$$\lim\inf M(P) = \lim\sup m(P), \qquad pour\ P = \mathfrak{S}$$

et une discontinuité d'espèce (β_2), lorsque

$$\lim\inf M(P) > \lim\sup m(P), \qquad pour\ P = \mathfrak{S}.$$

Si la discontinuité est d'espèce (β_1), donc de genre (β), il y a

$$\lim\sup m(P) \leq \lim\inf M(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}$$

Or, si l'on avait

$$\lim\sup m(P) < \lim\inf M(P),$$

on pourrait définir comme ci-dessus (23,I) une fonction moyenne $\mu(P)$, continue en $\mathfrak{S}$ et prenant une valeur arbitraire en $\mathfrak{S}$ dans l'intervalle vertical

$$\lim\sup m(P) \leq \mu(\mathfrak{S}) \leq \lim\inf M(P),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, selon laquelle toute fonction moyenne continue en $\mathfrak{S}$ y prend une valeur déterminée. On a donc

$$\lim\sup m(P) = \lim\inf M(P).$$

Réciproquement, montrons que, si cette égalité est satisfaite, la discontinuité est d'espèce (β_1).

Prouvons, en effet, que $\mu(P)$ ne peut être continue, si l'on choisit pour $\mu(\mathfrak{S})$ une valeur différente de la valeur commune

$$\lim\sup m(P) = \lim\inf M(P).$$

Supposons, par exemple, au contraire

$$\mu(\mathfrak{S}) < \lim\sup m(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

Avec un α positif convenable, il y aurait aussi

$$\mu(\mathfrak{S}) < \lim\sup m(P) - 2\alpha.$$

Mais on a vu (7, *b*) qu'en tout voisinage Δ_n de $\mathfrak{S}$ il existe un point $P_n \neq \mathfrak{S}$, tel que

$$m(P_n) > \lim\sup m(P) - \alpha,$$

pour α donné. Donc, *à fortiori*, il y aurait

$$\mu(\mathfrak{S}) < m(P_n) - \alpha \leq \mu(P_n) - \alpha$$

c'est-à-dire

$$\mu(P_n) - \mu(\mathfrak{S}) > \alpha$$

pour des points P_n tendant vers $\mathfrak{S}$, ce qui contredit la continuité de $\mu(P)$ en $\mathfrak{S}$. On montrera de même, qu'on ne peut pas avoir, non plus

$$\mu(\mathfrak{S}) > \lim\inf M(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

Cela finit de justifier l'énoncé, si l'on tient compte de la réciprocité des propositions contraires.

25. On a les propositions suivantes :

III. *Une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ ne peut présenter qu'un ensemble de première catégorie de discontinuités de genre* (α).

L'ensemble E des discontinuités de genre (α) est de première catégorie, puisque toute fonction moyenne de $f(P)$ étant discontinue en tout point $\mathfrak{S}$ de E, il en résulte que l'ensemble E est un sous-ensemble de E_1, qui est l'ensemble des discontinuités de la fonction moyenne particulière

$$\mu(P) = \frac{1}{2}[M(P) + m(P)].$$

Or, cette fonction est ponctuellement discontinue comme somme de $\frac{1}{2} M(P)$ et $\frac{1}{2} m(P)$, qui sont semi-continues supérieurement et inférieurement. Donc E_1 est de première catégorie et il en est de même de E.

26. L'on a

IV. *Une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ ne peut présenter qu'un ensemble de première catégorie de discontinuités de genre* (β_1).

Soit E l'ensemble des discontinuités de genre (β_1) de $f(P)$. On a, en tout point $\mathfrak{F}$ de E, $\omega(\mathfrak{F}) > o$ et

$$lim\ inf\ M(P) = lim\ sup\ m(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{F}.$$

Donc en $\mathfrak{F}$ l'une des deux inégalités suivantes est satisfaite :

$$lim\ sup\ M(P) - lim\ inf\ M(P) > o \text{ et } lim\ sup\ m(P) - lim\ inf\ m(P) > o,$$

ou bien l'on a en $\mathfrak{F}$

$$lim\ M(P) = lim\ m(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{F}$$

c'est-à-dire $lim\ \omega(P) = o$, pour $P = \mathfrak{F}$ et comme $\omega(\mathfrak{F}) > o$, on sait que cela n'arrive qu'en une infinité dénombrable ou en un nombre fini de points $\mathfrak{F}$, car $\mathfrak{F}$ est alors une discontinuité de genre *l*. (15.VII)

Mais l'ensemble des points, où chacune des deux inégalités mentionnées est satisfaite est un sous-ensemble de l'ensemble des points de discontinuité de $M(P)$ ou de $m(P)$ respectivement, qui sont de première catégorie. Il n'y a donc en tout, qu'un ensemble E de première catégorie de discontinuités de genre (β_1).

27. Enfin, il y a aussi la proposition

V. *Une fonction uniforme ou multiforme* $f(P)$ *ne peut présenter qu'un ensemble nul ou ouvert* [1]) *de discontinuités de genre* (β_2).

Soit E l'ensemble des discontinuités de genre (β_2). Il peut évidemment être nul, puisqu'il y a des fonctions $f(P)$ continues. Mais tout point $\mathfrak{F}$ de E est point intérieur de l'ensemble, donc l'ensemble E est ouvert.

En effet, si $\mathfrak{F}$ est un point E il y a par définition

$$lim\ inf\ M(P) > lim\ sup\ m(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{F}.$$

Posons

$$\Phi(P) = lim\ inf\ M(P) - lim\ sup\ m(P) > o.$$

On voit immédiatement (5) que $\Phi(P)$ est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que si l'on se donne un nombre positif ε, il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{F}$, tel qu'en tout point $\mathfrak{F}'$ de Δ l'on ait

$$\Phi(\mathfrak{F}') > \Phi(\mathfrak{F}) - \varepsilon$$

[1]) Dans l'espace à n dimensions, si $f(P)$ est une fonction de n variables.

Mais si ε est choisi assez petit, on a en tout point $\mathfrak{P}'$ de Δ

$$\Phi(\mathfrak{P}') > o,$$

c'est-à-dire

$$lim\ inf\ M(P) > lim\ sup\ m(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{P}'$$

et tous les points de Δ appartiennent à E. *c. q. f. d.*

28. Selon une remarque faite plus haut (17), il est nécessaire de s'assurer, que les propriétés qui peuvent apparaître sur un ensemble de première catégorie se présentent effectivement sur de tels ensembles, en certains cas particuliers.

Avant d'examiner de tels exemples, concernant la distribution des discontinuités de genre (α) et de celles d'espèce (β_1), nous allons définir des opérations géométriques, qui nous seront souvent utiles.

Soit E l'ensemble parfait non dense de *Cantor*, défini sur un intervalle (a, b). On l'obtient par les opérations suivantes :

On divise l'intervalle (a, b) en trois parties égales et l'on extrait l'intervalle ouvert moyen. C'est l'opération $\mathcal{E}_1$. On répète cette opération $\mathcal{E}_1$ sur chacun des intervalles restants, c'est l'opération $\mathcal{E}_2$. On répète l'opération $\mathcal{E}_1$ sur chacun des intervalles restants après l'opération $\mathcal{E}_2$. C'est l'opération $\mathcal{E}_3$. En continuant indéfiniment, il ne reste après les extractions d'intervalles, effectuées successivement par l'application des opérations $\mathcal{E}_1$ aux intervalles restants après l'opération $\mathcal{E}_n$, que l'ensemble parfait de *Cantor*.

Classons les intervalles extraits par les diverses opérations successives, en deux classes (p) et (i), selon la parité de l'indice n de l'opération $\mathcal{E}_n$ respective, par laquelle l'intervalle a été extrait. De cette manière, chaque intervalle contigu à l'ensemble parfait appartient à l'une des deux classes (p) et (i).

Tout point de l'ensemble parfait est à la fois limite d'intervalles des deux classes, comme on le constate aisément. Cette remarque est essentielle.

29. Voici un exemple de fonction uniforme $f(P)$ d'une variable, dont les discontinuités de genre (α) se présentent sur un ensemble linéaire de première catégorie, dense en (a, b) et non dénombrable.

On simplifie l'exposé, en donnant une définition géométrique de l'image de $f(P)$ dans le plan.

Soient donnés un carré quelconque K, possédant deux côtés parallèles à l'axe ox des abscisses et λ un intervalle de cet axe, intérieur à la projection Λ du carré, sur le même axe. Supposons qu'on ait distingué d'une certaine manière, un côté b du carré, parallèle à ox, qu'on appellera *base* et l'autre côté c du carré, parallèle à ox, qu'on appellera *côté opposé.*

Définissons deux *opérations géométriques* (G_1) *et* (G_2), *applicables à l'intervalle* λ, *par rapport au carré* K.

Ces opérations consistent dans la construction d'un nouveau petit carré k' se projetant en λ sur ox et intérieur à K, au sens large. La base de k' c'est le segment de projection λ sur ox, qui appartient à la base b de K, s'il s'agit de l'opération (G_1) ou au côté opposé c, s'il est question de (G_2).

Considérons maintenant l'ensemble parfait non dense de *Cantor*, construit sur la projection Λ de K. Les intervalles λ contigus à cet ensemble parfait, appartiendront à l'une des classes (p) et (i), définies plus haut (28). Appliquons à chaque intervalle λ, par rapport à K l'opération (G_1) ou (G_2), selon que λ lui-même appartient aux classes (p) ou (i). Cette construction définira, à partir du carré K, une infinité dénombrable de carrés intérieurs, dont la base b' c'est un segment de b ou de c. Désignons-là par l'expression: *l'opération* H, *appliquée au carré* K.

Prenons maintenant l'intervalle (a, b) de ox. Construisons sur (a, b) un carré H_0 de côté $a\,b$, situé en dessus de l'axe ox. Considérons-le comme carré K, de base $a\,b$ et appliquons-lui l'opération (H). On obtient une infinité dénombrable de carrés H_1, intérieurs à H_0.

On répète l'opération (H) sur chaque carré H_1, qui est un K et l'on obtient une infinité dénombrable de carrés H_2 intérieurs aux carrés H_1. Par itération indéfinie de l'opération (H), on obtient successivement les carrés $H_0, H_1, H_2, \ldots \ldots$

Figurons sur (a, b) l'ensemble E de première catégorie et dense en (a, b), dont nous nous sommes déjà servi ci-dessus (18).

Evidemment, les projections des carrés H_n représentent les intervalles contigus à l'ensemble parfait $(E_1 + E_2 + \ldots + E_n)$. Tout point P de ces intervalles est la projection d'un point déterminé π_n, appartenant à la base d'un carré H_n, qui est située sur la base ou sur le côté opposé d'un carré H_{n-1}.

Soit O_n l'ensemble complémentaire de l'ensemble parfait $(E_1 + E_2 + \ldots + E_n)$. Tout point de O_n appartient à $c\,E_1$, à $c\,E_2, \ldots$, à $c\,E_n$. Tout point $\mathfrak{F}$ de E_n est point limite de points de $E_n, E_{n+1}, \ldots$ et il est isolé des points de E_1, E_2, ..., E_{n-1}. Tout point de $c\,E$ appartient à tous les ensembles O_n et $c\,E$ est dense en (a, b).

Cela posé, définissons d'abord la fonction φ_n (P) sur O_n en lui attribuant la valeur de l'ordonnée $P\pi_n$, en chaque point P de O_n.

L'image de φ_n (P) ce sera un ensemble de segments ouverts, parallèles à ox, bases des carrés H_n. On définit aussi φ_0 $(P) = o$ sur (a, b).

Voici enfin la définition de $f\,(P)$. Sur E, soit P un point de E_n. On pose $f\,(P) = \varphi_{n-1}$ (P). Sur $c\,E$, on pose $f\,(P) = lim\ \varphi_n\,(P)$, pour $n = \infty$. Cette limite existe.

En effet, tout point $\mathfrak{P}$ de $c\,E$ est point de O_n pour tout n et le point π image de $f\,(P)$, c'est le point limite unique des points π_n, qui appartiennent à la base des carrés successifs H_n. Car le côté de ces carrés tend vers zéro, puisque le côté du plus grand carré H_n est $\frac{a\,b}{3^n}$ et d'autre part chaque carré H_n est intérieur à un carré H_{n-1}, ce qui prouve l'existence de la limite de $\mathfrak{P}\pi_n$ et l'on a posé $f\,(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\pi = lim\ \mathfrak{P}\pi_n$.

La fonction $f\,(P)$ est continue en tous les points $\mathfrak{P}$ de $c\,E$. En effet considérons le point π_n correspondant à $\mathfrak{P}$ et le carré H_n, qui le contient. Au voisinage de $\mathfrak{P}$ tous les points de $f\,(P)$ sont contenus en ce carré, dont le côté est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$.

Soit donné un ε positif. Il existe un n, tel que tout carré H_n ait le côté plus petit que ε et il en existe un, contenant le point π. Donc l'oscillation de $f\,(P)$ dans l'intervalle projection du côté de ce carré est plus petite que ε, ce qui suffit à prouver la continuité de $f\,(P)$ en $\mathfrak{P}$.

D'autre part tout point $\mathfrak{P}$ de E_n est point de discontinuité de genre (α). Car ce point est limite d'intervalles λ_n contigus à l'ensemble parfait $(E_1 + E_2 + \ .\ \ .\ \ + E_n)$ et à chaque intervalle λ_n correspond un carré H_n, dont la base est située sur la base ou sur le côté opposé d'un carré H_{n-1}. Mais comme la longueur de chaque intervalle et donc le carré H_n tend vers zéro, lorsque l'intervalle λ_n tend vers $\mathfrak{P}$, il s'ensuit que $f\,(P)$ ne présente en $\mathfrak{P}$, que deux valeurs limites distinctes. Mais chacun des points limites de $f\,(P)$ en $\mathfrak{P}$ est aussi limite des points de continuité contenus dans les carrés H_n, qui tendent en projection vers le point $\mathfrak{P}$. Or cela suffit visiblement, pour que le point $\mathfrak{P}$ soit de genre (α), puisque aux points de continuité il y a $M\,(P) = m\,(P)$ et que les deux valeurs limites étant u et v, on a, en désignant par λ' et λ'' des valeurs limites,

$$u = \lambda'\ M\,(P) = \lambda'\ m\,(P) > v = \lambda''\ M\,(P) = \lambda''\ m\,(P), \text{ pour } P = \mathfrak{P}$$

et par suite

$$lim\ sup\ m\,(P) > lim\ inf\ M\,(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

En tous les points de E, $f\,(P)$ présente des discontinuités de genre (α).

30. Il est plus facile de fournir un exemple d'une fonction uniforme $f\,(P)$ d'une variable, dont les discontinuités d'espèce (β_1) se présentent sur un ensemble linéaire de première catégorie, dense en (a, b) et non dénombrable.

On peut citer la fonction $f\,(P)$, antérieurement envisagée (18), comme exemple de fonction possédant un ensemble de première catégorie de discontinuités de genre *II*.

En tout point de cE, on a $f\,(P) = o$ et la fonction y est continue, donc $M\,(P) = o$. Comme cE est dense en (a, b) en tant qu'ensemble complémentaire d'un ensemble de première catégorie, on a en tout point $\mathfrak{S}$, puisque $f\,(P) \geqq o$ en (a, b)

$$lim\ inf\ M\,(P) = o, \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

D'autre part, en tout point de (a, b) on a $m\,(P) = o$, puisque $f\,(P) = o$ sur cE, dense en (a, b) et que $f\,(P) \geqq o$ en (a, b). Il en résulte évidemment, en tout point $\mathfrak{S}$,

$$lim\ m\,(P) = lim\ sup\ m\,(P) = o, \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

Considérons les points $\mathfrak{S}$, où $\omega\,(\mathfrak{S}) > o$. Ce sont les points de discontinuité. Ils sont d'espèce (β_1), puisque

$$lim\ inf\ M\,(P) = lim\ sup\ m\,(P)$$

31. Ajoutons quelques remarques [1]).

Une fonction ponctuellement discontinue ne peut présenter que des discontinuités de genre (α) et des discontinuités d'espèce (β_1). Cela résulte immédiatement des propositions ci-dessus.

La classification des discontinuités, selon l'un ou l'autre des points de vue [2]) adoptés dans ce chapitre (II), s'étend [3]) sans modification aux

[1]) Les résultats ci-dessus (Chap. I. A) seront complétés et précisés plus loin (Chap. IV, 49).

[2]) Les classifications indiquées n'ont eu pour but, que de présenter d'une manière systématique des exemples de propriétés de voisinage.

[3]) cf. *Fl. Vasilesco,* Sur les fonctions multiformes de variables réelles (these, Paris 1925, Note, page 79) pour un problème particulier concernant les fonctions multiformes.

fonctions uniformes ou multiformes, définies sur un ensemble parfait. Sauf le changement à apporter aux définitions, les propositions concernant leur distribution subsistent, comme il est facile de le vérifier en chaque cas.

CHAPITRE III.

Maximums et minimums des fonctions uniformes.

32. Les propriétés exposées jusqu'ici font ressortir le fait essentiel suivant. Si l'on choisit par une définition convenable certains points, où la fonction $f(P)$ possède des propriétés particulières, il en résulte souvent une proposition concernant la distribution de ces points. Or on a distingué depuis longtemps, pour les fonctions de variables réelles, les points où la fonction présente un maximum ou un minimum.

Il s'agit de reprendre cette distinction ancienne, du point de vue spécial indiqué ci-dessus. C'est-ce que nous allons faire, en partant du cas particulier des fonctions continues.

A. *Propriétés des fonctions continues.*

33. Soit $f(P)$ une fonction *continue* de n variables réelles. Selon la définition classique de l'analyse, $f(P)$ *présente un maximum au point* $\mathfrak{S}$, lorsqu'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que

$$f(\mathfrak{S}) \geqq f(P)$$

pour tout point P de Δ.

Si l'on veut qu'une fonction constante au voisinage de $\mathfrak{S}$ ne puisse être considérée comme présentant un maximum en ce point, on peut exiger qu'il y ait dans tout voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ au moins un point P, tel que

$$f(\mathfrak{S}) > f(P).$$

On dira en ce cas, que le maximum est *effectif* [1]). Il y a deux cas importants à distinguer : $f(P)$ présente en $\mathfrak{S}$ un maximum, *au sens*

---

[1]) Ce cas sera toujours spécifié. Sinon, il s'agit d'un maximum *effectif ou non.*

strict, s'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que pour tout $P \neq \mathfrak{S}$ il y ait $f(\mathfrak{S}) > f(P)$ et un maximum *au sens large,* dans le cas contraire.

Tout maximum strict[1]), c'est un maximum effectif et lorsqu'un maximum au sens large n'est pas effectif, c'est qu'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, où $f(P)$ est constante. Appelons un tel point $\mathfrak{S}$, *point de niveau* de la fonction $f(P)$.

On donne des définitions en tout point pareilles pour les *minimums*, en changeant seulement le signe d'inégalité $>$ en $<$.

Lorsqu'un minimum[2]) au sens large n'est pas effectif, c'est toujours un point de niveau. Un tel point appartient donc en même temps aux maximums et minimums (non effectifs).

Tout point $\mathfrak{S}$ qui n'est ni un maximum, ni un minimum (donc ni un point de niveau) ce sera, par définition, un *point intermédiaire* de la fonction *$f(P)$.*

On a établi de cette manière une classification complète des points support d'une fonction continue.

34. Une remarque faite depuis longtemps, c'est qu'une fonction peut présenter un ensemble continu de maximums au sens large[3]).

D'autre part, il n'est pas difficile de se donner un exemple, où les maximums stricts ne se présentent pas en des points isolés (35).

On a pourtant la proposition

I. *Une fonction continue $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble fini ou dénombrable de maximums et minimums, au sens strict.*

En effet, soit l'ensemble des points $\mathfrak{S}$, où $f(P)$ présente un maximum strict et donnons-nous une suite indéfinie de nombres positifs, décroissant vers zéro

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \ldots \ldots$$

Enfermons chaque point $\mathfrak{S}$ de E en une sphère de centre $\mathfrak{S}$ et de rayon $\delta(\mathfrak{S})$, telle que l'on ait

$$f(\mathfrak{S}) > f(P),$$

---

1) Abréviation usuelle.

2) Tant qu'il n'y a pas de confusion à craindre l'on dira indifféremment: «*$f(P)$* présente un maximum en $\mathfrak{S}$» ou bien «$\mathfrak{S}$ c'est un point de maximum de *$f(P)$*» ou un maximum de *$f(P)$*», comme on le fait d'habitude.

3) cf. *Ed. Goursat,* Cours d'Analyse, Paris, 1917, page 109, note

pour tout point P intérieur à la sphère. Choisissons pour chaque point $\mathfrak{P}$, parmi les sphères satisfaisant à cette condition, celle dont le rayon est le plus grand des nombres ε_1, ε_2......, qui conviennent. C'est la sphère S.

Faisons la remarque essentielle suivante:

Si $\Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'')$ est la distance de deux points $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ appartenant à E, l'une au moins des inégalités

$$\delta(\mathfrak{P}') \leqq \Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'') \quad \text{et} \quad \delta(\mathfrak{P}'') \leqq \Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'')$$

est satisfaite.

Car sinon l'on aurait simultanément

$$\delta(\mathfrak{P}') > \Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'') \quad \text{et} \quad \delta(\mathfrak{P}'') > \Delta(\mathfrak{P}' \ \mathfrak{P}'').$$

Mais cela signifierait que la distance des deux points $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ est plus petite que le rayon de chaque sphère, c'est-à-dire que chaque point est intérieur à la sphère attachée à l'autre. On aurait donc simultanément $f(\mathfrak{P}') > f(\mathfrak{P}'')$ et $f(\mathfrak{P}'') > f(\mathfrak{P}')$ ce qui est absurde.

Cela posé, considérons l'ensemble E_q des points de E, dont le rayon de la sphère attachée dépasse un ε_q donné, c'est-à-dire $\delta(\mathfrak{P}) > \varepsilon_q$. Soient $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ deux points quelconques de cet ensemble. L'une des inégalités

$$\Delta(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) \geqq \delta(\mathfrak{P}_1) > \varepsilon_q \quad \text{ou} \quad \Delta(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) \geqq \delta(\mathfrak{P}_2) > \varepsilon_q$$

est satisfaite. On a donc sûrement

$$\Delta(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) > \varepsilon_q.$$

L'ensemble E_q est donc tel que la distance entre deux quelconques de ses points dépasse ε_q. C'est un ensemble isolé, donc fini ou dénombrable (11).

D'autre part, l'ensemble E peut être donné (en considérant la suite ε_1, ε_2,......) comme somme des ensembles E_q,

$$E = E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_q + \ldots.,$$

car pour tout point $\mathfrak{P}$ de E, il y a $\delta(P) > \varepsilon_q$, avec un ε_q convenable.

L'ensemble E des points où $f(P)$ présente un maximum strict es donc fini ou dénombrable, comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables.

35. Le résultat exprimé par la proposition précédente paraît dépourvu d'interêt, si l'on n'envisage pas la possibilité pour $f(P)$ de présenter en certains cas un ensemble dense de maximums et minimums stricts [1]).

En voici un exemple, que nous présenterons sous forme géométrique pour en simplifier la définition.

Pour décrire l'image de $f(P)$, fonction continue d'une variable dans le plan, on commence par la définition d'une *opération géométrique* (μ), applicable à un segment de droite AB, incliné d'un angle non nul sur ox et sur oy. Soit C le milieu de AB. Menons par A et B deux parallèles Aa et Bb, situées dans les angles aigus $\hat{A}$ et $\hat{B}$ de AB avec l'horizontale (parallèle à ox) et par C la verticale ab. Menons aussi par C une droite cc, comprise dans l'angle aigu $\hat{C}$ de AB avec la verticale. Soient C' et C'' les intersections de cc avec Aa et Bb. On obtient une figure F. formée de deux triangles au même sommet CAa et CBb. En partant de C on peut tracer dans le triangle CAa et en s'appuyant alternativement sur Aa et AC une ligne polygonale indéfinie, dont les sommets reposent sur ces droites et dont tous les côtés font avec oy les mêmes angles que cc et sa symétrique par rapport à oy. Le point A est donc point limite d'une infinité de côtés de la ligne polygonale. Cette ligne polygonale est reproduite par une symétrie en rapport avec le point C, dans le triangle CBb.

On obtient l'image d'une fonction présentant un ensemble E dense en (a, b) de maximums et minimums, au sens strict, en répétant indéfiniment l'opération géométrique (μ), sous certaines conditions, par rapport à tout segment de la ligne polygonale et à ceux qui apparaissent par l'application de cette opération.

On applique l'opération (μ) à AB et l'on obtient une ligne poly-

---

[1]) Si une fonction d'une variable $f(x)$ était dérivable et possédait des maximums et minimums stricts en tout intervalle, la dérivée s'annulerait aussi pour un ensemble non dénombrable de points, où la fonction ne présenterait ni maximums, ni minimums stricts. Car, pour les fonctions dérivées, qui s'annulent dans tout intervalle, *M. D. Pompeiu* a montré, depuis longtemps (Math. Annalen, t. 63, pages 327 et suivantes), que les points où la dérivée s'annule sont les points de continuité de la dérivée et réciproquement. Or la dérivée étant ponctuellement discontinue, l'ensemble de ses zéros est de seconde catégorie et par suite non dénombrable.

gonale L_1, image d'une fonction à une infinité dénombrable de maximums stricts. Soit $A_1 B_1$ l'un quelconque de ses côtés. Désignons par α_0 les angles égaux $a A C = bB C$ des deux parallèles Aa et Bb avec $A B$ et par γ_0 les angles égaux $a CC' = b CC''$ de cc avec la verticale.

En appliquant l'opération (μ) à tout côté $A_1 B_1$ de L_1, il faut avoir soin de prendre, avec des notations analogues, $\alpha_1 < \alpha_0$ et $\gamma_1 < \gamma_0$. On trouve une nouvelle ligne polygonale L_2, dont l'un quelconque des côtés est noté par $A_2 B_2$. En appliquant (μ) à tout $A_2 B_2$, il faut avoir $\alpha_2 < \alpha_1$ et $\gamma_2 < \gamma_1$ et ainsi de suite indéfiniment, avec la précaution de choisir les α_n et γ_n, respectivement, de manière qu'ils tendent vers zéro. Il n'y a, par exemple, qu'à poser toujours $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$ et $\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n}{2}$.

La courbe limite Γ des lignes polygonales construites, ce sera l'image de $f(P)$.

Cette courbe limite Γ existe. En effet, à tout point P de (a, b) correspond une suite de points π_n des lignes polygonales L_n se projetant en P. Il n'existe pas deux points limites des π_n, car il existerait alors, pour n aussi grand qu'on veut, deux points π_n dont l'écart soit fini. Or cela est exclu, puisque la distance verticale de deux points de L_n et de L_{n+p}, de même abscisse est au plus égale à $A_n B_n$, par suite de la définition.

La courbe Γ est continue. Car, à cause des conditions imposées aux angles α_n et γ_n, toute figure $F_n = A_n a_n b_n B_n$ construite sur $A_n B_n$ contiendra les figures F_{n+1} construites sur $A_{n+1} B_{n+1}$, qui est intérieur à F_n Il s'ensuit qu'un point limite π de projection $\mathfrak{P}$, est intérieur à une infinité de figures F_n, qui contiennent les images de toutes les valeurs de $f(P)$, au voisinage de $\mathfrak{P}$. Et comme la plus grande dimension de F_n tend vers zéro avec $A_n B_n$, donc avec $\frac{1}{n}$, il résulte que Γ est continue au point π.

Soit $f(P)$ la fonction continue ayant pour image Γ. Elle présente un ensemble dénombrable de maximums et minimums stricts. Car, en tout point voisin d'une extrémité A_n ou B_n, d'un côté fini $A_n B_n$, la fonction $f(P)$ a son image dans le plan intérieure à deux figures F_n adjacentes et par suite on a soit $f(a_n) < f(P)$, soit $f(b_n) > f(P)$, selon le cas, pour tout point P appartenant à un intervalle qui est la projection des deux côtés adjacents de L_n, ayant A_n ou B_n pour extrémité. Lorsque n tend vers l'infini, les inégalités subsistent, car les points A_n et B_n conservent leur position dans les lignes polygonales L_n consécutives, tandis que les points des figures F_{n+p} restent intérieurs à F_n, au voisinage des points A_n et B_n, pour tout $p \geqq 1$, ce qui prouve qu'aux points a_n et b_n, projection des points A_n et B_n, $f(P)$ présente des maximums ou minimums au sens strict. L'ensemble E de ces points est dense en (a, b). [1]

36. On a aussi la proposition suivante, conséquence des définitions:

II. *Tout maximum (effectif), au sens large, d'une fonction continue $f(P)$ est limite de maximums (effectifs).*

Car, si $\mathfrak{S}$ est un point de maximum, au sens large, de $f(P)$ on a

$$f(\mathfrak{S}) \geqq f(P)$$

pour tout point P d'un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ et il faut qu'en tout voisinage Δ' de $\mathfrak{S}$ il y ait un point $P' \neq \mathfrak{S}$, tel que $f(\mathfrak{S}) = f(P')$. Mais si le maximum est aussi effectif, comme nous le supposerons d'abord, il y a en Δ' un point P'', tel que $f(\mathfrak{S}) > f(P'')$.

En chaque Δ' on choisit un des points P' qui n'est pas point de niveau de $f(P)$ en procédant comme il suit: Soit E l'ensemble des points P'. Il est fermé en Δ', intervalle fermé, car $f(P)$ est continue. Mais l'ensemble E est non dense en Δ', puisqu'il est fermé et qu'il existe en Δ' le point P'' de cE.

Soit P' un point frontière de E. Dans tout voisinage Δ_1 de P', il y a toujours un point P'' de cE. Il y a donc $f(\mathfrak{S}) = f(P')$, mais $f(\mathfrak{S}) \geqq f(P)$ en Δ, donc en Δ_1. Il s'ensuit

$$f(P') \geqq f(P)$$

en Δ_1 et il y a un point P'' en Δ_1, tel que

$$f(P') > f(P'').$$

Mais Δ_1 est un voisinage de P', ce qui prouve que P' est un point de maximum effectif. Cela prouve l'énoncé, puisqu'on a trouvé un tel point P' en tout voisinage Δ' de $\mathfrak{S}$.

Si le maximum large en $\mathfrak{S}$ est effectif ou non, on prouve simple-

---

[1]) La fonction $f(P)$ offre un exemple de fonction continue »sans dérivée«, car en un point de E il y a quatre nombres dérivés finis et distincts, tandis qu'il y a des dérivées infinies aux points de cE. Un exemple de fonction possédant un ensemble E dense de maximums et minimums au sens strict est aussi offert par la fonction de *M. H. v Koch* (citée par *M. E. Picard*, Traité d'Analyse, t. I, 1922, page 242), qui est donnée comme exemple de fonction continue sans dérivée et dont la définition a aussi un caractère géométrique.

ment qu'il y a en tout voisinage Δ' de $\mathfrak{S}$ un maximum effectif ou non, car tel est le cas pour le point P' de Δ pour lequel on a $f(\mathfrak{S}) = f(P')$. Ce résultat peut s'énoncer aussi :

III. *Les points isolés de l'ensemble des maximums et minimums d'une fonction continue $f(P)$ sont des maximums ou des minimums au sens strict.*

Il y a aussi la proposition suivante, conséquence directe de la définition :

IV. *Une fonction continue $f(P)$ de n variables réelles présente un ensemble nul ou ouvert de points de niveau.*

En effet, le point de niveau est intérieur à un domaine Δ à n dimensions, où $f(P)$ est constante, donc dont tous les points sont des points de niveau. Chaque point de niveau de $f(P)$ est donc un point intérieur de l'ensemble des points de niveau de $f(P)$ et cela suffit à prouver que l'ensemble est ouvert, dès qu'il contient un point.

37. Or, il existe une propriété intuitive des fonctions continues $f(x)$ d'une variable réelle définies sur un intervalle (a, b), qui indique l'existence d'un minimum de $f(x)$ dans l'intervalle linéaire, compris entre deux points de maximum effectif de $f(x)$. Il en résulte immédiatement que tout point de maximum effectif au sens large de $f(x)$ est non seulement point limite des points de maximum effectif, mais aussi point limite des points de minimum.

Cette remarque ne s'étend pas sans effort aux fonctions de plusieurs variables, définies dans un intervalle à n dimensions.

Nous allons donner tout d'abord quelques définitions de la théorie des ensembles, pour mieux préciser ce qui suit :

Un ensemble ouvert E de l'espace à n dimensions est *bien enchaîné*, lorsqu'on ne peut le considérer comme la somme de deux ensembles ouverts, à n dimensions, sans point commun.

Appelons domaine $\mathcal{D}$, à n dimensions, un ensemble, qui sauf certains points frontières est un ensemble ouvert bien enchaîné à n dimensions ou le complémentaire d'un tel ensemble [1]).

[1]) On s'assure de cette manière que le complémentaire d'un domaine par rapport à un intervalle qui le contient c'est toujours un domaine. Si l'on renonce par contre à cette condition assez naturelle, on arrive à poser d'une maniere plus brève la définition, seule utile ici, du domaine »*ordinaire*«.

Mais l'analyse, qui suit, a son intérêt propre.

Le domaine $\mathcal{D}$ est *ouvert*, si aucun point frontière de l'ensemble $\mathcal{D}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$ et *fermé*, si tous les points frontières de l'ensemble $\mathcal{D}$ appartiennent à $\mathcal{D}$. Tous les points d'un certain domaine ouvert sont *intérieurs au domaine* $\mathcal{D}$ et tous les points du complémentaire d'un certain domaine fermé sont *extérieurs au domaine* $\mathcal{D}$. L'ensemble des points frontières d'un ensemble quelconque et en particulier d'un domaine, c'est *la frontière* $\mathfrak{F}$ de l'ensemble ou respectivement du domaine.

Il faut remarquer que $\mathfrak{F}$ étant la frontière d'un ensemble quelconque E et de son complémentaire cE, les ensembles fermés

$$F_1 = E + \mathfrak{F} \quad \text{et} \quad F_2 = cE + \mathfrak{F}$$

obtenus en ajoutant respectivement, à l'ensemble E et à son complémentaire cE, la frontière $\mathfrak{F}$ peuvent avoir des frontières différentes de celles de E et de cE.

Un point P qui est point frontière de E et de cE, sans être aussi simultanément point frontière de F_1 et de F_2 s'appellera *point frontière singulier* de E et de cE. Si un point P est par contre point frontière des ensembles E, cE, F_1 et F_2, il s'appellera *point frontière ordinaire* de celles de E et de cE.

Si au voisinage d'un point $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{F}$ il n'y a pas des points extérieurs de E, on montre que $\mathfrak{S}$ n'est pas frontière de F_1 et c'est un point de $\mathfrak{F}$ *du premier genre*. Si au voisinage du point $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{F}$ il n'y a pas des points intérieurs de E on montre que $\mathfrak{S}$ n'est pas frontière de F_2 et c'est un point de $\mathfrak{F}$ *du second genre*. On peut aussi montrer sans difficulté, que tout point frontière singulier est du premier ou du second genre.

Les points frontières d'un domaine ouvert sont ordinaires ou bien singuliers du premier genre, tandis que les points frontières d'un domaine fermé sont ordinaires ou bien singuliers du second genre.

Tout domaine linéaire est un intervalle. Il ne possède donc que des points frontières ordinaires. De même tout domaine fermé, obtenu d'un domaine ouvert en lui ajoutant ses points frontières ou tout domaine ouvert, obtenu d'un domaine fermé par extraction de ses points frontières, ne possèdent que des points frontières ordinaires.

Nous conviendrons d'appeler dans ce qui suit un domaine, dont tous les points frontières sont ordinaires, *domaine ordinaire*. Tout complémentaire d'un domaine ordinaire est un domaine ordinaire.

Voici deux exemples simples de domaines plans, qui ne sont pas des domaines ordinaires. C'est, en premier lieu, celui défini par l'aire d'un carré, dont on supprime un point intérieur ou, en second lieu, celui défini par l'aire d'un carré à laquelle on ajoute le prolongement de l'un de ses côtés

Il est aussi nécessaire de poser quelques définitions nouvelles concernant l'allure de la fonction continue au voisinage d'un point frontière.

Une fonction continue $f(P)$ présente *par rapport à un domaine ordinaire D, un maximum marginal au point* $\mathfrak{S}$ de la frontière $\mathfrak{F}$ de D, lorsqu'il existe — par définition — un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que

$$f(\mathfrak{S}) \geqq f(P)$$

pour tout point P de Δ, intérieur à D, au sens strict.

On distinguera de même que plus haut (33), entre les maximums marginaux effectifs ou non, au sens strict ou large et des définitions pareilles seront posées pour les minimums marginaux, sauf le changement de signe des inégalités.

38. On a la proposition générale suivante:

V. *Si la fonction continue $f(P)$ présente, par rapport à un domaine ordinaire D des maximums marginaux effectifs, en tous les points de la frontière $\mathfrak{F}$ du domaine D* [1]*, la fonction présentera au moins un minimum à l'intérieur du domaine D.*

Considérons en effet la borne inférieure de $f(P)$ dans le domaine fermé, obtenu en ajoutant à D sa frontière $\mathfrak{F}$. Cette borne y sera atteinte sur un ensemble de points E fermé, car $f(P)$ est continue. Supposons que l'ensemble frontière de E contienne un point $\mathfrak{S}$, intérieur à D. Alors $f(P)$ y présente un minimum. Au voisinage de $\mathfrak{S}$ il y a donc des points P de cE, tels que $f(\mathfrak{S}) > f(P)$ et le minimum est effectif. Si E ne possède aucun point frontière intérieur à D, la borne inférieure de $f(P)$ est atteinte aux points frontières de E, situés tous sur $\mathfrak{F}$. En un tel point $\mathfrak{S}$, $f(P)$ possède pourtant un maximum marginal, ce qui est absurde, car il est effectif, par hypothèse. En cas contraire, il s'ensuit qu'on a $f(P) = f(\mathfrak{S})$ au voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, intérieur à D, c'est-à-dire

[1]) Elle est évidemment constante sur la frontière $\mathfrak{F}$, comme me le fit remarquer *M. Denjoy* et qu'il résulte aussi de la proposition (41, IX) plus bas, mais cela n'intervient pas dans nos démonstrations.

en $D.\Delta$, qui n'est pas nul, puisque le domaine est ordinaire. En tout point P de $D.\Delta$, intérieur à D, on a donc un point de niveau qui est un minimum (large).

La propriété intuitive, rappelée ci-dessus (37), d'une fonction de variable réelle correspond à la propriété générale suivante, que l'on peut maintenant établir :

VI. *Si la fonction continue $f(P)$ de n variables réelles, présente des maximums effectifs, en tous les points $\mathfrak{S}$ d'une frontière $\mathfrak{F}$ d'un domaine ordinaire D, la fonction $f(P)$ présente au moins un minimum intérieur à D.*

La démonstration de cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente. Car il suffit de remarquer, que si $f(P)$ présente en $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{F}$ un maximum (effectif), alors $f(P)$ présente en $\mathfrak{S}$, par rapport à D, un maximum marginal (effectif).

Revenons enfin à la remarque qu'il s'agissait d'étendre. On reprend la proposition (36, II) antérieure. Tout maximum effectif au sens large de $f(P)$ est point limite de maximums effectifs. Soit Δ le voisinage de $\mathfrak{S}$, point de maximum effectif au sens large de $f(P)$ et E l'ensemble des points de Δ, maximums effectifs de $f(P)$.

Il peut arriver, que pour tout voisinage Δ, l'ensemble E contienne une frontière $\mathfrak{F}$ de domaine ordinaire. Alors il s'ensuit de la proposition précédente, que $\mathfrak{S}$ sera aussi limite de minimums effectifs et l'on peut énoncer

VII. *Si l'ensemble des points de maximum effectif, qui tendent vers un point $\mathfrak{S}$ de maximum effectif au sens large d'une fonction continue $f(P)$, contient dans tout voisinage de $\mathfrak{S}$ un sous-ensemble, frontière d'un domaine ordinaire, alors le point $\mathfrak{S}$ de maximum pour $f(P)$ ce sera aussi un point limite de minimums.*

39. Il y a deux remarques à ajouter.

En premier lieu, il faut observer que la condition posée dans la proposition précédente (38, VII) est satisfaite d'elle-même dans le cas des ensembles linéaires. En effet, tout domaine linéaire est ordinaire et se réduit à un intervalle.

Mais la frontière de tout domaine linéaire, c'est un ensemble formé par deux points[1]).

Il en résulte que tout point limite $\mathcal{S}$ d'un ensemble linéaire est limite de frontières de domaines ordinaires.

Comme cette propriété ne s'étend pas aux ensembles à plusieurs dimensions, il est clair que la propriété d'un maximum large d'être point limite de minimums ne peut s'étendre au cas général, sans les conditions supplémentaires indiquées.

En second lieu, il faut observer que nous nous sommes exclusivement occupés des fonctions $f\ (P)$ continues, définies en tout point de l'espace. Si $f\ (P)$ est elle-même définie dans un domaine, les résultats exprimés par les propositions du paragraphe précédent (38), qui ne concernent plus des propriétés locales, peuvent-être en défaut si l'on ne précise pas la nature du domaine $\mathcal{D}$, où $f\ (P)$ est définie. Admettons, pour simplifier, que ce soit un domaine ordinaire. Cela ne suffira pas Il est nécessaire aux démonstrations, que les domaines ordinaires que nous y considérons soient contenus dans le domaine ordinaire $\mathcal{D}$, support de $f\ (P)$ et cette condition suffira pour que les propositions (38, V, VI, VII) subsistent[2]).

40. Nous allons montrer, à l'aide d'un exemple, que

VIII. *Une fonction continue de variables réelles peut présenter, en tout point, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, des maximums ou minimums effectifs.*

---

[1]) Cette remarque est importante, malgré son évidence, par les suggestions qu'elle offre pour les généralisations. Elle est due à *M. D. Pompeiu,* qui a souvent mis en évidence son utilité, quand on passe des fonctions harmoniques d'une variable aux fonctions harmoniques de plusieurs variables ou bien lorsqu'on considère les fonctions périodiques à une variable et qu'on recherche la généralisation à des espaces à plus d'une dimension.

[2]) Considérons l'exemple cité (34) du Cours d'Analyse de *M. Goursat,* d'une fonction $f\,(P)$ de deux variables, ayant pour image dans l'espace la moitié d'un tore, rapporté au plan diamétral comme plan des variables. Le méridien extrême est une ligne continue de maximums efectifs et pourtant $f\,(P)$ ne présente nulle part un minimum, à l'intérieur de la projection de ce méridien sur le plan diamétral Cela contredirait en apparence la proposition antérieure (28. VI), si la remarque précédente n'en rendait compte, puisque le domaine $\mathcal{D}$ de définition de $f\,(P)$ ne contient pas le domaine D, intérieur à la projection Γ du méridien considéré. Les domaines ordinaires D, intérieures à $\mathcal{D}$, devraient-être doublement connexes, de même que $\mathcal{D}$ (au sens usuel de ces mots).

Quant à l'exemple, il est facile d'en décrire l'image par des opérations géométriques. La fonction $f(P)$ à définir étant fonction d'une variable réelle, son image c'est un ensemble plan.

Soit (U) l'opération géométrique suivante, applicable à un segment S, parallèle à l'axe ox des abscisses. L'opération consiste à distinguer sur ce segment, d'une part les points d'un ensemble parfait non dense défini sur ce segment et de mesure égale à la moitié de la longueur l du segment S et de l'autre, les segments s de S, contigus à E.

On construit E, en imitant la construction de l'ensemble parfait non dense de *Cantor* (28). L'intervalle à extraire à chaque opération $\mathcal{E}_n$ aura toujours le même centre que l'intervalle restant de longueur λ, dont on l'extrait, mais sa longueur ce sera $\frac{\lambda}{2^{n+1}-1}$ au lieu de $\frac{\lambda}{3}$. On vérifie alors, que la mesure de E ce sera

$$l\left(1-\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1-\frac{1}{2^3-1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)\cdots\cdots,$$

c'est-à-dire $\frac{l}{2}$.

Les points de E et les intervalles contigus à E, distingués par l'opération (U) s'appelleront respectivement points (U) et segments (U). Ou désignera leur projection sur ox par points (u) et intervalles (u).

Construisons, sur chaque segment (U) comme base et en dessus du segment, un carré K. Il est clair que, de quelque manière qu'on définisse une fonction continue $f(P)$, dont l'image se confonde avec les points image (U), pour les points support (u) respectifs et reste intérieure aux carrés K pour les points des intervalles (u), $f(P)$ présentera un minimum effectif en chaque point (u), si $f(P)$ n'est pas constante sur chacun des intervalles (u).

Soit (V) l'opération géométrique suivante, applicable à un segment S parallèle à ox, désigné aussi par $A\,B$. Si $2l$ est la longueur de S, on définit par rapport à l'horizontale $A\,B$, considérée comme axe ox, une fonction $\varphi(P)$ symétrique par rapport à la verticale qui passe par le milieu M de $A\,B$, s'annulant aux extrémités du segment S et prenant la valeur l en M, de la manière suivante :

On distingue sur $A\,M$ un ensemble H parfait non dense de *Cantor*, qui est de mesure nulle. A chaque opération d'extraction $\mathcal{E}_n$, de rang n, on extrait 2^{n-1} intervalles et à la fin de cette opération on a déjà extrait en tout $(2^n - 1)$ intervalles aux opérations $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots \mathscr{E}_n$. Numérotons ces intervalles $\delta^n_1, \delta^n_2, \ldots$ de gauche à droite et posons sur chaque intervalle δ^n_k

$$\varphi(P) = \frac{kl}{2^n}.$$

Il faut prouver que cette définition des valeurs de $\varphi(P)$ est univoque. On remarquera, à cet effet, que δ^{n+1}_{2k} c'est le même intervalle que δ^n_k et la valeur de $\varphi(P)$ y est la même. Mais d'autre part la définition entraîne cette propriété remarquable : La valeur de $\varphi(P)$ sur l'intervalle δ^{n+1}_{2k+1} est la moyenne arithmétique des valeurs de $\varphi(P)$ sur les intervalles δ^n_k et δ^n_{k+1} entre lesquels il est situé. Dès lors, $\varphi(P)$ qui est continue est définie d'une manière univoque aussi sur H, car la limite des valeurs de $\varphi(P)$ sur les intervalles, qui tendent vers un point $\mathscr{G}$ de H est unique, puisque la fonction définie sur les intervalles est non décroissante et que l'ensemble cote de ses valeurs est dense.

La définition de $\varphi(P)$ se complète sur MB par symétrie. La fonction $\varphi(P)$ est donc une fonction continue non décroissante en AM et non croissante en MB. Elle présente donc un maximum en M, qui est effectif et même strict. La définition de $\varphi(P)$ inscrit son image dans le carré K, défini plus haut. C'est une fonction constante dans chaque intervalle contigu à l'ensemble H de *Cantor*.

Considérons maintenant l'image de $\varphi(P)$ comme attachée à un segment S donné. C'est la définition d'une opération géométrique (V).

Cette opération détermine un ensemble de points (V) dans le plan et un ensemble de nouveaux segments (V) qui, en projection sur ox, donnent respectivement les points (v) et les intervalles (v). Il est clair que, de quelque manière qu'on définisse une fonction $f(P)$, continue sur les intervalles (v), mais telle que l'image de $f(P)$ soit intérieure aux carrés K, construits sur les segments (V) et se confonde avec les extrémités des segments (V) aux points respectifs de ox, la fonction $f(P)$ sera continue en tous les points (v) et présentera un maximum strict en M.

Définissons $f(P)$ par son image.

On se donne l'intervalle (a, b). C'est un segment auquel on applique l'opération (U). Il en résulte un ensemble de points (U), image de $f(P)$ aux points support (u) et un ensemble de segments (U), auxquels on applique l'opération (V). On donne à $f(P)$ pour image les points (V), aux points support (v). On considère les segments (V). On leur applique à chacun l'opération (U) et $f(P)$ a pour image les points (U) aux points support (u). Et l'on continue de la sorte indéfiniment, en appliquant alternativement aux segments (V), qui apparaissent, l'opération (U) et en retenant pour image de $f(P)$ les points (U) aux points support (u) ou bien aux segments (U), qui apparaissent, l'opération (V) et en retenant pour image de $f(P)$ les points (V), aux points support (v).

Soient (w) les points de ox qui ne sont ni des points (u), ni des points (v). Un point (w) appartient alternativement aux intervalles (u) et (v). Considérons les points P situés sur les segments (U) et (V) apparaissant dans les opérations successives et se projetant en (w). Il est clair que les points successifs P ne se rapprochent jamais, dans le sens vertical, de leur projection (w). Ils tendent donc vers un point limite π, qui sera — par définition — l'image de $f(P)$ au point (w) considéré.

La fonction $f(P)$ sera continue en un point (w), car l'image (W) correspondante de $f(P)$ est située dans un carré K à chaque opération (U) ou (V), d'ailleurs chaque carré est intérieur aux carrés précédents et contient l'image de $f(P)$ au voisinage du point (w), tandis que la longueur des côtés du carré tend vers zéro.

Or $f(P)$ sera aussi continue aux points (u) et (v) puisque l'image de $f(P)$ est continue sur les intervalles contigus et contenue dans les carrés K. D'autre part $f(P)$ présente un minimum effectif en chaque point (u) et un maximum strict et donc effectif en chaque point pareil à M. Il y a un ensemble dénombrable et dense de maximums stricts.

Mais l'ensemble des points (u) de minimum, qui est aussi dense en (a, b) a une mesure égale à celle de (a, b). En effet, les opérations (V) laissent invariable la mesure des intervalles (u), auxquels elle s'applique pour obtenir les intervalles (v). Mais chaque opération (U) réduit de moitié la mesure des intervalles auxquels elle s'applique, de sorte que la mesure de l'ensemble complémentaire de celui des points (u) est nulle.

c. q. f. d.

41. On peut se demander si l'existence d'un ensemble de points intermédiaires est indispensable, comme l'indique l'intuition La réponse est affirmative et l'on a

IX. *Une fonction continue $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter en tout point des maximums ou minimums, sans se réduire à une constante.*

Soit la fonction $f\ (P)$, définie sur le continu et considérons l'ensemble E des points de niveau de $f\ (P)$. Sur cet ensemble $f\ (P)$ ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs différentes au plus,

$$(A) \qquad f_1, f_2, \quad . \ . \ . \ . \ . \ , f_n\, , \quad . \ . \ . \ .$$

En effet E est ouvert. Soit f' l'une des valeurs de $f\ (P)$ sur E et $\mathfrak{S}'$ un point tel que $f\ (\mathfrak{S}') = f'$. Attachons au point $\mathfrak{S}'$ un voisinage Δ', contenu en E, ce qui est possible, $\mathfrak{S}'$ étant point intérieur de E. Soit f'' une autre valeur de $f\ (P)$ sur E et $\mathfrak{S}''$ un point tel que $f\ (\mathfrak{S}'') = f''$. Attachons à $\mathfrak{S}''$ un Δ'' contenu en E. Les intervalles Δ' et Δ'' sont sans point commun, puisque $f\ (\mathfrak{S})$ est uniforme et que $f' \neq f''$. Or, il ne peut exister qu'une infinité dénombrable d'intervalles à n dimensions, sans point commun deux à deux, ce qui justifie notre assertion.

Soit Δ un intervalle symétrique à n dimensions, où $f\ (P)$ est définie. On divise chaque côté de l'intervalle en deux parties égales et l'on obtient 2^n intervalles fermés

$$\Delta'_1, \Delta'_2, \ . \ . \qquad . \ . \ \ , \Delta'_{2n}\, ,$$

de somme Δ. Si $f\ (P)$ n'est pas constante en Δ, elle y prend aussi d'autres valeurs que celles de la suite (A). Soit λ une telle valeur, comprise entre les bornes supérieures et inférieures de $f\ (P)$ en Δ. Dans aucun domaine Δ'_k il n'y a $f\ (P) = \lambda$, en tout point.

D'autre part il y a sûrement un intervalle Δ'_k tel qu'on ait en certains de ses points $f\ (P) > \lambda$ et en d'autres $f\ (P) < \lambda$. Contrairement, il y aurait en effet en tout Δ'_k, soit $f\ (P) \geqq \lambda$ pour un k donné, soit $f\ (P) \leqq \lambda$ pour cette valeur de l'indice k. Or on ne peut avoir dans tous les intervalles Δ'_k, l'inégalité $f\ (P) \geqq \lambda$ et il y aura aussi des intervalles, où $f\ (P) \leqq \lambda$. Il existe deux intervalles contigus, tels qu'il y ait dans l'un $f\ (P) \geqq \lambda$ et dans l'autre $f\ (P) \leqq \lambda$, car sans cela on aurait partout une seule de ces inégalités, ce qui est exclu par le choix de λ entre la borne supérieure et inférieure de $f\ (P)$ en Δ. Mais il n'est non plus possible qu'il y ait deux intervalles Δ'_k contigus, tels que dans l'un $f\ (P) \geqq \lambda$ et dans l'autre $f\ (P) \leqq \lambda$. Car, si $\mathfrak{S}$ est un point commun aux deux intervalles Δ'_k, l'on ne peut avoir dans un voisinage δ de $\mathfrak{S}$ convenable, que des points P tels que $f\ (\mathfrak{S}) \geqq f\ (P)$, puisque $\mathfrak{S}$ est, pour fixer les idées, un maximum effectif. Mais alors en tous les points communs à δ et à l'intervalle Δ'_k où $f\ (P) \geqq \lambda = f\ (P)$, il y aurait $f\ (P) = \lambda$ et l'un de ces points P serait un point de niveau pour lequel $f\ (P)$ prendrait la valeur λ, ce qui a été exclu, par le choix de λ.

En résumé, si $f(P)$ n'est pas constante en Δ, il existe donc au moins un intervalle symétrique Δ', dont les côtés ont une longueur moitié de celle de Δ, où $f(P)$ n'est pas constante et il existe des points tels que $f(P) > \lambda$ et $f(P) < \lambda$. On choisit un de ces intervalles Δ' et l'on répète la division, en procédant comme plus haut. On arrive, par itération indéfinie du procédé à trouver un point limite $\mathfrak{S}$ d'une infinité de domaines Δ, Δ', Δ'',... contenus (au sens large) les uns dans les autres et contenant des points où $f(P) > \lambda$ et $f(P) < \lambda$. Un voisinage de $\mathfrak{S}$ contient donc une infinité de tels points et le point $\mathfrak{S}$ c'est un point intermédiaire Son existence est donc démontrée, à moins que $f(P)$ ne se réduise à une constante. Mais, il y a plus :

X. *Une fonction continue $f(P)$ de n variables réelles, présente toujours un ensemble non dénombrable de points intermédiaires, à moins que ce ne soit une constante.*

Car si l'ensemble des points intermédiaires était dénombrable, il n'y aurait qu'à introduire dans la suite (A) de la démonstration précédente les valeurs que $f(P)$ prend en ces points. Cela nous amènerait par la même voie à la conclusion, qu'il existe toujours encore un point $\mathfrak{S}$ intermédiaire, où $f(P) = \lambda$, λ étant comprise en Δ entre la borne supérieure et inférieure de $f(P)$ en Δ et différente des valeurs de la suite (A).

Observons enfin pour finir, que

XI. *Unr fonction continue $f(P)$ de n variables réelles, qui ne se réduit pas à une constante, présente un ensemble de points intermédiaires, dont l'ensemble des points de condensation est dense*[1]) *sur l'ensemble complémentaire des points de niveau de la fonction.*

En effet, si l'ensemble H_i des points de condensation de l'ensemble E_i des points intermédiaires de $f(P)$ n'était pas dense sur l'ensemble $c\,E_n$, complémentaire de l'ensemble E_n des points de niveau de $f(P)$, il existerait au moins un point $\mathfrak{S}$ de $c\,E_n$, dont un voisinage Δ ne contiendrait aucun point de H_i et donc une infinité dénombrable, au plus, de points de E_i. Mais en Δ, $f(P)$ ne peut se réduire à une constante. D'autre part, $f(P)$ ne possèderait en Δ qu'une infinité dénombrable, au plus, de points intermédiaires, ce qui est exclu (X).

[1]) Un ensemble E est *dense sur un ensemble H*, dans un intervalle Δ, si H est compris (en Δ) dans le dérivé E' de E. Un *point de condensation* d'un ensemble E, c'est un point dont tout voisinage contient un ensemble non dénombrable de points de E.

B. *Propriétés des fonctions uniformes.*

42. La définition du maximum (minimum) donnée antérieurement (33) dans le cas des fonctions continues, peut se maintenir sans modification, lorsqu'il s'agit d'une fonction uniforme quelconque $f(P)$. De même pour les points de maximum (minimum) *au sens strict ou large, effectif ou non.* Mais il sera préférable de préciser dans tous ces cas, que l'on a affaire à un *maximum (minimum) atteint.*

Il peut y avoir, en effet, aussi des cas où une fonction uniforme $f(P)$, discontinue en $\mathfrak{P}$, présente en ce point un maximum qu'elle n'atteint pas, en entendant — pour l'instant — par cela, que la fonction $f(P)$ présenterait un maximum atteint, si l'on donnait à $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$ une autre valeur, convenable. Cette notion sera précisée plus loin, par une définition adéquate (43).

Enonçons auparavant la proposition générale, pareille à celle du cas des fonctions continues

I. *Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble fini ou dénombrable de points de maximum strict atteint.*

C'est-à-dire l'ensemble des points $\mathfrak{P}$, tels que l'on ait

$$f(\mathfrak{P}) > f(P),$$

pour tout P d'un voisinage Δ convenable de $\mathfrak{P}$, est fini ou dénombrable. On le démontre en répétant identiquement la démonstration donnée plus haut (34), pour le cas des fonctions continues. Il n'y est pas supposé la continuité de $f(P)$, mais seulement l'uniformité de la fonction.

43. Pour définir un maximum non atteint, il faut considérer le maximum $M_0(\mathfrak{P})$ de $f(P)$ au voisinage du point $\mathfrak{P}$ [1]).

Si l'on avait

$$f(\mathfrak{P}) \geqq M_0(\mathfrak{P}) \geqq f(P),$$

il est clair que $f(P)$ présenterait en $\mathfrak{P}$ un maximum atteint.

---

[1]) Ce maximum est un nombre ou la valeur d'une fonction. Ce n'est plus une propriété présentée par une fonction. Nous avons gardé la terminologie usuelle.

Ce n'est plus le cas si $f(\mathfrak{S}) < M_o(\mathfrak{S})$. C'est-ce qui suggère la définition suivante :

Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles présente en $\mathfrak{S}$ un *maximum non atteint* [1]), lorsqu'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que

$$M_o(\mathfrak{S}) \geqq f(P) \quad ^{2})$$

pour tout point P de Δ et qu'en plus

$$f(\mathfrak{S}) < M_o(\mathfrak{S}).$$

On serait tenté de définir comme plus haut le maximum strict non atteint, par la condition $M_o(\mathfrak{S}) > f(P)$ pour tout point P de Δ, tandis que $f(\mathfrak{S}) < M_o(\mathfrak{S})$. Mais cette double condition resterait sans conséquence sur la distribution de ces points.

On peut donner en effet un exemple de fonction satisfaisant partout à cette double condition. L'on peut, par exemple définir en $(o, 1)$ la fonction suivante $f(P)$ d'une variable :

Soit n un entier plus grand que l'unité et E_n l'ensemble des valeurs rationnelles de x, qui s'écrivent sous la forme du rapport irréductible $\frac{a}{n^p}$. En tout point de E_n, l'on pose

$$f(P) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Si E est l'ensemble somme des ensembles E_n et $c\,E$ le complémentaire de E, on pose $f(P) = o$ en tout point de $c\,E$. Or, chaque E_n est dense en $(o,1)$ et l'on a en tout point $M_o(\mathfrak{S}) = 1$, tandis que $f(\mathfrak{S}) < 1$, ce qu'il fallait prouver. La fonction $f(P)$ présente en tout point des maximums non atteints, effectifs.

C'est pourquoi nous choisirons la définition plus restrictive suivante :

Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles présente au point $\mathfrak{S}$ un *maximum strict non atteint*, si l'on a $f(\mathfrak{S}) < M_o(\mathfrak{S})$, en même temps que pour tout point P d'un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ l'on a

$$M_o(\mathfrak{S}) > M_o(P) \geqq f(P).$$

---

[1]) Le maximum (minimum) non atteint est effectif, sauf le cas où $f(P)$ est constant en Δ, excepté en $\mathfrak{S}$. Mais un maximum non effectif n'est plus un minimum non effectif, comme c'était le cas pour les maximums et minimums atteints.

[2]) Cette inégalité n'est pas satisfaite d'elle-même, car une suite de valeurs de $f(P)$ peut tendre aussi *en décroissant* vers $M_o(\mathfrak{S})$.

Or, il suffit de considérer la fonction $M_0(P)$ et de lui appliquer la proposition précédente (42, I) pour en conclure que

II. *Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble fini ou dénombrable de points de maximum strict non atteint.*

Ajoutons-y la définition d'un *point de niveau* de $f(P)$. C'est, comme pour le cas des fonctions continues (33), un point $\mathfrak{P}$ tel que $f(P)$ soit constante dans un intervalle qui contient $\mathfrak{P}$ à l'intérieur [1]).

La proposition antérieure (36,IV) se maintient et il y a :

III. *Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble ouvert de points de niveau.*

Faisons dès maintenant la remarque, qu'aux points de niveau $f(P)$ ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. Car il n'y a qu'une seule valeur de $f(P)$ pour chaque intervalle fermé qui constitue l'ensemble ouvert [2]).

44. On a eu ci-dessus (43) un exemple de fonction uniforme $f(P)$ non constante et qui présente partout des maximums effectifs non atteints. On peut se demander s'il existe une fonction $f(P)$ non constante, présentant partout des maximums et des minimums atteints. On a vu (41, IX) que $f(P)$ ne peut alors être continue dans un intervalle, sans se réduire à une constante. Il faut donc que $f(P)$ soit discontinue dans tout intervalle, où $f(P)$ n'est pas constante. Il y a

IV. *Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles, qui présente en tout point des maximums ou minimums, atteints ou non, doit présenter aussi un ensemble de points de discontinuité, dense sur l'ensemble complémentaire de l'ensemble des points de niveau, à moins qu'elle ne se réduise à une constante.*

---

[1]) Un point de niveau c'est un maximum et un minimum atteint, non effectif. Un maximum (minimum) non atteint n'est jamais un point de niveau, même s'il est non effectif.

[2]) Cf. *de la Vallée Poussin,* Intégrales de Lebesgue, etc. 1916, page 13, sur la structure d'un ensemble ouvert, qui est une somme d'intervalles fermés, pouvant avoir des points frontières communs.

Car si l'ensemble E_d des points de discontinuité de $f(P)$ n'était pas dense sur l'ensemble cE_n, complémentaire de l'ensemble E_n des points de niveau de $f(P)$, il en résulterait qu'il existe au moins un point $\mathfrak{S}$ de cE_n et un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ où $f(P)$ serait continue, sauf peut-être en $\mathfrak{S}$, ne s'y réduirait pas à une constante et présenterait partout des maximums et minimums, ce qui est impossible (41, X).

Un exemple des plus simples montre d'ailleurs, qu'une fonction uniforme $f(P)$ peut présenter partout des maximums et des minimums effectifs ateints. Il suffit de rappeler en effet la fonction $\varphi(x)$ de *Dirichlet* (21), qui présente en tout point d'abscisse rationnelle un minimum effectif atteint et en tout point d'abscisse irrationnelle un maximum effectif atteint.

45. On a vu qu'une fonction $f(P)$ peut ne présenter que des maximums effectifs non atteints, sans se réduire à une constante. Ce n'est plus le cas pour les maximums effectifs atteints. Car il y a

V. *Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter en tout point des maximums effectifs atteints.*

Supposons en effet le contraire et soit $f(P)$ une telle fonction. On remarquera de suite, que $f(P)$ est semi-continue supérieurement. Car, si $M(\mathfrak{S})$ est le maximum de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$, on a à cause de

$$f(\mathfrak{S}) \geqq f(P),$$

satisfaite pour tout point P du voisinage Δ de $\mathfrak{S}$,

$$f(\mathfrak{S}) = M(\mathfrak{S}).$$

Soit α une valeur donnée et un domaine fermé Δ_o. Ou bien l'on a partout $f(P) \neq \alpha$ en Δ_o, ou bien il existe en Δ_o au moins un point $\mathfrak{S}$, tel que $f(\mathfrak{S}) = \alpha$. Soit Δ' un voisinage de $\mathfrak{S}$, tel qu'il y ait en tout point P

$$f(P) \leqq f(\mathfrak{S}) = \alpha .$$

Considérons l'ensemble E des points P de l'intervalle fermé Δ', tels que $f(P) = \alpha$. C'est un ensemble fermé, car en tout point limite $\mathfrak{S}$ des points P on ne peut avoir $f(\mathfrak{S}) < \alpha$, puisqu'alors le point limite $\mathfrak{S}$ ne pourrait être un point de maximum atteint. Etant fermé l'ensemble E est non dense en Δ', sans quoi il contiendrait un intervalle, dont tout point serait un point de niveau pour $f(P)$, ce qui est exclu, par hypothèse. Soit Δ l'un des intervalles fermés à n dimensions contigus à E, c'est-à-dire contenant des points de E sur la frontière et n'en contenant pas à l'intérieur. On a en Δ, $f(P) \neq \alpha$ en tout point P, tandis qu'en un point $\mathfrak{P}$ de sa frontière, il y a $f(\mathfrak{P}) = \alpha$. Ce sera *„un intervalle Δ relatif à α et intérieur à Δ_0"*.

Cela posé, donnons-nous un ensemble cote H dénombrable, dense sur l'axe des cotes, comme ce serait par exemple l'ensemble des valeurs rationnelles,

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdot \cdot \cdot \cdot, \alpha_n, \cdot \quad \cdot \cdot$$

On détermine l'intervalle Δ_1, relatif à α_1 et intérieur à Δ_0. On considère $f(P)$ en Δ_1 et l'on y détermine l'intervalle Δ_2 relatif à α_2 et intérieur à Δ_1 et ainsi de suite pour l'infinité dénombrable des valeurs considérées. Si $f(P)$ ne prend pas une valeur α_n en Δ_{n-1}, on convient de poser Δ_n identique à Δ_{n-1}.

Il ne peut arriver qu'il existe un intervalle Δ_ω commun à tous les intervalles Δ_n, puisqu'alors en Δ_ω, $f(P)$ ne pourrait prendre aucune des valeurs considérées. Mais $f(P)$ est semi-continue supérieurement et comme fonction ponctuellement discontinue doit posséder en Δ_ω un point de continuité $\mathfrak{P}$. Mais $f(P)$ n'est pas constante au voisinage de $\mathfrak{P}$. La fonction $f(P)$ devrait donc pouvoir y prendre n'importe quelle valeur infiniment voisine et inférieure à $f(\mathfrak{P})$, ce qui est exclu pour les valeurs α de H. Il y a donc contradiction.

Mais il ne peut arriver non plus, qu'il existe un point limite $\mathfrak{P}$ des intervalles emboîtés Δ_n, pour n infini, puisque sur leur frontière il y aurait, pour une suite infinie N des valeurs de n, des points $\mathfrak{P}_n$, où $f(\mathfrak{P}_n) = \alpha_n$ et tels que pour $n'' > n'$, de la suite N, l'on ait

$$f(\mathfrak{P}_{n'}) > f(\mathfrak{P}_{n''})$$

ce qui prouve que le point $\mathfrak{P}$, limite des points $\mathfrak{P}_n$, ne peut être un maximum atteint. Cela finit de prouver l'absurdité de l'hypothèse initiale.

On peut ajouter aussi le théorème suivant de *M. Denjoy*, qui peut rendre de grands services[1]), une fois démontré :

Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut prendre

---

[1]) Le fait m'a été signalé par *M. Denjoy*. La démonstration du texte en est assez simple.

qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs différentes sur l'ensemble des points P, où elle présente un maximum ou minimum atteints [1]).

Soit E l'ensemble des points $\mathfrak{S}$, où $f\ (P)$ présente un maximum atteint. Il suffira de supposer E non dénombrable.

A chaque point $\mathfrak{S}$ de E on peut *attacher* un voisinage Δ symétrique, de centre $\mathfrak{S}$ et dont le côté a pour longueur λ, le plus grand des nombres d'une suite de quantités positives, décroissantes vers zéro

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

et tel que l'on ait

$$f\,(\mathfrak{S}) \geqq f\ (P)$$

pour tout point P, intérieur à Δ.

Désignons par E_n l'ensemble des points $\mathfrak{S}$ de E, tels que le voisinage Δ, attaché à $\mathfrak{S}$, ait un côté de longueur λ et que

$$\lambda > \varepsilon_n .$$

On voit que si $n' > n''$, $E_{n'}$ contient $E_{n''}$ et qu'il y a

$$E = E_1 + E_2 + \ldots \quad + E_n + \ldots .$$

Il existe donc un N, tel que pour tout

$$n \geqq N$$

l'ensemble E_n soit non dénombrable.

Prouvons que $f\,(P)$ ne prend sur E_n non dénombrable, qu'une infinité dénombrable de valeurs différentes, au plus.

En effet, soit $\mathfrak{S}$ un point de condensation de l'ensemble E_n.

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage Δ_n de $\mathfrak{S}$, tel que $f\,(P)$ n'y prenne sur E_n qu'une infinité dénombrable de valeurs, au plus.

Attachons en effet à $\mathfrak{S}$ un intervalle Δ_n, tel que

$$f\,(\mathfrak{S}) \geqq f\,(P)$$

pour tout point P, intérieur à Δ_n et supposons que ce soit le contraire qui ait lieu.

---

[1]) C'est $M_0\,(P)$ qui ne peut prendre qu'une infinité dénombrable de valeurs différentes au plus, si les maximums et minimums sont atteints ou non.

Alors, dans le voisinage Δ_n de $\mathfrak{S}$ on distinguera une infinité non dénombrable de points P_n appartenant à E_n et tels que les valeurs de $f(P)$ correspondantes soient toutes différentes, deux-à-deux. Soit H l'ensemble cote de ces valeurs de $f(P)$.

On choisira l'intervalle Δ_n de côté plus petit que $\frac{\varepsilon_n}{2}$. Alors tout intervalle symétrique Δ'_n, dont le centre est intérieur à Δ_n et dont le côté dépasse en grandeur ε_n, contient Δ_n.

Considérons un des points P_n, distingués ci-dessus en $E_n \cdot \Delta_n$. Puisque $f(P)$ présente un maximum atteint en P_n on a

$$f(P_n) \geqq f(P)$$

pour tout point P d'un voisinage Δ'_n de P_n, de centre P_n et dont le côté dépasse ε_n, par définition de E_n.

Mais Δ'_n contient Δ_n et donc le point $\mathfrak{S}$. Il y a

$$f(P_n) \geqq f(\mathfrak{S}).$$

Or, il y a une infinité non dénombrable de points P_n et un ensemble H de valeurs *différentes* $f(P_n)$ de $f(P)$ en Δ_n. Il y a donc *sûrement* un point P_n en Δ_n, tel que

$$f(P_n) > f(\mathfrak{S}),$$

ce qui contredit la relation

$$f(\mathfrak{S}) \geqq f(P_n)$$

qui a lieu puisque P_n est un point de Δ_n et que $\mathfrak{S}$ est un point de maximum atteint.

Il en résulte que $f(P)$ ne prend sur E_n en Δ_n qu'une infinité dénombrable de valeurs différentes. On complète facilement la démonstration.

CHAPITRE IV.

Relations entre la fonction de variables réelles et ses valeurs limites.

46. On a distingué depuis longtemps parmi les discontinuités de première espèce, celles qui ont un caractère artificiel. Ce sont celles, où

la valeur $f(\xi)$ de la fonction de variable réelle diffère, au point ξ, de la limite des valeurs de $f(x)$ au même point, limite supposée unique.

La possibilité de pouvoir introduire une discontinuité de première espèce, par le simple changement de la valeur de $f(x)$ en un point de continuité, ferait croire qu'on peut créer à volonté des fonctions possédant n'importe combien de discontinuités artificielles de première espèce. C'est-ce qui n'arrive pourtant pas, car on ne peut jamais rencontrer plus d'une infinité dénombrable de discontinuités de première espèce (11, III).

Si l'on essaie de modifier en effet les valeurs d'une fonction de variable réelle sur un ensemble partout dense — et il suffit de disposer même, à cette fin, d'un ensemble dénombrable de valeurs de la fonction — les limites supérieure et inférieure de la fonction en chaque point changeront aussi en général.

Un exemple simple le montrera. Soit $f(x)$ une fonction uniforme de variable réelle, bornée en valeur absolue à M. Si l'on décompose l'ensemble des valeurs rationnelles E en deux sous-ensembles E_1 et E_2, correspondant aux fractions ordinaires irréductibles de dénominateur impair ou pair, les ensembles E_1 et E_2 seront tous les deux dénombrables et partout denses. Modifions $f(x)$ sur E, en définissant de la sorte une nouvelle fonction $F(x)$, comme il suit :

On pose $F(x)=f(x)$ sur cE, complémentaire de E, $F(x)=2M$ en E_1 et $F(x)=-2M$ en E_2. On a alors, en tout point x,

$$\lim\sup F(x)=2M \qquad \text{et} \qquad \lim\inf F(x)=-2M,$$

tandis qu'on avait avant

$$\lim\sup f(x) \leq M \qquad \text{et} \qquad \lim\inf f(x) \geq -M$$

Ce fait indique l'existence d'une liaison nécessaire entre les valeurs d'une fonction et ses limites supérieure ou inférieure, qu'on peut préciser.

47. Considérons en effet le maximum $M_0(\mathfrak{S})$ d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ au voisinage d'un point $\mathfrak{S}$. On désigne par $f_0(\mathfrak{S})$ l'une des valeurs de $f(P)$ au point $\mathfrak{S}$. Il y a la proposition

I. *Il n'existe qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de points $\mathfrak{S}$, tels que*

$$f_0(\mathfrak{S}) > M_0(\mathfrak{S}).$$

Supposons d'abord $f(\mathfrak{S})$ bornée inférieurement. Donnons-nous une suite décroissante de nombres positifs, tendant vers zéro

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n, \ldots\ldots$$

et soit E_n l'ensemble des points $\mathfrak{S}$, tels qu'il existe pour chacun une valeur $f_0(\mathfrak{S})$ de $f(P)$ satisfaisant à l'inégalité

$$f_0(\mathfrak{S}) > M_0(\mathfrak{S}) + \varepsilon_n.$$

Alors, en désignant par E l'ensemble des points $\mathfrak{S}$, tels qu'il existe pour chacun une valeur $f_0(\mathfrak{S})$ de $f(P)$ satisfaisant à l'inégalité

$$f_0(\mathfrak{S}) > M_0(\mathfrak{S}),$$

il résulte visiblement

$$E = E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n + \ldots\ldots$$

Si E était non dénombrable, l'un au moins des ensembles E_n serait non dénombrable. Il s'agit de prouver que cela est impossible lorsque $f(P)$ est bornée inférieurement. En effet, si E_n était non dénombrable il contiendrait un ensemble $\mathcal{E}$ de points de condensation, dense en lui-même.

Prenons un point $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{E}$. On a vu (7), qu'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel qu'en tout point $P_1 \neq \mathfrak{S}$ de Δ, l'on ait avec $\alpha = \varepsilon_n$

$$f_0(P_1) < M_0(\mathfrak{S}) + \frac{\alpha}{2}.$$

Mais nous choisirons le point P_1 dans $\mathcal{E}$, ce qui est toujours possible, puisque $\mathcal{E}$ est dense en lui-même. Or P_1 est un point de E_n et il y a

$$f_0(\mathfrak{S}) > M_0(\mathfrak{S}) + \alpha.$$

Des deux inégalités ci-dessus il résulte

$$f_0(P_1) < f_0(\mathfrak{S}) - \frac{\alpha}{2}.$$

Partons du point P_1 et répétons ce raisonnement. On trouve successivement par cette voie une suite de points $P_1, P_2 \ldots, P_q, \ldots,$ tels que

$$f_0(P_q) < f_0(P_{q-1}) - \frac{\alpha}{2}$$

et il résulte par addition de ces inégalités

$$f_0(P_q) < f_0(\mathfrak{S}) - \frac{q\alpha}{2}.$$

Or α est une quantité finie, tandis que q est aussi grand qu'on veut. Cela contredit l'hypothèse de $f(P)$ bornée inférieurement.

On étend ce résultat aux fonctions bornées ou non inférieurement et pouvant prendre même des valeurs infinies.

On peut, en effet, effectuer une transformation T de l'ensemble cote R' des valeurs réelles y de $-\infty$ à $+\infty$, y inclus les valeurs infinies [1]). Si l'on a

$$-\infty \leq y \leq +\infty$$

et que l'on pose pour $0 \leq y \leq +\infty$

$$z = \frac{y}{1+y}$$

et pour $-\infty \leq y \leq o$,

$$z = \frac{y}{1-y},$$

on a

$$-1 \leq z \leq 1.$$

A chaque ensemble des valeurs y correspond un ensemble des valeurs z. La transformation T est biunivoque et bicontinue. En plus, elle conserve l'ordre de grandeur des quantités y, c'est-à-dire à $y_1 > y_2$ correspond aussi $z_1 > z_2$ et réciproquement.

Cela prouve que s'il existait une fonction $y = f(P)$, non bornée inférieurement et telle que l'ensemble E, défini ci-dessus soit non dénombrable, il existerait aussi une fonction $z = \varphi(P)$, obtenue de $f(P)$ par la transformation T, bornée inférieurement et telle que l'ensemble E respectif, qui serait le même, soit non dénombrable, ce qui a été reconnu impossible.

Une démonstration pareille, sauf le changement des signes d'inégalité, prouvera que

II. *Il n'existe qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de points $\mathfrak{P}$ tels que*

$$f_o(\mathfrak{P}) < m_o(\mathfrak{P}).$$

---

[1]) cf *R Baire*, op. cit. pages 120 et suiv. Des conventions spéciales sont en plus nécessaires pour attribuer un sens au rapport de deux quantités infinies.

Les mêmes résultats peuvent s'énoncer aussi sous la forme suivante:

III. *En tout point $\mathfrak{S}$ de son domaine de définition, les valeurs $f(\mathfrak{S})$ d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles sont comprises entre le maximum $M_0(\mathfrak{S})$ et le minimum $m_0(\mathfrak{S})$ de la fonction $f(P)$ au voisinage du point $\mathfrak{S}$, en exceptant un nombre fini ou infinité dénombrable de points $\mathfrak{S}$, où la propriété est en défaut*[1]).

Cela s'écrit

$$m_0(\mathfrak{S}) \leq f(\mathfrak{S}) \leq M_0(\mathfrak{S}),$$

inégalités valables pour tout $\mathfrak{S}$, sauf au plus pour une infinité dénombrable de points $\mathfrak{S}$.

48. Ce résultat est susceptible d'être formulé d'une manière assez différente:

IV. *Dans tout voisinage d'un point quelconque $\mathfrak{S}$ du domaine de définition d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles, sauf au plus pour une infinité dénombrable de points $\mathfrak{S}$, on a deux points $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ tels que*

$$f_0(\mathfrak{S}_2) - \varepsilon < f(\mathfrak{S}) < f_0(\mathfrak{S}_1) + \varepsilon.$$

Cela est immédiat. En effet, l'on a

$$f(\mathfrak{S}) \leq M_0(\mathfrak{S}),$$

sauf au plus pour une infinité dénombrable de points $\mathfrak{S}$. Or dans le voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ on a un point $\mathfrak{S}_1$, tel que

$$f_0(\mathfrak{S}_1) > M_0(\mathfrak{S}) - \varepsilon$$

et donc

$$f(\mathfrak{S}) < f_0(\mathfrak{S}_1) + \varepsilon$$

et de même pour l'autre inégalité. *c. q. f. d.*

---

[1]) Cette proposition comprend, en particulier, un résultat ancien de *M. W. H. Young* (cf. Bull. des Sc. Math. tome LII, 1928), que nous avons retrouvé indépendamment, par la voie qui est indiquée ci-dessus.

49. Il y a une application remarquable de ces résultats à la classification des discontinuités des fonctions de variables réelles, donnée ci-dessus, selon les propriétés de la fonction oscillation $\omega\,(P)$ [1]).

On a vu (15, VII), qu'une fonction de n variables réelles ne peut présenter qu'un nombre fini ou dénombrable de discontinuités (de genre I), telles que

$$\omega\,(\mathfrak{S}) > \mathit{lim}\ \omega\,(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S}.$$

Or il résulte des propositions ci-dessus (47, I, II), qu'il suffit d'imposer la condition

$$\omega\,(P) > \mathit{lim\ sup}\ \omega\,(P), \qquad \text{pour } P = \mathfrak{S},$$

afin que $f\,(P)$ ne possède qu'une infinité dénombrable de tels points. L'on pourrait donc reprendre la classification en question, en y introduisant cette condition plus stricte.

50. Dans un autre ordre d'idées, on peut observer que les résultats précédents font apparaître des propriétés, satisfaites en tout point $\mathfrak{S}$ du domaine de définition d'une fonction $f\,(P)$, sauf aux points d'un ensemble *exceptionnel*, fini ou dénombrable.

D'autre part les valeurs $M_o\,(\mathfrak{S})$ et $m_o\,(\mathfrak{S})$ s'obtiennent en négligeant les valeurs de $f\,(P)$ au point $\mathfrak{S}$, dans les opérations qui donnent les deux valeurs $M\,(\mathfrak{S})$ et $m\,(\mathfrak{S})$.

Il est naturel de se demander ce que deviennent les ensembles exceptionnels lorsqu'on convient de négliger dans les mêmes opérations aussi d'autres valeurs de $f\,(P)$, qui apparaissent sur certains ensembles particuliers.

On est conduit à poser d'abord de nouvelles définitions.

51. Supposons définie, d'une manière déterminée, une *classe* A d'ensembles, telle que :

a. Tout sous-ensemble d'un ensemble de classe A est un ensemble de classe A,

b. La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de classe A est un ensemble de classe A,

c. Tout intervalle à n dimensions n'est pas un A.

---

[1]) Voir Chap. I. A.

La classe des ensembles finis ou dénombrables, la classe des ensembles de première catégorie et la classe des ensembles de mesure nulle, ce sont chacune des classes A déterminées.

Nous allons définir le maximum $M_A(\mathfrak{P})$ et le minimum $m_A(\mathfrak{P})$ de $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire *le maximum et le minimum de $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A* [1]).

Il n'y a qu'à reprendre les définitions classiques du maximum $M(\mathfrak{P})$ et du minimum $m(\mathfrak{P})$ d'une fonction en un point et procéder comme pour $M_0(\mathfrak{P})$ et $m_0(\mathfrak{P})$, quand on a négligé les valeurs de $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$. On ne négligera plus, cette fois, les valeurs de $f(P)$ en des points déterminés [2]), mais en des points $\mathfrak{P}$ formant un ensemble appartenant au voisinage de $\mathfrak{P}$ et à la classe A en question.

Voici les définitions précises de $M_A(\mathfrak{P})$ et de $m_A(\mathfrak{P})$.

Soit Δ un intervalle à n dimensions contenant le point $\mathfrak{P}$ à l'intérieur. Pour obtenir $M(\mathfrak{P})$ on commence par définir la borne supérieure (ou maximum) de $f(P)$ au voisinage Δ de $\mathfrak{P}$. C'est-ce qu'on désigne par $M(f, \Delta)$. Or, cette borne n'est que le nombre séparatif entre les valeurs α pour lesquelles $E[f(P) > \alpha]$ est ou n'est pas nul (6).

Pour obtenir $M_A(\mathfrak{P})$ on commence par définir la borne supérieure de $f(P)$ en Δ, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.

C'est le nombre séparatif entre les valeurs α, pour lesquelles $E[f_0(P) > \alpha]$ est ou n'est pas un ensemble de classe A.

L'existence de ce nombre séparatif résulte de l'observation suivante: Soit $E_1(f_0 > \alpha_1)$ un ensemble de classe A et $E_2(f_0 > \alpha_2)$ un ensemble, qui n'est pas de classe A. Mais $\alpha_1 > \alpha_2$, car s'il y avait $\alpha_1 \leq \alpha_2$, alors E_2 serait un sous-ensemble de E_1, qui est de classe A et serait lui-même de classe A. On désignera donc par $M_A(f, \Delta)$ *la borne supérieure de $f(P)$ en Δ, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A*, borne dont l'existence vient d'être démontrée.

La borne inférieure de $M_A(f, \Delta)$, lorsque Δ tend vers le point $\mathfrak{P}$ d'une manière quelconque, c'est $M_A(f, \mathfrak{P})$ c'est-à-dire *le maximum de la fonction $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.*

---

[1]) Il s'agit d'une classe A *déterminée,* choisie parmi les classes A, qu'on peut définir de manière à satisfaire aux conditions a, b et c, ci-dessus (64). Par conséquent notre définition comprend en particulier les définitions de *M. Baire* du maximum et du minimum, lorsqu'on néglige les ensembles dénombrables ou les ensembles de première catégorie (Thèse, Chap III, 67 et 74) et celle de *M. Lebesgue* du maximum et du minimum, lorsqu'on néglige les ensembles de mesure nulle (op. cit. p. 87).

[2]) Cela est important, puisque sinon certaines propositions qui suivent ne seraient que des tautologies (54).

Cette borne inférieure est évidemment atteinte comme limite unique si l'on considère une suite indéfinie de voisinages Δ_n de $\mathfrak{S}$, intérieurs chacun au précédent et tendant vers $\mathfrak{S}$.

Même définition pour le minimum $m_A(f, \mathfrak{S})$ [1].

52. Nous allons présenter maintenant quelques propriétés de $M_A(\mathfrak{S})$ et de $m_A(\mathfrak{S})$. Appelons, pour abréger, *ensemble de classe B* tout ensemble qui n'est pas de classe A.

On démontre que $M_A(\mathfrak{S})$ *est une fonction semi-continue supérieurement et* $m_A(\mathfrak{S})$ *semi-continue inférieurement.*

En effet, à tout ε positif correspond un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que

$$M_A(f, \Delta) < M_A(\mathfrak{S}) + \varepsilon.$$

Or, soit Δ' un voisinage d'un point P de Δ et Δ' contenu en Δ. Il s'ensuit

$$M_A(P) \leqq M_A(f, \Delta') \leqq M_A(f, \Delta).$$

Donc

$$M_A(P) < M_A(\mathfrak{S}) + \varepsilon$$

et l'on voit, de même, que

$$m_A(P) > m_A(\mathfrak{S}) - \varepsilon.$$

On déduit facilement les propriétés suivantes :

V. *a*) *Etant donné un* ε *positif, il existe un voisinage* Δ *du point* $\mathfrak{S}$, *tel qu'en tout point* P *de ce voisinage, sauf un ensemble exceptionnel de classe* A, *l'on ait*

$$f(P) < M_A(\mathfrak{S}) + \varepsilon.$$

b) *Etant donné un* ε *positif et un voisinage* Δ *du point* $\mathfrak{S}$, *il existe toujours en* Δ *des points* P *formant un ensemble de classe* B *et tels que*

$$f_0(P) > M_A(\mathfrak{S}) - \varepsilon.$$

En effet, soit donné ε positif, il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que

$$M_A(f, \Delta) < M_A(\mathfrak{S}) + \varepsilon$$

---

[1] On écrira aussi, plus simplement : $M_A(\mathfrak{S}) = M_A(f, \mathfrak{S})$ et $m_A(\mathfrak{S}) = m_A(f, \mathfrak{S})$, comme pour $M(\mathfrak{S})$ et $m(\mathfrak{S})$.

et d'autre part, sauf pour un ensemble de classe A exceptionnel, il y a

$$f(P) \leq M_A(f, \Delta),$$

d'où il résulte a).

De même, soit donné ε positif et le voisinage Δ de $\mathfrak{S}$. On a

$$f_0(P) > M_A(f, \Delta) - \varepsilon$$

pour un ensemble de classe B et d'autre part

$$M_A(f, \Delta) \geq M_A(\mathfrak{S}),$$

ce qui entraîne b).

53. Revenons à la classification des ensembles, selon le point de vue adopté plus haut (51) et donnons quelques propositions qui nous seront utiles plus loin.

Appelons, pour abréger, *la classe* C (*sur* Δ) la classe des ensembles, dont le complémentaire par rapport à un intervalle donné Δ, à n dimensions, est de classe A déterminée. On a

VI. *Dans tout intervalle à n dimensions contenu en* Δ, *un ensemble* E *de classe* C *(sur* Δ*) est dense et de classe* B.

Soit en effet Δ_0 l'intervalle à n dimensions contenu en Δ. Si $E.\Delta_0$ était de classe A, comme son complémentaire $c(E.\Delta_0)$ en Δ_0 est un sous-ensemble du complémentaire cE de E en Δ, qui est de classe A par hypothèse, on conclurait que l'intervalle Δ_0 est de classe A, comme somme de $E.\Delta_0$ et de $c(E.\Delta_0)$ en Δ_0, ce qui est exclu par la condition c (51).

De même si E était non dense en Δ_0, il y aurait un intervalle Δ_1 à n dimensions appartenant à cE, ce qui est exclu, car cE est de classe A et ne peut contenir un intervalle.

Mais il y a plus :

VII. *L'ensemble des points communs à un ensemble* B_0 *de classe* B, *contenu dans un intervalle* Δ *à n dimensions et à un ensemble* C_0 *de classe* C *(sur* Δ*) est un ensemble de classe* B.

Posons [1])

$$B_1 = B_0 - B_0 . C_0 \qquad \text{et} \qquad C_1 = C_0 - B_0 . C_0 .$$

[1]) Cf. *de la Vallée Poussin,* op. cit. (pages 5 et 6), pour les notations usuelles de la différence et du produit de deux ensembles.

Les ensembles B_1 et C_1 sont sans points communs.

Si l'ensemble $B_0 C_0$ n'était pas de classe B, il serait de classe A et donc B_1 serait de classe B comme B_0, tandis que C_1 serait de classe C (sur Δ) comme C_0, puisqu'en ajoutant ou en retranchant à un ensemble des classes A, B et C (sur Δ) un ensemble de classe A, contenu en Δ dans le dernier cas, on ne le fait pas changer de classe.

Mais B_1 et C_1 n'ayant pas des points communs et étant contenus en Δ, B_1 doit appartenir au complémentaire de C_1 en Δ, qui est de classe A. Or cela est absurde, puisque B_1 est de classe B et ne peut être sous-ensemble d'un ensemble de classe A.

54. Cela posé, on a la proposition générale

VIII. *En tout point $\mathfrak{S}$ de son domaine de définition, sauf sur un ensemble exceptionnel de classe A. les valeurs $f(\mathfrak{S})$ d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles sont comprises entre le maximum $M_A(\mathfrak{S})$ et le minimum $m_A(\mathfrak{S})$ de la fonction $f(P)$ au point $\mathfrak{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.*

Cela s'écrit

$$m_A(\mathfrak{S}) \leq f(\mathfrak{S}) \leq M_A(\mathfrak{S}),$$

inégalités valables en tout point $\mathfrak{S}$, sauf aux points d'un ensemble de classe A.

On a une démonstration parfaitement analogue à celle de la proposition pareille (47) concernant $M_0(\mathfrak{S})$ et $m_0(\mathfrak{S})$.

Il suffira donc de prouver qu'en supposant la fonction $f(P)$ bornée inférieurement, l'ensemble E des points $\mathfrak{S}$, tels qu'il existe une valeur au moins $f_0(\mathfrak{S})$ des $f(\mathfrak{S})$ satisfaisant l'inégalité

$$f_0(\mathfrak{S}) > M_A(\mathfrak{S}),$$

est de classe A.

Donnons-nous une suite décroissante de nombres positifs, tendant vers zéro

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n, \ldots\ldots$$

et soit E_n l'ensemble des points $\mathfrak{S}$, tels qu'il existe une valeur $f_0(\mathfrak{S})$ de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$, satisfaisant l'inégalité $f_0(\mathfrak{S}) > M_A(\mathfrak{S}) + \varepsilon_n$.

Il est visible que

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots\ldots$$

Si E n'était pas de classe A, l'un au moins des E_n serait de la classe B, car sinon la condition b ci-dessus (51) obligerait aussi E d'appartenir à la classe A. Il faut prouver que E_n ne peut être de classe B.

Supposons, en effet, que E_n soit de classe B. Il existe, au moins un point $\mathcal{S}$ de E_n, tel que E_n soit de classe B en tout intervalle Δ, contenant $\mathcal{S}$ [1]). Retenons un tel point $\mathcal{S}$ et posons $\alpha = \varepsilon_n$. Il existe un voisinage Δ de $\mathcal{S}$, tel que l'on ait (52, V)

$$f(P_1) < M_A(\mathcal{S}) + \frac{\alpha}{2}$$

pour tout point P_1 de Δ et pour toute valeur de $f(P_1)$, excepté un ensemble de classe A de points P_1. Donc l'ensemble E^1 de points P_1 est de classe C (sur Δ). Mais $E_n . \Delta$ est de classe B en Δ. Il existe donc un ensemble $\mathcal{E}_1$ de points P_1, communs à E^1 et à $E_n . \Delta$ (53, VII).

L'ensemble $\mathcal{E}_1$ est de classe B en Δ et ne peut donc être nul.

Retenons le point P_1 de $\mathcal{E}_1$, tel qu'en tout voisinage Δ_1 de P_1 l'ensemble $\mathcal{E}_1$ soit de classe B. Comme $\mathcal{S}$ appartient aussi à E_n, il y a, par définition de E_n

$$f_o(\mathcal{S}) > M_A(\mathcal{S}) + \alpha$$

et des deux inégalités précédentes, on conclut pour le point P_1 retenu, en choisissant une valeur quelconque $f_o(P_1)$ des $f(P_1)$

$$f_o(P_1) < f_o(\mathcal{S}) - \frac{\alpha}{2}.$$

On se retrouve maintenant dans les conditions initiales puisque E_n est remplacé par $\mathcal{E}_1$, qui est ausssi de classe B, le point retenu $\mathcal{S}$ de E_n par le point retenu P_1 de $\mathcal{E}_1$ et l'on peut déterminer de même un sous-ensemble $\mathcal{E}_2$ de $\mathcal{E}_1$, dont on retiendra un point P_2, tel que pour une valeur quelconque $f_o(P_2)$ des $f(P_2)$ l'on ait

$$f_o(P_2) < f_o(P_1) - \frac{\alpha}{2}$$

et que dans tout voisinage de P_2 l'ensemble $\mathcal{E}_2$ soit de classe B.

---

[1]) Cela se prouve facilement. Voir plus loin (61) la démonstration de cette propriété des ensembles de classe B de contenir un point *„d'espèce B"*.

En continuant ainsi indéfiniment on obtient par addition des inégalités successives

$$f_o\,(P_q) < f_o\,(\mathfrak{S}) - \frac{q\alpha}{2}.$$

Or α est constante et q c'est un entier aussi grand qu'on veut. Cela contredit l'hypothèse de $f\,(P)$ bornée inférieurement.

Le reste de la démonstration est identique à celle employée plus haut (47, I et II).

55 Dans l'énoncé de la proposition qui précède (54, VIII), l'ensemble exceptionnel est de même classe que les ensembles qu'on néglige en chaque point. Il ne faut pas croire, que ce soient les mêmes, sans quoi la proposition se réduirait à une tautologie et ce n'est nullement le cas. La démonstration qui suit, de la même proposition fera voir à quel point un telle affirmation serait illégitime [1]).

Voici en quoi consiste cette démonstration, entièrement différente de celle qui précède :

On fera appel au lemme de *M. Borel*[2]), étendu à n dimensions [3]). On enfermera chaque point $\mathfrak{S}$ de l'espace dans un voisinage Δ convenable.

Soient donnés une suite indéfinie de nombres positifs décroissants vers zéro

$$(S) \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_q, \ldots\ldots\ldots$$

et un nombre positif α. On peut attacher à chaque point $\mathfrak{S}$ un intervalle Δ_q symétrique à n dimensions et de centre $\mathfrak{S}$, dont le côté est le plus grand des nombres de la suite (S), d'indice plus grand que un q déterminé donné et tel qu'en Δ_q l'on ait en tout point P, sauf aux points d'un ensemble *exceptionnel* convenable, l'inégalité

$$f\,(P) < M_A\,(\mathfrak{S}) + \alpha.$$

Supposons, pour abréger, $f\,(P)$ définie dans un domaine borné $\mathcal{D}$. L'on peut couvrir $\mathcal{D}$ avec un nombre fini des intervalles Δ_q précédents et nous distinguerons les centres $\mathfrak{S}_q$ de ces intervalles. A chacun de ces

---

[1]) Cela résulte déjà du fait remarqué ci-dessus, que les ensembles qu'on néglige sont connus seulement par leur classe, tandis que, pour une fonction $f\,(P)$ donnée, l'ensemble exceptionnel est parfaitement déterminé.

[2]) Cf. *E. Borel,* Leçons sur les fonctions de variables réelles, 1905, p. 9.

[3]) Cf. *de la Vallée Poussin,* op. cit. p. 13—15.

intervalles Δ_q correspond un ensemble exceptionnel dont la somme pour le nombre fini d'intervalles Δ_q qui recouvrent $\mathcal{D}$ sera désignée par $\mathcal{E}_q$. Ce sera un ensemble de classe A.

Chaque point P de $\mathcal{D}$ n'appartenant pas à $\mathcal{E}_q$ est alors intérieur à un nombre fini d'intervalles Δ_q et on peut lui attacher les centres $\mathcal{S}_q$ de ces intervalles et l'on aura

$$f(P) < M_A(\mathcal{S}_q) + \alpha,$$

tandis que le point P est intérieur à un intervalle symétrique, à n dimensions, de centre $\mathcal{S}_q$ et dont le côté est inférieur ou égal à ε_q.

Pour chaque valeur entière de q on peut déterminer de même un ensemble $\mathcal{E}_q$ exceptionnel, de classe A. La somme

$$\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_q + \ldots.$$

représentera un ensemble de classe A.

Alors à tout point P de $\mathcal{D}$ n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, il correspond pour chaque entier q un point $\mathcal{S}_q$ au moins tel que

$$f(P) < M_A(\mathcal{S}_q) + \alpha$$

et que P appartienne à un intervalle symétrique de centre $\mathcal{S}_q$ et de côté plus petit que ε_q. Il existe donc, pour chaque point donné, une suite de points

$$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_q, \ldots$$

distingués dans les opérations successives, tendant vers P et tels que

$$M_A(\mathcal{S}_q) > f(P) - \alpha,$$

ce qui prouve que l'on a en tout point P du complémentaire de $\mathcal{E}(\alpha)$, à la limite

$$M_A(P) \geqq f(P) - \alpha,$$

car $M_A(P)$ est semi-continue supérieurement[1]) (52).

Donc tout point P appartient au contraire à $\mathcal{E}(\alpha)$, si au moins une valeur $f_0(P)$ des $f(P)$ est telle que

$$f_0(P) > M_A(P) + \alpha.$$

---

[1]) Pour une fonction uniforme $\varphi(P)$ semi-continue supérieurement, l'ensemble $E[\varphi(P) \geq \sigma]$ est fermé, quel que soit le nombre σ.

Considérons maintenant l'ensemble E, envisagé plus haut (54), qui est

$$E = E\,[f_0(P) > M_A(P)]$$

somme des ensembles E_n, définis par

$$E_n = E\,[f_0(P) > M_A(P) + \varepsilon_n].$$

Or si l'on pose $\varepsilon_n = \alpha$, l'ensemble E_n est un sous-ensemble de $\mathcal{E}(\alpha)$, ce qui prouve qu'il est de classe A et il en sera de même de E.

c. q. f. d.

56. La proposition précédente (54, VIII) montre en particulier, que si l'on excepte une infinité dénombrable de points $\mathfrak{P}$, alors les valeurs de $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$ sont comprises non seulement entre le maximum et le minimum de la fonction $f(P)$ au voisinage de $\mathfrak{P}$, mais même entre le maximum et le minimum de $f(P)$ en $\mathfrak{P}$, lorsqu'on néglige les ensembles dénombrables. Or, ces limites sont en général plus resserrées [1]).

Un exemple simple le prouvera.

Soit la fonction $\varphi(x)$ de *Dirichlet*, égale partout à zéro en $(o, 1)$, sauf pour les x rationnels, où elle égale 1. On a, pour tout x

$$M(x) = 1, \quad M_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad M_A(x) = o,$$

lorsqu'on néglige les ensembles dénombrables (de classe A).

Soit aussi la fonction $\psi(x)$, identique partout à $\varphi(x)$, sauf pour un nombre fini de valeurs de x

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n-1}{n},$$

où l'on pose $\psi(x) = 2$. On aura en ces points

$$M(x) = 2, \quad M_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad M_A(x) = o,$$

la classe A étant celle des ensembles finis ou dénombrables.

Il est clair d'ailleurs, que dans les deux hypothèses ci-dessus, les ensembles exceptionnels distingués ne seront pas les mêmes et qu'en resserant les limites indiquées pour $f(P)$, l'ensemble exceptionnel gagne de nouveaux points, tout en restant dénombrable.

---

[1]) C'est en ce sens que la proposition antérieure (47, III) est précisée par la dernière (54, VIII).

57. On a vu plus haut, que sauf pour un ensemble de classe A de points $\mathfrak{S}$, on a toujours

$$m_A(\mathfrak{S}) \leq f(\mathfrak{S}) \leq M_A(\mathfrak{S}).$$

Or cette propriété persiste lorsque l'ensemble cote des valeurs R', que peut prendre la fonction $f(P)$ est soumis à une transformation biunivoque T, qui laisse subsister l'ordre et la continuité, d'une manière réciproque [1]).

Mais il est naturel de songer qu'à l'intérieur de l'intervalle vertical $[m_A(\mathfrak{S}), M_A(\mathfrak{S})]$ de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$, les valeurs de la fonction ne peuvent se répartir non plus d'une manière arbitraire. Car une inversion convenable par rapport à une valeur intermédiaire t ferait correspondre cet intervalle vertical à deux intervalles infinis, pareils à ceux sur lesquels les valeurs d'une fonction ne se trouvent que pour un ensemble de classe A de points support $\mathfrak{S}$.

En précisant cette intuition on est amené à des résultats nouveaux, qu'on établit en faisant jouer à toute valeur finie t le rôle d'une valeur infinie dans les propositions ci-dessus.

Nous allons poser au préalable des définitions adéquates.

58. Soient $f(P)$ une fonction uniforme ou multiforme de n variables réelles et t une valeur finie donnée.

Désignons par $\Phi(P)$ la fonction obtenue en posant en P, pour chaque valeur $f(P)$ de la fonction donnée

$$\Phi(P) = f(P), \text{ lorsque } f(P) \geq t \text{ et } \Phi(P) = +\infty, \text{ lorsque } f(P) < t.$$

Désignons de même par $\varphi(P)$ la fonction obtenue en posant

$$\varphi(P) = f(P), \text{ lorsque } f(P) \leq t \text{ et } \varphi(P) = -\infty, \text{ lorsque } f(P) > t.$$

Posons

$$l_0(\mathfrak{S}) = m_0(\Phi, \mathfrak{S}) \qquad \text{et} \qquad L_0(\mathfrak{S}) = M_0(\varphi, \mathfrak{S}).$$

On appellera $l_0(\mathfrak{S})$ et $L_0(\mathfrak{S})$ respectivement, *les maximum et minimum de $f(P)$, relatifs à t, au voisinage du point $\mathfrak{S}$.*

---

[1]) C'est une *homéomorphie*, qui conserve l'ordre, opérée sur l'ensemble cote fermé $(-\infty, +\infty)$.

On a la proposition préliminaire suivante :

IX. *L'ensemble de points* $\mathfrak{S}$, *tels que pour une valeur* $f_0(\mathfrak{S})$ *de* $f(P)$ *en* $\mathfrak{S}$, *l'on ait pour* $l_o(\mathfrak{S})$ *et* $L_o(\mathfrak{S})$ *relatifs à un t donné*

$$L_o(\mathfrak{S}) < f_o(\mathfrak{S}) < l_o(\mathfrak{S}),$$

est fini ou dénombrable.

En effet, considérons la fonction $F'(P)$ définie par l'égalité

$$F'(P) = \frac{1}{\Phi(P) - t},$$

en convenant de considérer $+\infty$ comme l'inverse de la valeur zéro.

On a

$$M_o(F', \mathfrak{S}) = \frac{1}{m_o(\Phi, \mathfrak{S}) - t}.$$

C'est-ce qui résulte presque immédiatement [1]) des définitions (4). Or la fonction finie ou infinie $M_o(F', P)$ jouit par rapport à la fonction finie ou infinie $F'(P)$ de la propriété démontrée plus haut (47, I) et l'on a $F'_o(\mathfrak{S}) > M_o(F', \mathfrak{S})$ sur un ensemble support fini ou dénombrable.

Posons-nous la question de rechercher l'ensemble de points $\mathfrak{S}$, tels que

$$t \leqq f_o(\mathfrak{S}) < l_o(\mathfrak{S}).$$

Il y a

$$l_o(\mathfrak{S}) = m_o(\Phi, \mathfrak{S})$$

et parce que

$$f_o(\mathfrak{S}) \geqq t,$$

on a

$$f_o(\mathfrak{S}) = \Phi_o(\mathfrak{S}),$$

donc

$$\Phi_o(\mathfrak{S}) < m_o(\Phi, \mathfrak{S}),$$

---

[1]) En admettant les propositions générales suivantes : Si deux quantités variables, finies ou non, sont non négatives et inverses l'une de l'autre, la borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de valeurs de l'une est égale à l'inverse de la borne inférieure (supérieure) de l'ensemble correspondant des valeurs de l'autre. De même, la borne supérieure (inférieure) de la somme algébrique d'une constante finie et d'une quantité variable, finie ou non, est égale à la somme algébrique de la constante et de la borne supérieure (inférieure) de la quantité variable.

d'où

$$F'_0(\mathfrak{S}) = \frac{1}{\Phi_0(\mathfrak{S}) - t} > \frac{1}{l_0(\mathfrak{S}) - t} = M_0(F', \mathfrak{S})$$

et cela ne peut avoir lieu que sur un ensemble fini ou dénombrable. En introduisant une fonction $F''(P)$, définie par

$$F''(\mathfrak{S}) = \frac{1}{t - \varphi(\mathfrak{S})}$$

et en convenant de considérer $-\infty$, comme l'inverse de la valeur zéro, on développe un raisonnement analogue. On a

$$m_0(F'', \mathfrak{S}) = \frac{1}{t - M_0(\varphi, \mathfrak{S})}$$

et comme on n'a que pour un ensemble fini ou dénombrable de points $\mathfrak{S}$

$$F''_0(\mathfrak{S}) < m_0(F'', \mathfrak{S})$$

il s'ensuit que l'ensemble où

$$L_0(\mathfrak{S}) < f_0(\mathfrak{S}) \leqq t$$

est aussi fini ou dénombrable, puisque

$$L_0(\mathfrak{S}) = M_0(\varphi, \mathfrak{S}) \quad \text{et} \quad f_0(\mathfrak{S}) = \varphi_0(\mathfrak{S}),$$

car

$$f_0(\mathfrak{S}) \leqq t.$$

59. Voici la proposition [1]) qu'on obtient:

X. *Sauf pour un ensemble fini ou dénombrable de points $\mathfrak{S}$, toute valeur $f(\mathfrak{S})$ d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles au point $\mathfrak{S}$, c'est une des valeurs limites de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$.*

On a

$$f(\mathfrak{S}) = \lambda(f, \mathfrak{S}),$$

avec une notation adoptée plus haut (5).

---

[1]) C'est encore un résultat que *M. W. H. Young* avait trouvé de son côté, en examinant la coïncidence des limites à droite et à gauche pour la fonction $f(x)$ d'une variable réelle. L'extension à deux ou plusieurs variables de ce résultat, que se propose *M. Young* est toute différente de la nôtre (cf. Bull. des sc. math., tome LII, juillet 1928).

Considérons en effet l'ensemble des points $\mathcal{S}$, où le contraire a lieu. On a vu plus haut (4) que l'ensemble vertical V des valeurs $\lambda(\mathcal{S})$ limites de $f(P)$ au point $\mathcal{S}$ est fermé. Si une valeur déterminée $f_0(\mathcal{S})$ de $f(P)$ en $\mathcal{S}$ ne coïncide avec aucune des valeurs limites $\lambda(\mathcal{S})$, le point $f_0(\mathcal{S})$ appartient à l'ensemble ouvert complémentaire de V et $f_0(\mathcal{S})$ est intérieure à un intervalle non-nul j, contigu à V.

Soit t une valeur strictement intérieure au même intervalle j. Nous allons montrer que $l_0(\mathcal{S})$ et $L_0(\mathcal{S})$, relatifs à t, ce sont respectivement les deux points, extrémités supérieure et inférieure de l'intervalle j considéré. En reprenant en effet la définition de $l_0(\mathcal{S})$ relatif à t, on voit qu'il correspond sur l'axe vertical, par inversion en rapport avec le point vertical t pris comme origine, au nombre $M_0(F', \mathcal{S})$ c'est-à-dire au point limite le plus haut (5) de $F'(P)$ en $\mathcal{S}$. Or en vertu de la définition de $F'(P)$ on voit facilement qu'à tout point limite vertical de $F'(P)$ en $\mathcal{S}$, il correspond un point limite vertical de $\Phi(P)$ en $\mathcal{S}$, qui est aussi un point limite $\lambda(\mathcal{S})$ des valeurs de $f(P) \geqq t$ et réciproquement. Mais l'extrémité supérieure de l'intervalle j doit coïncider avec le point vertical $l_0(\mathcal{S})$, puisque tous les deux représentent le point limite le plus bas de $\Phi(P)$.

Cela posé, soit donnée une valeur arbitraire $t = t_n$. Il n'existe (58, IX) qu'un ensemble fini ou dénombrable de points $\mathcal{S}$, tels que

$$L_0(\mathcal{S}) < f_0(\mathcal{S}) < l_0(\mathcal{S}),$$

où $L_0(\mathcal{S})$ et $l_0(\mathcal{S})$ sont relatifs à t_n. Soit E_n cet ensemble *exceptionnel*, relatif à t_n.

Donnons nous un ensemble cote T dénombrable et partout dense, de points t_n, défini sur l'axe des cotes de la fonction $f(P)$ et soit E l'ensemble somme des ensembles exceptionnels E_n, relatifs à t_n. L'ensemble E est aussi fini ou dénombrable.

Considérons un point $\mathcal{S}$ de l'ensemble cE, complémentaire de E. On peut prouver que toute valeur $f_0(\mathcal{S})$ de $f(P)$ en $\mathcal{S}$ est une valeur limite de $f(P)$ en $\mathcal{S}$. Car, si l'on suppose le contraire, le point vertical $f_0(\mathcal{S})$ serait strictement intérieur à un intervalle vertical non-nul j, dont les extrémités sont des points limites de $f(P)$ en $\mathcal{S}$.

On peut choisir dans l'intervalle vertical j un point vertical t_n de cote t_n, car T est dense sur l'axe des cotes. Si l'on détermine $l_0(\mathcal{S})$ et $L_0(\mathcal{S})$ de $f(P)$, relatifs à t_n, la coïncidence démontrée ci-dessus exigerait qu'il y ait

$$L_0(\mathfrak{S}) < f_0(\mathfrak{S}) < l_0(\mathfrak{S}),$$

ce qui n'arrive pourtant, par rapport à t_n, en aucun point de cE. Il y a donc contradiction. *c. q. f. d.*

60. On peut étendre ces résultats. Mais de nouvelles définitions seront utiles.

Définissons, comme plus haut (51) deux *classes A et B d'ensembles*, telles que tout ensemble à n dimensions appartienne à l'une de ces deux classes, qui satisfont aux conditions suivantes:

a) Tout sous-ensemble d'un A [1]) est un A,

b) Tout ensemble somme d'un nombre fini [2]) ou d'une infinité dénombrable des A est un A,

c) Tout intervalle à n dimensions est un B [3]).

Considérons aussi un ensemble E de l'espace à n dimensions et classons les points de l'espace en deux espèces, par les définitions suivantes:

Un point $\mathfrak{S}$ est *d'espèce A*, relativement à E, s'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel que E soit en Δ de la classe A.

Un point $\mathfrak{S}$ est *d'espèce B*, relativement à E, si pour tout voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, l'ensemble E est en Δ de la classe B. [4]).

On dira aussi, ce qui est équivalent par définition, que *l'ensemble E a le caractère A en* $\mathfrak{S}$ ou respectivement, *le caractère B en* $\mathfrak{S}$, si le point $\mathfrak{S}$ est d'espèce A ou d'espèce B pour E.

Si la classe des ensembles A contient un ensemble E, qui n'est pas nul, comme nous le supposons dans la suite, elle contient les ensembles finis ou dénombrables, à cause de la condition b appliquée à un point de E, qui est un A, par suite de la condition a. Tout ensemble de classe B est donc non dénombrable.

---

[1]) Pour abréger on dira „un A", au lieu de „un ensemble de la classe A".

[2]) On appellera b' cette condition restreinte.

[3]) Cette condition est indispensable à l'existence effective de la classe B. La classe B comprend toujours, au moins l'ensemble nul.

[4]) En particulier, lorsque la classe A c'est la classe des ensembles dénombrables (et finis), les points d'espèce B ce sont les points de condensation de E, selon *Lindelöf*. Si au lieu de la condition b, on admet la condition b' et si la classe des ensembles A est celle des ensembles finis, les points d'espèce B ne sont que les points limites (ou d'accumulation), au sens habituel.

61. Il résulte des définitions les propositions suivantes :

XI. *Tout ensemble limite (complet ou restreint)* [1]) *d'ensembles de classe A est de classe A.*

En effet, il y a :

$$\overline{lim}\, E_n = (E_1 + E_2 + \dots)(E_2 + E_3 + \dots)\dots(E_n + E_{n+1} + \dots)\dots$$
$$\underline{lim}\, E_n = E_1 . E_2 . E_3 \dots + E_2 . E_3 \dots + E_n . E_{n+1} \dots + \dots$$

et il suffit de rappeler les conditions a et b ci-dessus (60).

XII *L'ensemble de points de E, appartenant à un ensemble ouvert O, dont tous les points sont d'espèce A, relativement à E, est de classe A.*

En effet, attachons à chaque point de O un voisinage fermé Δ, intérieur à O, en choisissant par exemple parmi eux l'intervalle symétrique Δ à n dimensions, dont le côté est le plus grand des nombres d'une suite de quantités positives, tendant vers zéro

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \dots, \varepsilon_n, \dots \dots .$$

On peut couvrir, selon le lemme de *Lindelöf*, l'ensemble O avec une infinité dénombrable, au plus, de ces intervalles Δ. Or, en chacun de ces intervalles Δ il n'y a qu'un ensemble de classe A de points de E, car sinon il n'y aurait qu'à déterminer en Δ un point limite $\mathfrak{S}$ d'intervalles, de côté infiniment petit, contenant chacun un ensemble de classe B et $\mathfrak{S}$ serait d'espèce B et contenu en Δ, donc en O, ce qui est exclu par hypothèse. En appliquant alors la condition b (60), il résulte qu'il n'y a en O qu'un ensemble de classe A de points de E, somme des ensembles de classe A contenus dans les intervalles Δ, qui servent à recouvrir l'ensemble O.

XIII. *L'ensemble B_0 des points d'espèce B, relativement à E, est parfait.*

---

[1]) On appelle, selon *M. Borel*, *ensemble limite complet* d'une suite d'ensembles $E_1, E_2, \dots$ l'ensemble de points $\mathfrak{S}$, appartenant chacun à une infinité des E_n et *ensemble limite restreint* des E_n, l'ensemble de points $\mathfrak{S}$ appartenant à tous les ensembles $E_{n+1}, E_{n+2}, \dots$ d'indice plus grand qu'un entier n, variable avec le point $\mathfrak{S}$. On les désigne respectivement par $\overline{lim}\, E_n$ et $\underline{lim}\, E_n$ et lorsque les deux ensembles limite coïncident on a un *ensemble limite des* E_n. (cf. *E. Borel,* op. cit. p. 18 et *de la Vallée Poussin* op. cit. p. 8).

En effet, tout point limite $\mathfrak{S}$ des points d'espèce B est d'espèce B, car tout voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ contient un point P_n d'espèce B, strictement intérieur à Δ et donc un voisinage Δ_1 de P_n, qui contient un ensemble de classe B.

Donc E est de classe B dans tout voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ et par suite $\mathfrak{S}$ est d'espèce B. L'ensemble B_0 est fermé.

D'autre part un point $\mathfrak{S}$ d'espèce B ne peut être isolé, car si un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ ne contenait pas d'autre point d'espèce B, l'ensemble E serait en Δ de classe A. En effet, soient

$$\Delta_1, \Delta_2, \quad . \ . \ . \quad , \Delta_n, \ . \ . \ . \ . \ .$$

des voisinages de $\mathfrak{S}$, intérieurs à Δ et tendant vers $\mathfrak{S}$. Considérons les ensembles

$$E.(\Delta-\Delta_1), \ E.(\Delta-\Delta_2), \ . \ . \ . \ . \ , \ E.(\Delta-\Delta_n), \ . \ . \ . \ .$$

Ce seraient des ensembles de classe A, puisque l'ensemble ouvert $(\Delta-\Delta_n)$ ne contient que des points d'espèce A de E et donc de $E.(\Delta-\Delta_n)$ (XII).

Visiblement, $E.\Delta$ c'est l'ensemble limite des ensembles $E.(\Delta-\Delta_n)$, qui sont de classe A, donc $E.\Delta$ est de classe A (XI), c'est-à-dire E serait de classe A en Δ. Par suite l'ensemble B_0 est dense en lui-même. Il est donc parfait.

On en conclut

XIV. *L'ensemble A_0 des points de E, qui sont d'espèce A relativement à E, c'est un ensemble de classe A.*

En effet, l'ensemble O des points d'espèce A est ouvert, comme complémentaire de l'ensemble B_0 des points d'espèce B. Or l'ensemble A_0 c'est l'ensemble des points de E, qui appartiennent à O, dont chaque point est d'espèce A relativement à E. Il s'ensuit (XII) que A_0 est de classe A. *c. q. f. d.*

XV. *Tout ensemble E de classe B contient un ensemble N de classe B, de points d'espèce B relativement à E (ou à N)* [1].

---

[1]) cf. *de la Vallée Poussin* op. cit. p. 4, pour une proposition identique, lorsque la classe A c'est la classe des ensembles dénombrables ou finis. L'ensemble N c'est alors le *„noyau“* des points de condensation.

Car les points de E d'espèce A, relativement à E, forment un ensemble A_0 de classe A. Donc, en posant

$$N = E - A_0,$$

l'ensemble N est un B, car E est un B et A_0 un A. Il s'ensuit que l'ensemble N des points d'espèce B de E est de classe B.

Mais tout point $\mathfrak{P}$ de N est aussi d'espèce B relativement à N, puisqu'un voisinage Δ de $\mathfrak{P}$ contient un ensemble de classe B de points de E et donc un ensemble de classe B de points de N.

Ajoutons aussi quelques remarques simples :

Un point $\mathfrak{P}$ d'espèce B relativement à E est un point limite de E et même un point de condensation de E. Car dans tout voisinage Δ de $\mathfrak{P}$, qui est d'espèce B, l'ensemble E est de classe B. Or, tout ensemble de classe B contient un point et est même, dans l'hypothèse indiquée ci-dessus (60), non dénombrable.

Comme il résulte de la proposition précédente (XV), *un ensemble E de classe B contient toujours un point d'espèce B, relativement à E.*

62. Reprenons la définition (4) des valeurs limites de la fonction uniforme ou multiforme $f(P)$, afin de la compléter.

On dira qu'une valeur limite $\lambda(\mathfrak{P})$ de $f(P)$ est *atteinte en $\mathfrak{P}$ sur un ensemble E* et l'on écrira

$$\lambda(\mathfrak{P}) = lim\, f_0(P) \qquad (sur\ E),$$

lorsque pour toute suite de points tendant vers $\mathfrak{P}$ et extraite de E

$$P_1,\ P_2, \quad \ldots \quad , P_n, \ldots \ldots,$$

la valeur $\lambda(\mathfrak{P})$ sera la limite unique d'une suite de valeurs déterminées et correspondantes $f_0(P_n)$ de la fonction, c'est-à-dire

$$\lambda(\mathfrak{P}) = lim\, f_0(P_n),$$

pour $n = \infty$.

Une condition équivalente, c'est que pour tout ε positif il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{P}$, tel qu'en tous les points P de E, intérieurs à Δ, l'on ait une valeur $f_0(P)$ de la fonction multiforme ou uniforme $f(P)$ satisfaisant à l'inégalité

$$| f_0(P) - \lambda(\mathfrak{P}) | < \varepsilon.$$

Une autre condition équivalente, c'est qu'une fonction uniforme

$f_0 (P)$, extraite de $f (P)$ et définie sur E, soit continue sur E au point $\mathfrak{S}$, qui est point limite de E, si $f_0 (\mathfrak{S}) = \lambda (\mathfrak{S})$.

Rappelons la définition de *l'oscillation* ω (f_0, E) *d'une fonction* $f (P)$ *sur un ensemble* E. C'est la différence entre la borne supérieure $M (f, E)$ et la borne inférieure $m (f, E)$ de l'ensemble des valeurs de $f (P)$ sur E.

Si $\lambda (\mathfrak{S})$ est atteinte en $\mathfrak{S}$ sur un ensemble E, c'est que l'oscillation de $f_0 (P)$ sur E, dans un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$ est infiniment petite avec Δ, c'est-à-dire

$$lim\ \omega\, [f_0 (P), E. \Delta] = o, \qquad \text{pour } \Delta = o.$$

Une valeur limite λ_A $(\mathfrak{S})$ de $f (P)$, atteinte en $\mathfrak{S}$ sur un ensemble ayant le caractère B en $\mathfrak{S}$, ce sera — par définition — une *valeur limite de* $f (P)$, *lorsqu'on néglige les ensembles de classe* A [1]).

En un point $\mathfrak{S}$, *l'ensemble des valeurs limites* λ_A $(\mathfrak{S})$ *de* f (P), *lorsqu'on néglige les ensembles de classe* A *est fermé.*

Soit en effet en $\mathfrak{S}$ une suite verticale de points, qui sont des valeurs limites de $f (P)$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A

$$\overset{1}{\lambda}_A(\mathfrak{S}),\ \overset{2}{\lambda}_A (\mathfrak{S}),\ \ldots\ldots\ldots,\ \overset{n}{\lambda}_A(\mathfrak{S}),\ \ldots\ldots$$

et supposons que la suite tende vers un point vertical limite λ.

Considérons, pour chaque n un ensemble E_n ayant le caractère B en $\mathfrak{S}$ et tel que l'on puisse écrire [2])

$$\overset{n}{\lambda}_A(\mathfrak{S}) = lim\, f_o (P) \qquad (sur\ E_n).$$

Nous allons former un ensemble E, ayant le caractère B en $\mathfrak{S}$ et tel que λ soit une valeur limite de $f (P)$, atteinte en $\mathfrak{S}$ sur l'ensemble E. Cela prouvera que λ est aussi une valeur limite de $f (P)$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.

Soient données à cet effet une suite décroissante de nombres positifs ε_1, ε_2, . . . tendant vers zéro et une suite de voisinages de $\mathfrak{S}$

$$\Delta'_1,\ \Delta'_2,\ \ldots\qquad \Delta'_n,\ \ldots\ldots,$$

---

1) Cette désignation se justifie, car si λ $(\mathfrak{S})$ n'est atteinte en $\mathfrak{S}$ que sur des ensembles E de caractère A en $\mathfrak{S}$, chaque ensemble E est de classe A dans un voisinage convenable $\triangle$ de $\mathfrak{S}$ et par suite, si l'on convient de négliger les ensembles de classe A de points P, la valeur $\lambda (\mathfrak{S})$ cesse d'être une valeur limite de $f (P)$ en $\mathfrak{S}$.

2) Si les ensembles E_n ont des points P communs, il n'est pas nécessaire de supposer que la valeur f_o (P) soit la même, au même point P.

les Δ'_n étant des intervalles symétriques, fermés, tels que Δ'_{n+1} soit contenu en Δ'_n et tende vers $\mathcal{S}$. On supposera d'ailleurs la suite choisie de manière que, pour chaque n, l'oscillation de $f_o(P)$ sur E_n en Δ'_n soit plus petite que ε_n, ce qui est toujours possible, en réduisant assez les dimensions de Δ'_n.

Cela posé, reprenons la suite des $\lambda^n_A(\mathcal{S})$ et les ensembles

$$E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n, \ldots\ldots$$

qui correspondent à ces quantités.

Soit Δ_1 un intervalle identique à Δ'_1. On y choisit un point intérieur $\mathcal{S}_1$, d'espèce B, relativement à E_1. Soit Δ_2 l'intervalle le plus grand des Δ'_n, intérieur à Δ_1 et ne contenant pas $\mathcal{S}_1$. On y choisit un point intérieur $\mathcal{S}_2$, d'espèce B, relativement à E_2. Soit Δ_3 l'intervalle le plus grand des Δ'_n, intérieur à Δ_2 et ne contenant pas $\mathcal{S}_2$. L'on continuera de la sorte indéfiniment.

On définit maintenant un ensemble E, par l'égalité symbolique

$$E = E_1.(\Delta_1 - \Delta_2) + E_2.(\Delta_2 - \Delta_3) + \ldots\ldots + E_n.(\Delta_n - \Delta_{n+1}) + \ldots\ldots,$$

c'est-à-dire E c'est l'ensemble formé des points de chaque ensemble E_n, appartenant à l'intervalle Δ_n, sans appartenir à l'intervalle Δ_{n+1}. L'ensemble E contient la suite de points $\mathcal{S}_n$, strictement intérieurs aux $(\Delta_n - \Delta_{n+1})$ et comme E se confond avec E_n au voisinage de $\mathcal{S}_n$, intérieur à Δ_n, il résulte que $\mathcal{S}_n$ est d'espèce B, relativement à E. Cela prouve que $\mathcal{S}$ est point limite de points $\mathcal{S}_n$, d'espèce B, relativement à E et donc $\mathcal{S}$ est d'espèce B, relativement à E et E a le caractère B en $\mathcal{S}$.

Convenons, lorsque le point P de E appartient à $E_n.(\Delta_n - \Delta_{n+1})$ de prendre sur E la valeur $f_0(P)$ de $f(P)$ identique à la valeur $f_0(P)$, distinguée sur E_n. Alors il y a

$$\lambda = lim\, f_0(P) \qquad (sur\ E).$$

En effet, on a eu en Δ'_n, pour les points P de E_n

$$|f_0(P) - \lambda| < \varepsilon_n$$

et cette inégalité reste valable pour les points P de $E_n.(\Delta_n - \Delta_{n+1})$. Chaque point P de E satisfait donc à une inégalité pareille à la précédente et lorsqu'une suite de points P_i de E tend vers $\mathcal{S}$, le point P_i

appartient à un ensemble $E_n . (\Delta_n - \Delta_{n+1})$ d'indice infiniment grand et comme ε_n est infiniment petit, on a

$$lim\, f_0 (P_i) = \lambda,$$

pour toute suite de points P_i extraite de E et tendant vers $\mathcal{S}$.

63. Nous allons prouver maintenant que *le maximum $M_A (f, \mathcal{S})$ de $f(P)$ en $\mathcal{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A, c'est la plus grande des valeurs limites de $f(P)$ en $\mathcal{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.*

On établit d'abord que $M_A (f, \mathcal{S})$ est une valeur $\lambda_A (\mathcal{S})$. On y arrive en construisant un ensemble E, ayant le caractère B en $\mathcal{S}$ et tel que

$$M_A (f, \mathcal{S}) = lim\, f(P) \qquad (sur\ E).$$

Soient données une suite (S) de voisinages de $\mathcal{S}$, symétriques et fermés, tendant vers $\mathcal{S}$

$$(S) \qquad \Delta'_1, \Delta'_2, \ldots\ldots, \Delta'_n, \ldots\ldots$$

et une suite de nombres positifs, décroissant vers zéro

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n, \ldots\ \ldots$$

Soit Δ_1 un voisinage de $\mathcal{S}$. On y définit l'ensemble E_1, qui correspond avec des valeurs convenables de $f_0 (P)$ à l'égalité

$$E_1 = E_1 [\, M_A (f, \mathcal{S}) - \varepsilon_1 < f_0 (P) < M_A (f, \mathcal{S}) + \varepsilon_1 \,].$$

L'ensemble E_1 est de classe B, comme il résulte des propriétés examinées de $M_A (f, \mathcal{S})$. Il existe donc en Δ_1 un ensemble parfait de points d'espèce B, relativement à E_1. Choisissons dans la suite des Δ_n le plus grand des intervalles laissant au moins un de ces points à l'extérieur, au sens strict et désignons le par Δ_2, pour recommencer en remplaçant ε_1 par ε_2 et ainsi de suite.

On détermine une suite d'intervalles

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots\ \ldots$$

tendant vers $\mathcal{S}$, tels qu'il y ait dans le domaine $(\Delta_n - \Delta_{n+1})$ un point d'espèce B, relativement à l'ensemble E_n, défini par

$$E_n = E_n [M_A (f, \mathcal{S}) - \varepsilon_n < f_0 (P) < M_A (f, \mathcal{S}) + \varepsilon_n].$$

Posons

$$E = E_1 . (\Delta_1 - \Delta_2) + E_2 . (\Delta_2 - \Delta_3) + \ldots\ldots + E_n (\Delta_n - \Delta_{n+1}) + \quad \ldots\ldots$$

Alors il y aura dans tout voisinage de $\mathfrak{S}$ un point d'espèce B de E, ce qu'on montre comme plus haut (62). On voit facilement, que si l'on garde pour $f_0\ (P)$ les valeurs, qui apparaissent sur les ensembles E_n, alors à toute suite de points de E, tendant vers $\mathfrak{S}$, correspond une suite de valeurs $f_0\ (P)$ de $f\ (P)$ tendant vers $M_A\ (f, \mathfrak{S})$.

Il reste à prouver qu'il n'y a aucune valeur $\lambda_A\ (\mathfrak{S})$ plus grande que $M_A\ (f, \mathfrak{S})$. Supposons en effet le contraire et soit

$$\lambda_A\ (\mathfrak{S}) > M_A\ (f, \mathfrak{S}).$$

Il existe un nombre ε positif, assez petit, tel que

$$\lambda_A\ (\mathfrak{S}) - \varepsilon > M_A\ (f, \mathfrak{S}).$$

Considérons d'autre part l'ensemble E, d'espèce B en $\mathfrak{S}$, tel que l'on ait

$$\lambda_A\ (\mathfrak{S}) = lim\ f_0\ (P) \qquad\qquad (sur\ E).$$

Cela veut dire qu'il existe un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, tel qu'en tout point P de $E. \Delta$ l'on ait

$$f_0\,(P) > \lambda_A\ (\mathfrak{S}) \quad \varepsilon.$$

Soit Δ' un voisinage quelconque de $\mathfrak{S}$, intérieur à Δ. L'ensemble $E. \Delta'$ est de classe B et puisque l'inégalité précédente y est satisfaite en tout point, l'on doit avoir

$$M_A\ (f, \Delta') > \lambda_A\ (\mathfrak{S}) - \varepsilon$$

et puisque Δ' est un voisinage quelconque de $\mathfrak{S}$, on a aussi

$$M_A\ (f, \mathfrak{S}) \geqq \lambda_A\ (\mathfrak{S}) - \varepsilon,$$

contrairement à la supposition faite.

64. Soit $f\ (P)$ une fonction uniforme ou multiforme de n variables réelles et t une valeur finie donnée. Désignons par $\Phi\ (P)$ et $\varphi\ (P)$ les fonctions obtenues, comme plus haut (58), en posant

$$\Phi\ (P) = f\ (P) \text{ lorsque } f\ (P) \geqq t \quad \text{et} \quad \Phi\ (P) = +\infty, \text{ lorsque } f\ (P) < t,$$

$$\varphi\ (P) = f\ (P) \text{ lorsque } f\ (P) \leqq t \quad \text{et} \quad \varphi\ (P) = -\infty, \text{ lorsque } f\ (P) > t.$$

On définit

$$l_A(\mathfrak{S}) = m_A(\Phi, \mathfrak{S}) \quad \text{et} \quad L_A(\mathfrak{S}) = M_A(\varphi, \mathfrak{S}),$$

en appelant $l_A(\mathfrak{S})$ et $L_A(\mathfrak{S})$, respectivement, *les maximum et minimum de $f(P)$, relatifs à t, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.*

Nous allons démontrer la proposition suivante :

XVI. *Il n'y a qu'un ensemble de classe A de points $\mathfrak{S}$, tels que $l_A(\mathfrak{S})$ et $L_A(\mathfrak{S})$ étant relatifs à t, l'on ait*

$$L_A(\mathfrak{S}) < f_0(\mathfrak{S}) < l_A(\mathfrak{S}).$$

En effet, considérons la fonction $F'(P)$ définie par l'égalité

$$F'(P) = \frac{1}{\Phi(P) - t},$$

en convenant de considérer $+\infty$, comme l'inverse de la valeur zéro.

On a

$$M_A(F', \mathfrak{S}) = \frac{1}{m_A(\Phi, \mathfrak{S}) - t}\,.$$

Cela résulte presque immédiatement des définitions (51). Or, la fonction finie ou non $M_A(F', P)$ jouit par rapport à la fonction finie ou non $F'(P)$ de la propriété démontrée plus haut (54, VIII), c'est-à-dire il y a

$$F'_0(P) > M_A(F', \mathfrak{S})$$

sur un ensemble de classe A.

Il s'agit de chercher maintenant l'ensemble support de points $\mathfrak{S}$, tels que

$$t \leq f_0(\mathfrak{S}) < l_A(\mathfrak{S}).$$

Si ces inégalités sont satisfaites, comme il y a $l_A(\mathfrak{S}) = m_A(\Phi, \mathfrak{S})$ et puisque $f_0(\mathfrak{S}) \geq t$, $f_0(\mathfrak{S}) = \Phi_0(\mathfrak{S})$, on a $\Phi_0(\mathfrak{S}) < m_A(\Phi, \mathfrak{S})$, d'où

$$F'_0(\mathfrak{S}) = \frac{1}{\Phi_0(\mathfrak{S}) - t} > \frac{1}{l_A(\mathfrak{S}) - t} = M_A(F', \mathfrak{S}),$$

ce qui n'a lieu que sur un ensemble de classe A de points $\mathfrak{S}$.

On montre de même, qu'il n'y a qu'un ensemble de classe A de points $\mathfrak{S}$, tels que

$$L_A(\mathfrak{S}) < f_0(\mathfrak{S}) \leq t,$$

ce qui achève de démontrer l'énoncé.

65. Il y a enfin la proposition suivante :

XVII. *Sauf pour un ensemble exceptionnel E de classe A de points $\mathfrak{S}$, toute valeur $f(\mathfrak{S})$ d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles en $\mathfrak{S}$, c'est une des valeurs limites de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.*

C'est-à-dire, pour tout $\mathfrak{S}$ n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel E, il y a

$$f(\mathfrak{S}) = \mathit{lim}\, f(P) \qquad (\mathit{sur}\ \mathcal{E}),$$

l'ensemble $\mathcal{E}$ étant de classe B dans tout voisinage de $\mathfrak{S}$.

Considérons, en effet, l'ensemble exceptionnel E. En tout point $\mathfrak{S}$ de E, l'une au moins $f_0(\mathfrak{S})$ des valeurs $f(\mathfrak{S})$ de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$ ne coïncide avec aucune des valeurs limites $\lambda_A(\mathfrak{S})$ de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$.

On a vu plus haut (62), que l'ensemble V des valeurs limites $\lambda_A(\mathfrak{S})$ de $f(P)$ en $\mathfrak{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A, est fermé. C'est un ensemble linéaire vertical. Si une valeur $f_0(\mathfrak{S})$ ne coïncide avec aucune de ces valeurs $\lambda_A(\mathfrak{S})$, le point vertical $f_0(\mathfrak{S})$ appartient à l'ensemble ouvert complémentaire de V et $f_0(\mathfrak{S})$ est intérieure à un intervalle non-nul j, contigu à V.

Montrons que $l_A(\mathfrak{S})$ et $L_A(\mathfrak{S})$ relatifs à t, ce sont respectivement les deux points extrémités supérieure et inférieure de l'intervalle vertical j considéré. En reprenant en effet la définition de $l_A(\mathfrak{S})$ relatif à t, on voit qu'il correspond sur l'axe vertical, par inversion en rapport avec le point vertical t pris comme origine, au nombre $M_A(F', \mathfrak{S})$, qui est le point limite $\lambda_A(\mathfrak{S})$ le plus haut de $F'(P)$ en $\mathfrak{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A (63).

Or, en vertu de la définition de $F'(P)$, on voit facilement qu'à tout point limite vertical $\lambda_A(F', \mathfrak{S})$ de $F'(P)$ en $\mathfrak{S}$ lorsqu'on néglige les ensembles de classe A, correspond un point limite vertical $\lambda_A(\Phi, \mathfrak{S})$ de $\Phi(P)$ en $\mathfrak{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A, qui est aussi un point limite de valeurs de $f(P) \geqq t$ en $\mathfrak{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A et réciproquement. Mais l'extrémité supérieure de l'intervalle j doit coïncider avec le point $l_A(\mathfrak{S})$, car tous les deux représentent le point limite le plus bas de $\Phi(P)$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.

Cela posé, soit donnée arbitrairement une valeur $t = t_n$. Il n'existe (64, XVI), qu'un ensemble de classe A de points $\mathfrak{S}$, tels que

$$L_A(\mathfrak{S}) < f_0(\mathfrak{S}) < l_A(\mathfrak{S}),$$

où $L_A(\mathcal{S})$ et $l_A(\mathcal{S})$ sont relatifs à t_n et $f_o(\mathcal{S})$ une des valeurs de $f(P)$ en $\mathcal{S}$. Soit E_n cet ensemble exceptionnel.

Donnons-nous un ensemble cote T, dénombrable et partout dense, de points t_n, défini sur l'axe des cotes de la fonction $f(P)$ et soit E l'ensemble somme des ensembles exceptionnels E_n. L'ensemble E sera un A, comme somme des A.

Considérons un point $\mathcal{S}$ de l'ensemble cE, complémentaire de E.

On peut prouver que toute valeur $f_o(\mathcal{S})$ de $f(P)$ en $\mathcal{S}$ est une valeur $\lambda_A(\mathcal{S})$ limite de $f(P)$ en $\mathcal{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A. Car si l'on supposait le contraire, $f_o(\mathcal{S})$ serait strictement intérieur à un intervalle vertical non-nul j, dont les extrémités sont des $\lambda_A(\mathcal{S})$, c'est-à-dire des points limites de $f(P)$ en $\mathcal{S}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A. On peut choisir dans l'intervalle vertical j un point vertical t_n de cote t_n, car T est dense sur l'axe des cotes. Si l'on détermine $l_A(\mathcal{S})$ et $L_A(\mathcal{S})$ de $f(P)$ relatifs à t_n, la coïncidence démontrée ci-dessus exigerait aussi

$$L_A(\mathcal{S}) < f_o(\mathcal{S}) < l_A(\mathcal{S}),$$

ce qui n'arrive en aucun point de cE, pour la valeur t_n. Donc $f_o(\mathcal{S})$ est une valeur $\lambda_A(\mathcal{S})$. *c. q. f. d.*

Le même résultat peut s'exprimer aussi sous la forme suivante qui exige moins de définitions nouvelles :

XVIII. *Toute fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles jouit, en tout point $\mathcal{S}$, sauf pour un ensemble exceptionnel E de classe A de points $\mathcal{S}$, de la propriété*

$$f(\mathcal{S}) = \lim f(P),$$

la limite étant atteinte en $\mathcal{S}$ sur un ensemble $\mathcal{E}$, qui est de classe B dans tout voisinage de $\mathcal{S}$.

Je ferai remarquer que cette proposition précise aussi un résultat antérieur (59, X), en ce sens que si l'on convient d'excepter un ensemble E de points $\mathcal{S}$, qui est dénombrable, non seulement on peut avoir pour tout $\mathcal{S}$ de cE, $f(\mathcal{S}) = \lambda(\mathcal{S})$, mais on peut faire en plus que la limite soit atteinte en chaque point $\mathcal{S}$ de cE et pour chaque valeur $f_o(\mathcal{S})$ sur un ensemble $\mathcal{E}$ présentant un point de condensation en $\mathcal{S}$.

On doit ajouter que l'ensemble exceptionnel E contient dans le second cas, en général, aussi d'autres points que dans le premier, mais c'est toujours un ensemble dénombrable [1]).

66. En nous appuyant sur la classification des ensembles, étudiée ci-dessus, il est possible de compléter certains résultats antérieurs, dans le cas des fonctions uniformes.

Soit $f(P)$ une fonction uniforme de n variables réelles.

On a vu plus haut (42 I), que l'ensemble des points $\mathfrak{P}$, tels que l'on ait

$$f(\mathfrak{P}) > f(P)$$

dans un voisinage Δ de $\mathfrak{P}$ est fini ou dénombrable.

Or, on a vu aussi (47, I) que l'ensemble des points $\mathfrak{P}$, tels que

$$f(\mathfrak{P}) > M_0(\mathfrak{P})$$

est fini où dénombrable.

Cette dernière proposition est une conséquence de la première. Car si $f(\mathfrak{P}) > M_0(\mathfrak{P})$ l'on a aussi $f(\mathfrak{P}) > f(P)$ dans un voisinage convenable Δ de $\mathfrak{P}$. Sinon il y aurait en effet dans tout voisinage Δ de $\mathfrak{P}$ des points $\mathfrak{P}$, tels que $f(\mathfrak{P}) \leqq f(P)$ et donc il y aurait des points limites $\lambda(\mathfrak{P}) \geqq f(\mathfrak{P})$, c'est-à-dire d'autant plus $M_0(\mathfrak{P}) \geqq f(\mathfrak{P})$, contrairement à l'hypothèse.

La première proposition est plus générale, car on peut avoir en $\Delta, f(\mathfrak{P}) > f(P)$ et pourtant $f(\mathfrak{P}) = M_0(\mathfrak{P})$, comme un exemple suffit à

---

[1]) Il y a pour les fonctions uniformes un théorème remarquable de *M. A. Denjoy* sur la continuité approximative (Bull. de la Soc. Math. de France, t. 43. 1915, p. 165), qui a été étendu sans difficulté aux fonctions uniformes quelconques (*W. Sierpinski*, Fundamenta Mathematicae, t. IV. 1923, p. 125). Dans le cas particulier, où la classe A c'est la classe des ensembles de mesure nulle, ce théorème précise encore plus la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel $f(\mathfrak{P})$ est atteinte comme valeur limite de $f(P)$. Si l'on néglige un ensemble convenable exceptionnel E de mesure nulle, l'ensemble $\mathcal{E}$ est non seulement de mesure extérieure non-nulle dans tout voisinage $\triangle$ de $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire $m_e\ \mathcal{E}.\triangle > 0$, comme l'exige la proposition (XVIII) ci-dessus, mais en plus la densité extérieure de $\mathcal{E}$ en $\mathfrak{P}$ est égale à l'unité. On a donc

$$lim \frac{m_e\ \mathcal{E}.\triangle}{m\ \triangle} = 1, \qquad pour\ \triangle = o.$$

Evidemment, dans l'extension du théorème de *M. A. Denjoy* l'ensemble exceptionnel E contient aussi des points, qui ne se présentent pas lorsqu'on applique la proposition ci-dessus et il n'y a pas contradiction. — Le théorème de *M. Denjoy* et son extension ne sont pas directement applicables aux fonctions multiformes.

le montrer. Il n'y a qu'à prendre le cas d'une fonction continue présentant un maximum strict en $\mathscr{S}$ pour s'en convaincre.

D'autre part on a vu que la seconde proposition est susceptible d'une vaste généralisation (54, VIII). Nous allons montrer qu'il en est de même de la première.

67. On a la proposition

XIX. *Si $f(P)$ est une fonction uniforme de n variables réelles et E l'ensemble de points $\mathscr{S}$, tels que l'on ait*

$$f(\mathscr{S}) > f(P),$$

pour tout point P du voisinage Δ de $\mathscr{S}$, sauf pour un ensemble de classe A de points P, l'ensemble E est lui-même de classe A.

Donnons nous en effet une suite de nombres positifs décroissant vers zéro

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \ldots, \varepsilon_n, \ldots \ldots$$

Enfermons chaque point P de E en une sphère ouverte de centre $\mathscr{S}$ et telle que l'on ait

$$f(\mathscr{S}) > f(P),$$

pour tout point P intérieur à la sphère, sauf pour un ensemble de classe A de points P. Il y aura toujours une telle sphère, par suite de la définition de E.

Choisissons pour chaque point $\mathscr{S}$ de E, parmi les sphères satisfaisant à cette condition, celle dont le rayon $\delta(\mathscr{S})$ est le plus grand des nombres ε_n, qui conviennent. Ce sera la sphère $S(\mathscr{S})$ attachée à $\mathscr{S}$ et $\delta(\mathscr{S})$ son rayon.

En tout point $\mathscr{S}$ de l'ensemble E, l'on a

$$f(\mathscr{S}) \geqq M_A(\mathscr{S}),$$

car en tout voisinage Δ de $\mathscr{S}$, intérieur à $S(\mathscr{S})$ l'on a $f(\mathscr{S}) \geqq M_A(f, \Delta)$.

Décomposons E en deux sous-ensembles E_0 et E_1, tels qu'en tout point $\mathscr{S}$ de E_0 l'on ait $f(\mathscr{S}) > M_A(\mathscr{S})$ et qu'en tout point de E_1 l'on ait $f(\mathscr{S}) = M_A(\mathscr{S})$.

L'ensemble E_0 est de classe A (54, VIII). Il reste à montrer la même chose pour E_1.

Considérons deux points quelconques $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{F}''$ de E_1. Soit $\Delta(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'')$ leur distance. On va prouver que l'une au moins des inégalités

$$\Delta(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'') \geqq \delta(\mathfrak{F}') \quad \text{et} \quad \Delta(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'') \geqq \delta(\mathfrak{F}'')$$

est satisfaite, si $f(\mathfrak{F}') \neq f(\mathfrak{F}'')$.

Supposons en effet que l'on ait par contre simultanément

$$\delta(\mathfrak{F}') > \Delta(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'') \quad \text{et} \quad \delta(\mathfrak{F}'') > \Delta(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'').$$

Alors $\mathfrak{F}'$ est intérieur à la sphère $S(\mathfrak{F}'')$ et $\mathfrak{F}''$ intérieur à la sphère $S(\mathfrak{F}')$. On démontrera qu'il en résulte $f(\mathfrak{F}') = f(\mathfrak{F}'')$.

En effet, soit Δ un voisinage de $\mathfrak{F}''$, intérieur à $S(\mathfrak{F}')$. Supposons d'abord $f(\mathfrak{F}') < f(\mathfrak{F}'')$. C'est, par définition de E_1, la même chose que $M_A(\mathfrak{F}') < M_A(\mathfrak{F}'')$ ou avec un α positif convenable

$$M_A(\mathfrak{F}') < M_A(\mathfrak{F}'') - \alpha.$$

Or, on a vu (52, V) que l'ensemble de points P, tels que

$$f(P) > M_A(\mathfrak{F}'') - \alpha,$$

est de classe B en tout voisinage Δ de $\mathfrak{F}''$. On aurait donc en $S(\mathfrak{F}')$ l'inégalité $M_A(\mathfrak{F}') < f(P)$ pour un ensemble de classe B de points P, ce qui est exclu par définition de $S(\mathfrak{F}')$. On ne peut donc avoir $f(\mathfrak{F}') < f(\mathfrak{F}'')$ et pour les mêmes motifs, à cause de la symétrie, ni $f(\mathfrak{F}'') < f(\mathfrak{F}')$ ce qui justifie notre assertion ci-dessus.

D'autre part, on peut montrer que l'ensemble $\mathcal{E}(a)$ de points P de E_1, tels que $f(P) = a$, a étant une constante donnée, est de classe A. Car s'il était de classe B, l'ensemble $\mathcal{E}(a)$ contiendrait un point $\mathfrak{F}$, d'espèce B relativement à $\mathcal{E}(a)$ (61, XV). Mais alors dans la sphère $S(\mathfrak{F})$ il y aurait un ensemble de classe B de points P, tels que $f(\mathfrak{F}) = f(P)$, ce qui est exclu par définition de $S(\mathfrak{F})$.

On peut montrer que l'ensemble E_1 c'est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $\mathcal{E}(a)$, qui sont de classe A, ce qui achève la démonstration.

Choisissons, en effet, dans chaque $\mathcal{E}(a)$, qui n'est pas nul, un point $\mathfrak{F}$ et considérons l'ensemble D ainsi obtenu. De quelque manière que ce choix ait été fait, l'ensemble obtenu D est dénombrable. En effet pour deux quelconques $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{F}''$ de ses points, on a toujours par construction $f(\mathfrak{F}') \neq f(\mathfrak{F}'')$. Or on a vu ci-dessus, que cela suffit pour que l'une au moins des inégalités

$$\Delta(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'') \geqq \delta(\mathfrak{F}') \qquad \text{ou} \qquad \Delta(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'') \geqq \delta(\mathfrak{F}'')$$

ait lieu. Dès lors, il est visible que l'ensemble D_n des points $\mathfrak{S}$, tels que $\delta(\mathfrak{S}) = \varepsilon_n$, est isolé, puisque pour deux quelconques $\mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{S}''$ de ses points la distance $\Delta(\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'') \geqq \varepsilon_n$, où ε_n est une constante positive donnée. L'ensemble D est dénombrable ou fini comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles D_n isolés. Il en résulte que $\mathcal{E}(a)$ n'est pas nul pour un nombre fini ou dénombrable de valeurs a différentes.

68. En revenant à l'ordre d'idées exposé au Chapitre III, on peut poser la définition suivante :

Une fonction uniforme de n variables réelles $f(\mathfrak{S})$ présente au point $\mathfrak{S}$ *un maximum atteint, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A*, si l'on a

$$f(\mathfrak{S}) \geqq f(P)$$

pour tout point P du voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, sauf pour un ensemble de classe A de points P.

Une fonction uniforme de n variables réelles $f(P)$ présente au point $\mathfrak{S}$ *un maximum non atteint, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A*, si l'on a

$$M_A(\mathfrak{S}) \geqq f(P)$$

pour tout point P du voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, sauf pour un ensemble de classe A de points P et qu'en plus

$$f(\mathfrak{S}) < M_A(\mathfrak{S}).$$

Si l'on garde dans la première définition seulement le signe d'inégalité et si l'on remplace dans la seconde définition la condition $M_A(\mathfrak{S}) \geqq f(\mathfrak{S})$, par celle plus précise

$$M_A(\mathfrak{S}) > M_A(P) \geqq f(P)$$

on aura, dans les deux cas, des maximums *stricts*.

C'est-ce qui permet d'énoncer le résultat précédent (67, XIX) sous la forme suivante :

XX. *Une fonction $f(P)$ de n variables réelles présente un ensemble de classe A de maximums stricts* (*atteints ou non*), *lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.*

69. Revenons enfin, en manière de digression, sur une question rencontrée incidemment plus haut (62), afin d'appuyer sur l'intérêt qu'il y

aurait à approfondir la nature des ensembles sur lesquels une valeur limite λ ($\mathfrak{S}$) de la fonction uniforme ou multiforme f ($\mathfrak{S}$) est atteinte.

Supposons la valeur λ ($\mathfrak{S}$) atteinte sur un ensemble E, c'est-à-dire

$$\lambda(\mathfrak{S}) = \lim f_o\ (P) \qquad (sur\ E).$$

Convenons de dire que l'ensemble support E c'est un *ensemble relatif à la valeur limite* λ ($\mathfrak{S}$). On désignera aussi E par $E[P, \lambda(\mathfrak{S})]$.

Il y a en général une infinité d'ensembles $E[P, \lambda(\mathfrak{S})]$, relatifs à la même valeur λ ($\mathfrak{S}$), dans tout voisinage du point $\mathfrak{S}$. Si parmi ces ensembles E, il existe un ensemble $\mathcal{E}[P, \lambda(\mathfrak{S})]$, tel que tout $E[P, \lambda(\mathfrak{S})]$ en soit un sous-ensemble au voisinage de $\mathfrak{S}$, on appellera $\mathcal{E}$ *ensemble maximum relatif à la valeur limite* λ ($\mathfrak{S}$)

Un cas où $\mathcal{E}$ existe c'est, pour tout point limite vertical, celui de la fonction φ (x) de *Dirichlet*, nulle partout, sauf aux points à coordonnée rationnelle, où elle égale *1*. Un cas où $\mathcal{E}$ n'existe pas pour $x = o$, en aucun point limite vertical, c'est celui de la fonction φ (x), égale à $\sin \frac{1}{x}$, comme on le vérifie facilement.

On a la proposition :

XXI. *Une fonction uniforme ou multiforme f (P), dont toute valeur limite est atteinte sur un ensemble maximum ne peut présenter en chaque point $\mathfrak{S}$ qu'un ensemble vertical fini de valeurs limites.*

Cela résulte de ce que, d'une part l'ensemble vertical des points limites de f (P) en $\mathfrak{S}$ est fermé (4) et d'autre part on va voir que cet ensemble ne possède aucun point limite à distance finie ou non.

Supposons en effet que λ ($\mathfrak{S}$) soit un point limite vertical des valeurs limites λ_n ($\mathfrak{S}$) de f (P) au point $\mathfrak{S}$. On va voir l'absurdité de cette hypothèse.

Chaque valeur limite λ_n ($\mathfrak{S}$) est visiblement atteinte sur un ensemble $E_n[P, \lambda_n(\mathfrak{S})]$ de points support, dont on se donne une suite S_n indéfinie

$$P_n^1,\ P_n^2, \quad \ldots\ldots \quad , P_n^q,\ \ldots\ldots,$$

choisie de manière qu'elle ne présente que le seul point limite $\mathfrak{S}$.

On peut montrer que pour toute valeur de $n > N$, suffisamment grand, une infinité de points de S_n doit figurer en $\mathcal{E}[P, \lambda(\mathfrak{S})]$ ce qui prouve que λ_n ($\mathfrak{S}$) serait aussi une valeur limite de f_o (P) pour une suite de points extraite de $\mathcal{E}$ et tendant vers $\mathcal{S}$. Or cela est contraire à la définition de $\mathcal{E}$, comme ensemble relatif à la valeur limite $\lambda(\mathcal{S})$.

En effet on aurait, en cas contraire, une infinité d'indices inférieurs d'exception

$$n_1 < n_2 \quad . \; . \; . < n_u < . \; . \; . \; . \; ,$$

tels que q_u soit le premier indice supérieur q, pour lequel le point $P^q_{n_u}$ ne se présente pas en $\mathcal{E}$. Si cet indice q_u dépasse n_u on le garde, sinon on donne à q_u la valeur de ce nombre n_u même et alors le point $P^{q_u}_{n_u}$ ne se présente pas en $\mathcal{E}$.

Considérons alors la suite indéfinie de points support

$$P^{q_1}_{n_1},\; P^{q_2}_{n_2},\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; ,\; P^{q_u}_{n_u},\; . \; . \; . \; . \; .$$

Il est visible que pour cette suite les valeurs respectives de $f(P)$, c'est-à-dire les $f_0\left(P^{q_u}_{n_u}\right)$ tendent vers $\lambda(\mathcal{S})$.

En effet, pour $n \geqq N$ et N assez grand, il y a pour tout ε donné

$$|\lambda(\mathcal{S}) - \lambda_n(\mathcal{S})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tandis que pour $q \geqq Q$ et Q assez grand, il y a, pour tout ε donné

$$|\lambda_n(\mathcal{S}) - f_0(P^q_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc pour $n \geqq N$ et $q \geqq Q$, il y a

$$|\lambda(\mathcal{S}) - f_0(P^q_n)| < \varepsilon.$$

Or dès que $u \geqq U$, suffisamment grand, cette inégalité est satisfaite.

Il en résulterait que la suite de points $P^{q_u}_{n_u}$ forme un ensemble $E[P, \lambda(\mathcal{S})]$ qui n'a aucun point commun avec $\mathcal{E}[P, \lambda(\mathcal{S})]$ dans un voisinage convenable Δ de $\mathcal{S}$, ce qui est contraire à la définition de $\mathcal{E}$, qui est un ensemble maximum, relatif à la valeur limite $\lambda(\mathcal{S})$.

On a raisonné, comme si la valeur rencontrée de $\lambda(\mathcal{S})$ était finie. Si le contraire arrivait, il n'y aurait qu'à opérer une inversion de l'ensemble cote, par rapport à un point cote à distance finie et constater que les propriétés se maintiennent (2).

L'ensemble vertical linéaire des valeurs limites ne possédant pas de point limite à distance finie ou infinie, c'est un ensemble fini.

On a démontré en fait la propriété

XXII. *Toute valeur limite d'une fonction uniforme ou multiforme* $f\ (P)$, *en un point* $\mathfrak{S}$, *qui est atteinte sur un ensemble maximum est un point isolé de l'ensemble des valeurs limites de* $f\ (P)$ *au même point* $\mathfrak{S}$.

70. Il faut observer que les propriétés, présentées plus haut (Chapitre IV), se maintiennent aussi lorsque les fonctions uniformes ou multiformes $f\ (P)$ sont définies sur un ensemble parfait.

Il faudra seulement introduire les notions correspondantes pour les ensembles parfaits, ce qui n'implique aucune difficulté spéciale.

Il suffit de considérer comme voisinage d'un point, sur l'ensemble parfait donné, l'ensemble des points P de l'ensemble parfait contenu dans le voisinage Δ de $\mathfrak{S}$. [1])

CHAPITRE V.

Propriétés de voisinage.

71. Nous allons dégager maintenant, du point de vue abstrait, les caractères communs aux résultats de ce travail. [2])

Appelons *propriété ponctuelle* ou locale ($\mathfrak{L}$) une propriété, qu'une fonction $f\ (P)$ de point peut posséder ou non en un point quelconque $\mathfrak{S}$. La propriété ponctuelle ou locale contraire sera désignée par (*non* $\mathfrak{L}$). Un point support où la propriété ($\mathfrak{L}$) est satisfaite ce sera *un point* ($\mathfrak{L}$).

Appelons *propriété de voisinage* (V) toute propriété ponctuelle pouvant appartenir à une fonction multiforme $f\ (P)$ et possédant le caractère abstrait suivant :

La propriété (V) est définie en un point limite $\mathfrak{S}$ de l'ensemble support E des valeurs d'une fonction multiforme [3]) $f\ (P)$, dès que l'on

---

1) Pour les extensions possibles, des notions présentées au cours de ce Chapitre, aux ensembles parfaits cf. *Baire* op. cit. p. 83 et suiv.

2) Il est inévitable d'introduire à cet effet une terminologie nouvelle.

3) La fonction $f\ (P)$ est quelconque ou appartient à une classe Γ, préalablement définie, comme ce seraient la classe des fonctions uniformes, continues, etc.

connaît $f(P)$ dans un voisinage quelconque du point $\mathfrak{S}$ et seulement en ce cas.

Comme exemple de propriété (V) on peut indiquer la propriété, qui consiste à satisfaire l'inégalité $f(\mathfrak{S}) > f(P)$ dans tout voisinage Δ de $\mathfrak{S}$, lorsque $f(P)$ est uniforme.

On peut restreindre encore plus cette définition, en la précisant. Appelons *fonctionnelle de voisinage* de $f(P)$ la fonction de point

$$F(f, \mathfrak{S}) = F(\mathfrak{S}),$$

qui s'obtient de $f(P)$ comme fonctionnelle ayant pour argument la fonction $f(P)$ au voisinage du point $\mathfrak{S}$. [1])

On a rencontré plus haut plusieurs fonctions de ce genre comme $M(P)$, $M_A(P)$, *lim sup* $f(P)$, $\lambda(P)$. D'autres fonctions classiques, parmi lesquelles la dérivée d'une fonction continue d'une variable ou ses nombres dérivés appartiennent au même genre.

Une propriété de voisinage (V) peut s'exprimer souvent à l'aide d'égalités et d'inégalités, où figurent exclusivement des valeurs de certaines fonctionnelles de voisinage de la fonction $f(P)$.

C'est le cas par exemple pour la propriété (V), exprimée par l'inégalité $f(\mathfrak{S}) \leq M(\mathfrak{S})$, à satisfaire par toute valeur $f_0(\mathfrak{S})$ de la fonction multiforme $f(P)$ en $\mathfrak{S}$ et qui exige la connaissance de $f(P)$ dans un voisinage quelconque de $\mathfrak{S}$, connaissance nécessaire et suffisante à la définition de (V).

Une propriété *strictement ponctuelle* de $f(P)$, c'est une propriété, dont la définition n'implique que la connaissance de la fonction $f(P)$ en un point $\mathfrak{S}$. C'est donc parmi les propriétés ponctuelles le contraire d'une propriété de voisinage.

Appelons *caractère de distribution* (D) d'une propriété ponctuelle $(\mathscr{P})$ un caractère commun à tout ensemble E, support de la propriété $(\mathscr{P})$ pour les fonctions $f(P)$. Selon que $f(P)$ peut être quelconque ou doit appartenir, par hypothèse, à une classe particulière M de fonctions, le caractère (D) sera, par définition, un caractère *absolu* ou respectivement un caractère *relatif à la classe M.*

---

[1]) Les deux manières différentes de noter: $F(\mathfrak{S})$ et $F(f, \mathfrak{S})$ correspondent effectivement au deux sens distincts de la fonction F, qui peut être regardée simplement comme fonction de point ou comme fonctionnelle ayant pour argument les valeurs de $f(P)$ au voisinage du point $\mathfrak{S}$. Ces deux notations se retrouvent constamment au cours de ce travail, pour toutes les fonctions présentant ce caractère.

C'est la recherche des caractères absolus de distribution de certaines propriétés de voisinage (V) *qui a fait l'objet principal de ce travail.*

72. La recherche des caractères de distribution des propriétés de voisinage s'est rencontrée fréquemment dans l'étude des fonctions de variables réelles. Mais il s'agissait le plus souvent de caractères relatifs à une classe particulière de fonctions.

L'existence des caractères absolus de distribution montre que l'assertion, suivant laquelle une fonction arbitrairement donnée serait susceptible de contredire toute propriété ponctuelle donnée à l'avance, est inexacte.

Cette assertion est valable tant qu'il s'agit d'une propriété strictement ponctuelle. Elle peut cesser d'être vraie si la propriété ponctuelle est en même temps une propriété de voisinage.

Nous allons examiner de près comment cela se produit. Les développements antérieurs de ce travail [1]) ont déjà montré, en certains cas particuliers, comment ces caractères absolus de distribution prennent naissance. Il s'agit d'en présenter en premier lieu un schéma abstrait, avant d'énoncer de nouveaux résultats.

73. On a d'abord le caractère absolu de distribution suivant, valable pour toute propriété de voisinage :

I. *L'ensemble support E d'une propriété de voisinage* [2]) *donnée peut contenir un ensemble $\mathfrak{E}$ isolé, donné arbitrairement, si la fonction $f(P)$ est convenable.*

En effet, par définition, il existe pour tout point $\mathfrak{P}_n$ un voisinage Δ_n et une fonction $f_n(P)$, tels que (V) soit satisfaite au point $\mathfrak{P}_n$ pour $f_n(P)$. D'autre part, soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble isolé donné. On peut enfermer chaque point $\mathfrak{P}_n$ de $\mathfrak{E}$ dans un voisinage convenable Δ'_n, contenu en Δ_n, qui renferme le seul point $\mathfrak{P}_n$ de $\mathfrak{E}$. On pose en Δ'_n

$$f(P) = f_n(P).$$

---

1) Voir en spécial les explications données comme introduction au Chap. IV (46).

2) Il est sous-entendu qu'il s'agit d'une propriété de voisinage, définie pour une fonction $f(P)$ quelconque, de manière qu'elle ne soit ni toujours satisfaite, ni impossible.

On donne à $f(P)$ des valeurs arbitraires aux points qui n'appartiennent pas aux intervalles Δ_n. La fonction $f(P)$ possède alors évidemment la propriété (V) aux points de $\mathcal{E}$, au moins.

74. On ne peut aller plus loin, en gardant à la propriété (V) toute sa généralité.

En effet, si l'ensemble donné $\mathcal{E}$ contient un point limite $\mathcal{S}$, le voisinage de ce point contient un infinité de voisinages des points P, qui tendent vers $\mathcal{S}$ et l'on ne pourra plus trouver une fonction $f(P)$ possédant la propriété (V) aux points de $\mathcal{E}$, que si la propriété (V) peut se présenter en un point limite $\mathcal{S}$ de points P, où (V) est satisfaite.

Or, cela n'arrive pas toujours, comme le montrent des exemples antérieurs (9).

Dès lors, deux cas intéressants sont à distinguer : Ou bien tout point limite de points (V) est un point (V) et l'on dira que la propriété de voisinage (V) a *le caractère* (f), ou bien tout point limite de points (V) est un (*non*-V) et l'on dira que (V) a *le caractère* (i). Il en résulte directement les caractères de distribution suivants :

II. *L'ensemble support E d'une propriété de voisinage* (V) *est fermé ou isolé, selon que* (V) *a le caractère* (f) *ou* (i).

Si (V) n'a pas le caractère (f) et ni le caractère (i) l'on ne peut rien affirmer, pour l'instant.

Evidemment, même ce résultat restreint n'a qu'une valeur purement formelle. La difficulté réside justement, en chaque cas particulier, à prouver que (V) a le caractère (f) ou le caractère (i). Cette observation s'applique d'ailleurs également aux résultats qui suivent et que nous allons examiner du même point de vue.

75. Il est possible de présenter un schéma abstrait des caractères de distribution des propriétés de voisinage (V), en rattachant une définition concernant (V) à chaque propriété correspondante des ensembles de points.

Par exemple, si (V) se présente uniquement en des points limites de points (V) on dira qu'elle a *le caractère* (l) et si elle se présente toujours en un point intérieur d'un intervalle de points (V) on dira qu'elle a *le caractère* (o). Il s'ensuit évidemment que

III. *L'ensemble support E d'une propriété de voisinage* (V) *est dense en lui-même ou ouvert, selon que* (V) *a le caractère* (l) *ou le caractère* (o).

Il y a aussi des propriétés (V), qui se présentent toujours en au moins un point de tout intervalle et pour toute fonction $f(P)$, sans devoir pourtant se présenter partout. Cela est remarquable, mais résulte déjà du fait qu'il y a effectivement des caractères absolus de distribution, tels que (V) se présente sur des ensembles isolés (74, II). Car alors (*non-* V) qui est non dénombrable se présente, au moins en un point de tout intervalle et pour toute fonction $f(P)$. On dira en ce cas que la propriété de voisinage a *le caractère* (d) et si au contraire (V) ne peut se présenter partout, elle possède *le caractère* (n). Il y a, simplement

IV. *L'ensemble support E d'une propriété de voisinage est dense en tout intervalle, si* (V) *a le caractère* (d) *et non dense si* (V) *a les caractères* (n) *et* (f).

Enfin, si l'on convient de dire qu'une propriété (V') est une *sous-propriété* de (V), si (V) est toujours satisfaite en même temps que (V') et qu'une propriété (V) est la *somme* d'une infinité dénombrable de ses sous-propriétés (V_n), lorsque l'une au moins d'elles est satisfaite, en même temps que (V), il y a

V. *L'ensemble support E d'une propriété de voisinage* (V), *somme des* (V_n) *est dénombrable ou de première catégorie, selon que les propriétés* (V_n) *ont toutes le caractère* (i) *ou les caractères* (f) *et* (n) *en même temps.*

De cette manière on attache à chaque propriété de voisinage (V), dès qu'on connaît un caractère particulier de (V) ou de (*non-* V), puisque cette dernière se présente toujours sur l'ensemble complémentaire, un caractère de distribution. Mais il y aura des cas où la définition de (V) n'entraînera aucun caractère de distribution.

Du point de vue abstrait, il y a encore une manière d'envisager les caractères de distribution. Nous allons la présenter dans ce qui suit.

76. Soit $\mathcal{A}$ la classe des ensembles E, support de la propriété de voisinage (V) donnée.

Si l'on savait définir encore d'une manière la classe $\mathcal{A}$ [1]) corres-

---

[1]) Si l'on savait, par exemple, qu'elle contient certains ensembles dénombrables.

pondant à la propriété de voisinage (V), il est clair que le caractère de distribution (D) de (V) ce serait la condition même pour l'ensemble support E de (V) d'appartenir à $\mathcal{A}$. Mais il suffit aussi de savoir que la classe $\mathcal{A}$ appartient à une classe déterminée A d'ensembles pour avoir un caractère de distribution de (V).

Or, il existe deux caractères abstraits, qui appartiennent à toute classe $\mathcal{A}$.

Premier caractère de la classe $\mathcal{A}$: Tout sous-ensemble $E.\ \Delta$ d'un ensemble E de $\mathcal{A}$, déterminé en E par un intervalle Δ à n dimensions est un ensemble de $\mathcal{A}$.

En effet, soit $F(P)$ la fonction dont E est le support de (V) en Δ. Le sous-ensemble $E.\ \Delta$ de E est le support de (V) pour une fonction $f(P)$ définie en Δ [1]) comme identique à $F(P)$.

Il est donc lui-même un ensemble de $\mathcal{A}$ pour $f(P)$.

Second caractère de la classe $\mathcal{A}$: La somme $\Sigma\, E_n.\ \Delta_n$ d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ènsembles E_n de $\mathcal{A}$, contenus respectivement en des intervalles Δ_n, sans points communs deux-à-deux, c'est elle-même un sous-ensemble d'un ensemble de $\mathcal{A}$.

En effet, soit $f_n(P)$ la fonction dont E_n est le support de (V) en Δ_n [1]). La fonction $f(P)$, identique à $f_n(P)$ en chaque Δ_n et arbitraire ailleurs, a un ensemble E pour support de (V) et cet ensemble a pour sous-ensemble la somme $\Sigma\,(E_n.\ \Delta_n)$.

Ces caractères de la classe $\mathcal{A}$, indiquent une définition convenable d'une classe A d'ensembles, contenant $\mathcal{A}$ et devant servir à caractériser la distribution de (V). Ce sera, en appelant „*un A*“ tout ensemble de classe A:

1°. Tout sous-ensemble d'un A est un A,

2°. Toute somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable des A est un A.

C'est visiblement une extension [2]) des conditions nécessaires de $\mathcal{A}$. Or il peut arriver que la classe A ainsi définie, en appliquant les opérations ci-dessus 1° et 2° à tout ensemble de la classe $\mathcal{A}$ et à ceux qu'on en obtient, comprenne un intervalle à n dimensions et à cause de la condition 1°, il n'y aurait plus rien à chercher dans cette direction, puisque (V) pourrait se présenter sur n'importe quel ensemble.

---

[1]) Il est inutile de préciser ce que devient la définition aux points frontières de $\triangle$ ou de $\triangle_n$, dont certains pourraient être exclus, au besoin.

[2]) Cette extension peut être utile, mais il y a des cas ou elle masquerait les caractères de distribution, comme par exemple lorsque *(V)* a le caractère *(f)*.

Supposons donc cette possibilité exclue, ce qui est naturel si la propriété (V) possède le caractère (n), c'est-à-dire ne peut se présenter partout et ajoutons la condition :

3⁰. Tout intervalle à n dimensions n'est pas un A.

On définit de cette manière, en partant de $\mathcal{A}_0$, une classe A d'ensembles enfermant tout ensemble E, support de la propriété de voisinage (V) de caractère (n).

Il est intéressant de constater qu'on retombe ainsi sur la classification des ensembles, présentée antérieurement (51 et 60).

77. Soient données maintenant, d'une part une propriété de voisinage (V) de caractère (n) et de l'autre une classification des ensembles en deux classes A et B, satisfaisant aux trois conditions 1^0, 2^0 et 3^0 (76) et telles que tout ensemble qui n'est pas un A soit un B.

Il peut arriver que la classe $\mathcal{A}_0$, définie comme ci-dessus (77) et correspondant à cette propriété (V) soit comprise dans une classe A, donnée *à priori*. Cela n'est nullement nécessaire. Mais lorsque ce sera le cas, voici comment on pourra le reconnaître.

Puisque $\mathcal{A}_0$ appartient à A, tout ensemble support E de la propriété de voisinage (V) est un A et tous ses points sont d'espèce A, relativement à E. Réciproquement, si tous les points d'un ensemble E sont d'espèce A, l'ensemble est un A (61, XV).

Convenons de dire que la propriété (V) a *le caractère* (A) si tout point $\mathcal{P}$ qui est un point (V) est contenu dans un intervalle où l'ensemble de points (V) est de classe A. On a alors immédiatement le caractère de distribution suivant :

VI. *L'ensemble support E de (V) appartient à la classe A, si la propriété (V) a le caractère (A).*

C'est là un résultat purement formel, parce que la difficulté réside en chaque cas à prouver que la propriété a le caractère (A).

D'autre part, étant donnée *à priori* une classification déterminée des ensembles en deux classes A et B, il n'en résulte nullement que la propriété *(V)* ou son contraire *(non-V)* doivent présenter un caractère de distribution, selon cette classification.

78. Considérons, pour fixer les idées, les définitions spéciales suivantes des deux classes :

a) Ensembles dénombrables (A) ou non-dénombrables (B), *b)* Ensembles de première catégorie (A) ou de seconde catégorie (B),

c) Ensembles de mesure extérieure nulle (A) ou non nulle (B).

La dernière classification se distingue des deux autres en ce qu'elle comporte un certain arbitraire. On serait tenté de considérer aussi, en effet, les classifications suivantes, λ étant un nombre positif :

d) Ensembles dont la mesure extérieure est inférieure à λ ou supérieure à λ.

Pourtant dans tous les exemples connus, les caractères de distribution ne font intervenir, que la distinction entre la mesure nulle et les autres ou bien entre la mesure complémentaire d'une mesure nulle et les autres, ce qui revient au même si l'on considère la propriété (*non*-V). Jamais la mesure extérieure λ n'intervient en ces occasions d'une autre manière.

Cela fait supposer qu'il doit y avoir là quelque propriété abstraite intrinsèque, que nous chercherons à dégager.

79. Distinguons d'abord pour simplifier les propriétés de voisinage (V) de *caractère mesurable* (m), c'est-à-dire telles que tout ensemble support de (V) soit mesurable.

On voit simplement qu'une propriété (V) de caractère (m) ne saurait-être obligée de se présenter sur un ensemble support E, de mesure donnée μ, si μ est un nombre positif. En effet, cela contredirait le second caractère abstrait de la classe $\mathcal{A}_0$, mentionné ci-dessus (76), puisque la mesure de l'ensemble E, support de (V), contenant la somme des ensembles E_n, supports de (V) en des intervalles Δ_n sans points communs deux-à-deux, ne resterait pas égale à μ.

Pourtant, il n'est pas nécessaire que l'ensemble support de (V) soit de mesure nulle, pour qu'il existe un caractère de distribution. Par exemple, si (V) se présente sur un ensemble de mesure nulle, (*non*-V) se présente sur l'ensemble complémentaire, dont la mesure égale celle de l'intervalle [1]. C'est-ce qui montre qu'en général le caractère de distribution de (V) pourrait exprimer une relation nécessaire entre la mesure de l'ensemble support de (V) et la mesure de l'intervalle.

Introduisons, ce qui paraît le plus simple, le rapport de ces deux quantités. On retombe sur la notion de *densité moyenne* de *M. Lebesgue*

---

[1]) La propriété se présente *presque partout,* selon *M. Lebesgue* ou *sur une épaisseur pleine,* selon *M. Denjoy.*

ou *épaisseur moyenne* de *M. Denjoy*, que nous allons compléter, du point de vue particulier qui nous occupe.

Convenons de considérer l'intervalle à n dimensions, de plus petite mesure, contenant E. Nous l'appellerons *l'intervalle* Δ_0, *qui enserre l'ensemble* E [1]).

Le rapport

$$\mu\,(E, \Delta) = \frac{m\,E}{m\,\Delta},$$

entre la mesure de E et celle de l'intervalle qui le contient, s'appelle la *densité ou épaisseur moyenne de* E *en* Δ. [2]).

Le rapport

$$\mu\,(E, \Delta_0) = \frac{m\,E}{m\,\Delta_0},$$

entre la mesure de E et celle de intervalle qui l'enserre, s'appellera la *densité ou épaisseur moyenne absolue de* E.

Faisons remarquer que la densité moyenne d'un ensemble de mesure nulle est nulle et réciproquement. La densité moyenne d'un ensemble, dont la mesure est égale à celle d'un intervalle qui le contient, est *1* et réciproquement. Cela est d'autant plus vrai pour la densité moyenne absolue.

Soit E un ensemble mesurable donné et $\mathfrak{S}$ un point quelconque. Considérons un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$. Si la densité moyenne $\mu\,(E.\ \Delta, \Delta)$ de $E.\,\Delta$ en Δ, tend vers une limite unique $\mu\,(E, \mathfrak{S})$, lorsque Δ tend d'une manière quelconque vers $\mathfrak{S}$, cette limite s'appelle la *densité de l'ensemble* E *en* $\mathfrak{S}$. Il résulte de cette définition le théorème connu de *M. Lebesgue*, qui nous sera utile :

La densité d'un ensemble mesurable E *est égale à 1 aux points* $\mathfrak{S}$ *de* E, *sauf en un ensemble de points* $\mathfrak{S}$ *de mesure nulle et elle est égale à zéro aux points* $\mathfrak{S}'$ *du complémentaire* cE, *sauf en un ensemble de points* $\mathfrak{S}'$ *de mesure nulle* [3]).

---

[1]) L'existence de l'intervalle Δ_0 qui enserre E résulte de ce que sur chaque axe la projection de Δ_0 enserre la projection de E et que pour les ensembles linéaires l'existence d'un intervalle, qui les enserre, est immédiate. Evidemment, il peut arriver que l'intervalle Δ_0 soit infini C'est un cas que nous excluerons à priori des considérations suivantes, ce qui revient à étudier la distribution de la propriété *(V)* dans les intervalles finis.

[2]) cf. *H. Lebesgue*, op. cit. p. 195.

[3]) cf. *H Lebesgue*, op. cit. p. 196.

80. On a la proposition :

VII. *La densité moyenne absolue de chacun des ensembles support d'une propriété de voisinage (V), de caractère mesurable, a pour borne inférieure zéro et pour borne supérieure l'unité.*

Il n'y a pas d'autre cas possible.

Considérons en effet un nombre λ, tel que

$$o < \lambda < 1.$$

On peut montrer que λ n'est pas la borne supérieure, ni la borne inférieure de $\mu(E, \Delta_0)$, pour les différents ensembles de $\mathcal{A}_0$, contenus en des intervalles finis.

Supposons en effet que λ en soit la borne supérieure. Alors il existerait un ensemble E, support de (V) pour une fonction $F(P)$ et un intervalle fini Δ_0 enserrant E, tels que pour un ε positif donné il y ait

$$\lambda - \varepsilon \leqq \mu(E, \Delta_0) \leqq \lambda.$$

Si l'on choisit $\varepsilon < \lambda$, il y a donc

$$m(E, \Delta_0) \geqq (\lambda - \varepsilon)\, m\, \Delta_0,$$

ce qui prouve que E a une mesure non nulle. Or, en vertu du théorème cité, il y a alors sûrement un point $\mathfrak{S}$ de E, où l'ensemble E a la densité 1, c'est-à-dire

$$\mu(E, \mathfrak{S}) = 1.$$

En se rapportant à la définition, on a pour $\Delta = o$

$$lim\, \mu(E.\, \Delta, \Delta) = 1$$

et donc il existe un intervalle $\Delta(\varepsilon)$ convenable, tel que pour tout intervalle Δ intérieur à $\Delta(\varepsilon)$, l'on ait

$$1 - \varepsilon \leqq \mu\, (E\ \Delta, \Delta) \leqq 1$$

et l'on peut choisir

$$\varepsilon < 1 - \lambda$$

pour avoir, pour tout Δ intérieur à $\Delta(\varepsilon)$,

$$\mu(E.\, \Delta, \Delta) > \lambda.$$

Soit Δ_1 un de ces intervalles Δ. Si Δ'_0 est l'intervalle qui enserre $E.\ \Delta_1$ et par suite $E.\ \Delta'_0$ aussi, on a

$$\mu\,(E.\ \Delta'_0\,,\ \Delta'_0) > \lambda$$

et une fonction $f\,(P)$ définie sur Δ'_0, comme identique à $F\,(P)$ présente en Δ'_0 la propriété (V) en un ensemble de points $E.\ \Delta'_0$, dont la densité moyenne absolue est plus grande que λ, contrairement à l'hypothèse.

Supposons de même que λ soit la borne inférieure des nombres $\mu\,(E,\ \Delta_0)$ pour les différents ensembles bornés de $\mathcal{A}$. Il existerait alors un ensemble E support de (V) pour une fonction $F\,(P)$ et un intervalle fini Δ_0 enserrant E, tels que pour un ε positif donné il y ait

$$\lambda \leqq \mu\,(E,\ \Delta_0) \leqq \lambda + \varepsilon.$$

Si l'on choisit $\varepsilon < 1-\lambda$, il y a donc

$$m\,(E,\ \Delta_0) \leqq (\lambda+\varepsilon).\ m\ \Delta_0\,,$$

ce qui prouve que E est de mesure plus petite que celle de l'intervalle Δ_0. Or, en vertu du théorème cité il y a alors sûrement un point $\mathfrak{P}$ du complémentaire cE de E, qui est de mesure non nulle, tel que

$$\mu\,(E,\ \mathfrak{P})=o.$$

En se rapportant à la définition, on a pour $\Delta=o$

$$lim\ \mu\,(E.\ \Delta,\ \Delta)=o$$

et donc il existe un intervalle $\Delta\,(\varepsilon)$ convenable, tel que pour tout intervalle Δ intérieur à $\Delta\,(\varepsilon)$, l'on ait

$$o \leqq \mu\,(E.\ \Delta,\ \Delta) \leqq \varepsilon$$

et l'on peut choisir

$$\varepsilon < \lambda$$

ce qui donne, pour tout Δ intérieur à $\Delta\,(\varepsilon)$

$$\mu\,(E.\ \Delta,\ \Delta) < \lambda.$$

Soit Δ_1 un de ces intervalles Δ. Si Δ'_0 est l'intervalle qui enserre $E.\ \Delta_1$ et par suite $E.\ \Delta'_0$ aussi, on a

$$\mu\,(E.\ \Delta'_0\,,\ \Delta'_0) < \lambda$$

et une fonction $f\,(P)$, définie sur Δ'_0 comme identique à $F\,(P)$, présente en Δ'_0 la propriété (V) en un ensemble de points E, dont la densité absolue moyenne est plus petite que λ, contrairement à l'hypothèse.

Donc du point de vue de la mesure, c'est-à-dire tant que l'on ne distingue les ensembles mesurables que selon leur mesure ou selon leur densité moyenne absolue

Une propriété de voisinage V, de caractère mesurable, ne peut posséder que l'un des caractères de distribution suivants ou aucun:

a) La propriété (V) se présente sur un ensemble de mesure nulle,

b) La propriété (V) se présente sur un ensemble de mesure égale à celle de l'intervalle.

81. On peut compléter aisément ce résultat en remplaçant la notion de mesure par celles de mesure extérieure et intérieure et considérer le cas général d'une propriété de voisinage (V) quelconque.

Considérons un ensemble E, mesurable ou non. L'on introduit les notions de *densité ou épaisseur extérieure (intérieure) moyenne de E en Δ*, si E est contenu dans l'intervalle Δ, en posant pour la densité extérieure $\mu_e(E, \Delta)$ et intérieure $\mu_i(E, \Delta)$

$$\mu_e(E, \Delta) = \frac{m_e\, E}{m\, \Delta}, \qquad \mu_i(E, \Delta) = \frac{m_i\, E}{m\, \Delta},$$

où $m\,\Delta$ est la mesure de l'intervalle, $m_e\, E$ la mesure extérieure de E et $m_i\, E$ la mesure intérieure de E.

De même s'il existe une limite unique $\mu_e(E, \mathcal{S})$ de $\mu_e(E.\,\Delta, \Delta)$, lorsque le voisinage Δ de $\mathcal{S}$ tend vers zéro, d'une manière quelconque on l'appelle *densité extérieure de E en $\mathcal{S}$* et l'on écrit

$$\mu_e(E, \mathcal{S}) = lim\ \mu_e(E.\,\Delta, \Delta) = lim\ \frac{m_e\, E.\,\Delta}{m\,\Delta}, \qquad \text{pour } \Delta = o.$$

On définit de même $\mu_i(E, \mathcal{S})$ la *densité intérieure de E en $\mathcal{S}$* et l'on écrit, en supposant l'existence de la limite unique

$$\mu_i(E, \mathcal{S}) = lim\ \mu_i(E.\,\Delta, \Delta) = lim\ \frac{m_i\, E.\,\Delta}{m\,\Delta}, \qquad \text{pour } \Delta = o.$$

Le théorème de *M. Lebesgue* s'étend directement et devient :

La densité extérieure de l'ensemble E est égale à 1 aux points $\mathcal{S}$ de E sauf en un ensemble de points $\mathcal{S}$ de mesure nulle et la densité intérieure de E est égale à zéro aux points du complémentaire cE de E, sauf en un ensemble de points $\mathcal{S}'$ de mesure nulle.

En effet, soit E_1 un ensemble mesurable contenant E et de mesure égale à $m_e\, E$. Il existe toujours un tel ensemble et

$$m\,(E_1.\,\Delta, \Delta) = m_e\,(E.\,\Delta, \Delta)$$

en tout intervalle Δ. En appliquant le théorème de *M. Lebesgue*, il y a en tout point $\mathfrak{F}$ de E_1, sauf en un ensemble de mesure nulle de points $\mathfrak{F}$ de E_1 et donc sauf au plus en un ensemble de mesure nulle de points $\mathfrak{F}$ de E, l'on a en tout point $\mathfrak{F}$ de E

$$\mu\,(E_1,\ \mathfrak{F}) = 1$$

c'est-à-dire, pour $\Delta = o$

$$\mu_e\,(E,\ \mathfrak{F}) = lim\,\frac{m_e\,E.\,\Delta}{m\,\Delta} = lim\,\frac{m\,E_1.\,\Delta}{m\,\Delta} = \mu\,(E_1,\ \mathfrak{F}) = 1.$$

D'autre part soit E_2 un ensemble mesurable contenu en E et de mesure égale à $m_i\,E$. Il existe toujours un tel ensemble et

$$m\,(E_2.\,\Delta) = m_i\,(E.\,\Delta,\ \Delta).$$

On montre comme plus haut que l'ensemble de points d'exception $\mathfrak{F}'$ de cE_2, à l'égalité

$$\mu\,(E_2,\ \mathfrak{F}') = o,$$

est de mesure nulle et il en est d'autant plus de même de l'ensemble de ces points, qui appartiennent à cE. Il y a en $\mathfrak{F}'$

$$\mu_i\,(E,\ \mathfrak{F}) = lim\,\frac{m_i\,E.\,\Delta}{m\,\Delta} = lim\,\frac{m\,E_2.\,\Delta}{m\,\Delta} = \mu\,(E_2,\ \mathfrak{F}') = 1.$$

En considérant l'intervalle Δ_0 qui enserre E, l'on définit maintenant, de même que plus haut (79), *la densité ou épaisseur moyenne absolue extérieure* $\mu_e\,(E,\ \Delta_0)$ *ou intérieure* $\mu_i\,(E,\ \Delta_0)$ par les rapports respectifs

$$\mu_e\,(E,\ \Delta_0) = \frac{m_e\,E}{m\,\Delta_0} \qquad \text{et} \qquad \mu_i\,(E,\ \Delta_0) = \frac{m_i\,E}{m\,\Delta_0}.$$

Remarquons que si la densité moyenne extérieure d'un ensemble est égale à zéro, l'ensemble est de mesure nulle et réciproquement. Si la densité moyenne intérieure est égale à *1*, l'ensemble a une mesure égale à celle de l'intervalle et réciproquement. Si la densité moyenne intérieure d'un ensemble est égale à zéro, sa mesure intérieure est nulle et réciproquement. Si la densité moyenne extérieure d'un ensemble est égale à *1*, sa mesure extérieure est égale à celle de l'intervalle et réciproquement.

82 Il n'y a qu'à reprendre le raisonnement donné plus haut (80, VII) et l'on a la proposition analogue

VIII. *La densité moyenne absolue extérieure de chacun des ensembles* *support d'une propriété de voisinage* (V) *a pour borne supérieure l'unité et la densité moyenne absolue intérieure en a pour borne inférieure zéro.*

Donc, du point de vue de la mesure, c'est-à-dire tant que l'on ne distingue les ensembles, que selon leur mesure extérieure ou intérieure ou selon leur densité moyenne absolue extérieure ou intérieure, il y a

Une propriété de voisinage V ne peut posséder que l'un des caractères de distribution suivants ou aucun:

a) *La propriété V se présente sur un ensemble de mesure nulle,*

b) *La propriété* (V) *se présente sur un ensemble de mesure égale à celle de l'intervalle,*

c) *La propriété* (V) *se présente sur un ensemble dont la mesure intérieure est nulle et la mesure extérieure est égale à celle de l'intervalle* [1]).

83. Il y a un caractère des propriétés de voisinage (V) considérées au cours de ce travail, qu'on peut exprimer comme il suit:

Si l'on fait subir à l'ensemble cote des valeurs d'une fonction $f(P)$ une transformation biunivoque et bicontinue, qui conserve l'ordre des points, on obtient une fonction $F(P)$. Si $f(P)$ et $F(P)$ jouissent en même temps au point $\mathfrak{P}$ de la propriété de voisinage (V), quelle que soit la transformation indiquée, on dira que (V) a le caractère θ.

Nous avons considéré exclusivement de telles propriétés.

Un exemple d'une transformation biunivoque, bicontinue et conservant l'ordre c'est la transformation T, présentée antérieurement (47). Elle consiste à poser, pour $o \leq f \leq +\infty$

$$F = \frac{f}{1+f}$$

et pour $-\infty \leq f \leq o$

$$F = \frac{f}{1-f}.$$

Cette transformation offre un moyen canonique de ramener toute proposition antérieure de ce travail, concernant des caractères de distribution d'une propriété de voisinage (V), supposé démontrée pour la classe des fonctions $F(P)$ bornées à $(-1, +1)$ à la proposition identique, concernant la classe des fonctions $f(P)$, finies ou non.

---

[1]) On ne peut présenter aucun exemple effectif de ce cas, parce qu'on n'a pas réussi à donner, jusqu'à présent, un exemple d'ensemble non mesurable, selon la définition de *M. Lebesgue*, sans utiliser l'axiome du choix de *M. Zermelo*, dont l'emploi est parfois illégitime.

Le sens général des définitions sera celui qui résulte des conventions posées au début de ce travail (2).

84. Mais il y a parfois plus.

Considérons en effet la propriété de voisinage (V), rencontrée ci-dessus (42) et définie pour une fonction uniforme f (P) par l'inégalité

$$f(\mathfrak{S}) > f(P),$$

lorsque le point P appartient à un voisinage Δ de $\mathfrak{S}$.

La propriété (V) apparaît sur un ensemble fini ou dénombrable.

Or ce caractère de distribution subsiste, même si l'on considère une propriété de voisinage (V_1), qu'on obtient en attribuant au symbole d'inégalité $>$ un sens plus large, convenable.

Ordonnons l'ensemble cote fermé des valeurs réelles $(-\infty, +\infty)$ d'une manière déterminée. On obtient un ensemble ordonné [1] Ω. Cela permet d'écrire, pour deux valeurs différentes a' et a'',

$$a' > a'',$$

si a' vient *après* a'' en Ω. Avec cette convention sur le symbole $>$, la propriété (V_1) présente le même caractère de distribution que (V), comme il résulte de la démonstration (34). C'est parce que le signe d'inégalité n'intervient que par sa propriété d'exprimer une relation transitive et irréversible.

On peut présenter cette observation sous une forme plus précise, particulière.

Convenons d'appeler R ou

$$R\,[f(P_1), f(P_2)]$$

une relation déterminée entre les valeurs $f(P_1)$ et $f(P_2)$ d'une fonction uniforme $f(P)$, en deux points quelconques distincts P_1 et P_2 de son domaine de définition. On suppose que la relation R jouit des deux propriétés suivantes:

a) Elle est *transitive*, c'est-à-dire des relations

$$R\,[f(P_1), f(P_2)] \qquad \text{et} \qquad R\,[f(P_2), f\,P_3)]$$

il s'ensuit toujours

$$R\,[f(P_1), f(P_3)],$$

---

1) cf. *R. Baire*, op. cit., p. 27.

b) Elle est *irréversible*, c'est-à-dire les relations

$$R\,[f\,(P_1),\, f\,(P_2)] \qquad \text{et} \qquad R\,[f\,(P_2),\, f\,(P_1)]$$

ne sont jamais satisfaites ensemble.

Evidemment, cela ne suffit pas à la définition de R, qui sera donnée en chaque cas particulier.

Soit définie maintenant une propriété de voisinage (V_r) par la condition que la relation $R\,[f\,(\mathfrak{S}),\, f\,(P)]$ soit satisfaite en tout point P d'un voisinage convenable non nul Δ de $\mathfrak{S}$. On en conclut

IX. *La propriété de voisinage* (V_r) *se présente sur un ensemble fini ou dénombrable.*

La démonstration de ce caractère de distribution est identique à celle qu'on a donné dans le cas particulier, où la relation R est celle qui définit un maximum strict, atteint en $\mathfrak{S}$ (42)

Le résultat précédent est d'une grande généralité.

85. *Conclusions.* On n'a rencontré, au cours de ce travail, que des propriétés *descriptives* de voisinage. Pourtant il y a aussi des propriétés *métriques* de voisinage, comme celles qui font intervenir les notions de nombres dérivés pour les fonctions continues et qui possèdent des caractères de distribution intéressants [1]). Mais on ne connait, jusqu'à présent à ce qu'il semble, aucune propriété de voisinage de caractère métrique, possédant un caractère absolu de distribution, c'est-à-dire concernant une fonction multiforme ou uniforme *quelconque*. Cela exigerait donc de nouvelles recherches [2]).

---

[1]) Tel est le théorème remarquable de *M. A. Denjoy* sur les nombres dérivés des fonctions continues (cf. *H. Lebesgue,* op. cit., p. 246). Voir aussi les mémoires originaux de *M A. Denjoy* : *„Sur les nombres dérivés des fonctions continues"*. (Bull. de la soc. math. de France, tome 43, 1915) et *„Sur la totalisation des nombres dérivés non sommables"* (Ann. sc. de l'Ec Norm. Sup., tome 33, 1916 et tome 34, 1917).

[2]) Après la rédaction de ce travail, on m'a fait prendre connaissance d'un article de *M. Henry Blumberg: „Properties of unrestricted real functions"* (Bulletin of the American Math. Journal, 1926, p 132—149), qui signale aussi certaines propriétés appartenant à toutes les fonctions. Malgré les hypothèses, pareilles à celles du chap IV de ce travail, les résultats de l'auteur sont moins précis que les nôtres. On n'y envisage d'ailleurs, selon notre terminologie abstraite du chap. V ci-dessus, que des propriétés de voisinage de caractère descriptif. La classification de l'auteur pourrait faire croire le contraire.

D'autre part, l'étude abstraite, que nous avons esquissée, des propriétés de voisinage *(V)*, du point de vue de leurs caractères de distribution, pourrait-être reprise et approfondie, en cherchant à dégager aussi les méthodes employées dans les démonstrations. Ce point de vue abstrait a déjà reçu quelques ébauches importantes. *M. Lebesgue* a exposé, par exemple, d'une manière systématique, l'emploi des chaines transfinies d'intervalles linéaires, qui ressort des travaux de *MM. Baire* et *Denjoy* [1]. Le lemme de *M. Borel* et ses généralisations représentent des essais dans la même direction.

Il s'agirait de compléter ce qui a été fait jusqu'à présent en ce sens.

le 31 mars 1929.

Vu et approuvé :
Paris, le 25 juin 1929.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.
CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 25 juin 1929.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
S CHARLÉTY.

[1]) *H. Lebesgue*, op cit., p. 331.