ROGER BRARD

Quelques propriétés de la géométrie des carènes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1929

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__99__1_0>

Série n° ....   N° d'ordre ....

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

le grade de Docteur Ès-Sciences Mathématiques

PAR

ROGER BRARD

INGÉNIEUR DU GÉNIE MARITIME

PREMIÈRE THÈSE

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA GÉOMÉTRIE DES CARÈNES

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le .... 1929, devant la Commission d'Examen :

MM. KOENIGS *Président.*

VILLAT, MONTEL, E. G. BARRILLON *Examinateurs.*

TOULON. — Imprimerie des Constructions Navales. — 1929.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.	
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
Professeurs honoraires . .	V. BOUSSINESQ.	
	A. JOANNIS.	
	H. LE CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
	R. DONGIER.	
	E. HÉROUARD.	
Professeurs	Émile PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	G. KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET	Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT . . .	Minéralogie.
	H. ANDOYER	Astronomie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel BERTRAND . .	Chimie biologique.
	M^me P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN	Chimie générale.
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	Léon BERTRAND . . .	Géologie structurale et géologie appliquée.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD . . .	Botanique.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT . . .	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. MAILHE	Étude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Eugène BLOCH . . .	Physique théorique et physique céleste.
	Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie appliquée
	N.	Chimie minérale.

E. PÉCHARD	Chimie (Enseig^t P. C. N.).
V. AUGER	Chimie analytique.
M. GUICHARD . . .	Chimie minérale.
A. GUILLET	Physique.
G. MAUGUIN	Minéralogie.
L. BLARINGHEM . .	Botanique.
A. MICHEL-LÉVY .	Pétrographie.
A. DEREIMS	Géologie.
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.
H. BÉNARD	Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS	Physique.
G. BRUHAT	Physique.
H. MOUTON	Chimie physique.
L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. JAVILLIER . . .	Chimie biologique.
A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY . . .	Zoologie.
L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND . .	Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE	Radioactivité.

Secrétaire . . . . Daniel TOMBECK.

A Monsieur le Professeur Villat
Hommage de reconnaissance respectueuse

Roger Brard

A

Monsieur D. EYDOUX,

Directeur des Études à l'École Polytechnique,

et à

Monsieur E.-G. BARRILLON,

Ingénieur en Chef du Génie Maritime,

Directeur du Bassin d'essais de la Marine,

en hommage de ma profonde
et très respectueuse gratitude.

R. B.

A mes parents

en témoignage de

mon affection filiale.

(41) QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA GÉOMÉTRIE DES CARÈNES

Par M. l'Ingénieur de 3e classe Roger BRARD.

RELATIONS ENTRE LA SURFACE DES CENTRES DE CARÈNE, LA SURFACE DES CENTRES DE FLOTTAISON, LES LIGNES DE FLOTTAISON ET LES MURAILLES DES FLOTTEURS.

INTRODUCTION

Avant d'aborder l'examen de certains problèmes que pose la question de la stabilité des navires, il m'est agréable d'associer dans un même hommage de reconnaissance émue les noms des deux savants : MM. E. G. Barrillon et D. Eydoux, qui, par leurs encouragements et leurs conseils, m'ont permis d'apporter une modeste contribution à la recherche des solutions dont la réalisation pratique préoccupe, à tant de titres, les Marins et les Ingénieurs.

La partie de la théorie du navire qui traite du navire au repos paraît avoir été quelque peu délaissée ces dernières années au profit de celle qui étudie le navire en mouvement. Nous pensons cependant que c'est une question qui est bien loin d'être épuisée. Elle présente d'abord un intérêt spéculatif certain, par la nature même de son domaine, qui est celui de la géométrie des carènes : mais surtout, elle a une grande importance pratique, parce que c'est elle qui est chargée de définir et d'étudier tout ce qui a trait à une question fondamentale pour le navire : la stabilité.

Le travail que nous présentons est un essai pour faire mieux connaître la nature de ces éléments qu on considère pratiquement. Il a été orienté vers la recherche de la solution d'un problème essentiel de l'architecture navale, celui que nous appellerons avec M. Barrillon problème isocarène inverse.

Le problème direct « *Étude de la stabilité d'un navire déjà construit* » est assez simple, il se ramène à la détermination des surfaces des centres de carènes et des centres de flottaisons.

Mais le problème inverse est beaucoup plus compliqué. Il consiste essentiellement dans la détermination d'un navire dont les propriétés de stabilité soient données pour des angles quelconques. Il se pose logiquement quand il faut établir les plans d'un nouveau bâtiment : malheureusement on ne sait pas le résoudre autrement que pour des inclinaisons transversales infiniment petites.

Les démonstrations que nous allons donner ne sont pas toujours tout à fait rigoureuses. Nous aurons soin, chaque fois d'attirer l'attention sur les hypothèses que nous serons amenés à faire ; on verra que les résultats obtenus ont cependant une grande généralité, et conservent une probabilité très forte pour les cas exceptionnels où ils pourraient être en défaut.

On estimera, peut-être, qu'il aurait mieux valu attendre, pour les énoncer, qu'ils soient tout à fait au point. Nous ne nous y sommes pas résolu, parce que nous avons pensé que les applications pratiques auxquelles ils peuvent conduire dans un avenir plus ou moins rapproché sont telles qu'il est vraiment légitime de vouloir aller de l'avant, même si les points sur lesquels on est obligé de s'appuyer n'ont pas toute la solidité qu'on pourrait désirer.

Nous avons admis un certain nombre de définitions et de résultats maintenant classiques, et dont les principaux sont les suivants :

1° La carène d'un flotteur est la portion de sa surface susceptible d'être immergée quand il est en équilibre, ou qu'il roule et tangue normalement : sa flottaison est la ou les portions du plan de la surface libre du liquide (supposée parfaitement calme), qui sont comprises à l'intérieur du flotteur : chacune de ces portions est limitée par une courbe fermée, l'ensemble de ces contours constitue la ligne de flottaison du flotteur ; enfin, le volume de sa carène est le volume immergé, quand il est en équilibre ;

2° On appelle surface des flottaisons, ou surface des centres de flottaison, l'enveloppe des plans qui limitent dans le flotteur, des volumes de carène équivalents ; on justifie la deuxième définition en montrant que le centre de gravité de chaque flottaison est le point de contact du plan de cette flottaison avec son enveloppe ;

3° Le centre d'une carène est le centre de gravité du volume de cette carène. Quand on fait varier le plan de flottaison, de manière à obtenir des carènes équivalentes, le centre de carène est mobile par rapport au flotteur et décrit une surface dite surface des centres de carène ;

4° Le plan tangent à la surface des centres de carène en un point, est parallèle au plan tangent à la surface des flottaisons au point correspondant ;

5° Si on considère des plans de flottaison isocarènes et parallèles à une même direction, dite axe d'inclinaison, le lieu des centres de carène est une courbe dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe d'inclinaison a un rayon de courbure égal à $\frac{I}{V}$, V étant le volume constant des carènes, et I le moment d'inertie de la flottaison par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe d'inclinaison.

Nous ne reviendrons pas sur la grande importance que présente cette expression $\frac{I}{V}$ qu'on nomme rayon métacentrique. Nous rappellerons simplement que la connaissance de la position du centre de gravité du flotteur et de la surface des centres de carène, définit toutes les propriétés de stabilité initiale ou dynamique des navires, ainsi que leurs périodes de tangage et de roulis, et que la surface des flottaisons définit l'influence de l'accroissement infinitésimal de poids et de poussée ; en particulier, elle permet de prévoir les qualités de tenue à la mer d'un bâtiment.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE Ier.

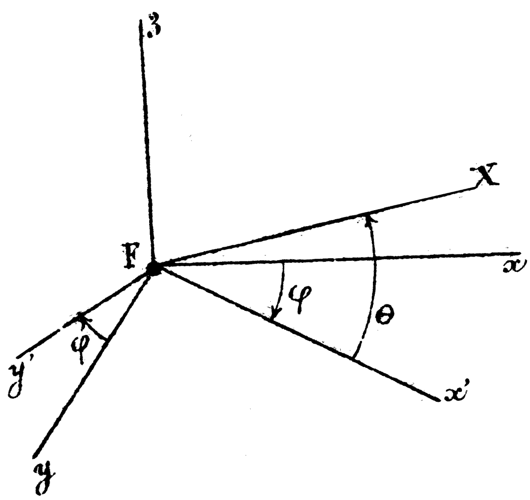
Condition pour qu'une courbe *F* tracée dans le plan tangent d'une surface [F] engendre une surface.

1. — Dans tout ce qui suit, nous désignerons par (M) la courbe engendrée par un point M, animé d'un mouvement à un paramètre, et par [M] la surface qu'il engendre si son mouvement est à deux paramètres. Si c est le centre de gravité d'une carène, F le centre de gravité d'une flottaison, nous désignerons, en vertu de ce principe, par surface [c] la surface des centres d'égales carènes, et par [F] la surface des flottaisons. Des courbes tracées sur ces surfaces seront représentées respectivement par (c) et par (F).

2. — Le problème qui consiste à rechercher un flotteur possédant comme surfaces [F] et [c] des surfaces [Φ] et [Γ] données à l'avance, n'a évidemment de sens que si [Φ] et [Γ] sont dans une position relative bien définie à un déplacement de translation près. Il va de soi, en effet, que deux flotteurs qui admettraient les surfaces [Φ] et [Γ] comme surfaces [F] et [c], mais orientées différemment l'une par rapport à l'autre, auraient des propriétés de stabilité de forme totalement différentes, tandis que deux navires admettant comme surface [F] la même surface [Φ], et comme surface [c] des surfaces [Γ] et [Γ'] provenant l'une de l'autre par un simple déplacement de translation, jouissent, à ce point de vue, de propriétés identiques. Enfin, l'on peut remarquer que pour un déplacement donné et une forme de murailles également donnée, on peut, en conservant la même surface [F] obtenir toute une série de surfaces [c] qui proviennent les unes des autres par un simple déplacement de translation : c'est ce qu'on réalise en limitant les murailles à une surface Σ, variable en position et forme, de manière que le volume de la carène ne soit pas modifié. Nous ne rechercherons donc pas à obtenir un flotteur dont les surfaces [F] et [c] aient par rapport à un système d'axes $o\,x\,y\,z$ des équations données, mais ayant, par rapport aux directions de ces axes, des équations « cliniques » données. A cet effet, ce que nous nous imposons, ce sont les représentations des surfaces [F] et [c] en fonctions de paramètres définissant, pour chacun de leurs points, la direction de leur plan tangent en ce point. On pourrait adopter les cosinus directeurs (α, β, γ) de la normale aux surfaces, et les différentes équations obtenues seraient parfaitement symétriques. Nous en choisirons cependant d'autres, qui ne nous conduiront pas, il est vrai, à la même symétrie, mais qui auront l'avantage de traduire simplement les courbes qu'on doit considérer pratiquement.

3. — Nous représenterons la surface [F] à partir d'un de ses points F_0, la surface [c] à partir d'un de ses points C_0, tels que les plans tangents à [c] en c_0 et à [F] en F_0 soient parallèles, et par exemple horizontaux, et nous considérerons ces surfaces comme les enveloppes de leurs cylindres circonscrits à génératrices horizontales.

Le plan des $x\,y$ sera le plan horizontal passant par F_0, l'axe des z sera orienté positivement vers le haut. Chaque cylindre circonscrit, sera défini, d'une part, par l'angle φ que font ses génératrices avec la direction $o\,y$, et, d'autre part, par le rayon de courbure de sa section droite en fonction de l'inclinaison θ du plan tangent commun sur le plan horizontal.



Réservant la lettre ρ aux rayons de courbure de la surface [F] et la lettre r à ceux de la surface [c], on voit que la donnée des fonctions $r\,(\theta, \varphi)$ et $\rho\,(\theta, \varphi)$ définit parfaitement chacune des deux surfaces, à un déplacement de translation près.

Nous appellerons $F_0\,x'\,y'\,z$ le trièdre provenant de $F_0\,x\,y\,z$ par une rotation de l'angle φ autour de $F_0\,z$, et nous représenterons une flottaison parallèle à la direction de plan définie par les angles θ et φ en la rapportant au système d'axes suivant de son plan : F Y est parallèle à $F_0\, y'$, et F X est perpendiculaire à F Y, son sens étant tel que sa projection sur le plan $F_0\, x\, y$ soit orientée comme la demi droite $F_0\, x'$.

Quant à l'équation de la courbe elle-même, nous l'écrirons indifféremment :

$$F\,(X, Y, \theta, \varphi) = 0 \quad \text{ou} \quad X = X\,(\theta, \varphi, Y),$$

X et Y étant les coordonnées d'un point de cette courbe par rapport aux axes F X et F Y

4. — De pareilles courbes dépendant de deux paramètres θ et φ, font partie d'une congruence, et par suite sont constamment tangentes à une surface fixe, qui est la surface focale de cette congruence.

Il peut se faire que la congruence soit d'une espèce singulière, la courbe au lieu de rester tangente à la surface focale en un nombre fini de points, ce qui est le cas général, peut avoir avec elle une infinité d'éléments de contact communs, et par conséquent, engendrer cette surface quand les deux paramètres varient

C'est précisement ce qui se passe si ces courbes sont les lignes de flottaison isocarènes et d'un certain flotteur : elles ne peuvent donc être quelconques et satisfont à une certaine condition. Nous allons rechercher cette condition dans la première partie, en examinant comment une ligne F tracée dans le plan tangent à une surface [F] en un point F, et dépendant par conséquent de deux paramètres peut engendrer une surface.

Pour résoudre ce problème nous allons d'abord nous occuper de la

I. — Représentation paramétrique d'une surface définie comme enveloppe de ses cylindres circonscrits a génératrices horizontales.

5. — Ainsi que nous l'avons déjà vu, un pareil cylindre est bien défini par la donnée de la fonction $\rho\,(\theta, \varphi)$ et d'un élément de contact (F_0, $F_0\, x\, y$).

Dans son plan, la tangente à la section droite du cylindre est de la forme :

$$x' \sin \theta - z \cos \theta - p_\varphi = 0 \qquad (2)$$

la fonction $p_\varphi(\theta)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$p''_\varphi + p_\varphi = \rho \qquad (3).$$

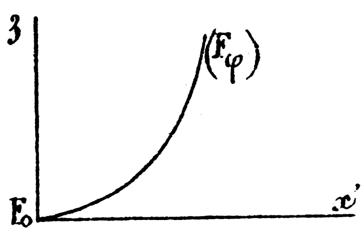
Dans les deux équations (2) et (3), φ joue le rôle de paramètre, et θ de variable indépendante. Le point de contact de la tangente et de la section droite, est défini par l'équation (2) et par :

$$x' \cos \theta + z \sin \theta - p'_\varphi = 0 \qquad (4).$$

Les coordonnées sont donc :

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= p_\varphi \sin \theta + p'_\varphi \cos \theta \\ z &= - p_\varphi \sin \theta + p'_\varphi \sin \theta \end{aligned} \right. \qquad (5).$$

Les conditions initiales : $x' = 0$ pour $\theta = 0$, et $z = 0$ donnent :



$$p'_\varphi = p_\varphi = o \text{ pour } \theta = 0.$$

La fonction p_φ est bien définie par les conditions précédentes, et par l'équation (3).

L'application de la méthode de la variation des constantes à l'intégration de cette équation revient à déterminer deux fonctions c_1 et c_2 vérifiant ;

$$\left\{ \begin{aligned} p_\varphi &= c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta \\ p'_\varphi &= - c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta \\ p''_\varphi &= - c'_1 \sin \theta - c'_2 \cos \theta - p_\varphi \end{aligned} \right. \qquad \begin{aligned} 0 &= c'_1 \cos \theta + c'_2 \sin \theta \\ p_\varphi &+ p''_\varphi = \rho \end{aligned} \qquad (6)$$

de là on tire :

$$\left\{\begin{array}{l} c'_1 = \rho \sin\theta \\ c'_2 = -\rho\cos\theta \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} c_1 = \int_0^\theta \rho \sin\theta \, d\theta + A \\ c_2 = -\int_0^\theta \rho\cos\theta \, d\theta + B \end{array}\right.$$

et par conséquent :

$$p\varphi = \cos\theta \left(A + \int_0^\theta \rho \sin\theta \, d\theta\right) + \sin\theta \left(B - \int_0^\theta \rho\cos\theta \, d\theta\right)$$

Les conditions initiales donnent immédiatement : $A = B = 0$, de sorte que le plan tangent à la surface considérée [F] a pour équation :

$$x' \sin\theta - z\cos\theta - \cos\theta \int_0^\theta \rho \sin\theta \, d\theta + \sin\theta \int_0^\theta \rho\cos\theta \, d\theta = 0$$

c'est-à-dire, par rapport aux axes $F_0\, x, y, z$:

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\theta - z\cos\theta - \cos\theta \int_0^\theta \rho\,(\alpha, \varphi)\sin\alpha \, d\alpha$$
$$+ \sin\theta \int_0^\theta \rho\,(\alpha, \varphi)\cos\alpha \, d\alpha = 0 \qquad (7).$$

La surface [F] s'obtiendrait en éliminant θ et φ entre l'équation (7) et celles qu'on en déduit par dérivation par rapport à θ et dérivation par rapport à φ. L'élimination ne serait d'ailleurs possible effectivement qu'à condition de préciser la forme de la fonction $\rho\,(\theta, \varphi)$; mais, comme ρ n'intervient dans le coefficient d'aucune des trois coordonnées, il est possible de calculer x, y, z à partir de (7) et des équations dérivées, et par conséquent d'obtenir la représentation paramétrique de [F].

En décrivant (7) par rapport à θ on a :

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\cos\theta + z\sin\theta + \sin\theta \int_0^\theta \rho \sin\theta \, d\theta$$
$$+ \cos\theta \int_0^\theta \rho\cos\theta \, d\theta = 0 \qquad (8)$$

et en dérivant par rapport à (φ) :

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - \cos\varphi \int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta \, d\theta$$
$$+ \int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\cos\theta \, d\theta = 0 \qquad (9)$$

de sorte que :

$$\left\{\begin{aligned}
x &= -\cos\varphi\int_0^\theta \rho\cos\theta\, d\theta + \sin\varphi\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\cos\theta\, d\theta \\
&\qquad - \sin\varphi\cos\theta\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\theta \\
y &= -\sin\varphi\int_0^\theta \rho\cos\theta\, d\theta - \cos\varphi\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\cos\theta\, d\theta \\
&\qquad + \cos\varphi\cos\theta\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\theta \\
z &= -\int_0^\theta \rho\sin\theta\, d\theta
\end{aligned}\right. \qquad (10).$$

II. — Déplacement élémentaire du point F pour une variation infiniment petite des paramètres θ et φ.

6. — Nous allons rapporter ce déplacement élémentaire aux axes X et Y. Ce déplacement étant dans le plan tangent à [F], on a $d\,Z = 0$.

Le tableau des cosinus directeurs des axes x, y, z et X Y Z est le suivant :

	x	y	z
X	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$\sin\theta$
Y	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
Z	$-\sin\theta\cos\varphi$	$-\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$

de sorte que :

$$\left\{\begin{aligned}
d\xi &= dx\cos\theta\cos\varphi + dy\cos\theta\sin\varphi + dz\sin\theta \\
d\eta &= -dx\sin\varphi + dy\cos\varphi \\
d\zeta &= -dx\sin\theta\cos\varphi - dy\sin\theta\sin\varphi + dz\cos\theta
\end{aligned}\right.$$

1° $\mathbf{d\,\varphi = 0}$, θ seul est variable, on a, d'après les formules : (10)

$$\left\{\begin{aligned}
d\,x &= -\,\rho\cos\varphi\cos\theta\,d\,\theta + \left(\int_0^\theta \frac{\partial\,\rho}{\partial\,\varphi}\sin\theta\,d\,\theta\right)\frac{\sin\varphi\,d\,\theta}{\sin^2\theta}\\
d\,y &= -\,\rho\sin\varphi\cos\theta\,d\,\theta - \left(\int_0^\theta \frac{\partial\,\rho}{\partial\,\varphi}\sin\theta\,d\,\theta\right)\frac{\cos\varphi\,d\,\theta}{\sin^2\theta}\\
d\,z &= -\,\rho\sin\theta\,d\,\theta
\end{aligned}\right.$$

On constate d'abord bien que $d\,\zeta = 0$, et l'on a :

$$\left\{\begin{aligned}
d\,\xi &= -\,\rho\,d\,\theta\\
d\,\eta &= 0
\end{aligned}\right. \qquad (11)$$

2° $\mathbf{d\,\theta = 0}$, φ seul est variable :

$$\left\{\begin{aligned}
d\,x = \Big[&\sin\varphi\int_0^\theta \rho\cos\theta\,d\,\theta - \cos\varphi\cos\theta\int_0^\theta \frac{\partial\,\rho}{\partial\,\varphi}\sin\theta\,d\,\theta\\
&+ \sin\varphi\,(1-\cos\theta)\int_0^\theta \frac{\partial^2\rho}{\partial\,\varphi^2}\sin\theta\,d\,\theta\Big]\,d\,\varphi\\
d\,y = \Big[&-\cos\varphi\int_0^\theta \rho\cos\theta\,d\,\theta - \sin\varphi\cos\theta\int_0^\theta \frac{\partial\,\rho}{\partial\,\varphi}\sin\theta\,d\,\theta\\
&- \cos\varphi\,(1-\cos\theta)\int_0^\theta \frac{\partial^2\rho}{\partial\,\varphi^2}\sin\theta\,d\,\theta\Big]\,d\,\varphi\\
d\,z = -&\left[\int_0^\theta \frac{\partial\,\rho}{\partial\,\varphi}\sin\theta\,d\,\theta\right]d\,\varphi
\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit encore $d\,\zeta = 0$, et :

$$\begin{aligned}
d\,\xi &= -\frac{d\,\varphi}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\partial\,\rho}{\partial\,\varphi}\sin\theta\,d\,\theta\\
d\,\eta &= -\,d\,\varphi\left[\int_0^\theta \rho\cos\theta\,d\,\theta + \overline{1-\cos\theta}\int_0^\theta \frac{\partial^2\rho}{\partial\,\varphi^2}\sin\theta\,d\,\theta\right]
\end{aligned} \qquad (12)$$

III. — Mesure du déplacement normal $\overline{M\ M'}$ qui permet de passer d'une ligne de flottaison $F(\theta, \varphi)$ a une ligne infiniment voisine $F(\theta + d\,\theta, \varphi + d\,\varphi)$.

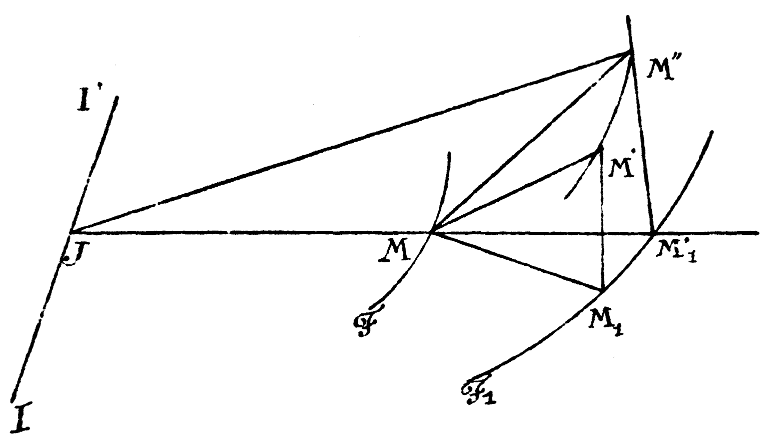
7. — Pour calculer ce déplacement, nous remarquerons que l'on peut aisément calculer ses composantes $\delta\,\nu_1$ et $\delta\,\nu_2$ respectivement dans le plan de la parallèle au plan de la flottaison primitive F L. et perpendiculaire à ce plan.

Soient $d\,\alpha$ l'angle infiniment petit sous lequel se coupent les deux plans F L et F′ L′. I I′ leur intersection, F_1 la projection de F' sur le plan de F L, M_1 la projection de M′. M″ et M'_1 les points où le rectiligne du dièdre formé par les deux plans coupe F' et F_1 ; soit J le sommet de ce rectiligne.

On voit aisément sur la figure, que, aux infiniments petits près du deuxième ordre par rapport à $d\,\alpha$, on a :

$$\delta\,\nu_1 = M\,M_1 = M\,M'_1 \cos(\overline{J\,M}, \overline{\delta\,\nu_1})$$

$$= (J\,M'' - J\,M) \cos(\overline{J\,M}, \delta\,\nu_1)$$



De même, puisque l'angle de $M' M''$ avec $M_1 M'_1$ est un infiniment petit d'ordre égal ou supérieur à celui de $d\,\alpha$, on a :

$$M_1 M' = M'_1 M'' - M_1 M'_1 \operatorname{tg} (\overline{M_1 M'_1}\, \overline{M' M''}) \backsim M'_1 M''$$

et par conséquent : $\delta\, \nu_2 = M'_1 M''$.

Finalement, puisque $J M'' \backsim J M'_1$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\, \nu_1 = (J M'_1 - J M) \cos (\overline{J M}, \overline{\delta\, \nu_1}) \\ \delta\, \nu_2 = M'_1 M'' \end{array} \right. \qquad (13)$$

aux infiniment petits du deuxième ordre près.

Or, à ce degré d'approximation, pour une variation $\delta\,\varphi$, $\delta\,\theta$ quelconque, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\, \nu_1 = a\, d\, \varphi + b\, d\, \theta \\ \delta\, \nu_2 = a'\, d\, \varphi + b'\, d\, \theta \end{array} \right. \qquad (14)$$

Nous allons calculer a et b, a' et b', par les formules (13), $a\, d\, \varphi$ et $a'\, d\, \varphi$ étant les valeurs de $\delta\, \nu_1$ et $\delta\, \nu_2$ quand $d\, \theta = 0$, $b\, d\, \theta$ et $b'\, d\, \theta$ leurs valeurs quand $d\, \varphi = 0$.

1° $d\, \theta = 0$.

8. — Les plans F L et F' L' sont parallèles à des plans tangents infiniment voisins d'un cône de révolution d'axe F o z, d'ouverture θ. Leur intersection I I' est donc parallèle à la génératrice du cône, donc à l'axe X, et comme elle passe évidemment par F, c'est l'axe X lui-même. J M est ainsi parallèle à Y.

Nous désignerons par X' Y' et Z' les coordonnées du point **M'** dans le système d'axes F' X' Y' Z' lié à la flottaison F'_1 et par X_1, Y_1, Z_1 ses coordonnées dans le système d'axes F X Y Z, lié à la flottaison F.

En vertu de (13) on a :

$$J M = Y \quad J M_1 = Y_1 \quad d\, \alpha = d\, \varphi, \text{ donc :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\, \nu_1 = (Y_1 - Y) \cos (Y, M\, \nu) \\ \delta\, \nu_2 = Z_1 \end{array} \right. \qquad (14^{\text{bis}})$$

En comparant le tableau des cosinus directeurs suivant :

	x	y	z
X′	$\cos\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi\, d\varphi$	$\cos\theta \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi\, d\varphi$	$\sin\theta$
Y′	$-\sin\varphi - \cos\varphi\, d\varphi$	$\cos\varphi - \sin\varphi\, d\varphi$	0
Z′	$-\sin\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi\, d\varphi$	$-\sin\theta \sin\varphi - \sin\theta \cos\varphi\, d\varphi$	$\cos\theta$

avec le tableau (I), on a : $\cos(Z, X') = 0$, $\cos(Z, Y') = \sin\theta\, d\varphi$, donc :

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= X' - Y' \cos\theta\, d\varphi + d\xi \\ Y_1 &= Y' + X' \cos\theta\, d\varphi + d\eta \\ Z_1 &= Y' \sin\theta\, d\varphi \backsim Y \sin\theta\, d\varphi \end{aligned}\right. \tag{15}$$

les valeurs de $d\xi$, $d\eta$ et $d\zeta$ étant celles qui sont données par les équations (12).

Finalement on a :

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= X' - Y' \cos\theta\, d\varphi - \frac{d\varphi}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin\theta\, d\theta \\ Y_1 &= Y' + X' \sin\theta\, d\varphi - d\varphi \left[\int_0^\theta \rho \cos\theta\, d\theta \right. \\ &\qquad \left. + (1-\cos\theta)\int_0^\theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin\theta\, d\theta\right] \end{aligned}\right. \tag{16}$$

D'autre part, en vertu meme de la définition de la fonction X $(\theta, \varphi\ Y)$, on a :

$$X' = X(\theta, \varphi + d\varphi, Y') = X + \frac{\partial X}{\partial Y} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial Y}(Y' - Y)$$

La condition $X \equiv X_1$ donne, en vertu de la première équation (16) :

$$X' - X = Y' \cos\theta\, d\varphi = \frac{d\varphi}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\theta$$

$$\backsim Y\cos\theta\, d\varphi + \frac{d\varphi}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\theta$$

donc $Y' - Y = \dfrac{1}{\dfrac{\partial X}{\partial Y}}\left[Y\cos\theta\, d\varphi - \dfrac{\partial X}{\partial\varphi}\, d\varphi + \dfrac{d\varphi}{\sin\theta}\displaystyle\int_0^\theta \dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\theta\right]$

et par conséquent en vertu de la deuxième équation (18), cette fois :

$$Y_1 - Y = Y_1 - Y' + Y' - Y$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial Y}}\left[Y\cos\theta\, d\varphi - \frac{\partial X}{\partial\varphi}\, d\varphi + X\cos\theta\frac{\partial X}{\partial Y}\, d\varphi\right.$$

$$- d\varphi\frac{\partial X}{\partial Y}\left(\int_0^\theta \rho\cos\theta\, d\theta + \overline{1-\cos\theta}\int_0^\theta \frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2}\sin\theta\, d\theta\right)$$

$$\left. + \frac{d\varphi}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\theta\right]$$

Finalement, on a, en vertu de (14), et de la troisième équation (15)

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} a = {} & \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial Y}}\left[Y + X\frac{\partial X}{\partial Y}\cos\theta - \frac{\partial X}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\sin\theta\, d\theta\right. \\ & \left. - \frac{\partial X}{\partial Y}\left\{\cos\theta\, d\theta + (1-\cos\theta)\int_0^\theta \frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2}\sin\theta\, d\theta\right\}\right]\cos(Y, MM_1) \end{aligned}\right.$$

$$a' = Y\sin\theta$$

2° $d\,\varphi = 0$.

9. — Les plans F L et F′ L′ se coupent cette fois suivant une droite perpendiculaire au plan $z\,x'$ et passant par F. La droite L L′ est donc l'axe Y. En vertu des formules (13) on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\,\nu_1 = (X_1 - X)\cos(X.\ M\ M_1) \\ \delta\,\nu_2 = Z_1 \end{array}\right. \qquad (14^{ter})$$

La comparaison du tableau (L) et du tableau suivant :

	x	y	z
X′	$\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\cos\varphi\,d\,\theta$	$\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\varphi\,d\,\theta$	$\sin\theta + \cos\theta\,d\,\theta$
Y′	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
Z′	$-\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\cos\varphi\,d\,\theta$	$-\sin\theta\sin\varphi - \cos\theta\sin\varphi\,d\,\theta$	$\cos\theta - \sin\theta\,d\,\theta$

montre que

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(X,\ X') = 1 \\ \cos(X,\ Y') = 0 \\ \cos(Z.\ X') = d\,\theta \end{array}\right.$$

de sorte qu'on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = X' = d\,\xi \\ Y_1 = Y' = d\,\eta \end{array}\right.$$

et par conséquent :

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = X' - \rho\,d\,\theta \\ Y_1 = Y' \end{array}\right. \qquad Z_1 = X'\,d\,\theta \qquad (18)$$

La condition $Y_1 = Y$ donne $Y' = Y$, donc $X' = \dfrac{\partial X}{\partial \theta}\, d\theta + X$, et

$$X_1 = X + \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} - \rho\right) d\,\theta \qquad (19)$$

En vertu de (14^{ter}), de la troisième équation (18) et de (19), on a :

$$\left\{\begin{aligned} b &= \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} - \rho\right) \cos\,(X,\ M\,M_1) \\ b' &= X \end{aligned}\right. \qquad (20)$$

IV. — Condition pour que la courbe $F(\theta,\ \varphi)$ engendre une surface.

10. — Considérons le plan normal à la courbe F en un de ses points M ; si la courbe F répond à la question, la surface (V) qu'elle engendre, coupe ce plan suivant une courbe qui a en général en M, une tangente bien déterminée. Les points singuliers de la courbe en question étant mis à part, le rapport $\dfrac{\delta\,v_2}{\delta\,v_1}$ a, quand $d\,\theta$ et $d\,\varphi$ tendent vers zéro, d'une manière quelconque, une limite qui est indépendante du rapport $\dfrac{d\,\theta}{d\,\varphi}$.

La condition qui l'exprime est que : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$.

Réciproquement, si l'égalité $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ est constamment vérifiée en tout point de la ligne F_1 quels que soient θ et φ, c'est que la ligne F bien que dépendant de deux paramètres, engendre une surface. En effet, la triple infinité des points qui constituent ces lignes F appartient à des courbes qu'on peut définir comme tangentes en chacun de leurs points à la direction définie par le rapport $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{\delta\,v_2}{\delta\,v_1}$: comme ces courbes ne dépendent que d'un paramètre, celui qui définit le point M sur la ligne F_1 par exemple, elles engendrent une surface sur laquelle sont tracées les lignes F.

10. — Pour transformer la condition précédente, nous remarquerons que :

$$tg\,(\mathrm{X},\ \mathrm{M\ M_1}) = \frac{-1}{tg\,(\mathrm{X},\ \mathrm{M}\ t)} = -\frac{1}{\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{X}}} = -\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{Y}},$$

$$\text{et } \cos\,(\mathrm{X\ M\ M_1}) = \sin\,(\mathrm{Y},\ \mathrm{M\ M_1})$$

En tenant compte des valeurs calculées pour a et a', b et b', au moyen des équations (17) et (20), on aboutit à l'équation aux dérivées partielles qui est la condition nécessaire et suffisante cherchée :

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Y} \sin\theta \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \theta} - \mathrm{X} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \varphi} + \Big\{ \mathrm{X} \cos\theta - \Big[\int_0^\theta \rho \cos\theta \, d\theta \\ &\qquad + (1 - \cos\theta) \int_0^\theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin\theta \, d\theta \Big] \Big\} \mathrm{X} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{Y}} \\ &= - \mathrm{X\,Y} \cos\theta + \rho\, \mathrm{Y} \sin\theta - \frac{\mathrm{X}}{\sin\theta} \int_0^\theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin\theta \, d\theta \end{aligned}} \quad (21)$$

V. — Vérification tout a fait générale de l'équation (21).

11. — On peut reprocher, peut-être, à la méthode précédente, d'être un peu longue. Nous l'avons préférée, à cause de son caractère géométrique, aux très nombreuses autres méthodes que l'on aurait pu employer. Mais à cause de l'importance que présente l'équation (21) dans la suite de la théorie, nous avons cru bon d'en donner une vérification tout à fait générale, et qui est basée sur le fait qu'elle doit être satisfaite pour toutes les courbes F qu'on obtient en coupant une surface $\Phi\ (x,\ y,\ z) = 0$ quelconque par les plans tangents à la surface [F]. On verra d'ailleurs que cette vérification peut aisément se transformer en véritable démonstration.

12 — Nous supposons d'abord que la surface [F] se réduise à un point : $\rho \equiv 0$. L'équation (21) s'écrit alors :

$$Y \sin \theta \frac{\partial X}{\partial \theta} - X \frac{\partial X}{\partial \varphi} + X^2 \frac{\partial X}{\partial Y} \cos \theta = - X Y \cos \theta. \quad (21^{bis})$$

L'équation (21^{bis}) doit être satisfaite quand on y remplace la fonction X (θ, φ, Y) par celle qui définit, avec les axes déjà indiqués, la section par un plan variable passant par l'origine d'une surface quelconque Φ $(x, y, z) = 0$.

Avec les notations déjà employées, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X \cos \theta \cos \varphi - Y \sin \varphi \\ y = X \cos \theta \sin \varphi = Y \cos \varphi \\ z = X \sin \theta \end{array} \right.$$

Comme on doit avoir

$$\Phi \, [X \cos \theta \cos \varphi - Y \sin \varphi, X \cos \theta \sin \varphi + Y \cos \varphi, X \sin \theta] \equiv 0$$

nous devons vérifier que $d \, \Phi \equiv 0$.

Le développement de cette différentielle est :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \cos \varphi \, d X \\ - \sin \varphi \, d Y \\ - (X \cos \theta \sin \varphi + Y \cos \varphi) \, d \varphi \\ - X \sin \theta \cos \varphi \, d \theta \end{array} \right.$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \sin \varphi \, d X \\ \cos \varphi \, d Y \\ + (X \cos \theta, \cos \varphi - Y \sin \varphi) \, d \varphi \\ - X \sin \theta \sin \varphi \, d \theta \end{array} \right.$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left\{ \begin{array}{l} \sin \theta \, d X = 0 \\ X \cos \theta \, d \theta \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit que l'on a nécessairement, en posant :

$$\Delta = \cos\theta \cos\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \cos\theta \sin\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} :$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial Y} &= -\frac{-\sin\varphi \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \cos\varphi \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{\Delta} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} &= \frac{X \sin\theta \cos\varphi \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + X \sin\theta \sin\varphi \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - X \cos\theta \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}{\Delta} \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= -\frac{-(X \cos\theta \sin\varphi + Y \cos\varphi) \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + (X \cos\theta \cos\varphi - Y \sin\varphi) \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{\Delta} \end{aligned} \right.$$

Remplaçons $\frac{\partial X}{\partial Y}$, $\frac{\partial X}{\partial \theta}$, $\frac{\partial X}{\partial Y}$ par ces expressions dans l'équation (21^{bis}) nous devrons aboutir à une identité.

Les multiplicateurs respectifs de $\frac{\partial X}{\partial \theta}$, $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial X}{\partial Y}$ sont :

$$Y \sin \theta_1 - X \text{ et } X^2 \cos \theta.$$

En faisant tout passer dans le premier membre, on obtient, pour résultat qui doit être identiquement nul :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} [X\,Y \sin^2\theta \cos\varphi - X^2 \cos\theta \sin\varphi - X\,Y \cos\varphi \\ &\qquad + X^2 \cos\theta \sin\varphi + X\,Y \cos^2\theta \cos\varphi] \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} [X\,Y \sin^2\theta \sin\varphi + X^2 \cos\theta \cos\varphi - X\,Y \sin\varphi \\ &\qquad - X^2 \cos\theta \cos\varphi + X\,Y \cos^2\theta \sin\varphi] \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial z} [-X\,Y \cos\theta \sin\theta + X\,Y \cos\theta \sin\theta] \end{aligned}$$

ce qui a lieu évidemment.

13. — *Remarque.* — La méthode de vérification qui vient d'être utilisée, peut permettre, lorsqu'on sait que l'équation (21^{bis}) est linéaire et du premier ordre, de retrouver les différents coefficients de cette équation Mettant cette équation sous la forme :

$$A \frac{\partial X}{\partial \theta} + B \frac{\partial X}{\partial \varphi} + C \frac{\partial X}{\partial Y} = D$$

on a à calculer trois fonctions :

$$\frac{A}{D}, \quad \frac{B}{D}, \quad \text{et} \quad \frac{C}{D},$$

ce qu'on peut faire évidemment, en écrivant que les coefficients de

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

dans l'équation $d\,\Phi = 0$, sont identiquement nuls.

14. — *Cas où* $\rho \neq 0$.

Nous désignerons comme précédemment par X_1, Y_1 et Z_1 les coordonnées d'un point d'une flottaison F' par rapport aux axes F X Y Z liés à une flottaison F infiniment voisine de F'_1 et par X', Y' et $Z' = 0$ les coordonnées du même point par rapport aux axes liés à F'.

Prenant pour flottaison F celle dont le plan est $x\ o\ y$, on a

$$(\delta) \left\{ \begin{aligned} x &= X_1 \cos\theta \cos\varphi - Y_1 \sin\varphi - Z_1 \sin\theta \cos\varphi \\ y &= X_1 \cos\theta \sin\varphi + Y \cos\varphi - Z_1 \sin\theta \sin\varphi \\ z &= X_1 \sin\theta + Z_1 \cos\theta \end{aligned} \right.$$

D'autre part, nous avons vu précédemment que :

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 &= X' - \rho\, d\,\theta - \left(Y \cos\theta + \frac{1}{\sin\theta} \int_0^\theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin\theta\, d\,\theta\right) d\,\varphi \\ Y_1 &= Y' + \left\{ X' \cos\theta - \left[\int_0^\theta \rho \cos\theta\, d\,\theta \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + (1 - \cos\theta) \int_0^\theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin\theta\, d\,\theta\right] \right\} d\,\varphi \\ Z_1 &= 0 + X'\, d\,\theta + Y' \sin\theta\, d\,\varphi \end{aligned} \right.$$

de sorte qu'aux infiniments petits du deuxième ordre près, on a :

$$(\delta')\quad\left|\begin{aligned} d\,X_1 &= \underline{d\,X'} - \rho\, d\,\theta - (\underline{Y\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{d\,\rho}{d\,\varphi}\sin\theta\, d\,\theta)\, d\,\varphi \\ d\,Y_1 &= \underline{d\,Y'} + \Big\{ \underline{X'\cos\theta} - \Big[\int_0^\theta \rho\cos\theta\, d\,\theta \\ &\qquad + (1-\cos\theta)\int_0^\theta \frac{d^2\rho}{d\,\varphi^2}\sin\theta\, d\,\theta\Big]\Big\}\, d\,\varphi \\ d\,Z_1 &= \underline{X'\, d\,\theta} + \underline{Y'\sin\theta\, d\,\varphi} \end{aligned}\right.$$

Nous avons souligné, dans ces expressions, les termes que l'on trouve déjà quand ρ est identique à zéro.

Soit $\Phi\,(x, y, z) = 0$ l'équation de la muraille $[v]$: puisque cette paroi peut être engendrée par les lignes F_1 l'équation $\Phi = 0$ est vérifiée identiquement quand on y fait la substitution (δ), et par conséquent il doit en être de même de l'équation : $d\,\Phi = 0$.

En remplaçant dans $d\,\Phi$, $d\,x$, $d\,y$ et $d\,z$ par leurs expressions en fonction de $d\,X_1$, $d\,Y_1$, $d\,Z_1$, $d\,\theta$ et $d\,\varphi$, c'est-à-dire de $d\,X'$, $d\,Y'$, $d\,\theta$ et $d\,\varphi$ au moyen des formules de transformation (δ'), on obtient une relation que les différentielles $d\,X'$, $d\,Y'$, $d\,\theta$ et $d\,\varphi$ doivent constamment vérifier, et qui nous permet, par conséquent, de calculer les expressions que les dérivées

$$\frac{\partial\,X'}{\partial\,\theta},\quad \frac{\partial\,X'}{\partial\,\varphi}\quad \text{et}\quad \frac{\partial\,X'}{\partial\,Y'}$$

doivent nécessairement avoir, si la fonction $X\,(\theta, \varphi, Y)$ représente bien des lignes qui engendrent une surface.

Pour simplifier l'écriture, nous posons :

$$A = \frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\partial\,\rho}{\partial\,\varphi}\sin\theta\, d\,\theta\ ;$$

$$B = \int_0^\theta \rho\cos\theta\, d\,\theta + (1-\cos\theta)\int_0^\theta \frac{\partial^2\rho}{\partial\,\varphi^2}\sin\theta\, d\,\theta.$$

et nous désignons dans la suite les termes obtenus déjà pour $\rho \equiv 0$, par le simple symbole (—). L'équation $d\,\Phi = 0$ s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\left\{\begin{array}{l}(—)\, d\,X' \\ (—)\, d\,Y' \\ (—)\, d\,\theta - \cos\theta \cos\varphi\, d\,\theta \\ (—)\, d\,\varphi - A \cos\theta \cos\varphi\, d\,\varphi + B \sin\varphi\, d\,\varphi\end{array}\right.$$

$$+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\left\{\begin{array}{l}(—)\, X' \\ (—)\, d\,Y' \\ (—)\, \rho \cos\theta \sin\varphi\, d\,\theta + (—)\, d\,\theta \\ (—)\, d\,\varphi - (A \cos\theta \sin\varphi + B \cos\varphi)\, d\,\varphi\end{array}\right.$$

$$+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\left\{\begin{array}{l}(-)\, d\,X' \\ (—)\, d\,Y' \\ (—)\, d\,\theta - \rho \sin\theta\, d\,\theta = 0 \\ (—)\, d\,\varphi - A \sin\theta\, d\,\varphi\end{array}\right.$$

de sorte que l'on a :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial X'}{\partial Y'} = (—) \\[2ex]
\dfrac{\partial X'}{\partial \theta} = \dfrac{(—) + \left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\, \rho \cos\varphi \cos\theta + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\, \rho \sin\varphi \cos\theta\right.}{(—)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\left. + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\, \rho \cos\theta\right]}{(—)} \\[2ex]
\dfrac{\partial X'}{\partial Y'} = \dfrac{(—) + \left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\, (A \cos\theta \cos\varphi - B \sin\varphi)\right.}{(—)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\left. + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\, (A \cos\theta \sin\varphi + B \cos\varphi)\right]}{(—)}
\end{array}\right.$$

En remplaçant dans l'équation (21) les dérivées par leurs expressions ci-dessus, nous devons aboutir à une identité.

Les multiplicateurs de

$$\frac{\partial X'}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial X'}{\partial \varphi} \text{ et } \frac{\partial X'}{\partial Y}$$

sont respectivement : (—), (—), (—) — B X, et le résultat à trouver au deuxième membre est (—) + ρ Y sin θ — A X. La vérification ayant déjà été faite pour $\rho \equiv 0$, nous savons que tous les produits de la forme (—) . (—) disparaissent identiquement ; il nous suffit, par conséquent, de nous occuper des autres.

En chassant le dénominateur :

$$\Delta \equiv (—) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos\theta \cos\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos\theta \sin\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sin\theta,$$

on voit que tout revient à montrer que :

$$\left\{\begin{aligned} & Y' \sin\theta \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \rho \cos\theta \cos\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \rho \cos\theta \sin\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \rho \cos\theta\right] \\ & - X' \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} (A \cos\theta \cos\varphi - B \sin\varphi) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} (A \cos\theta \sin\varphi \right. \\ & \qquad\qquad \left. + B \cos\varphi) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} A \sin\theta\right] \\ & - B X' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin\varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos\varphi\right) \equiv \left(\rho Y' \sin\theta - A X'\right) \\ & \qquad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos\theta \cos\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos\theta \sin\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sin\theta\right] \end{aligned}\right.$$

En faisant passer tous les termes dans le premier membre, on trouve pour expression devant être identiquement nulle :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} [\rho Y' \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - A X' \cos\theta \cos\varphi + B X' \sin\varphi \\ & \qquad - B X' \sin\varphi - \rho Y' \sin\theta \cos\theta \cos\varphi + A X' \cos\theta \cos\varphi] \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial y} [\rho Y' \sin\theta \cos\theta \sin\varphi - A X' \cos\theta \sin\varphi - B X' \cos\varphi \\ & \qquad + B X' \cos\varphi - \rho Y' \sin\theta \cos\theta \sin\varphi + A X' \cos\theta \sin\varphi] \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial z} [\rho Y' \sin\theta \cos\theta - A X' \sin\theta - (\rho Y' \cos\theta - A X') \sin\theta] \end{aligned}$$

ce qui a lieu évidemment.

15. — *Remarque I.* — La vérification précédente ne donne aucun renseignement sur l'exactitude des expressions A et B. Mais la manière même dont elles s'introduisent, montre qu'elles sont dues au déplacement du point F quand θ et φ varient.

D'une manière précise, le segment infiniment petit F et F' a deux composantes suivant l'axe des x et l'axe des y qui ont comme valeurs :

$$\begin{cases} -\rho\, d\,\theta - A\, d\,\varphi \\ -B\, d\,\varphi \end{cases}$$

A et B sont donc faciles à déterminer, ce sont les composantes de F F' quand $d\,\theta = 0$, au facteur $d\,\varphi$ près.

Remarque II. — La vérification précédente, pourrait se transformer en une véritable démonstration. Il suffirait, pour cela, de démontrer que la condition cherchée est nécessairement une équation aux dérivées partielles linéaire et du premier ordre, et l'on obtiendrait les multiplicateurs de

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial X}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial \varphi}.$$

ainsi que le terme où ces dérivées ne figurent pas, ce qui ne fait, en réalité, que trois inconnues, en écrivant que les coefficients de

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

dans l'équation $d\,\Phi = 0$, sont nuls.

CHAPITRE II.

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de lignes F θ, φ puisse constituer les flottaisons d'un flotteur dont la surface [F] est donnée à l'avance.

16. — Une première condition nécessaire est que la fonction X (θ, φ, Y) vérifie l'équation (21) : une autre condition est que F soit fermée, et que le point F, dont les coordonnées sont $X = Y = 0$, soit le centre de gravité de l'aire qu'elle limite.

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \iint X \, dX \, dY = 0 \\ \iint Y \, dX \, dY = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \int_F X^2 \, dY = 0 \\ \int_F X\,Y \, dY = 0 \end{cases} \tag{22}$$

L'ensemble des conditions (21) et (22) constitue les propriétés nécessaires et suffisantes que doivent posséder une surface F et des lignes F pour que ces lignes soient les flottaisons ***isocarènes*** d'un flotteur [V], dont [F] est la surface des flottaisons correspondantes.

Nous admettons ici un théorème essentiel, qui est maintenant classique, et qui est la réciproque de celui que nous avons énoncé au paragraphe 2) de l'introduction.

17. — Soit [V] la surface engendrée par les lignes F qui satisfont aux conditions (21) et (22). Aux murailles obtenues, on peut faire correspondre une infinité de flotteurs différents qu'on obtient en limitant vers le bas, ces murailles à des surfaces Σ quelconques.

On peut donc dire; qu'à un ensemble F, [F] correspond une infinités de surfaces [c], mais ces surfaces ont quelque chose de particulier, c'est d'être homothétiques les unes des autres : en effet, les rayons r (θ, φ) qui définissent leurs cylindres circonscrits, vérifient la relation :

$$r(\theta, \varphi) = \frac{\frac{1}{3}\int_F X^3 \, d\, Y}{V}$$

où V est le volume de la carène des flotteurs : ils sont donc tous égaux les uns aux autres, à un facteur constant près, ce qui établit la propriété.

18. — *De cela, il résulte immédiatement, que deux surfaces* Φ *et* Γ *données à l'avance, ne sauraient constituer, en général, les surfaces* [F] *et* [c] *d'un même flotteur.* Les fonctions X (θ, φ, Y) qui vérifient l'équation (21) dépendent d'une fonction arbitraire, qui est, par exemple, ce à quoi elles se réduisent pour $\varphi = 0$.

Une condition nécessaire pour que la surface Γ soit associable à [F] est qu'elle fasse partie de la famille des surfaces que l'on obtient par la formule (23), quand on fait varier la fonction X_0 (θ, Y) = X (θ, 0, Y) mais cette condition n'est pas suffisante, il faut encore que la fonction X correspondante vérifie les conditions (22) quels que soient θ et φ.

Nous préciserons tous ces résultats dans la deuxième partie.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE III.

Conditions intrinsèques que doit vérifier une fonction X (θ, φ, Y) pour représenter des lignes de flottaisons isocarènes d'un flotteur.

19. — Nous nous proposons dans ce qui suit, d'étudier quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une fonction X (θ, φ, Y) soit susceptible de représenter les lignes de flottaison isocarènes d'un certain flotteur, et d'en déduire quels liens ces conditions entraînent entre les surfaces [F], [c], [V] et les lignes *F* elles-mêmes.

20. — Soit en effet X (θ, φ, Y) une fonction quelconque et ρ les solutions de l'équation (1) qu'elle permet de définir. Ces fonctions s'expriment à partir de deux fonctions arbitraires, par exemple :

$$\rho_0 (\theta) \equiv \rho (\theta, \varphi_0) \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} (\theta, \varphi_0)$$

et sont, sauf cas exceptionnels, des fonctions des trois variables θ, φ, Y. Elles ne sont donc pas susceptibles en général de représenter une surface [F], et par suite elle-même ne peut représenter des lignes de flottaison d'un flotteur.

En même temps que l'équation (1), les fonctions ρ doivent vérifier l'équation (I) $\frac{\partial \rho}{\partial Y} = 0$ et imposent de ce fait des propriétés aux fonctions X (θ, φ, Y) que nous allons maintenant rechercher.

Nous avons déjà formulé les conditions qui relient les courbes *F* à la surface F. Elles sont constituées par l'équation :

$$\mathrm{Y} \sin \theta \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \theta} - \mathrm{X} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \varphi} + \left\{ \mathrm{X} \cos \theta - \left[\int^{\theta} \rho \cos \theta \, d\theta + (1 - \cos \theta) \int_0^{\theta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin \theta \, d\theta \right] \right\}$$

$$\mathrm{X} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{Y}} = - \mathrm{X} \; \mathrm{Y} \cos \theta + \rho \; \mathrm{Y} \sin \theta - \frac{\mathrm{X}}{\sin \theta} \int_0^{\theta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin \theta \, d\theta$$

et par les conditions

$$(A) \quad \int X^2 \, dY = 0$$

$$(B) \quad \int X Y \, dY = 0$$

Nous allons montrer maintenant que les lignes F doivent satisfaire à des conditions indépendantes de toute surface [F], et en quelque sorte intrinsèques.

22. — Remarquons d'abord, que dans l'équation (1) la fonction ρ entre sous des formes assez diverses qui sont :

$$\alpha = \int_0^\theta \rho \cos\theta \, d\theta, \; \beta = \int_0^\theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin\theta \, d\theta, \; \gamma = \int_0^\theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin\theta \, d\theta \text{ et } \rho$$

mais il est possible de remplacer la fonction ρ (θ, φ) par une fonction convenable de θ et φ, telle, que par cette opération, les signes soient complétement disparus de (1), à l'exception d'un seul d'entre-eux.

Si nous posons :

$$\begin{cases} \lambda(\theta, \varphi) = \int_0^\theta \rho \sin\theta \, d\theta \\ \mu(\theta, \varphi) = \int_0^\theta \rho \cos\theta \, d\theta \end{cases}$$

on voit que l'une ou l'autre des fonctions λ ou μ possède la qualité demandée.

Vérifions d'abord que la donnée de λ (θ, φ) définit bien ρ (θ, φ). Cela résulte de ce que $\rho \sin\theta = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$: connaissant ρ (θ, φ), on en déduit μ (θ, φ) de sorte qu'entre λ et μ il existe une relation :

$$\lambda(\theta, \varphi) = \Phi\,[\theta, \varphi, \mu(\theta, \varphi)],$$

et par conséquent les dérivées successives de λ s'expriment en fonction de celles de μ, les coefficients des dérivées de μ étant connus dans ces expressions.

Remarquant que β et γ sont égaux respectivement à $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$, que $\rho = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$, on voit que le remplacement de la fonction φ par la fonction λ (ou par la fonction μ) conduit à une équation (1 bis) où figurent outre θ, φ, Y, X, $\frac{\partial X}{\partial \theta}$, $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial X}{\partial Y}$ la fonction $\lambda(\theta, \varphi)$ et ses dérivées $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$, ainsi que

$$\int_0^\theta \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \, d\,\theta.$$

De plus, cette équation (1 bis), considérée comme équation en λ, est linéaire par rapport aux dérivées partielles premières et seconde de λ. On voit d'ailleurs aisément, qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} = f\left(\theta, \varphi, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}, \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}, X, \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial X}{\partial Y}, Y\right)$$

de sorte que, *quelle que soit la fonction $X(\theta, \varphi, Y)$, elle est du type parabolique, et les deux réseaux de multiplicités caractéristiques sont confondus en un seul ; les multiplicités caractéristiques s'obtiennent en laissant θ constant.*

Supposons donnée la fonction X (θ, φ, Y) ainsi que les fonctions λ_0 et $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}$ auxquelles se réduisent λ et $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$ pour une multiplicité non caractéristique telle que $\varphi = 0$: l'équation (1 bis) permet alors de calculer les fonctions $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2}$, ... $\frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k}$ ..... de sorte que dans le développement en série

$$\lambda_0(\theta, Y) + \frac{\theta}{1} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}(\theta, Y) + \ldots\ldots + \frac{\varphi^k}{k\,!} \frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k}(\theta, Y) + \ldots\ldots \quad (9)$$

tous les coefficients des puissances successives de φ sont connus. Le théorème de Cauchy établit, moyennant certaines restrictions, que la série (9) est uniformément convergente au voisinage de $\varphi = 0$, et que sa somme est une fonction λ de φ, θ et Y, qui vérifie l'équation (1 bis).

Nous allons chercher quel est le degré d'indétermination du problème dans le seul cas intéressant pour nous : celui où la position λ définie par la série (9) est indépendante de Y.

23. — Supposons uniformément convergente la série qu'on peut déduire de la série (8) par dérivation terme à terme par rapport à Y.

On obtient dans ces conditions une série :

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial Y}(\theta, Y) + \ldots\ldots\ldots + \frac{\varphi^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \lambda_0}{\partial \varphi^k \, \partial Y} + \ldots\ldots\ldots$$

qui représente la fonction $\frac{\partial \lambda}{\partial Y}$, et la condition nécessaire et suffisante pour que la condition

$$(1 \text{ bis}) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial Y} = 0$$

soit identiquement vérifiée, c'est que tous les coefficients de la série (9) soient nuls.

Nous devons donc avoir :

$$\frac{\partial^i \lambda_0}{\partial \theta^{i-1} \, \partial Y} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots\ldots) \tag{10}$$

Remarquons, que si nous cherchons des flotteurs dont la surface [F] passe par une multiplicité (F) obtenue en laissant φ constant, la donnée de cette multiplicité fixe pour λ_0 et $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}$ des fonctions de θ uniquement, de sorte que les équations (10) sont vérifiées d'elles-mêmes pour $i = 1$ et $i = 2$.

Supposons qu'on se donne en outre les courbes *F* correspondant à cette multiplicité (F), c'est-à-dire, une certaine fonction X_0 (θ, Y), et recherchons ce qu'entraînent les conditions (10) pour les dérivées successives $\frac{\partial X_0}{\partial \varphi} \ldots\ldots \frac{\partial^k X_0}{\partial \varphi^k} \ldots\ldots\ldots$

Remarquons d'abord qu'en désignant par $E = 0$ l'équalion (1 bis), les dérivées $\frac{\partial^i \lambda_0}{\partial \varphi^{i-1} \, \partial Y}$ s'introduisent dans les expressions de $\frac{d^k E}{d \varphi^{k-1} d Y}$ quand on fait les calculs en donnant à φ la valeur zéro.

Analysons de plus près comment s'introduisent les dérivées successives de X et de λ. Il suffit pour cela de remarquer que :

$$E \equiv E \left[\theta, \varphi, Y : X \; ; \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial X}{\partial Y} ; \lambda \; ; \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}, \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} ; \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2}\right]$$

on voit alors immédiatement que dans l'expression de $\frac{d E}{d Y}$, il entre outre les variables ou fonctions précédentes, trois nouvelles dérivées en X qui sont : $\frac{\partial^2 X}{\partial \theta, \ \partial Y}, \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi, \ \partial Y}$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial Y^2}$, et quatre nouvelles dérivées en λ, qui sont :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial Y}, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta, \ \partial Y}, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi, \ \partial Y}, \text{ et } \frac{\partial^3 \lambda}{\partial \theta^2, \ \partial Y}$$

D'une manière générale, les expressions de $\frac{\partial^{k+1} E}{\partial \varphi^k \ \partial Y}$ et de $\frac{\partial^k E}{\partial \varphi^{k-1} \ \partial Y}$ différent, parce que dans $\frac{\partial^{k+1} E}{\partial \varphi^k \ \partial Y}$ il entre six fonctions nouvelles qui sont : trois dérivées en X, à savoir :

$$\frac{\partial^{k+2} X}{\partial \varphi^{k+1} \ \partial Y}, \quad \frac{\partial^{k+2} X}{\partial \theta \ \partial \varphi^k \ \partial Y}, \quad \frac{\partial^{k+2} X}{\partial Y^2 \ \partial \varphi^k}$$

et trois dérivées en λ, savoir :

$$\frac{\partial^{k+2} \ \partial \lambda}{\partial \varphi^{k+1} \ \partial Y}, \quad \frac{\partial^{k+2} \lambda}{\partial \varphi^k \ \partial Y \ \partial \theta}, \quad \frac{\partial^{k+3} \lambda}{\partial \varphi^k \ \partial \theta^2 \ \partial Y}$$

Il suffit d'ajouter l'indice zéro aux fonctions précédentes, pour voir quelles sont les dérivées qui s'introduisent aux premiers nombres des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d E_0}{d Y} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^{k+1} E}{d \varphi^k \ d Y} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right. \tag{12}$$

Ces dérivees ne sont d'ailleurs pas indépendantes les unes des autres. D'une manière précise, on voit aisément, qu'en ce qui concerne les k premières équations (12), les fonctions X_0, $\frac{\partial X_0}{\partial \varphi}$ $(\theta \ Y)$.. $\frac{\partial^k X_0}{\partial \varphi^k}$ $(\theta \ Y)$ servent à exprimer toutes les dérivées en X_0, et les fonctions $\lambda_0 (\theta \ Y)$, $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}$ $(\theta \ Y)$...... $\frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k}$ $(\theta \ Y)$ toutes les dérivées en λ.

Remplaçant alors dans les équations (12) les dérivées de λ prises partiellement par rapport à Y par zéro, c'est-à-dire, tenant compte de l'équation (1 bis), on obtient les équations

$$\left\{\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right. \qquad (13)$$

dont les k premières constituent k relations entre

$$\theta,\ Y,\ X_0 \ldots\ldots\ldots \frac{\partial^k X_0}{\partial \varphi^k} \quad \lambda_0 \ldots\ldots \frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k},$$

qui sont nécessairement vérifiées si φ, donc λ, sont indépendants de Y. Inversement, si les équations (13) sont vérifiées, comme elles se déduisent simplement les unes des autres par dérivation par rapport à φ en supposant nulles les dérivées de λ prises par rapport à Y, on voit aisément, que la comparaison de deux consécutives d'entre elles, entraîne la nullité des nouvelles dérivées de λ par rapport à Y qui s'introduisent.

Si par exemple, on compare la k^e et la $(k+1)^e$, les dérivées en λ qui s'introduisent sont :

$$\frac{\partial^{k+2} \lambda_0}{\partial \varphi^{k+1}\, \partial Y}, \quad \frac{\partial^{k+2} \lambda_0}{\partial \varphi^k\, \partial \theta\, \partial Y}, \quad \frac{\partial^{k+3} \lambda_0}{\partial \varphi^k\, \partial \theta^2\, \partial Y}$$

qui s'expriment, la première à partir de $\frac{\partial^{k+1} \lambda_0}{\partial \varphi^{k+1}}$, les deux autres, à partir de $\frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k}$.

Or, la comparaison de la $(k-1)^e$ et de la k^e équations (13) a établi que $\frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k}$ est indépendante de Y, donc qu'on a :

$$\frac{\partial^{k+2} \lambda_0}{\partial \varphi^k\, \partial \theta\, \partial Y} = \frac{\partial^{k+3} \lambda_0}{\partial \varphi^k\, \partial \theta^2\, \partial Y} = 0,$$

la comparaison de la k^e et de la $(k+1)^e$ équation, montre donc que:

$$\frac{\partial \dfrac{d^k E}{d\varphi^{k-1}\, dY}}{\partial \dfrac{\partial^{k+1}\lambda_0}{\partial\varphi^k\,\partial Y}} \times \frac{\partial^{k+2}\lambda_0}{\partial\varphi^{k+1}\,\partial Y} = 0,$$

et que par conséquent $\dfrac{\partial^{k+2}\lambda_0}{\partial\varphi^{k+1}\,\partial Y} = 0.$

c'est-à-dire que : $\dfrac{\partial^{k+1}\lambda_0}{\partial\varphi^{k+1}}$ est indépendante de Y.

Le raisonnement qui précède, établit donc par récurrence, que ***la*** *vérification des équations (13) est la condition nécessaire et* ***suffisante*** *pour que l'équation (1 bis) soit satisfaite.*

Si on examine la première équation (13), on voit aisément que le choix d'une multiplicité (F) non caractéristique et des flottaisons *F* correspondantes, fixe λ_0 $\dfrac{\partial\lambda_0}{\partial\varphi}$ et X_0 (θ, Y), donc la fonction $\dfrac{\partial X_0}{\partial\varphi}$ (θ, Y).

La deuxième équation (13) établit une relation entre

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial\varphi^2}\ (\theta, Y) \text{ et } \frac{\partial^2\lambda_0}{\partial\varphi^2}\ (\theta).$$

La troisième relation entre

$$\frac{\partial^3 X_0}{\partial\varphi^3} \text{ et } \frac{\partial^3\lambda_0}{\partial\varphi^3} \text{ etc..}$$

D'une manière générale, la k^e équation (13) nous permettrait de déterminer la dérivée $\dfrac{\partial^k\lambda_0}{\partial\varphi^k}$ en fonction des fonctions $X_0(\theta, Y)$ et $\dfrac{\partial X_0}{\partial\varphi}$ (θ, Y)...... $\dfrac{\partial^k\lambda_0}{\partial\varphi^k}$ (θ, Y) et la fonction ainsi trouvée serait indépendante de Y.

Mais, pour que le développement :

$$\lambda_0(\varphi) + \dots\dots\dots + \frac{\varphi^k}{k!}\,\frac{\partial^k\lambda_0}{\partial\varphi^k} + \dots\dots \tag{14}$$

représente une solution de l'équation (1), il faut que ces différentes dérivées $\frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k}$ coincident avec les fonctions que permettent de calculer les équations successives :

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{d\ E_0}{d\ \varphi} = 0 & \text{donnant} & \frac{\partial^3 \lambda_0}{\partial \varphi^3} \\ \dots\dots\dots & & \\ \frac{d^{k-2} E_0}{d\ \varphi^{k-2}} = 0 & \dots\dots\dots & \frac{\partial^k \lambda_0}{\partial \varphi^k} \\ \dots\dots\dots & & \end{array}\right. \qquad (15)$$

Il en résulte des conditions pour les différentes fonctions $\frac{\partial^i X_0}{\partial \varphi^i}$ que nous allons maintenant étudier.

24. — La première équation (13) est par exemple de la forme :

$$f \left| X_0 \frac{\partial X_0}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial X_0}{\partial Y}; \frac{\partial^2 X_0}{\partial \theta, \partial Y}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial \varphi\ \partial Y}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial Y^2}; \lambda_0 \frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta}, \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2} \right| = 0 \qquad (16)$$

Cette équation (16) permet de calculer pour $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2}$ une fonction qui doit coïncider avec celle que l'on obtient grâce à l'équation (1 bis) :

$$E_0 \left| X_0, \frac{\partial X_0}{\partial \theta}, \frac{\partial X_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial X_0}{\partial Y}, \lambda_0 \frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta}, \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2} \right| = 0$$

écrite pour $\varphi = 0$. L'élimination de $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2}$ entre les équations $E_0 = 0$ et (16) permet d'écrire une équation (17)

$$g \left| X_0, \frac{\partial X_0}{\partial \theta}, \frac{\partial X_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial X_0}{\partial Y}; \frac{\partial^2 X_0}{\partial \theta, \partial Y}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial \theta\ \partial Y}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial Y^2}; \lambda_0 \frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta}, \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi} \right| = 0 \qquad (17)$$

que doit nécessairement vérifier la fonction X pour $\varphi = 0$.

Naturellement, la condition (17) n'est pas suffisante. Pour exprimer que les fonctions $\frac{\partial^3 \lambda_0}{\partial \varphi^3}$ définies par la deuxième équation (13) et par l'équation $\frac{d\ E_0}{d\ \varphi} = 0$ sont identiques, on est conduit à une condition (17′), obtenue en éliminant $\frac{\partial^3 \lambda_0}{\partial \varphi^3}$ entre la deuxième équation(13) et l'équation $\frac{d\ E_0}{d\ \varphi} = 0$.

Le résultat est :

$$g_1\begin{bmatrix} X_0,\ \frac{\partial X}{\partial \theta},\ \frac{\partial X_0}{\partial \varphi},\ \frac{\partial X}{\partial Y};\ \frac{\partial^2 X_0}{\partial \theta\, \partial Y},\ \frac{\partial^2 X_0}{\partial \varphi\, \partial Y},\ \frac{\partial^2 X_0}{\partial Y^2}: \\ \frac{\partial^2 X_0}{\partial \theta\, \partial \varphi},\ \frac{\partial^2 X_0}{\partial \varphi^2},\ \frac{\partial X_0}{\partial Y\, \partial \varphi};\ \frac{\partial^3 X_0}{\partial \theta\, \partial \varphi\, \partial Y},\ \frac{\partial^3 X_0}{\partial \varphi\, \partial Y},\ \frac{\partial^3 X_0}{\partial \varphi\, \partial Y^2} \\ \lambda_0,\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi},\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta},\ \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2},\ \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \theta\, \partial \varphi} \end{bmatrix} = 0 \qquad (17')$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, toutes les dérivées de λ qui entrent dans cette équation, s'expriment en fonction de λ_0 (θ). $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}(\theta)$, $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2}(\theta)$. Si par conséquent, on substitue dans (17'), à ces fonctions, les valeurs données arbitrairement pour λ_0 et $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}$, et calculée pour $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi^2}$ (indifféremment au moyen de (1 bis) ou de la première équation (13), on obtient une condition qui porte sur $\frac{\partial^3 X_0}{\partial \varphi^2}$ et $\frac{\partial^3 X_0}{\partial \varphi^2\, \partial Y}$.

De la même manière, on montrerait, que la compatibilité des équations $\frac{d^{n-2} E_0}{d\varphi^{n-2}} = 0$ et de la $(n-1)^e$ équation (13), pour la détermination d'une fonction unique $\frac{\partial^n \lambda_0}{\partial \varphi^n}$ indépendante de Y, se traduit par une condition portant sur :

$$\frac{\partial^{n-1} X_0}{\partial \varphi^{n-1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^n X_0}{\partial \varphi^{n-1}\, \partial Y}$$

Ainsi, la condition (1 bis) entraîne pour la fonction X une infinité de conditions qu'elle doit vérifier pour $\varphi = 0$. Mais on peut les traduire simplement. Si l'on se donne arbitrairement la multiplicité (F), c'est-à-dire les fonctions λ_0 (θ) et $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}(\theta)$, ainsi que les fonctions X_0 (θ, Y), la condition (17) constitue une équation différentielle du premier ordre que doit vérifier la fonction $\frac{\partial X_0}{\partial \varphi}(\theta, Y)$, θ jouant le rôle de paramètre et Y de variable indépendante. On peut donc considérer la fonction $\frac{\partial X_0}{\partial \varphi}$ (θ, Y) comme définie, si l'on se donne la fonction $f_1(\theta)$ à laquelle elle se réduit pour Y = O.

De même la condition (17') définit la fonction $\frac{\partial^2 X_0}{\partial \varphi^2}(\theta, Y)$, si l'on s'impose la fonction $f_2(\theta) = \frac{\partial^2 X_0}{\partial \varphi^2}(\theta, o)$, et ainsi de suite.

Par conséquent, étant donnée une multiplicité (F), on est assuré de pouvoir trouver une infinité de lignes X (θ, φ, Y) permettant de déterminer un flotteur dont la surface [F] contienne la multiplicité (F) donnée à l'avance. Une fonction X est parfaitement définie par la donnée de la fonction X_0 (θ, Y), ainsi que des fonctions :

$$(A) \quad \begin{cases} f_1(\theta) = \frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, Y) \text{ pour } Y = O. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(\theta) = \frac{\partial^n X}{\partial \varphi^n}(\theta, Y) \text{ ———} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si d'autre part, on remarque que se donner ces fonctions $f_1 \dots\dots$ $f^n \dots\dots$ revient à se donner les coefficients de la série :

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, o, o.) + \frac{\varphi}{1}\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}(\theta, o, o) + \dots\dots + \frac{\varphi^k}{k'}\frac{\partial^{k+1} X}{\partial \varphi^{k+1}}(\theta, o, o) + \dots$$

et par conséquent la fonction $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ (θ, φ, o) qu'elle représente moyennant certaines conditions, on voit que finalement, *la fonction* X *(θ, φ, Y) permettant de définir au moyen de l'équation (1) une fonction λ de θ et φ seulement, est parfaitement définie par la donnée d'une multiplicité (F), et des fonctions auxquelles se réduisent respectivement la fonction* X *pour φ = O, et sa dérivée* $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ *pour* Y = Y_0.

25. — Mais on peut encore aller plus loin et nous allons chercher comment dans le cas le plus général, d'une équation reliant deux fonctions X (θ, φ Y) et λ (θ, φ) du premier ordre en X, et du deuxième en λ, on peut former les conditions intrinsèques que doit vérifier une fonction X, pour définir au moyen de cette équation une fonction λ indépendante de Y. Nous appellerons toujours

(1 bis) l'équation en question : nous ne tiendrons compte qu'ensuite, de la forme particulière qu'elle revêt dans le problème qui nous occupe plus spécialement.

Supposons que, par un procédé quelconque, l'on ait pu trouver une fonction X (θ, φ, Y) vérifiant les conditions (17), (17')... etc. pour $\varphi = \varphi_0$. Cette fonction permet de calculer une fonction λ (θ, φ), vérifiant l'équation (1 bis), et par conséquent l'équation (17), pour une valeur quelconque de φ, ainsi d'ailleurs que n'importe laquelle des équations (17'), (17'') etc...

Soient par exemple φ_1 une valeur de φ différente de φ_0, et λ_1 et $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi}$ les fonctions auxquelles se réduisent λ et $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$ pour $\varphi = \varphi_1$. L'équation (17) écrite pour $\varphi = \varphi_1$ constitue une condition nécessaire pour que la fonction X (θ, φ, Y) permette de déterminer une solution de l'équation (1 bis), indépendante de Y, et satisfaisant pour $\varphi = \varphi_1$ aux conditions que nous venons d'énoncer. Comme précisément, la fonction λ répond à la question, c'est que (17) est satisfaite pour $\varphi = \varphi_1$. Comme φ_1 est quelconque elle est vérifiée pour une valeur quelconque de φ.

Ainsi, la fonction λ (θ, φ) étant donnée, toute solution X *de l'équation du premier ordre (1 bis), est solution de l'équation du deuxième ordre (17), et inversement, la fonction* X (θ, φ, Y) *étant donnée, toute fonction λ de θ et φ seulement, vérifiant l'équation (1 bis) vérifie aussi l'équation (17).* Le premier de ces résultats ne saurait être utilisé pour la détermination de la fonction X (θ, φ, Y), puisque l'intégration de l'équation (17) est plus compliquée que celle de l'équation (1 bis) ; mais le second, concernant la fonction λ, est intéressant, et nous allons l'utiliser de la manière suivante.

26. — Puisque toute solution du système des équations (1 bis) et (1 bis), est nécessairement une solution de (17), on peut se proposer, à propos de l'équation (17), le même problème que celui que nous avions initialement pour l'équation (1 bis). Nous aurons ainsi à rechercher quelles doivent être les propriétés d'une fonction X (θ, φ, Y), pour que, parmi les fonctions λ (θ, φ, Y) qu'elle permet de définir au moyen de l'équation (17), il y en ait au moins une qui soit indépendante de Y.

D'une manière générale, une solution de l'équation (17), est définie par la connaissance de la fonction λ_0 (θ, Y) à laquelle elle se réduit pour $\varphi = 0$.

Pour obtenir avec X une fonction λ indépendante de Y, une condition nécessaire est que λ_0 soit une simple fonction de θ.

Une autre condition nécessaire est que $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi\ \partial Y} = 0$. Or, $\frac{\partial^2 \lambda_0 (\theta, Y)}{\partial \varphi}$ se calcule à partir de l'équation (17) et la condition nécessaire est suffisante pour que $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi\ \partial Y} = 0$, est que l'équation obtenue en dérivant (17) par rapport à Y, et remplaçant dans le résultat $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi . \partial Y}$ par zéro, soit vérifiée.

Nous désignerons par :

$$\frac{d\, g_0^1}{d\, Y} = 0 \tag{18}$$

cette équation, l'indice zéro exprimant que les calculs sont faits pour $\varphi = 0$, et l'indice 1 exprime que la substitution de zéro à $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi\ \partial Y}$ a été effectuée.

En éliminant $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}$ (θ) entre (17) et (18), on obtient une équation :

$$h \left[\begin{array}{l} X_0 \,;\ \frac{\partial X_0}{\partial \theta}, \frac{\partial X_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial X_0}{\partial Y}; \\ \quad \frac{\partial^2 X_0}{\partial \theta\ \partial Y}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial \varphi\ \partial Y}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial Y^2}; \\ \qquad\qquad \frac{\partial^3 X_0}{\partial \theta\ \partial Y^2}, \frac{\partial^3 X_0}{\partial \varphi\ \partial Y^2}, \frac{\partial^3 X_0}{\partial Y^3}, \lambda_0, \frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta} \end{array} \right] = 0 \tag{19}$$

L'équation (19) écrite pour $\varphi = 0$, est nécessaire ; et de même que (17), elle est vérifiée quel que soit φ par un ensemble quelconque de deux fonctions X $(\theta, \varphi\ Y)$, *et* λ (θ, φ) *vérifiant l'équation (1 bis).*

27. — L'équation (19) est à l'équation (17) ce que l'équation (17) était à l'équation (1 bis). On est conduit à rechercher moyennant quelles conditions elle permet de définir à son tour une fonction λ indépendante de Y.

Une fonction X (θ, φ, Y) étant donnée, une solution λ (θ, φ, Y) de (19) est déterminée quand on connaît la fonction λ_0 (φ, Y) à laquelle elle se réduit pour $\theta = 0$. La fonction λ_0 doit évidemment être choisie indépendante de Y; une condition nécessaire pour qu'il en soit de même de λ est que $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta}$ soit indépendant de Y. Par un raisonnement pareil aux précédents, on est conduit à éliminer $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \theta}$ entre (19) et l'équation :

$$\frac{d\, k_0^1}{d\, Y} = 0 \tag{20}$$

on obtient une équation (21) $\Psi = 0$. *qui est une condition nécessaire, vérifiée quel que soit* Θ. *par une solution du système* [*(1 bis), (1 bis)*] *et d'où les dérivées de la fonction* λ *ont disparu.* Quant aux dérivées de la fonction X, ce sont celles qui ont déjà été énumérées pour l'équation (19), plus les dérivées du quatrième ordre : $\frac{\partial^4 X}{\partial \theta\, \partial Y^3}$, $\frac{\partial^4 X}{\partial \varphi\, \partial Y^3}$ et $\frac{\partial^4 X}{\partial Y^4}$.

28. — L'équation (21) jouera à son tour le rôle des équations (17) et (19). L'élimination de λ entre (21) et l'équation :

$$\frac{d\, \Psi}{d\, Y} = 0 \tag{22}$$

conduit à une équation aux dérivées partielles du cinquième ordre, que doit nécessairement vérifier la fonction X.

Cette équation est une équation

$$H = 0 \tag{23}$$

où figurent en plus des dérivées déjà énumérées, les dérivées

$$\frac{\partial^5 X}{\partial \theta\, \partial Y^4}, \quad \frac{\partial^5 X}{\partial \varphi\, \partial Y^4}, \quad \frac{\partial^5 X}{\partial Y^5}$$

29. — *La condition (23) n'est d'ailleurs qu'une condition nécessaire.* Une fonction X_1 (θ, φ, Y) qui la vérifie permet certainement de définir par l'équation (21) une fonction λ indépendante de Y. Mais, en général, l'ensemble des deux fonctions λ et X_1 n'est pas solution de l'équation (1 bis). Pour le voir, il suffit de déterminer par l'équation (1 bis) les fonctions X admettant pour fonction λ celle que nous venons de trouver Il y en a une infinité, mais il n'y en a qu'une qui pour $\varphi = 0$, par exemple, se réduise à une fonction donnée. Il n'y en a donc qu'une qui pour $\varphi = 0$ se réduise à la même fonction X_0 que la fonction X_1. Il peut se faire que cette fonction X soit précisément à X_1, mais cela n'aura pas lieu en général ; l'équation (21) étant du quatrième ordre en X, il existe une infinité de fonctions qui permettent par (21) de définir une même fonction $\lambda(\theta, \varphi)$ et qui se réduisent pour $\varphi = 0$ à la même fonction X_0 : parmi elles, il n'y en a qu'une qui soit égale à la soution X de l'équation (1 bis), correspondant aux mêmes fonctions λ et X_0.

30. — Mais il est facile de former la condition que doit vérifier la fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ pour que la fonction $\lambda(\theta, \varphi)$ définie au moyen de l'équation (21) soit une intégrale de l'équation (1 bis) considérée comme équation en λ. Il suffit de remplacer dans (1 bis) les fonc tions.

$$\lambda, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$$

leurs expressions tirées de (21), on obtient une équation

$$G = 0 \tag{24}$$

dont la forme d'ailleurs est en général extrêmement compliquée.

Si leur fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ vérifie à la fois les équations (23) et (24), on est assuré qu'elle permet, grâce à l'équation (1 bis), de définir un *nombre fini* de fonctions λ indépendantes de Y. Ce nombre dépend du degré en λ de l'équation (21). Si l'équation liant λ et X est linéaire, non seulement par rapport aux dérivées partielles de λ mais encore par rapport à λ, la solution est unique. Ainsi, l'ensemble des conditions (23) et (24) constitue les conditions intrinsèques recherchées.

Nous allons appliquer cette méthode au cas de l'équation (1 bis), nous pourrons établir ainsi un résultat assez intéressant, dans lequel une famille de courbes planes à deux paramètres doit, indépendamment de toute surface F vérifier un certain nombre de conditions pour constituer les lignes de flottaisons d'un flotteur.

31. – L'équation (1) s'écrit :

$$(1)\ Y \sin\theta \frac{\partial X}{\partial \theta} - X \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \left\{ X \cos\theta - \left[\int_0^{\theta} \rho \cos\theta \, d\theta + (1-\cos\theta) \int_0^{\theta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin\theta \, d\theta \right] \right\} X \frac{\partial X}{\partial Y} = -XY\cos\theta + \rho Y \sin\theta - \frac{X}{\sin\theta} \int_0^{\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin\theta \, d\theta$$

En posant : $\lambda(\theta, \varphi) = \int_0^{\theta} \rho(\alpha, \varphi) \sin\alpha \, d\varphi + c$, on a :

$$\int_0^{\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin\theta \, d\theta = \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}; \quad \int_0^{\theta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \sin\theta \, d\theta = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}, \quad \rho = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$$

et par conséquent :

$$\int_0^{\theta} \rho \cos\theta \, d\theta = \int_0^{\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cos\theta \, d\theta = \left(\lambda \cos\theta\right)_0^{\theta} + \int_p^{\theta} \frac{\lambda}{\sin^2\theta} \, d\theta$$

On a donc :

$$(1\ \text{bis})\ Y \sin\theta \frac{\partial X}{\partial \theta} - X \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \left\{ X \cos\theta - A \right\} X \frac{\partial X}{\partial Y} = -XY\cos\theta + Y \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - \frac{X}{\sin\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$$

avec :

$$A = \int_0^{\theta} \frac{\lambda}{\sin^2\theta} \, d\theta + \left(\lambda \cos\theta\right)_0^{\theta} + (1-\cos\theta) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$$

Les fonctions λ telles que $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \rho(\theta, \varphi) \sin\theta$ sont de la forme :

$$\lambda(\theta, \varphi, Y) = \int_0^{\theta} \rho(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta + K(\varphi, Y)$$

où K est une fonction arbitraire : mais parmi elles nous ne considéreront que celles vérifiant :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = \int_0^{\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin\theta \, d\theta.$$

de sorte que K n'est fonction que de Y. et comme nous supposons d'autre part, que λ n'est pas fonction de Y, K se réduit à une constante.

Autrement dit, à une fonction $\rho(\theta, \varphi)$ vérifiant avec X l'équation (1) on peut faire correspondre une infinité de fonctions $\lambda(\theta, \varphi)$, ne différant les uns des autres que par une constante, et vérifiant l'équation (1 bis). Inversement, si $\lambda(\theta, \varphi)$ est une fonction vérifiant avec X l'équation (1 bis), il en existe une infinité d'autres, jouissant de cette propriété, et qui sont de la forme $\lambda(\theta, \varphi) + c$.

Toutes ces fonctions ne définissent d'ailleurs qu'une même fonction $\rho(\theta, \varphi)$, qui vérifie avec X l'équation (1).

Ainsi que nous l'avons déjà expliqué, nous allons rechercher à quelles conditions une fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ permet de définir une fonction λ indépendante de Y. La méthode générale s'applique mais avec un certain nombre de modifications dues à la forme particulière de l'équation (1 bis).

L'équation (1 bis) peut se mettre sous la forme particulière

$$(1 \text{ bis}) \quad E_1 \equiv A(\theta, \varphi) + \ldots\ldots \quad O$$

qui fait que $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$ *ne figure pas dans* $\dfrac{d E_1^1}{d Y}$, *de sorte que l'élimination est toute faite, et en même temps* $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$ *se trouvent éliminés* λ *et* $\displaystyle\int_0^\theta \frac{\lambda}{\sin^2\theta}\, d\theta$.

On doit éliminer $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$ entre (1 bis) et l'équation $\dfrac{d E_1^1}{d Y} = O$.

On a donc :

$$\frac{d E_1^1}{d Y} \equiv E_2 \left[\theta, \varphi, Y, X : \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial X}{\partial Y} ; \frac{\partial^2 X}{\partial \theta, \partial Y}, \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi, \partial Y}, \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} ; \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}, \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right] = O \qquad (18)$$

L'équation (18) est linéaire par rapport à $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$, ainsi que par rapport aux dérivées secondes de la fonction X.

On doit ensuite éliminer $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$ entre l'équation (18) et l'équation

$$\frac{d E_2^1}{d Y} = O$$

Le résultat est évidemment l'équation : (19)

$$E_3\left[\theta, \varphi, Y ; X ; \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \varphi}; \frac{\partial^2 X}{\partial \theta\, \partial Y}, \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi,\, \partial Y}; \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2}; \frac{\partial^3 X}{\partial \theta\; \partial Y^2}, \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi\; \partial Y^2}, \frac{\partial^3 X}{\partial Y^3}, \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\right] = 0$$

linéaire par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ et par rapport aux dérivées troisièmes de X. Il faut ensuite éliminer la fonction $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ entre (19) et $\frac{d\, E_1^1}{d\; Y} = 0$; dans le cas général, on obtient une relation dans l'expression de laquelle entrent les dérivées quatrièmes de X et la fonction λ (θ, φ, Y) et l'on doit exprimer que cette fonction λ est indépendante de Y. Mais ici, il résulte de la forme particulière de (1 bis) qu'en réalité l'équation : (25)

$$E_4\left|\theta, \varphi, Y ; X ; \frac{\partial X}{\partial \theta} + \dots ; \frac{\partial^2}{\partial \theta\, \partial Y} \dots : \frac{\partial^3 X}{\partial \theta\; \partial Y^2}, \dots ; \frac{\partial^4 X}{\partial \theta\; \partial Y^3}, \frac{\partial^4 X}{\partial \varphi\; \partial Y^3}, \frac{\partial^4 X}{\partial Y^4}\right| = 0$$

obtenue, est linéaire par rapport aux dérivées quatrièmes de X et ne contient pas la fonction λ.

32. — C'est cette équation qui est la condition nécessaire et suffisante pour que la solution en $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ de (19), soit indépendante de Y. La forme de l'équation (1 bis), a eu pour effet de simplifier la première équation aux dérivées partielles que doit vérifier X : l'équation du cinquième ordre (23) est remplacée par l'équation du quatrième ordre (25).

Soit X (θ, φ, Y) une intégrale de (25) et g (θ, φ) la solution correspondante en $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ de l'équation (19).

de fonctions λ telles que $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = g\ (\theta, \varphi)$.

Elles sont de la forme :

$$\lambda = \int_0^\theta g\ (\theta, \varphi)\ d\,\theta + K\ (\varphi, Y).$$

Il en existe donc une infinité, qui ne dépendent pas de Y. Elles sont de la forme :

$$\lambda = \int_0^\theta g\ (\theta, \varphi)\ d\,\theta + K\ (\varphi) + c \text{ avec } K\ (\varphi) = 0 \text{ pour } \varphi = 0.$$

Ainsi que nous l'avons expliqué au numéro (31) nous ne considérons parmi celles que les fonctions *(α)* pour lesquelles :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = \int_0^\theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin \theta \, d\, \theta = \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} g\,(\theta, \varphi)\; d\, \theta$$

de sorte que K $(\varphi) \equiv 0$. Reste à exprimer que l'une des fonctions (α) vérifie l'équation (1 bis) ; d'après les remarques du numéro (31), toutes les fonctions (α) possèdent cette propriété, si l'une d'entre elles seulement en jouit ; elles ne définissent d'ailleurs toutes qu'une seule fonction ρ (θ, φ), de sorte, que *si une fonction* X (θ, φ, Y) *convient, elle ne convient que pour une seule surface* [F] *et par conséquent que pour un seul navire.*

Il suffit de remplacer λ par son expression (α) dans l'équation (1 bis) pour obtenir la deuxième équation que doit vérifier la fonction X (θ, φ, Y). Si l'on remarque que $f\,(\theta, \varphi) = \lambda$ $\Big[\theta, \varphi, Y, X \,; \ldots\ldots \,;$ $\ldots\ldots\,; \ldots\ldots \dfrac{\partial^4 X}{\partial Y^3}\Big]$, on voit que cette équation (26) est assez compliquée, puisqu'elle contient un terme en :

$$\int_0^\theta \frac{1}{\sin^2 u} \,\mathrm{du} \left[\int_0^u f\,(\alpha, \varphi)\, d\, \alpha + c \right]$$

A cet égard, l'équation (26) est plus compliquée que l'équation (24) que l'on aurait obtenue dans le cas général, car alors λ s'obtient sans quadrature, et l'expression de $\int_0^\theta \frac{\lambda}{\sin^2 \theta}\, d\,\theta$, ne comporterait qu'un seul signe $\int$.

33. — Dans le cas général, nous avons laissé sans transformations les conditions (23) et (24). *Nous allons montrer qu'ici l'équation (26) est équivalente à une équation aux dérivées partielles, et à une condition aux limites.*

Pour exprimer qu'une fonction X (θ, φ, Y) permet de vérifier l'équation (1 bis) quand on y remplace λ par une certaine fonction de θ et φ seulement, nous aurions pu employer la méthode suivante qui diffère légèrement de la précédente.

L'équation (18) est de la forme :

$$M\,(\theta, \varphi, Y)\, \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + N\,(\theta, \varphi, Y)\, \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \Phi\,(\theta, \varphi, Y) = 0 \qquad (18)$$

nécessairement vérifiée par X (θ, φ, Y) et par λ (θ, φ) si ces deux fonctions vérifient l'équation (1 bis). Considérons les équations (19′) et (20′) obtenues en dérivant (18) par rapport à Y et remplaçant les dérivées de λ par rapport à Y par zéro.

Elles s'écrivent :

$$\frac{\partial M}{\partial Y}\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \frac{\partial N}{\partial Y}\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0 \qquad (19')$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial Y^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 M}{\partial Y^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0 \qquad (20')$$

Les équations (19′) et (20′) sont comme (18) vérifiées par deux fonctions X (θ, φ, Y) et λ (θ, φ), si ces deux fonctions vérifient ensemble l'équation (1 bis). Il suffit de comparer ces trois équations pour voir que X vérifie nécessairement l'équation

$$\begin{vmatrix} M & N & \Phi \\ \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial N}{\partial Y} & \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (20'')$$

L'équation (20″), obtenue comme l'équation (20) par dérivation de $\frac{d\,E_1^1}{d\,Y}$ par rapport à Y, deux fois de suite, remplacement dans les résultats des dérivées de λ prises par rapport à Y par zéro, et élimination de $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$, *est évidemment identique à l'équation (20). Mais la nouvelle manière dont cette équation (20) a été obtenue,* va nous permettre de simplifier la condition (26).

34. — Soit X (θ, φ Y) une intégrale de l'équation (20), on peut alors trouver, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial N}{\partial Y} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul, deux fonctions f (θ, φ Y), g (θ, φ, Y) qui substituées à $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ dans les équations (18), (19') et (20') vérifient cette équation.

Supposons que l'on ait :

$$(27) \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $\lambda\,(\theta, \varphi, Y)$ telles que :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = f\,(\theta, \varphi, Y) \text{ et } \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = g\,(\theta, \varphi, Y),$$

qui sont par conséquent de la forme :

$$(\beta) \quad \lambda = P\,(\theta, \varphi) + c$$

avec
$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = g, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = f.$$

Il suffit de dériver deux fois l'équation :

$$M f + N g + \Phi = 0$$

par rapport à Y pour voir que :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial Y} f + \frac{\partial N}{\partial Y} g + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} + M \frac{\partial f}{\partial Y} = 0 \\ &\frac{\partial^2 M}{\partial Y^2} f + \frac{\partial^2 N}{\partial Y^2} g + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + 2\left(\frac{\partial M}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial N}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial Y}\right) + M \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + N \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} = 0 \end{aligned}\right.$$

et en comparant avec (19') et (20'), vérifiées par hypothèse, que :

$$(A) \quad \left\{\begin{aligned} &M \frac{\partial f}{\partial Y} + N \frac{\partial g}{\partial Y} = 0 \\ &2\left(\frac{\partial M}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial N}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial Y}\right) + M \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + N \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} = 0 \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations donne :

$$\frac{\partial M}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial N}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial Y} + M \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + N \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} = 0$$

c'est-à-dire par comparaison avec la seconde :

$$\frac{\partial M}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Y}+\frac{\partial N}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial Y}=0$$

Il suffit de comparer cette équation avec la première équation (A) pour voir que si le déterminant :

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial N}{\partial Y} \end{vmatrix} \neq 0$$

ce qui a été initialement supposé, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial Y}=0 \quad \frac{\partial g}{\partial Y}=0$$

Autrement dit, les fonctions f *et* g *ne dépendent que de* θ *et* φ*, et par conséquent, il existe une infinité de fonctions* λ (θ, φ, Y) *définies par la forme* (β) *qui se réduisent à des fonctions de* θ *et* φ.

35. — Il reste à exprimer que ces fonctions λ vérifient avec X l'équation (1 bis).

Remplaçons λ par son expression (β) dans l'équation (1 bis). Le premier membre de cette équation est une certaine fonction E_1 (θ, φ, Y), dont la dérivée par rapport à Y est exactement $\frac{d\,E'_1}{d\,Y}$, puisque λ est indépendant de Y, et que l'équation $\frac{d\,E'_1}{d\,Y} = 0$, qui n'est autre que (18), est vérifiée par la fonction λ, par construction même. Il en résulte que E_1 se réduit à une fonction de (θ, φ), et *l'équation (1 bis)* $E_1 = 0$ *est vérifiée, si elle est vérifiée pour une seule valeur* Y_0 *de la variable* Y. C'est la condition aux limites annoncée. C'est elle qui jointe aux équations (20) et (27) constitue les conditions intrinsèques recherchées.

36. — De quelles arbitraires dépend une fonction X (θ, φ, Y) satisfaisant à ces conditions ? L'équation (20) est du quatrième ordre ; l'équation (24) est du deuxième ordre en M ou N, donc du quatrième ordre en X.

D'une manière précise, on a :

$$f = -\frac{\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{N}{\Phi}\right)}{\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{M}{N}\right)}\ ;\ g = \frac{\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\Phi}{M}\right)}{\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{M}{N}\right)}$$

l'équation (27) : $\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$ s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{M}{N}\right)\frac{\partial^2}{\partial Y \partial \theta}\left(\frac{N}{\Phi}\right) - \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{N}{\Phi}\right)\frac{\partial^2}{\partial Y \partial \theta}\left(\frac{M}{N}\right) \tag{27}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{M}{N}\right)\frac{\partial^2}{\partial Y \partial \varphi}\left(\frac{\Phi}{M}\right) - \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\Phi}{M}\right)\frac{\partial^2}{\partial Y \partial \varphi}\left(\frac{M}{N}\right)$$

elle est linéaire par rapport aux dérivées quatrèmes de X, les coefficients de ces dérivées pouvant d'ailleurs être des dérivées d'ordre moins élevé.

On voit immédiatement que les seules dérivées qui figurent dans (27) sont les suivantes :

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial X}{\partial Y}\ ;\ \frac{\partial^2 X}{\partial \theta \partial Y}, \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi \partial Y}, \frac{\partial^2 X}{\partial Y^2} \text{ et : } \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial \theta \partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial \theta^2 \partial Y}, \frac{\partial^3 X}{\partial \theta \partial \varphi \partial Y}, \frac{\partial^3 X}{\partial \theta \partial Y^2}, \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi^2 \partial Y}, \text{ et } \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi \partial Y^2}\ \frac{\partial^3 X}{\partial Y^3}.$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial \theta^2 \partial Y^2}, \quad \frac{\partial^4 X}{\partial \theta \partial \varphi \partial Y^2}, \quad \frac{\partial^4 X}{\partial \theta \partial Y^3}, \quad \frac{\partial^4 X}{\partial \varphi^2 \partial Y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 X}{\partial \varphi \partial Y^3}$$

37. — Pour déterminer une fonction X (θ, φ, Y) qui soit intégrale à la fois des équations (20) et (27), on peut donc se donner arbitrairement :

$$X_0(\theta, Y), \frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, o\ Y_0), \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi \partial Y}(\theta, o, Y_0), \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi \partial Y^2}(\theta, o, Y_0)$$

qui au moyen de l'équation (20) donnent $\frac{\partial X_0}{\partial \varphi}(\theta, Y)$.

Si on se donne alors $\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}(\theta, o, Y_0)$, l'équation (27) donne pour $\frac{\partial^2 X_0}{\partial \varphi^2}(\theta, Y)$ une certaine fonction $m_2(\theta, Y)$.

Mais, si on se rappelle le sens de l'équation (27), on voit que pour que cette équation soit vérifiée par une fonction $X(\theta, \varphi, Y)$, intégrale de l'équation (20), il faut et il suffit que, elle le soit pour $Y = Y_0$.

Cela tient, tout simplement, à ce que l'équation (20) étant vérifiée, les équations (18), (19') et (20') donnent pour f et g, deux fonctions indépendantes de Y.

Si donc, on constate que $\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, quand on calcule f et g en fonction des valeurs de X et de ses dérivées pour $Y = Y_0$, c'est qu'effectivement $\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, quel que soit Y.

Considérons une intégrale $X(\theta, \varphi, Y)$ de l'équation (20) définie par les fonctions :

$$\left\{\begin{array}{l}
X_0(\theta, Y) \\
a_1(\theta) = \frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi_0 Y_0), \; b_1(\theta) = \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi \partial Y}(\theta, \varphi_0 Y_0), \; c_1(\theta) = \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi \partial Y^2}(\theta, \varphi_0 Y_0) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_n(\theta) = \frac{\partial^n X}{\partial \varphi^n}(\theta, \varphi_0 Y_0), \; b_n(\theta) = \frac{\partial^{n+1} X}{\partial \varphi^n \partial Y}(\theta, \varphi_0 Y_0), \; c_n(\theta) = \frac{\partial^{n+2} X}{\partial \varphi^n \partial Y^2}(-) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.$$

et exprimons que l'équation (27) est satisfaite pour $Y = Y_0$. Pour cela, écrivons que l'équation (27) est vérifiée ainsi que toutes les dérivées totales par rapport à φ, quand laissant Y égal à Y_0, on fixe. φ à la valeur particulière φ_0.

L'équation (27) écrite pour $\varphi = \varphi_0$ constitue une relation entre les fonctions :

* $X_0(\theta, \varphi_0, Y_0)$				
* $\frac{\partial X_0}{\partial \theta}(\theta, \varphi_0, Y_0)$	$a_1(\theta)$	* $\frac{\partial X}{\partial Y}(\theta, \varphi_0, Y_0)$		
* $\frac{\partial^3 X_0}{\partial \theta\, d Y}(\theta, \varphi_0, Y_0)$	$b_1(\theta)$	* $\frac{\partial^2 X}{\partial Y^2}(\theta, \varphi_0, Y_0)$		
		* $\frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2}(\theta, \varphi_0, Y_0)$	$\frac{\partial a_1}{\partial \theta}(\theta)$	$a_2(\theta)$
* $\frac{\partial^3 X_0}{\partial \theta\, \partial Y^2}(\theta, \varphi_0, Y_0)$	$c_1(\theta)$	* $\frac{\partial^3 X}{\partial Y^3}(\theta, \varphi_0, Y_0)$		
		* $\frac{\partial^3 X}{\partial \theta^2\, \partial Y}(\theta, \varphi_0, Y_0)$	$\frac{\partial b_1}{\partial \theta}(\theta)$	$b_2(\theta)$
* $\frac{\partial^4 X_0}{\partial \theta\, \partial Y^3}(\theta, \varphi_0, Y_0)$	$\frac{\partial c_1}{\partial \theta}(\theta)$	* $\frac{\partial^4 X}{\partial Y^3\, \partial \theta}$	c_2	
			** $\frac{\partial^4 X}{\partial \varphi\, \partial Y^3}(\theta, \varphi_0, Y_0)$	

Dans le tableau ci dessus, les fonctions marquées d'une astérisque résultent immédiatement du choix de la fonction $X(\theta, \varphi_0, Y)$. La fonction $\frac{\partial^4 X}{\partial \varphi\, \partial Y^3}(\theta, \varphi_0, Y_0)$, marquée de deux astérisques, résulte de l'équation (20) du choix des fonctions a_1, b_1, c_1. Cette équation (20), en effet, détermine la fonction $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ comme intégrale d'une équation différentielle du troisième ordre en Y (θ joue le rôle de paramètre) dépendant des arbitraires $\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi_0, Y_0)$, $\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi\, \partial Y}(\theta, \varphi_0, Y_0)$ et $\frac{\partial^3 X}{\partial \varphi\, \partial Y^2}(\theta, \varphi_0, Y_0)$, c'est-à-dire $a_1(\theta)$, $b_1(\theta)$ et $c_1(\theta)$.

Le simple examen du tableau précédent indique, par conséquent, que pour déterminer une intégrale $X(\theta, \varphi, Y)$ de l'équation (20), vérifiant l'équation (27) pour $\varphi = \varphi_0$ et $Y = Y_0$ on peut se donner arbitrairement les fonctions :

$X_0(\theta, Y)$

$a_1(\theta)$, $b_1(\theta)$ et $c_1(\theta)$

L'équation (27) établit une relation entre a_2, b_2 et c_2, ce qui veut dire qu'on peut choisir arbitrairement a_2 et c_2 et que b_2 en résulte.

Pareillement, on verrait que la condition de satisfaire l'équation (27) dérivée totalement par rapport à φ pour $\varphi = \varphi_0$ et $Y = Y_0$ a pour effet de déterminer la fonction b_3 (θ) quand a_3 et c_3 sont choisis arbitrairement, et que d'une manière générale, tous les b_n sont déterminés pour $n \geqq 2$ lorsqu'on a choisi les a_n et les c_n.

En définitive, l'intégrale générale du système (20), (27) ne dépend que des fonctions arbitraires :

$$X_0\,(\theta,\ \varphi) \text{ et :}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2 & & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n, & & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right.$$

c'est-à-dire des fonctions :

$$\left\{ X_0\,(\theta,\ Y),\ \frac{\partial X}{\partial \varphi}\,(\theta,\ \varphi,\ Y_0),\ \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi\, \partial Y^2}\,(\theta,\ \varphi,\ Y_0) \text{ et } \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi\, \partial Y}\,(\theta,\ \varphi_0, Y_0)\right.$$

Soit : Trois fonctions de deux variables, et une d'une variable.

38. — Une fonction X étant déterminée de cette manière, permet de calculer une fonction de θ et φ : $\lambda\,(\theta,\ \varphi)$, définie à une constante près, et telle que le premier membre de l'équation (1 bis) soit une simple fonction de θ et φ. Il suffit, pour que la fonction X soit convenable, que cette équation (1 bis) soit satisfaite quand on fait le calcul pour une seule valeur Y_0 de Y.

Cette condition est assez compliquée à exprimer, mais on se rend compte qu'il suffit de l'écrire pour $\varphi = \varphi_0$, ainsi que toutes les conditions qu'on en déduit par dérivation par rapport à φ. L'effet d'une pareille condition, est comme nous avons vu autrement *d'une manière simple, de faire dépendre X de quatre fonctions arbitraires, parmi lesquelles* il n'y en a plus que deux de deux variables ; X_0 et $\frac{\partial X}{\partial \varphi}\,(\theta,\ \varphi,\ Y_0)$.

Autrement dit, la fonction $\frac{\partial^3 X}{\partial \varphi . \partial Y^2}(\theta, \varphi, Y_0)$ *est remplacée par une seule fonction de* θ.

On peut retrouver ce résultat ici.

Le premier membre de (1 bis) se réduisant, quand on a effectué les substitutions, à une fonction de θ et de φ, il suffit pour exprimer que (1 bis) est satisfaite, de faire les calculs pour $Y = Y_0$, et d'écrire que pour $\varphi = 0$, E (θ, φ) est nul, ainsi que toutes ses dérivées $\frac{d^n E}{d\varphi^n}$, quel que soit θ.

Or, pour $\varphi = 0$ la fonction A se réduit à $(1 - \cos \theta) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}$ $= (1 - \cos \theta) \frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

En effet :

$$\lambda = \int_0^{\varphi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi + k(\theta) + c$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \int_0^{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta}\, d\varphi + k'(\theta) = g.$$

Mais $k'(\theta) = o$ puisque $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial \varphi}$.

donc $\lambda(\theta, o) = c$ et $\int_0^{\theta} \frac{c}{\sin^2 \theta}\, d\theta + (\lambda \cot \theta)_{\theta_0} = 0.$

Ecrire que E $(\theta, o) = 0$, revient donc à exprimer que $f_0 = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, o)$ se réduit à une certaine fonction de θ. Or, f_0 s'exprime en fonction de X_0, et de $\frac{\partial X_0}{\partial \varphi}$ ainsi que des dérivées de ces fonctions, par rapport à θ et Y, c'est-à-dire de X_0, a_1, b_1, et c_1, donc $\frac{\partial k_0}{\partial \varphi}$ s'exprime en fonction de a_2, b_2, et c_2. Comme b_2 est connu en fonction de a_2, la condition précédente détermine c_2 exactement.

De même la condition $\frac{dE}{d\varphi}(\theta, o)$ détermine c_3 et ainsi de suite.

Finalement, une fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ solution de (27) et (20) et telle que λ vérifie (1 bis), dépend des fonctions arbitraires :

$$\left.\begin{array}{c} X_0, \ a_1, \ b_1, \ c_1 \\ a_2 \\ \cdots\cdots \\ a_n \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \text{ donc de } \quad \begin{array}{c} X_0(\theta, Y), \ \dfrac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, Y_0) \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial \varphi \, \partial Y}(\theta, \varphi_0 \, Y_0), \ \dfrac{\partial^2 X}{\partial \varphi \, \partial Y^2}(\theta, \varphi_0 \, Y_0) \\ c. \ q. \ f. \ d. \end{array}$$

Remarque. — Tous les résultats précédents supposent que le déterminant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} M & N \\ \dfrac{\partial M}{\partial Y} & \dfrac{\partial N}{\partial Y} \end{vmatrix} \text{ n'est pas} \equiv 0$$

quand on y remplace X, par une intégrale de (20) ou de (27).

Une pareille hypothèse n'est d'ailleurs pas à envisager : l'équation $\Delta = 0$ est du deuxième ordre en $\dfrac{\partial X_0}{\partial \varphi}$, l'équation (20) du troisième en $\dfrac{\partial X}{\partial \varphi}$, la variable θ ne jouant que le rôle de paramètre.

L'ensemble des équations $\Delta = 0$ et (20) est équivalent à deux équations du deuxième ordre en $\dfrac{\partial X_0}{\partial \varphi}$, puis du premier en $\dfrac{\partial X_0}{\partial \varphi}$ et finalement à des équations ordinaires en $\dfrac{\partial X}{\partial \varphi}$. C'est-à-dire que ces équations peuvent être ramenées à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires, lesquelles, à moins de n'être pas indépendantes, ce qui n'est évidemment pas le cas, sont incompatibles, ou ont au plus une solution commune.

Le cas où (27), (20) et $\Delta = 0$, seraient simultanément vérifiées, n'est donc pas à envisager.

CHAPITRE IV

Une surface quelconque, pourvu qu'elle soit convexe, est susceptible d'être considérée d'une infinité de manières comme la surface [*c*] d'un flotteur.

39. — Nous allons maintenant nous occuper d'une proposition qui a été souvent énoncée, et qui consiste à admettre qu'une surface convexe quelconque peut être considérée comme une surface [*c*].

La proposition est évidente si l'on se borne à une portion de surface infiniment petite : il n'y a manifestement aucune relation entre les deux rayons de courbure principaux d'une surface [*c*] en l'un de ses points, et par suite, aux infiniment petits du troisième ordre près, rien n'empêche de considérer une portion de surface convexe quelconque, comme appartenant à la surface [*c*] d'un certain flotteur.

Il en va tout autrement si l'on considère une portion de surface *finie* ; et il nous semble qu'on ne peut démontrer la proposition précédente, qu'à condition de prouver l'existence d'un flotteur dont la surface [*c*] contienne effectivement la portion de surface en question.

S'il en était ainsi, il existerait une fonction X (θ, φ, Y), solution du système (22), (27), et (1 bis), vérifiant les trois conditions :

$$A \begin{cases} \int_F X^2 \, dY = 0 \\ \int_F XY \, dY = 0 \\ \int_F X^3 \, dY = 3 \, V \, r(\theta, \varphi) \end{cases}$$

quels que soient θ et φ.

L'intégrale générale du système (22), (27), et (1 bis), dépend de quatre fonctions arbitraires, qui sont :

$$f_1(\theta, \varphi) = \frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, Y_0), f_1(\theta) = \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi \partial Y}(\theta, \varphi_0 Y_0), f_2(\theta) = \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi \partial Y^2}(\theta, \varphi, Y_0)$$

et $X_0(\theta, Y) = X(\theta, \varphi_0 Y)$.

D'une manière précise, elle peut, moyennant certaines conditions de convergence, être définie par la série :

$$X(\theta, \varphi\, Y) = X_0(\theta, Y) + \ldots\ldots + \frac{(\varphi - \varphi_0)^n}{n\,!}\, \frac{\partial^n X_0}{\partial \varphi^n}(\theta, Y) + \ldots\ldots$$

les coefficients des puissances successives de $(\varphi - \varphi_0)$ tels que $\frac{\partial^i X_0}{\partial \varphi^i}$ étant calculables à partir de $X_0(\theta, Y)$, f_1, f_2, $f_0(\theta, \varphi_0)$..... $\frac{\partial^{i-1} f_0}{\partial \varphi^1}(\theta, \varphi_0)$ grâce à des équations ordinaires

$$F_i\left[X_0, f_1, f_2, f_0(\theta, \varphi_0) \ldots \frac{\partial^{i-1} f_0}{\partial \varphi^{2-1}}(\theta, \varphi_0), \frac{\partial^i X_0}{\partial \varphi^i}(\theta, Y)\right] = 0.$$

La fonction $X(\theta, \varphi\, Y)$ est ainsi une fonctionnelle de la forme :

$$H\left|[f_0 \mid X_0, f_1, f_2, \theta. \varphi, Y]\right|$$

écriture qui signifie que c'est une fonction au sens ordinaire de X_0, f_1, et f_2.

Pour démontrer qu'une surface est susceptible d'être considérée comme une surface $[c]$ il faut établir qu'il est possible de choisir les quatre fonctions X_0, f_0, f_1, f_2, de manière que les trois conditions A soient vérifiées quels que soient θ et φ.

En réalité, le long d'une courbe F, la fonction $X(Y)$ admet plusieurs déterminations $X^I(\theta, \varphi, Y)$, ... $X^k(\theta, \varphi, Y)$, le seul cas pratique étant d'ailleurs celui où $k = 2$. Désignant par a et b, les valeurs maxima et minima que peut prendre Y quand on parcourt une telle ligne F, on peut écrire les trois équations A sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\int_a^b H^2 \left|[f_0 \mid, X_0^I, f_1, f_2]\right| dY - \int_a^b H^2 \left|[f_0 \mid X_0^{II}. f_1, f_2]\right| dY = 0 & \text{(I)} \\
\int_a^b H \left|[\text{———}]\right| Y\, dY - \int_a^b H \left|\text{———}\right| Y\, dY = 0 & \text{(II)} \\
\int_a^b H^3 \left|\text{———}\right| dY - \int_a^b H^3 \left[\text{———}\right] dY = 3\, V\, r(\theta, \varphi). & \text{(III)}
\end{array}\right.$$

a et b sont des fonctions de θ et φ telles que :

$$X^{I}(\theta, \varphi\ a) = X^{II}(\theta, \varphi, a)$$

$$X^{II}(\theta, \varphi\ b) = X^{I}(\theta, \varphi\ b).$$

L'intervalle de variation de θ qui est de la forme $\theta \leqq \varphi \leqq \alpha$ avec $\alpha \leqq 2\pi$, est le domaine dans lequel la fonction r est définie. Celui de Y peut être choisi arbitrairement, (a et b sont arbitraires).

Pour faire la démonstration nous allons utiliser la méthode ordinaire du passage du fini à l'infini.

Divisons les intervalles (o, α) et (A, B) de variation de φ et de Y en n intervalles plus petits au moyen des points de division :

$$\begin{cases} \varphi_1 = o, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \varphi_{n+1} = \alpha \\ Y_1 = A, Y_2, \ldots Y_n, Y_{n+1} = B \end{cases}$$

et remplaçons dans les équations (I), (II) et (III) écrites pour $\theta = \theta_0$, et φ égal successivement à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}$, les intégrales qui s'y trouvent par leurs valeurs approchées calculées au moyen des points $Y_1, \ldots Y_{n+1}$. Remplaçons en outre la fonctionnelle $H \mid [f_0 \mid f_1, f_2, X_0, \theta, \varphi, Y] \mid$ par ce qu'elle devient quand f_0 est une fonction simple et d'ordre n en φ (1), dont les points de discontinuité sont les φ, c'est-à-dire par une fonction de la forme

$$H_n [f_0(\theta, \varphi_1), \ldots f_0(\theta, \varphi_n), f_1, f_2, X_0, \theta, \varphi, Y].$$

Les équations (I), (II) et (III) sont ainsi remplacées par un système S_n de $3(n+1)$ équations définissant implicitement les $3(n+1)$ inconnues :

$$\begin{cases} f_0(\theta, \varphi_1) & X_0^{I}(\theta, Y_1) & X_0^{II}(\theta, Y_1) \\ f_0(\theta, \varphi_{n1}) & X_0^{I}(\theta, Y_{n+1}) & X_0^{II}(\theta, Y_{n+1}) \end{cases}$$

Faisons croître n indéfiniment de façon que le plus grand des intervalles $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$, (Y_i, Y_{i+1}) tende vers zéro, en même temps

(1) Nous désignons sous ce nom une fonction qui est constante entre deux points de discontinuité de première espèce successifs, ceux-ci étant au nombre de $n - 1$.

que $\varphi_i \to \varphi$ et $Y_i \to Y$. Si l'on peut démontrer que les expressions $f_0(\theta_0, \varphi_i)$ et $X_0(\theta_0, Y_i)$ ont des limites et que ces limites sont indépendantes du mode de division choisi, on aura établi que la fonction $r(\theta_0, \varphi)$ est susceptible de représenter une courbe *(c)*. En recommençant le raisonnement pour des valeurs de θ variables, on pourra établir que toute une portion finie de la surface considérée appartient à la surface des centres des carènes d'un certain flotteur.

Remarquons d'abord que la surface doit être *convexe* sans cela $r(\theta, \varphi)$ pourrait devenir négatif, et il serait impossible alors de satisfaire à l'équation III.

41. — 1° *Les limites existent quand* $r(\theta_0, \varphi)$ *est une fonction n'admettant qu'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce et quand le mode de division est convenablement choisi.*

Partageons l'intervalle (o, α) et l'intervalle (A, B) en p intervalles partiels $(p > n)$, de manière que parmi les points de division se trouvent tous les points φ_i et Y_i qui ont servi à résoudre le système S_n.

Remarquons d'abord que la fonction :

$$H_n\,[f_0(\theta, \varphi_1), \ldots f_0(\theta, \varphi_n), X_0(\theta, Y), \theta, \varphi, Y]$$

est identique à la fonction

$$H_p\,[f_0(\theta, \varphi_1), \ldots. f_0(\theta, \varphi_p), X_0(\theta, Y), . \theta, \varphi, Y]$$

puisqu'elles représentent toutes deux la même fonctionnelle

$$H \mid [f_0 \mid f_1, f_2, X, \theta, \varphi, Y] \mid .$$

où f_0 serait la fonction simple d'ordre n définie par

$$f_0(\theta, \varphi) = f_0(\theta, \varphi_i) \quad \text{si} \quad \varphi \leqq \varphi < \varphi_{i+1}$$

et considérons le système S_p' que l'on obtient par le procédé suivant : on écrit les équations du système S_p pour les valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_n$ et pour des valeurs φ_j' qui diffèrent des valeurs φ_j appartenant au mode de division en p intervalles, par la condition que si

$$\varphi_i \leqq \varphi_j < \varphi_{j+1}, \quad \text{on ait : } \varphi_j' = \varphi_i \;;$$

on calcule les intégrales au moyen des points :

$$Y_1 \ldots . Y_j' \ldots . Y_p$$

tels que si

$$Y_i \leqq Y_j < \varphi_{i+1} \quad \text{on ait } Y_j' = Y_i.$$

Grâce à la remarque précédente, on voit que le système S_p' signifie exactement la même chose que le système S_n et que par conséquent il doit être satisfait si on prend pour système de solutions le système défini par les conditions :

$$\left| \begin{array}{l} f_o(\theta, \varphi_j') = f_o(\theta, \varphi_i) \quad \text{avec} \quad \varphi_i \leqq \varphi_j < \varphi_{i+1} \\ X_o(\theta, Y'_j) = X_o(\theta, Y_i) \quad \text{avec} \quad Y_i \leqq Y_j < Y_{i+1} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} f_o(\theta, \varphi_i) \\ X_o(\theta, Y_i) \end{array} \right\} \text{ étant les solutions du système } S_n$$

et $f_o(\theta, \varphi_j)$, $X_o(\theta, Y_j)$ celles du système $S_{p'}$.

Mais d'autre part, le système S_p et le système $S_{p'}$ ne diffèrent l'un de l'autre que parce que pour l'un on a :

$$\varphi_i \leqq \varphi_j < \varphi_{i+1} \quad \text{et} \quad Y_i \leqq Y_j < Y_{i+1} \quad \text{et pour l'autre} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i = \varphi_j \\ Y_i = Y_j \end{array} \right.$$

Si les fonctions qui se trouvent au premier nombre des équations du système S_p sont continues, ce qui a lieu nécessairement si la fonctionnelle H est continue par rapport à $f_o(\theta, \varphi)$, $X_o(\theta, Y)$, φ et Y, et si d'autre part $r(\theta_o, \varphi_j)$ diffère très peu de $r(\theta_o, \varphi_i)$ les équations du système S_p diffèrent très peu de celles du système $S_{p'}$ et il en est de même de leurs solutions.

Il est donc possible, avec les hypothèses faites, de trouver un nombre N suffisamment grand pour que n et p étant deux entiers supérieurs à N, on ait quand $\varphi_i \rightarrow \varphi$ et Y_i vers Y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Big| \underset{\substack{\text{provenant} \\ \text{du système } S_p}}{f_o(\theta_o, \varphi_i)} - \underset{\substack{\text{provenant} \\ \text{du système } S_n'}}{f_o(\theta_o, \varphi_i)} \Big| < \varepsilon \\ \Big| \underset{S_p}{X_o(\theta_o, Y_i)} - \underset{S_n}{X_o(\theta_o, Y_i)} \Big| < \varepsilon \end{array} \right.$$

ε étant un nombre positif quelconque.

Cela établit l'existence des limites. Il a été nécessaire de supposer la fonctionnelle H continue pour que les solutions du système S_p puissent l'être elles-mêmes quand il se transforme en $S_{p'}$: il a fallu de plus que dans l'intervalle $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$, la fonction $r\ (\theta_0, \varphi)$ soit continue, ce qui n'est possible que si, dans l'intervalle (o, α) elle ne présente que des discontinuités de première espèce en nombre fini.

2° *Les limites ainsi définies sont en outre continues.* Considérons la fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ égale à la fonctionnelle H, r étant connue au (1°) précédent une fonction simple d'ordre n.

Avec les notations habituelles, on a :

$$r\ (\theta, \varphi) = \frac{1}{3\ V} \int_F X^3\, d\, Y$$

Si donc on donne à la fonction $X\ (\theta, \varphi, Y)$ une variation :

$$\delta\ X = \lambda\ g\ (\theta, \varphi, Y)$$

telle que la fonction $X + \delta\ X$ soit encore une fonctionnelle H (1), il lui correspond une variation $\delta\, r$, qui d'après la formule précédente vaut :

$$\delta\, r = \frac{1}{V} \int_F X^2\ \delta\ X\ \ d\ Y = \lambda\ [\ \frac{1}{V} \int_F X^2\, g\ (\theta, \varphi, Y)\ d\ Y\ ]$$

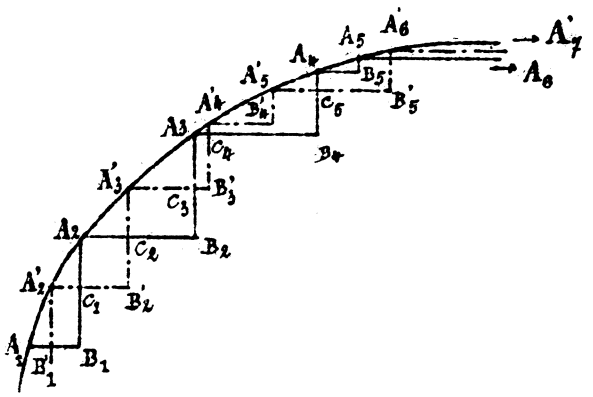
Si, par conséquent, la fonction $g\ (\theta, \varphi, Y)$ est simplement bornée, la fonctionnelle $\delta\, r\ \ |\ [\delta\ X]\ |$ est linéaire et continue : elle tend vers zéro avec δ X. Si, inversement, on donne à r une variation $\delta\, r$ égale à celle que nous venons de calculer, et à $\delta\, f_1$ et à $\delta\, f_2$ les valeurs $\lambda\ \dfrac{\partial^2\ g}{\partial\ \varphi\ \partial\ Y}\ (\theta, \varphi_0, Y_0)$ et $\lambda\ \dfrac{\partial^3\ g}{\partial\ \varphi\ \partial\ Y^2}\ (\theta, \varphi_0, Y_0)$, la variation δ X est $\lambda\, g\ (\theta, \varphi, Y)$: l'hypothèse contraire en vertu du calcul inverse entraînerait pour $\delta\, r$ une fonction différente de celle qu'on a supposé, et il y aurait contradiction. La fonctionnelle $\delta\ X\ |\ [\delta\, r]\ |$ est linéaire par rapport à $\delta\, r$; elle tend vers zéro avec $\delta\, r$. Le

(1) Il suffit pour cela que $g\ (\theta, \varphi, Y)$ soit une intégrale de l'équation aux variations complètement linéaire tirée de l'équation (20), et qu'elle vérifie en outre deux conditions aux limites obtenues par variation des équations (1 bis) et (27) en laissant Y_0 fixe.

résultat est valable quelle que soit la fonction δr. pourvu que la fonction $(X + \delta X)$ correspondante existe, c'est-à-dire pourvu que la fonction $r + \delta r$ permette au moyen des équations I, II et III, de définir les fonctionnelles $f_0 \mid [r + \delta r] \mid$ et $\psi \mid [r + \delta r]$ (1). Le résultat s'applique donc quand r et $r + \delta r$ sont des fonctions n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce; il entraîne la continuité de $f_0 \mid [r] \mid$ et $X_0 \mid [r] \mid$ pour ces fonctions.

3° *Les limites obtenues sont indépendantes du mode de division choisi :*

Considérons, en effet, deux modes de division et soient par exemple ψ et ψ' les limites obtenues pour X_0 (la démonstration serait exactement la même que la fonctionnelle f_0). Nous allons montrer que leur différence peut être considérée comme plus petite qu'aucun nombre positif arbitrairement choisi.



(1) Il suffit d'ailleurs d'écrire les équations du système δ_n, et de former les équations qu'on en déduit par variation de $r(\theta_0, \varphi_i)$, $X_0(\theta_0, Y_j)$ et $f_0(\theta_0, \varphi_n)$ pour voir que $\delta f_0(\theta_0, \varphi_i)$ et $\delta X_0(\theta_0, Y_i)$ sont linéaires par rapport aux $\delta r(\theta_0, \varphi_j)$ et aux δf_1 et δf_2. Cela établit directement que si l'on choisi pour δr une fonction telle que $r + \delta r$ puisse représenter une surface C, les fonctions $\delta X(\theta_0, Y_i)$ et $\delta f_0(\theta_0, \varphi_i)$ ont des limites qui sont des fonctionnelles linéaires par rapport à δr. Ces fonctionnelles qui sont évidemment bornées sont du même coup continues.

On peut démontrer très simplement sans passer par la démonstration (1°) que si r est une fonction susceptible de définir une surface $[c]$, $r + \delta r$ l'est aussi quel que soit δr. Cela vient de ce qu'on peut toujours considérer un flotteur très voisin du flotteur correspondant à r, et que par conséquent, les fonctionnelles δf_0 et δX_0 existent dans ce cas particulier et que ainsi les déterminants qui figurent dans les expressions de $\delta f_0(\theta, \varphi_i)$ et $\delta X_0(\theta, Y_j)$ ont des limites : comme ils sont *indépendants de δr on peut donner à r* une variation *quelconque*, les fonctionnelles δf_0 et δX_0 restent bien définies.

Soient R_n et $R'_{n'}$, les suites de fonctions simples que les deux modes de division nous ont conduit à envisager. Soient par exemple, A_1 B_1 A_2 .... la ligne brisée formée par la fonction R_n et A_1 B'_1 A'_2 .... la ligne brisée formée par la fonction $R'_{n'}$: soit $R_{n+n'}$, la fonction simple d'ordre $n + n'$ n'est représentée par la ligne brisée

$$A_1 \; B'_1 \; A'_2 \; C_1 \; A_2 \; C_2 \; A'_3 \; C_3 \; A_3 \; C_4 \; A'_4 \; B'_4 \; A'_5 \; C_5 \; A_4 \ldots .$$

formée à partir des fonctions précédentes comme l'indique la figure. Si n et n' sont assez grands, α étant un nombre positif arbitrairement choisi, on aura :

$$\left| \psi \mid [R_n] \mid - \psi \mid [R_{n+n'}] \mid \right| < \frac{\alpha}{2}$$

$$\left| \psi \mid [R'_n] \mid - \psi \mid [R_{n+n'}] \mid \right| < \frac{\alpha}{2}$$

donc $$\left| \psi \mid [R_n] \mid - \psi \mid [R'_{n'}] \mid \right| < \alpha$$

et : $$\left| \psi \mid [R_n] \mid - \psi \right| < \frac{\beta}{2}, \quad \left| \psi \mid [R'_{n'}] \mid - \psi' \right| < \frac{\beta}{2}$$

donc $$\left| \psi - \psi' \right| < \left| \psi - \psi \mid [R_n] \mid \right| + \left| \psi \mid [R_n] \mid - \psi \mid [R_{n'}] \mid \right|$$
$$+ \left| \psi \mid [R_{n'}] - \psi' \right| < \alpha + \beta.$$

α et β étant des nombres arbitrairement choisis, $\alpha + \beta$ est quelconque et la proposition est démontrée.

42. — Nous avons établi la propriété que nous avions en vue en nous appuyant sur une seule hypothèse : *la continuité de la fonctionnelle* H. Les circonstances dans lesquelles cette hypothèse n'est pas vérifiée sont très rares et nous pouvons considérer le résultat auquel nous sommes arrivés comme extrêmement vraisemblable.

Certes, il aurait été plus satisfaisant, au point de vue strictement mathématique de ne rien supposer : nous nous sommes résolus cependant à nous contenter de cette démonstration et à énoncer la proposition en raison de son intérêt théorique et surtout pratique.

Si, pour une raison quelconque, on est conduit à modifier la surface des centres de carènes d'un bâtiment, il est fort utile qu'on sache si la modification est possible : si le bâtiment projeté est faisable. De pareilles modifications sont souvent d'un gros intérêt, elles permettent d'améliorer les qualités nautiques des bateaux, par exemple, et leur stabilité sous des angles finis et des axes d'inclinaison qui ne soient ni longitudinaux, ni transversaux (1).

Pour utiliser pratiquement la théorie précédente, c'est-à-dire calculer les formes d'un bateau dont la surface c est donnée, il faudrait déterminer les fonctions H_n dont la limite est la fonctionnelle H, donner leurs valeurs numériques pour différentes valeurs de f_1, f_2, et des angles φ assez resserrés, et former des tables ou abaques représentant pour diverses valeurs de n les inconnues $f_0\,(\theta_0, \varphi_1)$ .... $f_0\,(\theta_0, \varphi_n)$ $X_0\,(\theta, Y_1)$ .... $X_0\,(\theta, Y_n)$ en fonction de $r\,(\theta, \varphi_1)$ .... $r\,(\theta, \varphi_n)$. Le travail serait évidemment considérable ; il paraît toutefois pouvoir être effectué. Nous nous contentons pour l'instant, de poser le problème.

Si, par exemple, les fonctions $f_0\,(\theta, \varphi)$ et $X\,(\theta, \varphi, Y)$ étaient développables en séries entières convergentes au voisinage de leurs points respectifs : $f_0\,(\theta, \varphi_1)$ et $X\,(\theta, \varphi_1, Y)$, on pourrait, assez aisément, former ces fonctions H_n.

L'équation $f_0\,(\theta, \varphi) = f_0\,(\theta, \varphi_1) + \ldots + \dfrac{(\varphi - \varphi_1)^n}{n\,!}\,\dfrac{\partial^n f_0}{\partial \varphi^n}\,(\theta, \varphi_1)$

limitée au terme de rang n permet en effet de calculer les différentes fonctions : $\dfrac{\partial f_0}{\partial \varphi}\,(\theta, \varphi_1)$, ... $\dfrac{\partial^n f_0}{\partial \varphi^n}\,(\theta, \varphi_1)$ en fonction de

$f_0\,(\theta, \varphi_1)$ .... $f_0\,(\theta, \varphi_n)$. Les fonctions $\dfrac{\partial^i X_0}{\partial \varphi^i}\,(\theta, Y)$ qui sont les coef-

ficients de $\dfrac{(\varphi_i - \varphi_1{}^i)}{i\,!}$ dans le développement de H, et qui sont des

fonctions

$$G_i\left[X_0, f_1, f_2, f_0\,(\theta, \varphi_1) \ldots \frac{\partial^i f_0}{\partial \varphi^i{}_{(\varphi = \varphi_1)}}\,(\theta, \varphi_1)\right]$$

---

(1) M. Doyère a pu en effet démontrer qu'autour de certains de ces axes les couples capables de produire le chavirement sont beaucoup plus petits que ceux que l'on considère d'ordinaire

deviennent par la substitution des $f_0(\theta, \varphi_i)$ aux $\dfrac{d^i f_0}{d \varphi^i}(\theta, \varphi_1)$ des fonctions

$$K_i\left[X_0, f_1, f_2, f_0(\theta, \varphi_1) \ldots f_0(\theta, \varphi_n)\right]$$

et en nous limitant toujours au terme de rang $n+1$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} H_n = {} & X_0(\theta, Y) + \ldots \\ & + \frac{(\varphi - \varphi_1)^n}{n\,!} K_n\left[X_0, f_1, f_2, f^0(\theta, \varphi_1) \ldots f_0(\theta, \varphi_n)\right] \end{aligned}} \text{ (1)}$$

En calculant δH_n en fonction de $\delta X_0, \delta f_1, \delta f_2, \ldots \delta f^0(\theta, \varphi_i)$ et en écrivant que le système S_{n-1} est toujours satisfait, on obtient $3n$ équations complètement linéaires donnant les inconnues

$$\delta f_0(\theta, \varphi_i), \ \delta X_0^{\mathrm{I}}(\theta, Y_i) \text{ et } \delta X_0^{\mathrm{II}}(\theta, Y_i)$$

sous forme de quotients par le même déterminant, de déterminants linéaires et homogènes par rapport aux δf_1, δf_2 et $\delta r(\theta, \varphi_i)$. Si on les développe on obtient quand n augmente indéfiniment, pour coefficients de δf_1, δf_2 et $\delta r(\theta, \varphi_i)$ des fonctionnelles en r, ce qui est très compliqué : mais si on se borne toujours au rang n on a :

$$\delta f_0(\theta, \varphi) = \frac{\begin{array}{r} F_1\left[r(\theta, \varphi_1), \ldots, r(\theta, \varphi_n), f_1, f_2, \theta, \varphi\right] \delta r(\theta, \varphi_1) + \ldots \\ + F_n[\ ]\, \delta r(\theta, \varphi_n) + G_1\, \delta f_1 + G_2\, \delta f_2 \end{array}}{U\left[r(\theta, \varphi_1), \ldots r(\theta, \varphi_n), f_1, f_2, \theta, \varphi\right]}$$

$$\delta X_0(\theta, Y) = \frac{\begin{array}{r} P_1\left[r(\theta, \varphi_1) \ldots f_1, f_2, \theta, Y\right] \delta r(\theta, \varphi_1) + \ldots \\ + P_n[\ ]\, \delta r_n + Q_1\, \delta f_1 + Q_2\, \delta f_2 \end{array}}{U\left[r(\theta, \varphi_1) \ldots r(\theta, \varphi_n), f_1, f_2, \theta, \varphi\right]}$$

les fonctions $F_1, \ldots F_n, P_1 \ldots P_n, Q_1, Q_2, G_1, G_2$ étant les mêmes pour tous les navires.

(1) La fonction H_n ainsi définie est continue par rapport aux f^0, aux X_0 à φ et à Y si les fonctions K_n elles-mêmes le sont. Cela a lieu sauf pour des valeurs exceptionnelles des variables.

43. — Nous avons déjà remarqué que le problème n'était bien posé que parce que nous avons supposé deux déterminations X^I et X^{II} indépendantes l'une de l'autre. Les courbes F obtenues, présentent en général, de ce fait même, une discontinuité aux points $Y = a$ et $Y = b$, au moins pour un rayon de courbure d'un certain ordre. Si l'on voulait que l'une des déterminations fût fonction de l'autre, le problème serait en général impossible ; on n'aurait en fait, que deux fonctions inconnues pour trois équations. Les flotteurs que nous obtenons ne sont pas susceptibles, par conséquent, d'être représentés par une équation telle que

$$\Phi\ (x, y, z) = 0$$

où la fonction Φ jouit à la fois de l'uniformité et de la continuité pour elle et toutes ses dérivées. Nous dirons que ce ne sont pas des flotteurs « géométriques » : une surface [c] donnée à priori, ne peut être la surface [c] d'un flotteur géométrique.

On voit que, par contre, si l'on voulait une flottaison avec plus de deux déterminations, le problème serait parfaitement indéterminé. Les flottaisons à plus de deux déterminations, peuvent se présenter dans les docks chargés du relevage des sous-marins.

44. — Pour rechercher si de même, une surface quelconque peut être considérée comme une surface [F], on aurait à déterminer une fonction X (θ, Y) de manière qu'une certaine fonctionnelle

$$U \left| [\rho \mid X_0\, \theta,\ \varphi,\ Y] \right|$$

représentant l'intégrale générale de l'équation (1 bis) vérifie les deux équations I et II.

On voit que le problème est bien posé : deux équations pour déterminer X_0^I et X_0^{II}. Et on se rend compte finalement, pourquoi un ensemble [F], [c] donné à l'avance, est en général incompatible.

Pour examiner si les équations I et II comportent des solutions en X_0, on peut cette fois encore diviser en n parties, l'intervalle (o, α) de variation de φ et l'intervalle (a, b) de variation de Y. Le premier intervalle résulte de la portion de surface [F] considérée. Le deuxième est arbitraire. On remplace les intégrales qui figurent au premier membre des équations par les valeurs approchées, (sommes calculées par exemple par la méthode des trapèzes), et on considère la fonction X_0^I (θ, Y) comme limite de la valeur trouvée pour $X_0^I(\theta, Y_i)$ quand θ restant fixe, n augmente indéfiniment et que $Y_i \longrightarrow Y$. Cette limite si elle existe est une fonctionnelle $\Psi \mid [\rho] \mid$. Il suffit pour démontrer son existence de formuler un certain nombre d'hypothèses analogues à celles que nous avons du faire pour la surface $[c]$ et de prouver que pour une fonction ρ particulière, elle existe, Y variant toujours entre a et b et φ entre o et α.

On peut considérer comme probable que n'importe quelle portion de surface, peut être considérée comme surface [F]. La condition III n'existant pas ici, ρ peut changer de signe, et posséder certaines discontinuités, qui sont d'ailleurs de même nature que celle que permet pour $f(x)$ la définition de

$$\int f(x)\,dx.$$

45. — Le problème qui consisterait à expliciter les solutions $X(\theta, \varphi, Y)$ correspondant à une surface $r(\theta, \varphi)$ prise pour surface $[c]$ serait extrêmement compliqué. Il existe cependant des circonstances où la détermination d'intégrales particulières peut se faire sans la moindre intégration.

C'est par exemple le cas où *l'on connait des fonctions $R(\theta, \varphi)$ telles que pour toute valeur θ_0 il y en ait une qui se réduise à la même fonction de φ que* r, *et pour laquelle on connait un des flotteurs au moins qui lui correspondent.*

Il va de soi, en effet, que des fonctions $X_0(\theta, Y)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_0(\theta, \varphi)$ qui pour $\theta = \theta_0$, se réduisent aux mêmes éléments que les fonctions analogues relatives à R, constituent un système de solutions des conditions (A) pour $\theta_1 = \theta_0$ et φ quelconque.

Les fonctions engendrées, lorsque θ_0 varie, par les éléments auxquels se réduisent pour $\theta' = \theta_0$ les fonctions $X_0(\theta, Y)$, f_1, f_2, f_0 relatives à R, constituent évidemment un système de solutions des conditions (A) pour θ et φ quelconques. Elles permettent ainsi, grâce aux équations (22) et (27), de calculer une fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ qui représente les lignes F d'un flotteur, dont la surface $[c]$ est la surface $r(\theta, \varphi)$. Mais la fonction X elle-même, est comme X_0 f_1, f_2 et f_0 connue sans quadrature : les fonctionnelles

$$H \mid [f_0 \mid, X_0, f_1, f_2] \mid$$

relatives à R et à r coincident pour $\theta = \theta_0$; donc la fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ est engendrée par la variation en fonction de θ_0 de la fonction

ξ (θ, Y) qui représente les lignes de flottaison du flotteur relatif à R, pour $\theta = \theta_0$.

Si l'on veut, encore, on peut considérer que le flotteur obtenu est engendré par une série de lignes qui ne sont autres que les lignes de flottaison de R, considérées pour des valeurs successives de θ.

Si on considère par exemple une surface pour laquelle r ne dépend que de θ, c'est-à-dire une surface de révolution autour d'un axe vertical, on peut, sans intégration, lui faire correspondre une infinité de flotteurs dont elle soit la surface [c]

Il suffit de choisir comme fonction R, des fonctions représentant des sphères, et telles que pour $\theta, = \theta_0$, le rayon R de la sphère soit égal à r (θ_0). Cette sphère peut être considérée comme la surface [c] d'une autre sphère Σ, dont le rayon est déterminé par la condition que le volume de carène de cette sphère soit égal au même volume V que le flotteur cherché : sur cette sphère Σ les flottaisons correspondant à $\theta = \theta_0$ sont des cercles F_0 [X, Y].

Lorsqu'on donne à θ une autre valeur θ_1, on est de même amené à considérer une sphère Σ_1 dont les flottaisons correspondant à $\theta = \theta_1$ sont des cercles F_1 [X, Y]. La fonction F [X, Y, θ] qui, quand θ varie, passe successivement par les fonctions F_0. F_1, — etc, représente les lignes de flottaison d'un flotteur dont la surface [c] est la surface r (θ).

La surface [F] est déterminée sans quadrature par l'équation (21) [1] et l'équation du flotteur en résulte immédiatement.

Le raisonnement qui précède constitue une démonstration directe du fait que toute surface de révolution à axe vertical, et de plus convexe, peut être considérée comme surface [c].

(1) Page 45.

CHAPITRE V

Détermination d'un flotteur à partir de deux multiplicités (F_1) et (F_2) et des flottaisons correspondantes : N° 45.

46. — Nous allons maintenant nous occuper de la détermination d'un flotteur dont on donne deux multiplicités (F_1) et (F_2) ainsi que les flottaisons correspondant à ces multiplicités.

Avant de traiter le problème dans toute sa généralité, nous allons d'abord nous occuper du cas suivant beaucoup plus simple. Nous nous proposons de déterminer un flotteur jouissant des propriétés suivantes :

1° Sa surface $[F]$ se réduit à un point.

2° Sa surface $[c]$ passe par deux multiplicités (c_1) et (c_2) données à l'avance.

3° Les flottaisons (c_1) et (c_2) correspondent à des axes d'inclinaison rectangulaires et proviennent de la flottaison droite par dilatation λ suivant la direction de l'un de ces axes, la dilatation μ suivant l'autre.

Pour faciliter les calculs, nous supposons que les courbes (c_1) et (c_2) sont planes : la courbe (c_1) étant l'intersection de la surface $[c]$ du flotteur cherché par son couple 10 : la courbe (c_2) étant située dans le plan longitudinal.

En définitive, nous cherchons un *flotteur amphidrome* dont les courbes (c) correspondant à des inclinaisons transversales et à des inclinaisons longitudinales sont données.

Pour un navire non amphidrome, les résultats obtenus ne pourront être considérés que comme de premières approximations.

47. — Soit f (X, Y) l'équation de la flottaison *droite* rapportée à ses axes de symétrie, l'axe X étant dans le couple 10, l'axe Y dans le plan longitudinal. L'origine est le centre de gravité de la flottaison, et est par conséquent un point de $[F]$.

Nous désignerons par flottaisons (θ_1) les flottaisons qui correspondent à (c_1), donc à des inclinaisons transverales.

Convention analogue pour (c_2), on passe de la flottaison droite à une flottaison isocarène (θ_1) en remplaçant X par $X_1 = \lambda_1 X$, Y par $Y_1 = \mu_1 Y$ par hypothèse. λ_1 et μ_1 sont à priori des fonctions de θ_1 : mais comme les différentes flottaisons θ_1 doivent couper l'axe Y au même point il est bien évident que $\mu_1 \equiv 1$. Pareillement on aura $\lambda_2 \equiv 1$, $\mu_2 = \mu_2(\theta_2)$ [1].

48. — Suivant qu'on considère un point M (x, y, z) du flotteur V cherché comme appartenant à une flottaison (θ_1), où à une flottaison (θ_2), on peut mettre ses coordonnées sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= X_1 \cos \theta_1 = \lambda_1 X \cos \theta_1 \\ y &= Y_1 = Y \\ z &= X_1 \sin \theta_1 = \lambda_1 X \sin \theta_1 \end{aligned} \right. \tag{2}$$

ou sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= X_2 = X' \\ y &= Y_2 \cos \theta_2 = \mu_2 Y' \cos \theta_2 \\ z &= Y_2 \sin \theta_2 = \mu_2 Y' \sin \theta_2 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

X, Y d'une part, X', Y' d'autre part, sont les coordonnées de deux points de la flottaison droite.

On a donc :

$$f(X_1\ Y) = 0 \quad (4) \qquad\qquad f(X', Y') = 0 \quad (5)$$

Désignant par $r(\theta_1)$ et $R(\theta_2)$ les rayons de courbure des courbes (c_1) et (c_2), par I_1 et I_2 les moments d'inertie respectifs des flottaisons (θ_1) par rapport à Y et des flottaisons θ_2 par rapport à X, on a :

$$r = \frac{I_1}{V} \qquad\qquad R = \frac{I_2}{V}$$

Comme $I_1(\theta_1) = \lambda_1^3\, I_1(0)$ et $I_2(\theta_2) = \mu_2^3\, I_2(0)$, et que $\frac{r(\theta_1)}{r(0)} = \frac{I_1(\theta_1)}{I_1(0)}$, $\frac{R(\theta_2)}{R(0)} = \frac{I_2(\theta_2)}{I_2(0)}$, on en conclut que λ_1 et μ_1 sont des fonctions de θ_1 et θ_2 qui résultent de la connaissance des courbes (c_1) et (c_2) :

$$\lambda_1 = g_1(\theta_1) \quad (6) \qquad\qquad \mu_2 = h_2(\theta_2) \quad (7)$$

---

[1] Nous éliminons ici le cas où l'axe Y ferait partie de la surface V du flotteur.

En identifiant les formes (2) et (3). nous obtenons 3 équations, qui, jointes aux équations (4), (5), (6), (7), constituent 7 relations entre les 8 variables :

$$\theta_1,\ \theta_2 : \lambda_1,\ \mu_2 : X,\ Y\ ;\ X',\ Y'.$$

Il semble donc à priori, que parmi ces 8 variables, il en existe une seule d'indépendante. Mais, comme en réalilé, la surface V peut se représenter en fonction de 2 paramètres ***indépendants***, qui peuvent être, par exemple, X et θ_1 ou X' et θ_2, on en conclut que les 7 équations se réduisent nécessairement à 6, et que, par conséquent les fonctions μ_2 (θ_2) et λ_1 (θ_1) ne sont pas indépendantes.

Comme conclusion on peut énoncer *qu'un flotteur satisfaisant aux conditions énumérées au N° 3, n'existe pas en général. Il n'y a de solutions au problème posé que si les multiplicités (c_1) et (c_2) ne sont pas quelconques l'une par rapport à l'autre.* On peut dire, sous une autre forme, que la *stabilité longitudinale et la stabilité transversale d'un flotteur satisfaisant aux conditions 1° et 3° du N° 3, sont deux éléments tels, qu'il suffit de connaître l'un d'entre eux, pour pouvoir calculer l'autre.*

49. — Ce résultat ne subsiste pas, bien entendu, si l'on n'impose pas aux flottaisons (θ_1) et (θ_2) de provenir de la ottaison droite par simple dilatation.

Pour une flottaison (θ_1), on peut en effet toujours écrire :

$$X_1 = \lambda_1 X, \qquad Y_1 = \mu_1 Y$$

λ_1 et μ_1 étant des fonctions de θ_1, de λ ou Y telles que les différentes flottaisons successives, coupent toutes l'axe Y au même point. Il suffit pour cela que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 + \theta_1\, g_1\, (\theta_1,\ X) \\ \mu_1 = 1 + \theta_1\, X\, h_1\, (\theta_1,\ X) \end{array} \right.$$

g_1 et h_1 prenant des valeurs finies pour $\theta_1 = 0$. $X = 0$.

Les nouvelles flottaisons θ_1 dépendent, non plus de 1 fonction, à savoir λ_1, mais de 2, à savoir g_1 et h_1. Il en est de même des flottaisons θ_2 qui dépendent de fonctions g_2 et h_2. En définitive l'identification des formes (2) et (3) jointes aux deux équations (4) et (5), et aux conditions exprimant que les moments d'inertie des flottaisons (θ_1) par rapport à oY sont donnés, ainsi que les moments d'inertie des flottaisons (θ_2) par rapport à oX permet d'aboutir à 7 relations entre 10 fonctions. Il y a donc trois fonctions indépendantes, par exemple X, θ_1 et λ_1. Et par suite, il est possible de déterminer λ_1 de manière que les moments d'inertie des flottaisons θ_1 soient donnés par rapport aux axes **X** de ces flottaisons. Autrement dit, *il est possible en faisant varier convenablement la forme des flottaisons, de construire un flotteur satisfaisant aux conditions 1° et 2° du N° 3, et qui de plus, soit tel que sa stabilité transversale initiale, dans une inclinaison longitudinale soit donnée.*

50. — Ce résultat ne subsiste pas davantage, si continuant d'imposer au flotteur cherché, les conditions 2° et 3° du N° 3, on remplace la condition 1° par la condition suivante :

4° *La surface* [F] *du flotteur devra posséder deux multiplicités* (F_1) *et* (F_2) *données à l'avance, et correspondant aux multiplicités* (c_1) *et* (c_2).

Cela tient à ce que de cette condition 4°, il ne résulte pas pour μ_1 et λ_2 l'obligation de rester constamment égaux à l'unité. Ils peuvent varier d'une manière quelconque, sous la seule réserve que $\mu_1(O) = 1$, $\lambda_2(o) = 1$.

D'une manière précise, soient ξ_1 et ζ_1 les coordonnées d'un point de (F_2), η_2 et ζ_2 celles d'un point de (F_2), un point de la surface V, suivant qu'on le considère comme appartenant à une flottaison (θ_1) ou à une flottaison (θ_2), a des coordonnées de la forme :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi_1 + X_1 \cos\theta_1 = \xi_1 + \lambda_1 X \cos\theta_1 \\ y &= Y_1 = \mu_1 Y \\ z &= \zeta_1 + X_1 \sin\theta_1 = \zeta_1 + \lambda_1 X \sin\theta_1 \end{aligned}\right. \qquad (2')$$

ou de la forme :

$$\left\{\begin{aligned} x &= X_2 = \lambda_2 X' \\ y &= \eta_2 + Y_2 \sin\theta_2 = \eta_2 + \mu_2 Y' \cos\theta_2 \\ z &= \zeta_2 + Y_2 \sin\theta_2 = \zeta_2 + \mu_2 Y' \sin\theta_2 \end{aligned}\right. \qquad (3')$$

on a toujours :

$$f(X\,Y) = 0 \quad (4) \qquad\qquad f(X', Y') = 0 \quad (5)$$

et les conditions : $\dfrac{I_1(\theta_1)}{I_1(o)}$ = fonction donnée de θ_1, $\dfrac{I_2(\theta_2)}{I_2(o)}$ = fonction donnée de θ_2 se traduisent par :

$$\lambda_1^3 \mu_1 = g_1(\theta_1) \quad (6') \qquad\qquad \lambda_2 \mu_2^3 = g_2(\theta_2) \quad (7')$$

Identifiant les formes (2') et (3'), nous obtenons 3 équations, qui, jointes à (4'), (5'), (6') et (7') constituent 7 relations entre les 10 variables :

$$X, Y\ ;\ X'\,Y'\ ;\ \lambda_1\,\mu_1\ ;\ \lambda_2\,\mu_2\ ;\ \theta_1 \text{ et } \theta_2$$

51. — Comme au numéro (23) nous avons trois variables indépendantes : X, I_1 et λ_1, et il est possible de joindre aux conditions (2°), (3°) et (4°) une autre condition portant sur λ_1, par exemple, et exprimant que la deuxième courbure principale de la surface (c) du flotteur obtenu, est donnée tout le long de (c_1).

Donc, non seulement il est possible de déterminer un amphidrome dont les flottaisons transversales et longitudinales proviennent de la flottaison droite par transformation affine, qui possède une surface (F) *passant par deux multiplicités données* (F_1) *et* (F_2), *qui possède une stabilité longitudinale et une stabilité transversale données, mais il est encore possible de le déterminer de manière que, dans une inclinaison longitudinale quelconque il ait une stabilité transversale initiale donnée à l'avance.*

52. – *Le résultat auquel nous venons d'arriver subsiste même lorsqu'on impose pas aux flottaisons* (θ_1) *et* (θ_2) *d'être similaires de la flottaison droite.* Ce qui intervient en effet, au fond du raisonnement précédent, c'est le fait que λ_2 et μ_1 peuvent ne pas être identiques à l'unité, et par conséquent, qu'on peut choisir arbitrairement la forme des flottaisons θ_1.

53 — Soit un certain flotteur amphidrome [V] et considérons tous les flotteurs amphidromes (V') dont les multiplicités (F_1) et (c_1) coïncident avec les multiplicités correspondantes du flotteur [V]. Il en existe une infinité, et on peut choisir la forme de leurs flottaisons (θ_1) absolument arbitrairement.

Si, en particulier, on cherche un flotteur (V') dont les flottaisons (θ_1) soient celles du flotteur (V), on peut penser que le flotteur (V'), engendré par ces flottaisons est parfaitement défini, et que par suite, il coïncide avec le flotteur V.

Les multiplicités (F_2) et (c_2) de ce flotteur (V') seraient donc les multiplicités (F_2) et (c_2) du flotteur V, de sorte qu'il nous serait impossible de trouver deux amphidromes différents, ayant mêmes multiplicités (c_1), (F_1), mêmes flottaisons (θ_1).

Le résultat que voilà est contraire à celui que nous avons énoncé à la fin du numéro (51).

La contradiction n'est bien entendu qu'apparente. Elle tient à ce que un flotteur n'est pas défini par la donnée de (F_1), (c_1) et de ses flottaisons (θ_1). Ces flottaisons n'engendrent en réalité qu'une portion de surface limitée à une ligne E tracée d'ailleurs sur le cylindre dont (F_1) est une section droite.

La surface V n'étant pas complètement définie, il en est de même de la stabilité longitudinale du flotteur dont elle constitue la carène.

54. — La raison analytique d'une pareille circonstance, est que la fonction ρ intégrale de (1) n'est pas définie seulement par la donnée de ρ_0, de $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$ $(\varphi = O)$ et de X_0 (θ, Y). S'il en était autrement, cette seule équation (1), pourrait moyennant la connaissance de conditions aux limites, déterminer à la fois les fonctions ρ et X, ce qui est évidemment absurde.

55. — *Si l'on impose aux flottaisons* (θ, φ) *d'être similaires de la flottaison droite, une surface quelconque ne peut en général être prise comme surface* $[c]$. Cela tient à ce que l'on ne dispose, pour passer de la flottaison droite aux flottaisons inclinées, que de deux fonctions λ et μ, lesquelles doivent vérifier trois relations.

Mais ce qu'on peut affirmer en tout cas, c'est que *si la surface* $[c]$ *convient pour un flotteur, elle convient pour une infinité, dont la forme vu l'ordre de l'équation* (1), *dépend de deux fonctions arbitraires.* Cette vue particulière confirme les résultats du N° 43.

56. — Nous étant rendu compte sur un cas particulier des circonstances qui se rencontrent, nous pourrons maintenant aborder le problème dans toute sa généralité.

Nous avons vu au N° 24 (in fine) qu'une fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ est bien définie par la donnée d'une multiplicité (F) représentée par les fonctions $\lambda(\theta, \varphi)$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}(\theta, \varphi)$ pour $\varphi = \varphi_0$, des flottaisons correspondantes représentées par une fonction $X_0(\theta, Y) \equiv X(\theta, \varphi, Y)$ pour $\varphi = \varphi_0$, et de la fonction $\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o)$.

D'une manière précise on peut écrire que :

$$X(\theta, \varphi, Y) \equiv H \left| \frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o) \right| X_0(\theta, Y), \lambda_0(\theta), \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}(\theta), \theta, \varphi, Y \Big|$$

expression qui signifie que X est une fonction au sens ordinaire du mot de X_0, λ_0, $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}$ θ, φ, Y, mais une fonctionnelle de $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ (θ, φ, o).

Nous avons déjà utilisé ce fait sous une autre forme quand nous avons établi (numéros 39-42) que toute surface convexe était dans son ensemble, susceptible d'être considérée comme surface[c].

Soit $g(\theta, \varphi, Y)$ la fonction X pour le flotteur obtenu au moyen des données :

$$X_0, \lambda_0 \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o).$$

et $G(\theta, \varphi, Y)$ la fonction X correspondant au flotteur obtenu avec les données :

$$X_1(\theta, Y), \lambda_1, \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X^1}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o)$$

Les fonctions λ_1 et $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi}$ définissent la multiplicité (F_1). X_1 représente les flottaisons correspondantes.

Pour que les deux flotteurs coïncident, il faut et il suffit, que les fonctions g et G soient identiques, ce qui entraîne la nécessité pour la fonction $\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o)$ d'être la même dans les deux cas.

L'identité des fonctions g et G se traduit d'ailleurs par une équation de la forme :

$$h\left|\left[\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o) \middle| X_0, \lambda_0, \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi} \theta, \varphi\, Y\right]\right| = H\left|\left[\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o) \middle| X_1, \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \theta, \varphi, Y\right]\right|$$

qui doit être vérifiée quels que soient θ, φ, Y.

On voit qu'elle est d'une forme compliquée, qui ne se prête guère au calcul. On peut dire cependant que si

$$X_0, \lambda_0, \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}, \; X_1, \lambda_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$$

sont pris arbitrairement, le problème est mal posé : il revient à déterminer une fonction

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o)$$

ne dépendant que deux variables, alors que manifestement, la solution, si elle existe, est une fonction de trois variables.

Cela nous suffit à dire que les fonctions

$$X_0,\ \lambda_0,\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \lambda_1\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi}$$

étant arbitrairement choisies, il ne peut en être de même, au moins d'une manière absolue, pour la fonction X_1.

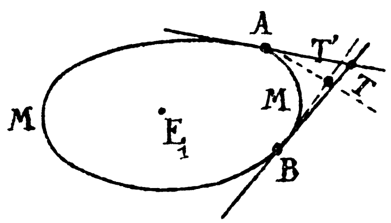
Autrement dit, les multiplicités (F_0) et $(F)_1$ ainsi que les flottaisons F_0 étant choisies à l'avance, il n'y a en général pas de solution si on choisi les flottaisons F_1 d'une manière absolument quelconque.

57. — Cela ne signifie pas d'ailleurs qu'il n'y ait pas une infinité de flottaisons F_1 répondant à la question, si l'on reprend le point de vue géométrique par lequel nous avons commencé.

Les flottaisons F_0 engendrent une portion de surface qui est limitée à une courbe E, lieu des points d'intersection avec ces flottaisons F_0 du cylindre circonscrit à la multiplicité (F_0).

Les flottaisons F_1 doivent être choisies de manière qu'elles ne coupent pas cette portion de surface, mais qu'au contraire, elles aient avec elle une infinité de points communs. Cela n'est évidemment pas réalisé en général, si on les prend absolument au hasard.

Les plans de ces flottaisons F_1 définis comme étant tangents à la multiplicité (F_1) coupent la portion de surface engendrée par F_0 suivant des courbes qui ont l'allure de celle représentée sur la figure ci-contre : (A M′ B), elles ne sont pas fermées, et les deux points auxquels elles aboutissent sont sur le lieu E.



Pour avoir une flottaison F_1, il est loisible de compléter cette courbe par un arc quelconque tel que $\widetilde{\text{A M B}}$, pourvu qu'il soit de l'autre côté de A M′ B par rapport à la corde A B.

Pour éviter que les plans tangents à la multiplicité (F_0) ne coupent cet arc A M B, ses tangentes en A et en B devront être comprises à l'intérieur de l'angle des tangentes en A et B à l'arc $\widetilde{\text{A M′ B}}$.

Nous pouvons remarquer qu'il est possible de choisir cet arc A M B, de façon que l'aire de la flottaison F_1 obtenue, ait son centre de gravité au point F_1 désiré, et que des intégrales attachées à cette courbe aient des valeurs également déterminées.

On peut ainsi s'arranger, comme pour les flottaisons F_0, de manière que la conique d'inertie de F_1 soit une conique donnée, ce qui entraîne pour la surface [c] du flotteur obtenu, la propriété d'être circonscrite à un cylindre donné, et d'avoir, tout le long de la courbe de contact, son indicatrice également donnée.

58. — Il est ainsi possible de trouver une infinité de flotteurs admettant des multiplicités (F_1) et (F_2) arbitraires, dont les stabilités de formes longitudinale et transversale soient données, ainsi que la stabilité initiale, pour des positions infiniment voisines, position elle-même inclinée transversalement ou longitudinalement. On peut en particulier atteindre ce but en se donnant arbitrairement la forme des flottaisons correspondant à l'une de ces multiplicités.

59. — Du point de vue analytique, la question serait à peu près inextricable. Nous allons l'examiner tout de même un peu, pour montrer quelle est la nature complexe des problèmes qui se rattachent à la question des flottaisons correspondant à deux axes d'inclinaison différents.

On peut mettre la fonction g sous la forme d'une série convergeant moyennant quelques conditions de continuité, et dont le développement est le suivant :

$$g(\theta, \varphi, Y) \equiv X_0(\theta, Y) + \frac{\varphi - \varphi_0}{1} \Psi_1\left[f_1(\theta)\, Y, \lambda_0 \; \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi}\right] + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\varphi - \varphi_0)^n}{n\,!} \Psi_n \left[f_n(\theta), \theta, Y \right] + \ldots\ldots\ldots$$

Dans ce développement $f_n(\theta)$, est la fonction à laquelle se réduit $\dfrac{\partial_n X}{\partial \varphi_n}(\theta, \varphi_0\, o)$, $\Psi_1 \ldots\ldots \Psi_n$ sont des fonctions déterminées.

Pareillement on aurait :

$$G(\theta, \varphi, Y) = X_1(\theta, Y) + \frac{\varphi - \varphi_1}{1} \Psi_1 \left[F_1(\theta), \theta, Y \right] + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\varphi - \varphi_1)_n}{n\,!} \Psi_n \left[F_n(\theta), \theta, Y \right] + \ldots\ldots\ldots$$

où F_n est la fonction $\dfrac{\partial^n X}{\partial \varphi^n}(\theta, \varphi_1, o)$ et $\Psi_1, \ldots\ldots \Psi_n \ldots\ldots$ des fonctions déterminées.

L'identification de g et de G entraîne que la fonction

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, o)$$

est la même dans les deux cas, ce qui signifie en somme que :

$$F_1(\theta) = f_1(\theta) + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{1} f_2(\theta) + \ldots\ldots + \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)^n}{n\,!} f_{n+1}(\theta) + \ldots\ldots$$

....

$$F_n(\theta) = f_n(\theta) + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{1} f_{n+1}(\theta) + \ldots\ldots + \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)^n}{n\,!} f_{2n}(\theta) + \ldots\ldots$$

....

L'équation $h \equiv$ H peut se remplacer par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} G(\theta, \varphi_1, Y) &= X_1(\theta, Y) = X_0(\theta, Y) + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{1}\Psi_1 + \ldots\ldots \\ &\qquad + \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)^n}{n\,!}\Psi_n + \ldots\ldots \\ \frac{dG}{d\varphi_1}(\theta, \varphi_1 Y) &= \Psi_1(\theta, Y) = \Psi_1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{1}\Psi_2 + \ldots\ldots \\ &\qquad + \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)^n}{n\,!}\Psi_{n+1} + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

....

c'est-à-dire par une infinité d'équations entre l'infinité d'inconnues $f_0(\theta)$, ... $f_n(\theta)$, ... Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, le problème est mal posé en raison de la présence de Y dans ces équations, alors que les inconnues ne dépendent pas de cette variable.

On pourrait essayer de résoudre ces équations en prenant pour Y une valeur fixe, puis en écrivant que les fonctions f_n .... f_n obtenues, ne varient pas quand on donne à Y une autre valeur. Nous ne le tenterons d'ailleurs pas, puisque des considérations géométriques les plus élémentaires nous ont permis d'arriver au résultat. Nous nous bornerons simplement à faire remarquer combien les problèmes qui touchent à la surface [F] sont, malgré les apparences, plus compliqués que ceux qui se rapportent à la surface [c]. Cette complication se révèle déjà quand on étudie parallèlement la valeur des rayons de courbure de [F] et de [c].

60. — D'après ce que nous avons vu au paragraphe 18 ou à la page 70, si l'on se donne l'ensemble d'une surface Φ et d'une surface Γ cet ensemble, en général, n'est pas susceptible de constituer l'ensemble des surfaces [F] et [c] d'un certain flotteur. La surface Φ étant prise pour surface [F], l'équation (1 bis) définit une fonction X (θ, φ, Y) lorsqu'on s'est fixé la fonction X_0 (θ, Y).

Si la solution X ainsi définie, vérifie les conditions (22) de la 1re partie, elle définit un certain flotteur dont la surface [c] est bien définie, et ne coïncide pas, en général, avec la surface Γ. On pourra toujours disposer de la fonction X_0 de manière que la fonction $r(\theta, o) = r_0(\theta)$, soit égale à la fonction correspondante pour la surface Γ, mais le choix étant ainsi fait, on n'aura, en général, pour surface [c] qu'une surface admettant avec Γ, un cylindre horizontal circonscrit commun. Cela suffira d'ailleurs, pour que le navire obtenu, admette une stabilité transversale de forme donnée, dans la mesure où la multiplicité (c) correspondant à $\varphi = 0$ se confond avec la section droite du cylindre circonscrit à [c] le long de (c), c'est-à dire dans la mesure où le navire peut être assimilé à un amphidrome.

61. — Un navire réel ne se construit d'ailleurs pas à partir d'une surface [c] donnée à priori. Le problème que nous avons traité plus haut, concernant les multiplicités (F_1) et (F_2) que nous avons pu pousser jusqu'au bout, a un intérêt pratique beaucoup plus grand. Il permet de déterminer un flotteur dont on donne la stabilité de forme longitudinale, la stabilité de forme transversale et les stabilités initiales, correspondant à des inclinaisons infiniment voisines d'inclinaisons transversales ou d'inclinaisons longitudinales finies.

Le fait de pouvoir se donner arbitrairement des multiplicités (F_1) et (F_2) est intéressant : la flottaison droite étant choisie de manière à diminuer la résistance à l'avancement, on peut agir sur (F_1) par exemple, pour obtenir un maître couple de forme convenable, présentant, par exemple, un remplissage $\dfrac{B^2}{l\,p}$ voulu, avec une profondeur également voulue.

Comparaison avec le problème plan.

Dans les questions relatives à la géométrie des carènes, il est souvent très utile, au point de vue des démonstrations, de traiter d'abord le cas du problème plan, puis de passer au cas général par voie d'intégration parallèlement à $o\,y$.

Monsieur Barrillon dans son cours professé à l'École d'Application du Génie Maritime, en donne de très nombreux exemples.

Cette méthode très fructueuse dans beaucoup de cas, ne permet pas d'aboutir pour les différentes questions que nous avons examinées plus haut. Le problème qui consiste à rechercher un navire dont les surfaces [F] et [c] soient données à l'avance, n'a en général pas de solution dans l'espace, tandis que dans le plan, il en admet une infinité. Cette dernière propriété est établie par Monsieur Barrillon [1].

Cette bizarrerie apparente ne doit pas surprendre. Le problème isocarène inverse, dans le cas du plan, n'est pas du tout semblable au problème isocarène inverse dans l'espace : il doit être considéré comme équivalent au problème de l'espace suivant : recherche d'un flotteur dont les surfaces [F] et [c] admettent respectivement les multiplicités (F) et (c) correspondantes, données à l'avance. Par voie d'intégration parallèlement à $o\,y$, c'est d'ailleurs cet énoncé que l'on obtient. Nous avons vu qu'il admet bien une infinité de solutions, même quand on a fait le choix des flottaisons F correspondantes.

---

[1] Cours déjà cité.

CONCLUSION

Le point de départ de toute l'étude que nous avons faite est la relation — désignée par (1) ou (1 bis) dans la deuxième partie — qui unit la surface [F] aux flottaisons isocarènes *F*. Le problème traité, est sous des aspects divers, toujours le même : c'est le problème isocarène inverse. Voici, en résumé, les principaux résultats :

1° Nous avons établi que pour des lignes planes fermées dépendant de deux paramètres θ et φ soient susceptibles d'être considérées comme lignes de flottaison d'un certain flotteur, il fallait :

Que la fonction $X(\theta, \varphi, Y)$ qui les définit par rapport à des axes passant par le centre de gravité de l'aire qu'elle limite, satisfasse à une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, ainsi qu'à deux conditions aux limites (relations devant être vérifiées pour une valeur particulière de Y, θ et φ étant variables) ;

2° Nous avons montré que les fonctions $X(\theta, \varphi, Y)$ satisfaisant aux trois conditions ci-dessus dépendent de quatre fonctions qu'on peut choisir arbitrairement, ce sont :

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, Y_0),\; X(\theta, \varphi_0, Y),\; \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi, \partial Y}(\theta, \varphi_0, Y_0) \text{ et } \frac{\partial^3 X}{\partial \varphi, \partial Y^2}(\theta, \varphi_0, Y_0).$$

Le mode de dépendance n'est d'ailleurs pas le même : $X(\theta, \varphi, Y)$ est une simple fonction de $X(\theta, \varphi_0, Y)$, $\frac{\partial^3 X}{\partial \varphi\, \partial Y}(\theta, \varphi_0, Y_0)$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi\, \partial Y^2}(\theta, \varphi_0, Y_0)$ c'est au contraire une fonctionnelle de $\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, Y_0)$: elle dépend de cette fonction par toutes les valeurs qu'elle prend ;

3° Nous avons ensuite pu établir qu'une surface convexe quelconque est susceptible d'être considérée comme surface [C] d'un flotteur. Ce résultat est intéressant *au point de vue théorique* nous ne croyons qu'on en ait, jusqu'à présent, donné d'autres démonstrations que pour des régions infiniment petites. Il est également très intéressant, *au point de vue pratique,* parce qu'il prouve la possibilité de construire un navire dont la stabilité de forme est entièrement donnée, et qu'il autorise toutes les modifications qu'on pourrait apporter à la surface des centres de carène d'un bâtiment existant, pourvu que ces modifications n'aient pas pour effet de détruire la convexité.

Nous avons essayé de montrer, pour plus tard, la possibilité pratique de déterminer par le calcul la variation de forme d'un bâtiment correspondant à une variation de sa surface [C], et cela au moyen de formules qui soient les mêmes pour tous les bateaux ;

4° Nous avons fait remarquer que la carène des flotteurs obtenus si on prend pour surface des centres de carènes une surface convexe quelconque présente nécessairement une ligne de points anguleux, et que pour les flotteurs tels que les docks de relevage des sous-marins dont les flottaisons comprennent plusieurs courbes fermées, il y a indétermination ;

5° Nous nous sommes posé le problème de savoir si une surface quelconque peut être considérée comme surface enveloppe des flottaisons. Nous n'avons fait qu'indiquer la démonstration, parce que l'intérêt pratique de ce problème n'est pas très grand ; mais nous avons montré pourquoi en général, on ne peut pas se donner à la fois les surfaces [F] et [c] ; le problème plan, au contraire, admet une infinité de solutions ;

6° Nous avons ensuite essayé de résoudre le problème isocarène inverse dans le cas où les données sont, non pas la surface [c] toute entière, mais les courbes [C] correspondant à des inclinaisons transversales et à des inclinaisons longitudinales, en même temps que les courbes F correspondantes. Nous avons vu, qu'en général, le problème est possible d'une infinité de manières. Il est possible pratiquement de construire un bâtiment dont on se donne à l'avance et en même temps :

a) Les stabilités de forme longitudinale et transversale pour des angles quelconques ;

b) La stabilité initiale pour un axe d'inclinaison quelconque par rapport à la flottaison, lorsque le navire est déjà dans une position inclinée, soit transversalement, soit longitudinalement.

Les arbitraires qui restent peuvent être choisis de façon à améliorer les coefficients de remplissage qu'on a l'habitude de considérer dans l'étude de la dynamique du navire.

La base de toute l'étude est la connaissance du mode de dépendance entre la fonction X (θ, φ, Y) et les fonctions dont elle dépend, à part quelques résultats obtenus grâce à des considérations géométriques (2e partie, *in fine*), presque tous supposent établie la formule

$$\text{(A)} \qquad X(\theta, \varphi, Y) = H \left| [f_0 \mid f_1, f_2, X_0, \theta, \psi, Y] \right|$$

et la possibilité d'approcher autant qu'on veut de cette fonctionnelle par une fonction de n variables. Quant à la formule elle-même, elle a été obtenue en supposant que les fonctions $f_0(\theta, \varphi)$ et $X(\theta, \varphi, Y)$ sont développables en séries entières convergentes en φ.

Pour être tout à fait rigoureux, il aurait fallu montrer que les séries ainsi formées satisfont aux équations et qu'elles sont effectivement convergentes. Madame de Kowalesky a précisé des conditions moyennant lesquelles cette circonstance se présente certainement : comme elles sont assez peu restrictives, nous pouvons dire, qu'en pratique, les hypothèses faites seront presque toujours réalisées. Dans le cas même où elles ne le seraient pas, la forme A pourrait être exacte, elle le sera d'ailleurs en général, parce que le mode de dépendance par rapport aux fonctions arbitraires d'une intégrale d'un système d'équations aux dérivées partielles est quelque chose de tout à fait général et n'ayant pas de lien direct avec la propriété pour les intégrales d'être hotomorphes (1).

La deuxième hypothèse, relative à la continuité de la fonctionnelle H est plus générale encore que la précédente. Nous avons d'ailleurs calculé les fonctions $H_{\alpha\lambda}$ et montré leur continuité lorsque les fonctions f_0 et X sont analytiques, c'est-à-dire dans un cas qui se présentera très fréquemment en pratique.

Nous avons admis enfin l'existence effective des solutions du système S_n. Ce sont des fonctions de $r(\theta, \varphi_1), \ldots, r(\theta, \varphi_n)$ bien définies quand $r(\theta, \varphi)$ représente un navire. Elles le sertent quand les variations de r, tout en étant finies, ne sont pas trop considérables. Il peut se faire qu'une étude plus poussée conduise à formuler des inégalités que la fonction r aurait à respecter pour que les solutions existent. On peut être sûr que l'hypothèse est en fait valable dans un domaine fini pas trop étendu.

Nous nous sommes contentés de ces approximations, parce que l'étude théorique que nous avions en vue a pour but de permettre dans un avenir plus ou moins éloigné la solution d'un problème pratique fort important de Construction Navale. Les

---

(1) La question s'est posée d'une manière analogue pour les équations différentielles. La méthode de Cauch établit que l'intégrale générale d'un système linéaire d'ordre ne dépend de n constantes arbitraires. Mais cette dépendance est tout à fait générale, elle se trouve réalisée, en particulier, dans des conditions où la méthode des approximations successives réussit tandis que celle de Cauch reste en défaut.

éléments géométriques que nous avons examinés sont certes très intéressants en eux-mêmes : mais, c'est moins pour satisfaire notre curiosité que pour tenter de préparer les voies à des applications fécondes que nous avons entrepris ce travail. Nous ne nous dissimulons pas que beaucoup encore reste à faire ; nous serions heureux en tous cas si notre modeste contribution pouvait être de quelque utilité.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I[er]. — **Conditions pour qu'une courbe F tracée dans le plan tangent d'une surface F engendre une surface.**

Choix des paramètres : N° 1.

Représentation paramétrique d'une surface définie comme enveloppe de ses cylindres circonscrits à génératrices horizontales : N° 5.

Déplacement élémentaire du point F pour une variation infiniment petite des paramètres : N° 6.

Mesure du déplacement normal M M′ qui permet de passer d'une ligne $F(\theta, \varphi)$ à une ligne infiniment voisine $F(\theta + d\,\theta, \varphi + d\,\varphi)$: N° 7.

Condition pour que les courbes $F(\theta, \varphi)$ engendrent une surface : N° 10.

Vérification tout à fait générale de cette condition : N° 11.

CHAPITRE II. — **Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de lignes $F(\theta, \varphi)$ puisse constituer les flottaisons d'un flotteur dont la surface [F] est donnée à l'avance.**

Expression de ces conditions : N° 16.

Conséquence : deux surfaces Φ et Γ données à l'avance, ne peuvent en général, constituer les surfaces [F] et [c] d'un même flotteur : N° 18.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE III. — **Conditions intrinsèques que doit vérifier une fonction X (θ, φ, Y) pour représenter des lignes de flottaisons isocarènes d'un flotteur : N° 19.**

Existence de pareilles conditions : N° 19.

Recherche de ces conditions :

1re Etape. — Une pareille fonction X (conditions d'inertie mises à part) est parfaitement définie lorsqu'on se donne une multiplicité (F) et des fonctions auxquelles se réduit pour $\varphi = 0$ la fonction X, et pour $Y = Y_0$ la fonction $\frac{dX}{d\varphi}$: N° 22.

2me Etape. — Cas où le lien entre la fonction X et la fonction ρ serait une équation linéaire et du premier ordre en X, linéaire et du deuxième ordre en ρ : on aboutit à une équation aux dérivées partielles du cinquième ordre et à une équation du sixième ordre : N° 25.

3me Etape. — Cas où le lien est l'équation trouvée au N° 10 ; simplifications dans les résultats : la fonction X doit vérifier deux équations aux dérivées partielles l'une du quatrième ordre (équation 20 et 27), l'autre du troisième ordre (équation 27), cette dernière étant vérifiée d'ailleurs, si elle l'est pour une seule valeur de Y. En outre, la fonction X doit vérifier une condition initiale (pour $Y = Y_0$) : N° 31.

4me Etape. — Fonctions arbitraires dont dépend une pareille fonction X : N° 36.

CHAPITRE IV. — **Une surface quelconque, pourvu qu'elle soit convexe, est susceptible d'être considérée d'une infinité de manières comme la surface [c] d'un flotteur : N° 39**

Etablissement des équations qui définissent le problème : N° 39.

Hypothèse nécessaire à la démonstration : son caractère vraisemblable ; démonstration N° 41.

Démonstration de la propriété : son examen au point de vue de la rigueur : N° 42.

Cas des flotteurs « géométriques ». Inexistence d'une solution pour le cas général : N° 43.

Même problème pour une surface [F]. Pourquoi deux ensembles [Φ] et [Γ] sont en général incompatibles : N° 44.

Cas où l'on peut obtenir des solutions aux problèmes de la surface [*c*] sans effectuer d'intégration. Démonstration rigoureuse du fait que toute surface convexe de révolution est une surface [*c*] : N° 45.

CHAPITRE V. — **Détermination d'un flotteur à partir de deux multiplicités (F_1) et (F_2) et des flottaisons correspondantes : N° 46.**

Cas particulier où la surface [F] se réduit à un point et où les flottaisons sont similaires de la flottaison droite : interdépendance de la stabilité transversale et de la stabilité longitudinale : N° 46.

Cas où les flottaisons ne sont pas similaires de la flottaison droite, ou bien, cas où la surface [F] ne se réduit pas à un point : N° 49.

Réunion des deux cas précédents : mesure dans laquelle les deux stabilités sont indépendantes l'une de l'autre : N° 52.

Considération du problème dans toute sa généralité. Les flottaisons F_1 et F_2 ne peuvent être complètement indépendantes. Possibilité de les choisir de manière à posséder une stabilité de forme transversale et une stabilité de forme longitudinale données à l'avance ainsi que la stabilité initiale dans une position inclinée infiniment peu sur une flottaison F_1 ou F_2 : N° 56.

Point de vue analytique : sa complexité : N° 59.

Considérations pratiques : N° 60.

Remarque sur le problème isocarène inverse dans le plan ; N° 61.

CONCLUSION. — **Résumé des résultats obtenus.**