ALEXANDRE GHIKA

Sur les fonctions de carré sommable le long des contours de leurs domaines d'holomorphisme et leurs applications aux équations différentielles linéaires d'ordre infini

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1929

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__98__1_0>

N° D'ORDRE :
2049.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. ALEXANDRE GHIKA

1re THÈSE. — SUR LES FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE LE LONG DES CONTOURS DE LEURS DOMAINES D'HOLOMORPHISME ET LEURS APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE INFINI.

2e THÈSE. — CINÉMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

Soutenues le 27 Février 1929, devant la Commission d'examen.

MM. PAUL MONTEL : *Président.*

DENJOY
CHAZY } *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1929

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen .... C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.

Doyens honoraires ...... P. APPELL, M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires ... V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, R. DONGIER, E. HEROUARD.

Professeurs ....

E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET	lectrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
ANDOYER	Astronomie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND ..	Chimie biologique.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN	Chimie générale.
EMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
MARCHIS	Aviation.
JEAN PERRIN	Chimie physique.
RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
ABRAHAM	Physique.
M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
E. CARTAN	Géométrie supérieure.
LAPICQUE	Physiologie générale.
VESSIOT	Théorie des fonctions, théorie des transform.
COTTON	Physique générale.
DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY	Physique.
C. PEREZ	Zoologie.
LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et Géologie structurale.
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
E. RABAUD	Biologie expérimentale.
P. PORTIER	Physiologie comparée.
E. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD	Botanique.
P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA	Mathématiques générales.
A. MAILHE	Etude des Combustibles.
L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et Physique céleste.
HENRI VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	Géologie.
P. PASCAL	Chimie appliquée.
N	Chimie minérale.

E. PECHARD	Chimie (Enseignnt P.C.N.)	G. BRUHAT	Physique.
V. AUGER	Chimie analytique.	H. MOUTON	Chimie physique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.	L. JOLEAUD	Paléontologie
A. GUILLET	Physique.	M. JAVILLIER	Chimie biologique.
C. MAUGUIN	Minéralogie.	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
L. BLARINGHEM ..	Botanique.	F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
A. MICHEL-LÉVY.	Pétrographie.		
A. DEREIMS	Géologie.	ROBERT-LÉVY	Zoologie.
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.	L. DUNOYER	Optique appliquée.
H. BENARD	Physique (P. C. N.).	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
E. DARMOIS	Physique.	A. DEBIERNE	Radioactivité.

Secrétaire .... D. TOMBECK.

85746 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

A

MONSIEUR ARNAUD DENJOY

PROFESSEUR A LA SORBONNE

Hommage de profond respect.

A MES PARENTS

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE

LE LONG DES CONTOURS DE LEURS DOMAINES D'HOLOMORPHISME

ET LEURS APPLICATIONS

AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE INFINI.

INTRODUCTION.

L'importante généralisation, bien connue, de la notion d'intégrale, faite par M. H. Lebesgue, a permis, entre autres, la découverte d'un théorème capital sur les systèmes de fonctions orthogonales et normales, c'est-à-dire le théorème de M. Fischer et M. Riesz.

La théorie des fonctions orthogonales et normales a pris de ce fait, une plus grande importance dans l'Analyse.

Ainsi, M. E. Picard a obtenu la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation intégrale de première espèce, d'un certain type, admette une solution.

Ce Mémoire a pour but d'étendre la théorie des fonctions orthogonales et normales aux fonctions holomorphes dans un domaine D, limité par un contour rectifiable C, de carré sommable le long de ce contour, puis de faire l'application des résultats obtenus au développement de ces fonctions en série dans le domaine D, et enfin à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre infini.

A cet effet, nous avons employé, le long des contours C, uniquement la notion d'intégrale de M. H. Lebesgue.

Dans la première Partie de ce Mémoire, nous étudions les propriétés de l'*ensemble* $\Omega(C)$ *de toutes les fonctions* f *de carré sommable le long d'un contour rectifiable fermé* C (définissant un domaine ouvert D à distance finie, et un domaine ouvert D' contenant l'infini) *telles que l'on ait*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f(x) & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}, \\ 0 & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}'. \end{cases}$$

De même, nous considérons aussi l'*ensemble* $\Omega'(C)$ *ayant même définition que le précédent, sauf qu'on a remplacé* D *par* D' *et* D' *par* D.

Dans le premier Chapitre, nous étudions deux ensembles $\Sigma(C)$ et $\Sigma'(C)$ de fonctions, ayant mêmes définitions que les précédents, sauf qu'on suppose les fonctions f seulement sommables le long de C.

Nous donnons la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction, définie dans un domaine ouvert D, holomorphe dans celui-ci, tendant presque partout vers une limite sur la frontière C et sommable le long de celle-ci, vérifie la condition

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Ensuite, nous démontrons le théorème suivant, sur lequel nous nous baserons constamment dans la suite, à savoir :

Étant données une fonction $F(z)$ *sommable le long d'un contour recitfiable fermé* C *et les fonctions*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f_0(x) & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}, \\ f_1(x) & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}'. \end{cases}$$

l'intégrale étant prise le long de C *dans le sens positif relativement au domaine* D *on a, presque pour tout point* z *de* C,

$$F(z) = \lim_{x-x'=0} [f_0(x) - f_1(x')].$$

x *et* x' *étant sur une normale à* C *en* z *à égale distance de ce point.*

En définissant une convergence en moyenne plus générale que celle de M. Fischer et que nous avons appelée *convergence en moyenne linéaire*, nous démontrons un théorème tout à fait semblable à celui de M. H. Weyl. Ce théorème peut du reste encore se généraliser.

A ce sujet, nous montrons qu'*une suite de fonctions de* $\Sigma(C)$ *ou de* $\Sigma'(C)$ *convergeant en moyenne linéaire le long de* C, *converge en moyenne linéaire vers une fonction respectivement de* $\Sigma(C)$ *ou de* $\Sigma'(C)$. *De plus, cette suite converge uniformément dans le domaine d'holomorphisme vers cette même fonction.*

Nous montrons aussi que *le produit de deux fonctions de* $\Sigma(C)$ *ou de* $\Sigma'(C)$, *l'une étant holomorphe dans un domaine contenant le domaine d'holomorphisme, est une fonction encore respectivement de* $\Sigma(C)$ *ou de* $\Sigma'(C)$. On déduit que *les fonctions* f *de* $\Sigma(C)$ *vérifient l'équation*

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

et les fonctions f *de* $\Sigma'(C)$ ($z = 0$ *étant dans* D) *l'équation*

$$\int_C f(z)\frac{dz}{z} = 0.$$

Dans le second Chapitre, nous étudions les fonctions et les suites de fonctions de $\Omega(C)$ et de $\Omega'(C)$. Pour cela, nous rappelons rapidement quelques résultats connus relativement aux fonctions de carré sommable, en démontrant le théorème de M. H. Weyl à l'aide de notre théorème général.

Nous en déduisons qu'*une suite de fonctions de* $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$ *convergeant en moyenne le long de* C *converge en moyenne vers une fonction respectivement de* $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$.

Les ensembles de fonctions $\Omega(C)$ et $\Omega'(C)$ étant compris respectivement dans les ensembles $\Sigma(C)$ et $\Sigma'(C)$, les propriétés des dernières fonctions s'appliquent aussi aux premières.

Au troisième Chapitre, nous définissons des systèmes de fonctions de $\Omega(C)$ et de $\Omega'(C)$ orthogonaux et normaux le long de C.

A ce sujet nous définissons deux espèces de fermeture d'un pareil système, à savoir : par rapport à l'ensemble dont il fait partie, et par rapport à l'ensemble dont il ne fait pas partie et que nous trouverons plus loin équivalentes.

Afin de mieux étudier les propriétés des fonctions de $\Omega(C)$ et $\Omega'(C)$, nous avons cherché des suites aussi simples que possible, fermées par rapport à l'ensemble des fonctions dont elles ne font pas partie.

A l'aide de ces suites, nous définissons par le procédé, bien connu, d'orthogonalisation des systèmes orthogonaux et normaux fermés que nous avons appelé *les systèmes fondamentaux.*

Nous en déduisons le théorème très important suivant :

Toute fonction $F(z)$ *de carré sommable le long de* C *est égale le long de ce contour à la somme de deux fonctions* f_0 *et* f_1 *respectivement de* $\Omega(C)$ *et* $\Omega'(C)$, *uniques à un ensemble de points de* C *de mesure nulle près.*

On en déduit entre autres que *les systèmes fondamentaux sont fermés aussi par rapport à l'ensemble des fonctions dont ils font partie.*

C'est là un fait très important, car *ces systèmes permettent de développer toute fonction de* $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$ *en série convergeant en moyenne le long de* C *et uniformément et absolument dans le domaine d'holomorphisme.* Ces séries généralisent les séries de Taylor et de Laurent.

Nous démontrons aussi que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système* $\varphi_n(z)$ *de fonctions de* $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$ *orthogonal et normal le long de* C *soit fermé est que l'on ait*

$$\frac{1}{z-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(z)\int_C\frac{\overline{\varphi_n(z)}\,\chi'(z)}{z-x}\,dz.$$

la série du second membre devant converger uniformément pour z *dans le domaine d'holomorphisme du système et pour* x *dans le domaine complémentaire à celui-ci par rapport au plan, le contour* C *étant exclu.*

Ces nouvelles conditions nous ont permis de résoudre facilement *le problème de la fermeture* d'un système orthogonal et normal de fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$.

La seconde Partie de ce Mémoire comprend les applications des résultats précédents aux équations intégrales de première espèce d'un type particulier et ensuite l'application de celles-ci aux équations différentielles linéaires d'ordre infini.

Nous commençons dans le premier Chapitre par étudier les équations intégrables de la forme

$$\int_C y(t)\,K(t, x)\,dt = f(x),$$

C étant un contour rectifiable fermé et le noyau $K(t, x)$ étant de la forme

$$K(t, x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n(t)\,\lambda_n(x),$$

les fonctions $\rho_n(t)$ désignant le système fondamental relativement aux fonctions de $\Omega'(C)$ et les fonctions $\lambda_n(x)$ étant holomorphes dans un domaine fermé Δ et telles que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n(x)|^2$$

soit uniformément convergente dans ce domaine.

Cette équation peut se mettre sous la forme d'un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. De cette manière la méthode de M. Schmidt [1] aurait permis évidemment de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait une solution de $\Omega(C)$.

Nous avons préféré pourtant étudier directement cette équation par le procédé des fonctions orthogonales et normales.

La condition nécessaire et suffisante que nous obtenons est au fond identique à celle de M. Schmidt, relative au système d'équations linéaires qui lui correspond.

Ce type d'équation nous a été suggéré par la forme qu'on pouvait donner aux équations différentielles linéaires d'ordre infini

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\,y^{(n)}(x) = f(x)$$

à l'aide de l'application de la formule fondamentale de Cauchy.

---

(1) Schmidt, *Rendiconti de Palermo*, t. 25, 1908, ou F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

Dans le second Chapitre, nous commencons par rappeler et préciser quelques résultats fondamentaux obtenus par M. T. Lalesco ([1]) au sujet des équations différentielles linéaires d'ordre infini, de la forme précédente.

Après avoir fait quelques hypothèses d'un caractère très général, nous nous sommes proposé de rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une pareille équation admette une solution de $\Omega(C)$ ou une solution entière d'un ordre inférieur ou égal à un nombre donné d'avance, et dans le cas où la solution existe, donner le moyen de la calculer.

En la transformant en une équation intégrale du type étudie, nous résolvons le problème, donnant la solution quand elle existe. Le domaine où la solution vérifie l'équation différentielle, que nous avons appelé le *domaine de résolubilité* relatif à cette solution, peut être de plusieurs tenants.

En supposant que la *fonction génératrice*

$$A(\xi, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\,\xi^n$$

soit une fonction entière par rapport à ξ, au moins pour x dans une certaine région et que le domaine de résolubilité soit d'un seul tenant, nous avons mis l'équation intégrale équivalente sous une forme qui met en évidence le rôle de la *fonction génératrice.*

En utilisant une méthode basée sur la fonction génératrice, nous donnons une autre forme au théorème d'existence d'une solution correspondant à un second membre quelconque de $\Omega(C)$.

Ces conditions nécessaires et suffisantes sont que le système d'équations

$$\begin{aligned}
&A(\xi, 0)\, Q_0(\xi) && = \Phi_0(\xi),\\
&A(\xi, 0)\, Q_1(\xi) + \frac{1}{1!}\frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial x} Q'_1(\xi) && = \Phi_1(\xi),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A(\xi, 0)\, Q_n(\xi) + \frac{1}{1!}\frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial x} Q'_n(\xi) + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n} Q_n^{(n)}(\xi) && = \Phi_n(\xi),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

([1]) T. Lalesco, *Journal de Mathématiques*, t. IV, 1908, p. 195.

ait un système de solutions, $Q_n(\xi)$ *étant un polynome de degré n et enfin que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_C \frac{f(u)}{u}\int_0^{+\infty} e^{-v}\, Q_n\left(\frac{v}{u}\right) dv\, du\right|^2$$

soit convergente.

Ces théorèmes étant généralement assez difficiles à appliquer, nous avons donné aussi des conditions seulement suffisantes d'existence.

Pour que l'équation différentielle considérée ait une solution quel que soit le second membre de $\Omega(C)$, nous avons montré qu'*il suffit que le système d'équations différentielles*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n}\, u_m^n(\xi) = \Phi_m(\xi)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

admette un système de solutions entières vérifiant certaines conditions ou que l'équation intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{R(u, t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s}\, A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = \frac{1}{u-x}$$

ait une solution de $\Omega(C)$ *par rapport à t et vérifiant certaines conditions ou enfin que l'équation*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n}\, \frac{\partial^n E(\xi, x)}{\partial \xi^n} = e^{x\xi}$$

admette une solution entière, vérifiant aussi certaines conditions et que, de plus, la fonction $e^{x\xi}A(\xi, x)$ *soit fermée par rapport à* x.

A titre d'exemple, nous faisons l'application de ces théorèmes aux équations différentielles linéaires d'ordre infini à coefficients constants.

En utilisant le développement en série de M. Mittag-Leffler, de la fonction méromorphe $\frac{e^{x\xi}}{A(\xi)}$, nous donnons encore une condition suffisante d'existence.

Quant aux solutions des équations différentielles sans second membre, nous ne nous en sommes pas occupé davantage, sauf pour les équations à coefficients constants. Nous montrons que leurs *solutions générales* holomorphes sont de la même forme que celles des équations de même espèce, mais d'ordre fini.

Enfin, pour terminer, nous montrons l'usage qu'on peut faire de l'équation intégrale du type étudié à la recherche des solutions de $\Omega(C)$ des équations aux différences finies.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE LE LONG DES CONTOURS DE LEURS DOMAINES D'HOLOMORPHISME.

CHAPITRE I.

FONCTIONS SOMMABLES LE LONG DES CONTOURS DE LEURS DOMAINES D'HOLOMORPHISME.

I. — Généralités. Théorème de Cauchy.

1. Domaine de plusieurs tenants a connexion multiple. — Nous allons préciser, afin qu'il n'y ait aucune ambiguïté, les domaines dont nous ferons constamment usage dans ce travail.

Nous appellerons *domaine* l'ensemble des points intérieurs à une ou plusieurs régions du plan; les points du contour de ces régions n'appartenant pas au domaine. Nous supposerons aussi que ces régions sont en nombre fini et limitées par des courbes rectifiables fermées simples, de sorte que le contour total du domaine ait une longueur finie.

Dorénavant, nous désignerons par D un domaine dont tous les points sont à distance finie et par D' le domaine formé par l'ensemble des points du plan complémentaire des points de D par rapport au plan, le contour C étant exclu.

Un tenant de ce domaine sera dit *simplement connexe* si son contour est formé par une seule courbe rectifiable fermée simple.

Deux courbes quelconques unissant deux points de ce tenant peuvent se réduire l'une à l'autre, par une déformation continue, sans sortir du domaine.

Nous dirons qu'un tenant de ce domaine est *n-uplement connexe* si son contour est formé de n courbes fermées simples. La courbe qui enveloppe les $n-1$ autres contiendra $n-1$ domaines simplement connexes.

Deux domaines ouverts n'ayant aucun point commun et dont les contours ont un seul point commun, seront toujours considérés comme distincts, ainsi que leurs contours.

Nous entendrons par un domaine D ou D′ un domaine ouvert à moins d'une mention expresse.

2. Fonctions d'une variable complexe sommables le long d'un contour rectifiable. — Considérons un domaine D limité par le contour C. Ce contour étant rectifiable, il admet presque partout une tangente unique. On pourra donc choisir un sens de parcours bien déterminé.

Nous choisirons le sens positif par rapport à la normale intérieure à D. Sur chaque courbe (considérée comme simple, après avoir fait des coupures aux points multiples) on choisira une origine de mesure des arcs. De cette façon, s désignant la somme des mesures des arcs de ces courbes rangées dans un certain ordre, comptées à partir de l'origine de la première courbe à un point z d'une autre courbe, permettra de fixer la position de z sans aucune ambiguité. La fonction $z=z(s)$ sera continue, sauf au plus pour un nombre fini de points. Il en résulte que l'un au moins des nombres dérivés de z est borné sur chaque courbe composante.

Par conséquent, $u'(s)$ et $v'(s)$ désignant respectivement l'un des nombres dérivés de $u(s)$ et $v(s)$ $[z(s)=u(s)+iv(s)]$ seront presque partout inférieurs ou égaux en valeur absolue à 1.

Cela étant, considérons le domaine D et soit S une infinité dénombrable d'arcs de courbes rectifiables situés dans le domaine fermé. En d'autres termes, ils pourront avoir des parties communes avec C ou même le couvrir entièrement.

Rangeons-les dans un certain ordre et choisissons sur chacun un certain sens de parcours. En fixant sur ceux qui sont fermés une origine et en prenant pour ceux non fermés l'une des extrémités suivant le sens choisi, un point z sera parfaitement déterminé, quand on connaîtra la mesure des arcs qui précèdent celui sur lequel est situé z et la mesure de l'arc que détermine z sur celui-ci. La fonction $z = z(s)$ aura des nombres dérivés presque partout égaux en module à 1.

Cela étant, nous dirons par définition qu'*une fonction*

$$f(z) = p(u, v) + i\, q(u, v)$$

de la variable complexe $z = u + iv$ *est sommable le long des arcs* S *si les fonctions* $p[u(s), v(s)]$ *et* $q[u(s), v(s)]$ *sont sommables au sens de M. H. Lebesgue sur l'ensemble de points* S *et nous écrirons*

$$\int_S f(z)\, ds = \int_S p\, ds + i \int_S q\, ds.$$

Vu les propriétés des intégrales prises au sens de M. Lebesgue, les fonctions $|p|$ et $|q|$ sont aussi sommables sur S.

On a

$$|f(z)| = \sqrt{p^2 + q^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{p^2 + q^2} < |p| + |q|.$$

Il résulte donc que le module d'une fonction sommable est aussi sommable.

Réciproquement, si $|f(z)|$ est sommable, en vertu des égalites

$$|p| \leqq \sqrt{p^2 + q^2} \qquad \text{et} \qquad |q| \leqq \sqrt{p^2 + q^2},$$

il résulte que $f(z)$ l'est aussi.

Par conséquent, *si une fonction est sommable son module l'est aussi et inversement.*

Soit

$$z'(s) = u'(s) + i\, v'(s)$$

l'un des nombres dérivés de $z(s)$. Son module étant presque partout égal à 1, on a aussi

$$\int_S f(z)\, z'(s)\, ds = \int_S (pu' - qv')\, ds + i \int_S (pv' + qu')\, ds$$

et que nous écrirons tout simplement

$$\int_S f(z)\, dz.$$

Si l'intégrale est prise seulement sur un ensemble de points E de S, nous l'écrirons

$$\int_{(E\,S} f(z)\,dz.$$

3. Representation conforme. — Nous allons rappeler quelques propriétés de la représentation conforme, utiles dans la suite.

Considérons un domaine D simplement connexe limité par un contour rectifiable C du plan des z et un cercle γ de centre O de rayon 1 du plan des t, définissant intérieurement un domaine δ.

Toute fonction $z = \varphi(t)$ qui fait la représentation conforme du domaine D, sur le domaine δ, est holomorphe dans le domaine ouvert δ et continue et univoque dans le domaine fermé.

Enfin toute fonction $z = \varphi_1(t)$ qui fait la représentation de D' sur δ, a les mêmes propriétés que $\varphi(t)$, sauf au point $t = 0$ homologue de $z = \infty$, qui est un pôle simple.

La conservation de l'angle de deux courbes se coupant a lieu dans le domaine ouvert D, y compris les points du contour C où celui-ci admet une tangente unique. Ces points ont une mesure égale à celle de C.

Faisons la représentation conforme du domaine D sur le domaine δ.

A un cercle γ_r concentrique à γ, de rayon $r < 1$ correspondra dans le domaine D une courbe analytique fermée C_r ayant tous ses points réguliers.

Cette courbe a pour équation

$$z_r = \varphi(rt) \qquad \text{avec } |t| = 1.$$

Soit $t = \psi(z)$ la fonction inverse de la fonction $z = \varphi(t)$. On a aussi

$$z_r = \varphi[r\,\psi(z)]$$

et que nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$z_r = z_r(z).$$

Posons

$$ds = |dz| \qquad \text{et} \qquad ds_r = |dz_r|.$$

La courbe C_r *est telle que*

$$\lim_{r=1} \int_C |ds - d[s_r(s)]| = 0.$$

Nous allons montrer qu'on a, de plus,

$$\lim_{r=1} \int_C |dz - d[z_r(z)]| = 0.$$

En effet, soient

$$dz = e^{i\omega}\, ds \qquad \text{et} \qquad dz_r = e^{i\omega_r}\, ds_r.$$

Or

$$\int_C |dz - dz_r| < \int_C |ds - ds_r| + \int_C |e^{i\omega} - e^{i\omega_r}|\, ds.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\lim_{r=1} \int_C |e^{i\omega} - e^{i\omega_r}|\, ds = 0.$$

La quantité sous le signe $\int$ est bornée quels que soient s et r; par conséquent, pour que cette intégrale tende vers zéro, il suffit, en vertu du théorème de M. Lebesgue, que $e^{i\omega} - e^{i\omega_r}$ tende vers zéro presque partout avec $1 - r$.

La courbe C étant rectifiable, elle admet, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle, une tangente unique en chaque point.

Considérons une courbe R du domaine D, qui correspond à un rayon du cercle γ et aboutissant en un point z de C où ce contour admet une tangente unique. La courbe R sera normale à C en z et à C_r au point z_r correspondant.

De plus, cette courbe admet une tangente unique en chacun de ses points, y compris le point z. Il résulte que la tangente à C_r en z_r, qui est normale à la tangente à R en ce point, varie d'une manière continue avec r. Par conséquent, quand r tend vers 1, la tangente à C_r en z_r tend d'une manière continue à se confondre avec la tangente à C en z et par suite la différence $e^{i\omega} - e^{i\omega_r}$ tend vers zéro avec $1 - r$, presque pour tout point z de C.

La courbe C_r *est* donc *telle que*

$$\lim_{r=1} \int_C |dz - d[z_r(z)]| = 0.$$

4. Théorème de Cauchy. Généralisation de M. Goursat. — Ce théorème est le suivant :

Étant donnée une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine ouvert D *limité par un contour rectifiable fermé* C *et ayant en chacun de ses points une dérivée finie et bien déterminée, on a*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Il est essentiel de remarquer qu'il n'est plus besoin de supposer que la dérivée soit continue le long de C.

Pour le cas des courbes C possédant de plus une certaine propriété, M. Goursat a montré que le théorème est encore vrai, sans supposer l'existence de la dérivée de $f(z)$ le long de C, pourvu toutefois que la fonction soit continue dans le domaine fermé D. Dans ces conditions, x étant un point du domaine ouvert D et z un point de C, la différence $f(z) - f(x)$ tend uniformément vers zéro avec $z - x$.

Nous allons démontrer ce théorème concernant les courbes rectifiables quelconques en utilisant les résultats précédents.

Supposons que le domaine D soit simplement connexe. Faisons la représentation conforme du domaine D sur le domaine δ, limité par un cercle γ de rayon 1 et soit C_r la courbe de D qui correspond au cercle γ_r concentrique à γ et de rayon $r < 1$.

Cela étant, considérons la différence

$$\delta = \int_C f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z_r)\,dz_r.$$

On peut encore l'écrire

$$\delta = \int_C \{ f(z) - f[z_r(z)] \}\,dz - \int_C f[z_r(z)]\,\{ d[z_r(z)] - dz \}.$$

Or, quand $1 - r$ tend vers zéro, $f[z_r(z)]$ tend uniformément vers $f(z)$; par conséquent on a

$$\left| \int_C \{ f(z) - f[z_r(z)] \}\,dz \right| < \varepsilon l,$$

pourvu que $1 - r$ soit suffisamment petit.

D'autre part, on a

$$\left| \int_C f[z_r(z)]\,\{ dz - d[z_r(z)] \} \right| < M \int_C | dz - d[z_r(z)] |.$$

M désignant le maximum du module de f dans le domaine fermé D.

Nous avons démontré au paragraphe précédent que la courbe C_r tend uniformément vers C, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_C |dz - d[z_r(z)]| < \varepsilon$$

pourvu que $1 - r$ soit suffisamment petit.

Par conséquent,

$$\int_C |f[z_r(z)]| \, |dz - d[z_r(z)]| < \varepsilon M.$$

Il résulte donc que la différence δ tend vers zéro avec $1 - r$.

Or, la fonction $f(z_r)$ étant holomorphe dans le domaine D qui contient C_r, en vertu du théorème de Cauchy, on a

$$\int_{C_r} f(z_r) \, dz_r = 0$$

et, par suite,

$$\int_C f(z) \, dz = 0.$$

Si le domaine D était de plusieurs tenants à connexion multiple, il suffirait de considérer chaque tenant en particulier et de le partager par des courbes rectifiables transversales convenables en des domaines simplement connexes.

Les intégrales prises le long des courbes transversales étant prises une fois dans un sens et une autre fois dans le sens contraire, elles s'élimineront de la somme.

Par conséquent, le théorème est vrai pour n'importe quel domaine D à plusieurs tenants à connexion multiple.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine ouvert D *limité par un contour rectifiable* C *et continue dans le domaine fermé, on a*

$$\int_C f(z) \, dz.$$

5. Théorème général. — Soit E un ensemble de points de C de

mesure nulle, contenant les points où celui-ci n'admet pas de tangente unique.

Cela étant, considérons les fonctions f définies dans un domaine fermé D :

1° holomorphes dans le domaine ouvert;

2° telles que z étant un point de C ne faisant pas partie de l'ensemble E et x un point de la normale à C en z intérieure à D, la différence $f(z)-f(x)$ tende vers zéro avec $z-x$;

3° et enfin sommables au sens de M. Lebesgue le long du contour C.

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f précédemment définie vérifie l'équation

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Supposons que le domaine D soit simplement connexe et considérons la courbe C_r définie au paragraphe précédent.

La fonction f étant holomorphe dans le domaine ouvert D qui contient la courbe C_r, on a, en vertu du théorème de Cauchy,

$$\int_{C_r} f(z_r)\,dz_r = 0.$$

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de la fonction f le long de C soit nulle est que la différence

$$\delta = \int_C f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z_r)\,dz_r$$

tende vers zéro avec $1-r$.

Pour cela, il faut tout d'abord que $\int_{C_r} f(z_r)\,dz_r$ tende vers une limite quand $1-r$ tend vers zéro. Enfermons l'ensemble E en un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles I de mesure totale η arbitrairement petite.

Soit I_r l'ensemble des intervalles de C_r qui correspond à l'ensemble des intervalles I de C. De même, soient I' l'ensemble de points complémentaires de l'ensemble I par rapport à C et I'_r l'ensemble correspondant sur C_r.

On a

$$\delta = \int_{(\mathrm{I}')\mathrm{C}} f(z)\,dz - \int_{(\mathrm{I}'_r)\mathrm{C}_r} f(z_r)\,dz_r + \int_{(\mathrm{I})\mathrm{C}} f(z)\,dz - \int_{(\mathrm{I}_r)\mathrm{C}_r} f(z_r)\,dz_r.$$

La fonction f étant sommable le long de C, on a

$$\left| \int_{(\mathrm{I})\mathrm{C}} f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

ε étant une quantité arbitrairement petite, pourvu que η soit assez petit. D'autre part, $f(z_r)$, z_r étant situé sur l'ensemble I'_r, tend uniformément vers $f(z)$. Soit $\mu(\eta)$ le maximum de la fonction $|f(z_r)|$ pour z_r situé sur l'ensemble I'_r et quand r varie de r_0 à 1. On a donc

$$\delta_1 = \left| \int_{(\mathrm{I}')\mathrm{C}} f(z)\,dz - \int_{(\mathrm{I}'_r)\mathrm{C}_r} f(z_r)\,dz_r \right| < \int_{(\mathrm{I}')\mathrm{C}} |f(z) - f[z_r(z)]|\,ds + \mu(\eta) \int_{\mathrm{C}} |dz - d[z_r(z)]|.$$

On peut donc déterminer r assez voisin de 1 de manière que $\delta_1 < \varepsilon$. Par conséquent, pour que $\int_{\mathrm{C}_r} f(z_r)\,dz_r$ tende vers une limite, il faut et il suffit que

$$\lim_{r=1} \int_{(\mathrm{I}_r)\mathrm{C}_r} f(z_r)\,dz_r = \nu(\eta)$$

et pour que $\lim \delta = 0$, il faut et il suffit que

$$\lim_{\eta=0} \nu(\eta) = 0.$$

Pour qu'une fonction f, précédemment définie, *vérifie l'équation* (1), *il faut et il suffit que*

$$\lim_{r=1} \int_{(\mathrm{I}_r)\mathrm{C}_r} f(z_r)\,dz_r = \nu(\eta)$$

et que

$$\lim_{\eta=0} \nu(\eta) = 0.$$

Ce théorème est encore vrai pour n'importe quel domaine D, à condition que le contour total C_r tende uniformément vers le contour total C. Pour avoir un contour C, il suffit de construire pour chaque courbe simple C_n, dont est composé le contour C, une courbe $C_{r,n}$ située dans D et tendant uniformément vers C_n.

6. Théorème. — *Étant données une* $F(z)$ *sommable le long d'un contour rectifiable fermé* C *et les fonctions*

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-x}\,dz \qquad \textit{pour } x \textit{ dans } D,$$

et

$$f_1(x') = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-x'}\,dz \qquad \textit{pour } x' \textit{ dans } D',$$

les intégrales étant prises le long de C *dans le sens positif relativement au domaine* D, *on a, presque pour tout point* ζ *de* C,

$$\lim_{x-x'=0}[f_0(x)-f_1(x')] = F(\zeta),$$

x *et* x' *étant sur une normale à* C *en* ζ *à égales distances de ce point.*

La fonction $F[z(s)]$ étant sommable dans l'intervalle $(0, l)$, l désignant la longueur du contour, il résulte, en vertu d'un théorème de M. Lebesgue (¹), que la fonction

$$\Phi(s) = \int_0^s |F[z(s)] - F[\zeta(\sigma)]|\,ds$$

admet une dérivée nulle pour $s = \sigma$, pourvu que σ ne fasse pas partie d'un certain ensemble E de mesure nulle.

Par conséquent, la fonction $\Phi(s)$ est de la forme

$$\Phi(s) = (s-\sigma)\,\varphi(s),$$

la fonction $\varphi(s)$ tendant vers zéro avec $s-\sigma$, sauf pour les valeurs de σ de l'ensemble E.

Il résulte aussi que l'on a

$$\Phi'(s) = |F[z(s)] - F[\zeta(\sigma)]|,$$

(¹) H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2ᵉ édition, p. 192 (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

sauf pour les valeurs de s de l'ensemble E, pourvu toutefois que σ ne fasse pas partie de ce même ensemble E.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'intervalle $(0, l)$ formé par la réunion de l'ensemble E et de l'ensemble où le contour C n'admet pas de tangente unique.

Cela étant, nous allons démontrer que $\zeta(\sigma)$ étant un point de C, tel que σ ne fasse pas partie de l'ensemble $\mathcal{E}$, la différence

$$\delta = \int_C [F(z) - F(\zeta)] \frac{x - x'}{(z - x)(z - x')} dz$$

tend vers zéro avec $x - x'$, x et x' étant situés sur la normale à C en ζ à égales distances de ce point.

Supposons, en faisant un changement de variables convenable, que $\zeta = 0$, $\sigma = 0$ et que de plus la tangente à C en ζ soit précisément l'axe réel.

Posons $x - x' = 2\eta i$; il vient

$$\delta = \int_0^l \{ F[u(s)] - F(0) \} \frac{2\eta i}{u^2(s) + \eta^2} u'(s) \, ds,$$

$u'(s)$ désignant l'un des nombres dérivés de $u(s)$.

Soit $(-\alpha, \alpha)$ un intervalle de C, tel que le minimum de la distance du point $\zeta = 0$ aux points de l'intervalle complémentaire par rapport à C soit égal à a. On a évidemment,

$$a \leqq \alpha.$$

Cela étant, calculons une limite supérieure de l'intégrale

$$I = \int_\alpha^{l-\alpha} \{ F[u(s)] - F(0) \} \frac{2\eta i}{u^2(s) + \eta^2} u'(s) \, ds.$$

On a

$$|I| < \frac{2\eta}{\alpha^2 + \eta^2} \int_0^l | F[u(s)] - F(0) | \, ds = \frac{2\eta M}{a^2 + \eta^2}.$$

Cherchons de même une limite supérieure de l'intégrale

$$J_1 = \int_0^\alpha \{ F[u(s)] - F(0) \} \frac{2\eta i}{u^2(s) + \eta^2} u'(s) \, ds.$$

Pour cela, considérons la différence

$$\delta_1 = \int_0^\alpha \{F[u(s)] - F(o)\} \frac{2\eta i}{u^2(s) + \eta^2} u'(s)\, ds$$
$$- \int_0^\alpha \{F[u(s)] - F(o)\} \frac{2\eta i}{s^2 + \eta^2} u'(s)\, ds.$$

On a

$$\delta_1 = 2\eta i \int_0^\alpha \{F[u(s)] - F(o)\} \frac{\left[\frac{s^2}{u^2(s)} - 1\right] u^2(s)}{[u^2(s) + \eta^2](s^2 + \eta^2)} u'(s)\, ds.$$

Or, la fonction $\frac{s^2}{u^2(s)} - 1$ tend vers zéro avec s; par conséquent, en appelant $\rho(\alpha)$ le maximum de la fonction $\left|\frac{s^2}{u^2(s)} - 1\right|$ dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ et en remarquant que

$$\left|\frac{u^2}{u^2 + \eta^2}\right| \leq 1,$$

on a

$$|\delta_1| < \rho(\alpha) \int_0^\alpha |F[u(s)] - F(o)| \frac{2\eta}{s^2 + \eta^2} ds.$$

Cela étant, calculons une limite supérieure de l'intégrale

$$H_1 = \int_0^\alpha |F[u(s)] - F(o)| \frac{2\eta}{s^2 + \eta^2} ds \equiv \int_0^\alpha \Phi'(s) \frac{2\eta}{s^2 + \eta^2} ds.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int_0^\alpha \Phi'(s) \frac{2\eta}{s^2 + \eta^2} ds = \frac{2\alpha\varphi(\alpha)\eta}{\alpha^2 + \eta^2} - \int_0^\alpha \Phi(s) \frac{d}{ds}\left(\frac{2\eta}{s^2 + \eta^2}\right) ds.$$

Or

$$-\int_0^\alpha s\varphi(s) \frac{d}{ds}\left(\frac{2\eta}{s^2 + \eta^2}\right) ds < -\psi(\alpha) \int_0^\alpha s \frac{d}{ds}\left(\frac{2\eta}{s^2 + \eta^2}\right) ds,$$

$\psi(\alpha)$ désignant le maximum de la fonction $|\varphi(s)|$ dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$.

En intégrant encore par partie l'intégrale du second membre de cette inégalité, il vient

$$\int_0^\alpha s \frac{d}{ds}\left(\frac{2\eta}{s^2 + \eta^2}\right) ds = \frac{2\eta}{\alpha^2 + \eta^2} - \int_0^\alpha \frac{\eta}{s^2 + \eta^2} ds$$

et, puisque

$$\int_0^{\alpha} \frac{\eta}{s^2+\eta^2}\,ds = \int_0^{\frac{\alpha}{\eta}} \frac{dt}{1+t^2} < \frac{\pi}{2},$$

on a

$$H_1 < \frac{2\alpha\,\varphi(\alpha)\,\eta}{\alpha^2+\eta^2} + \left(\pi - \frac{2\alpha\eta}{\alpha^2+\eta^2}\right)\psi(\alpha).$$

Or, quels que soient α et η réels,

$$\frac{2\alpha\eta}{\alpha^2+\eta^2} \leqq 1\,;$$

par conséquent,

$$H_1 < \varphi(\alpha) + \pi\,\psi(\alpha)$$

et, par suite,

$$|J_1| < [1+\rho(\alpha)]\,[\varphi(\alpha)+\pi\,\psi(\alpha)].$$

On démontrerait aussi, exactement de la même manière, que

$$|J_2| = \left|\int_{-\alpha}^{0} \{F[u(s)]-F(o)\}\,\frac{2\eta i}{u^2(s)+\eta^2}\,u'(s)\,ds\right|$$
$$< [1+\rho(\alpha)]\,[-\varphi(-\alpha)+\eta\,\psi(\alpha)].$$

Par conséquent,

$$\left|\int_{-\alpha}^{+\alpha} \{F[u(s)]-F(o)\}\,\frac{2\eta}{u^2(s)+\eta^2}\,u'(s)\,ds\right| < j(\alpha),$$

la quantité $j(\alpha)$ tendant vers zéro avec α.

Choisissons donc α suffisamment petit, de manière que $j(\alpha) < \varepsilon$, ε étant une quantité arbitrairement petite.

α étant ainsi fixé, il est clair que la quantité

$$\frac{2\eta M}{a^2+\eta^2}$$

tend vers zéro avec η et, par suite, on peut choisir η assez petit de manière que

$$\frac{2\eta M}{a^2+\eta^2} < \varepsilon.$$

Il résulte donc que

$$\delta| < 2\varepsilon.$$

ce que démontre notre proposition.

Pour achever la démonstration du théorème que nous avons en vue, il reste à montrer que

$$\lim_{x-x'=0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x-x'}{(z-x)(z-x')}\, dz = 1$$

ou, vu le changement de variable que nous avons fait, que

$$\lim_{\eta=0} \int_0^l \frac{2\eta i}{u^2(s)+\eta^2}\, u'(s)\, ds = 2\pi i.$$

En partageant le contour C comme précédemment, il suffit de montrer que

$$\lim_{\eta=0} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\eta}{u^2(s)+\eta^2}\, u'(s)\, ds = \pi.$$

Vu les résultats précédents, il suffit que

$$\lim_{\eta=0} \int_{-\alpha}^{-\alpha} \frac{\eta}{s^2+\eta^2}\, ds = \pi.$$

En effet, on a

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\eta}{s^2+\eta^2}\, ds = \int_{-\frac{\alpha}{\eta}}^{+\frac{\alpha}{\eta}} \frac{dt}{1+t^2}$$

et

$$\lim_{\eta=0} \int_{-\frac{\alpha}{\eta}}^{+\frac{\alpha}{\eta}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Le théorème est donc démontré.

II. — Convergence en moyenne linéaire.

7. Définitions. — Soit $f_n(s)$ une suite de fonctions sommables dans l'intervalle réel (a, b).

Pour simplifier le langage, nous appellerons $\Sigma(a, b)$ *l'ensemble de toutes les fonctions réelles ou complexes sommables dans l'intervalle réel* (a, b).

Nous dirons que *la suite de fonctions* $f_n(s)$ *de* $\Sigma(a, b)$ *converge en* *moyenne linéaire dans l'intervalle* (a, b) *si*

$$\lim_{n, m = \infty} \int_a^b |f_n(s) - f_m(s)| \, ds = 0.$$

Nous dirons aussi que *la suite* $f_n(s)$ *de* $\Sigma(a, b)$ *converge en moyenne linéaire vers une fonction* $f(s)$ *de* $\Sigma(a, b)$ *si*

$$\lim_{n = \infty} \int_a^b |f(s) - f_n(s)| \, ds = 0.$$

Rappelons aussi la définition de la convergence uniforme en général de M. H. Weyl (1).

On dit qu'*une suite de fonctions converge uniformément en général dans l'intervalle fini* (a, b) *si à tout nombre* $\varepsilon < b - a$ $(b > a)$ *on peut faire correspondre un ensemble* A_ε, *intérieur à* (a, b) *de mesure* $b - a - \varepsilon$, *sur lequel la suite converge uniformément.*

8. Théorème général. — Ces définitions étant posées, nous allons démontrer un théorème plus général que celui de M. Weyl (2), relatif à une suite convergeant en moyenne habituelle (3), et cela d'une manière tout à fait identique à celui-ci.

Théorème. — *Étant donnée une suite de fonctions* $f_n(s)$ *de* $\Sigma(a, b)$ *convergeant en moyenne linéaire dans* (a, b), *il existe une fonction* $f(s)$ *de* $\Sigma(a, b)$ *vers laquelle une infinité de suites partielles* $f_{n_p}(s)$ *contenues dans la suite donnée convergent uniformément en général. La fonction* $f(s)$ *est, à sa détermination sur un ensemble de points de mesure nulle près, unique et bien déterminée.*

Appelons ε_m la limite supérieure des intégrales

$$\int_a^b |f_m(s) - f_n(s)| \, ds$$

pour

$$n = m + 1, \; m + 2, \; \ldots, \; +\infty.$$

(1) H. Weyl, *Mathematische Annalen*, t. 67, 1909.

(2) *Ibid.*, p. 243.

(3) C'est-à-dire où l'on remplace dans la formule de la convergence en moyenne linéaire $|f_n(s) - f_m(s)|$ par son carré.

Étant donné que la suite converge en moyenne linéaire, on a

$$\lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Par conséquent, il est possible, et cela d'une infinité de manières, d'extraire de la suite ε_m une série convergente

$$\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \ldots + \varepsilon_{n_p} + \ldots \qquad \left(n_1 < n_2 < \ldots \lim_{p=\infty} n_p = \infty\right).$$

Nous allons démontrer que la suite correspondante $f_{n_p}(s)$ converge uniformément en général vers une fonction $f(s)$ qui est encore de $\Sigma(a, b)$.

Soient $E'(\alpha, g)$ l'ensemble des valeurs de s de l'intervalle (a, b) pour lesquelles une fonction $g(s)$ de $\Sigma(a, b)$ est de module supérieur à un nombre positif α et $m[E'(\alpha, g)]$ sa mesure,

$$|g(s)| > \alpha.$$

En vertu de la définition de l'intégrale de M. Lebesgue, on a

$$\int_a^b |g(s)|\, ds \geqq \int_{E'(\alpha)} |g(s)|\, ds \geqq \alpha\, m[E'(\alpha, g)].$$

Soient aussi $E(\alpha, g)$ l'ensemble complémentaire de $E'(\alpha, g)$ par rapport à (a, b) et $m[E(\alpha, g)]$ sa mesure.

Sur cet ensemble, on a

$$|g(s)| \leqq \alpha$$

et sa mesure vérifiera donc l'inégalité

$$m[E(\alpha, g)] \geqq b - a - \frac{1}{\alpha}\int_a^b |g(s)|\, ds.$$

Cela étant, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ une suite de nombre positifs tendant vers zéro et $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n + \ldots$ une série convergente à termes positifs.

Déterminons un indice $n_{h'}$ tel que

$$2 \sum_{p=h'}^{+\infty} \varepsilon_{n_p} < \alpha_h \delta_h,$$

ce qui est toujours possible, aussi grand que soit h.

Appelons A_h l'ensemble des valeurs de s, telles que pour toute valeur de $p \geqq h'$ on ait

$$|f_{n_{h'}}(s) - f_{n_p}(s)| \leqq \alpha_h$$

et A'_h l'ensemble complémentaire de A_h par rapport à (a, b).

Pour déterminer une limite inférieure de la mesure de l'ensemble A_h, il suffit, puisque

$$m(A_h) = b - a - m(A'_h),$$

de déterminer une limite supérieure de $m(A'_h)$.

A cet effet, soit $g_{h',k}(s)$ la fonction égale pour chaque valeur de s au maximum de la suite des valeurs

$$|f_{n_{h'+1}}(s) - f_{n_{h'}}(s)|, \quad |f_{n_{h'+2}}(s) - f_{n_{h'}}(s)|, \quad \ldots, \quad |f_{n_k}(s) - f_{n_{h'}}(s)|$$

et que nous écrirons

$$g_{h',k}(s) = \max_{h' \leqq p \leqq k} |f_{n_{h'}}(s) - f_{n_p}(s)|.$$

On a évidemment $g_{h',k+1}(s) \geqq g_{h',k}(s)$. Par conséquent, l'ensemble $A'_{h',k}$ des valeurs de s pour lesquelles $g_{h',k}(s) > \alpha_h$ est contenu dans l'ensemble $A'_{h',k+1}$. Nous allons montrer que l'ensemble formé par les points contenus dans l'un au moins des ensembles $A'_{h',k}$ $(k \geqq h')$ est précisément l'ensemble A'_h. En effet, pour une valeur de s de $A'_{h',k}$, on a $g_{h',k}(s) > \alpha_h$ et puisque $A'_{h',k}$ est contenu dans $A'_{h',k'}$ $(k' \geqq k)$, on a aussi

$$g_{h',k'}(s) > \alpha_h \qquad \text{avec } k' \geqq k.$$

Par suite, la valeur s fait partie de A'_h.

Réciproquement, un point de A'_h fait partie évidemment de l'un au moins des ensembles $A'_{h',k}$ $(k \geqq h')$.

D'autre part, on a

$$|f_{n_{h'}}(s) - f_{n_p}(s)| \leqq |f_{n_{h'}}(s) - f_{n_k}(s)| + |f_{n_p}(s) + f_{n_k}(s)|;$$

par conséquent,

$$g_{h',k}(s) \leqq |f_{n_{h'}}(s) - f_{n_k}(s)| + \max_{h' \leqq p \leqq k} |f_{n_p}(s) - f_{n_k}(s)|$$

et, à plus forte raison,

$$g_{h',k}(s) \leqq 2|f_{n_{h'}}(s) - f_{n_k}(s)| + 2|f_{n_{h'+1}}(s) - f_{n_k}(s)| + \ldots + 2|f_{n_{k-1}}(s) - f_{n_k}(s)|.$$

Il résulte donc que

$$\int_a^b g_{h',k}(s)\,ds \leqq 2(\varepsilon_{n_{h'}} + \varepsilon_{n_{h'+1}} + \ldots + \varepsilon_{n_{k-1}})$$

et par conséquent, en vertu de notre remarque de plus haut, on a

$$m(A'_{h',k}) \leqq \frac{1}{\alpha_h}\int_a^b g_{h',k}(s)\,ds \leqq \frac{2}{\alpha_h}\sum_{p=h'}^{+\infty} \varepsilon_{n_p} \leqq \delta_h.$$

et cela indépendamment de k. Il résulte que

$$m(A_h) \geqq b - a - \delta_h.$$

Cela étant, dans l'ensemble A_h, on a

$$|f_{n_p}(s) - f_{n_q}(s)| < 2\alpha_h, \qquad \text{pourvu que } p,\, q > h'.$$

sur l'ensemble B_h, formé des points communs à tous les ensembles A_h, A_{h+1}, A_{h+2}, ..., on aura donc

$$|f_{n_p}(s) - f_{n_q}(s)| < 2\alpha_j$$

aussi grand que soit $j > h$, pourvu que $p, q > j'$, j' ayant la même signification par rapport à j, que h' par rapport à h.

Il résulte donc que la suite $f_{n_p}(s)$ converge uniformément sur B_h.

Or, on a

$$m(B_h) \leqq b - a - (\delta_h + \delta_{h+1} + \ldots)$$

et, par suite, elle est aussi voisine que l'on veut de $b - a$, pourvu que h soit suffisamment grand.

On voit donc que la limite de la suite $f_{n_p}(s)$, que nous appellerons $f(s)$, est bien déterminée dans l'intervalle (a, b), sauf au plus sur un ensemble de valeurs de s de mesure nulle. On pourrait la définir complètement en convenant de lui attribuer en chaque point de cet ensemble une valeur déterminée arbitraire.

Il nous reste à démontrer que $f(s)$ est sommable dans l'intervalle (a, b).

En effet, $|f_{n_p}(s)|$ converge aussi uniformément sur B_h vers $|f(s)|$ et, par suite, on a

$$\int_{B_h} |f(s)|\,ds = \lim_{p=\infty}\int_{B_h} |f_{n_p}(s)|\,ds.$$

La suite $f_m(s)$ étant sommable dans (a, b), on a

$$\int_{B_h} |f_{n_p}(s)|\, ds \leqq \int_{B_h} |f_m(s) - f_{n_p}(s)|\, ds + \int_{B_h} |f_m(s)|\, ds$$
$$\leqq \varepsilon_m + \int_a^b |f_m(s)|\, ds$$

pourvu que $m < n_p$, et par conséquent,

$$\int_{B_h} |f(s)|\, ds < \varepsilon_m + \int_a^b |f_m(s)|\, ds,$$

ce qui prouve que $f(s)$ est sommable sur B_h.

En vertu des propriétés des intégrales de M. Lebesgue, la différence des mesures

$$b - a - m(B_h)$$

tendant vers zéro quand h augmente indéfiniment, la fonction $|f(s)|$ sera sommable aussi dans (a, b) et l'on a

$$\lim_{h=\infty} \int_{B_h} f(s)\, ds = \int_a^b f(s)\, ds.$$

De plus, en vertu de la convergence uniforme sur B_h de la suite $f_{n_p}(s)$, on a aussi

$$\int_{B_h} |f(s) - f_{n_p}(s)|\, ds = \lim_{q=\infty} \int_{B_h} |f_{n_q}(s) - f_{n_p}(s)|\, ds$$

et, par conséquent,

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b |f(s) - f_{n_p}(s)|\, ds = 0.$$

Or

$$|f(s) - f_q(s)| \leqq |f(s) - f_{n_p}(s)| + |f_{n_p}(s) - f_q(s)|$$

et, par suite,

$$\lim_{q=\infty} \int_a^b |f(s) - f_q(s)|\, ds = 0.$$

Nous voyons donc de plus que *la suite $f_n(s)$ converge en moyenne linéaire vers $f(s)$.*

On remarque que le théorème précédent généralise le théorème de M. Weyl, puisque ici nous avons supposé que la suite de fonctions $f_n(s)$

est seulement sommable et convergente en moyenne linéaire, tandis que M. Weyl suppose que la suite $f_n(s)$ est de carré sommable et convergente en moyenne quadratique.

Toute suite de fonctions de carré sommable convergeant en moyenne quadratique, converge aussi en moyenne linéaire, mais la réciproque n'est plus exacte.

Theorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctions $f_n(s)$ de $\Sigma(a, b)$ converge en moyenne linéaire vers une fonction $f(s)$ de $\Sigma(a, b)$, est qu'elle converge en moyenne linéaire dans l'intervalle (a, b).*

La condition est nécessaire. En effet, cela résulte de l'inégalité

$$\int_a^b |f_n(s) - f_m(s)|\, ds \leqq \int_a^b |f(s) - f_m(s)|\, ds + \int_a^b |f(s) - f_n(s)|\, ds$$

et nous venons de voir qu'elle est aussi suffisante.

9. Remarque. — Plus généralement, on pourrait démontrer d'une manière semblable le théorème suivant :

Étant donnée une fonction $A(u)$ *continue, croissante et telle que* $A(0) = 0$ *et si une suite de fonctions* $f_n(s)$ *est telle que*

$$\lim_{n, m = \infty} \int_a^b A\{|f_n(s) - f_m(s)|\}\, ds = 0\,;$$

on peut extraire de cette suite une infinité de suites partielles $f_{n_p}(s)$, *qui convergent uniformément en général vers une fonction* $f(s)$, *unique à un ensemble de mesure nulle près.*

De plus, on a

$$\lim_{n = \infty} \int_a^b A\{|f(s) - f_n(s)|\}\, ds = 0.$$

III. — Ensembles $\Sigma(C)$ et $\Sigma'(C)$.

10. Definitions. — *Appelons* $\Sigma(C)$ *l'ensemble de toutes les fonctions* f *définies dans le domaine fermé* D :

1° *Sommables le long du contour* C ;

2° *Et telles qu'on ait*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z-x}\,dz=\begin{cases} f(x) & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}, \\ 0 & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}'. \end{cases}$$

l'intégrale étant prise le long de C *dans le sens positif relativement au domaine* D.

Appelons aussi $\Sigma'(C)$ *l'ensemble de toutes les fonctions* f, *ayant même définition que le précédent, sauf qu'on a remplacé* D *par* D' *et* D' *par* D.

En vertu de la propriété 2°, les fonctions de ce dernier ensemble doivent être nulles à l'infini.

11. Transformation $z=\frac{\alpha}{\zeta-a}$. — Soient $f(z)$ une fonction de $\Sigma(C)$ et a un point du domaine ouvert D.

Nous allons montrer que la fonction $\frac{\alpha}{\zeta-a}f\left(\frac{\alpha}{\zeta-a}\right)$ est une fonction de $\Sigma'(\Gamma)$, Γ désignant le contour ayant pour équation $\zeta=\frac{\alpha}{z-a}$, le point z se déplaçant le long du contour C.

Supposons pour plus de simplicité que $a=0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Par définition, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z-x}\,dz=\begin{cases} f(x) & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}, \\ 0 & \textit{pour } x \textit{ dans } \mathrm{D}'. \end{cases}$$

Faisons les changements de variables

$$z=\frac{\alpha}{\zeta} \qquad \text{et} \qquad x=\frac{\alpha}{\xi}.$$

Le sens positif de parcours le long de C relativement à D se transforme dans le sens positif de parcours relativement au domaine Δ' limité par Γ.

Il vient donc

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f\left(\frac{\alpha}{\zeta}\right)\frac{\alpha}{\zeta^2}d\zeta}{\frac{\alpha}{\zeta}-\frac{\alpha}{\xi}}=\begin{cases} f\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) & \text{pour } \xi \text{ dans } \Delta', \\ 0 & \text{pour } \xi \text{ dans } \Delta. \end{cases}$$

ou encore

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{1}{\zeta}f\left(\frac{\alpha}{\zeta}\right)}{\zeta-\xi}\,d\zeta = \begin{cases} \frac{1}{\xi}f\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) & \text{pour } \xi \text{ dans } \Delta', \\ 0 & \text{pour } \xi \text{ dans } \Delta, \end{cases}$$

ce qui démontre notre proposition.

De même, on verrait qu'étant donnée une fonction $f(z)$ de $\Sigma'(C)$, la fonction $\frac{1}{\zeta}f\left(\frac{\alpha}{\zeta}\right)$ est une fonction de $\Sigma(\Gamma)$ (en supposant toujours que l'origine soit contenue dans le domaine D).

12. Propriétés des fonctions de $\Sigma(C)$ et de $\Sigma'(C)$. — En vertu de la propriété 2°, toute fonction f de $\Sigma(C)$ est holomorphe dans le domaine ouvert D.

De même, toute fonction f de $\Sigma'(C)$ est holomorphe dans le domaine ouvert D' et nulle à l'infini.

Dorénavant nous appellerons les domaines D ou D', suivant que f est de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, le domaine d'holomorphisme de la fonction f et nous le désignerons par H.

En vertu du théorème du paragraphe 6, il résulte que la différence $f(z) - f(x)$, où z est un point du contour C ne faisant pas partie d'un ensemble de points de mesure nulle et x un point de H situé sur la normale en z à C, tend vers zéro avec $z - x$.

Considérons un domaine D d'un seul tenant simplement connexe.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonciton f, définie dans le domaine fermé D, *sommable le long de* C, *soit de* $\Sigma(C)$ *est qu'elle vérifie les conditions*

$$\int_C f(z)(z-a)^n\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

De même, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f, définie dans le domaine fermé* D', *sommable le long de* C, *soit de* $\Sigma'(C)$ *est qu'elle vérifie les conditions*

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

le point a étant situé dans le domaine ouvert D.

Soit f une fonction de $\Sigma(C)$. On a par définition

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}dz \equiv 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D'.$$

La fonction $f_1(x)$ étant holomorphe dans le domaine ouvert D′, on a

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-a)^n\,dz.$$

la série du second membre étant uniformément convergente à l'extérieur d'un cercle γ de centre a et contenant complètement le domaine fermé D. Cette fonction étant identiquement nulle dans le domaine ouvert D′, on a bien

$$\int_C f(z)(z-a)^n\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Réciproquement, soit f une fonction vérifiant les conditions de la première proposition. La fonction

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-a)^n\,dz$$

est égale à l'extérieur du cercle γ à

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}dz$$

et par conséquent elle est holomorphe dans le domaine ouvert D′. Or elle est nulle identiquement à l'extérieur du cercle γ, par conséquent elle le sera aussi dans le domaine ouvert D′. On a donc

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D',$$

ce qui démontre la première proposition.

On démontrerait aussi, d'une manière semblable, la seconde proposition.

Remarque. — Toute fonction holomorphe dans un domaine ouvert D quelconque et continue dans le domaine fermé, est une fonction de $\Sigma(C)$.

En effet, cela résulte du fait que dans ces conditions le théorème de M. Goursat s'applique.

De même, toute fonction holomorphe dans un domaine ouvert D′ quelconque, continue dans le domaine fermé et nulle à l'infini, est une fonction de $\Sigma'(C)$.

En effet, il suffit de faire la transformation $z = \frac{1}{\zeta - a}$, a étant un point du domaine ouvert D.

Théorème. — *Toute fonction f de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, nulle identiquement dans le domaine d'holomorphisme H, est nulle presque partout le long de C.*

Cela résulte du fait que la différence $f(z) - f(x)$ tend presque partout vers zéro avec $z - x$.

Théorème. — *La somme d'un nombre fini de fonctions de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$ est respectivement égale à une fonction de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$.*

La démonstration est immédiate.

Nous allons donner une condition suffisante pour qu'une série de fonctions de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$ représente une fonction respectivement de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$.

13. Convergence en moyenne linéaire des suites de fonctions de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$. — Nous dirons qu'*une suite de fonctions f_n de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$ converge en moyenne linéaire le long de C si*

$$\lim_{n, m = \infty} \int_C |f_n(z) - f_m(z)|\, ds = 0, \qquad ds = |dz|.$$

Elle converge en moyenne linéaire vers une fonction f, respectivement de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, si

$$\lim_{n = \infty} \int_C |f(z) - f_n(z)|\, ds = 0.$$

Ces difinitions étant posées, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnée une suite de fonctions f_n de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$ convergeant en moyenne linéaire le long de* C, *il existe une infinité de suites partielles f_{n_p} contenues dans la suite donnée, qui convergent uniformément en général le long de* C *vers une fonction f respectivement de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, unique à un ensemble de points de* C *de mesure nulle près.*

De plus, la suite $\frac{d^q f_n(x)}{dx^q}$ converge uniformément vers la fonction $\frac{d^q f(x)}{dx^q}$ dans tout domaine fermé complètement intérieur au domaine d'holomorphisme de la suite donnée.

Supposons, pour fixer les idées, que la suite donnée soit de $\Sigma(C)$.

Cette suite convergeant en moyenne linéaire le long de C, convergera donc aussi en moyenne linéaire dans l'intervalle (o, l), l désignant la longueur du contour C. Par conséquent le théorème du paragraphe 8 s'applique aussi à de telles suites.

Soit $f(z)$ la fonction de $\Sigma(o, l)$ vers laquelle converge uniformément en général la suite partielle $f_{n_p}(z)$.

Posons

$$\frac{1}{\chi'(z)} = \frac{dz}{ds} = u'(s) + i v'(s),$$

$u'(s)$ et $v'(s)$ étant choisies de manière que l'on ait partout $\left|\frac{dz}{ds}\right| = 1$ (en supposant bien entendu que le contour C soit formé de plusieurs courbes simples).

Le point x étant à une distance non nulle η de C, on a

$$\left|\frac{1}{(z-x)^{q+1}\chi'(z)}\right| < \frac{1}{\eta^{q+1}}.$$

Il résulte que ε étant une quantité arbitrairement petite et quel que soit η, on a

$$\int_C \left|[f(z) - f_n(z)] \frac{1}{(z-x)^{q+1}\chi'(z)}\right| ds < \frac{1}{\eta^{q+1}} \int_0^l |f(z) - f_n(z)| ds < \varepsilon,$$

pourvu que n soit suffisamment grand.

Par conséquent, en excluant du plan le voisinage de la courbe C, la suite $\frac{f_n(z)}{(z-x)^{q+1}\chi'(z)}$ converge en moyenne linéaire vers la fonction $\frac{f(z)}{(z-x)^{q+1}\chi'(z)}$.

Il résulte que la suite $\int_C \frac{f_n(z)}{(z-x)^{q+1}}\,dz$ converge uniformement dans cette région vers la fonction $\int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{q+1}}\,dz$.

D'autre part, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)}{(z-x)^{q+1}}\,dz = \begin{cases} \dfrac{d^q f_n(x)}{dx^q} & \text{pour } x \text{ dans D}, \\ 0 & \text{pour } x \text{ dans D}'. \end{cases}$$

En faisant $q = 1$, on a, pour x dans D′,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 0.$$

La fonction $f(z)$ n'étant définie que le long de C, à un ensemble de mesure nulle près, posons pour x dans D

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Il résulte que la fonction f ainsi définie est de $\Sigma(C)$.

Il s'ensuit aussi que pour tout nombre fini ou nul q, la suite $\frac{d^q f_n(x)}{dx^q}$ converge uniformément vers la fonction $\frac{d^q f(x)}{dx^q}$ dans tout domaine fermé complètement intérieur à D.

Si la suite f_n était de $\Sigma'(C)$, on aurait démontré ce théorème exactement de la même manière.

14. Produit de deux fonctions de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, l'une étant holomorphe dans un domaine contenant le domaine H :

Théorème. — *Le produit de deux fonctions f et g, toutes les deux de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, la fonction g étant de plus holomorphe dans un domaine contenant le domaine H et son contour, est une fonction respectivement de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$.*

Supposons, pour fixer les idées, que la fonction f soit de $\Sigma(C)$.

Soient D_e un domaine de contour C_e, de même nombre de tenants et connexions que D, contenant ce dernier et son contour C, et g une fonction holomorphe dans le domaine fermé D_e.

On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \text{ dans D,} \\ 0 & \text{pour } x \text{ dans D}'. \end{cases}$$

Soit u un point du domaine ouvert D'_e. La fonction g étant holomorphe dans le domaine fermé D et par conséquent bornée le long de C, on a, en vertu de la formule de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_e} \frac{g(x)}{x-u}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)f(z)}{z-u}\,dz.$$

Considérons le premier membre de cette équation. Le point x étant situé sur C_e, c'est-à-dire dans D′, en vertu de l'équation de plus haut, il sera identiquement nul. On a donc, pour u dans D_e,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)f(z)}{z-u}\,dz = 0.$$

Cette fonction de u étant holomorphe dans le domaine ouvert D′, qui contient le domaine D'_e, sera donc identiquement nulle aussi dans D′.

Soit D_i un domaine de contour C_i, de même nombre de tenants et connexions que le domaine D, complètement intérieur à ce dernier. Appelons D_δ le domaine qui reste du domaine D_e, quand on supprime le domaine D_i et soit C_δ son contour. u étant un point du domaine ouvert D_i, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{g(x)}{u-x}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{g(x)}{(z-x)(u-x)}\,dx\,dz.$$

La fonction $\frac{g(x)}{u-x}$ étant holomorphe dans le domaine fermé D_δ, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{g(x)}{(u-x)(z-x)}\,dx = \frac{g(z)}{z-u}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{g(x)}{u-x}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)f(z)}{z-u}\,dz.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta}\frac{g(x)}{(u-x)(z-x)}dx$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{g(x)}{(u-x)(z-x)}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{g(x)}{(u-x)(z-x)}dx=\frac{g(u)}{z-u}.$$

Par suite, on a encore

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta}\frac{g(x)}{u-x}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z-x}\,dz\,dx=g(u)f(u).$$

Il résulte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{g(z)f(z)}{z-u}dz=\begin{cases} g(u)f(u) & \text{pour } u \text{ dans D,}\\ 0 & \text{pour } u \text{ dans D}'.\end{cases}$$

ce qui démontre la proposition.

On aurait eu une démonstration tout à fait semblable si l'on avait supposé que les fonctions f et g étaient de $\Sigma'(C)$, la fonction g étant supposée de plus holomorphe dans un domaine contenant complètement le domaine fermé D'.

15. Corollaire. — u étant un point du domaine ouvert D', la fonction

$$h(z)=g(z)(z-u)$$

est encore holomorphe dans le domaine D_c, par conséquent, on a

$$\int f(z)g(z)\,dz=0.$$

Il résulte que *le produit de deux fonctions f et g, toutes les deux de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, la fonction g étant de plus holomorphe dans un domaine contenant complètement le domaine* H, *vérifie la relation*

$$\int_C f(z)g(z)\,dz=0.$$

En particulier, si f est une fonction de $\Sigma(C)$, on a

$$\int_C f(z)\,dz=0,$$

et si f est une fonction de $\Sigma'(C)$, on a, en supposant que l'origine soit située dans le domaine D,

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 0.$$

16. Décomposition des fonctions de $\Sigma(C)$ et de $\Sigma'(C)$ relativement a des domaines de plusieurs tenants a connexion multiple :

Théorème. — *Étant donné un domaine* D *d'un seul tenant, limité par le contour* C, *composé des courbes rectifiables fermées simples* $C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ip}, C_e$; $C_{i,n}$ *désignant un contour intérieur au contour* C_e; *toute fonction f de* $\Sigma(C)$ *est égale dans le domaine fermé* D *à la somme de p fonctions* $f_{i,n}$ *de* $\Sigma'(C_{i,n})$ *et d'une fonction* f_e *de* $\Sigma(C_e)$;

Toute fonction f de $\Sigma'(C)$ *est égale dans le domaine fermé* $D_{i,n}$, *limité par le contour* $C_{i,n}$, *à une fonction* $f_{i,n}$ *de* $\Sigma(C_{i,n})$ *et dans le domaine fermé* D'_e, *limité par le contour* C_e, *à une fonction* f_e *de* $\Sigma'(C_e)$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons commencer par démontrer le lemme suivant :

Étant données une fonction $F(z)$ *sommable le long d'un contour rectifiable fermé* C *et les fonctions* $f_0(x)$ *et* $f_1(x)$ *définies par les égalités*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-x} dz = \begin{cases} f_0(x) & \textit{pour } x \textit{ dans } D, \\ -f_1(x) & \textit{pour } x \textit{ dans } D', \end{cases}$$

si la fonction $f_0(x)$ *est de* $\Sigma(C)$, *la fonction* $f_1(x)$ *est de* $\Sigma'(C)$ *et réciproquement.*

Nous entendons dire que la fonction $f_0(x)$ est de $\Sigma(C)$ si, quand x tend vers un point z de C, $f_0(x)$ tend presque partout vers une fonction $f_0(z)$ sommable le long de C et telle que l'on ait

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_0(z)}{z-x} dz = \begin{cases} f_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } D, \\ 0 & \text{pour } x \text{ dans } D'. \end{cases}$$

Supposons que la fonction $f_0(x)$ soit de $\Sigma(C)$. On aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z) - f_0(z)}{z-x} dz = \begin{cases} 0, \\ -f_1(x). \end{cases}$$

et par conséquent, en vertu du théorème du paragraphe 6, on a presque pour tout point z de C et suivant la normale

$$\lim_{x \to z} f_1(x) = F(z) - f_0(z).$$

Par suite

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \text{ dans } D, \\ f_1(x) & \text{pour } x \text{ dans } D', \end{cases}$$

l'intégrale étant prise cette fois-ci, le long de C, dans le sens négatif relativement au domaine D.

La proposition est donc démontrée. La réciproque se démontre exactement de la même manière.

Cela étant, considérons pour plus de simplicité un domaine D d'un seul tenant doublement connexe, c'est-à-dire limité par deux courbes fermées simples C_i et C_e.

Soient D_i le domaine à distance finie, limité par la courbe C_i, et D'_i son domaine complémentaire par rapport au plan, le contour C_i étant exclu. Soient aussi D_e le domaine à distance finie, limité par la courbe C_e, et D'_e son domaine complémentaire par rapport au plan, le contour C_e étant exclu.

Le domaine D sera la partie commune des domaines D'_i et D_e et le domaine D' sera formé des deux domaines D_i et D'_e.

On a par définition

(2)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \text{ dans } D, \\ 0 & \text{pour } x \text{ dans } D'. \end{cases}$$

Or

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_e} \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

l'intégrale le long de C_i étant prise dans le sens négatif relativement au domaine D_i.

Posons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} -f_{i,0}(x) & \text{pour } x \text{ dans } D_i, \\ f_{i,1}(x) & \text{pour } x \text{ dans } D'_i, \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_e} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f_{e,0}(x) & \text{pour } x \text{ dans } D_e, \\ -f_{e,1}(x) & \text{pour } x \text{ dans } D'_e. \end{cases}$$

De la relation (2), il résulte que l'on a, pour x dans D_i,

$$-f_{i,0}(x) + f_{e,0}(x) \equiv 0,$$

pour x dans D'_e,

$$f_{i,1}(x) - f_{e,1}(x) \equiv 0$$

et pour x dans D,

$$f_{i,1}(x) + f_{e,0}(x) = f(x)$$

La fonction $f_{e,0}(x)$ étant holomorphe dans le domaine D_e, il résulte que la fonction $f_{i,0}(x)$ sera holomorphe aussi le long de C_i et par conséquent elle est de $\Sigma(C_i)$.

On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f(z) - f_{e,0}(z)}{z-x}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f(z) - f_{i,0}(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \text{ dans } D_i, \\ f_{i,1}(x) & \text{pour } x \text{ dans } D'_i. \end{cases}$$

En vertu du lemme précédent, il résulte donc que la fonction $f_{i,1}$ est de $\Sigma'(C_i)$.

De même, la fonction $f_{i,1}(x)$ étant holomorphe dans le domaine D'_i, il résulte que la fonction $f_{e,1}(x)$ est holomorphe aussi le long de C_e et puisqu'elle est nulle à l'infini, elle est de $\Sigma'(C_e)$.

On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_e}\frac{f(z) - f_{i,1}(z)}{z-x}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_e}\frac{f(z) - f_{e,1}(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f_{e,0}(x) & \text{pour } x \text{ dans } D_e, \\ 0 & \text{pour } x \text{ dans } D_e. \end{cases}$$

En vertu du lemme précédent, il résulte donc que la fonction $f_{e,0}(x)$ est de $\Sigma(C)$.

La première partie du théorème est donc démontrée, pour le domaine envisagé.

Pour un domaine d'un seul tenant à connexion multiple d'ordre supérieur à 2, on démontrerait cette proposition exactement de la même manière.

Démontrons la seconde partie du théorème. Pour cela, considérons toujours le domaine doublement connexe précédemment envisagé. Soit f une fonction de $\Sigma'(C)$.

On a par définition

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \text{ dans } D, \\ f(x) & \text{pour } x \text{ dans } D'. \end{cases}$$

De cette relation il résulte que l'on a, pour x dans D_i,

$$f_{i,0}(x) + f_{e,0}(x) = f(x);$$

pour x dans D,

$$f_{i,1}(x) + f_{e,0}(x) = 0,$$

et pour x dans D'_e,

$$-f_{i,1}(x) + f_{e,1}(x) = f(x).$$

La fonction $f_{e,0}(x)$ étant holomorphe dans le domaine D_e, il résulte que la fonction $f_{i,1}(x)$ est holomorphe aussi le long de C_i et puisqu'elle est nulle à l'infini, elle est de $\Sigma'(C_i)$.

On a donc, pour x dans D_i,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f_{i,1}(z)}{z-x}\,dz = 0.$$

D'autre part, le long de C_i, on a

$$-f_{i,1}(z) = f_{e,0}(z);$$

par conséquent, pour x dans D'_i, on a

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f_{i,1}(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f_{e,0}(z)}{z-x}\,dz = 0.$$

Il résulte donc, en vertu du théorème du paragraphe 12, que la fonction $f_{i,1}$ est nulle presque partout le long de C_i. Comme elle est holomorphe le long de C_i, elle sera donc nulle identiquement le long de cette courbe.

Il s'ensuit que la fonction $f_{e,0}(x)$ est identiquement nulle dans le domaine ouvert D_e et par conséquent la fonction $f_{i,1}(x)$ sera aussi identiquement nulle dans le domaine ouvert D'_i.

En vertu du lemme précédent, il résulte que la fonction $f_{e,1}(x)$ est de $\Sigma'(C_e)$ et que la fonction $f_{i,0}(x)$ est de $\Sigma(C_i)$.

On a donc bien pour x dans le domaine fermé D_i,

$$f(x) \equiv f_{i,0}(x)$$

et pour x dans le domaine fermé D'_e,

$$f(x) \equiv f_{e,1}(x).$$

ce qui démontre la seconde partie du théorème pour le cas envisagé.

On le démontrerait exactement de la même manière pour le cas d'un domaine d'un seul tenant à connexion d'ordre supérieur à 2.

Théorème. — *Étant donné un domaine* D' *d'un seul tenant, limité par le contour* C *composé des courbes rectifiables fermées simples* C_1, C_2, ..., C_p; *toute fonction* f *de* $\Sigma'(C)$ *est égale, dans le domaine fermé* D', *à la somme de* p *fonctions* f_n *de* $\Sigma'(C_n)$.

Toute fonction f *de* $\Sigma(C)$ *est égale, dans chaque domaine* D_n *limité par le contour* C_n, *à une fonction de* $\Sigma(C_n)$.

Ce théorème se démontre exactement comme le précédent.

Théorème. — *Étant donnés un domaine* D *de* p *tenants* $T_1, T_2, \ldots, T_p$, *simplement ou multiplement connexe, respectivement de contours* C_1, C_2, ..., C_p, *et* D' *son domaine complémentaire par rapport au plan (le contour* C *étant exclu) de* q *tenants* T'_1, T'_2, ..., T'_q *respectivement de contours* $C'_1, C'_2, \ldots, C'_q$; *toute fonction* f *de* $\Sigma(C)$ *est égale, dans chaque domaine fermé* T_n, *à une fonction de* $\Sigma(C_n)$.

Toute fonction f *de* $\Sigma'(C)$ *est égale, dans le domaine fermé* T'_m, *à une fonction de* $\Sigma'(C'_m)$ *ou de* $\Sigma(C'_m)$, *suivant qui le domaine* T'_m *contient ou non l'infini.*

On démontre ce théorème d'une manière tout à fait semblable au premier théorème de ce paragraphe.

CHAPITRE II.

FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE LE LONG DES CONTOURS DE LEURS DOMAINES D'HOLOMORPHISME.

I. — Fonctions de carré sommable et rappel de quelques théorémes.

17. Définitions. — Nous dirons qu'*une fonction* $f(s) = p(s) + iq(s)$, *de la variable réelle* s, *est de carré sommable dans l'intervalle* (a, b), *si les*

fonctions $p^2 - q^2$ et pq sont sommables dans cet intervalle. On a, en effet,

$$\int_a^b [f(s)]^2\, ds = \int_a^b [p^2(s) - q^2(s)]\, ds + 2i \int_a^b p(s) . q(s)\, ds.$$

Nous allons démontrer que *les fonctions $p(s)$ et $q(s)$ sont de carré sommable dans (a, b).*

En effet, nous avons vu que si une fonction est sommable, son module l'est aussi, par conséquent $|f(s)|^2$ est sommable. Or, on a

$$|f(s)|^2 = p^2 + q^2.$$

La somme ou la différence de deux fonctions sommables est encore sommable. Il s'ensuit donc que les fonctions

$$(p^2 - q^2) + (p^2 + q^2) = 2p^2 \qquad \text{et} \qquad (p^2 + q^2) - (p^2 - q^2) = 2q^2$$

sont sommables.

Réciproquement, si p et q sont de carré sommable, la fonction $f(s) = p + iq$ est de carré sommable.

En effet $p^2 - q^2$ est évidemment sommable et, en vertu de l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left[\int_a^b pq\, ds\right]^2 \leq \int_a^b p^2\, ds \int_a^b q^2\, ds.$$

Nous appellerons $\Omega(a, b)$ *l'ensemble de toutes les fonctions*

$$f(s) = p(s) + iq(s),$$

de carré sommable dans l'intervalle (a, b).

De même, nous appellerons ω *l'ensemble de toutes les suites dénombrables*

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

de nombres réels ou complexes, tels que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$$

soit convergente.

Une fonction de $\Omega(a, b)$ étant aussi sommable dans l'intervalle (a, b), l'ensemble $\Omega(a, b)$ est contenu dans l'ensemble $\Sigma(a, b)$.

18. Systèmes orthogonaux et normaux. — Un système de fonctions $\varphi_0(s), \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ de $\Omega(a, b)$ est dit orthogonal et normal, lorsqu'il vérifie les conditions

$$\int_a^b \varphi_n(s)\overline{\varphi_m(s)}\,ds = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m), \end{cases}$$

$\overline{\varphi_m(s)}$ désignant la quantité imaginaire conjuguée de $\varphi_m(s)$. Remarquons, en passant, que $\overline{\varphi_m(s)}$ fait partie aussi de $\Omega(a, b)$.

Le système orthogonal et normal est *complet ou fermé*, s'il n'existe aucune fonction $\psi(s)$ étrangère au système, telle que l'on ait simultanément

$$\int_a^b \psi(s)\overline{\psi(s)}\,ds = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi(s)\overline{\varphi_n(s)}\,ds = 0$$

quel que soit $n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty$.

19. Inégalité de Schwarz. — Soient deux fonctions réelles $f(s)$ et $g(s)$ appartenant à l'ensemble $\Omega(a, b)$. λ étant un nombre réel quelconque, on a, évidemment,

$$0 \leq \int_a^b [f(s) - \lambda g(s)]^2\,ds.$$

Le développement de cette intégrale est un trinome du second degré en λ, non négatif. Or, le coefficient de λ^2 est positif; par conséquent son discriminant est négatif ou nul.

On a donc

$$\left[\int_a^b f(s)g(s)\,ds\right]^2 \leq \int_a^b [f(s)]^2\,ds \times \int_a^b [g(s)]^2\,ds;$$

qu'on appelle l'inégalité de Schwarz.

Cette inégalité s'étend immédiatement aussi aux fonctions complexes de $\Omega(a, b)$.

En effet, $f(s)$ et $g(s)$ étant deux fonctions quelconques de $\Omega(a, b)$, on a

$$\left|\int_a^b f(s)g(s)\,ds\right| \leq \int_a^b |f(s)g(s)|\,ds.$$

En appliquant l'inégalité précédente aux deux fonctions réelles $|f(s)|$ et $|g(s)|$; il vient

$$\left|\int_a^b f(s)g(s)\,ds\right|^2 \leq \left[\int_a^b |f(s)g(s)|\,ds\right]^2 \leq \int_a^b |f(s)|^2\,ds \times \int_a^b |g(s)|^2\,ds.$$

et par conséquent elle est générale.

20. Inégalité de Bessel. — Soient une fonction $f(s)$ de $\Omega(a, b)$ et les quantités

$$f_n = \int_a^b f(s)\,\overline{\varphi_n(s)}\,ds,$$

que l'on appelle les « coefficients de Fourier » de la fonction $f(s)$, par rapport au système $\varphi_n(s)$. De l'identité

$$0 \leqq \int_a^b \left|f(s) - \sum_{i=0}^{n} f_i\varphi_i(s)\right|^2 ds = \int_a^b |f(s)|^2 - \sum_{i=0}^{n} |f_i|^2,$$

on déduit

$$\sum_{i=0}^{n} |f_i|^2 \leqq \int_a^b |f(s)|^2\,ds.$$

qui montre que *la suite f_n fait partie de l'ensemble* ω.

21. Convergence en moyenne. — *Une suite de fonctions $f_n(s)$ de $\Omega(a, b)$ converge en moyenne (quadratique) dans l'intervalle (a, b) si*

$$\lim_{n, m = \infty} \int_a^b |f_n(s) - f_m(s)|^2\,ds = 0.$$

Elle converge en moyenne vers une fonction $f(s)$ de $\Omega(a, b)$ si

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b |f(s) - f_n(s)|^2\,ds = 0.$$

Théorème de M. Weyl [1]. — M. Weyl a démontré son théorème relativement aux fonctions réelles de $\Omega(a, b)$. Nous allons montrer qu'il s'étend immédiatement aussi aux fonctions complexes de $\Omega(a,b)$. Pour la démonstration, nous utiliserons notre théorème général du paragraphe 12.

Théorème. — *Étant donnée une suite $f_n(s)$ de fonctions de $\Omega(a, b)$ convergeant en moyenne, il existe une fonction $f(s)$ de $\Omega(a, b)$, vers laquelle une certaine suite partielle $f_{n_p}(s)$ contenue dans la suite donnée converge uniformément en général. La fonction $f(s)$ est, à sa détermination sur un ensemble de points de mesure nulle près, unique et bien déterminée.*

La suite $f_n(s)$ convergeant en moyenne quadratique converge aussi en moyenne linéaire, puisque

$$\left[\int_a^b |f_n(s) - f_m(s)|\, ds\right]^2 \leqq (b-a)\int_a^b |f_n(s) - f_m(s)|^2\, ds.$$

Par conséquent, il existe une fonction $f(s)$ sommable vers laquelle une certaine suite partielle $f_{n_p}(s)$ contenue dans la suite donnée converge uniformément en général.

Il nous reste à démontrer que la fonction est de carré sommable. A cet effet, utilisons les mêmes notations qu'au paragraphe 12.

La suite $f_{n_p}(s)$ convergeant uniformément sur B_h vers $f(s)$, il résulte que la suite $|f_{n_p}(s)|^2$ converge aussi uniformément sur B_h vers $|f(s)|^2$. Cette dernière suite étant sommable dans (a, b), on a

$$\int_{B_h} |f(s)|^2\, ds = \lim_{p=\infty} \int_{B_h} |f_{n_p}(s)|^2\, ds.$$

D'autre part, on a

$$\int_{B_h} |f_{n_p}(s)|^2\, ds \leqq 2\int_{B_h} |f_m(s) - f_{n_p}(s)|^2\, ds + 2\int_{B_h} |f_m(s)|^2\, ds$$
$$\leqq 2\,\varepsilon_m + 2\int_a^b |f_m(s)|^2\, ds.$$

---

[1] *Loc. cit.*

pourvu que $m < n_p$. Il vient donc

$$\int_{B_h} |f(s)|^2 ds < 2\varepsilon_m + 2\int_a^b |f_m(s)|^2 ds.$$

ce qui prouve que $f(s)$ est de carré sommable dans (a, b) et l'on a

$$\lim_{h=\infty} \int_{B_h} |f(s)|^2 ds = \int_a^b |f(s)|^2 ds.$$

De plus, en vertu de la convergence uniforme de la suite $f_{n_p}(s)$ sur B_h, on a aussi

$$\int_{B_h} |f(s) - f_{n_p}(s)|^2 ds = \lim_{q=\infty} \int_{B_h} |f_{n_q}(s) - f_{n_p}(s)|^2 ds$$

et, par conséquent,

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b |f(s) - f_{n_p}(s)|^2 ds = 0$$

D'autre part, on a

$$|f(s) - f_q(s)|^2 < 2|f(s) - f_{n_p}(s)|^2 + 2|f_{n_p}(s) - f_q(s)|^2$$

et, par suite,

$$\lim_{q=\infty} \int_a^b |f(s) - f_q(s)|^2 ds = 0.$$

Il résulte donc que $f_n(s)$ *converge en moyenne vers* $f(s)$.

22. Théorème de M. Fischer et M. Riesz [1]. — Du théorème précédent, il résulte une démonstration simple d'un théorème fort important de M. Fischer et M. Riesz.

Étant donnée une suite f_n appartenant à ω, la suite

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{n} f_i \varphi_i(s),$$

où $\varphi_i(s)$ représente un système orthogonal et normal dans (a, b), con-

---

[1] E. Fischer, *Comptes rendus*, t. 144, 1907, p. 1022. — F. Riesz, *Ibid.*, p. 615.

verge en moyenne. En effet,

$$\lim_{n, m = \infty} \int_a^b |f_n(s) - f_m(s)|^2 ds = \lim_{n, m = \infty} \sum_{i=m}^{n} |f_i|^2 = 0 \qquad (m < n).$$

D'après le théorème de M. Weyl, *elle définit donc une fonction $f(s)$ de $\Omega(a, b)$ vers laquelle une infinité de suites partielles convergent uniformément en général.*

De plus, de l'inégalité

$$\left| \int_a^b [f(s) - f_n(s)] \overline{\varphi_n(s)} ds \right|^2 \leqq \int_a^b |f(s) - f_n(s)|^2 ds \int_a^b |\varphi_n(s)|^2 ds,$$

il résulte que

$$\int_a^b f(s) \overline{\varphi_m(s)} ds = \lim_{n = \infty} \int_a^b f_n(s) \overline{\varphi_m(s)} ds = f_m.$$

On trouve de même

$$\lim_{n = \infty} \left[\int_a^b |f(s)|^2 ds - \sum_{i=0}^{n} |f_i|^2 \right] = 0.$$

Il résulte, en particulier, que *si $\varphi_i(s)$ est fermé, à toute suite f_n de ω correspond une et une seule fonction de $\Omega(a, b)$, déterminée à un ensemble de valeurs de mesure nulle près et possédant f_n comme coefficients de Fourier relatifs à $\varphi_n(s)$.*

Pour ce système on a, quelle que soit $f(s)$ de $\Omega(a, b)$,

$$\int_a^b |f(s)|^2 ds = \sum_{i=0}^{+\infty} |f_i|^2$$

Remarquons que la suite

$$f_n^*(s) = \sum_{i=0}^{n} f_i^* \overline{\varphi_i(s)},$$

où

$$f_n^* = \int_a^b f(s) \varphi_n(s) ds$$

converge aussi en moyenne et de plus toujours vers $f(s)$, car on a

$$f(s) = \lim_{p=\infty} \sum_{i=0}^{n_p} f_i^* \varphi_i(s).$$

Pour un système fermé, on a donc aussi

$$\int_a^b |f(s)|^2 ds = \sum_{i=0}^{+\infty} |f_i^*|^2.$$

Rappelons aussi la formule de M. Riesz : $f(s)$ et $g(s)$ étant des fonctions de $\Omega(a, b)$ et $\varphi_i(s)$ un système orthogonal et normal complet, on a

$$\int_a^b f(s)\, g(s)\, ds = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i g_i^* = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i^* g_i.$$

La suite $f_n(s)$ de $\Omega(a, b)$ convergeant en moyenne, nous savons qu'elle converge en moyenne vers une fonction $f(s)$ de $\Omega(a, b)$, vers laquelle converge uniformément en général une certaine suite partielle $f_{n_p}(s)$. Nous exprimerons cela par le symbole $\sim$ d'équivalence, emprunté à M. Hurwitz [1] et nous écrirons

$$f(s) \sim \lim_{n=\infty} f_n(s).$$

23. Opérations sur les équivalences. — Nous allons démontrer rapidement la possibilité de faire certaines opérations sur les équivalences.

Théorème. — *Les équivalences peuvent être additionnées et multipliées membre à membre par une fonction de* $\Omega(a, b)$.

La démonstration est immédiate.

Théorème. — *Si l'on a* $f(s) \sim \lim f_n(s)$, *on a aussi*

$$\int_a^s f(s)\, ds = \lim_{n=\infty} \int_a^s f_n(s)\, ds \qquad (a \leq s < b),$$

la limite ayant lieu uniformément, c'est-à-dire indépendamment de s dans (a, b).

---

(1) Hurwitz, *Annales de l'École Normale*, t. 19, 1902, p. 357.

En effet, cela résulte de l'inégalité de Schwarz. On a aussi plus généralement

$$\int_a^s f(s)\,g(s)\,ds = \lim_{n\to\infty}\int_a^s f_n(s)\,g(s)\,ds.$$

$g(s)$ étant une fonction de $\Omega(a, b)$ et cela pour la même raison.

THEORÈME. — *Étant données deux suites de fonctions $f_n(s)$ et $g_n(s)$ de $\Omega(a, b)$ convergeant en moyenne quadratique respectivement vers $f(s)$ et $g(s)$, la suite $f_n(s)g_n(s)$ converge en moyenne linéaire vers $f(s)g(s)$.*

En effet on a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b |f(s)g(s) - f_n(s)g_n(s)|\,ds \\ &\leqq \int_a^b |f(s)g(s) - f_n(s)g(s)|\,ds + \int_a^b |f_n(s)g(s) - f_n(s)g_n(s)|\,ds, \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} I_n \leqq \int_a^b |f(s) - f_n(s)|^2\,ds \int_a^b |g(s)|^2\,ds \\ + \int_a^b |g(s) - g_n(s)|^2\,ds \int_a^b |f_n(s)|^2\,ds. \end{aligned}$$

Or $\int_a^b |f_n(s)|^2\,ds$ est bornée quel que soit n, par conséquent I_n peut être rendu arbitrairement petit, ce qui démontre le théorème.

II. — Ensembles $\Omega(C)$ et $\Omega'(C)$.

24. DEFINITIONS. — Toute fonction de carré sommable étant aussi sommable, *appelons $\Omega(C)$ l'ensemble de toutes les fonctions de $\Sigma(C)$ qui sont de carré sommable le long de C et $\Omega'(C)$ l'ensemble de toutes les fonctions de $\Sigma'(C)$ qui sont de carré sommable le long de C.*

25. CONVERGENCE EN MOYENNE DES SUITES DE FONCTIONS DE $\Omega(C)$ ET DE $\Omega'(C)$. — Remarquons immédiatement qu'une fonction de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, étant respectivement de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$, ne peut être nulle

identiquement dans son domaine d'holomorphisme, sans qu'elle le soit presque partout le long de C.

Nous dirons qu'*une suite de fonctions $f_n(z)$ converge en moyenne le long de* C *si*

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \int_C |f_n(z) - f_m(z)|^2 ds = 0.$$

Elle converge en moyenne vers une fonction $f(z)$ respectivement de $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$ *si*

$$\lim_{n \to \infty} \int_C |f(z) - f_n(z)|^2 ds = 0.$$

Soit f_n une suite de fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ convergeant en moyenne le long de C. Cette suite converge évidemment aussi en moyenne linéaire le long de C et par suite on peut lui appliquer le théorème du paragraphe 13.

Soit f la fonction respectivement de $\Sigma(C)$ ou de $\Sigma'(C)$ vers laquelle converge uniformément en général une certaine suite partielle f_{n_p}. D'autre part, d'après le théorème de M. Weyl la suite f_n étant en particulier aussi de $\Omega(o, l)$ convergera en moyenne vers une certaine fonction F de $\Omega(o, l)$, vers laquelle converge uniformément en général la suite partielle f_{n_p}. Par conséquent, le long de C, on a presque partout

$$F(z) = f(z).$$

Il résulte donc que la fonction f est de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, suivant l'ensemble auquel appartient la suite donnée.

Nous pouvons donc énoncer le théorème semblable suivant :

Étant donnée une suite de fonctions f_n de $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$ *convergeant en moyenne (quadratique) le long de* C, *il existe une infinité de suites partielles f_{n_p} contenues dans la suite donnée, qui convergent uniformément en général le long de* C *vers une fonction f respectivement de* $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$, *unique à un ensemble de points de* C *de mesure nulle près. De plus, la suite $\frac{d^q f_n(x)}{dx^q}$ converge uniformément vers la fonction $\frac{d^q f(x)}{dx^q}$ dans tout domaine fermé complètement intérieur au domaine d'holomorphisme de la suite donnée.*

26. Produit de deux fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, l'une étant holomorphe dans un domaine contenant le domaine H. — Les théorèmes du paragraphe 14 s'appliquent aussi évidemment aux fonctions des ensembles $\Omega(C)$ et $\Omega'(C)$.

Le produit d'une fonction bornée par une fonction de carré sommable étant encore une fonction de carré sommable, il résulte le théorème semblable suivant :

Le produit de deux fonctions f et g, toutes les deux de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, la fonction g étant de plus holomorphe dans un domaine contenant le domaine H *et son contour, est une fonction respectivement de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$.*

27. Décomposition des fonctions de $\Omega(C)$ et de $\Omega'(C)$ relativement a des domaines de plusieurs tenants multiplement connexes. — Le lemme du paragraphe 16 est encore valable quand on remplace l'ensemble $\Sigma(C)$ par l'ensemble $\Omega(C)$ et l'ensemble $\Sigma'(C)$ par l'ensemble $\Omega'(C)$.

Il résulte que les trois théorèmes du paragraphe 16 sont encore valables *quand on remplace l'ensemble Σ par l'ensemble Ω et l'ensemble Σ' par l'ensemble Ω'.*

CHAPITRE III.

SYSTÈMES ORTHOGONAUX DE FONCTIONS DE $\Omega(C)$ ET DE $\Omega'(C)$.

I. — Systèmes fondamentaux.

28. Systèmes orthogonaux et normaux. — Un système de fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ faisant partie aussi de l'ensemble de fonctions $\Omega(o, l)$, l étant la longueur du contour C, nous dirons qu'*il est orthogonal et normal le long de* C, *si l'on a*

$$\int_0^l \varphi_n[z(s)]\,\overline{\varphi_m[z(s)]}\,ds = \begin{cases} 1 & \textit{pour } n = m, \\ 0 & \textit{pour } n \neq m, \end{cases}$$

ce que nous écrirons encore

$$\int_C \varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\,\chi'(z)\,dz = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = m, \\ 0 & \text{pour } n \neq m. \end{cases}$$

avec

$$\chi'(z) = \frac{ds}{dz}$$

et $\overline{\varphi_m(z)}$ désignant la quantité imaginaire conjuguée de $\varphi_m(z)$.

La fonction f étant de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, la suite

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$$

où

$$f_n = \int_C f(z)\,\overline{\varphi_n(z)}\,\chi'(z)\,dz.$$

sera de ω, c'est-à-dire la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2$$

sera convergente.

Un système $\varphi_n(z)$ orthogonal et normal de fonctions de $\Omega(C)$ ou toutes de $\Omega'(C)$ est fermé ou complet, respectivement par rapport à l'ensemble des fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, s'il n'existe aucune fonction $\lambda(z)$ étrangère au système respectivement de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, telle que l'on ait simultanément

$$\int_C \lambda(z)\,\overline{\varphi_n(z)}\,ds = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

avec

$$\int_C |\lambda(z)|^2\,ds = 1.$$

La suite

$$\sum_{n=0}^{p} f_n\,\varphi_n(z)$$

converge en moyenne le long de C. Par conséquent, en vertu du théorème sur la convergence en moyenne, elle converge en moyenne le long de C vers une fonction $F(z)$ appartenant au même ensemble que la suite précédente.

En particulier, si le système $\varphi_n(z)$ est fermé, on a presque partout le long de C

$$F(z) = f(z).$$

Le point z étant situé sur C, on peut écrire

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \varphi_n(z).$$

Pour un point x du domaine ouvert H, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \varphi_n(x),$$

la série convergeant uniformément dans tout domaine fermé complètement intérieur à H.

De même, nous dirons qu'*un système* $\varphi_n(z)$ *orthogonal et normal de fonctions de* $\Omega(C)$ *ou toutes de* $\Omega'(C)$ *est fermé ou complet, respectivement par rapport à l'ensemble des fonctions de* $\Omega'(C)$ *ou de* $\Omega(C)$, *s'il n'existe aucune fonction* $\lambda(z)$ *respectivement de* $\Omega'(C)$ *ou de* $\Omega(C)$, *telle que l'on ait simultanément*

$$\int_C \lambda(z) \varphi_n(z)\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

avec

$$\int_C |\lambda(z)|^2 \, ds = 1.$$

Il résulte qu'étant donné un système $\varphi_n(z)$ orthogonal et normal de fonctions de $\Omega'(C)$ fermé par rapport à l'ensemble $\Omega(C)$, toute fonction $f(z)$ de $\Omega(C)$ est développable en série de fonctions $\overline{\varphi_n(z)}\, \chi'(z)$ convergente en moyenne.

En posant

$$f_n^* = \int_C f(z) \varphi_n(z)\, dz,$$

on aura le long de C

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^* \bar{\varphi}_n(z) \chi'(z).$$

On aurait eu la même proposition, si le système $\varphi_n(z)$ était de $\Omega(C)$, fermé par rapport à l'ensemble $\Omega'(C)$ et la fonction $f(z)$ de $\Omega'(C)$.

29. Systèmes biorthogonaux et normaux. — *Étant données deux suites de fonctions*

$$f_0(z), \quad f_1(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

et

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z), \quad \ldots,$$

toutes les deux de $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$, *nous dirons qu'elles forment un système biorthogonal et normal si l'on a*

$$\int_C f_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\,ds = \begin{cases} 1 & \textit{pour } n = m, \\ 0 & \textit{pour } n \neq m). \end{cases}$$

Si les suites précédentes sont d'ensembles différents, nous dirons encore qu'*elles forment un système biorthogonal et normal si l'on a*

$$\int_C f_n(z)\,\varphi_m(z)\,dz = \begin{cases} 1 & \textit{pour } n = m, \\ 0 & \textit{pour } n \neq m. \end{cases}$$

30. Orthogonalisation. — Nous allons appliquer à une suite de fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ le procédé, bien connu, d'orthogonalisation.

Théorème. — *Étant donnée une suite de fonctions de* $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$ *non identiquement nulles*

$$f_0(z), \quad f_1(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

en nombre fini ou non, on peut toujours orthogonaliser ce système, c'est-à-dire trouver un système de fonctions

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z), \quad \ldots$$

respectivement de $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$, *qui soit orthogonal et normal et tel que toute combinaison linéaire des fonctions* $f_n(z)$ *soit une combinaison des fonctions* $\varphi_n(z)$ *et inversement.*

En effet, supprimons de la suite des fonctions $f_n(z)$ celles qui sont une combinaison linéaire des précédentes. Nous serons ainsi ramenés au cas où les fonctions $f_n(x)$ sont linéairement indépendantes, quand on considère un nombre fini quelconque.

Supposons qu'on puisse trouver p combinaisons linéaires, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_{p-1}(z)$; des fonctions $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_{p+1}(z)$; qui soient orthogonales et normales entre elles. Nous allons montrer que si cette proposition est vraie pour p, elle sera vraie pour $p+1$.

En effet, soit

$$\varphi_p(z) = c_0\varphi_0(z) + \ldots + c_{p-1}\varphi_{p-1}(z) + c_p f_p(z).$$

La fonction $\varphi_p(z)$ est évidemment une combinaison des fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\ldots$, $f_p(z)$. Elle sera orthogonale aux fonctions $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_{p-1}(z)$ si l'on a

$$\int_C \varphi_p(z)\overline{\varphi_q(z)}\,ds = c_q + c_{p+1}\int_C f_p(z)\overline{\varphi_q(z)}\,ds = 0 \quad (q = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Par conséquent,

$$\varphi_p(z) = c_p\left[f_p(z) - \sum_{q=0}^{p-1}\varphi_q(z)\int_C f_p(z)\overline{\varphi_q(z)}\,ds\right].$$

La quantité entre crochets ne peut être identiquement nulle sans quoi $f_p(z)$ serait une combinaison linéaire de $\varphi_0(z)$, $\ldots$, $\varphi_{p-1}(z)$ et par suite de $f_0(z)$, $\ldots$, $f_{p-1}(z)$, ce qui serait contraire à l'hypothèse. Par conséquent, on pourra toujours choisir c_p de façon que la fonction $\varphi_p(z)$ soit normale.

La proposition étant vraie pour $p=1$, elle sera par suite générale. Le théorème est alors démontré, car les fonctions orthogonales et normales $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_n(z)$, $\ldots$ sont nécessairement indépendantes et non seulement elles sont bien des combinaisons linéaires des fonctions $f_n(z)$, mais les fonctions $f_n(z)$ sont aussi des combinaisons des fonctions $\varphi_n(z)$. De plus, on voit que si les fonctions $f_n(z)$ sont linéairement indépendantes, le nombre des fonctions $\varphi_n(z)$ sera égal à celui des fonctions $f_n(z)$; en particulier, s'il y a une infinité de fonctions $f_n(z)$, il y a aussi une infinité de fonctions $\varphi_n(z)$.

En supposant toujours les fonctions $f_n(z)$ linéairement indépendantes, on aura, pour déterminer les fonctions $\varphi_n(z)$, les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{array}{l}
f_0(z) = \varphi_0(z)(f_0\bar{\varphi}_0), \\
f_1(z) = \varphi_0(z)(f_1\bar{\varphi}_0) + \varphi_1(z)(f_1\bar{\varphi}_1), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n(z) = \varphi_0(z)(f_n\bar{\varphi}_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_n(z)(f_n\bar{\varphi}_n); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

ainsi que

$$
\begin{aligned}
(f_0\overline{f_0}) &= [(f_0\overline{\varphi_0})]^2,\\
(f_1\overline{f_1}) &= [(f_1\overline{\varphi_0})]^2 + [(f_1\overline{\varphi_1})]^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(f_n\overline{f_n}) &= [(f_n\overline{\varphi_0})]^2 + \dots\dots + [(f_n\overline{\varphi_n})]^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

où l'on a posé

$$(f_p\overline{\varphi_q}) = \int_C f_p(z)\,\overline{\varphi_q(z)}\,ds.$$

D'après le second système d'équations, on voit qu'il subsiste une indétermination de signe, puisque $(f_p\overline{\varphi_q})$ n'est donné que par son carré. Nous prendrons, par exemple, la détermination positive du radical.

Remarquons aussi qu'en intervertissant l'ordre de quelques fonctions $f_n(z)$, le système orthogonal et normal $\varphi_n(z)$ change de forme.

31. Suites fermées. — Nous dirons qu'*une suite de fonctions est fermée ou complète si le système qu'on déduit par orthogonalisation est fermé.*

Considérons une suite de fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ fermée respectivement par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$ ou de $\Omega(C)$. Dans ces conditions, il n'existe aucune fonction $\lambda(z)$, respectivement de $\Omega'(C)$ ou de $\Omega(C)$, telle que l'on ait simultanément

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ +\infty) \tag{1}$$

avec

$$\int_C |\lambda(z)|^2 ds = 1. \tag{2}$$

En effet, supposons qu'il en existerait une. Supprimons de la suite donnée toutes les fonctions qui sont une combinaison linéaire des précédentes et appelons $f_{n_i}(z)$ la suite qui en est restée. On a

$$f_{n_i}(z) = \sum_{p=0}^{p=i} (f_{n_p}\overline{\varphi_p})\,\varphi_p(z) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ +\infty).$$

et, par suite, on doit avoir

$$\int_C \lambda(z)\varphi_p(z)\,dz = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

ce qui est impossible en même temps que la relation (2).

Réciproquement, s'il n'existe aucune fonction $\lambda(z)$ respectivement de $\Omega'(C)$ ou de $\Omega(C)$, telle que l'on ait simultanément les relations (1) et (2), le système $\varphi_n(z)$ est fermé.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une fonction $\lambda(z)$ respectivement de $\Omega'(C)$ ou de $\Omega(C)$ telle que l'on ait

$$\int_C \lambda(z)\varphi_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

avec

$$\int_C |\lambda(z)|^2 ds = 1.$$

Or, puisque les fonctions $f_n(z)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_n(z)$, on aurait aussi

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

ce qui ne peut avoir lieu en même temps que la relation (2).

Par conséquent, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctions $f_n(z)$ de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ soit fermée, respectivement par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$ ou de $\Omega(C)$, est qu'il n'existe aucune fonction $\lambda(z)$, respectivement de $\Omega'(C)$ ou de $\Omega(C)$, telle que l'on ait simultanément*

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

avec

$$\int_C |\lambda(z)|^2 ds = 1.$$

32. Recherche de suites fermées simples. — Nous allons chercher des suites de fonctions simples fermées, qui nous permettront de trouver, par le procédé d'orthogonalisation, des systèmes orthogonaux et normaux complets.

Domaine d'un seul tenant simplement connexe. — Soient D un domaine limité par la courbe rectifiable fermée simple C et a un point intérieur à ce domaine.

Considérons la suite de fonctions

$$1, \quad z-a, \quad (z-a)^2, \quad \dots, \quad (z-a)^n, \quad \dots$$

qui fait évidemment partie de $\Omega(C)$.

Remarquons tout de suite qu'un nombre fini quelconque de ces fonctions sont linéairement indépendantes.

Nous allons montrer que cette suite est fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$.

En effet, soit λ une fonction quelconque de $\Omega'(C)$ et supposons que l'on ait

$$\int_C \lambda(z)(z-a)^n dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots, +\infty).$$

En posant

$$\frac{1}{z-a}\lambda_1\left(\frac{1}{z-a}\right) = \lambda(z)$$

les relations précédentes deviennent

$$\frac{d^n\lambda_1(0)}{d\zeta^n} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots, +\infty)$$

Par conséquent, la fonction λ est nulle identiquement à l'extérieur d'un cercle de centre a et contenant le domaine D.

Il s'ensuit qu'elle est identiquement nulle dans son domaine d'holomorphisme D'. La fonction λ étant de $\Omega'(C)$, on a, pour x dans D ou dans D',

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{z-x} dz = 0.$$

En vertu du théorème du paragraphe 6, il résulte que la fonction λ doit être nulle presque partout le long de C. On a donc

$$\int_C |\lambda(z)|^2 ds = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

De même, considérons la suite de fonctions

$$\frac{1}{z-a}, \quad \frac{1}{(z-a)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(z-a)^{n+1}}, \quad \ldots$$

qui fait partie de $\Omega'(C)$.

Remarquons qu'un nombre fini quelconque de ces fonctions sont linéairement indépendantes.

Nous allons montrer que cette suite est fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$.

En effet, soit λ une fonction quelconque de $\Omega(C)$ et supposons que l'on ait

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^n \lambda(a)}{dz^n} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Il résulte que la fonction λ est nulle identiquement à l'intérieur d'un cercle de centre a complètement intérieur à C. Elle est donc identiquement nulle dans son domaine d'holomorphisme D. La fonction λ étant de $\Omega'(C)$ on a, pour x dans D ou dans D',

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{z-x} dz = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_C |\lambda(z)|^2 ds = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Domaine d'un seul tenant multiplement connexe. — Considérons un domaine D d'un seul tenant à connexion d'ordre p. Son contour C sera donc formé de p courbes fermées simples $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Appelons C_p la courbe qui contient à son intérieur les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$.

Cherchons une suite de fonctions f_n de $\Omega(C)$ qui soit fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$.

Pour cela cherchons s'il est possible de trouver une suite, telle que les conditions

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

$\lambda(z)$ étant une fonction quelconque de $\Omega(C)$, entrainent la condition

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans D}.$$

Soient $f_{m,n}(m<p)$ une suite de fonctions de $\Omega'(C_m)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C_m)$ et $f_{p,n}$ une suite de fonctions de $\Omega(C_p)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C_p)$.

Nous avons vu précédemment qu'on pouvait former de pareilles suites.

Considérons la suite

$$f_{pn} = f_{1,n}, \qquad f_{pn+1} = f_{2,n}, \qquad \dots \qquad f_{p(n+1)-1} = f_{p,n}$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots, +\infty).$$

Nous allons montrer que cette suite est fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$. En effet, soit λ une fonction quelconque de $\Omega'(C)$ et supposons que l'on ait

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots, +\infty).$$

On a

$$\int_C \lambda(z) f_{pn+r-1}(z)\,dz$$
$$= \int_{C_1} \lambda(z) f_{r,n}(z)\,dz + \dots + \int_{C_r} \lambda(z) f_{r,n}(z)\,dz + \dots + \int_{C_p} \lambda(z) f_{r,n}(z)\,dz = 0$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots, +\infty;\ r = 1, 2, \dots, p).$$

Or le long de C_m, $\lambda(z)$ est égale à une fonction de $\Omega(C_m)$ ou de $\Omega'(C_m)$, suivant que $m<p$ ou que $m=p$.

La fonction $f_{r,n}$ est holomorphe dans les domaines fermés D_1, $D_2, \dots, D_{r-1}, D_{r+1}, \dots, D'_p$ et nulle à l'infini dans ce dernier $(r<p)$.

Par conséquent, en vertu du corollaire du paragraphe 15, les relations précédentes se réduisent aux relations

$$\int_{C_r} \lambda(z) f_{r,n}(z)\,dz = 0$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots, +\infty;\ r = 1, 2, \dots, p).$$

En vertu du choix des fonctions $f_{r,n}$, ces relations sont équivalentes aux relations

$$\int_{C_r} \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, p-1)$$

et à la relation

$$\int_{C_p} \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D'_p.$$

On a donc

$$\int_{C} \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D'$$

et, par conséquent,

$$\int_{C} |\lambda(z)|^2\,ds = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Cherchons maintenant une suite de fonctions f_n de $\Omega'(C)$ qui soit fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$.

La fonction f_n sera égale le long de C_m à une fonction $f_{m,n}$ de $\Omega(C_m)$ ou de $\Omega'(C_m)$ suivant que $m < p$ ou que $m = p$.

Cela étant, soient $f_{1,m,n}$ $(m < p)$ une suite de fonctions de $\Omega(C_m)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C_m)$ et $f_{1,p,n}$ une suite de fonctions de $\Omega'(C_p)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C_p)$.

Considérons la suite f_n définie par les équations suivantes :

$$\begin{array}{llll}
f_{1,pn} = f_{1,1,n}, & f_{2,pn} = 0, & \ldots, & f_{p,pn} = 0; \\
f_{1,pn+1} = 0, & f_{2,pn+1} = f_{1,2,n}, & \ldots, & f_{p,pn+1} = 0; \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots; \\
f_{1,p(n+1)-1} = 0, & f_{2,p(n+1)-1} = 0, & \ldots, & f_{p,p(n+1)-1} = f_{1,p,n}
\end{array}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Nous allons montrer que cette suite est fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$.

Soit λ une fonction quelconque de $\Omega(C)$ et supposons que l'on ait

$$\int_{C} \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

On a

$$\int_{C} \lambda(z) f_{pn+r-1}(z)\,dz = \int_{C_r} \lambda(z) f_{1,r,n}(z)\,dz = 0$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty;\ r = 1, 2, \ldots, p).$$

En vertu du choix des fonctions $f_{1,r,n}$, ces relations entraînent les relations

$$\int_{C_r} \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D'_r.$$
$$(r = 1, 2, \ldots, p-1)$$

et la relation

$$\int_{C_p} \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D_p.$$

On a donc

$$\int_{C} \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D$$

et, par conséquent,

$$\int_C |\lambda(z)|^2\,ds = 0.$$

Domaine de plusieurs tenants multiplement connexes. — Considérons un domaine D de q tenants $T_1, T_2, \ldots, T_q$ ayant respectivement pour contour $C_1, C_2, \ldots, C_q$.

Cherchons une suite de fonctions f_n de $\Omega(C)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$.

La fonction f_n sera égale, dans chaque domaine fermé T_r, à une fonction $f_{r,n}$ de $\Omega(C_r)$.

Soient les suites de fonctions $f_{m,n}(m = 1, 2, \ldots, q)$ de $\Omega(C_m)$ fermées respectivement par rapport aux fonctions de $\Omega'(C_m)$.

Cela étant, considérons la suite f_n définie par les équations suivantes :

$$\begin{array}{llll}
f_{1,qn} = f_{1,n}, & f_{2,qn} = 0, & \ldots, & f_{q,qn} = 0, \\
f_{1,qn+1} = 0, & f_{2,qn+1} = f_{2,n}, & \ldots, & f_{q,qn+1} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
f_{1,q(n+1)-1} = 0, & f_{2,q(n+1)-1} = 0, & \ldots, & f_{q,q(n+1)-1} = f_{q,n}
\end{array}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Nous allons montrer que cette suite est fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$.

En effet, soit λ une fonction quelconque de $\Omega'(C)$ et supposons que l'on ait

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

On a

$$\int_C \lambda(z) f_{qn+r-1}(z)\,dz = \int_C \lambda(z) f_{r,n}(z)\,dz = 0$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty;\ r = 1, 2, \ldots, q).$$

En vertu du choix des fonctions $f_{r,n}$, ces relations entraînent les relations

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D'_r.$$

Par conséquent, pour x dans D′, on a

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0$$

et, par suite,

$$\int_C |\lambda(z)|^2\,ds = 0.$$

ce qui démontre la proposition.

La détermination d'une suite de fonctions f_n de $\Omega'(C)$, fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$, se fait exactement de la même manière.

Remarquons que les suites précédemment définies sont telles qu'un nombre fini quelconque de fonctions appartenant à l'une de ces suites sont linéairement indépendantes, pourvu que x varie dans toute la région d'holomorphisme de la suite considérée.

Remarque. — Il est essentiel de remarquer pour ce qui va suivre, que la suite de fonctions f_n de $\Omega(C)$, fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$, précédemment définie, est telle qu'étant donnée une fonction quelconque $\lambda(z)$ de carré sommable le long de C, les relations

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

entraînent la relation

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0$$

pour x dans D′.

De même, la suite de fonctions f_n de $\Omega'(C)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$ précédemment définie, est telle que les relations

$$\int_C \lambda(z) f_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

entraînent la relation

$$\int_C \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = 0$$

pour x dans D.

33. Systèmes orthogonaux fondamentaux. — En prenant pour suites fermées relatives à un domaine d'un seul tenant les suites $(z-a)^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ et $\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$ $(n=0, 1, 2, \ldots, +\infty)$, nous avons vu que l'on pouvait obtenir des suites fermées relatives à des domaines de plusieurs tenants multiplement connexes.

Soit f_n la suite de fonctions de $\Omega(C)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$, précédemment définies.

Appelons $\pi_n(z)$ le système orthogonal et normal fermé par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$ qu'on obtient par orthogonalisation de la suite f_n, à l'aide des équations

$$\begin{aligned}
f_0(z) &= \pi_0(z)(\overline{f_0\pi_0}),\\
f_1(z) &= \pi_0(z)(f_1\pi_0) + \pi_1(z)(f_1\pi_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_n(z) &= \pi_0(z)(f_n\overline{\pi_0}) + \ldots\ldots\ldots + \pi_n(z)(f_n\overline{\pi_n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
(f_0 f_0) &= |(f_0\pi_0)|^2,\\
(f_1 f_1) &= |(f_1\pi_0)|^2 + |(f_1\pi_1)|^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(f_n f_n) &= |(f_n\pi_0)|^2 - \ldots\ldots - |(f_n\overline{\pi_n})|^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La forme des fonctions $\pi_n(z)$ est particulièrement simple. En effet, c'est une combinaison linéaire des fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

Dans chaque tenant de D, supposé multiplement connexe, la fonction $\pi_n(z)$ sera donc égale à la somme de plusieurs polynomes en $\frac{1}{z-a_i}$ et d'un polynome en $z-a_i$ (1).

(1) Au moment de mettre sous presse, nous avons pris connaissance d'un Mémoire de M. G. Szegö « Über orthogonalen Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen gehören » (*Mathematische Zeitschrift*, t. 9, 1921, p. 218) concernant les polynomes auxquels se réduisent les fonctions $\pi_n(x)$, quand D est d'un seul tenant simplement connexe et certains résultats qui s'en rattachent.

Nous appellerons la suite $\pi_n(z)$ le système fondamental orthogonal et normal relatif aux fonctions de $\Omega(C)$ par rapport aux points a_i.

Soit f_n la suite de fonctions de $\Omega'(C)$ fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$, précédemment définies.

Appelons $\rho_n(z)$ le système orthogonal et normal fermé par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$ qu'on obtient par orthogonalisation de la suite f_n, à l'aide des équations

$$
\begin{aligned}
&f_0(z) = \rho_0(z)(f_0\bar{\rho}_0),\\
&f_1(z) = \rho_0(z)(f_1\bar{\rho}_0) + \rho_1(z)(f_1\bar{\rho}_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&f_n(z) = \rho_0(z)(f_n\bar{\rho}_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \rho_n(z)(f_n\bar{\rho}_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
&(f_0\bar{f}_0) = |(f_0\bar{\rho}_0)|^2,\\
&(f_1\bar{f}_1) = |(f_1\bar{\rho}_0)|^2 + |(f_1\bar{\rho}_1)|^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&(f_n\bar{f}_n) = |(f_n\bar{\rho}_0)|^2 + \ldots\ldots\ldots + |(f_n\bar{\rho}_n)|^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Dans chaque tenant de D′, supposé multiplement connexe, la fonction $\rho_n(z)$ sera égale à la somme de plusieurs polynomes en $\frac{1}{z-a_i}$ ou à la somme de plusieurs polynomes en $\frac{1}{z-a_i}$, et d'un polynome en $z - a_i$ suivant que le tenant considéré contient ou non l'infini.

Nous appellerons la suite $\rho_n(z)$ le système fondamental orthogonal et normal relatif aux fonctions de $\Omega'(C)$ par rapport aux points a_i.

34. Théorème général. — *Toute fonction $F(z)$ de carré sommable le long d'un contour rectifiable fermé C est égale le long de ce contour à la somme d'une fonction $f_0(z)$ de $\Omega(C)$ et d'une fonction $f_1(z)$ de $\Omega'(C)$, uniques à un ensemble de points de C de mesure nulle près*

$$F(z) = f_0(z) + f_1(z).$$

Soit $\pi_n(z)$ le système fondamental relatif aux fonctions de $\Omega(C)$. Posons

$$F_{0,n} = \int_C F(z)\,\overline{\pi_n(z)}\,ds \qquad (ds = |dz|).$$

La suite $F_{0,n}$ fait partie de ω et par conséquent la fonction

$$f_0(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} F_{0,n} \pi_n(z)$$

appartient à l'ensemble $\Omega(C)$.

Considérons la différence

$$f_1(z) = F(z) - f_0(z).$$

C'est une fonction de carré sommable le long de C. De plus, elle vérifie les relations

$$\int_C f_1(z) \overline{\pi_n(z)}\, ds = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

ou encore

$$\int_C \overline{f_1(z)} \chi'(z) \pi_n(z)\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

avec

$$ds = \chi'(z)\, dz.$$

Soit α_n la suite de fonctions de $\Omega(C)$ qui a donné naissance par orthogonalisation au système $\pi_n(z)$.

La suite α_n étant une combinaison linéaire des fonctions π_n, on aura aussi

$$\int_C \overline{f_1(z)} \chi'(z) \alpha_n(z)\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Or, en vertu de la remarque du paragraphe 32, il résulte que ces relations entraînent la relation

$$\int_C \frac{\overline{f_1(z)} \chi'(z)}{z - x}\, dz = 0$$

pour x dans D'.

Il s'ensuit que la fonction

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f_1(z)} \chi'(z)}{z - x}\, dz \qquad \text{pour } x \text{ dans D}$$

et

$$g(z) = \overline{f_1(z)} \chi'(z) \qquad \text{pour } z \text{ le long de C}$$

est une fonction de $\Omega(C)$.

Le système $\rho_n(z)$ étant fermé par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$, nous avons vu que toute fonction de $\Omega(C)$ est développable le long de C en série convergeant en moyenne de fonctions $\overline{\rho_n(z)}\chi'(z)$. Par conséquent,

$$g(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \overline{\rho_n(z)}\chi'(z)$$

avec

$$g_n = \int_C \overline{f_1(z)}\chi'(z)\rho_n(z)\,dz.$$

On a donc

$$f_1(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{g_n}\rho_n(z)$$

et, par suite, la fonction f_1 est une fonction de $\Omega'(C)$.

Il nous reste à démontrer que les fonctions f_0 et f_1 sont uniques à un ensemble de points de C de mesure nulle près.

En effet, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-x}dz = \begin{cases} F_0(x) & \text{pour } x \text{ dans D,} \\ F_1(x) & \text{pour } x \text{ dans D}'. \end{cases}$$

Or, on a aussi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-x}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_0(z)+f_1(z)}{z-x}dz = \begin{cases} f_0(x) & \text{pour } x \text{ dans D,} \\ -f_1(x) & \text{pour } x \text{ dans D}'. \end{cases}$$

Par conséquent, pour x dans D,

$$f_0(x) \equiv F_0(x),$$

et pour x dans D',

$$f_1(x) \equiv -F_1(x),$$

et, par suite, le théorème est démontré.

Remarque. — On aurait pu commencer par considérer la différence

$$F(z) - \sum_{n=0}^{+\infty} F_{1,n}\rho_n(z),$$

où

$$F_{1,n} = \int_C F(z)\overline{\rho_n(z)}\chi'(z)\,dz.$$

On voit donc que

$$f_1(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} F_{1n} \rho_n(z).$$

35. Corollaire. — Du théorème précédent il résulte la proposition très importante suivante :

Toute fonction de $\Omega(C)$ est développable le long de C en série convergente en moyenne de fonctions fondamentales $\pi_n(z)$ relatives aux fonctions de $\Omega(C)$.

Toute fonction de $\Omega'(C)$ est développable le long de C en série convergente en moyenne de fonctions fondamentales $\rho_n(z)$ relatives aux fonctions de $\Omega'(C)$.

Considérons une fonction f de $\Omega(C)$. Cette fonction étant de carré sommable le long de C, on a, en vertu du théorème précédent,

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z)$$

avec

$$f_0(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_{0,n} \pi_n(z)$$

et

$$f_1(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_{1,n} \rho_n(z).$$

Or, à cause de la relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 0 \qquad \text{pour } x \text{ dans } D',$$

il résulte que $f_1(x) \equiv 0$, et par suite le long de C, $f_1(z)$ est nulle presque partout.

On a donc

$$\int_C |f_1(z)|^2\,ds = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_{1,n}|^2 = 0$$

et, par suite,

$$f_{1n} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Par conséquent,

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \pi_n(z).$$

La fonction f étant quelconque, il résulte que le système $\pi_n(z)$ est complet aussi par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$.

La seconde partie du corollaire se démontrerait exactement de la même manière.

On verrait que le système $\rho_n(z)$ est complet aussi par rapport aux fonctions de $\Omega'(C)$; c'est là un fait général que nous allons démontrer dans la suite.

36. Produit de deux fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$:

Théorème. — *Le produit de deux fonctions de* $\Omega(C)$ *ou toutes les deux de* $\Omega'(C)$ *est une fonction respectivement de* $\Sigma(C)$ *ou de* $\Sigma'(C)$.

En effet, soient f et g deux fonctions de $\Omega(C)$. On a

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \pi_n(z)$$

et, par suite,

$$f(z)g(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \pi_n(z) g(z).$$

En vertu du théorème du paragraphe 26, il résulte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\pi_n(z)g(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} \pi_n(x)g(x) & \text{pour } x \text{ dans D}, \\ 0 & \text{pour } x \text{ dans D}' \end{cases}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)g(z)}{z-x}\,dz = \begin{cases} f(x)g(x) & \text{pour } x \text{ dans D}, \\ 0 & \text{pour } x \text{ dans D}', \end{cases}$$

ce qui démontre la proposition.

Le cas où f et g sont de $\Omega'(C)$ se démontre exactement de la même manière.

Corollaire. — *Étant données deux fonctions f et g de* $\Omega(C)$ *ou toutes les deux de* $\Omega'(C)$, *on a*

$$\int f(z)g(z)\,dz = 0,$$

Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions f et g soient de $\Omega(C)$.

En se reportant à la démonstration précédente, cette proposition résulte du fait que l'on a

$$\int_C \pi_n(z) g(z)\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Le cas où f et g sont de $\Omega'(C)$ se démontre exactement de la même manière.

De ce corollaire il résulte encore le théorème suivant :

Théorème. — *Étant données une fonction* $F(z)$ *de carré sommable le long de* C *et deux fonctions quelconques* $g_0(z)$ *et* $g_1(z)$, *respectivement de* $\Omega(C)$ *et de* $\Omega'(C)$, *on a*

$$\int_C F(z) g_0(z)\, dz = \int_C f_1(z) g_0(z)\, dz$$

et

$$\int_C F(z) g_1(z)\, dz = \int_C f_0(z) g_1(z)\, dz,$$

où $f_0(z)$ *et* $f_1(z)$ *sont les fonctions, respectivement de* $\Omega(C)$ *et de* $\Omega'(C)$, *telles que le long de* C

$$F(z) = f_0(z) + f_1(z).$$

Ce théorème résulte du fait que

$$\int_C f_0(z) g_0(z)\, dz = 0$$

et que

$$\int_C f_1(z) g_1(z)\, dz = 0.$$

37. Théorème. — *Étant donnée une fonction* $f(z)$ *de* $\Omega(C)$ *ou de* $\Omega'(C)$, *la fonction* $\overline{f(z)}\, \chi'(z)$ $\left[\chi'(z) = \dfrac{ds}{dz}\right]$ *est égale, le long de* C, *à une fonction respectivement de* $\Omega'(C)$ *ou de* $\Omega(C)$.

Supposons, soit pour fixer les idées, que la fonction $f(z)$ de $\Omega(C)$, Le long de C, on a

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^* \overline{\varphi_n(z)} \chi'(z)$$

avec

$$f_n^* = \int_C f(z) \varphi_n(z)\, dz.$$

Par conséquent

$$\overline{f(z)} \chi'(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{f_n^*} \varphi_n(z),$$

ce qui démontre le théorème.

Le cas où f est de $\Omega'(C)$ se démontre exactement de la même manière.

Remarque. — De ce théorème il résulte qu'étant donné un système de fonctions $\varphi_n(z)$ de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ orthogonal et normal le long de C, le système de fonctions $\psi_n(z)$ égales pour x dans H' à

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\varphi_n(z)} \chi'(z)}{z - x}\, dz$$

et le long de C à

$$\psi_n(z) = \overline{\varphi_n(z)} \chi'(z)$$

forme un système orthogonal et normal le long de C de fonctions respectivement de $\Omega'(C)$ ou de $\Omega(C)$.

En effet, on a

$$\int_C \psi_n(z) \overline{\psi_m(z)} \chi'(z)\, dz = \int_C \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} \chi'(z)\, dz.$$

De plus, à cause de la relation

$$\int_C \varphi_n(z) \overline{\psi_m(z)} \chi'(z)\, dz = \int_C \varphi_n(z) \varphi_m(z)\, dz = 0,$$

il résulte que le système $\varphi_n(z)$, auquel on ajoute le système $\psi_n(z)$, forme encore un système orthogonal et normal le long de C.

Si le système $\varphi_n(z)$ est complet par rapport aux fonctions de l'ensemble dont il fait partie, le système $\psi_n(z)$ est aussi complet par rapport aux fonctions de l'ensemble dont il fait partie.

Dans ce cas, on vérifie facilement que le système $\varphi_n(z)$, auquel on ajoute le système $\psi_n(z)$, forme un système orthogonal et normal fermé par rapport aux fonctions de carré sommable le long de C.

II. — Fermeture d'un système orthogonal et normal.

38. Condition nécessaire et suffisante de fermeture :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'un système $\varphi_n(z)$ orthogonal et normal le long de C de fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ soit complet, est que l'on ait*

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z) \int_C \frac{\overline{\varphi_n(z)}\chi'(z)}{z-x}\, dz,$$

la série du second membre devant converger uniformément pour z dans le domaine d'holomorphisme du système et pour x dans le domaine complémentaire à celui-ci par rapport au plan, le contour C étant exclu.

Les intégrales $\int_C \frac{\overline{\varphi_n(z)}\chi'(z)}{z-x}\, dz$ sont prises le long de C, dans le même sens que celles des relations d'orthogonalité de ce système. Supposons, par exemple, que le système $\varphi_n(z)$ soit de $\Omega(C)$. Alors la fonction $\psi_n(x)$, telle que pour x dans D', on ait

$$\psi_n(x) = \int_C \frac{\overline{\varphi_n(z)}\chi'(z)}{z-x}\, dz$$

sera de $\Omega'(C)$. On voit de plus que dans cette condition $\psi_n(x)$ est le coefficient de Fourier de la fonction $\frac{1}{z-x}$ et par conséquent la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2$$

converge uniformément dans le domaine ouvert D' (1).

Il résulte que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\psi_n(x)$$

(1) Remarquons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2$ converge aussi uniformément dans le domaine ouvert D et cela pour une raison semblable.

converge en moyenne par rapport à z le long de C (pourvu que x soit dans D′) vers une fonction de $\Omega(C)$ par rapport à z.

Par conséquent, dans cette condition, la différence

$$\frac{1}{z-x}-\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(z)\psi_n(x)$$

est une fonction de $\Omega(C)$ par rapport à z. La condition du théorème étant supposée vérifiée, cette différence sera identiquement nulle, pour z dans D. Il s'ensuit donc quelle est presque partout nulle le long de C, pourvu que x soit dans D′ et, par conséquent, on a

$$\frac{1}{z-x}\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(z)\psi_n(x). \tag{1}$$

Cette condition est évidemment nécessaire. En effet, si le système $\varphi_n(z)$ est complet, la fonction $\frac{1}{z-x}$ qui est de $\Omega(C)$, pour x dans D′, est développable en série de fonctions $\varphi_n(z)$ convergeant en moyenne le long de C.

Cette condition est suffisante. En effet, supposons pour un instant que l'on puisse trouver une fonction $\lambda(z)$ de $\Omega(C)$ étrangère au système donné, telle que l'on ait simultanément

$$\int_C \lambda(z)\overline{\varphi_n(z)}\chi'(z)\,dz=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ +\infty) \tag{2}$$

avec

$$\int_C \lambda(z)\overline{\lambda(z)}\chi'(z)\,dz=1 \qquad [ds=\chi'(z)\,dz]. \tag{3}$$

En multipliant les deux membres de l'équivalence (1) par $\overline{\lambda(z)}\chi'(z)$ et en intégrant le long de C, il vient, x étant dans D′,

$$\int_C\frac{\overline{\lambda(z)}\chi'(z)\,dz}{z-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\psi_n(x)\int_C\overline{\lambda(z)}\varphi_n(z)\chi'(z)\,dz=0.$$

Soit $\mu(x)$ la fonction de $\Omega'(C)$, telle que pour x dans D′ on ait

$$\mu(x)=\int_C\frac{\overline{\lambda(z)}\chi'(z)\,dz}{z-x}.$$

Cette fonction étant nulle identiquement dans D′, elle sera nulle presque partout le long de C.

En vertu du théorème du paragraphe 36, il vient donc

$$\int_{C} \lambda(x)\mu(x)\,dx = 2\pi i \int_{C} \lambda(z)\overline{\lambda(z)}\chi'(z)\,dz = 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'égalité (3).

Il résulte donc que le système est complet.

On démontrerait ce théorème exactement de la même manière pour un système $\varphi_n(z)$ de $\Omega'(C)$.

39. Autre condition nécessaire et suffisante de fermeture. — Nous allons montrer qu'un système $\varphi_n(z)$ de fonctions de $\Omega(C)$ orthogonal et normal fermé est aussi complet dans l'autre sens par rapport à l'ensemble des fonctions de $\Omega'(C)$, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune fonction $\lambda(z)$ de $\Omega'(C)$, telle que l'on ait simultanément

$$\int_{C} \lambda(z)\varphi_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty) \tag{4}$$

avec

$$\int_{C} \lambda(z)\overline{\lambda(z)}\chi'(z)\,dz = 1. \tag{5}$$

En effet, supposons pour un instant qu'il existe une fonction $\lambda(z)$ vérifiant ces conditions. De la relation

$$\frac{1}{z-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)\psi_n(x)$$

on déduit

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\lambda(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \lambda(z)\varphi_n(z)\,dz = 0.$$

La fonction $\lambda(z)$ étant de $\Omega'(C)$, elle sera nulle presque partout le long de C et l'on a

$$\int_{C} \lambda(z)\overline{\lambda(z)}\chi'(z)\,dz = 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Réciproquement, supposons qu'il n'existe aucune fonction $\lambda(z)$

de $\Omega'(C)$, telle que les relations (4) et (5) aient lieu simultanément. Nous allons démontrer que, dans ces conditions, le système $\varphi_n(z)$ est fermé par rapport aux fonctions de $\Omega(C)$.

En effet, supposons qu'il existe une fonction $\mu(z)$ de $\Omega(C)$, telle que l'on ait

$$(4') \qquad \int_C \mu(z)\overline{\varphi_n(z)}\chi'(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

avec

$$(5') \qquad \int_C \mu(z)\overline{\mu(z)}\chi'(z)\,dz = 1.$$

En appelant $\nu(z)$ la fonction de $\Omega'(C)$, telle que l'on ait, pour x dans D',

$$\nu(x) = \int_C \frac{\overline{\mu(z)}\chi'(z)}{z - x}\,dz,$$

il vient

$$\int_C \nu(x)\varphi_n(x)\,dx = 2\pi i\int_C \overline{\mu(z)}\varphi_n(z)\chi'(z)\,dz = 0.$$

En vertu de notre hypothèse, il faut donc que

$$\int_C \nu(z)\overline{\nu(z)}\chi'(z)\,dz = 0$$

et, par conséquent,

$$2\pi i\int_C \mu(z)\overline{\mu(z)}\chi'(z)\,dz = \int_C \mu(x)\nu(x)\,dx = 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'égalité (5'). Il résulte donc que le système $\varphi_n(z)$ est fermé.

On démontrerait exactement de la même manière qu'un système $\varphi_n(z)$ de $\Omega'(C)$ fermé est aussi complet dans un sens semblable par rapport à l'ensemble des fonctions de $\Omega(C)$ et inversement.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système $\varphi_n(z)$ orthogonal et normal de fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$ soit complet est qu'il n'existe aucune fonction $\lambda(z)$, respectivement de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$, *telle que l'on ait simultanément*

$$\int_C \lambda(z)\varphi_n(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

avec

$$\int_C \lambda(z)\overline{\lambda(z)}\chi'(z)\,dz = 1.$$

Remarque. — Soit $\varphi_n(z)$ un système orthogonal et normal complet de fonctions de $\Omega(C)$ ou de $\Omega'(C)$. On a

$$\int_C \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\chi'(z)\,dz = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\psi_n(x)$$

la série convergeant uniformément et absolument pour z dans la région d'holomorphisme du système donné et pour x dans la région d'holomorphisme du système $\psi_n(x)$.

Faisons la transformation $z = \frac{\alpha^2}{\zeta}$ et $x = \frac{\alpha^2}{\xi}$ en supposant que l'origine soit située dans D. Au contour C correspondra un contour Γ et au sens de parcours le long de C correspondra le long de Γ le sens contraire. En choisissant le long de Γ le même sens de parcours que le long de C, on aura

$$\frac{ds}{d\sigma} = \left|\frac{\alpha}{\zeta}\right|^2$$

et par suite, puisque $ds = \chi'(z)\,dz$, il vient

$$\int_\Gamma \frac{\sigma}{\zeta}\varphi_n\left(\frac{\alpha^2}{\zeta}\right)\overline{\frac{\sigma}{\zeta}\varphi_m\left(\frac{\alpha^2}{\zeta}\right)}\,d\sigma = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

et

$$\frac{\alpha}{\xi}\psi_n\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) = -\int_\Gamma \frac{\overline{\frac{\alpha}{\zeta}\varphi_n\left(\frac{\alpha^2}{\zeta}\right)}}{\zeta-\xi}\,d\sigma.$$

Posons

$$\frac{\alpha}{\xi}\varpi_n\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) = -\frac{\sigma}{\xi}\psi_n\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right)$$

et remarquons que cette fonction est précisément le coefficient de Fourier de la fonction $\frac{1}{\zeta-\xi}$, relatif à la fonction $\frac{\sigma}{\xi}\varphi_n\left(\frac{\sigma^2}{\xi}\right)$.

D'autre part, on a

$$\frac{1}{\zeta - \xi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{\zeta} \varphi_n\left(\frac{\alpha^2}{\zeta}\right) \frac{\alpha}{\xi} \varpi_n\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right),$$

série qui est évidemment uniformément convergente pour ζ et ξ respectivement dans les régions transformées des précédentes.

Par conséquent, le système $\frac{\alpha}{\zeta} \varphi_n\left(\frac{\alpha^2}{\zeta}\right)$, qui est orthogonal et normal, sera aussi complet.

Nous pourrons donc dire que *la transformation* $\zeta = \frac{\alpha^2}{z}$, *l'origine étant située dans* D, *n'influe pas sur la fermeture d'un système orthogonal et normal.*

40. Fermeture d'un système orthogonal et normal. — Soit $\varphi_n(z)$ un système orthogonal et normal de fonctions de $\Omega(C)$ non fermé. On a

$$\int_C \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)}\, ds = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases}$$

l'intégrale étant prise le long de C, dans le sens positif relativement à D.

Soit $\psi_n(x)$ la suite de fonctions de $\Omega'(C)$, telles que pour x dans D' on ait

$$\psi_n(x) = \int_C \frac{\overline{\varphi_n(z)}}{z - x}\, ds,$$

l'intégrale étant prise dans le même sens que celles de plus haut.

La suite $\psi_n(x)$ étant les coefficients de Fourier de la fonction $\frac{1}{z - x}$ (x étant dans D'), la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2$$

converge uniformément dans le domaine D' et par conséquent la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z) \psi_n(x)$$

converge en moyenne le long de C par rapport à z et uniformément pour z dans D. Donc pour z dans D, c'est une fonction holomorphe par rapport à x dans le domaine D'.

Pour fermer le système $\varphi_n(z)$ *il faut et il suffit*, évidemment, *pouvoir développer la différence*

$$\delta(z, x) = \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi_n(x)$$

en un système de fonctions de $\Omega(C)$ *par rapport à* z, *orthogonal et normal, formant avec le système donné un nouveau système orthogonal et normal.*

En effet, alors en vertu de notre théorème du paragraphe 38, ce nouveau système sera complet.

Domaine d'un seul tenant simplement connexe. — Supposons que le domaine D soit d'un seul tenant et limité par une courbe rectifiable fermée simple C. Supposons aussi, ce qui ne restreint pas la généralité, que l'origine O soit située dans D.

Cela étant, considérons la fonction

$$\delta_0(z, \xi) = \frac{1}{\xi}\,\delta\left(z, \frac{1}{\xi}\right) \sim \frac{1}{z\xi - 1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi_{0,n}(\xi),$$

où l'on a posé

$$\psi_{0,n}(\xi) = \frac{1}{\xi}\,\psi_n\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Soient Γ la courbe d'équation $\xi = \frac{1}{x}$, x se déplaçant le long de C, et Δ et Δ' les domaines intérieur et extérieur qu'elle définit dans le plan des ξ. La fonction $\delta_0(z, \xi)$, pour z dans D, est holomorphe par rapport à ξ dans le domaine Δ et est de $\Omega(C)$ par rapport à z, pour ξ dans Δ.

Supposons que $\delta_0(z, 0)$ n'est pas identiquement nulle dans D, c'est-à-dire que

$$(\delta_0)^2 = \int_C \delta_0(z, 0)\,\overline{\delta_0(z, 0)}\,ds \neq 0.$$

On a

$$\int_C \delta_0(z, 0)\,\overline{\varphi_n(z)}\,ds = -\int_C \overline{\varphi_n(z)}\,ds - \psi_{0,n}(0).$$

Or

$$\psi_{0,n}(0) = \lim_{n=\infty} \int_C \frac{x\,\overline{\varphi_n(z)}\,ds}{z - x} = -\int_C \overline{\varphi_n(z)}\,ds.$$

Par conséquent, on a

$$\int_C \partial_0(z, o)\,\overline{\varphi_n(z)}\,ds = o \qquad (n = o, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Il resulte que la fonction

$$\frac{\partial_0(z, o)}{\partial_0},$$

ajoutée au système $\varphi_n(z)$, forme avec celui-ci un nouveau système orthogonal et normal. Soit $\eta_0(\xi)$ la fonction de $\Omega(\Gamma)$, telle que pour ξ dans Δ on ait

$$\eta_0(\xi) = \int_C \frac{\overline{\partial_0(z, o)}}{\partial_0} \frac{ds}{z\xi - 1}$$

et considerons la différence

$$\partial_1(z, \xi) \sim \frac{1}{z\xi - 1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi_{0,n}(\xi) \ . \ \frac{\partial_0(z, o)}{\partial_0}\,\eta_0(\xi).$$

Nous allons montrer que pour z dans D et pour $\xi = o$, elle est identiquement nulle.

En effet, dans ces conditions, on a

$$\partial_1(z, o) = \partial_0(z, o)\left[1 - \frac{\eta_0(o)}{\partial_0}\right],$$

et puisque

$$\eta_0(o) = + \frac{1}{\partial_0}\left[\int_C ds - \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\psi_{0,n}(o)} \int_C \overline{\varphi_n(z)}\,ds\right] = + \partial_0,$$

il vient

$$\partial_1(z, o) \equiv o$$

Nous allons voir que si la fonction $\dfrac{\partial \partial_1(z, o)}{\partial \xi}$, qui est de $\Omega(C)$, n'est pas identiquement nulle dans D, on peut encore appliquer la methode precédente.

En effet, pour z dans D, on a

$$\frac{\partial\,\partial_1(z, o)}{\partial \xi} = -z - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi'_{0,n}(o) \quad \frac{\partial_0(z, o)}{\partial_0}\,\eta_0(o).$$

série qui, d'après notre théorème du paragraphe 25, est uniformément convergente.

De plus, $\psi'_{0,n}(0)$ $(n=0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ et $\eta'_{10}(0)$ étant les coefficients de Fourier de la fonction $-z$ par rapport au système

$$\varphi_0(z), \quad \ldots \quad \varphi_n(z), \quad \ldots \quad \frac{\delta_0(z, 0)}{\delta_0},$$

la serie précédente converge en moyenne le long de Γ et par conséquent $\dfrac{\partial \delta_1(z, 0)}{\partial \xi}$ est bien de $\Omega(C)$.

Posons

$$(\delta'_1)^2 = \int_C \frac{\partial \delta_1(z, 0)}{\partial \xi} \overline{\frac{\partial \delta_1(z, 0)}{\partial \xi}} \, ds$$

et soit $\eta_1(\xi)$ la fonction de $\Omega(\Gamma)$, telle que l'on ait pour ξ dans Δ

$$\eta_1(\xi) = \int_C \frac{1}{\delta'_1} \overline{\frac{\partial \delta_1(z, 0)}{\partial \xi}} \frac{ds}{z\xi - 1}.$$

On a

$$\int_C \frac{\partial \delta_1(z, 0)}{\partial \xi} \overline{\varphi_n(z)} \, ds = -\int_C z \overline{\varphi_n(z)} \, ds - \psi'_{0,n}(0) = 0,$$

ainsi que

$$\int_C \frac{\partial \delta_1(z, 0)}{\partial \xi} \overline{\frac{\delta_0(z, 0)}{\delta_0}} \, ds = -\int_C z \overline{\frac{\delta_0(z, 0)}{\delta_0}} \, ds - \eta'_0(0) = 0.$$

Par conséquent, la fonction $\dfrac{1}{\delta'_1} \dfrac{\partial \delta_1(z_1, 0)}{\partial \xi}$ ajoutée au système

$$\varphi_0(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z), \quad \ldots \quad \frac{\delta_0(z, 0)}{\delta_0}$$

forme avec celui-ci, un nouveau système orthogonal et normal.

Nous avons supposé que $\delta_0 \neq 0$; si $\delta_0 = 0$ on prendrait au lieu de $\delta_0(z, 0)$ la fonction $\dfrac{\partial^k \delta_0(z, 0)}{\partial \xi^k}$, où k est le plus petit entier, tel que cette fonction ne soit pas identiquement nulle dans D.

Remarquons qu'il existe au moins un nombre fini k, tel que la condition précédente soit verifiée. En effet, dans le cas contraire, $\delta_0(z, \xi)$ qui est une fonction holomorphe par rapport à ξ dans Δ, z étant dans D, serait nulle identiquement dans un cercle de centre O et de rayon suffisamment petit.

Il résulte qu'elle sera nulle identiquement dans toute sa région d'holomorphisme Δ et par conséquent le système $\varphi_n(z)$ serait complet, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons qu'on puisse faire i opérations successives semblables aux précédentes et qu'on ait obtenu de la sorte un nouveau système orthogonal et normal. Appelons $\varphi_{i,n}(z)$ le système obtenu, y compris le système $\varphi_n(z)$.

Posons

$$\delta_i(z, \xi) = \frac{1}{z\xi - 1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i,n}(z)\, \psi_{i,0,n}(\xi)$$

et supposons aussi que l'on ait, pour z dans D,

$$\delta_i(z, 0) \equiv \frac{\partial\, \delta_i(z, 0)}{\partial \xi} \equiv \ldots \equiv \frac{\partial^{i+k-2}\, \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-2}} \equiv 0. \tag{6}$$

Nous allons démontrer qu'en posant

$$\delta_{i+1}(z, \xi) = \delta_i(z, \xi) - \frac{\partial^{i+k-1}\, \delta_i(z, 0)}{\delta_i^{i+k-1}\, \partial \xi^{i+k-1}}\, a_i(\xi) \tag{7}$$

avec

$$a_i(\xi) = \int_C \overline{\frac{\partial^{i+k-1}\, \delta_i(z, 0)}{\delta_i^{i+k-1}\, \partial \xi^{i+k-1}}}\, \frac{ds}{z\xi - 1}, \tag{8}$$

le nombre k étant le plus petit entier ou zéro, tel que

$$(\delta_i^{i+k-1})^2 = \int_C \frac{\partial^{i+k-1}\, \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-1}}\, \overline{\frac{\partial^{i+k-1}\, \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-1}}}\, ds \neq 0,$$

on a, pour z dans D,

$$\delta_{i+1}(z, 0) \equiv \frac{\partial\, \delta_{i+1}(z, 0)}{\partial \xi} \equiv \ldots \equiv \frac{\partial^{i+k-1}\, \delta_{i+1}(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-1}} \equiv 0$$

et la fonction

$$\frac{1}{\delta_i^{i+k-1}}\, \frac{\partial^{i+k-1}\, \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-1}},$$

ajoutée au système $\varphi_{i,n}(z)$, forme avec celui-ci un nouveau système orthogonal et normal.

En effet, on a

$$\frac{\partial^{i+k-1}\, \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-1}} = - z^{i+k-1}(i+k-1)! - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i,n}(z) \int_C z^{i+k-1}(i+k-1)!\, \overline{\varphi_{i,n}(z)}\, ds$$

et, par conséquent,

$$\int_C \frac{\partial^{i+k-1}\delta_i(z,0)}{\partial z^{i+k-1}}\,\overline{\varphi_{i,p}(z)}\,ds = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

La fonction $\dfrac{1}{\delta_i^{i+k-1}}\,\dfrac{\partial^{i+k-1}\delta_i(z,0)}{\partial z^{i+k-1}}$ forme donc bien avec le système $\varphi_{i,n}(z)$ un nouveau système orthogonal et normal.

En vertu de nos hypothèses (6), nous avons, pour z dans D, les identités suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
\delta_i(z,0) \equiv -1 \qquad -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_{i,n}(z)\int_C \overline{\varphi_{i,n}(z)}\,ds \equiv 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial^p\delta_i(z,0)}{\partial z^p} \equiv -z^p p! \qquad -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_{i,n}(z)\int_C z^p p!\,\overline{\varphi_{i,n}(z)}\,ds \equiv 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial^{i+k-2}\delta_i(z,0)}{\partial z^{i+k-2}} \equiv -z^{i+k-2}(i+k-2)! - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_{i,n}(z)\int_C z^{i+k-2}(i-k+2)!\,\overline{\varphi_{i,n}(z)}\,ds \equiv 0.
\end{array}\right.$$

Par conséquent, vu l'equation (7), on a aussi

$$\frac{\partial^p\delta_{i+1}(z,0)}{\partial z^p} = -\frac{1}{\delta_i^{i+k-1}}\,\frac{\partial^{i+k-1}\delta_i(z,0)}{\partial z^{i+k-1}}\,\frac{d^p\eta_i(0)}{dz^p} \qquad (p \leqq i+k-2)$$

et

$$\frac{\partial^{i+k-1}\delta_{i+1}(z,0)}{\partial z^{i+k-1}} = \frac{\partial^{i+k-1}\delta_i(z,0)}{\partial z^{i+k-1}}\left[1 - \frac{1}{\delta_i^{i+k-1}}\,\frac{d^{i+k-1}\eta_i(0)}{dz^{i+k-1}}\right].$$

Pour achever notre théorème, il reste donc à démontrer que

$$\frac{d^p\eta_i(0)}{dz^p} = 0 \qquad \text{pour } 0 \leqq p \leqq i+k-2$$

et que

$$\delta_i^{i+k-1} = \frac{d^{i+k-1}\eta_i(0)}{dz^{i+k-1}}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\delta_i^{i+k-1}\,\frac{d^p\eta_i(0)}{dz^p} &= -\int_C z^p p!\,\overline{\frac{\partial^{i+k-1}\delta_i(z,0)}{\partial z^{i+k-1}}}\,ds \\
&= \int_C z^p p!\,\overline{z^{i+k-1}(i+k-1)!}\,ds - \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{\frac{d^{i+k-1}\psi_{i,1,n}(0)}{dz^{i+k-1}}}\int_C z^p p!\,\overline{\varphi_{i,n}(z)}\,ds
\end{aligned}$$

et, vu l'équation (9), il vient

$$\delta_i^{i+k-1} \frac{d^p \eta_i(0)}{d\xi^p} = \int_C \frac{\partial^p \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^p} \overline{z^{i+k-1}(i+k-1)!}\, ds \equiv 0.$$

Il nous reste à faire voir que

$$\delta_i^{i+k-1} \equiv \frac{d^{i+k-1} \eta_i(0)}{d\xi^{i+k-1}}.$$

Pour cela, calculons la fonction

$$\delta_i^{i+k-1} \frac{d^{i+k-1} \eta_i(0)}{d\xi^{i+k-1}}.$$

En différentiant les deux membres de l'équation (8) $i+k-1$ fois, il vient

$$\begin{aligned}
&\delta_i^{i+k-1} \frac{d^{i+k-1} \eta_i(0)}{d\xi^{i+k-1}} \\
&\quad = -\int z^{i+k-1}(i+k-1)!\, \overline{\frac{\partial^{i+k-1} \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-1}}}\, ds \\
&\quad = \int_C |z^{i+k-1}(i+k-1)!|^2\, ds - \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_C z^{i+k-1}(i+k-1)!\, \overline{\varphi_{i,n}(z)}\, ds \right|^2 \\
&\quad = (\delta_i^{i+k-1})^2 ;
\end{aligned}$$

par conséquent, notre théorème est démontré.

Nous avons vu au commencement de ce paragraphe que ce théorème est vrai pour $i = 1$; par conséquent, il est général.

Il se peut qu'après un nombre fini d'opérations on trouve une différence $\delta_i(z, \xi)$ identiquement nulle dans D, ξ étant dans Δ. Dans ces conditions le problème est résolu, puisque alors le système est complet.

Supposons qu'on puisse poursuivre ces opérations indéfiniment. Nous allons montrer que le système, qu'on obtient à la limite, est encore fermé. Pour cela, il suffit de démontrer que, pour z dans D et ξ dans Δ, on a

$$\lim_{i=\infty} \delta_i(z, \xi) = 0.$$

En effet, la $i^{\text{ème}}$ fonction, formant avec le système donné et les $i-1$ fonctions trouvées un nouveau système orthogonal et normal, n'est autre que la fonction

$$\frac{1}{\delta_i^{i+k-1}} \frac{\partial^{i+k-1} \delta_i(z, 0)}{\partial \xi^{i+k-1}}.$$

D'autre part, pour z dans D, on a, en vertu du théorème précédent,

$$\delta_{i+1}(z, o) \equiv \ldots \equiv \frac{\partial^{i+k-1}\,\delta_{i+1}(z, o)}{\partial\xi^{i+k-1}} \equiv o.$$

Par conséquent, la fonction $\delta_{i+1}(z, o)$ a toutes ses dérivées partielles par rapport à ξ, jusqu'à l'ordre $i - 1$ au moins, nulle identiquement pour $\xi = o$.

Cela ayant lieu quel que soit i, on a bien dans ces conditions

$$\lim_{i=\infty} \delta_i(z, \xi) = o.$$

On démontrerait que cette méthode s'applique aussi à un système de $\Omega'(C)$.

Du reste, d'après la remarque du paragraphe 39, en supposant que l'origine O soit dans D, il suffirait de faire la transformation $z = \frac{1}{\zeta}$ et $x = \frac{1}{\xi}$ qui ramènerait le système de $\Omega'(C)$ à un système de $\Omega(\Gamma)$. Puis, après avoir complété ce nouveau système, en faisant la transformation inverse, on obtient la solution cherchée.

Domaine à plusieurs tenants multiplement connexes. — Considérons un domaine d'un seul tenant à connexion d'ordre n. Supposons pour plus de simplicité que $n = 2$. Soient C_0 et C_1 les courbes fermées simples qui définissent ce domaine, la courbe C_1 contenant à son intérieur C_0. Soit aussi $\varphi_n(z)$ un système orthogonal et normal non fermé de fonctions de $\Omega(C)$ et considérons comme précédemment la différence

$$\delta_0(z, x) \sim \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi_n(x).$$

Soit a_0 un point du domaine D_0, qu'on peut supposer, pour simplifier les formules, être l'origine.

Pour x dans $D'(D_0 + D'_1)$ la fonction $\delta_0(z, x)$ est une fonction de $\Omega(C)$ par rapport à z, et pour z dans D une fonction holomorphe de x dans le domaine D'.

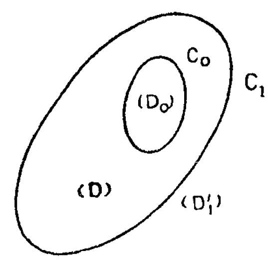
D'après la formule de Cauchy, on a

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C}} \frac{\psi_n(z)}{z - x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\underset{+}{C_0}} \frac{\psi_n(z)}{z - x}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C_1}} \frac{\psi_n(z)}{z - x}\,dz.$$

Appelons $\psi_{0,n}(x)$ la fonction de $\Omega(C_0)$, telle que l'on ait, pour x dans D_0,

$$\psi_{0,n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\psi_n(z)}{z-x}\,dz,$$

Fig. 1.



et $\frac{1}{x}\psi_{1,n}\left(\frac{1}{x}\right)$ la fonction $\Omega'(C_1)$, telle que l'on ait, pour x dans D'_1,

$$\frac{1}{x}\psi_{1,n}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\psi_n(z)}{z-x}\,dz.$$

Puisque, pour x dans D, on a

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\psi_n(z)}{z-x}\,dz = \int_{C_1} \frac{\psi_n(z)}{z-x}\,dz = 0,$$

il résulte que pour x dans D_0, on a

$$\psi_n(x) \equiv \psi_{0,n}(x),$$

et pour x dans D'_1

$$\psi_n(x) \equiv \frac{1}{x}\psi_{1,n}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Posons pour x dans D_0

$$\delta_{0,0}(z, x) = \delta_0(z, x)$$

et pour x dans D'_1

$$\frac{1}{x}\delta_{1,0}\left(z, \frac{1}{x}\right) = \delta_0(z, x).$$

En faisant le changement de variables $\xi = \frac{1}{x}$, la fonction $\delta_{1,0}(z, \xi)$ sera, pour z dans D, une fonction holomorphe de ξ dans le domaine Δ_1 de contour Γ_1. Remarquons aussi que le contour Γ_0, qui correspond à C_0, contiendra Γ_1 à son intérieur. On a

$$\delta_{1,0}(z,\xi) = \frac{1}{z\xi - 1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi_{1,n}(\xi).$$

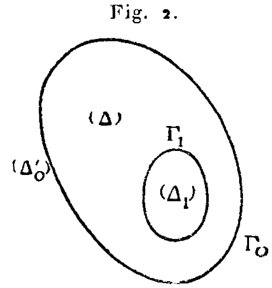
Supposons que

$$(\delta_{1,0})^2 = \int_C \delta_{1,0}(z,0)\,\overline{\delta_{1,0}(z,0)}\,ds \neq 0.$$

La fonction $\frac{\delta_{1,0}(z,0)}{\delta_{1,0}}$ qui est de $\Omega(C)$, ajoutée au système donné, formera avec celui-ci un nouveau système orthogonal et normal. Posons

$$\eta_0(x) = \int_C \frac{1}{\delta_{1,0}} \frac{\overline{\delta_{1,0}(z,0)}\,ds}{z-x}$$

Fig. 2.



et considérons la différence

$$\delta_1(z,x) = \frac{1}{z-x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi_n(x) - \frac{\delta_{1,0}(z,0)}{\delta_{1,0}}\,\eta_0(x).$$

On verrait, comme pour la fonction $\psi_n(x)$, que pour x dans D_0

$$\eta_0(x) = \eta_{0,0}(x)$$

et pour x dans D'_1

$$\eta_0(x) = \frac{1}{x}\,\eta_{1,0}\left(\frac{1}{x}\right),$$

la fonction $\eta_{0,0}(x)$ étant de $\Omega(C_0)$ et $\eta_{1,0}(\xi)$ de $\Omega(\Gamma_1)$. Par conséquent, pour ξ dans Δ_1 et z dans D, on peut écrire

$$\delta_{1,1}(z,\xi) = \frac{1}{z\xi - 1} - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)\,\psi_{1,n}(\xi) - \frac{\delta_{1,0}(z,0)}{\delta_{1,0}}\,\eta_{1,0}(\xi).$$

Le théorème précédent s'applique évidemment aussi, et par conséquent, après un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opérations successives de cette espèce, on arrive à une différence

$$\delta_{1,i}(z, \xi) = 0 \tag{10}$$

pour z dans D et ξ dans Δ.

Appelons $\varphi_{i,n}(z)$ le nouveau système orthogonal et normal, y compris le système $\varphi_n(z)$, auquel on arrive ainsi.

Considérons maintenant la différence

$$\delta_i(z, x) = \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i,n}(z)\,\psi_{i,n}(x).$$

On remarque que, pour x dans D'_1, on a

$$\delta_i(z, x) \equiv \frac{1}{x}\,\delta_{1,i}\left(z, \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Posons

$$\delta_{0,i,0}(z, x) = \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i,n}(z)\,\psi_{0,i,n}(x)$$

avec

$$\psi_{0,i,n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\underline{C_0}} \frac{\psi_{i,n}(z)\,dz}{z - x}.$$

Le théorème concernant la méthode d'obtention des fonctions orthogonales et normales relatives à un domaine simplement connexe s'applique aussi aux différences

$$\delta_{0,i,0}(z, x), \quad \delta_{0,i,1}(z, x), \quad \ldots\ldots \quad \delta_{0,i,j}(z, x).$$

Par conséquent, après un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opérations successives de même espèce, on arrive à une différence

$$\delta_{0,i,j}(z, x) = 0$$

pour z dans D et x dans D_0.

Appelons $\varphi_{j,n}(z)$ le nouveau système orthogonal et normal auquel on est ainsi arrivé, le système $\varphi_{i,n}(z)$ n'étant pas compris dans celui-ci.

Considérons la différence

$$\delta_{i,j}(z,x) = \frac{1}{z-x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i,n}(z)\psi_{i,n}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{j,n}(z)\psi_{j,n}(x).$$

Pour x dans D_0 et z dans D, on a, par conséquent,

$$\delta_{i,j}(z,x) \equiv \delta_{0,i,j}(z,x) \equiv 0.$$

Nous allons démontrer que l'on a aussi, pour x dans D'_1 et z dans D,

$$\delta_{i,j}(z,x) \equiv 0.$$

En effet, l'équation (10) peut s'écrire

$$\delta_{1,i}(z,\xi) \equiv \frac{1}{z\xi-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i,n}(z)\psi_{1,i,n}(\xi) \equiv 0. \tag{11}$$

D'autre part on a, pour x dans D'_1,

$$x\,\delta_{i,j}(z,x) \equiv \delta_{1,i,j}(z,\xi) = \frac{1}{z\xi-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i,n}(z)\psi_{1,i,n}(\xi) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{j,n}(z)\psi_{1,j,n}(\xi)$$

et par conséquent, à cause de l'équation (11), il vient

$$\delta_{1,i,j}(z,\xi) \equiv -\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{j,n}(z)\psi_{1,j,n}(\xi). \tag{12}$$

Supposons, pour un instant, que $\delta_{1,i,j}(z,\xi)$ ne soit pas identiquement nulle, pour z dans D et ξ dans Δ_1. Dans ce cas on pourrait appliquer encore notre méthode précédente de fermeture et l'on obtiendrait une différence

$$\delta_{1,i,j,k}(z,\xi) \equiv \delta_{1,i,j}(z,\xi) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{k,n}(z)\psi_{1,k,n}(\xi) \equiv 0.$$

$\varphi_{k,n}(z)$ étant un nouveau système orthogonal et normal qui formerait avec les systèmes $\varphi_{i,n}(z)$ et $\varphi_{j,n}(z)$ encore un système orthogonal et normal. En vertu de l'équation (12), on a

$$\delta_{1,j,k}(z,\xi) \equiv -\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{j,n}(z)\,\psi_{1,j,n}(\xi) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{k,n}(z)\,\psi_{1,j,n}(\xi) \equiv 0,$$

en supposant toutefois que z est dans D et ξ dans Δ_1.

Le système formé des deux systèmes $\varphi_{j,n}(z)$ et $\varphi_{k,n}(z)$ étant orthogonal et normal, il faut que

$$\psi_{1,j,n}(\xi) \equiv 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

et que

$$\psi_{1,k,n}(\xi) \equiv 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Par conséquent, on a nécessairement dans ces conditions

$$\delta_{1,k,j}(z,\xi) \equiv 0.$$

Il résulte donc que le système formé des deux systèmes $\varphi_{i,n}(z)$ et $\varphi_{j,n}(z)$ est complet.

Remarquons en passant qu'à cause des identités

$$\psi_{1,j,n}(\xi) \equiv 0,$$

ξ étant dans Δ_1, il résulte que la suite $\psi_{j,n}(x)$ est de $\Omega(C_0)$.

Supposons que le domaine D soit à connexion d'ordre supérieur à 2, mais toutefois en nombre fini.

Pour fermer un pareil système, tout revient, comme on le voit sans peine, à appliquer successivement notre méthode relative à un domaine d'un seul tenant simplement connexe, à chaque tenant de la région d'holomorphisme par rapport à x de la différence $\delta(z, x)$.

Si le système $\varphi_n(z)$ est de $\Omega'(C)$, cette région d'holomorphisme est d'un seul tenant. Dans ce cas, notre méthode relative à un domaine d'un seul tenant simplement connexe s'applique exactement.

Supposons enfin que le domaine D soit à plusieurs tenants multiplement connexes.

Soit $\varphi_n(z)$ un système, par exemple, de $\Omega(C)$. Alors $\psi_n(x)$ sera de $\Omega'(C)$.

Considérons toujours la différence

$$\delta(z, x) = \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\,\psi_n(x).$$

Dans ce cas, le domaine d'holomorphisme D' par rapport à x est composé de plusieurs tenants $T'_0, T'_1, \ldots, T'_p$. La fonction $\delta(z, x)$, pour z dans D, est une fonction holomorphe de x dans T'_0. Nous avons vu que nous pouvons fermer un système $\varphi_n(z)$ par rapport à un domaine d'un seul tenant. Par conséquent, en appliquant notre méthode à cette différence pour ce tenant, nous obtiendrons une différence

$$\delta_{i_0}(z, x) = \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\psi_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i_0,n}(z)\psi_{i_0,n}(x)$$

qui sera identiquement nulle pour x dans T'_0.

La fonction $\delta_{i_0}(z, x)$, pour z dans D, est une fonction holomorphe de x dans T'_1. En appliquant encore notre méthode relative à T'_1, on obtiendra une différence

$$\delta_{i_0,i_1}(z, x) = \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\psi_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i_0,n}(z)\psi_{i_0,n}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i_1,n}(z)\psi_{i_1,n}(x),$$

qui sera identiquement nulle pour x dans T'_1.

On démontrerait comme précédemment qu'elle est nulle identiquement aussi pour x dans T'_0.

En continuant de la sorte, on arrive à une différence

$$\delta_{i_0,i_1,\ldots,i_p}(z, x) = \frac{1}{z - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\psi_n(x) - \ldots - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{i_p,n}(z)\psi_{i_p,n}(x)$$

qui sera identiquement nulle pour x dans $T'_p, T'_{p-1}, \ldots, T'_0$, c'est-à-dire dans D'. Par conséquent, le problème est résolu.

On aurait évidemment une méthode semblable pour le cas où $\varphi_n(z)$ serait de $\Omega'(C)$.

On peut simplifier quelquefois le calcul en faisant une transformation de la forme $\zeta = \frac{\alpha}{z - a}$ de manière que le domaine d'holomorphisme de la suite $\psi_n(x)$ contienne si possible un tenant de moins.

41. Autre développement en série des fonctions de $\Omega(C)$ et de $\Omega'(C)$.

Considérons un domaine D d'un seul tenant multiplement connexe. Supposons pour plus de simplicité qu'il soit doublement connexe, c'est-à-dire formé par la région comprise entre deux courbes fermées simples C_e et C_i, C_e contenant le contour C_i.

Soit $f(z)$ une fonction de $\Omega(C)$. On a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f(z)}{z-x}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_e}\frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Appelons $f_e(x)$ la fonction de $\Omega(C_e)$, telle que l'on ait, pour x dans D_e,

$$f_e(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_e}\frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

et $f_i(x)$ la fonction de $\Omega'(C_i)$, telle que l'on ait, pour x dans D'_i,

$$f_i(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

On aura donc, pour x dans le domaine fermé D,

$$f(x) = f_e(x) + f_i(x).$$

Soient $\pi_{e,n}(z)$ le système fondamental relatif aux fonctions de $\Omega(C_e)$ par rapport à un point a_e de D_e et $\rho_{i,n}(z)$ le système fondamental relatif aux fonctions de $\Omega'(C_i)$ par rapport au point a_i de D_i.

On a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{e,n}\,\pi_{e,n}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_{i,n}\,\rho_{i,n}(x),$$

la série convergeant uniformément et absolument dans le domaine D.

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{i,n}\,\rho_{i,n}(x)$$

convergeant en moyenne le long de C_i vers $f_i(x)$ pendant que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{e,n}\,\pi_{e,n}(x)$$

converge uniformément vers $f_e(x)$, leur somme convergera évidemment en moyenne le long de C_i vers $f(x)$. Elle convergera aussi en moyenne le long de C_e, pour une raison semblable; par conséquent, elle converge en moyenne le long de C.

On généralise facilement ce mode de développement pour un domaine d'un seul tenant à connexion d'ordre supérieur à 2, mais toutefois fini.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Toute fonction de $\Omega(C)$, *le domaine* D *étant d'un seul tenant à connexion d'ordre* $q+1$, *est développable en une somme de séries de fonctions fondamentales relatives aux fonctions de* $\Omega(C_e)$ *et de* $\Omega'(C_{i,n})$ $(n=1, 2, \ldots, q)$, C_e *désignant le contour enveloppant les contours* $C_{i,1}$, $C_{i,2}$, $\ldots$, $C_{i,q}$, *la série ainsi formée convergeant en moyenne le long de* C *et uniformément et absolument dans tout domaine complètement intérieur à* D. *Toute fonction de* $\Omega'(C)$, *le domaine* D′ *étant d'un seul tenant à connexion d'ordre* p, *est développable en une somme de séries de fonctions fondamentales relatives aux fonctions de* $\Omega'(C_n)$ $(n=1, 2, \ldots, p)$, *la série ainsi formée convergeant en moyenne le long de* C *et uniformément et absolument dans tout domaine complètement intérieur à* D′.

Comme cas particulier, si le domaine D est doublement connexe limité par deux cercles concentriques, on retrouve la série de Laurent [1].

---

[1] Les principaux résultats de la première Partie de ce Mémoire ont fait l'objet d'une Communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1808).

SECONDE PARTIE.

SUR DE CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE ET LEURS APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE INFINI.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE A INTÉGRALES PRISES LE LONG D'UN CONTOUR FERMÉ.

42. Type particulier d'équations intégrales de première espèce. — Dans ce Chapitre, nous allons nous occuper de la résolution de certaines équations intégrales de première espèce, qui nous ont été suggérées par les équations différentielles linéaires d'ordre infini.

Considérons l'équation intégrale suivante

$$\int_C y(t)\,K(t,\,x)\,dt = f(x),$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour rectifiable fermé C définissant un domaine D d'un ou plusieurs tenants à connexion simple ou multiple.

Le noyau $K(t,\,x)$ est de la forme

$$K(t,\,x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n(t)\,\lambda_n(x),$$

les fonctions $\rho_n(t)$ désignant le système fondamental relativement aux fonctions de $\Omega'(C)$ et les fonctions $\lambda_n(x)$ étant holomorphes dans un certain domaine fermé Δ, de contour Γ et telles que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n(x)|^2$$

soit uniformément convergente dans ce domaine fermé.

Enfin le second membre $f(x)$ est une fonction holomorphe dans le domaine fermé Δ.

Remarquons tout de suite que le noyau $K(t, x)$, quand x est dans le domaine fermé Δ, est une fonction de $\Omega'(C)$ par rapport à C.

Il résulte que si $\varphi_n(t)$ est un autre système orthogonal et normal fermé de fonctions de $\Omega'(C)$, on a aussi

$$K(t, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)\, \mu_n(x),$$

la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n(x)|^2$$

convergeant dans le domaine fermé Δ.

Montrons que cette série est uniformément convergente dans ce domaine.

En effet, les fonctions $\mu_n(x)$ sont continues dans le domaine fermé Δ et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\gamma_n(x)|^2 = \int_C |K(t, x)|^2 ds = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n(x)|^2.$$

Par conséquent, sa somme est aussi continue.

Il résulte donc, en vertu du théorème de Dini, que cette série est uniformément convergente dans ce domaine.

Le problème que nous allons nous proposer sera la recherche de *la solution générale* $y(t)$ de $\Omega(C)$, telle que l'équation considérée soit vérifiée pour les points x de Δ.

A cet effet, rappelons ce que nous entendons par la solution générale :

Nous dirons qu'*une solution est générale si*, *étant donnée toute autre* *solution, on peut, en donnant des déterminations convenables aux quantités arbitraires, dont nous supposons que dépend la solution générale, rendre cette dernière identique à l'autre.*

Remarquons qu'une solution qui ne contient pas de quantités arbitraires ne peut être générale sans que toute autre solution lui soit identique.

43. Théorème général. — Posons

$$F(x) = \int_C y(t)\, K(t, x)\, dt - f(x).$$

La fonction $F(x)$ est holomorphe dans Δ. Soit Δ_1 un domaine limité par un contour rectifiable Γ_1 complètement intérieur à Δ, c'est-à-dire dont tous ces points, y compris son contour, font partie de Δ.

Supposons, de plus, que dans chaque tenant de Δ, il y ait un tenant de Δ_1. La fonction $F(x)$ devant être nulle identiquement dans Δ le sera aussi dans Δ_1 et sur Γ_1.

Supposons qu'on sache résoudre l'équation donnée relativement au domaine Δ_1 et à son contour Γ_1, c'est-à-dire savoir trouver une solution qui vérifie cette équation pour x dans Δ_1 et pour presque pour tous les points x de Γ_1. Du reste, il suffit que l'équation soit vérifiée pour presque pour tous les points de Γ_1, pour qu'elle le soit pour tous les points de Δ_1. En effet, cela résulte de ce que la fonction $F(x)$ fait partie évidemment de l'ensemble $\Omega(\Gamma_1)$.

La fonction étant holomorphe dans Δ et identiquement nulle dans le domaine Δ_1 contenu dans Δ sera identiquement nulle dans tout son domaine d'holomorphisme.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour résoudre une équation du type envisagé, il faut et il suffit pouvoir la résoudre relativement à un contour fermé Γ_1, tel que le domaine Δ_1 qu'il définit ait dans chaque tenant de Δ au moins un tenant complètement intérieur à celui-ci.

Ce théorème nous permettra en général de simplifier la recherche des solutions.

44. Équation sans second membre. — Nous dirons qu'une équation intégrale de première espèce est sans second membre si l'on a

$$f(x) \equiv 0.$$

Cherchons à résoudre l'équation

$$(1) \qquad \int_C y(t)\,K(t,\,x)\,dt = 0.$$

Posons comme précédemment

$$F(x) = \int_C y(t)\,K(t,\,x)\,dt$$

et soit Δ_1 un domaine de contour Γ_1 vérifiant les conditions de plus haut.

La fonction $F(x)$ étant de $\Omega(\Gamma_1)$, pour qu'elle soit identiquement nulle dans Δ_1, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{\Gamma_1} F(x)\,\overline{\varpi_n(x)}\,d\sigma_1 = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

$\varpi_n(x)$ étant un système orthogonal et normal complet de fonctions de $\Omega(\Gamma_1)$, par exemple le système fondamental.

Posons

$$k_n(t) = \int_{\Gamma_1} K(t,\,x)\,\overline{\varpi_n(x)}\,d\sigma_1.$$

Cette suite de fonctions fait partie évidemment de $\Omega'(\Gamma)$. On a

$$\int_{\Gamma_1} F(x)\,\overline{\varpi_n(x)}\,d\sigma_1 = \int_C y(t)\,k_n(t)\,dt,$$

et cela puisque le second membre a un sens.

Soit $\varphi_n(t)$ le système orthogonal et normal de fonctions de $\Omega'(C)$ déduit par orthogonalisation le long de C de la suite $k_n(t)$.

Les équations

$$\int_C y(t)\,k_n(t)\,dt = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

seront donc équivalentes aux équations

$$(2) \qquad \int_C y(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Cherchons une solution générale de ce système d'équations, de la forme

$$y(t) = \overline{z(t)}\,\chi'(t),$$

$z(t)$ étant une fonction de $\Omega'(C)$.

Supposons que le système $\varphi_n(t)$ ne soit pas fermé et soit $\varphi_{1,n}(t)$ le système qui le ferme. Toute fonction $b(t)$ de $\Omega'(C)$ sera de la forme

$$b(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,\varphi_n(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{1,n}\,\varphi_{1,n}(t),$$

les suites b_n et $b_{1,n}$ étant de ω. Si le système $\varphi_{1,n}(t)$ ne contient qu'un nombre fini p de fonctions, c'est-à-dire si le système $\varphi_n(z)$ est quasi fermé, on prendra pour $n = p+1, \ldots, +\infty$

$$\varphi_{1,n}(t) \equiv 0.$$

La solution devant être orthogonale aux fonctions $\varphi_n(t)$, elle sera de la forme

$$\overline{z(t)}\,\chi'(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{b_{1,n}}\,\overline{\varphi_{1,n}(t)}\,\chi'(t),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\overline{z(t)}\,\chi'(t) \sim \overline{b(t)}\,\chi'(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,\overline{\varphi_n(t)}\,\chi'(t).$$

Les suites b_n et $b_{1,n}$ étant des suites quelconques de ω, la fonction $b(t)$ est une fonction arbitraire de $\Omega'(C)$.

Si le système $\varphi_n(t)$ est fermé, il est évident que la seule solution possible sera une fonction presque partout nulle le long de C.

Toute autre solution devant être de la forme précédente, $\overline{z(t)}\chi'(t)$ sera évidemment la solution générale de l'espèce cherchée.

Cela étant, la fonction $y(t)$ de $\Omega(C)$, telle que l'on ait, pour t dans D,

$$y(t)=\int_C \frac{\overline{z(u)}\,\chi'(u)\,du}{u-t},$$

sera une solution du système (z) puisque

$$2\pi i\int_C y(t)\,\varphi_n(t)\,dt=\int_C \overline{z(u)}\,\chi'(u)\,\varphi_n(u)\,du=0.$$

C'est, de plus, la solution générale. En effet, soit $y_1(t)$ une autre solution. En vertu des résultats du paragraphe 34, il correspondra à celle-ci une et une seule fonction $z_1(t)$ de $\Omega'(C)$, telle que l'on ait

$$y_1(t)=\int_C \frac{\overline{z_1(u)}\,\chi'(u)\,du}{u-t}.$$

La fonction $\overline{z_1(u)}\chi'(u)$ sera, par conséquent, aussi une solution du système (2), et par suite, elle devra être de la même forme que $\overline{z(u)}\chi'(u)$. Il résulte donc que $y(t)$ peut se réduire à $y_1(t)$.

Pour t dans D, la fonction $y(t)$ peut encore s'écrire

$$y(t)=\int_C \frac{\overline{b(u)}\,\chi'(u)\,du}{u-t}-\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{b_n}\,\psi_n(t),$$

où

$$\psi_n(t)=\int_C \frac{\overline{\varphi_n(u)}\,\chi'(u)\,du}{u-t}.$$

En appelant $a(t)$ la fonction de $\Omega(C)$, telle que l'on ait, pour t dans D,

$$a(t)=\int_C \frac{\overline{b(u)}\,\chi'(u)\,du}{u-t},$$

qui sera, par conséquent, une fonction arbitraire de $\Omega(C)$, il vient

$$y(t)=a(t)-\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\psi_n(t)$$

avec

$$a_n=\overline{b_n}=\int_C \overline{b_n(u)}\,\varphi_n(u)\,\chi'(u)\,du=2\pi i\int_C a_n(t)\,\psi_n(t)\,dt,$$

la série du second membre de $y(t)$ étant uniformément convergente dans le domaine ouvert D et convergente en moyenne le long de C [1].

45. Autre methode. — On peut procéder aussi d'une autre manière. A cet effet, posons

$$L(u, x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n(u)\lambda_n(x)$$

et

$$\overline{L(u, x)} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\pi_n(u)}\,\lambda_n(x).$$

où $\pi_n(u)$ est le système fondamental relatif aux fonctions de $\Omega(C)$ et $\lambda_n(x)$ une suite de fonctions holomorphes dans Δ et telle que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n(x)|^2$$

converge uniformément dans ce domaine.

Supposons que

$$2\pi i\lambda_n(x) = \int_C K(t, x)\,\pi_n(t)\,dt.$$

La suite $\lambda_n(x)$ vérifiera donc les conditions de plus haut.

Dans ces conditions, on a, évidemment,

$$K(t, x) = \int_C \frac{\overline{L(u, x)}\,\chi'(u)\,du}{u-t} \tag{3}$$

et nous savons qu'il n'existe pas d'autre fonction $\overline{L(u, x)}$ vérifiant cette équation.

Cela étant, on a

$$\int_C y(t)\,K(t, x)\,dt = 2\pi i\int_C y(u)\,\overline{L(u, x)}\,\chi'(u)\,du.$$

Il résulte donc que toute solution de l'équation donnée est une

[1] En vertu de la remarque du paragraphe 37.

solution de l'équation

$$\int_C y(u)\,\overline{L(u,\,x)}\,\chi'(u)\,du = 0$$

et réciproquement.

Posons

$$l_n(u) = \int_{\Gamma_1} L(u,\,x)\,\overline{\varpi_n(x)}\,\chi_1'(x)\,dx$$

et soit $\gamma_n(t)$ le système orthogonal et normal de fonctions de $\Omega(C)$ qu'on déduit par orthogonalisation de la suite $l_n(t)$.

Remarquons, en passant, que l'on a aussi

$$k_n(t) = \int_C \frac{\overline{l_n(u)}\,\chi'(u)\,du}{u-t}.$$

Soit $a(t)$ une fonction arbitraire de $\Omega(C)$; la solution générale sera évidemment

$$y(t) \sim a(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\gamma_n(t)$$

avec

$$a_n = \int_C a(t)\,\overline{\gamma_n(t)}\,\chi'(t)\,dt.$$

46. Équation avec second membre. — Soit l'équation

$$(4)\qquad \int_C y(t)\,K(t,\,x)\,dt = f(x).$$

Elle sera évidemment équivalente à l'équation

$$(5)\qquad 2\pi i \int_C y(u)\,\overline{L(u,\,x)}\,\chi'(u)\,du = f(x).$$

Remarquons tout de suite que la solution générale de cette équation, si toutefois elle existe, serait égale à la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière correspondant au second membre. En effet, la différence de deux solutions de l'équation avec second membre est une solution de l'équation sans second membre.

En vertu de notre théorème général, nous chercherons une solution qui vérifie l'équation presque partout le long d'un contour Γ_1, défini plus haut.

Conditions nécessaires et suffisantes d'existence. — Nous allons étudier les conditions que doit vérifier le second membre pour que l'équation admette une solution.

Nous allons considérer l'équation à noyau transformé, c'est-à-dire l'équation

$$2\pi i \int_C y(u)\overline{L(u, x)}\chi'(u)\,du = f(x).$$

Posons

$$r_n(x) = \int_C \overline{L(u, x)}\,\gamma_n(u)\,\chi'(u)\,du.$$

On a donc aussi

$$\overline{L(u, x)} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\gamma_n(u)}\, r_n(x).$$

En effet, si le système $\gamma_n(u)$ est ouvert, le système $\gamma_{1,n}(u)$ qui le fermerait est orthogonal au noyau $\overline{L(u, x)}\chi'(u)$, puisqu'il est orthogonal à toutes les fonctions $l_n(u)$.

Posons aussi

$$y_n = \int_C y(u)\overline{\gamma_n(u)}\chi'(u)\,du.$$

L'équation (5) devient

$$\frac{1}{2\pi i} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n r_n(x).$$

Les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |r_n(x)|^2$$

étant convergentes et la dernière quel que soit x dans Δ, la série du second membre convergera uniformément et absolument dans le domaine Δ.

Pour que l'équation (5) ait une solution, il faut et il suffit que la fonction $f(x)$ soit développable en série de fonctions $r_n(x)$ uniformément convergente dans un domaine Δ_1 et que, de plus, les coefficients y_n des fonctions $r_n(x)$ forment une suite de ω. Cette dernière condition est facile à saisir. En effet, la solution $y(t)$ devant être de $\Omega(C)$ ses coefficients de Fourier relatifs au système $\gamma_n(t)$ formeront une suite de ω, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^2$$

converge.

Nous allons préciser ces conditions.

A cet effet, soient

$$(l_n \overline{l_n}) = \int_C l_n(u)\,\overline{l_n(u)}\,\chi'(u)\,du$$

et

$$(l_n \overline{\gamma_n}) = \int_C l_n(u)\,\overline{\gamma_n(u)}\,\chi'(u)\,du.$$

Supposons que l'on ait $(l_n \overline{l_n}) = 0$ pour $n = s_0, s_1, \ldots, s_\infty$. Dans ces conditions, on aura, quelle que soit la fonction $y(u)$ de $\Omega(C)$,

$$\int_C y(u)\,\overline{l_n(u)}\,\chi'(u)\,du = 0 \qquad \text{pour } n = s_0, s_1, \ldots, s_\infty.$$

Par conséquent, pour que l'équation admette une solution, il faut que l'on ait aussi

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(x)\,\overline{\varpi_n(x)}\,\chi_1'(x)\,dx = 0 \qquad \text{pour } n = s_0, s_1, \ldots, s_\infty.$$

Or, puisque $f(x)$ est de $\Omega(\Gamma_1)$, la suite f_n fait partie de ω et l'on a toujours $\lim\limits_{n=\infty} f_n = 0$.

Donc, il suffira que les équations précédentes soient vérifiées pour tout indice fini s_i.

Supposons maintenant que l'on ait

$$(l_n \overline{\gamma_n}) = 0 \qquad \text{pour } n = t_0, t_1, \ldots, t_\infty.$$

Remarquons tout de suite que la fonction

$$l_\infty(u) = \lim_{n=\infty} \int_C L(u, x)\,\overline{\varpi_n(x)}\,\chi_1'(x)\,dx$$

est identiquement nulle pour u dans D, par conséquent,

$$\lim_{n=\infty}(l_n\overline{\gamma_n}) = 0.$$

On a donc pour tout indice fini t_i,

$$(6) \qquad l_{t_i}(u) = c_{0,t_i}\, l_{t_0}(u) + \ldots + c_{t_i-1,t_i}\, l_{t_i-1}(u).$$

D'autre part, l'équation (5) est évidemment équivalente au système

$$(7) \qquad \int_C y(u)\,\overline{l_n(u)}\,\chi'(u)\,du = f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Par conséquent, il faudra que l'on ait aussi pour tout indice fini t_i

$$f_{t_i} = c_{0,t_i}\, f_{t_0} + \ldots - c_{t_i-1,t_i}\, f_{t_i-1}.$$

Ces deux conditions sont aussi nécessaires.

Supposons que ces conditions soient vérifiées et supprimons de la suite des équations (7) toutes les équations d'indice fini qui sont une combinaison linéaire de celles qui la précèdent, ainsi que celles identiquement nulles. Cela étant, considérons le système restant. Soient m_0, $m_1, \ldots, m_n, \ldots$ les indices, rangés par ordre de grandeurs croissantes, des équations qui sont restées.

Posons

$$\overline{L_m(u, x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{l_{m_n}(u)}\,\varpi_{m_n}(x)$$

et

$$f_m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{m_n}\,\varpi_{m_n}(x).$$

Le noyau $\overline{L_m(u, x)}\chi'(u)$ sera encore de la même espèce que $\overline{L(u, x)}\chi'(u)$.

De même, la fonction $f_m(x)$ est évidemment toujours de $\Omega(\Gamma_1)$.

Ce nouveau noyau sera donc, tel que

$$(l_{m_n}\overline{l_{m_n}}) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (l_{m_n}\overline{\gamma_{m_n}}) \neq 0,$$

quel que soit n fini.

Nous allons montrer que l'équation

$$\int_C y(t)\overline{L_m(u,\ x)}\chi'(u)\,du = f_m(u) \tag{8}$$

a une solution. Posons, à cet effet,

$$r_{m_n}(x) = \int_C \overline{L_m(u,\ x)}\gamma_{m_n}(u)\chi'(u)\,du$$

On a

$$l_{m_n}(u) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{m_i}(u)(l_{m_n}\overline{\gamma_{m_i}})$$

et, par suite,

$$r_{m_n}(x) \sim \sum_{i=n}^{+\infty} \varpi_{m_i}(x)(l_{m_i}\overline{\gamma_{m_n}}). \tag{9}$$

Cherchons une suite de fonctions $p_n(x)$ de $\Omega(\Gamma_1)$ de la forme

$$p_n(x) = p_{o,n}\varpi_{m_0}(x) + \ldots + p_{n,n}\varpi_{m_n}(x)$$

et telle que

$$\int_{\Gamma_1} r_{m_i}(x)\overline{p_n(x)}\chi_1'(x)\,dx = \begin{cases} 1 & (i = n), \\ 0 & (i \neq n). \end{cases}$$

On remarque immédiatement que, pour $n < i$, on a

$$\int_{\Gamma_1} r_{m_i}(x)\overline{p_n(x)}\chi_1'(x)\,dx = 0.$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$r_{i,j} = (l_{m_i}\overline{\gamma_{m_j}}).$$

Pour déterminer les coefficients $p_{i,n}$, on aura donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} r_{0,0}\overline{p_{0,n}} + r_{0,1}\overline{p_{1,n}} + \ldots + r_{0,n}\overline{p_{n,n}} &= 0, \\ r_{1,1}\overline{p_{1,n}} + \ldots + r_{1,n}\overline{p_{n,n}} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ r_{n,n}\overline{p_{n,n}} &= 1. \end{aligned}$$

Or

$$r_{i,i} = (l_{m_i}\overline{\gamma_{m_i}}) \neq 0$$

quel que soit i fini; par conséquent le déterminant de ce système

$$\delta = r_{0,0} r_{1,1} \ldots r_{n,n}$$

est différent de zéro quel que soit n fini et par suite ces équations ont une solution unique.

Multiplions les deux membres de l'équation (8) par $\overline{p_n(x)}\chi'_1(x)$ et intégrons le long de Γ_1; il vient

$$y_{m_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f_m(x) \overline{p_n(x)} \chi'_1(x)\, dx.$$

Supposons que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y_{m_n}|^2$$

soit convergente. Dans cette condition, la fonction

$$y(u) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} y_{m_n} \gamma_{m_n}(u),$$

qui sera par conséquent de $\Omega(C)$, est une solution.

En effet, on a

$$\int_C y(u) \overline{L_m(u,}\, x) \chi'(u)\, du = \sum_{n=0}^{+\infty} y_{m_n} r_{m_n}(x),$$

la série du second membre convergeant uniformément dans Δ_1 et même dans Δ.

Posons

$$f_{1,m}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_{m_n} r_{m_n}(x).$$

La différence $f_{1,m}(x) - f_m(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions $p_n(x)(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ par conséquent aussi à toutes les fonctions $\varpi_{m_n}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$. De plus, en vertu des équations (9), elle est orthogonale aussi aux fonctions qui complètent le système $\varpi_{m_n}(x)(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ c'est-à-dire au système $\varpi_n(x)\,(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ qui est fermé. Par conséquent,

$$f_{1,m}(x) = f_m(x),$$

et, par suite, notre proposition est démontrée.

Les équations, qui ont été supprimées du système (7) étant des combinaisons linéaires des équations qui la précèdent, seront donc vérifiées aussi par la fonction $y(u)$. On a donc

$$\int_C y(u)\overline{l_n(u)}\chi'(u)\,du = f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty);$$

par conséquent $y(u)$ est une solution de l'équation (5).

La différence $f(x) - f_m(x)$ étant orthogonale au système qui complète le système $\varpi_{m_n}(x)$, on aura aussi

$$y_{m_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(x)\overline{p_n(x)}\chi_1'(x)\,dx.$$

Remarquons aussi que la suppression de plus haut, effectuée sur la suite $l_n(u)$, n'a pas modifié le système $\gamma_n(u)$, puisque c'est même de cette manière qu'on l'obtient. Par conséquent le système $\gamma_{m_n}(u)$ n'est autre que le système $\gamma_n(u)$ et l'on a

$$\gamma_{m_n}(u) = \gamma_n(u)$$

quel que soit n.

La fonction

$$y(u) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} y_{m_n}\gamma_n(u)$$

étant une solution de l'équation (5), on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_{m_n} r_n(x).$$

On voit donc dans ces conditions que la fonction $f(x)$ est développable en série de fonctions $r_n(x)$ uniformément et absolument convergente dans Δ_1 et sur Γ_1 et que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y_{m_n}|^2$$

est convergente.

En résumé, nous énoncerons les résultats suivants :

Pour que l'équation (5) *admette une solution de* $\Omega(C)$, *il faut et il suffit que le second membre* $f(x)$ *vérifie les conditions suivantes :*

1° *Que toute fonction de* $\Omega(\Gamma_1)$ *orthogonale le long de* Γ_1 *au noyau* $L(u, x)$ *par rapport à* x, *soit orthogonale le long de* Γ_1 *à* $f(x)$;
2° *Et que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_{\Gamma_1} f(x) \overline{p_n(x)}\, d\sigma_1 \right|^2 \qquad [d\sigma_1 = \chi'_1(x)\, dx]$$

soit convergente.

Remarquons que la condition 1° contient nos deux conditions nécessaires précédentes. En effet, si l'on pose

$$\theta_i(x) = \overline{c}_{0,t_i} \varpi_{t_0}(x) + \ldots + \overline{c}_{t_i-1,t_i} \varpi_{t_i-1}(x) - \varpi_{t_i}(x),$$

la condition (6) est évidemment équivalente à la condition

$$\int_{\Gamma_1} L(u, x) \overline{\theta_i(x)}\, d\sigma_1 = 0$$

et, par conséquent, on doit avoir aussi

$$\int_{\Gamma_1} f(x) \overline{\theta_i(x)}\, d\sigma_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$f_{t_i} = c_{0,t_i} f_{t_0} + \ldots + c_{t_i-1,t_i} f_{t_i-1}.$$

47. Autre méthode. — Il nous sera utile, dans la suite, de connaître les conditions nécessaires et suffisantes relatives au noyau $K(t, x)$ pour que l'équation (7) admette une solution.

La condition 1° dans laquelle on remplace $L(u, x)$ par $K(t, x)$ est évidemment nécessaire, et cela à cause de l'identité

$$\int_C y(t) K(t, x) = 2\pi i \int_C y(u) \overline{L(u}, x) \chi'(u)\, du.$$

Soient

$$(k_n\overline{k_n}) = \int_C k_n(t)\overline{k_n(t)}\chi'(t)\,dt,$$

$$(k_n\overline{\varphi_n}) = \int_C k_n(t)\overline{\varphi_n(t)}\chi'(t)\,dt.$$

Nous avons vu que, pour t dans D′, on a

$$k_n(t) = \int_C \frac{\overline{l_n(u)}\chi'(u)\,du}{u-t};$$

par conséquent, la condition $(\overline{l_n l_n}) = 0$ entraîne $(\overline{k_n k_n}) = 0$ et inversement. De même la condition $(l_n\overline{\gamma_n}) = 0$ entraîne aussi la même relation linéaire des n premières fonctions $k_n(t)$ et, par suite, on a aussi $(k_n\overline{\varphi_n}) = 0$ et inversement.

Supprimons des équations

$$\int_C y(t)k_n(t)\,dt = f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

toutes celles qui sont des combinaisons linéaires de celles qui la précèdent, ainsi que celles qui ont les deux membres identiquement nuls.

Soit

$$\int_C y(t)k_{m_n}(t)\,dt = f_{m_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty) \tag{10}$$

le système restant.

Posons

$$K_m(t, x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} k_{m_n}(t)\varpi_{m_n}(x),$$

qui est évidemment de la même espèce que le noyau $K(t, x)$. Le système (10) est équivalent à l'équation

$$\int_C y(t)K_m(t, x)\,dt = f_m(x),$$

pour laquelle

$$(k_{m_n}\overline{k_{m_n}}) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (k_{m_n}\overline{\varphi_{m_n}}) \neq 0$$

quel que soit n fini. Posons aussi

$$s_{m_n}(x) = \int_C K_m(t, x)\overline{\varphi_{m_n}(t)}\chi'(t)\,dt.$$

On a

$$h_{m_n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_{m_i}(t)\left(h_{m_n}\overline{\varphi_{m_i}}\right)$$

et, par conséquent,

$$s_{m_n}(x) = \sum_{i=n}^{+\infty} \varpi_{m_i}(x)\left(h_{m_i}\overline{\varphi_{m_n}}\right).$$

On peut donc, comme précédemment, déterminer une suite de fonctions $q_n(x)$ de la forme

$$q_n(x) = q_{0,n}\varpi_{m_0}(x) + \ldots + q_{n,n}\varpi_{m_n}(x),$$

telle que

$$\int_{\Gamma_1} s_{m_i}(x)\overline{q_n(x)}\chi_1'(x)\,dx = \begin{cases} 1 & (i = n), \\ 0 & (i \neq n). \end{cases}$$

On verrait aussi que si la suite

$$z_{m_n} = \int_{\Gamma_1} f_m(x)\overline{q_n(x)}\chi_1'(x)\,dx = \int_{\Gamma_1} f(x)\overline{q_n(x)}\chi_1'(x)\,dx$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

fait partie de l'ensemble ω, l'équation

$$\int_C \overline{z(t)}\chi'(t)K(t, x)\,dt = f(x)$$

admet une solution $z(t)$ de $\Omega'(C)$ égale à

$$z(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} z_{m_n}\varphi_{m_n}(t).$$

Par conséquent, la solution $y(t)$ de $\Omega(C)$ de l'équation (4) sera égale, pour t dans D, à

$$y(t) = \int_C \frac{\overline{z(u)}\chi'(u)}{u - t}\,du = \sum_{n=0}^{+\infty} z_{m_n}\psi_{m_n}(t).$$

la série du dernier membre étant uniformément et absolument convergente dans tout domaine complètement intérieur au domaine D et convergente en moyenne le long de C.

Nous pouvons donc énoncer le résultat équivalent suivant :

Pour que l'équation (4) *admette une solution de* $\Omega(C)$, *il faut et il suffit que le second membre* $f(x)$ *vérifie les conditions suivantes :*

1° *Que toute fonction de* $\Omega(\Gamma_1)$ *orthogonale le long de* Γ_1 *au noyau* $K(t, x)$ *par rapport à* x *soit orthogonale le long de* Γ_1 *à* $f(x)$;

2° *Et que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\int_{\Gamma_1} f(x)\overline{q_n(x)}\,d\sigma_1\right|^2 \qquad [d\sigma_1=\chi_1'(x)\,dx]$$

soit convergente.

Appelons $y_1(x)$ la solution générale de l'équation (4) sans second membre et $y(x)$ une solution correspondant au second membre. La solution générale de cette équation sera donc

$$Y(x)=y_1(x)+y(x).$$

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE INFINI.

I. — Généralités.

48. Conditions que doit vérifier une solution. — Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre infini suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)y^{(n)}(x)=f(x). \tag{1}$$

Appelons, avec M. T. Lalesco,

$$A(\xi, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\xi^n$$

la fonction génératrice de l'équation précédente (la série étant supposée convergente).

Nous supposerons que les fonctions $a_n(x)(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ et $f(x)$ font partie de l'ensemble $\Omega(C)$, C étant le contour d'un domaine D à un ou plusieurs tenants à connexion simple ou multiple.

Le problème que nous nous poserons sera la recherche des solutions vérifiant l'équation donnée dans un domaine δ contenu dans D ou identique à celui-ci.

La solution d'une pareille équation doit être évidemment indéfiniment dérivable et telle qu'elle rende le premier membre convergent dans le domaine δ.

Une condition nécessaire pour que la série (1) soit convergente est que l'on ait

$$(2) \qquad \sqrt[n]{|a_n(x)|\,\vartheta^{n}(x)} < k \qquad (k > 1)$$

au moins à partir de n suffisamment grand.

Nous supposerons essentiellement, dans tout ce qui va suivre, que la fonction génératrice $A(\xi, x)$ *soit une fonction entière par rapport à* ξ, *quel que soit* x *dans* D.

Rappelons qu'*on nomme « ordre apparent » d'une fonction entière* $F(\xi)$ *le plus petit nombre* ρ, *tel que l'on ait*

$$|F(\xi)| < e^{|\xi|^{\rho+\varepsilon}}$$

à partir de ξ *suffisamment grand et cela quelque petit que soit* ε.

Si

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n\xi^n,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|F_n|(n!)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}} = 0$$

ou encore

$$|F_n| < \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$$

à partir de n suffisamment grand.

A ce propos, nous dirons que *l'ordre apparent ρ est par excès, si à partir de n suffisamment grand, on a*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|F_n|(n!)^{\frac{1}{\rho}}} < A.$$

Pour préciser les conditions que doit vérifier la solution $y(x)$, nous allons montrer que *l'ordre apparent de la fonction* $A(\xi, x)$ *est égal à la plus grande des limites* $\sigma(x)$ *de la suite des fonctions réelles*

$$s_n(x) = \frac{\log(n!)}{\log\left|\frac{1}{a_n(x)}\right|}.$$

Cette suite est évidemment positive à partir de n assez grand. En vertu de la définition de $\sigma(x)$, on a pour une infinité de termes $s_n(x)$

$$\sigma(x) - \varepsilon < s_n(x) < \sigma(x) + \varepsilon,$$

et seulement pour un nombre fini ou nul de termes

$$\sigma(x) + \varepsilon < s_n(x).$$

Il résulte donc que, pour une infinité de valeurs de n, on a

(3) $$\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\sigma(x)-\varepsilon}}} < |a_n(x)| < \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\sigma(x)+\varepsilon}}},$$

et seulement pour un nombre fini ou nul de valeurs de n

$$\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\sigma(x)+\varepsilon}}} < |a_n(x)|.$$

Il s'ensuit que la fonction $\sigma(x)$ est égale pour chaque valeur de n à l'ordre apparent $\rho(x)$ de fa fonction $A(\xi, x)$.

En effet, en vertu de l'inégalité (3), il résulte, d'après le théorème de M. Hadamard [1], que l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(x)| r^n < e^{H(r^{\sigma(x)+\varepsilon})} < e^{r^{\sigma(x)+\varepsilon'}} \qquad (\varepsilon < \varepsilon');$$

la dernière inégalité n'ayant lieu qu'a partir de r suffisamment grand.

Il résulte donc, en vertu de la définition de l'ordre apparent $\rho(x)$, que

$$\rho(x) \leqq \sigma(x).$$

D'autre part $\rho \geqq \sigma(x) - \varepsilon$. En effet, dans le cas contraire on aurait $\rho < \sigma(x) - \varepsilon$ et par conséquent, à partir de n suffisamment grand, on aurait

$$|a_n(x)| < \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\sigma(x)-\varepsilon}}},$$

ce qui est contraire aux inégalités (3).

Par conséquent,

$$\sigma(x) - \varepsilon \leqq \rho(x) \leqq \sigma(x)$$

et puisque ε est arbitrairement petit, il vient

$$\rho(x) = \sigma(x).$$

L'inégalité (2) peut encore s'écrire

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|(n!)^{\frac{1}{\sigma(x)+\varepsilon}} \left| \frac{y^{(n)}(x)}{(n!)^{\frac{1}{\sigma(x)+\varepsilon}}} \right|} < k.$$

Pour qu'elle soit vérifiée, il suffit donc qu'à partir de n suffisamment grand, on ait

$$\left| \frac{y^{(n)}(x)}{n!} \right| \leqq \frac{K^n}{(n!)^{1-\frac{1}{\sigma(x)+\varepsilon}}},$$

K étant un nombre fini aussi grand que l'on veut.

Supposons qu'à partir de n suffisamment grand, on ait

$$\left| \frac{y^{(n)}(x)}{n!} \right| > \frac{K^n}{(n!)^{1-\frac{1}{\sigma(x)-\varepsilon}}}.$$

(1) J. Hadamard, *Journal de Mathématiques*, t. 9, 1893, p. 180.

Alors

$$\sqrt[n]{|a_n(x)y^{(n)}(x)|} > \sqrt[n]{|a_n(x)|(n!)^{\frac{1}{\sigma(x)-\varepsilon}}}$$

et la quantité du second membre tendra vers l'infini avec n, puisque l'ordre apparent de $A(\xi, x)$ est $\sigma(x)$. Par conséquent, dans ces conditions, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)y^{(n)}(x)$$

sera divergente.

49. Domaine de résolubilité. Solutions propres et impropres. — Soit $\delta[\sigma(x) < a]$ l'ensemble superficiel des points du domaine D, où l'on a

$$\sigma(x) < a.$$

Ce domaine δ, quand il existe, peut être formé de points isolés de lignes et de régions et, par conséquent, il n'est plus en général de la même espèce que les domaines D.

Nous dirons par définition qu'*une fonction est holomorphe dans* δ, *si elle est holomorphe dans un domaine* δ_1 *contenu dans* D *et contenant* δ, *ayant une mesure superficielle aussi voisine que l'on veut de celle de* δ *et si possible égale à celle-ci, pourvu que chaque point de* δ_1 *possède la propriété d'être le centre d'un cercle, dont tous les points appartiennent à* δ_1, *et les points de sa frontière étant tels que tout cercle arbitrairement petit ayant ce point comme centre contienne des points de* δ_1 *et des points ne lui appartenant pas.*

Avec cette définition, si le domaine δ est l'ensemble des points contenus à l'intérieur d'une courbe fermée, le domaine δ_1 lui sera identique.

Cela étant, pour que la fonction $y(x)$ puisse être une solution de l'équation (1) la vérifiant dans $\delta[\sigma(x) < a]$, il suffit que la fonction $y(x)$ soit holomorphe dans ce domaine et que l'on ait

$$\left|\frac{y^{(n)}(x)}{n!}\right| < \frac{K^n}{(n!)^{\frac{a-1}{a}}}.$$

En effet, dans ces conditions, les fonctions

$$y^{(n)}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots, +\infty)$$

sont aussi holomorphes dans $\delta[\sigma(x) < a]$ et puisque dans ce domaine on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n(x) y^{(n)}(x)|} = 0,$$

la série (1) est absolument et uniformément convergente dans $\delta[\sigma(x) < a]$. Par suite elle peut représenter le second membre $f(x)$ qui est holomorphe aussi dans ce domaine.

Soit $y(x)$ une solution holomorphe dans D. On a évidemment dans un domaine intérieur

$$\left|\frac{y^{(n)}(x)}{n!}\right| < K^n,$$

K étant un nombre suffisamment grand. Il résulte que l'équation sera vérifiée au moins dans le domaine $\delta[\sigma(x) < 1]$.

Cela étant, soient x_0 un point du domaine $\delta[1 \leqq \sigma(x)]$ et r_0 le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\right| r^n.$$

Pour une infinité de valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{\left|\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\right|} > \frac{1}{r_0+\varepsilon};$$

par conséquent, pour ces valeurs de n, on a

$$\sqrt[n]{|a_n(x) y^{(n)}(x)|} > \frac{1}{r_0+\varepsilon} \sqrt[n]{|a_n(x)| n!}.$$

Si pour ces valeurs de n on a aussi

$$\sqrt[n]{|a_n(x)| n!} > (r_0+\varepsilon) A \qquad \text{avec } A > 1,$$

la série (1) sera divergente et par suite la fonction $y(x)$ ne vérifie plus l'équation différentielle en ce point.

Soit $y(x)$ une fonction entière d'ordre apparent $\rho < \frac{a}{a-1}$ $(a > 1)$ vérifiant l'équation différentielle au voisinage d'un certain point.

D'autre part, on peut trouver un nombre ε suffisamment petit de manière que

$$\frac{1}{\rho+\varepsilon} \geqq 1 - \frac{1}{a}.$$

Par conséquent, dans le domaine $\delta[\sigma(x) < a]$, on a

$$\left|\frac{y^{(n)}(x)}{n!}\right| < \frac{K^n}{(n!)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}} \leqq \frac{K^n}{(n!)^{\frac{a-1}{a}}},$$

et par suite la fonction $y(x)$ vérifie l'équation dans $\delta[\sigma(x) < a]$. Cherchons si l'équation différentielle est vérifiée dans le domaine

$$\delta\left[\frac{\rho}{\rho-1} < \sigma(x)\right],$$

en supposant que $\rho > 1$.

Soit x_0 un point de ce dernier domaine. On a, pour une infinité de valeurs de n

$$(4) \qquad \left|\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\right| > \frac{K^n}{(n!)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}.$$

En effet, dans le cas contraire on aurait à partir de n suffisamment grand

$$\left|\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \leqq \frac{K^n}{(n!)^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}}}$$

et, dans cette condition, $y(x)$ serait d'ordre apparent inférieur à $\rho-\varepsilon$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Pour les valeurs de n qui vérifient l'inégalité (4), on a donc

$$\sqrt[n]{|a_n(x_0)y^{n}(x_0)|} > K\sqrt[n]{|\alpha_n(x)|(n!)^{1-\frac{1}{\rho-\varepsilon}}},$$

et puisque la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\xi^n$$

est d'ordre apparent supérieur à $\frac{\rho}{\rho-1}$, il est possible qu'on ait pour une infinité de valeurs de n précédemment définies

$$\sqrt[n]{|a_n(x_0)|(n!)^{1-\frac{1}{\rho-\varepsilon}}} > \frac{A}{K} \qquad \text{avec } A > 1.$$

On voit donc qu'au point x_0, la série (1) peut être divergente.

Étudions aussi le cas limite où la fonction génératrice $A(\xi, x)$ est, pour x dans le domaine D, une fonction entière d'ordre apparent par excès égal à 1. Supposons donc que la plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{|a_n(x)|\,n!}$ soit égale à $k(x)$, cette fonction de x étant bornée dans le domaine D.

Soit $y(x)$ une fonction holomorphe dans le domaine D. La plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x)|}{n!}}$ est égale à $\frac{1}{r(x)}$, $r(x)$ étant le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x)}{n!} u^n.$$

Soit $\delta(y)$ l'ensemble superficiel des points du domaine D, tel que pour tout point x appartenant à cet ensemble, on ait

$$k(x) < r(x).$$

Cet ensemble n'existe évidemment pas toujours.

La plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{|a_n(x)y^{(n)}(x)|}$ étant égale à $\frac{k(x)}{r(x)}$, il résulte que pour que $y(x)$ puisse être une solution de ~~l'équation différentielle considérée, il suffit que l'ensemble $\delta(y)$ existe.~~ En effet, soit x_1 un point de D n'appartenant pas à l'ensembla $\delta(y)$. Pour ce point $r(x_1) > k(x_1)$ et par suite la série (1) est divergente. On voit donc que la fonction $y(x)$ ne peut plus vérifier l'équation considérée au point x_1.

Remarquons que l'ensemble $\delta(y)$ est tel que le minimum des distances d'un point x de cet ensemble, aux points singuliers de la fonction $y(x)$ est supérieur à $k(x)$.

Soit $\delta'[\sigma(x) = 1]$ l'ensemble superficiel des points du domaine D, tel que tout point x de cet ensemble soit à une distance supérieure à $k(x)$ des points du contour C.

Si un pareil ensemble existe et contient un domaine d_1 limité par un contour rectifiable, toute fonction $y(x)$ de $\Omega(C)$ qui vérifie l'équation différentielle au voisinage d'un point de d_1, la vérifiera au moins dans tout le tenant où est situé ce point.

Si un pareil ensemble n'existe pas, l'équation différentielle considérée peut encore admettre une solution, mais cette fois-ci holomorphe dans un domaine D_1 contenant complètement le domaine D. En effet, dans ce cas l'ensemble $\delta'_1[\sigma(x)=1]$ relatif au domaine D_1 peut exister. Par exemple, soit D_1 un domaine, tel que le minimum des distances d'un point x de D, aux points du contour C_1 de D_1, soit supérieur à $k(x)$. Dans ce cas l'ensemble $\delta''_1[\sigma(x)=1]$ contient D ou lui est identique.

Ces circonstances sont nouvelles et caractéristiques aux équations différentielles linéaires d'ordre infini, comme l'a judicieusement montré M. T. Lalesco (¹).

Il n'est donc pas suffisant de s'assurer qu'une fonction holomorphe dans D satisfait au voisinage d'un point l'équation différentielle linéaire d'ordre infini, pour en conclure qu'elle y satisfait dans tout le domaine D.

Nous appellerons, avec M. T. Lalesco, une pareille solution, une *solution impropre* relativement à D et nous dirons qu'une *solution* est *propre* relativement à D si elle vérifie l'équation dans toute cette région.

Nous appellerons *domaine de résolubilité* le domaine où une solution donnée est propre relativement à ce domaine.

On voit donc que *le domaine de résolubilité d'une solution holomorphe dans le domaine* D *est au moins égal au domaine* $\delta[\sigma(x)<1]$.

Dans le cas limite où l'ordre apparent par excès $\sigma(x)=1$ *dans tout le domaine* D, *le domaine de résolubilité est au moins égal au domaine* $\delta'[\sigma(x)=1]$ si toutefois ce domaine existe.

Enfin *le domaine de résolubilté d'une solution entière d'ordre apparent* $\rho<\frac{a}{a-1}$ *ou d'ordre apparent par excès* $\rho=\frac{a}{a-1}$ *est égal au moins au domaine* $\delta[\sigma(x)<a]$.

II. — Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre infini.

50. Hypothèses. — Nous allons supposer essentiellement dans tout ce qui va suivre que dans le domaine D et sur son contour C il existe

(¹) T. Lalesco, *Journal de Mathématiques*, t. 9, 1908, p. 195.

des points de $\delta[\sigma(x) < a]$ (ou au moins pour de certaines valeurs de a) et qu'on peut tracer des courbes rectifiables fermées en nombre fini contenues dans D ou se confondant avec son contour C, telles qu'elles définissent un domaine d_a contenu dans D ou identique à celui-ci et qui ne contient que des points de $\delta[\sigma(x) < a]$.

Soit γ_a le contour du domaine d_a et supposons qu'il ne fasse pas partie de l'ensemble $\delta[\sigma(x) < a]$.

51. Recherche des solutions holomorphes. — Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre infini

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) y^{(n)}(x) = f(x) \tag{5}$$

et cherchons ses solutions holomorphes. Nous avons vu que le domaine de résolubilité relatif aux solutions holomorphes est au moins égal à $\delta[\sigma(x) < 1]$ ou si $\sigma(x) = 1$ par excès, au moins à $\delta'[\sigma(x) = 1]$.

Plus précisément, nous allons chercher la solution générale $y(x)$ de $\Omega(C)$ et qui devra vérifier cette équation au moins dans le domaine d_1 limité par le contour γ_1 ($a = 1$).

Quelle que soit la fonction $y(x)$ de $\Omega(C)$, on a, pour x dans D,

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{y(t)}{t - x} dt$$

et

$$y^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{y(t)}{(t - x)^{n+1}} dt.$$

Par conséquent l'équation différentielle donnée peut encore s'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x) n!}{2\pi i} \int_C \frac{y(t)}{(t - x)^{n+1}} dt = f(x).$$

Or, pour x dans d_1, la fonction génératrice étant une fonction entière d'ordre inférieur à 1 ou par excès égal à 1, la série,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x) n!}{(t - x)^{n+1}}$$

est absolument et uniformément convergente par rapport à x et par rapport à t, excepté pour les points t du domaine ouvert D. Donc, pour x dans d_1, on a

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{a_n(x)\,n!}{2\pi i} \int_C \frac{y(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_C y(t)\left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_n(x)\,n!}{(t-x)^{n+1}}\right] dt,$$

$$\left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{a_n(x)\,n!}{2\pi i}\int_C \frac{y(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt\right| < \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{|a_n(x)|\,n!}{2\pi\,\mu^{n+1}}\int_C |y(t)|\,ds < \varepsilon.$$

et

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C y(t)\left[\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{a_n(x)\,n!}{(t-x)^{n+1}}\right] dt\right| < \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{|a_n(x)|\,n!}{2\pi\,\mu^{n+1}}\int_C |y(t)|\,ds < \varepsilon.$$

ε étant une quantité arbitrairement petite, pourvu que m soit suffisamment grand. Par conséquent, l'équation précédente peut encore s'écrire

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C y(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x)\,n!}{(t-x)^{n+1}}\,dt = f(x).$$

Cette dernière est une équation intégrale du type étudié et dont le noyau

$$K(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x)\,n!}{(t-x)^{n+1}}$$

est une fonction de $\Omega'(C)$ par rapport à t, quand x est dans d_1 et une fonction holomorphe de x dans d_1, quand t est dans le domaine fermé D'.

Il est bien évident que toute solution de $\Omega(C)$ que vérifie l'équation (5) dans d_1 sera une solution de l'équation (6) qui la vérifiera dans le même domaine et réciproquement.

En vertu de notre théorème général, il faut et il suffit pour avoir la solution générale de $\Omega(C)$ vérifiant l'équation (6) dans d_1, de chercher la solution générale vérifiant cette équation presque pour tous les points d'un contour rectifiable fermé $\gamma_{1,1}$; le contour $\gamma_{1,1}$ définissant un domaine $d_{1,1}$, tel que dans chaque tenant du domaine d_1 il y ait au moins un tenant de $d_{1,1}$ complètement intérieur à celui-ci. On pourra prendre, par exemple, un contour formé de cercles, tels que dans chaque tenant de d_1 il y ait un cercle ne contenant que des points de ce tenant.

Nous avons vu précédemment que les équations intégrales de ce type, avec second membre, n'ont pas toujours de solution et, dans le cas où elles en ont, comment on pouvait les déterminer.

Le second membre $f(x)$ étant supposé identiquement nul, nous savons calculer la solution. Sachant fermer un système orthogonal et normal de fonctions de $\Omega(C)$, nous pouvons évidemment déterminer le nombre de constantes arbitraires que contient la solution générale.

Nous allons nous occuper plus loin de certaines équations différentielles linéaires d'ordre infini plus particulières et donner des conditions suffisantes de résolubilité, plus faciles à appliquer.

52. Recherche des solutions entières. — Le domaine de résolubilité, relatif aux solutions entières d'ordre apparent $\rho < \frac{a}{a-1}$ ou d'ordre apparent par excès $\rho = \frac{a}{a-1}$, est au moins égal à $\delta[\sigma(x) < a]$. Cherchons la solution entière la plus générale d'ordre ρ et qui vérifiera l'équation au moins dans d_a.

A cet effet, nous allons montrer que toute fonction entière $F(z)$ d'ordre apparent $\rho < \lambda$ ou d'ordre apparent par excès $\rho = \lambda$ est de la forme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n(0) z^n}{(n!)^{1+\frac{1}{\lambda}}},$$

$h(z)$ étant une fonction holomorphe au voisinage de l'origine O.

En effet, soit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n z^n.$$

En vertu de la définition de l'ordre par excès, on a, à partir de n suffisamment grand,

$$\sqrt[n]{|F_n|(n!)^{\frac{1}{\lambda}}} < A.$$

Par conséquent, la fonction

$$h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n(n!)^{\frac{1}{\lambda}} z^n$$

est holomorphe dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{\Lambda}\cdot$

Il s'ensuit donc que la fonction que nous cherchons est de la forme

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{n}(0)x^n}{(n!)^{\frac{2a-1}{a}}},$$

la fonction $h(z)$ étant holomorphe au moins dans le voisinage de O, pas exemple, à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon r_1.

Posons, pour simplifier l'écriture, $\lambda=\frac{a}{a-1}\cdot$ En remplaçant $y(x)$ par cette expression, l'équation différentielle (5) devient

$$\begin{aligned} f(x)= \quad & a_0(x)\left[h(0)+\frac{h'(0)}{1}x+\ldots+\frac{h^{n}(0)}{(n!)^{1+\frac{1}{\lambda}}}x^n+\ldots\right] \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +a_n(x)\left[\frac{h^{(n)}(0)n!}{(n!)^{1+\frac{1}{\lambda}}}+\frac{h^{n+1}(0)}{[(n+1)!]^{1+\frac{1}{\lambda}}}\frac{(1+n)!}{1}x+\ldots\right] \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{(n!)^{\frac{1}{\lambda}}}\left[a_n(x)+a_{n-1}(x)\frac{x}{1}+\ldots+a_0(x)\frac{x^n}{n!}\right]=f(x),$$

cette dernière série étant absolument et uniformément convergente dans d_a. En effet, dans d_a, on a

$$|a_n(x)|<\frac{\varepsilon^n}{(n!)^{\frac{1}{a}}}$$

quelque petit que soit ε, pourvu que $n>\mathrm{N}$, N étant un nombre suffisamment grand. En divisant toutes les fonctions $a_n(x)$ par une constante suffisamment grande Λ, on a, quel que soit n,

$$\frac{|a_n(x)|}{\Lambda}<\frac{\varepsilon^n}{(n!)^{\frac{1}{a}}}.$$

Donc le terme général de la série précédente est inférieur à

$$\frac{|h^{(n)}(0)|}{(n!)^{\frac{1}{p}}}\left[1+\frac{|x|}{1}+\ldots+\frac{|x|^n}{n!}\right]\frac{A\varepsilon^n}{(n!)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|h^{(n)}(0)|}{n!}e^{|x|}A\varepsilon^n,$$

la dernière quantité étant le terme général d'une série convergente, quel que soit $|x|$ fini.

Nous poserons, pour plus de simplicité,

$$\alpha_n(x)=\left[a_n(x)+a_{n-1}(x)\frac{x}{1}+\ldots+a_0(x)\frac{x^n}{n!}\right](n!)^{\frac{1}{q}}.$$

L'équation différentielle donnée s'écrira donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\alpha_n(x)=f(x).$$

La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_n(x)}{t^{n+1}}$$

étant absolument et uniformément convergente par rapport à x dans d_a, pourvu que $t\neq 0$; il résulte que l'équation précédente pourra encore s'~~écrire~~

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_n(x)}{t^{n+1}}\,dt=f(x),$$

γ étant un cercle de rayon η et de centre O.

Cette équation intégrale est encore du type étudié. Son noyau

$$K(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_n(x)}{t^{n+1}}$$

est une fonction holomorphe par rapport à t dans tout le plan, sauf à l'origine, pourvu que x soit dans d_a et une fonction holomorphe par rapport à x dans d_a, pourvu que $t\neq 0$.

Le problème revient donc à rechercher la solution générale de $\Omega(\gamma)$ vérifiant l'équation le long d'un contour γ_a (de même définition que $\gamma_{1,1}$ par rapport au domaine $d_{1,1}$).

Si cette équation admet une solution $h(x)$ de $\Omega(\gamma)$, la fonction

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n(o)}{(n!)^{1-\frac{1}{\lambda}}} x^n \qquad \text{avec } \lambda = \frac{a}{a-1}$$

sera la solution générale entière recherchée.

Si la fonction $h(x)$ a un point singulier sur le cercle γ, la fonction $y(x)$ est d'ordre apparent par excès égal à $\frac{a}{a-1}$. Au contraire, si la fonction $h(x)$ est une fonction entière, son ordre apparent sera certainement inférieur à $\frac{a}{a-1}$.

Remarquons que si l'équation intégrale n'admet pas de solutions de $\Omega(\gamma)$, l'équation différentielle donnée ne peut admettre pour solution une fonction entière d'ordre $\rho' < \rho$, mais en échange pourrait admettre des fonctions entières d'ordre $\rho' > \rho$.

Remarque. — Dans ce paragraphe nous avons supposé que $o < \frac{a}{a-1}$, c'est-à-dire que $a \geqq 1$. Supposons maintenant que $o < a < 1$. Dans ces conditions, dans le domaine $\partial[\sigma(x) < a]$, il pourrait exister aussi des solutions non holomorphes ou du moins ayant dans D de certains points singuliers. En effet, pour que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) y^n(x)$$

soit uniformément convergente, il suffit que dans $\partial[\sigma(x) < a]$, on ait

$$\left| \frac{y^n(x)}{n!} \right| < K^n (n!)^{\frac{1-a}{a}}.$$

On pourrait chercher, par exemple, s'il existe des solutions formelles développables en série de Taylor divergente autour de certains points de $\partial[\sigma(x) < a]$ et dont *l'ordre de divergence* [1] soit inférieur à $\frac{a}{a-1}$.

---

[1] *Voir* à ce sujet M. Le Roy, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1900, p. 417.

Nous allons laisser ce problème de côté et étudier en échange la recherche des solutions holomorphes.

III. — Recherche des solutions holomorphes vérifiant l'équation dans un domaine d'un seul tenant.

53. Méthode des fonctions génératrices. — Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre infini

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\, y^{n}(x) = f(x)$$

et cherchons la solution générale de $\Omega(C)$ vérifiant cette équation dans un domaine d'un seul tenant d de contour rectifiable, ce domaine faisant partie du domaine $\delta[\sigma(x) < 1]$.

La fonction génératrice

$$A(\xi, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\xi^n$$

sera donc une fonction entière par rapport à ξ, quand x est dans le domaine d et une fonction holomorphe de x dans d, pourvu que ξ soit fini.

Ce problème revient à la recherche de la solution générale de l'équation

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C y(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x)\, n!}{(t-x)^{n+1}}\, dt = f(x)$$

la vérifiant pour presque tous les points du contour d'un cercle C, ayant son centre dans d et de rayon r assez petit de manière qu'il soit complètement intérieur à d. Supposons (en faisant au besoin un changement de variables) que son centre soit à l'origine.

Le noyau de l'équation intégrale précédente

$$K(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x)\, n!}{(t-x)^{n+1}}$$

est une fonction entière par rapport à $\frac{1}{t-x}$, pourvu que x soit dans d.

Considérons l'égalité

$$\frac{n!}{(t-x)^{n+1}} = \frac{1}{t}\int_0^{\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s}\left(\frac{s}{t}\right)^n ds,$$

l'intégrale du second membre ayant un sens, pourvu que la partie réelle de $\left(1-\frac{x}{t}\right)$ soit positive, ce qui a lieu en particulier si t est sur C et x sur C_i.

La fonction génératrice $A(\xi, x)$ étant une fonction entière d'ordre apparent inférieur à 1, pourvu que x soit dans d, on a

$$K(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n(x)\, n!}{(t-x)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds.$$

L'intégrale du second membre de cette égalité est *uniformément convergente* par rapport à x dans C_i ou sur ce cercle et par rapport à t dans D' ou sur C. En effet, dans ces conditions, on a

$$\left| A\left(\frac{s}{t}, x\right)\right| < e^{\left(\frac{s}{r_1}\right)^{1-\varepsilon}} < e^{\varepsilon' s} \qquad (r_1 > r),$$

quelque petit que soit ε', pourvu que s soit suffisamment grand. La partie réelle $pr\left(1-\frac{x}{t}\right)$ de $1-\frac{x}{t}$ étant positive, on peut déterminer ε' assez petit de manière que

$$pr\left(1-\frac{x}{t}\right) - \varepsilon' > 0$$

et, par conséquent, on a

$$\left|\int_m^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\right| < \int_m^{+\infty} e^{-\left[pr\left(1-\frac{x}{t}\right)-\varepsilon'\right]s} ds,$$

quantité arbitrairement petite, pourvu que m soit suffisamment grand.

L'intégrale

$$\frac{\partial^p K(t, x)}{\partial x^p} = \frac{1}{2\pi i t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^p A\left(\frac{s}{t}, x\right) + \ldots + \frac{\partial^p A\left(\frac{s}{t}, x\right)}{\partial x^p}\right] ds$$

est aussi *uniformément convergente* dans les mêmes conditions. Pour le faire voir, il suffit de montrer que les fonctions

$$\frac{\partial \mathrm{A}(\xi, x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{A}(\xi, x)}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p \mathrm{A}(\xi, x)}{\partial x^p}, \quad \ldots,$$

pour x dans C_r ou sur ce cercle, sont des fonctions entières par rapport à ξ d'ordre inférieur à 1. On a

$$\frac{1}{p!}\,\frac{\partial^p \mathrm{A}(\xi, x)}{\partial x^p} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_{r'}} \mathrm{A}(\xi, z)\,\frac{dz}{(z - x)^{p+1}}$$

avec $r' > r$, le cercle $\mathrm{C}_{r'}$ étant aussi complètement intérieur à d et de même centre que C_r. Le point x étant situé à l'intérieur du cercle C_r ou sur ce cercle, on a

$$\left|\frac{\partial^p \mathrm{A}(\xi, x)}{\partial x^p}\right| < \frac{p!}{(r' - r)^{p+1}}\int_{\mathrm{C}_{r'}} |\mathrm{A}(\xi, z)|\,d\alpha'$$

avec

$$z = r' e^{i\alpha'}.$$

Par conséquent, on a

$$\left|\frac{\partial^p \mathrm{A}(\xi, x)}{\partial x^p}\right| < \mathrm{M}_p\, e^{|\xi|^{\rho+\varepsilon}},$$

ρ ~~étant le maximum de l'ordre apparent de la fonction génératrice~~ quand x est situé sur le cercle $\mathrm{C}_{r'}$, pourvu que ξ soit suffisamment grand; ce que démontre la proposition.

L'équation (7) peut encore s'écrire

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{\gamma(t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{r}{t}\right)s}\,\mathrm{A}\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = f(x).$$

Sous cette forme on met en évidence la fonction génératrice.

Remarquons que pour x situé à l'intérieur de C_r ou sur ce cercle, on a aussi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{f(t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s}\, ds\, dt.$$

Le système fondamental relativement aux fonctions de $\Omega(\mathrm{C}_r)$ est

$$\frac{x^n}{r^n\sqrt{2\pi r}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

En vertu de la remarque précédente, on a

$$(10)\quad k_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{r^{n+1}}{x^{n+1}\sqrt{2\pi r}\, t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dx$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n!\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\partial^n K(t, 0)}{\partial x^n}$$

$$= \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{i(2\pi)^{\frac{3}{2}} t}\int_0^{+\infty} e^{-s}\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^n A\left(\frac{s}{t}, 0\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{1}\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}\frac{\partial A\left(\frac{s}{t}, 0\right)}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^n A\left(\frac{s}{t}, 0\right)}{\partial x^n}\right] ds.$$

Soit $\varphi_n(t)$ le système orthogonal et normal de fonctions de $\Omega'(C)$ déduit par orthogonalisation de la suite $k_n(t)$.

On a

$$(11)\quad K(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t)\, s_n(x) \qquad (|x| \leqq r).$$

Remarquons aussi que pour $0 \leqq i < n$ $(n = 1, 2, \ldots, +\infty)$, on a

$$(12)\qquad s_n^{(i)}(0) = 0.$$

Posons

$$\Phi_n(\xi) = \int_C e^{t\xi}\varphi_n(t)\, dt.$$

Remarquons tout de suite que si ξ est fini, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\Phi_n(\xi)|^2$$

est uniformément convergente (¹). En multipliant les deux membres de l'équation (11) par $e^{t\xi}$ et un intégrant le long du contour C, il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{t\xi}}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n(\xi)\, s_n(x).$$

(¹) En vertu de la remarque du paragraphe 42.

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente pour x dans C_i et sur ce cercle et pour toute valeur finie de ξ.

En développant le premier membre de l'équation précédente sous forme d'équation différentielle et en mettant $e^{i\xi}$ en facteur, il vient

$$e^{i\xi} A(\xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\xi)\, s_n(x) \tag{13}$$

Cela étant, supposons que

$$(\lambda_n \bar{\lambda}_n) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda_n \bar{\varpi}_n) \neq 0,$$

quel que soit n fini.

Dans ces conditions, on peut déterminer une suite de fonctions $\frac{1}{x} q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ de la forme

$$\frac{1}{x} q_n\left(\frac{1}{x}\right) = q_{0,n} \frac{r}{x\sqrt{2\pi i}} + \ldots + q_{n,n} \frac{r^{n+1}}{x^{n+1}\sqrt{2\pi i}}$$

telle que l'on ait

$$\int_{C_i} s_n(x) \frac{1}{x} q_n\left(\frac{1}{x}\right) dx = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

Posons encore

$$Q_n(\xi) = \int_{C_i} e^{i\xi} \frac{1}{x} q_n\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

En multipliant les deux membres de l'équation (13) par $\frac{1}{x} q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ et en intégrant le long de C_i, il vient

$$\int_{C_i} e^{i\xi} A(\xi, x) \frac{1}{x} q_n\left(\frac{1}{x}\right) dx = \Phi_n(\xi)$$

En remarquant que

$$\int_{C_i} e^{i\xi} x^m \frac{1}{x} q_n\left(\frac{1}{x}\right) dx = Q_n^{(m)}(\xi)$$

et que pour $m > n$

$$Q_n^{(m)}(\xi) \equiv 0,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(14)\quad A(\xi, 0)\,Q_n(\xi) + \frac{1}{1!}\,\frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial x}\,Q'_n(\xi) + \ldots + \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n}\,Q_n^{(n)}(\xi) = \Phi_n(\xi).$$

On voit donc que les polynomes $Q_n(\xi)$ vérifient le système d'équations différentielles précédent ($n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty$).

Réciproquement, étant donné le système d'équations (14), supposons qu'il admette un système de solutions $Q_n(\xi)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty$), tel que $Q_n(\xi)$ soit un polynome de degré n.

Remarquons que l'on a

$$\frac{1}{x}\,q_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i x}\int_0^{+\infty} e^{-s}\,Q_n\left(\frac{s}{x}\right) ds;$$

par conséquent le système d'équations (14) peut encore s'écrire

$$\int_{C_r} e^{x\xi} A(\xi, x)\,\frac{1}{x}\,q_n\left(\frac{1}{x}\right) dx = \Phi_n(x)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

En vertu de l'égalité (13), il faut donc que

$$(15)\qquad \int_{C_r} s_n(x)\,\frac{1}{x}\,q_n\left(\frac{1}{x}\right) dx = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$
$$(n, m = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Cela étant, supposons que la suite

$$y_n = \int_{C_r} f(x)\,\frac{1}{x}\,q_n\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

fasse partie de l'ensemble ω.

On voit donc, dans ces conditions, que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\,s_n(x)$$

est absolument et uniformément convergente dans d.

Nous allons montrer que la fonction $f(x)$ est exprimable en série de fonctions $s_n(x)$. En effet, $\frac{1}{x}\,q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ étant un polynome de degré $n + 1$

en $\frac{1}{x}$, en vertu des équations (15) et (12), il faut nécessairement que $s_n^{(n)}(0) \neq 0$, quel que soit n fini.

D'autre part, en vertu de l'équation (10), on a

$$s_n^{(n)}(0) = \int_C \frac{\partial^n K(t, 0)}{\partial x^n} \overline{\varphi_n(t)} \chi'(t)\, dt = \frac{n!\sqrt{2\pi r}}{r^{n-1}} (k_n \overline{\varphi}_n).$$

Il s'ensuit donc que $(k_n \overline{\varphi_n}) \neq 0$, quel que soit n fini. Par conséquent, on a nécessairement aussi $(k_n \overline{k_n}) \neq 0$, quel que soit n fini. Par suite, en vertu de notre théorème d'existence, $f(x)$ est bien développable en série de fonctions $s_n(x)$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équation différentielle, qui a pour fonction génératrice $A(\xi, x)$, *admette une solution de* $\Omega(C)$ *quelle que soit* $f(x)$ *de* $\Omega(C)$ (*la vérifiant dans* d), *il faut et il suffit :*

1° *Que le système d'équations*

$$(16)\quad \begin{cases} A(\xi, 0)\, Q_0(\xi) & = \Phi_0(\xi), \\ A(\xi, 0)\, Q_1(\xi) + \frac{1}{1!} \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial x} Q_1'(\xi) & = \Phi_1(\xi), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots, \\ A(\xi, 0)\, Q_n(\xi) + \frac{1}{1!} \frac{\partial A(\xi, 0)}{\partial x} Q_n'(\xi) + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n} Q_n^{(n)}(\xi) & = \Phi_n(\xi), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

ait un système de solutions $Q_n(\xi)(n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$, *tel que* $Q_n(\xi)$ *soit un polynome de degré* n ;

2° *Et enfin que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-v} Q_n\left(\frac{v}{u}\right) dv\, du \right|^2$$

soit convergente.

54. Autre forme des conditions d'existence. — Considérons le système d'équations

$$(17)\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n} U_m^{(n)}(\xi) = \Phi_m(\xi) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Si l'équation différentielle donnée admet une solution quelle que soit $f(x)$ de $\Omega(C)$, nous avons vu que le système $Q_n(\xi)$ est un système de solutions du système d'équations (16), et puisque, pour $m > n$, $Q_n^m(\xi) \equiv 0$, il résulte qu'il sera aussi une solution du système précédent.

Réciproquement, supposons que le système (17) admette un système de solutions entières, telles que l'on ait

$$|U_n(\xi)| < A e^{|\xi| r_0} \qquad (r_0 < r). \tag{18}$$

quels que soient n et ξ.

Dans ces conditions, les premiers membres des équations (17) sont absolument et uniformément convergents.

Posons

$$\frac{1}{x} u_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i x} \int_0^{+\infty} e^{-\rho} U_n\left(\frac{\rho}{x}\right) d\rho.$$

En vertu de l'égalité (13), il faut que

$$\int_C s_n(x) \frac{1}{x} u_m\left(\frac{1}{x}\right) dx = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m). \end{cases}$$

Supposons que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_{C_r} \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-\rho} U_n\left(\frac{\rho}{u}\right) d\rho\, du \right|^2$$

soit convergente et que de plus la suite $\frac{1}{x} u_n\left(\frac{1}{x}\right)$ soit fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C_r)$.

Pour que l'équation considérée admette une solution, il faut et il suffit que la fonction $f(x)$ soit exprimable en série de fonctions $s_n(x)$.

La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n s_n(x)$$

est absolument et uniformément convergente dans le cercle C_r et sur ce cercle. La différence

$$f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n s_n(x)$$

étant une fonction de $\Omega(C_r)$ orthogonale à la suite fermée $\frac{1}{x} u_n\left(\frac{1}{x}\right)$, on a bien

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n s_n(x)$$

Par conséquent, *pour que l'équation différentielle* considérée *admette une solution quelle que soit $f(x)$ de $\Omega(C)$, il faut et il suffit :*

1° *Que le système d'équations*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n A(\xi,0)}{\partial x^n}\, U_m^{n}(\xi)=\Phi_m(\xi)$$
$$(m=0,1,2,\ldots,+\infty)$$

admette un système de solutions entières $U_m(\xi)$, *telles que*

$$|U_m(\xi)|<N e^{|\xi| r} \qquad (r_0<r),$$

quels que soient m et ξ ;

2° *Que la suite*

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-s}\, U_n\left(\frac{s}{x}\right) ds$$

soit fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C_r)$;

3° *Et enfin que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\int_{C_r}\frac{f(u)}{u}\int_0^{+\infty} e^{-s}\, U_n\left(\frac{s}{u}\right) ds\, du\right|^2$$

soit convergente.

55. Conditions suffisantes d'existence. — Supposons que le système d'équations (17) admette un système de solutions entières, telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|\xi| r_0}\, |U_n(\xi)|^2 < M^2, \tag{19}$$

la série étant uniformément convergente quel que soit ξ.

Cette condition entraîne les conditions 1° et 2° du théorème précédent. En effet, on a évidemment

$$|U_n(\xi)| < M e^{|\xi| r_0}.$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
|f_n|^2 &= \left| \int_{C_r} \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-v}\, U_n\!\left(\frac{v}{u}\right) dv\, du \right|^2 \\
&< r^2 \int_{C_r} \left| \frac{f(u)}{u} \right|^2 d\alpha \int_{C_r} \left| \int_0^{+\infty} e^{-v}\, U_n\!\left(\frac{v}{u}\right) dv \right|^2 d\alpha \\
&< r \int_{C_r} |f(u)|^2\, d\alpha \int_{C_r} \int_0^{+\infty} e^{-tr}\, |U_n(t e^{-i\alpha})|^2\, dt\, d\alpha,
\end{aligned}
$$

où l'on a posé

$$u = r e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad v = tr.$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-tr}\, |U_n(t e^{-i\alpha})|^2 < M^2 e^{-t(r-r_0)} \qquad (t \geqq 0).$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2 < 2\pi r M^2 \int_{C_r} |f(u)|^2\, d\alpha \int_0^{+\infty} e^{-t(r-r_0)}\, dt$$

et, par suite, la série du premier membre de cette inégalité est bien convergente.

Il résulte que *pour que l'équation différentielle* considérée *admette une solution quelle que soit $f(x)$ de $\Omega(C)$, il suffit :*

1° *Que le système d'équations*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n} U_m^n(\xi) = \Phi_m(\xi)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

admette un système de solutions entières telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|\xi| r_0}\, |U_n(\xi)|^2 < M^2,$$

la série étant uniformément convergente quel que soit ξ;

2° *Et que la suite*

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-v}\, U_n\left(\frac{v}{x}\right) dv$$

soit fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C_1)$.

Supposons que les conditions du théorème précédent soient vérifiées.

Soit $\psi_n(x)$ la fonction égale, pour x sur C, à $\overline{\varphi_n(x)}\chi'(x)$ et pour x dans le domaine ouvert D, à $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\varphi_n(z)}\chi'(z)}{z-x}dz$. La suite $\psi_n(x)$ forme un système orthogonal et normal de fonctions de $\Omega(C)$ (§ 37).

En vertu de l'inégalité (19) on peut poser

$$e^{-v}\,U\left(\frac{v}{u}, x\right) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-v}\,U_n\left(\frac{v}{u}\right)\psi_n(x),$$

la série convergeant en moyenne le long de C et uniformément par rapport à v $(v > 0)$, pourvu que $|u| \geqq r$.

D'autre part, si x est situé dans un domaine D_1 complètement intérieur à D, on a, en vertu de l'inégalité de Lagrange et Cauchy,

$$\left| e^{-v}\,U\left(\frac{v}{u}, x\right)\right|^2 \leqq \sum_{n=0}^{+\infty}\left| e^{-v}\,U_n\left(\frac{v}{u}\right)\right|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2.$$

La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2$$

est bien convergente dans ces conditions, puisque $\psi_n(x)$ n'est autre que le coefficient de Fourier de la fonction $\frac{1}{z-x}$ par rapport au système orthogonal et normal $\overline{\varphi_n(z)}\chi'(z)$.

Par conséquent, si $|u| = r$, on a

$$(20)\qquad \left| e^{-v}\,U\left(\frac{v}{u}, x\right)\right| < \mu M e^{-\left(1-\frac{r_0}{2r}\right)} \qquad (v > 0).$$

Il s'ensuit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-v}\,U\left(\frac{v}{u}, x\right) dv$$

est uniformément convergente pour x dans D_1 et pour $|u| \geqq r$.

En vertu des résultats précédents, la fonction

$$y(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-v}\, U_n\left(\frac{v}{u}\right) dv\, du$$

est une solution de l'équation différentielle considérée.

Par conséquent, pour x situé dans le domaine D_1, on peut encore l'écrire

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-v}\, U\left(\frac{v}{u}, x\right) dv\, du.$$

Or, en vertu de l'inégalité (20), on peut aussi la mettre sous la forme

$$(21) \qquad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U(0, x)}{\partial \xi^n} f^n(0),$$

la série étant uniformément convergente dans le domaine D_1.

Nous allons chercher encore d'autres conditions suffisantes d'existence afin de permettre de trouver plus facilement une solution correspondant au second membre.

56. Noyau resolvant : Théorème. — *Pour que l'équation différentielle ayant pour fonction génératrice* $A(\xi, x)$ *admette une solution de* $\Omega(C)$ (*la vérifiant dans le domaine* d), *il suffit que l'équation intégrale*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R(u, t)}{t} \int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{\xi}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = \frac{1}{u - x}$$

admette pour presque toutes les valeurs $|u| = r$ (le cercle C_r étant complètement intérieur à d) *une solution* $R(u, x)$ *de* $\Omega(C)$ *par rapport à* x, *telle que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_{C_r} R(u, t) \overline{\pi_n(t)}\, ds \right|^2 \qquad (ds = |dt|)$$

soit presque partout convergente le long de C_r *et intégrable terme à terme,* $\pi_n(t)$ *désignant le système fondamental relativement aux fonctions de* $\Omega(C)$.

Posons

$$\mathrm{R}_n(u) = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{R}(u, t)\, \overline{\pi_n(t)}\, ds.$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left| \int_{\mathrm{C}_r} f(u)\, \mathrm{R}_n(u)\, du \right|^2 < \int_{\mathrm{C}_r} |f(u)|^2\, d\sigma \int_{\mathrm{C}_r} |\mathrm{R}_n(u)|^2\, d\alpha$$

avec

$$d\alpha = |du|,$$

par suite, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_{\mathrm{C}_r} f(u)\, \mathrm{R}_n(u)\, du \right|^2$$

est convergente. Il résulte que la fonction

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}_r} f(u)\, \mathrm{R}(u, x)\, dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(x) \int_{\mathrm{C}_r} f(u)\, \mathrm{R}_n(u)\, du$$

est une fonction de $\Omega(\mathrm{C})$.

Montrons qu'elle est la solution cherchée. En effet, pour x dans C_r, ~~on~~ a

$$\int_{\mathrm{C}} y(t)\, \mathrm{K}(t, x)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}_r} f(u) \int_{\mathrm{C}} \mathrm{R}(u, t)\, \mathrm{K}(t, x)\, dt\, du$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}_r} \frac{f(u)}{u - x}\, du = f(x).$$

Nous appellerons la fonction $\mathrm{R}(u, x)$ le *noyau résolvant* de la solution.

Remarque. — Supposons que l'équation intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{E}(\xi, t)}{t} \int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{\xi}{t}\right)s}\, \Lambda\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = e^{x\xi}$$

admette une solution $\mathrm{E}(\xi, t)$ de $\Omega(\mathrm{C})$ par rapport à t quel que soit ξ fini et que de plus pour t dans le domaine fermé D, on ait

(22) $$|\mathrm{E}(\xi, t)| < \mathrm{E}\, e^{|\xi|^{\gamma-\varepsilon}}.$$

De cette inégalité, il résulte que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-v} \mathrm{E}\left(\frac{v}{u}, x\right) dv$$

est par rapport à x une fonction bornée de $\Omega(\mathrm{C})$, pourvu que $|u| \geqq r$, et par rapport à u une fonction bornée de $\Omega'(\mathrm{C}_r)$.

Il s'ensuit, comme il est facile de le vérifier, que la fonction

$$\mathrm{R}(u, x) = \frac{1}{u}\int_0^{+\infty} e^{-v} \mathrm{E}\left(\frac{v}{u}, x\right) dv$$

vérifie les conditions du théorème précédent. La fonction

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_r} \frac{f(u)}{u}\int_0^{+\infty} e^{-v} \mathrm{E}\left(\frac{v}{u}, x\right) dv\, du$$

est donc une solution de l'équation considérée.

Cèla étant, posons

$$\mathrm{I}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{E}(\xi, t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{r}{t}\right)s} \mathrm{A}\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = e^{r\xi}.$$

On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \mathrm{I}(\xi, x)}{\partial \xi^n} \frac{\partial^n \mathrm{A}(\xi, 0)}{\partial x^n} = e^{r\xi} \mathrm{A}(\xi, x). \tag{23}$$

De l'inégalité (22) il résulte que la série

$$\mathrm{J}(\xi, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \mathrm{E}(\xi, x)}{\partial \xi^n} \frac{\partial^n \mathrm{A}(\xi, 0)}{\partial x^n}$$

converge uniformément dans le domaine fermé D; par conséquent $\mathrm{J}(\xi, x)$ est une fonction de $\Omega(\mathrm{C})$ par rapport à x, pourvu que ξ soit fini.

L'équation (23) peut donc encore s'écrire

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{J}(\xi, t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{r}{t}\right)s} \mathrm{A}\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = e^{r\xi} \mathrm{A}(\xi, x).$$

Or, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{e^{t\xi}}{t} \int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{r}{t}\right)s} \mathrm{A}\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\, dt = e^{r\xi} \mathrm{A}(\xi, x).$$

Il résulte donc que la fonction $J(\xi, x) - e^{r\xi}$ est une solution de l'équation différentielle sans second membre.

57. Autres conditions suffisantes d'existence. — Supposons que l'équation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n E(\xi, x)}{\partial \xi^n} \frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n} = e^{r\xi} \tag{24}$$

admette une solution entière en ξ, telle que l'on ait

$$|E(\xi, x)| < E e^{|\xi|(r-\varepsilon)}$$

quel que soit x dans le domaine fermé D et de $\Omega(C)$ par rapport à x, quand ξ est fini.

Il résulte comme précédemment que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-v} E\left(\frac{v}{u}, x\right) dv$$

est une fonction bornée de $\Omega(C)$ en x, pourvu que $|u| \geqq r$.

L'équation (24) peut alors s'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n e^{v\xi} A(\xi, x)}{\partial x^n}\right]_{x=0} \frac{\partial^n E(0, x)}{\partial \xi^n} = e^{r\xi}$$

et, par conséquent, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{u\xi} A(\xi, u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-v} E\left(\frac{v}{u}, x\right) dv\, du = e^{x\xi}. \tag{25}$$

Nous allons montrer que la fonction

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-v} E\left(\frac{v}{u}, x\right) dv\, du$$

est une solution de l'équation différentielle qui a pour fonction génératrice $A(\xi, x)$, pourvu que la fonction $e^{r\xi}A(\xi, x)$ soit fermée par rapport aux fonctions de $\Omega(C_r)$, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune fonction λ de $\Omega'(C_r)$, telle que l'on ait simultanément

$$\int_{C_r} \lambda(x) e^{x\xi} A(\xi, x)\,dx = 0, \tag{26}$$

$$\int_{C_r} |\lambda(x)|^2\,d\alpha = 1, \tag{27}$$

quel que soit ξ fini.

En effet posons

$$P(\xi, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{E(\xi, t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}, x\right) ds\,dt \tag{28}$$

et remarquons que l'intégrale

$$\frac{1}{u}\int_0^{+\infty} e^{-v} P\left(\frac{v}{u}, x\right) dv$$

est une fonction de $\Omega(C_r)$ par rapport à x, quand $|u| \geqq r$ et de $\Omega'(C_r)$ par rapport à u, quand x est dans le domaine fermé D.

En effet, dans ces conditions, la fonction $e^{-v}E\left(\frac{v}{u}, x\right)$ est bornée quel que soit $v \geqq 0$.

Par conséquent, en multipliant les deux membres de l'équation (25) par

$$\frac{1}{2\pi i x}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{z}{x}\right)s} A\left(\frac{s}{x}, z\right) ds$$

et en intégrant le long de C_r, il vient, en vertu de l'équation (28),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{e^{u\xi} A(\xi, u)}{u}\int_0^{+\infty} e^{-v} P\left(\frac{v}{u}, z\right) dv\,du = e^{z\xi} A(\xi, z).$$

On a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} e^{u\xi} A(\xi, u)\,\frac{1}{u}\int_0^{+\infty} e^{-v}\left[e^{z\frac{v}{u}} - P\left(\frac{v}{u}, z\right)\right] dv\,du = 0.$$

Par conséquent, en vertu des conditions (26) et (27), on a, pour z dans C_r et $|u| \geqq r$,

$$\frac{1}{u}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{z}{u}\right)v}\,dv \equiv \frac{1}{u}\int_0^{+\infty} e^{-v} P\left(\frac{v}{u}, z\right) dv.$$

et puisque $P\left(\frac{v}{u}, z\right)$ est une fonction entière en $\frac{v}{u}$, on a

$$P(\xi, z) \equiv e^{z\xi}$$

Il résulte donc, en vertu de la remarque du paragraphe 56, que l'équation différentielle considérée a pour solution précisément la fonction $y(x)$.

Nous pouvons donc énoncer encore les conditions d'existences suivantes :

Pour que l'équation différentielle ayant pour fonction génératrice $A(\xi, x)$ *admette une solution de* $\Omega(C)$, *il suffit que l'équation différentielle*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n E(\xi, x)}{\partial \xi^n} \frac{\partial^n A(\xi, 0)}{\partial x^n} = e^{x\xi} \tag{29}$$

ait une solution entière en ξ, *telle que l'on ait*

$$|E(\xi, x)| < E e^{|\xi|(r-\varepsilon)} \tag{30}$$

quel que soit x *dans le domaine fermé* D *et de* $\Omega(C)$ *par rapport à* x, *quand* ξ *est fini* (le cercle C_r de rayon r étant complètement intérieur à d), *pourvu toutefois que la fonction* $e^{x\xi}A(\xi, x)$ *soit fermée par rapport aux fonctions de* $\Omega'(C_r)$ *de* x, *quel que soit* ξ *fini.*

Remarquons, en passant, que la condition (30) n'est plus nécessaire, quand la fonction génératrice $A(\xi, x)$ a, par rapport à x, un point singulier sur C, ξ étant supposé fini.

58. Équations differentielles a fonction generatrice entière d'ordre inferieur a 1 et de degre p en x. — Supposons que la fonction génératrice soit égale à

$$A(\xi, x) = A_0(\xi) + x A_1(\xi) + \ldots + x^p A_p(\xi),$$

les fonctions $A_0(\xi)$, $A_1(\xi)$, ..., $A_p(\xi)$ étant entières d'ordre inferieur à 1.

Les théorèmes precédents se simplifient notablement, dans ces conditions.

Le système d'équations (16) se réduit à un système d'équations différentielles d'ordre p au plus.

L'équation (17) se réduit à une équation d'ordre p.

Remarquons que la fermeture d'une fonction $F(\xi, x)$, par rapport aux fonctions de $\Omega'(C_r)$ en x, equivaut à ce que l'on ait

$$\frac{\partial^n F(\xi, o)}{\partial x^n} \neq o$$

quel que soit n fini.

En effet, cela résulte de ce que la suite $\frac{1}{x^{n+1}}$ $(n = o, 1, 2, \ldots, +\infty)$ est fermée.

Par conséquent pour que la fonction $e^{x\xi} A(\xi, x)$ soit fermée par rapport aux fonctions de $\Omega'(C_r)$ en x, il faut que l'on ait

$$\left[\frac{\partial^n e^{x\xi} A(\xi, x)}{\partial x^n}\right]_{x=0} \neq o,$$

c'est-à-dire

$$A_0(\xi) + \xi A_1(\xi) n + \ldots + \xi^p A_p(\xi) n(n-1) \ldots (n-p-1) \neq o,$$

quel que soit n fini.

L'équation (29) se réduit aussi à l'équation

$$A_0(\xi) E(\xi, x) + \ldots + A_p(\xi) \frac{\partial^p E(\xi, x)}{\partial x^p} = e^{x\xi}.$$

59. Équations différentielles linéaires d'ordre infini a coefficients constants. — Considérons l'équation suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n(x) = f(x)$$

et supposons que la fonction génératrice $A(\xi)$ soit d'ordre inférieur à 1.

Dans ce cas, le système d'équations (16) se réduit à un système d'equations algébriques. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équation différentielle, qui a pour fonction génératrice $A(\xi)$ *(d'ordre* < 1*) ait une solution quelle que soit* $f(x)$ *de* $\Omega(C)$*, il faut et il suffit que les fonctions* $\Phi_n(\xi)$ *soient divisibles par la fonction génératrice* $A(\xi)$*, que les rapports* $Q_n(\xi) = \frac{\Phi_n(\xi)}{A(\xi)}$ *soient des polynomes respectivement de degré n et enfin que la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-v} Q_n\left(\frac{v}{u}\right) dv\, du \right|$$

soit convergente.

Cherchons ce que pourrait donner le théorème du paragraphe 56.

A cet effet, remarquons que si la fonction $A(\xi)$ a des zéros simples et distribués d'une *manière convenable*, la fonction

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{u}\right)v} \frac{1}{A\left(\frac{v}{u}\right)} dv$$

vérifie les conditions du théorème précédemment rappelé, mais seulement pour $|x| < |u|$.

Du reste, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans un cercle C_c contenant le domaine D et son contour et si les intégrales

$$y_i(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{u} \int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{u}\right)v} \frac{1}{A_i\left(\frac{v}{u}\right)} dv\, du,$$

où

$$A_i(\xi) = \prod_{n=i}^{+\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\alpha_n}\right)$$

sont des fonctions de $\Omega(C)$ quel que soit i fini, la fonction $y_0(x)$ sera évidemment une solution.

On peut aussi utiliser autrement la fonction méromorphe $\frac{e^{x\xi}}{A(\xi)}$.

A cet effet, développons cette fonction en série de M. Mittag-Leffler ([1]).

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ les zéros de la fonction $A(\xi)$.

Soit $G_i\left(\frac{1}{\xi - \alpha_i}, x\right)$ la partie principale relative au pôle α_i, c'est-à-dire le polynome en $\frac{1}{\xi - \alpha_i}$ du développement de la fonction $\frac{e^{x\xi}}{A(\xi)}$ en série de Laurent relative au pôle α_i.

La méthode de M. Mittag-Leffler consiste à déterminer les polynomes $\frac{\partial P_i(\xi, x)}{\partial \xi}$ en ξ de degré q_i respectivement égaux aux q_i premiers termes du développement en série entière de $\frac{\partial G_i}{\partial \xi}$ dans le cercle C_i de centre O et de rayon suffisamment petit, de manière que la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left| \frac{\partial G_i}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial \xi} \right|$$

soit convergente, quel que soit ξ fini et sauf pour $\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$.

De cette manière les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\partial G_i}{\partial \xi} + \frac{\partial P_i}{\partial \xi} \right] \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} [G_i + Q_i]$$

sont uniformément convergentes, dans les mêmes conditions. Le développement sera de la forme

$$\frac{e^{x\xi}}{A(\xi)} = E(\xi, x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[G_i\left(\frac{1}{\xi - \alpha_i}, x \right) + P_i(\xi, x) \right].$$

Nous allons montrer que les fonctions G_i et P_i sont des solutions de l'équation différentielle donnée sans second membre.

En effet, la partie principale G_i relative au pôle α_i d'ordre $p_i + 1$ sera

---

([1]) *Voir* E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 8 (Paris, Gauthier-Villars, 1903).

de la forme

$$G_i\left(\frac{1}{\xi-\alpha_i}, x\right)=\sum_{n=0}^{p_i}\frac{\sum_{m=0}^{n} x^m e^{x\alpha_i} g_{i,n,m}}{(\xi-\alpha_i)^{n+1}}.$$

D'après la construction des polynomes $P_i(\xi, x)$, il résulte qu'ils seront aussi des combinaisons linéaires des fonctions $x^m e^{x\alpha_i}$.

Or, on vérifie sans peine que les fonctions $x^m e^{x\alpha_i} (n \leqq p_i)$ sont des solutions de l'équation différentielle sans second membre ; par conséquent notre proposition est démontrée.

Pour que l'équation différentielle donnée admette une solution de $\Omega(C)$, *il suffit de pouvoir développer la fonction* $\frac{e^{x\xi}}{A(\xi)}$ *en série canonique de M. Mittag-Leffler, telle que la fonction entière* $E(\xi, x)$, *différence entre* $\frac{e^{x\xi}}{A(\xi)}$ *et cette série, soit telle que l'on ait*

$$|E(\xi, x)| < K e^{|\xi| \varepsilon}$$

quel que soit x *dans* D *ou sur* C, *et de plus qu'elle soit une fonction de* $\Omega(C)$ *par rapport à* x, *quand toutefois* ξ *est fini*

En effet, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{t\xi}}{A(\xi)t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}\right) ds\, dt = e^{x\xi},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{E(\xi, t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} A\left(\frac{s}{t}\right) ds\, dt = e^{x\xi}.$$

60. Solution de l'équation sans second membre. — Nous allons montrer que la solution générale holomorphe dans un cercle C, de centre O, d'une équation différentielle à fonction génératrice $A(\xi)$ entière d'ordre inférieur à 1, est de la même forme que celle d'une équation différentielle d'ordre fini à coefficients constants.

Posons

$$F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^{(n)}(x).$$

En supposant que $a_0 \neq 0$, la fonction génératrice est de la forme

$$A(\xi) = a_0 \prod_{n}^{+\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\alpha_n}\right)$$

Remarquons tout de suite qu'une solution holomorphe dans un certain domaine fini sera propre relativement à ce domaine.

L'équation intégrale équivalente à cette équation différentielle sera

$$F[y] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{y(t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{s}{\alpha_n t}\right) ds\, dt = 0$$

en supposant que $a_0 = 1$.

Sous cette forme, nous avons mis en évidence les zéros de la fonction génératrice.

Soient $a_{n,i}$ les coefficients de l'équation différentielle d'ordre i, qui a pour équation caractéristique

$$\prod_{n=1}^{i}\left(1 - \frac{\xi}{\alpha_n}\right)$$

et

$$F_i[y] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{y(t)}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s} \prod_{n=i+1}^{+\infty}\left(1 - \frac{s}{\alpha_n t}\right) ds\, dt$$

l'équation différentielle qui a pour fonction génératrice

$$A_i(\xi) = \prod_{n=i+1}^{+\infty}\left(1 - \frac{\xi}{\alpha_n}\right).$$

On a évidemment

$$(31) \qquad \sum_{n=0}^{i} a_{ni} \frac{d^n F_i[y]}{dx^n} = F[y].$$

Nous allons montrer que la suite $F_i[y]$ converge uniformément dans C_r vers $y(x)$, en supposant toutefois que $y(x)$ est de $\Omega(C_r)$. En effet, on a

$$F_i[y] - y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{y(t)}{t}\int_0^{\infty} e^{-\left(1-\frac{x}{t}\right)s}\left[\prod_{n=i+1}^{+\infty}\left(1 - \frac{s}{\alpha_n t}\right) - 1\right] ds\, dt$$

La fonction génératrice $A_i(\xi)$ étant telle que

$$|A_i(\xi)| < A e^{|\xi|},$$

quel que soit i, il résulte que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\left|\frac{x}{t}\right|\right)s} A_i\left(\frac{s}{t}\right) ds \qquad (|t| = r)$$

converge uniformément pour x dans C_r.

Par conséquent, on a

$$|F_i[y] - y(x)| < r \int_{C_r} \left|\frac{y(t)}{t}\right| \int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\left|\frac{x}{t}\right|\right)s} \left| \prod_{n=i+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s}{\alpha_n t}\right) - 1 \right| ds\, d\alpha$$

$$(t = r e^{i\alpha})$$

ou encore

$$|F_i[y] - y(x)| < r \int_{C_r} \left|\frac{y(t)}{t}\right| \int_0^{m} e^{-\left(1-\left|\frac{x}{t}\right|\right)s} \left| \prod_{n=i+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s}{\alpha_n t}\right) - 1 \right| ds\, d\alpha$$
$$+ \varepsilon r \int_{C_r} \left|\frac{y(t)}{t}\right| d\alpha,$$

pourvu que m soit suffisamment grand.

Or, pour $\left|\frac{s}{t}\right| \leqq \frac{m}{r}$, le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s}{\alpha_n t}\right)$$

est uniformément convergent; par suite, on a

$$\left| \prod_{n=i+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s}{\alpha_n t}\right) - 1 \right| < \varepsilon,$$

pourvu que i soit suffisamment grand. Il résulte donc que pour $|x| < r$, on a bien

$$|F_i[y] - y(x)| < M\varepsilon$$

pourvu que i soit assez grand. Cela étant, soit $y_i(x)$ la solution de l'équation

$$a_{0,i}\, y(x) + a_{1,i}\, y'(x) + \ldots + a_{i,i}\, y^{(i)}(x) = 0$$

Elle est de la forme

$$y_i(x) = \sum_{n=1}^{i} c_n x^{k_n} e^{x\alpha_n},$$

les k_n étant des nombres entiers ou nuls inférieurs respectivement aux ordres de multiplicités des α_n. Les constantes c_n étant arbitraires, il est évidemment toujours possible de trouver au moins une suite partielle $y'_{i_p}(x)$ contenue dans la suite $y'_i(x)$, qui converge uniformément dans C_r. Dans ces conditions, on est assuré que la suite $y_{i_p}(x)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe dans C_r.

Posons

$$y(x) = \lim_{p \to \infty} y_{i_p}(x).$$

Toute solution de l'équation

$$F_{i_p}[y] = y_{i_p}(x)$$

est évidemment une solution de $F[y] = 0$.

Or

$$\lim_{p \to \infty} F_{i_p}[y] = y(x);$$

par conséquent, la fonction $y(x)$ précédemment définie est une solution de l'équation différentielle donnée.

Nous allons montrer que cette solution est générale.

A cet effet, remarquons que l'équation

$$F[y] = 0 \tag{32}$$

est équivalente à l'équation

$$F_i(y) = y_i(x),$$

pourvu que i soit fini et que les constantes arbitraires que contient $y_i(x)$ soient convenablement choisies. En effet, cela résulte immédiatement de l'équation (31).

Cela étant, soit $z(x)$ une autre solution de l'équation (32).

Le nombre i_0 étant fini, elle vérifie, par conséquent, l'équation

$$F_{i_0}[z] = y_{i_0}(x).$$

La solution générale de cette equation sera

$$z(x) = z_i(x) + z_{1,i_0}(x),$$

$z_{1,i}(x)$ etant une solution correspondant au second membre, qui existe vu la forme de celui-ci et $z_{i_0}(x)$ une solution de l'équation

$$F_{i_0}[z_{i_0}] = 0$$

En repetant notre raisonnement pour l'équation $F_{i_0}[z_{i_0}]$, comme nous l'avons fait pour l'equation $F[z] = 0$, le nombre i_1 etant fini, on devra avoir

$$F_{i_0-i_1}[z_i] = y_{i_0,i_1}(x)$$

la fonction $y_{i_0,i_1}(x)$ etant une certaine solution de l'équation differentielle d'ordre i_1 qui a pour equation caractéristique

$$\prod_{n=i_0+1}^{i_0+i_1}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Cette fonction sera evidemment de la même forme que la solution trouvee $y(x)$.

La solution generale de l'equation precédente sera donc

$$z_{i_0}(x) = z_{i_0+i_1}(x) + z_{1,i_0-i_1}(x).$$

$z_{1,i_0,i_1}(x)$ etant la solution correspondant au second membre et de la mème forme que celui-ci et $z_{i_0+i_1}(x)$ la solution de l'équation

$$F_{i_0-i_1}[z_{i_0-i_1}] = 0$$

Soient $i_2, i_3, \ldots, i_n, \ldots$ des nombres positifs bornés, quel que soit n.

Cela etant, en repetant notre raisonnement précédent indéfiniment, il vient

$$\lim_{m=\infty} F_{\sum\limits_{n=0}^{m} i_n}\left[z_{\sum\limits_{n=0}^{m} i_n}\right] = 0$$

$z_{\sum\limits_{n=0}^{m} i_n}(x)$ etant la partie de la solution $z(x)$ qui n'est pas de la forme de $y(x)$ [en exceptant $y(x) = 0$].

Or nous avons vu que

$$\lim_{m=\infty} F_{\sum\limits_{n=0}^{m} i_n}[y] = \lim_{q=\infty} F_q[y] = y(x);$$

par conséquent

$$\lim_{m=\infty} z_{\sum\limits_{n=0}^{m} i_n}(x) \equiv 0.$$

Les solutions laissées de côté z_{1,i_0}, z_{1,i_0-1}, ..., etant de la même forme que la solution trouvée $y(x)$, il résulte que cette dernière est bien générale.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Toute équation différentielle linéaire d'ordre infini à coefficients constants sans-second membre, qui a pour fonction génératrice une fonction entière d'ordre inférieur à 1,

$$A(\xi) = a_0 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\alpha_n}\right)$$

admet toujours une solution holomorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon fini.

La solution générale est de la forme

$$y(x) \equiv \lim_{p=\infty} y_{i_p}(x)$$

avec

$$y_{i_p}(x) = \sum_{n=0}^{i_p} c_n x^{k_n} e^{x\alpha_n},$$

k_n étant des nombres entiers positifs ou nuls respectivement inférieurs aux ordres de multiplicité des α_n.

61. Équations linéaires aux différences finies. — Considérons l'équation aux différence finies suivantes :

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y(x+b_1) + \ldots + a_n(x)y(x+b_n) = f(x),$$

où $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions de $\Omega(C)$, la courbe C étant fermée simple, contenant l'origine et les points b_1, b_2, ..., b_n étant suffisamment rapprochés de l'origine.

La recherche d'une solution de $\Omega(C)$ vérifiant cette équation dans le domaine d'holomorphisme du premier membre revient, en appliquant la formule de Cauchy, à la résolution de l'équation intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C y(t)\left[\frac{a_0(x)}{t-x}+\frac{a_1(x)}{t-x-b_1}+\ldots+\frac{a_n(x)}{t-x-b_n}\right]dt=f(x).$$

Cherchons la région où le noyau, quand t varie le long de C, est une fonction holomorphe par rapport à x.

Soit b_i un des points $b_1, b_2, \ldots, b_n$ et faisons subir à la courbe C une translation b_iO. Soit C_i la nouvelle position de la courbe C et appelons D_i le domaine limité par C_i. Dans la région commune à D et à D_i les fonctions $y(x)$ et $y(x+b_i)$ sont par conséquent homolorphes.

Faisons pour chaque point b_i une opération semblable à la précédente et soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$ les domaines ainsi définis.

La région commune à ces domaines y compris D, sera la région cherchée.

Ce problème revient donc à la résolution d'une équation intégrale du type étudié.

Quand x est dans la région précédente, on voit sans peine que l'équation intégrale est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre infini et dont sa fonction génératrice est d'ordre par excès égal à 1.

Vu et approuvé :

Paris, le 5 janvier 1929.

Le Doyen de la Faculté des Sciences.

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 5 janvier 1929.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE II.

FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE LE LONG DES CONTOURS DE LEURS DOMAINES D'HOLOMORPHISME.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES ORTHOGONAUX DE FONCTIONS DE $\Omega(C)$ ET DE $\Omega'(C)$.

SECONDE PARTIE.

Sur de certaines équations intégrales de première espèce et leurs applications aux équations différentielles linéaire d'ordre infini.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRES ESPÈCES A INTÉGRALES PRISES LE LONG D'UN CONTOUR FERMÉ.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE INFINI.

85746-29 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.