SAMUEL CHOLODENKO

Sur la mesure des ensembles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1930
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__109__1_0>

отъ С. М. Холоде
Парижъ, 4 Июня

N° D'ORDRE :
2094
Série A. N° 1226

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

SAMUEL CHOLODENKO
Licencié ès sciences mathématiques
Ingénieur-électricien

1re THÈSE :

SUR LA MESURE DES ENSEMBLES

2e THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le **28** *Mai 1930, devant la Commission d'Examen*

MM. CARTAN	PRÉSIDENT
DENJOY	EXAMINATEURS
GARNIER	

PARIS
IMPRIMERIE POLYGLOTTE VUIBERT
6, RUE MARTEL, 6

1930

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyens honoraires. . . P. APPELL, M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires.
- A. JOANNIS.
- H. LE CHATELIER.
- H. LEBESGUE.
- A. FERNBACH.
- A. LEDUC.
- E. HEROUARD.

Professeurs. . . . . .

Émile PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KŒNIGS.	Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET.	Électrotechnique générale.
F. WALLERANT	Minéralogie.
P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
Gabriel BERTRAND . .	Chimie biologique.
M[me] P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY.	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	Chimie générale.
Émile BOREL.	Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS	Aviation.
Jean PERRIN	Chimie physique.
Rémy PERRIER. . . .	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM	Physique.
M. MOLLIARD.	Physiologie végétale.
E. CARTAN.	Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE	Physiologie générale.
E. VESSIOT.	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. COTTON.	Physique générale.
J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY. . . .	Physique.
Charles PÉREZ. . . .	Zoologie.
Léon BERTRAND . . .	Géologie structurale et géologie appliquée.
R. LESPIEAU.	Théories chimiques.
E. RABAUD.	Biologie expérimentale.
P. PORTIER.	Physiologie comparée.
É. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD . . .	Botanique.
Paul MONTEL.	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT . . .	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA.	Mathématiques générales.
A. MAILHE.	Étude des combustibles.
L. LUTAUD.	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH. . . .	Physique théorique et physique céleste.
Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB.	Géologie.
P. PASCAL.	Chimie minérale
Léon BRILLOUIN . . .	Théories physiques. .
V. AUGER	Chimie appliquée
E. ESCLANGON	Astronomie

E. PÉCHARD . . .	Chimie (Enseig[t] P. C. N.).	H. MOUTON. . . .	Chimie physique.
M. GUICHARD. . .	Chimie minérale.	L. JOLEAUD. . . .	Paléontologie.
A. GUILLET. . . .	Physique.	M. JAVILLIER. . .	Chimie biologique.
G. MAUGUIN . . .	Minéralogie.	A. DUFOUR. . . .	Physique (P. C. N.).
L. BLARINGHEM . .	Botanique.	F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
A. MICHEL-LÉVY. .	Pétrographie.	ROBERT-LÉVY . . .	Zoologie.
A. DEREIMS . . .	Géologie.	L. DUNOYER. . .	Optique appliquée.
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.	A. GUILLIERMOND.	Botanique (P. C. N.).
H. BÉNARD. . . .	Physique (P. C. N.).	A. DEBIERNE. . .	Radioactivité.
E. DARMOIS. . . .	Physique.	M. FRÉCHET . . .	Calcul des Probabilités et Physiques mathématiques.
G. BRUHAT. . . .	Physique.		

Secrétaire. . A. PACAUD.

A Monsieur Léopold LEAU,

Professeur à l'Université de Nancy,

en témoignage de ma profonde reconnaissance

Première Thèse :

SUR LA MESURE DES ENSEMBLES

Dans cette thèse je me propose de généraliser les recherches de M. L. LEAU exposées dans son Mémoire « *Sur la mesure des ensembles linéaires* » (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, 3e série, t. 35, 1918). Les principaux résultats du Mémoire de M. LEAU ont été publiés aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 juillet 1917.

INTRODUCTION

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du problème de la mesure des ensembles appartenant à certaines familles. Les conditions du problème sont analogues à celles qu'a posées M. Lebesgue. Si la propriété de la somme $[\text{mes.} \sum E_i = \sum \text{mes.} E_i]$ est valable pour une infinité dénombrable d'ensembles de la famille, cette dernière sera appelée *mesurable;* dans le cas contraire, où elle n'a lieu que pour un nombre *fini* d'ensembles, la famille sera dite *semi-mesurable.*

Dans la première partie de ce Mémoire, chaque ensemble considéré est supposé borné et inclus dans un milieu (ensemble non borné) admettant une transformation très simple et appelé *milieu de translation.* Un type particulièrement simple de milieux de translation sont les *milieux homogènes.* L'étude des milieux de translation et des milieux homogènes constitue l'objet du paragraphe 1.

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à l'extension de la théorie de la mesure aux ensembles bornés inclus dans un même milieu de translation, sous l'hypothèse que ce dernier admet des parties de mesure extérieure non nulle (au sens de M. Lebesgue).

Si le milieu de translation ne satisfait pas à cette condition, c'est la méthode de Jordan qui fournit une solution du problème de la mesure; elle conduira à des familles d'ensembles qui seront seulement semi-mesurables. Dans le paragraphe 4, la théorie de Jordan est étendue aux ensembles bornés inclus dans un même milieu de translation et dans le paragraphe 5 on établit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une infinité d'ensembles prise dans une telle famille semi-mesurable vérifie encore la condition de l'additivité complète.

Enfin, dans le paragraphe 6, on considère certaines familles d'ensembles appartenant à divers milieux de translation, ces derniers étant choisis dans un système déterminé. Ces familles sont encore mesurables ou semi-mesurables et il est même possible de les enrichir en leur adjoignant de nouveaux ensembles. Si la famille primitive est mesurable, la famille ainsi agrandie l'est également.

Dans la deuxième partie de cette thèse on se propose d'étendre la théorie de la mesure aux milieux de translation eux-mêmes. Pour cela on étudie d'abord les milieux homogènes et dans les trois premiers paragraphes on introduit les notions de *diviseur* et de *multiple* d'un tel milieu, ce qui conduit à la notion du *rapport de deux milieux*. Dans le paragraphe 4 les milieux homogènes deux à deux commensurables sont à leur tour réunis en familles qui sont mesurables ou semi-mesurables.

Enfin, en étendant la théorie exposée au paragraphe 4 à certains milieux de translation on obtient des familles constituées par des milieux de translation et qui sont mesurables ou semi-mesurables.

PREMIÈRE PARTIE

Mesure des ensembles bornés inclus dans des milieux de translation.

§ 1. — Milieu de translation et milieu homogène.

1. Dans tout ce qui suit nous rapportons l'espace à n dimensions considéré à un système d'axes rectangulaires $Ox_1x_2\ldots x_n$.

Une translation qui mène d'un point P au point P_1 sera représentée par un vecteur $\alpha = \mathbf{PP}_1$. Il va de soi que ce vecteur n'est pas fixé en position dans l'espace et peut avoir un point quelconque de l'espace pour origine.

Définition : Nous appelons *module de translations à n dimensions* tout système T de translations satisfaisant aux conditions suivantes :

a) τ_1 et τ_2 faisant partie de T, la somme $\tau_1 + \tau_2$ et la différence $\tau_1 - \tau_2$ respectivement $\tau_2 - \tau_1$ en font partie également;

b) $\varepsilon > 0$ étant donné à l'avance, il existe dans T n vecteurs linéairement indépendants dont les longueurs sont inférieures à ε.

Dans la suite nous ne considérons que les modules de translations *à n dimensions*.

Définition : Disons que l'ensemble E admet la translation α comme *période*, si le déplacement α superpose E à lui-même.

2. *Définition :* On appellera *milieu de translation* un ensemble de points admettant des périodes et dont le système de périodes est un module de translations.

Définition : Nous dirons que deux ensembles E_1, E_2 sont *égaux*, s'il existe une translation α qui, appliquée à E_1, donne E_2.

3. Un cas particulier d'un milieu de translation est celui du milieu homogène.

Définition : On appellera *milieu homogène* un ensemble de points qui peut être obtenu à partir d'un de ses points par l'application d'un module de translations.

Soit H ce milieu homogène. L'application du même module à un autre point de H redonne H.

Théorème : Un milieu homogène obtenu par l'application d'un module de translations T *à un certain point est un milieu de translation dont le module de périodes est précisément* T.

Théorème : Tout milieu de translation est soit un milieu homogène, soit une somme de milieux homogènes égaux.

En effet, soit $\mathcal{M}$ le milieu de translation considéré et désignons par T son module de périodes. Appliquons à tout point P de $\mathcal{M}$ le module T. Tout point de $\mathcal{M}$ fournit de cette façon un certain milieu homogène et deux quelconques de ces milieux homogènes sont évidemment égaux. $\mathcal{M}$ est la somme de tous ces milieux homogènes, qui d'ailleurs ne sont pas tous distincts.

4. *Théorème : Un milieu de translation est partout dense.*

Démonstration : Il suffit de le démontrer pour un milieu homogène H. Soit T le module de périodes de H. Choisissons un point quelconque P de l'espace et désignons par S l'intérieur de la sphère de centre P et de rayon r. Observons d'autre part que n vecteurs quelconques qui sont linéairement indépendants et dont les origines se trouvent en un même point déterminent d'une façon univoque un certain parallélépipède à n dimensions.

Choisissons maintenant dans T n translations $\tau_1, \dots \tau_n$ linéairement indépendantes et telles que le diamètre du parallélépipède Π déterminé par elles soit inférieur à r. (Ce choix est possible en vertu de la condition (b) du numéro 1). Appliquons à un point de H toutes les translations de la forme $x_1\tau_1 + \ldots + x_n\tau_n$, $x_1, \ldots x_n$ étant des entiers arbitraires. On obtient par là un certain ensemble de points de H. On voit aisément que ces points sont les nœuds d'un certain grillage dont les mailles sont des parallélépipèdes égaux à Π. L'espace entier se trouve décomposé en des parallélépipèdes égaux à Π. Soit Π' le parallélépipède contenant le point P. Le diamètre de Π' étant inférieur à r, Π' se trouve donc inclus dans S et tous ses sommets se trouvent également dans S. On en conclut aisément que S contient une infinité de points de H.

5. Dans ce qui suit nous nous proposons d'étudier d'une facon plus détaillée la structure des milieux de translation.

Considérons un ensemble de points A. Tout couple P_1, P_2 de points de A détermine deux vecteurs $\pm$ $\mathbf{P_1P_2}$. Soit S l'ensemble des vecteurs déterminé de cette façon par A.

Définition : Soit T un système de translations quelconque. Lorsque le produit ST est nul, nous dirons que A *est indépendant de* T.

Considérons maintenant un milieu de translation $\mathfrak{M}$ de module de périodes T. Appliquons à tout point de $\mathfrak{M}$ les translations de T. Nous obtenons par là une infinité de milieux homogènes, tous égaux, dont deux quelconques sont soit identiques, soit sans point commun. Considérons seuls ceux parmi ces milieux qui sont sans point commun deux à deux et choisissons dans chacun d'eux un point quelconque. (Observons qu'en admettant la possibilité d'un tel choix nous nous sommes servis de l'axiome de Zermelo). L'ensemble A de points ainsi obtenu est indépendant de T. L'application de T à l'ensemble A redonne $\mathfrak{M}$. Inversement, A étant un ensemble de points indépendant d'un module de translations T, l'application de T à tout point de A donne des milieux homogènes égaux et sans point commun deux à deux. Le module de chacun de ces milieux est T. La somme de ces milieux homogènes est en général un milieu de translation. On voit que son module de périodes admet T comme sous-module. Cette question sera reprise plus loin (au numéro 8).

6. Considérons un module de translations T et un ensemble de points A indépendant de T. Si $\mathfrak{M}$ est le milieu de translation qu'on

obtient en effectuant sur chaque point de A les translations de T, nous dirons que $\mathfrak{M}$ *dérive de* A *par l'application du module* T.

Considérons maintenant deux modules de translations T_1 et T_2 et désignons par τ_1 et τ_2 une translation arbitraire de T_1 respectivement T_2. Remarquons que le système T de toutes les translations de la forme $\tau_1 + \tau_2$ est également un module de translations.

Lemme : Soit A *un ensemble indépendant du module* T *défini précédemment, Appelons* $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *les deux milieux de translation qui dérivent de* A *par l'application des modules* T_1 *respectivement* T_2. *Si* $\mathfrak{M}_1$ *admet toutes les périodes de* $\mathfrak{M}_2$, T_2 *module du second est un sous-module de* T_1 *module du premier.*

Démonstration : Remarquons d'abord qu'un vecteur joignant deux points quelconques de $\mathfrak{M}_1$ peut toujours se mettre sous la forme $\alpha + \tau_1$, α étant un vecteur joignant deux points de A, et τ_1 étant une certaine translation de T_1. Désignons par τ_2 une translation quelconque de T_2. τ_2 étant par hypothèse une période de $\mathfrak{M}_1$, il existe dans $\mathfrak{M}_1$ deux points P_1 et P_2 tels que l'on ait $P_1P_2 = \tau_2$. Mais on a aussi d'après la remarque précédente $P_1P_2 = \alpha + \tau_1$. Les deux dernières relations entrainent $\alpha = \tau_2 - \tau_1$. $\tau_2 - \tau_1$ appartenant au module T et A étant indépendant de T. cette relation ne peut avoir lieu que si l'on a $\tau_1 = \tau_2$.

Remarque : La démonstration qui précède montre que pour affirmer que T_2 fait partie de T_1 il suffit de s'assurer que T_2 fait partie du module de $\mathfrak{M}_1$.

7. *Théorème : Les conditions étant les mêmes qu'au lemme précédent, pour que les deux milieux* $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *soient identiques, il faut et il suffit que les modules* T_1 *et* T_2 *soient identiques.*

Démonstration : La condition est suffisante : chaque point de A fournit par l'application des modules T_1 et T_2 identiques deux milieux homogènes identiques.

La condition est nécessaire. En effet, l'application du lemme du numéro précédent fournit immédiatement les deux relations :

$$T_1 \leqslant T_2 \qquad\qquad T_1 \geqslant T_2.$$

Donc $$T_1 = T_2.$$

8. Soit T un module de translations quelconque et A un ensemble indépendant de T et considérons le milieu de translation $\mathcal{M}$ qui dérive de A par l'application de T.

$\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ étant deux milieux égaux à $\mathcal{M}$, étudions l'effet du déplacement qui, appliqué à $\mathcal{M}_2$, amène en coincidence le point P_2 de $\mathcal{M}_2$ avec le point Q_1 de $\mathcal{M}_1$.

$\mathcal{M}_1$ ei $\mathcal{M}_2$ étant égaux, soit $\boldsymbol{\lambda}$ le déplacement qui, appliqué à $\mathcal{M}_2$, fournit $\mathcal{M}_1$. Nous désignons par P_1 le point de $\mathcal{M}_1$ sur lequel vient P_2 lorsqu'on applique $\boldsymbol{\lambda}$ à $\mathcal{M}_2$. La relation $\mathbf{P_2Q_1} = \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{P_1Q_1}$ nous montre qu'au lieu d'appliquer à $\mathcal{M}_2$ la translation $\mathbf{P_2Q_1}$ il suffit d'appliquer à $\mathcal{M}_1$ le déplacement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P_1Q_1} = = \mathbf{P_2Q_1} - \boldsymbol{\lambda}$. Appelons $\mathcal{M}'_2$ le milieu avec lequel coincide $\mathcal{M}_2$ après le déplacement $\mathbf{P_2Q_1}$. Le problème qui se pose peut être énoncé sous la forme suivante : chercher les coincidences de points entre l'ensemble $\mathcal{M}_1$ et l'ensemble en lequel se place $\mathcal{M}_1$ après le déplacement $\boldsymbol{\sigma}$.

Pour résoudre ce problème appelons A_1 l'ensemble dont dérive $\mathcal{M}_1$ par l'application du module T et soient P et Q deux points quelconques de A_1. Désignons par H(P) et H(Q) les milieux homogènes, faisant partie de $\mathcal{M}$, qui s'obtiennent à partir de P et Q par l'application du module T. P′ étant le point en lequel se place P après le déplacement $\boldsymbol{\sigma}$, cherchons la condition nécessaire et suffisante pour la coincidence des milieux H(P′) et H(Q). Pour cela observons que H(P′) et H(Q) s'obtiennent à partir de H(P) par les déplacements $\boldsymbol{\sigma}$ respectivement $\mathbf{PQ}$. Ceci montre que pour que H(P′) et H(Q) coincident, il faut et il suffit que le vecteur $\mathbf{PQ}$ soit de la forme $\mathbf{PQ} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}$ étant une translation de T.

Maintenant il est facile d'énoncer la condition nécessaire et suffisante pour que la superposition de $\mathcal{M}'_2$ et de $\mathcal{M}_1$ soit complète (c'est-à-dire pour que $\mathcal{M}$ admette la période $\boldsymbol{\sigma}$, donc aussi $-\boldsymbol{\sigma}$) : *il doit être possible de faire correspondre à tout point* P *de* A *un point* Q *respectivement* Q′ *de* A *(non nécessairement distinct de* P*) tel que le vecteur* $\mathbf{PQ}$ *respectivement* $\mathbf{PQ'}$ *soit de la forme* $\mathbf{PQ} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{PQ'} = -\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}'$.

Pour que Q coincide avec P, il faut et il suffit que $\boldsymbol{\sigma}$ soit une translation de T. D'ailleurs, quand $\mathfrak{S}$ appartient à T, on voit sans aucun calcul que le déplacement $\mathfrak{S}$ laisse $\mathfrak{M}_1$ invariant : en effet, dans ce cas le déplacement $\mathfrak{S}$ ne fait que glisser sur lui-même chacun des milieux homogènes de module de périodes T dont se compose $\mathfrak{M}_1$.

Donnons encore une autre forme à la condition générale trouvée plus haut.

Remarquons d'abord qu'à un point P de A ne peut correspondre qu'un seul point Q de A tel que le vecteur **PQ** soit de la forme $\mathbf{PQ} = \mathfrak{S} + \tau$. En effet, pour tout point Q″ de A tel que le vecteur **PQ″** soit de la forme $\mathbf{PQ''} = \mathfrak{S} + \tau''$ le vecteur **QQ″** est équipollent à $\tau'' - \tau$ qui appartient à T, et ceci n'est possible que si Q et Q″ coïncident.

Supposons la condition générale remplie et faisons correspondre à tout point P de A le point Q (respectivement Q′) de A tel que le vecteur **PQ** (respectivement **PQ′**) soit de la forme $\mathbf{PQ} = \mathfrak{S} + \tau$ (respectivement $\mathbf{PQ'} = -\mathfrak{S} + \tau'$). Considérons le système total des vecteurs ainsi obtenus. Ce système détermine un certain ensemble de lignes polygonales orientées chacune en un certain sens et ayant leurs sommets en des points de A. Soit B un ensemble de points pris un et un seul dans chacune d'elles et faisant partie de A (peu importe dans la question présente que l'on sache ou même qu'il soit effectivement possible de faire un pareil choix.)

Nous pouvons maintenant énoncer la condition sous la forme suivante :

Pour que la superposition de $\mathfrak{M}'_2$ et de $\mathfrak{M}_1$ soit complète (c'est-à-dire pour qu'il existe une période $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{M}$ non comprise dans T*), il faut et il suffit que* A *se déduise d'un ensemble* B *à l'aide des translations* $\pm\, \mathfrak{S}$ *à une translation de* T *près.*

De plus, l'étude qui précède constitue la réponse à une question posée au numéro 5.

9. *Définition :* Nous appelons *fragment d'un milieu de translation* la partie de ce milieu qui se trouve dans un intervalle de l'espace à *n* dimensions considéré. Si cet intervalle est ouvert respectivement

fermé, le fragment sera dit ouvert respectivement fermé. Le fragment sera désigné par la lettre $\mathcal{F}$ et son intervalle par $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$.

En nous reportant à la définition de l'égalité donnee au numéro 2, nous constatons que l'égalité de deux fragments entraîne celle des intervalles correspondants, ces derniers étant considérés tous les deux soit comme ouverts soit comme fermés. (Cette dernière condition provient du fait qu'un même fragment $\mathcal{F}$ peut être fermé et ouvert en même temps, ce qui a lieu quand il n'y a pas de points du milieu de translation $\mathcal{M}$ sur la frontière de $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$).

La réciproque n'est pas vraie : à des intervalles égaux ne correspondent pas nécessairement des fragments égaux. Ainsi, dans le milieu constitué par les points $(x_1, \ldots x_n)$ de coordonnées x_i rationnelles, les fragments dont les intervalles sont

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant y_i \leqslant 1 \\ \pi \leqslant y_i \leqslant \pi + 1 \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

ne sont pas égaux.

Pour affirmer l'égalité des fragments il faut ajouter une condition supplémentaire :

Désignons par τ la translation qui, appliquée à $\overline{\overline{\mathcal{F}}}_1$, fournit $\overline{\overline{\mathcal{F}}}_2$, ces deux intervalles étant supposés égaux. Pour que les deux fragments $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ soient égaux, il faut et il suffit que τ fasse partie du module de périodes de $\mathcal{M}$.

Nous appellerons *équivalents* deux fragments dont les intervalles sont égaux.

10. Nous dirons que deux points A, B d'un milieu de translation $\mathcal{M}$ sont des *points homologues*, si le vecteur **AB** appartient au module de périodes de $\mathcal{M}$.

Ceci posé, soit A un point de $\mathcal{M}$ et P un point quelconque de l'espace. Nous allons montrer que dans tout voisinage de P se trouve un point B de $\mathcal{M}$ tel que A et B soient des points homologues. Ceci approfondit le théorème démontré au numéro 4.

La démonstration est analogue à celle qui se trouve au numéro 4. Il suffit de ne considérer qu'un milieu homogène H. En utilisant les mêmes notations nous considérons les vecteurs $\tau_1, \dots \tau_n$ et nous appliquons au point A de H toutes les translations de la forme $x_1\tau_1 + \dots + x_n\tau_n$, $x_1, \dots x_n$ étant des entiers arbitraires. En suivant toujours la démonstration qui se trouve au numéro 4, on démontre l'existence d'un parallélépipède Π' à n dimensions, dont tous les sommets se trouvent dans S. Un sommet quelconque de Π' et A étant manifestement des points homologues, le théorème est démontré.

Conséquence : Soit $\mathcal{M}$ un milieu de translation et α un vecteur quelconque. ε étant un nombre positif, arbitrairement petit, donné à l'avance, il existe une période μ de $\mathcal{M}$ telle que l'on ait

$$|\mu - \alpha| < \varepsilon.$$

Pour le démontrer, considérons un point quelconque A de $\mathcal{M}$ et soit P le point de l'espace en lequel se place A après le déplacement α. Choisissons un voisinage sphérique de P, de rayon ε. D'après le théorème démontré précédemment il existe dans ce voisinage un point B de $\mathcal{M}$ tel que A et B soient des points homologues. Le vecteur $\mu = \mathbf{AB}$ satisfait à toutes les conditions du théorème.

11. Disons qu'un ensemble E est *égal* (σ) à un ensemble F, si la translation σ, appliquée à E, fournit F.

Ceci posé, admettons le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

Lemme : Soit I un intervalle égal (σ) à l'intervalle I_1. A tout nombre positif ε, arbitrairement petit, donné à l'avance, on peut faire correspondre un nombre positif η tel que l'inégalité $|\sigma| < \eta$ entraîne la relation suivante :

$$\text{mes. } (I - I \cdot I_1) < \varepsilon.$$

12. *Théorème :* Soient $\mathcal{F}$ et Φ deux fragments équivalents sans être égaux. On peut les décomposer chacun en deux parties, dont l'une se compose d'un nombre fini de fragments φ tels que l'on ait $\Sigma\text{mes. } (\overline{\varphi}) < \varepsilon$, ε étant un nombre positif, arbitrairement petit, donné à l'avance. L'autre partie est constituée par des fragments égaux.

Démonstration : Considérons un intervalle I_1 égal (σ) à l'intervalle $\overline{\Phi}$. Déterminons d'après le lemme précédent le nombre positif η, tel que l'inégalité $|\sigma| < \eta$ entraîne la relation

$$\text{mes.}\ (\overline{\Phi} - \overline{\Phi}\,.\,I_1) < \varepsilon.$$

Désignons par α le déplacement qu'il faut appliquer à l'intervalle $\overline{\mathcal{F}}$ pour le faire coïncider avec l'intervalle $\overline{\Phi}$. Déterminons ensuite d'après le numéro 10 une période μ de $\mathfrak{M}$ telle que l'on ait

$$|\mu - \alpha| < \eta,$$

et soit $\overline{\Phi}_1$ l'intervalle avec lequel coïncide $\overline{\mathcal{F}}$ après le déplacement μ. On voit sans difficulté que le fragment constitué par le produit $\Phi\Phi_1$, et le fragment qui lui est égal (μ), forment les deux fragments égaux et faisant partie de Φ respectivement de $\mathcal{F}$, dont l'existence est affirmée dans le théorème.

---

§ 2. — Problème de la mesure d'un ensemble dans un milieu de translation.

13. La théorie connue de la mesure, due à *MM. Borel et Lebesgue*, constitue pour certaines familles d'ensembles la solution du problème suivant :

On se propose d'attacher à chaque ensemble E *borné, formé des points de l'espace à n dimensions considéré, un nombre positif ou nul,* $m(E)$, *qu'on appelle la mesure de* E, *et qui satisfait aux conditions suivantes* :

1. *Deux ensembles égaux ont même mesure;*

2. *L'ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures;*

3. *La mesure de l'intervalle* $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ est 1.

Définition : La mesure d'un ensemble E, satisfaisant aux conditions ci-dessus, sera appelée la *mesure segmentaire* de E. Nous la désignerons par $ms(\mathrm{E})$.

Nous nous servirons de définitions analogues pour la mesure extérieure respectivement intérieure de E, que nous écrirons $\overline{ms}(\mathrm{E})$ respectivement $\underline{ms}(\mathrm{E})$.

14. Étudions les résultats obtenus par l'application de la méthode *Borel-Lebesgue* aux fragments d'un milieu de translation.

Établissons d'abord le lemme suivant :

Lemme I : Soit $\mathcal{M}$ un milieu de translation. Les mesures segmentaires extérieures de deux fragments de $\mathcal{M}$ équivalents sont égales.

Démonstration : Désignons par $\mathcal{F}$ et Φ les deux fragments en question et rapportons-nous au théorème démontré au numéro 12 : on peut les décomposer chacun en deux parties, dont l'une se compose d'un nombre fini de fragments φ tels que l'on ait $\Sigma m(\overline{\varphi}) < \varepsilon$, ε étant un nombre positif, arbitrairement petit, donné à l'avance. L'autre partie est constituée par des fragments égaux.

Posons donc

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \Sigma\varphi_1 \qquad \Phi = \Phi_1 + \Sigma\varphi_2$$

avec

$$\Sigma m(\overline{\varphi_1}) < \varepsilon \qquad \Sigma m(\overline{\varphi_2}) < \varepsilon$$

et

$$\mathcal{F}_1 = \Phi_1$$

(on vérifie d'ailleurs facilement que l'on a

$$\Sigma m(\overline{\varphi_1}) = \Sigma m(\overline{\varphi_2})).$$

Les relations ci-dessus donnent

$$\overline{ms}(\mathcal{F}) - \overline{ms}(\mathcal{F}_1) < \varepsilon \qquad \overline{ms}(\Phi) - \overline{ms}(\Phi_1) < \varepsilon,$$

d'où la relation suivante :

$$|\overline{ms}(\mathcal{F}) - \overline{ms}(\Phi)| = |\overline{ms}(\mathcal{F}) - \overline{ms}(\mathcal{F}_1) + \overline{ms}(\Phi_1) - \overline{ms}(\Phi)| < 2\varepsilon.$$

Donc

$$\overline{ms}(\mathcal{F}) = \overline{ms}(\Phi),$$

Lemme II : *$\mathcal{F}$ étant un fragment quelconque, considérons une décomposition de $\mathcal{F}$ en des fragments α équivalents entre eux. Le rapport $\dfrac{\overline{m}s(\alpha)}{m(\overline{\alpha})}$, constant pour tous les α d'après le lemme précédent, a pour valeur $\dfrac{\overline{m}s(\mathcal{F})}{m(\overline{\mathcal{F}})}$.*

Lemme III : *Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux fragments de $\mathcal{M}$ quelconques. ε étant un nombre positif, arbitrairement petit, donné à l'avance, il est toujours possible de trouver* :

1. *Une décomposition de l'intervalle $\overline{\mathcal{F}}_1$ en intervalles partiels $\overline{\alpha}$ égaux entre eux;*

2. *Des intervaltes $\overline{\varphi}$ et $\overline{\Phi}$, le premier inclus dans $\overline{\mathcal{F}}_2$, l'autre contenant $\overline{\mathcal{F}}_2$, décomposables tous les deux en des intervalles partiels $\overline{\beta}$ égaux aux $\overline{\alpha}$ et tels que l'on ait*

$$\left\{\begin{array}{l} m(\overline{\mathcal{F}}_2) - m(\overline{\varphi}) < \varepsilon \\ m(\overline{\Phi}) - m(\overline{\mathcal{F}}_2) < \varepsilon \end{array}\right. \qquad [1]$$

15. *Théorème* : *Soit $\mathcal{M}$ un milieu de translation quelconque. Le rapport de la mesure segmentaire extérieure d'un fragment de $\mathcal{M}$ à la mesure de son intervalle est une constante.*

Démonstration : Considérons deux fragments $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ quelconques. Posons

$$\frac{\overline{m}s(\mathcal{F}_1)}{m(\overline{\mathcal{F}}_1)} = k_1, \qquad \frac{\overline{m}s(\mathcal{F}_2)}{m(\overline{\mathcal{F}}_2)} = k_2.$$

Appliquons les lemmes III et II. On a, avec les notations du lemme III

$$k_1 = \frac{\overline{m}s(\mathcal{F}_1)}{m(\overline{\mathcal{F}}_1)} = \frac{\overline{m}s(\alpha)}{m(\overline{\alpha})} = \frac{\overline{m}s(\beta)}{m(\overline{\beta})} = \frac{\overline{m}s(\varphi)}{m(\overline{\varphi})} = \frac{\overline{m}s(\Phi)}{m(\overline{\Phi})}.$$

D'autre part, les inégalités

$$\overline{m}s(\varphi) \leqslant \overline{m}s(\mathcal{F}_2) \leqslant \overline{m}s(\Phi)$$

combinées avec les égalités trouvées, donnent

$$k_1 m(\overline{\varphi}) \leqslant k_2 m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_2) \leqslant k_1 m(\overline{\Phi}).$$

En tenant compte du système [1] du lemme III on en tire

$$k_1[m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_2) - \varepsilon] < k_2 m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_2) < k_1[m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_2) + \varepsilon],$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$|(k_2 - k_1)m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_2)| < \varepsilon k_1.$$

Donc $$k_1 = k_2.$$

16. *Théorème I : Soit un intervalle fixe $\mathcal{J}$ contenant un ensemble* E. *Si l'on a pour tout intervalle* I *inclus dans* $\mathcal{J}$ $\dfrac{\overline{ms}(\mathrm{EI})}{m(\mathrm{I})} \leqslant \theta < 1$, θ *étant une constante, l'ensemble* E *est de mesure segmentaire nulle.*

Démonstration : Désignons par O un ensemble ouvert et couvrant E. On sait que O se présente sous la forme $\mathrm{O} = \Sigma \mathrm{I}_n$, les I_n étant des intervalles non empiétants. On a

$$\overline{ms}(\mathrm{E}) = \Sigma \overline{ms}(\mathrm{EI}_n) \leqslant \theta \Sigma m(\mathrm{I}_n) = \theta ms(\mathrm{O}).$$

Un passage à la limite conduit à remplacer $ms(\mathrm{O})$ par sa limite inférieure $\overline{ms}(\mathrm{E})$, ce qui donne :

$$\overline{ms}(\mathrm{E}) \leqslant \theta \overline{ms}(\mathrm{E}), \qquad \text{d'où} \qquad \overline{ms}(\mathrm{E}) = 0.$$

Théorème II : Soit un intervalle fixe $\mathcal{J}$ contenant un ensemble F. *Si l'on a pour tout intervalle* I *inclus dans* $\mathcal{J}$ $\dfrac{\underline{ms}(\mathrm{FI})}{m(\mathrm{I})} \geqslant \theta' > 0$, θ' *étant une constante, la mesure segmentaire de l'ensemble* F *est égale à* $m(\mathcal{J})$.

Démonstration : L'hypothèse peut s'écrire

$$\frac{m(\mathrm{I}) - \overline{ms}(\mathrm{I} - \mathrm{FI})}{m(\mathrm{I})} \geqslant \theta',$$

d'où la relation suivante :

$$\frac{\overline{ms}(\mathrm{I}-\mathrm{FI})}{m(\mathrm{I})} \leqslant 1-\theta'.$$

Le théorème I montre que l'on a

$$\overline{ms}(\mathcal{J}-\mathrm{F})=0,$$

donc

$$\underline{ms}(\mathrm{F})=m(\mathcal{J}).$$

17. *Conclusions : Le rapport constant* $\dfrac{\overline{ms}(\mathcal{F})}{m(\overline{\mathcal{F}})}$ *est soit nul, soit égal à 1; de même le rapport* $\dfrac{\underline{ms}(\mathcal{F})}{m(\overline{\mathcal{F}})}$.

Si les fragments de $\mathfrak{M}$ ne sont pas mesurables, leurs mesures segmentaires extérieures sont égales aux mesures de leurs intervalles et leurs mesures segmentaires intérieures sont nulles.

18. Considérons maintenant un milieu de translation $\mathfrak{M}$. Si l'un quelconque de ses fragments est de mesure segmentaire nulle, ce qui a lieu par exemple quand $\mathfrak{M}$ est dénombrable, la mesure segmentaire ne permet aucune comparaison entre les divers fragments de $\mathfrak{M}$. Nous allons donc modifier, *pour les fragments d'abord*, le problème de la mesure :

Proposons-nous d'attacher à chaque fragment $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{M}$ un nombre positif ou nul, que nous appellerons la mesure de $\mathcal{F}$ et qui satisfera aux conditions suivantes :

1. *Deux fragments égaux ont même mesure;*

2. *Le fragment, somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de fragments sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme de leurs mesures;*

3. *La mesure du fragment* $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $(i=1, 2, \ldots n)$ *est un nombre positif* ω.

Si les mesures segmentaires des divers fragments de $\mathfrak{M}$ existent et sont positives, elles satisfont aux conditions ci-dessus avec $\omega=1$.

On a d'ailleurs dans ce cas

$$ms(\mathcal{F}) = m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}).$$

Dans tous les autres cas on posera par définition

$$m(\mathcal{F}) = \omega m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}),$$

$m(\overline{\overline{\mathcal{F}}})$ étant, comme toujours, le produit des côtés de l'intervalle $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$.

On vérifie facilement qu'avec cette définition les conditions ci-dessus sont satisfaites, sauf peut-être la condition 2. Pour que cette dernière condition soit remplie pour un fragment $\mathcal{F} = \Sigma\mathcal{F}_i$, il faut et il suffit que l'on ait

$$m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}) = \Sigma m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_i).$$

19. Voici le problème général de la mesure :

Une famille $\mathcal{G}$ d'ensembles de points est dite mesurable si l'on peut faire correspondre à chaque ensemble un nombre positif ou nul, mais non tous nuls, sa mesure, qui satisfasse aux conditions suivantes :

1. *Deux ensembles de $\mathcal{G}$, superposables, ont même mesure;*

2. a) *Si l'ensemble, somme d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{G}$ sans point commun deux à deux, appartient à $\mathcal{G}$, sa mesure est la somme de leurs mesures;*

b) *Si l'ensemble, somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de $\mathcal{G}$ sans point commun deux à deux, appartient à $\mathcal{G}$, sa mesure est la somme de leurs mesures;*

3. *La mesure d'un ensemble particulier de $\mathcal{G}$ est un nombre positif arbitraire ω;*

4. *Les mesures des ensembles de $\mathcal{G}$ sont complètement déterminées par les conditions précédentes.*

Une famille sera dite *semi-mesurable,* si elle satisfait aux conditions d'une famille mesurable, sauf peut-être à la condition 2 *b*).

20. Nous nous proposons maintenant de rechercher des familles mesurables ou semi-mesurables d'ensembles appartenant à un même milieu de translation $\mathcal{M}$.

Laissons d'abord de côté le cas où l'on a pour les fragments de $\mathcal{M}$ $\underline{ms}(\mathcal{F}) = 0$. Ce cas sera traité avec la notion de l'étendue d'un ensemble.

Si $\mathcal{M}$ est tel que l'on a $ms(\mathcal{F}) = m(\overline{\mathcal{F}})$, le système constitué par tous les ensembles, inclus dans $\mathcal{M}$, et mesurables au sens de M. Lebesgue, forme une famille mesurable, et pour laquelle on a $\omega = 1$, ω étant la mesure du fragment $0 \leqslant x_i \leqslant 1$.

Il reste le cas d'un milieu de translation $\mathcal{M}$, dont les fragments $\mathcal{F}$ satisfont aux égalités suivantes :

$$\overline{ms}(\mathcal{F}) = m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}), \qquad \underline{ms}(\mathcal{F}) = 0.$$

C'est à un tel milieu de translation que se rapporte la théorie qui suit.

---

§ 3. — Mesure d'un ensemble inclus dans un milieu de translation.

21. *Définitions* : Soit F un ensemble inclus dans un milieu de translation $\mathcal{M}$. Si le produit de $\mathcal{M}$ par l'ensemble dérivé de F appartient à F, nous dirons que F est *fermé* par rapport à $\mathcal{M}$.

Soit O un ensemble inclus dans un milieu de translation $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ — O est un ensemble fermé par rapport à $\mathcal{M}$, nous dirons que O est *ouvert* par rapport à $\mathcal{M}$.

Si deux fragments $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{M}$ appartiennent aux intervalles $\overline{\overline{\mathcal{F}_1}}$, $\overline{\overline{\mathcal{F}_2}}$ non empiétants, nous dirons que les fragments $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sont *séparés*.

22. Pour arriver à une théorie de la mesure satisfaisant aux conditions énoncées au numéro 19, nous considérons d'abord les *fragments* de $\mathcal{M}$.

Nous appelons *mesure de $\mathcal{F}$, prise dans $\mathcal{M}$*, le produit $\omega m(\overline{\overline{\mathcal{F}}})$, et nous la désignons par $m\mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Dans ce produit le nombre ω est supposé arbitrairement choisi, sous la seule condition d'être positif. C'est, comme on le voit, la mesure du fragment $o \leqslant x_i \leqslant 1$.

Dans les numéros suivants, où aucune ambiguité n'est à craindre, nous écrirons plus simplement $m(\mathcal{F})$ au lieu de $m\mathfrak{M}(\mathcal{F})$.

23. Soit maintenant un ensemble O, ouvert par rapport à $\mathfrak{M}$. Nous savons qu'il peut être représenté sous la forme

$$O = \Sigma\mathcal{F}_i$$

les $\mathcal{F}_i$ étant des fragments de $\mathfrak{M}$ fermés et séparés. Nous posons par définition

$$m\mathfrak{M}(O) = \Sigma m\mathfrak{M}(\mathcal{F}_i) = \omega\Sigma m(\overline{\mathcal{F}_i}) = \omega m(\Sigma\, \overline{\mathcal{F}_i}).$$

24. E étant inclus dans $\mathfrak{M}$, couvrons E par un ensemble O ouvert par rapport à $\mathfrak{M}$. Cet ensemble O a une mesure $m(O)$, prise dans $\mathfrak{M}$. La limite inférieure de ces mesures sera dite *la mesure extérieure de* E *relativement à* $\mathfrak{M}$: $\overline{m}\mathfrak{M}(E)$ ou, quand une ambiguité n'est pas à craindre, plus simplement $\overline{m}(E)$.

25. Supposons que E appartient à une famille mesurable comprenant les fragments de $\mathfrak{M}$ et telle que la différence de deux ensembles de la famille appartient aussi à la famille. Soit O un ensemble ouvert par rapport à $\mathfrak{M}$ et couvrant E. L'ensemble O, pouvant se mettre sous la forme $O = \Sigma\, \mathcal{F}_i$, appartient également à la famille considérée et l'on a

$$m(E) \leqslant m(E) + m(O - E) = m(O).$$

Un passage à la limite montre l'existence de la relation

$$m(E) \leqslant \overline{m}(E).$$

En particulier on a, $\mathcal{F}$ étant un fragment contenant E

$$m(\mathcal{F} - E) \leqslant \overline{m}(\mathcal{F} - E). \qquad [1]$$

D'autre part il est

$$m(\mathcal{F}) = m(E) + m(\mathcal{F} - E) \leqslant m(E) + \overline{m}(\mathcal{F} - E),$$

d'après la relation [1]. Donc l'expression

$$m(\mathcal{F}) - \overline{m}(\mathcal{F} - E)$$

constitue une borne inférieure de $m(E)$. C'est cette borne inférieure que nous appelons *la mesure intérieure de* E *relativement à* $\mathfrak{M}$: $\underline{m}(E)$.

Nous appelons *mesurable dans* $\mathcal{M}$ un ensemble E, inclus dans $\mathcal{M}$, et dont la mesure intérieure est égale à la mesure extérieure, les mesures étant prises dans $\mathcal{M}$. La valeur commune des deux mesures sera appelée *mesure de* E relativement à $\mathcal{M}$: $m\mathcal{M}(\mathrm{E})$ ou plus simplement $m(\mathrm{E})$.

26. Mentionnons sans démonstration quelques propriétés de la mesure intérieure respectivement extérieure, tous les ensembles considérés étant supposés bornés et inclus dans un même milieu de translation $\mathcal{M}$.

a) E étant quelconque, on a toujours

$$0 \leqslant \underline{m}(\mathrm{E}) \leqslant \overline{m}(\mathrm{E}).$$

b) La relation $\mathrm{E} \leqslant \mathcal{E}$ entraîne les inégalités

$$\begin{cases} \overline{m}(\mathrm{E}) \leqslant \overline{m}(\mathcal{E}) \\ \underline{m}(\mathrm{E}) \leqslant \underline{m}(\mathcal{E}) \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \overline{m}(\mathrm{E}+\mathrm{F}) + \overline{m}(\mathrm{E}\,.\,\mathrm{F}) \leqslant \overline{m}(\mathrm{E}) + \overline{m}(\mathrm{F}) \\ \underline{m}(\mathrm{E}+\mathrm{F}) + \underline{m}(\mathrm{E}\,.\,\mathrm{F}) \geqslant \underline{m}(\mathrm{E}) + \underline{m}(\mathrm{F}) \end{cases}$$

En particulier si E et F sont sans point commun, on a

$$\begin{cases} \overline{m}(\mathrm{E}+\mathrm{F}) \leqslant \overline{m}(\mathrm{E}) + \overline{m}(\mathrm{F}) \\ \underline{m}(\mathrm{E}+\mathrm{F}) \geqslant \underline{m}(\mathrm{E}) + \underline{m}(\mathrm{F}) \end{cases}$$

d) Nous dirons que deux ensembles E, F sont *séparés,* s'il existe un fragment $\mathcal{F}$ possédant les propriétés suivantes :

E appartient au fragment $\mathcal{F}$, considéré comme fermé. $\mathcal{F}$ étant considéré comme ouvert, le produit F. $\mathcal{F}$ est nul.

En utilisant cette définition, on a le théorème suivant :

E et F étant deux ensembles séparés, il est

$$\begin{cases} \overline{m}(\mathrm{E}+\mathrm{F}) = \overline{m}(\mathrm{E}) + \overline{m}(\mathrm{F}) \\ \underline{m}(\mathrm{E}+\mathrm{F}) = \underline{m}(\mathrm{E}) + \underline{m}(\mathrm{F}) \end{cases}$$

e) E et F étant mesurables, leur somme et leur produit le sont également et entre leurs mesures existe la relation

$$m(\mathrm{E}+\mathrm{F}) + m(\mathrm{E}\,.\,\mathrm{F}) = m(\mathrm{E}) + m(\mathrm{F}).$$

En particulier, si E et F sont sans point commun, cette relation devient

$$m(\mathrm{E} + \mathrm{F}) = m(\mathrm{E}) + m(\mathrm{F})$$

On en conclut que la famille constituée par tous les ensembles mesurables est au moins semi-mesurable.

f) E et $\mathcal{E}$ étant mesurables, si de plus on a $\mathrm{E} \leqslant \mathcal{E}$, la différence $\mathcal{E} - \mathrm{E}$ l'est également et entre les mesures existe la relation :

$$m(\mathcal{E} - \mathrm{E}) = m(\mathcal{E}) - m(\mathrm{E}).$$

g) E_1, E_2, . . . étant mesurables, leur somme $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots$ l'est également. Si la série du second membre est convergente, on a

$$m(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots) \leqslant m(\mathrm{E}_1) + m\,(\mathrm{E}_2) + \ldots$$

En particulier, si les E_i sont sans point commun deux à deux, cette relation devient

$$m(\Sigma \mathrm{E}_i) = \Sigma m(\mathrm{E}_i).$$

Ceci montre que ta famille constituée par tous les ensembles mesurables est une famille mesurable.

h) Soit un ensemble E, pouvant se mettre sous la forme $\mathrm{E} = \Sigma\, \mathcal{F}_i$, les fragments $\mathcal{F}_i$ étant supposés séparés.

On a $$m(\mathrm{E}) = \Sigma m(\mathcal{F}_i).$$

i) Les ensembles E_1, E_2, . . . étant mesurables, leur produit $\mathrm{E}_1 . \mathrm{E}_2$ . . . l'est également et il existe la relation

$$m(\mathrm{E}_1 . \mathrm{E}_2 \ldots) = \lim_{i \to \infty} m(\mathrm{E}_1 . \mathrm{E}_2 \ldots \mathrm{E}_i)$$

j) Si les ensembles E_1, E_2, . . ., supposés mesurables, satisfont à la relation

$$\mathrm{E}_1 \geqslant \mathrm{E}_2 \geqslant \mathrm{E}_3 \geqslant \ldots,$$

on a $$m(\mathrm{E}_1 . \mathrm{E}_2 \ldots) = \lim_{i \to \infty} m(\mathrm{E}_i).$$

k) Remarquons encore qu'un ensemble F, fermé par rapport à $\mathcal{M}$, est toujours mesurable :
en effet, $\mathcal{F}$ désignant un fragment ouvert de $\mathcal{M}$ et contenant F, F peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{F} = \mathcal{F} - (\mathcal{F} - \mathrm{F}).$$

Or les deux termes du second membre sont des ensembles ouverts par rapport à $\mathcal{M}$, donc mesurables dans $\mathcal{M}$.

27. *Critérium de mesurabilité : Soit* E *un ensemble, inclus dans* $\mathcal{M}$ *et appartenant au fragment ouvert* $\mathcal{F}$. *Appelons* F *l'ensemble* $\mathcal{F}$ — E. *Pour que* E *soit mesurable dans* $\mathcal{M}$ *il faut et il suffit qu'à tout nombre positif* ε, *arbitrairement petit, donné à l'avance, on puisse faire correspondre deux ensembles ouverts,* O_1 *et* O_2, *couvrant* E *respectivement* F, *et tels que l'on ait*

$$m(O_1 . O_2) < \varepsilon.$$

Démonstration : La condition est nécessaire. En effet, supposons E mesurable, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$\overline{m}(E) + \overline{m}(F) = m(\mathcal{F}).$$

Soient O_1 et O_2 deux ensembles ouverts, couvrant E respectivement F et satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$m(O_1) < \overline{m}(E) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad m(O_2) < \overline{m}(F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, nous pouvons supposer que O_1 et O_2 appartiennent au fragment $\mathcal{F}$.

On aura donc

$$m(O_1) + m(O_2) < \overline{m}(E) + \overline{m}(F) + \varepsilon = m(\mathcal{F}) + \varepsilon. \qquad [1]$$

D'autre part, $O_1 + O_2$ étant égal à $\mathcal{F}$, il est

$$m(\mathcal{F}) + m(O_1 . O_2) = m(O_1) + m(O_2). \qquad [2]$$

Les relations [1] et [2] entrainent

$$m(O_1 . O_2) < \varepsilon.$$

La condition est suffisante. En effet, soient O_1 et O_2 deux ensembles ouverts, couvrant E respectivement F, appartenant tous les deux au fragment $\mathcal{F}$ et tels que l'on ait

$$m(O_1 . O_2) < \varepsilon.$$

Pour ces ensembles on a

$$m(O_1) + m(O_2) = m(\mathcal{F}) + m(O_1 . O_2) < m(\mathcal{F}) + \varepsilon.$$

ce qui donne immédiatement

$$\overline{m}(E) + \overline{m}(F) \leqslant m(\mathcal{F}). \qquad [3]$$

D'autre part, la relation

$$m(O_1) + m(O_2) = m(\mathcal{F}) + m(O_1 . O_2) \geqslant m(\mathcal{F})$$

montre par un passage à la limite que l'on a

$$\overline{m}(E) + \overline{m}(F) \geqslant m(\mathcal{F}). \qquad [4]$$

Les inégalités [3] et [4] entraînent

$$\overline{m}(E) + \overline{m}(F) = m(\mathcal{F}).$$

Donc E est mesurable dans $\mathfrak{M}$.

28. *Théorème: Soit* E *un ensemble inclus dans un milieu* $\mathfrak{M}$ *de translation. La mesure extérieure de* E, *prise dans* $\mathfrak{M}$, *est égale au produit par* ω *de la mesure segmentaire extérieure de* E.

Démonstration: En effet, couvrons E par un ensemble O, ouvert par rapport à $\mathfrak{M}$. Nous savons que O peut se mettre sous la forme

$$O = \Sigma \mathcal{F}_i,$$

les $\mathcal{F}_i$ étant des fragments fermés et séparés deux à deux. Il est

$$\overline{m}(E) = \text{lim inf } m(O) = \text{lim inf } [\Sigma m(\mathcal{F}_i)] = \omega . \text{lim inf } [\Sigma m(\overline{\mathcal{F}_i})]$$

Or, pour que l'ensemble $O = \Sigma \mathcal{F}_i$ couvre E, il faut et il suffit que l'ensemble correspondant $\overline{O} = \Sigma \overline{\mathcal{F}_i}$, qui est d'ailleurs ouvert dans le continu, couvre E également. La limite inférieure des $\Sigma m(\overline{\mathcal{F}_i})$ est par conséquent égale à la mesure segmentaire extérieure de E.

29. *Théorème: Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble mesurable dans le continu et* $\mathfrak{M}$ *un milieu de translation.*

Le produit $E = \mathcal{E} . \mathfrak{M}$

est mesurable dans $\mathfrak{M}$ *et l'on a*

$$m(E) = \omega \, ms(\mathcal{E})$$

où ω *désigne la mesure, prise dans* $\mathfrak{M}$, *du fragment* $o \leqslant x_i \leqslant 1$.

Démonstration : Désignons par $\overline{\mathcal{F}}$ un intervalle quelconque contenant $\mathcal{E}$ et par $\mathcal{F}$ le fragment de $\mathfrak{M}$ correspondant.

La relation $$\mathrm{E} \leqslant \mathcal{E}$$
entraîne $$\overline{ms}(\mathrm{E}) \leqslant \overline{ms}(\mathcal{E}),$$
d'où il vient $$\overline{m}(\mathrm{E}) \leqslant \omega\overline{ms}(\mathcal{E}).$$

De même on trouve
$$\overline{m}(\mathcal{F} - \mathrm{E}) \leqslant \omega\overline{ms}(\overline{\mathcal{F}} - \mathcal{E}).$$

Ces deux dernières relations donnent
$$\underline{m}(\mathrm{E}) = m(\mathcal{F}) - \overline{m}(\mathcal{F} - \mathrm{E}) \geqslant \omega m(\overline{\mathcal{F}}) - \omega\overline{ms}(\overline{\mathcal{F}} - \mathcal{E}) =$$
$$= \omega\underline{ms}(\mathcal{E}) = \omega\overline{ms}(\mathcal{E}) \geqslant \overline{m}(\mathrm{E}).$$

Donc $$\underline{m}(\mathrm{E}) = \overline{m}(\mathrm{E}) = \omega ms(\mathcal{E}).$$

30. Considérons maintenant un ensemble E mesurable dans $\mathfrak{M}$ et soit O_p une suite d'ensembles ouverts par rapport à $\mathfrak{M}$, et telle que l'on ait
$$\mathrm{E} \leqslant \mathrm{O}_p \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$
et
$$\lim m(\mathrm{O}_p) = m(\mathrm{E}). \tag{1}$$

Nous savons que chaque O_p se présente sous la forme
$$\mathrm{O}_p = \sum_i \mathcal{F}_{ip},$$
les $\mathcal{F}_{ip}$ étant, pour une valeur fixe de p, des fragments de $\mathfrak{M}$ fermés et séparés. Posons
$$\overline{\mathrm{O}}_p = \sum_i \overline{\mathcal{F}}_{ip}.$$

Les ensembles $\overline{\mathrm{O}}_p$, étant ouverts dans le continu, y sont mesurables.

De plus, définissons un ensemble $\mathcal{E}$ par la condition
$$\mathcal{E} = \overline{\mathrm{O}}_1 \, . \, \overline{\mathrm{O}}_2 \ldots$$

D'après la propriété *i)* du numéro 26 l'ensemble $\mathcal{E}$ est mesurable dans le continu et d'après le théorème précédent
on a $$m(\mathcal{E}\mathfrak{M}) = \omega ms(\mathcal{E}).$$

Montrons maintenant que l'ensemble

$$F = \mathcal{E}\mathfrak{M} - E$$

est de mesure segmentaire nulle. Pour cela considérons un fragment ouvert $\mathcal{F}$ contenant tous les O_p et soit O_p' une suite d'ensembles ouverts par rapport à $\mathfrak{M}$, et telle que l'on ait

$$\mathcal{F} - E \leqslant O_p' \leqslant \mathcal{F},$$

et
$$\lim m(O_p') = m(\mathcal{F} - E). \qquad [2]$$

Remarquons maintenant que l'ensemble F, faisant partie du produit $\mathcal{E}\mathfrak{M}$, appartient à tous les O_p, et que d'autre part, étant inclus dans $\mathcal{F}$ — E, il appartient à tous les O_p'. En tout cas, on a pour toute valeur de p la relation

$$F \leqslant O_p \,.\, O_p'.$$

$O_p + O_p'$ étant égal à $\mathcal{F}$, on utilise la relation

$$m(O_p \,.\, O_p') = m(O_p) + m(O_p') - m(O_p + O_p') =$$
$$= m(O_p) + m(O_p') - m(\mathcal{F})$$

et les égalités [1] et [2] et on en tire

$$\lim m(O_p \,.\, O_p') = 0.$$

Donc $m(F) = 0$.

Théorème: E *étant un ensemble quelconque faisant partie de* $\mathfrak{M}$ *et mesurable dans* $\mathfrak{M}$, *et* $\mathcal{E}$ *l'ensemble défini plus haut,* $\mathcal{E}$ *est mesurable dans le continu et il existe la relation*

$$m(E) = \omega ms(\mathcal{E}).$$

---

§ 4. L'étendue d'un ensemble inclus dans un milieu de translation.

Rappelons que dans la théorie exposée au paragraphe 3 nous avons exclu de nos considérations le cas d'un milieu de translation dont les fragments seraient de mesure segmentaire nulle. La théorie suivante pourra être appliquée à ce cas; elle ne conduira qu'à une famille semi-mesurable d'ensembles.

31. *Remarque* : Les valeurs de l'étendue, respectivement des étendues extérieure et intérieure d'un ensemble quelconque E, trouvées conformément à la théorie de JORDAN, seront appelées *étendue segmentaire*, respectivement *étendue extérieure ou intérieure segmentaire* :

$$es(\mathrm{E}),\ \overline{es}(\mathrm{E}),\ \underline{es}(\mathrm{E}).$$

Dans le cas particulier d'un intervalle $\mathcal{J}$, où aucune ambiguité ne sera à craindre, on écrira plus simplement $e(\mathcal{J})$ au lieu de $es(\mathcal{J})$. Ce sera, d'après la théorie de JORDAN, le produit des côtés de $\mathcal{J}$.

32. Considérons d'abord un fragment $\mathcal{F}$ d'un milieu de translation $\mathcal{M}$. Le produit de ω par l'étendue de l'intervalle $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ sera appelé *l'étendue du fragment $\mathcal{F}$, prise dans $\mathcal{M}$* :

$$e(\mathcal{F}) = \omega \,.\, e(\overline{\overline{\mathcal{F}}}).$$

33. Dans la suite on aura à considérer des décompositions d'un fragment $\mathcal{F}$ en fragments partiels. Toutes ces décompositions seront supposées effectuées à l'aide de décompositions de l'intervalle $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ en intervalles partiels.

Soit maintenant un ensemble E inclus dans un milieu de translation $\mathcal{M}$ et contenu dans un fragment $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}$. Considérons une décomposition Δ du fragment $\mathcal{F}$ en un *nombre fini* de fragments partiels et désignons par α tout fragment partiel de Δ dont tous les points appartiennent à l'ensemble E. De même appelons β tout fragment partiel de Δ dont un point au moins appartient à E.

Posons

$$s(\Delta) = \Sigma e(\alpha)$$
$$\mathrm{S}(\Delta) = \Sigma e(\beta),$$

les sommes s'étendant à tous les fragments α respectivement β de la décomposition Δ considérée.

Les *étendues intérieure et extérieure* de l'ensemble E, prises dans $\mathcal{M}$, seront définies par les relation.

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{e}(\mathrm{E}) = \lim\sup s(\Delta) \\ \overline{e}(\mathrm{E}) = \lim\inf \mathrm{S}(\Delta), \end{array}\right. \qquad [1]$$

où Δ désigne une décomposition arbitraire du fragment $\mathcal{F}$ en fragment partiels.

Si les valeurs de l'étendue intérieure et extérieure sont égales, on dira que *l'ensemble* E *est mesurable* J *dans* $\mathcal{M}$ et la valeur commune de l'étendue intérieure et extérieure de E sera appelée *l'étendue de* E, *prise dans* $\mathcal{M}$:

$$\underline{e}(E) = \overline{e}(E) = e(E)$$

34. Par une extension naturelle d'un théorème, connu dans l'Analyse sous le nom de théorème de Darboux, on arrive à la conclusion suivante :

pour une suite Δ_i de décomposition de $\mathcal{F}$ telle que le maximum de l'étendue de tous les fragments tende vers zéro, on a les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{e}(E) = \lim s(\Delta_i) \\ \overline{e}(E) = \lim S(\Delta_i) \text{ pour } i \text{ infini.} \end{array}\right. \qquad [2]$$

Ceci montre que l'étendue intérieure et l'étendue extérieure peuvent être définies soit par le système [1], soit par le système [2].

35. Dans les deux numéros précédents on a supposé essentiellement que toutes les décompositions du fragment $\mathcal{F}$ comportaient un *nombre fini* de fragments partiels. Le but des numéros suivants sera de démontrer que cette restriction est inutile. Plus exactement :

l'étendue intérieure et l'étendue extérieure d'un ensemble E peuvent être définies soit par le système [1], soit par le système [2], toutes les décompositions de $\mathcal{F}$ considérées comportant un nombre *fini ou infini dénombrable* de fragments partiels.

Remarque : Dans les numéros suivants, pour simplifier, on écrira $|\Phi|$ au lieu de $e(\Phi)$, Φ étant un fragment quelconque.

36. Justifions d'abord notre affirmation pour le système [1]. Nous avons à montrer que limites supérieure respectivement inférieure ne sont pas modifiées par l'adjonction des décompositions infinies.

Faisons d'abord les conventions suivantes :

Nous aurons à considérer deux décompositions Δ et Δ' du fragment $\mathcal{F}$, la première en un nombre infini dénombrable, la seconde en un nombre fini de fragments partiels. Nous désignerons par α et α' tout fragment de Δ respectivement de Δ', dont tous les points appartiennent à l'ensemble E. De même nous désignerons par β et β' tout fragment de Δ respectivement de Δ' contenant un point au moins de E, et par γ et γ' tout fragment de Δ respectivement de Δ' ne contenant pas de points de E.

La somme des étendues de tous les fragments α sera représentée par $\Sigma|\alpha|$. Si nous prenons dans Δ les p premiers fragments, parmi eux certains ont contribué à $\Sigma|\alpha|$ par une valeur qui sera représentée par $\Sigma_p|\alpha|$.

Nous utiliserons des définitions analogues pour

$$\Sigma|\beta|,\quad \Sigma|\gamma|,\quad \Sigma_p|\beta|,\quad \Sigma_p|\gamma|,\quad \Sigma|\alpha'|,\quad \Sigma|\beta'|,\quad \Sigma|\gamma'|.$$

Soit donc Δ une décomposition quelconque du fragment $\mathcal{F}$ en un nombre infini dénombrable de fragments partiels.
Les trois relations

$$\left\{\begin{array}{l} \lim \Sigma_p|\alpha| = \Sigma|\alpha| \\ \lim \Sigma_p|\beta| = \Sigma|\beta| \\ \lim \Sigma_p|\gamma| = \Sigma|\gamma| \end{array}\right.$$

montrent que pour une certaine valeur p' de p on a

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma|\alpha| - \Sigma_{p'}|\alpha| < \varepsilon \\ \Sigma|\beta| - \Sigma_{p'}|\beta| < \varepsilon \\ \Sigma|\gamma| - \Sigma_{p'}|\gamma| < \varepsilon, \end{array}\right. \qquad [3]$$

ε étant un nombre positif et arbitraire.

Choisissons maintenant une décomposition Δ' du fragment $\mathcal{F}$ en un nombre *fini* de fragments partiels telle que les p' premiers fragments de Δ en fassent partie. On vérifie les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma|\beta'| + \Sigma|\gamma'| = |\mathcal{F}| \\ \Sigma|\beta| \;\, + \Sigma|\gamma| \;\, = |\mathcal{F}| \end{array}\right. \qquad [4]$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma_{p'}|\alpha| \leqslant \Sigma|\alpha'| \\ \Sigma_{p'}|\gamma| \leqslant \Sigma|\gamma'| \end{array}\right. \qquad [5]$$

De [3], [4], [5] on tire

$$\Sigma|\alpha| < \Sigma_{p'}|\alpha| + \varepsilon \leqslant \Sigma|\alpha'| + \varepsilon \leqslant \underline{e}(E) + \varepsilon \qquad [6]$$

et

$$\begin{aligned}\overline{e}(E) \leqslant \Sigma|\beta'| = |\mathcal{F}| - \Sigma|\gamma'| \leqslant |\mathcal{F}| - \Sigma_{p'}|\gamma| = \\ = |\mathcal{F}| - \Sigma|\gamma| + \Sigma|\gamma| - \Sigma_{p'}|\gamma| = \\ = \Sigma|\beta| + \Sigma|\gamma| - \Sigma_{p'}|\gamma| < \Sigma|\beta| + \varepsilon.\end{aligned} \qquad [7]$$

De [6] et [7] on conclut que les égalités à démontrer ont lieu :

$$\begin{cases} \lim\sup \Sigma|\alpha| \leqslant \underline{e}(E) \\ \lim\inf \Sigma|\beta| \geqslant \overline{e}(E). \end{cases}$$

37. Montrons maintenant que l'adjonction des décompositions infinies ne modifie pas le système [2]. Pour cela il suffira de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Les différences entre les étendues et leurs valeurs approchées sont inférieures à un nombre positif arbitraire η :

$$\begin{cases} \underline{e}(E) - \Sigma|\alpha| < \eta \\ \Sigma|\beta| - \overline{e}(E) < \eta, \end{cases}$$

dès que les *intervalles* (en nombre infini), qui correspondent aux fragments de Δ, sont inférieurs dans toutes leurs dimensions à une quantité correspondante δ.

Démonstration : Nous savons que le théorème est valable pour les décompositions *finies* du fragment $\mathcal{F}$.

η' étant donné à l'avance, soit δ le nombre qui lui correspond pour les décompositions *finies* et choisissons une décomposition *infinie* Δ dont tous les intervalles sont inférieurs dans toutes leurs dimensions à δ. ε étant un nombre positif arbitraire, nous donnons à p une valeur p' telle que les inégalités [3] du numéro 36 aient lieu. Ceci étant, nous choisissons une décomposition Δ' du fragment $\mathcal{F}$ en un nombre *fini* de fragments partiels, contenant les p' premiers fragments de Δ, et dont les intervalles sont inférieurs dans toutes leurs dimensions au nombre δ. Nous aurons les relations suivantes qui se vérifient facilement :

$$\begin{cases} \Sigma_{p'}|\alpha| \leqslant \Sigma|\alpha| \\ \Sigma_{p'}|\beta| \leqslant \Sigma|\beta'| \end{cases}$$

$$\Sigma|\alpha'| = |\mathcal{F}| - \Sigma|\gamma'| - [\Sigma|\beta'| - \Sigma|\alpha'|] \leqslant$$
$$\leqslant |\mathcal{F}| - \Sigma_{p'}|\gamma| - [\Sigma_{p'}|\beta| - \Sigma_{p'}|\alpha|]$$
$$\begin{cases} \underline{e}(E) - \Sigma|\alpha'| < \eta' \\ \Sigma|\beta'| - \overline{e}(E) < \eta' \end{cases}$$

En utilisant ces relations et celles trouvées au numéro précédent on voit que

$$\Sigma|\alpha'| - \Sigma|\alpha| \leqslant \Sigma|\alpha'| - \Sigma_{p'}|\alpha| \leqslant |\mathcal{F}| - \Sigma_{p'}|\gamma| - \Sigma_{p'}|\beta| =$$
$$= [\Sigma|\beta| - \Sigma_{p'}\beta] + [\Sigma|\gamma| - \Sigma_{p'}|\gamma|],$$

d'où

$$\Sigma|\alpha'| - \Sigma|\alpha| < 2\varepsilon \qquad [8]$$

De même il est

$$\Sigma|\beta| - \Sigma|\beta'| \leqslant \Sigma|\beta| - \Sigma_{p'}|\beta|,$$

d'où

$$\Sigma|\beta| - \Sigma|\beta'| < \varepsilon. \qquad [9]$$

Donc, d'après [8] et [9],

$$\underline{e}(E) - \Sigma|\alpha| = [\underline{e}(E) - \Sigma|\alpha'|] + [\Sigma|\alpha'| - \Sigma|\alpha|] < \eta' + 2\varepsilon$$

et

$$\Sigma|\beta| - \overline{e}(E) = [\Sigma|\beta| - \Sigma|\beta'|] + [\Sigma|\beta'| - \overline{e}(E)] < \varepsilon + \eta'$$

Il suffit de choisir $\eta' + 2\varepsilon < \eta$ pour avoir

$$\begin{cases} \underline{e}(E) - \Sigma|\alpha| < \eta \\ \Sigma|\beta| - \overline{e}(E) < \eta. \end{cases}$$

38. Mentionnons sans démonstration quelques propriétés de l'étendue intérieure respectivement extérieure, tous les ensembles considérés étant supposés bornés et inclus dans un même milieu de translation $\mathcal{M}$.

a) E étant quelconque, on a toujours

$$o \leqslant \underline{e}(E) \leqslant \overline{e}(E)$$

b) E et F étant mesurables J, leur somme et leur produit le sont également et entre leurs étendues existe la relation

$$e(E) + e(F) = e(E + F) + e(E \, . \, F).$$

En particulier, si E et F sont sans point commun, cette relation devient

$$e(\mathrm{E}) + e(\mathrm{F}) = e(\mathrm{E} + \mathrm{F}).$$

On en conclut que la famille constituée par tous les ensembles mesurables J est au moins semi-mesurable,

Elle n'est pas mesurable, comme on le constate à l'exemple suivant :

prenons tous les points du fragment $o \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \dots n)$ supposé dénombrable ; chacun d'eux est mesurable J et son étendue est nulle. Le fragment entier est aussi mesurable J et son étendue est $\omega > o$.

Nous sommes donc amenés de ne considérer que des systèmes particuliers d'ensembles mesurables J et satisfaisant à la condition d'une famille mesurable.

Définition : Soit le système d'ensembles, tous mesurables J, E, E_1, E_2, E_3, ..., le premier E somme des autres, les ensembles E_1, E_2, ... sans point commun deux à deux. Si l'étendue de E est la somme des étendues des E_p, nous dirons que le système est *complètement additif*.

Dans la suite nous établirons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'additivité complète d'un système donné d'ensembles.

c) E et $\mathcal{E}$ étant mesurables J, si de plus on a $\mathrm{E} \leqslant \mathcal{E}$, la différence $\mathcal{E} - \mathrm{E}$ l'est également et entre les étendues existe la relation

$$e(\mathcal{E} - \mathrm{E}) = e(\mathcal{E}) - e(\mathrm{E}).$$

d) Si E appartient au fragment $\mathcal{F}$, on a

$$\underline{e}(\mathrm{E}) = e(\mathcal{F}) - \overline{e}(\mathcal{F} - \mathrm{E}).$$

39. *Théorème : Soit* E *un ensemble inclus dans un milieu de translation* $\mathfrak{M}$. *L'etendue extérieure de* E, *prise dans* $\mathfrak{M}$, *est égale au produit par* ω *de l'étendue segmentaire extérieure de* E.

La démonstration résulte immédiatement du fait suivant : soit Δ une décomposition (finie ou infinie) du fragment $\mathcal{F}$ contenant E. Pour qu'un système de fragments partiels φ de Δ couvre l'ensemble E, il faut et il suffit que le système des intervalles $\overline{\varphi}$ correspondants couvre E dans le continu.

Remarque importante : Dans tout ce qui suit nous appliquons l'expression « somme d'ensembles », en nombre fini ou infini, uniquement à des ensembles tels qu'aucun point ne soit commun à deux au moins d'entre eux.

---

§ 5. — Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système donné d'ensembles mesurables J soit complètement additif.

40. *Lemme I : Soit* $I_1, I_2, \ldots$ *un système énumérable d'intervalles séparés quelconques (tous fermés ou tous ouverts par exemple), et* $J_1, J_2, \ldots$ *un système énumérable d'intervalles quelconques (non nécessairement séparés).*

Supposons que l'on a

$$\Sigma I_p \leqslant \Sigma J_p.$$

Si l'ensemble ΣI_p *est borné et si la série qui se trouve au second membre est convergente, on aura également*

$$\Sigma |I_p| \leqslant \Sigma |J_p|.$$

Démonstration : L'ensemble ΣI_p étant borné, la série $\Sigma |I_p|$ est certainement convergente. ε étant un nombre positif et arbitraire, nous pouvons déterminer une valeur m de p telle que l'on ait

$$\Sigma |I_p| - \sum_1^m |I_p| < \varepsilon. \qquad [1]$$

soit I'_p ($p = 1, 2, \ldots m$) un intervalle *fermé*, contenu dans l'intervalle I_p correspondant et satisfaisant à la condition

$$\sum_1^m |I_p| - \sum_1^m |I'_p| < \varepsilon. \qquad [2]$$

Soit enfin J'_p $(p = 1, 2, \ldots)$ un intervalle *ouvert*, contenant l'intervalle J_p correspondant, et tel que l'on ait

$$\Sigma|J'_p| - \Sigma|J_p| < \varepsilon. \qquad [3]$$

Chaque point de l'ensemble *fermé* $\sum_1^m I'_p$ se trouve à l'intérieur d'un intervalle J'_p. D'après un théorème de MM. Borel et Lebesgue il existe un nombre *fini* d'intervalles J'_p couvrant l'ensemble $\sum_1^m I'_p$: désignons les par J'_{p_1}, J'_{p_2}, $\ldots J'_{p_k}$. Les I'_p étant séparés, on a

$$|J'_{p_1}| + |J'_{p_2}| + \ldots + |J'_{p_k}| \geqslant \sum_1^m |I'_p|. \qquad [4]$$

En utilisant les inégalités [1], [2] et [3] on tire de [4]

$$\Sigma|J_p| + \varepsilon > \Sigma|J'_p| > \sum_1^m |I_p| - \varepsilon > \Sigma|I_p| - 2\varepsilon\ ;$$

donc on a

$$\Sigma|J_p| > \Sigma|I_p| - 3\varepsilon,$$

ce qui justifie notre affirmation.

41. *Lemme II : Soit un ensemble* E *inclus dans un fragment* $\mathcal{F}$ *de* $\mathfrak{M}$, *et soient* Δ *et* Δ' *deux décompositions finies de* $\mathcal{F}$, *la deuxième* Δ' *obtenue à partir de* Δ *par la décomposition d'un fragment partiel* φ *de* Δ. *Désignons par* α *et* β *les fragments qui fournissent dans* Δ *une valeur approchée par défaut respectivement par excès de* E *et employons des notations analogues pour* Δ'. *Dans ces conditions on aura*

$$\Sigma|\beta| - \Sigma|\alpha| < \Sigma|\beta'| - \Sigma|\alpha'| + 2|\varphi|.$$

42. *Remarque* : Dans la suite on aura à considérer certains ensembles E, E_1, $E_2 \ldots$, $E_p \ldots$, appartenant tous au fragment $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{M}$. Les décompositions Δ, Δ_p de $\mathcal{F}$ seront respectivement utilisées pour avoir des valeurs approchées de E, E_p. De plus, on désignera

par α et α_p les fragments qui fournissent dans Δ respectivement dans Δ_p une valeur approchée par défaut de E, E_p

par β et β_p les fragments qui fournissent dans Δ respectivement dans Δ_p une valeur approchée par excès de E, E_p.

Enfin on posera

$$\sum_p \Sigma|\alpha_p| = \Sigma|\alpha_1| + \Sigma|\alpha_2| + \ldots..$$

et

$$\sum_p \Sigma|\beta_p| = \Sigma|\beta_1| + \Sigma|\beta_2| + \ldots.$$

43. Voici un cas simple où la condition de l'additivité complète est vérifiée :

Théorème : Soient des ensembles E, E_1, E_2,..., *le premier somme des autres, tous appartenant au fragment* $\mathcal{F}$. *Si les ensembles* E_p *sont mesurables* J *et si l'on peut décomposer* $\mathcal{F}$ *en une infinité énumérable de fragments tels qu'un même fragment ne contienne pas de points d'ensembles différents, l'ensemble* E *est mesurable* J *et son étendue est la somme des étendues des* E_p.

Démonstration : ε étant un nombre positif arbitraire, choisissons une suite de nombres positifs ε_1, ε_2, ..ε_p,.... satisfaisant à l'inégalité $\Sigma\varepsilon_p < \varepsilon$. Faisons correspondre à tout ε_p le nombre positif δ_p tel que l'on ait

$$\begin{cases} e(E_p) - \Sigma|\alpha_p| < \varepsilon_p \\ \Sigma|\beta_p| - e(E_p) < \varepsilon_p; \end{cases} \qquad [5]$$

dès que les intervalles de Δ_p sont inférieurs dans toutes leurs dimensions à δ_p. Décomposons ensuite, d'après les hypothèses, le fragment $\mathcal{F}$ en une infinité énumérable de fragments tels qu'un même fragment ne contienne pas de points d'ensembles différents. Désignons cette décomposition par Δ'. Ceci étant, nous divisons l'ensemble des fragments de Δ' contenant des points de E_p en des fragments partiels φ_p dont les intervalles $\overline{\varphi_p}$ sont inférieurs dans toutes leurs dimensions à δ_p. Soit Δ_p une décomposition quelconque de $\mathcal{F}$ contenant tous les fragments φ_p ainsi obtenus.

En tenant compte du fait que tous les fragments α_1, α_2, α_3,..., sont inclus dans $\mathcal{F}$ et qu'ils sont séparés deux à deux, on constate que la série $\sum_p \Sigma|\alpha_p|$ est convergente. Ceci étant admis, la première inégalité [5] montre que l'on a

$$\sum_p \Sigma|\alpha_p| > \Sigma(eE_p) - \varepsilon. \qquad [6]$$

et la deuxième entraîne

$$\sum_p \Sigma |\beta_p| < \Sigma e(\mathrm{E}_p) + \varepsilon. \qquad [7]$$

Nous désignons maintenant par Δ une décomposition de $\mathcal{F}$ à laquelle appartiennent tous les fragments φ_p (pour toutes les valeurs de p). Les égalités suivantes sont évidentes :

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma|\alpha| &= \sum_p \Sigma|\alpha_p| \\ \Sigma|\beta| &= \sum_p \Sigma|\beta_p|. \end{aligned}\right. \qquad [8]$$

Des relations [6], [7], [8] on conclut à l'existence des inégalités suivantes :

$$\Sigma e(\mathrm{E}_p) - \varepsilon < \Sigma|\alpha| \leqslant \Sigma|\beta| < \Sigma e(\mathrm{E}_p) + \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\underline{e}(\mathrm{E}) = \overline{e}(\mathrm{E}) = \Sigma e(\mathrm{E}_p).$$

44. *Théorème général. Première forme :*

Soient des ensembles E, $\mathrm{E}_1, \ldots \mathrm{E}_p \ldots$ *mesurables* J, *le premier* E *somme des autres, tous appartenant au fragment* $\mathcal{F}$. *Pour que ce système soit complètement additif, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif* ε *on puisse faire correspondre une suite de décompositions du fragment* $\mathcal{F}$, $\Delta, \Delta_1, \ldots \Delta_p, \ldots$ *telle que :*

1° *Les fragments* β_p *qui fournissent dans* Δ_p *une valeur approchée par excès de* E_p *comportent une erreur inférieure à* ε_p, *la somme* $\Sigma\varepsilon_p$ *étant inférieure à* ε ;

2° *Tout point des intervalles* $\overline{\beta}$ *des fragments qui donnent* E *par excès appartienne à l'un des intervalles* $\overline{\beta}_p$, *pour une valeur convenable de* p.

Démonstration :

a) La condition est nécessaire :

Considérons une suite de décompositions finies de l'intervalle $\overline{\mathcal{F}}$, $\Delta, \Delta'_1, \Delta'_2 \ldots \Delta'_p, \Delta'_{p+1} \ldots$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta'_1 \text{ s'obtient à partir de } \Delta \text{ par décomposition de tout intervalle} \\ \quad \text{partiel de } \Delta. \\ \Delta'_{p+1} \text{ s'obtient à partir de } \Delta'_p \text{ par décomposition de tout inter-} \\ \quad \text{valle partiel de } \Delta'_p. \end{array}\right\} \qquad [1]'$$

$$\Sigma|\beta| - \Sigma|\alpha| < \eta \qquad [2]'$$

$$\Sigma|\beta'_p| - \Sigma|\alpha'_p| < \eta'_p \qquad [3]$$

$$\sum_p \eta'_p = \eta'. \qquad [4]$$

Considérons l'intervalle $\overline{\beta}$ d'un fragment β qui n'est pas un α. En vertu de l'hypothèse [1]' il existe certainement un intervalle $\overline{\beta}'_p$ inclus dans le $\overline{\beta}$ considéré. Nous modifions la décomposition Δ'_p correspondante en y remplaçant tous les intervalles partiels de Δ'_p dont se compose $\overline{\beta}$ par l'intervalle unique $\overline{\beta}$. D'après le lemme II [N° 41] cette opération a pour effet possible une augmentation de η'_p d'une quantité inférieure à $2|\beta|$. Remarquons que

$$\Sigma|\beta| - \Sigma|\alpha|$$

représente la somme des étendues de tous les β qui ne sont pas des α. On en conclut qu'en effectuant cette modification d'un Δ' pour tout β qui n'est pas un α on augmente η' d'une quantité inférieure à

$$2[\Sigma|\beta| - \Sigma|\alpha|] < 2\eta \qquad \text{d'après } [2]'.$$

Supposons effectuée cette modification des Δ' (qui ne portera d'ailleurs que sur un nombre *fini* de décompositions Δ') et soit Δ''_p la suite des Δ'_p modifiés. La relation [4] est remplacée par

$$\sum_p(\Sigma|\beta''_p| - \Sigma|\alpha''_p|) < \eta' + 2\eta.$$

Les α''_p étant des fragments séparés et appartenant tous au fragment $\mathcal{F}$, la série $\sum_p\Sigma|\alpha''_p|$ est convergente. Donc $\sum_p\Sigma|\beta''_p|$ l'est également et l'inégalité précédente peut être écrite sous la forme

$$\sum_p\Sigma|\beta''_p| - \sum_p\Sigma|\alpha''_p| < \eta' + 2\eta. \qquad [5]$$

D'autre part les relations

$$\begin{cases} \Sigma|\alpha| \leqslant e(\mathrm{E}) \leqslant \Sigma|\beta| \\ \Sigma|\beta| - \Sigma|\alpha| < \eta \end{cases}$$

montrent que l'on a

$$e(\mathrm{E}) - \eta < \Sigma|\alpha| \leqslant e(\mathrm{E}). \qquad [6]$$

De même, de

$$\Sigma|\alpha''_p| \leqslant e(\mathrm{E}_p) \leqslant \Sigma|\beta''_p|$$

on tire

$$\sum_p \Sigma|\alpha''_p| \leqslant \sum_p e(E_p) = e(E_p) = e(E) \leqslant \Sigma\Sigma|\beta''_p|, \tag{7}$$

et de [5] et [7] on conclut

$$e(E) - \eta' - 2\eta < \sum_p \Sigma|\alpha''_p| \leqslant e(E) \tag{8}$$

[6] et [8] entraînent

$$\left|\Sigma|\alpha| - \sum_p \Sigma|\alpha''_p|\right| < \eta' + 2\eta. \tag{9}$$

Remarquons maintenant qu'un α''_p qui n'est pas inclus dans un α fait partie d'un β qui n'est pas un α et que la somme des étendues de ces β est inférieure à η (d'après [2]'). On voit d'après [9] que la somme des étendues de tous les α''_p qui sont inclus dans des α est inférieure à $\Sigma|\alpha|$ de moins de $\eta' + 3\eta$.

La série $\sum_p \Sigma|\alpha''_p|$ étant convergente, nous pouvons trouver un nombre limité de fragments α'' tels que la somme de leurs étendues soit inférieure à $\sum_p \Sigma|\alpha''_p|$ de moins de η. Portons notre attention sur ces α''. Pour les parties des α qui se trouvent en dehors de ces α'' conservés, la somme des étendues est inférieure à $\eta' + 4\eta$.

Montrons maintenant à l'aide du lemme II (N° 41) qu'il est toujours possible, en réunissant certains intervalles partiels de Δ''_p en un seul (pour des valeurs convenables de p), de couvrir par ces intervalles $\overline{\beta}''_p$ modifiés toutes les parties des intervalles $\overline{\alpha}$ qui sont extérieures aux intervalles $\overline{\alpha}''$ conservés.

En effet, soit α_0 un α ayant des parties extérieures aux α'' conservés et soit k l'indice maximum des α'' conservés qui sont inclus dans α_0. Désignons par $\overline{\gamma}$ un intervalle partiel de Δ''_k inclus dans la partie de $\overline{\alpha}_0$ extérieure aux $\overline{\alpha}''$ conservés. L'intervalle $\overline{\gamma}$ a certainement une partie commune avec un intervalle $\overline{\beta}''_p$. Deux cas sont à distinguer :

1° $p > k$. Donc l'intervalle $\overline{\beta}''_p$ est inclus dans $\overline{\gamma}$. On réunit tous les intervalles de Δ''_p qui sont inclus dans $\overline{\gamma}$ en un seul qui sera un $\overline{\beta}''$ pour le décomposition Δ''_p modifiée.

2° $p \leqslant k$. Dans ce cas l'intervalle $\overline{\gamma}$ est inclus dans $\overline{\beta}''_p$ et une modification de Δ''_p est inutile.

Les intervalles $\overline{\beta}$ correspondant aux fragments β qui ne sont pas des α ont déja été éouverts par les intervalles $\overline{\beta}''_p$. Nous voyons qu'en modifiant convenablement un nombre limité de décompositions Δ''_p on arrive à couvrir tous les intervalles $\overline{\beta}$ par les intervalles $\overline{\beta}''_p$ modifiés.

Appelons Δ_1, Δ_2,.. Δ_p,... la suite des Δ''_p modifiés. En appliquant plusieurs fois le lemme II on voit que l'inégalité [5] est remplacée par

$$\sum_p\Sigma|\beta_p| - \sum_p\Sigma|\alpha_p| < \eta' + 2\eta + 2(\eta' + 4\eta) = 3\eta' + 10\eta.$$

Si l'on a eu soin de choisir η et η' tels qu'ils satisfassent à la relation

$$3\eta' + 10\eta \leqslant \varepsilon,$$

la suite de décompositions Δ, Δ_1, Δ_2,... aura toutes les propriétés indiquées dans le théorème.

b) La condition est suffisante :

Supposons-la remplie et montrons d'abord que la série $\Sigma e(E_p)$ est convergente. En effet, ε' étant un nombre positif arbitraire, choisissons des nombres positifs ε'_1, ε'_2,... avec $\Sigma\varepsilon'_p < \varepsilon'$ et faisons correspondre à tout ε'_p une décomposition Δ'_p de $\mathcal{F}$ telle que l'on ait

$$e(E_p) < \Sigma|\alpha'_p| + \varepsilon'_p. \qquad [10]$$

Les α'_p étant des fragments séparés et appartenant tous au fragment $\mathcal{F}$, la série $\sum_p\Sigma|\alpha'_p|$ est convergente, donc, d'après [10], la série $\Sigma e(E_p)$ l'est également.

L'hypothèse 1) s'exprime sous la forme

$$\Sigma|\beta_p| < e(E_p) + \varepsilon_p. \qquad [11]$$

La série des $e(E_p)$ étant convergente, l'inégalité [11] montre, que la série $\sum_p\Sigma|\beta_p|$ l'est également. Ceci nous permettra d'appliquer le lemme I (N° 40).

En effet, l'hypothèse 2) s'exprime sous la forme

$$\Sigma\overline{\beta} \leqslant \sum_p\Sigma\overline{\beta}_p,$$

d'où d'après le lemme I, les intervalles $\overline{\beta}$ étant séparés,

$$\Sigma|\overline{\beta}| \leqslant \sum_p\Sigma|\overline{\beta}_p|.$$

Après multiplication par ω on trouve

$$\Sigma|\beta| \leqslant \sum_p \Sigma|\beta_p|. \tag{12}$$

Mais d'après [11] on a

$$\sum_p \Sigma|\beta_p| < \Sigma e(E_p) + \varepsilon$$

et ceci joint à [12] fournit

$$\Sigma|\beta| < \Sigma e(E_p) + \varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$e(E) \leqslant \Sigma e(E_p). \tag{13}$$

D'autre part, pour des décompositions Δ', Δ'_1, Δ'_2, .. Δ'_p, ... quelconques on a

$$\sum_p \Sigma\overline{\alpha'_p} \leqslant \Sigma\overline{\beta'},$$

d'où l'on tire, par une nouvelle application du lemme I, la relation

$$\sum_p \Sigma|\alpha'_p| \leqslant \Sigma|\beta'|. \tag{14}$$

Choisissons maintenant, ε' et ε'_p ayant la même signification que précédemment, une suite de décompositions, Δ'_1, .. Δ'_p, ... telle que l'on ait

$$\Sigma|\alpha'_p| > e(E_p) - \varepsilon'_p,$$

ce qui entraîne

$$\Sigma e(E_p) - \varepsilon' < \sum_p \Sigma|\alpha'_p|. \tag{15}$$

L'inégalité [14] donne par un passage à la limite

$$\sum_p \Sigma|\alpha'_p| \leqslant e(E), \tag{16}$$

et [15] et [16] montrent que l'on a

$$\Sigma e(E_p) - \varepsilon' < e(E),$$

donc

$$\Sigma e(E_p) \leqslant e(E). \tag{17}$$

Des relations [13] et [17] on tire enfin

$$e(E) = \Sigma e(E_p).$$

45. *Théorème général. Deuxième forme :*

Soient des ensembles E, E_1,... E_p.... *mesurables* J, *le premier somme des autres, tous appartenant au fragment* $\mathfrak{F}$. *Pour que* *ce système soit complètement additif, il faut et il suffit qu'à tout couple de nombres positifs* ε, η *on puisse faire correspondre une suite de décompositions de* $\mathcal{F}$, Δ, Δ_1, $\Delta_2, \ldots \Delta_p, \ldots$ *telle que :*

1° *Les fragments* α *qui fournissent une valeur approchée par défaut de* E *et les fragments* β_p *fournissant une valeur approchée par excès de* E_p *comportent respectivement des erreurs inférieures à* η *et à* ε_p, *la somme*

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p + \ldots$$

étant au plus égale à ε;

2° *Tout point des intervalles* $\overline{\alpha}$ *appartienne à l'un des intervalles* $\overline{\beta}_p$, *pour une valeur convenable de p.*

Démonstration :

a) La condition est nécessaire :

En effet, déterminons d'après le théorème général du numéro 44 une suite de décompositions de $\mathcal{F}$, Δ'; Δ_1, $\Delta_2, \ldots \Delta_p, \ldots$ telle que l'on ait

$$\Sigma|\beta_p| < e(E_p) + \varepsilon_p \qquad [3]$$

$$\Sigma\varepsilon_p < \varepsilon \qquad [4]$$

$$\Sigma\overline{\beta}' \leqslant \sum_p \Sigma\overline{\beta}_p \qquad [5]$$

Désignons par Δ une décomposition de $\mathcal{F}$ de propriétés suivantes :

Δ s'obtient à partir de Δ' par décomposition de tout intervalle partiel de Δ', [6]

$$e(E) < \Sigma|\alpha| + \eta. \qquad [7]$$

Je dis que la suite de décompositions Δ, $\Delta_1, \ldots \Delta_p, \ldots$ satisfaira aux conditions énoncées dans le théorème.

En effet, en vertu de [3] et [4] la deuxième partie de l'affirmation 1) est établie. De même d'après [7] la première partie l'est également.

Pour vérifier l'affirmation 2), observons que d'après [6] tout intervalle $\overline{\alpha}$ est inclus dans un intervalle $\overline{\beta}'$, donc

$$\Sigma\overline{\alpha} \leqslant \Sigma\overline{\beta}'. \qquad [8]$$

De [5] et [8] on tire

$$\Sigma\overline{\alpha} \leqslant \sum_p \Sigma\overline{\beta}_p,$$

ce qui démontre l'affirmation 2.

b) La condition est suffisante :

En effet, supposons-la remplie, c'est-à-dire admettons que l'on ait :

$$\Sigma|\beta_p| < e(\mathrm{E}_p) + \varepsilon_p \qquad [9]$$

$$\Sigma\varepsilon_p < \varepsilon \qquad [10]$$

$$e(\mathrm{E}) < \Sigma|\alpha| + \eta \qquad [11]$$

$$\Sigma\overline{\alpha} \leqslant \sum_p \Sigma\overline{\beta}_p \qquad [12]$$

On démontre comme au numéro précédent la convergence de la série $\Sigma e(\mathrm{E}_p)$ et on en conclut d'après [9] et [10] que l'inégalité

$$\sum_p \Sigma|\beta_p| < \Sigma e(\mathrm{E}_p) + \varepsilon \qquad [13]$$

a lieu. D'autre part, à l'aide du lemme I (N° 40) on tire de [12] la relation

$$\Sigma|\alpha| < \sum_p \Sigma|\beta_p|,$$

donc, d'après [13]

$$\Sigma|\alpha| < \Sigma e(\mathrm{E}_p) + \varepsilon . \qquad [14]$$

De même, [11] et [14] entraînent

$$e(\mathrm{E}) < \Sigma e(\mathrm{E}_p) + \varepsilon + \eta ,$$

donc

$$e(\mathrm{E}) \leqslant \Sigma e(\mathrm{E}_p). \qquad [15]$$

Ceci posé, on démontre comme au numéro 44 *b*) l'inégalité

$$e(\mathrm{E}) \geqslant \Sigma e(\mathrm{E}_p). \qquad [16]$$

Enfin [15] et [16] montrent que l'on a

$$e(\mathrm{E}) = \Sigma e(\mathrm{E}_p).$$

46. Voici encore un théorème se rapportant à la même question :

Théorème : Soient des ensembles E, $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, .. \mathrm{E}_p, ..$, *le premier somme des autres, tous appartenant au fragment* $\mathcal{F}$. *Supposons qu'à tout nombre positif* ε *on puisse faire correspondre une décomposition* Δ *telle que la différence des valeurs approchées qu'elle fournit pour* E_p *soit inférieure à* ε_p, *la somme des* ε_p *étant inférieure à* ε :

$$\Sigma|\beta_p| - \Sigma|\alpha_p| < \varepsilon_p \qquad [17]$$

$$\Sigma\varepsilon_p < \varepsilon \qquad [18]$$

Dans ces conditions tous les ensembles E, E_1, E_2,.. E_p,... *sont mesurables* J *et, de plus, le système est complètement additif.*

Démonstration : ε_p étant d'après [18] inférieur à ε, on tire de [17] la relation

$$\Sigma|\beta_p| - \Sigma|\alpha_p| < \varepsilon,$$

qui montre que E_p est mesurable J.

Mais E aussi est mesurable J. En effet, remarquons que tout β qui n'est pas un α est au même temps un β_p qui n'est pas un α_p (pour au moins une valeur de p). Donc on a

$$\Sigma|\beta| - \Sigma|\alpha| \leqslant \sum_p [\Sigma|\beta_p| - \Sigma|\alpha_p|],$$

d'où il vient, en tenant compte de [17] et [18]

$$\Sigma|\beta| - \Sigma|\alpha| < \varepsilon,$$

relation qui montre que E est mesurable J.

La mesurabilité J des ensembles E, E_1,... étant établie, nous nous trouvons dans un cas particulier du théorème démontré au numéro 44. Donc, d'après ce théorème, le système est complètement additif.

---

§ 6. — MESURE DES ENSEMBLES APPARTENANT A DIVERS MILIEUX DE TRANSLATION.

47. Dans ce paragraphe nous aurons à considérer des milieux de translation $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, ...$\mathcal{M}_p$, le premier $\mathcal{M}$ étant la somme des autres : $\mathcal{M} = \sum_1^p \mathcal{M}_i$. Désignons par ω, ω_1, ...ω_p, les mesures respectivement les étendues du fragment $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ de chacun d'eux. $\mathcal{M}$ étant la somme des $\mathcal{M}_i$, il est naturel de choisir les mesures ω, ω_1, ...ω_p telles que l'on ait $\omega = \Sigma\omega_i$. De plus, pour des milieux égaux nous adopterons des mesures égales.

Dans la suite nous supposerons ces conditions remplies.

48. *Théorème : Soient des milieux de translation $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}_1$, ...$\mathcal{M}_p$, le premier $\mathcal{N}$ somme des p derniers, ces derniers égaux entre eux. Désignons par $\mathcal{M}$ la somme de k, (k étant inférieur à p), des mileux $\mathcal{M}_i$ dont la réunion forme $\mathcal{N}$: posons par exemple*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \ldots + \mathcal{M}_k \qquad (k < p).$$

Dans ces conditions, $\mathcal{F}$ désignant un fragment de $\mathcal{M}$,

1° L'étendue intérieure de $\mathcal{F}$, prise dans $\mathcal{N}$, est nulle; son étendue extérieure est égale à l'étendue du fragment de $\mathcal{N}$ correspondant à l'intervalle $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$;

2° La mesure intérieure de $\mathcal{F}$, prise dans $\mathcal{N}$, est nulle; sa mesure extérieure est égale à la mesure du fragment de $\mathcal{N}$ correspondant à l'intervalle $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$;

3° L'étendue intérieure et la mesure intérieure, dans $\mathcal{N}$, d'un ensemble inclus dans $\mathcal{M}$ sont nulles.

Démonstration : 1° Décomposons l'intervalle $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ en un nombre fini d'intervalles partiels $\overline{\varphi}$, φ étant le fragment correspondant de $\mathcal{N}$. Chaque φ contient des points de $\mathcal{N}$ n'appartenant pas à $\mathcal{M}$, donc aucun φ n'est un α et l'on a $\underline{e}\mathcal{N}(\mathcal{F}) = 0$; d'autre part, chaque φ, contenant des points de $\mathcal{M}$, est un β, donc $\overline{e}\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \overline{e}\mathcal{N}(\overline{\overline{\mathcal{F}}}\mathcal{N}.)$.

2° En excluant de nos considérations les milieux de translation dont les fragments sont de mesure segmentaire nulle, nous pouvons admettre, d'après le résultat obtenu au numéro 17, que l'on a

$$\overline{m}s(\mathcal{F}) = m(\overline{\overline{\mathcal{F}}}) = \overline{m}s(\overline{\overline{\mathcal{F}}}.\mathcal{N}),$$

d'où il vient, par multiplication par ω relatif à $\mathcal{N}$

$$\overline{m}\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \overline{m}\mathcal{N}(\overline{\overline{\mathcal{F}}}.\mathcal{N}) = m\mathcal{N}(\overline{\overline{\mathcal{F}}}.\mathcal{N}). \qquad [1]$$

Appliquons ceci à l'ensemble $M = \mathcal{N} - \mathcal{M}$, qui est un milieu de translation également, en vertu de la relation

$$M = \mathcal{M}_{k+1} + \ldots + \mathcal{M}_p.$$

On trouve

$$\overline{m}\mathcal{N}(\overline{\overline{\mathcal{F}}}.M) = m\mathcal{N}(\overline{\overline{\mathcal{F}}}.\mathcal{N}),$$

ce qui entraîne

$$\underline{m}\mathcal{N}(\mathcal{F}) = m\mathcal{N}(\overline{\overline{\mathcal{F}}}.\mathcal{N}) - \overline{m}\mathcal{N}(\overline{\overline{\mathcal{F}}}.M) = 0. \qquad [2]$$

Par les relations [1] et [2] l'affirmation 2) est justifiée.

L'affirmation 3) est une conséquence immédiate de 1) et 2).

49. Soient des milieux de translation $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, ...$\mathfrak{M}_p$, le premier $\mathfrak{M}$ somme des p derniers, ces derniers égaux entre eux. Désignons par E un ensemble inclus dans un des milieux $\mathfrak{M}_i$, dans $\mathfrak{M}_1$, par exemple. Alors on a, d'après le numéro précédent

$$\begin{cases} \overline{m}\mathfrak{M}_1(\mathrm{E}) = \overline{m}s(\mathrm{E})\,.\,\omega_1 \\ \overline{m}\mathfrak{M}(\mathrm{E}) = \overline{m}s(\mathrm{E})\,.\,\omega \\ \underline{m}\mathfrak{M}(\mathrm{E}) = 0 \end{cases}$$

On en conclut :

a) pour que E soit mesurable dans $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit que sa mesure extérieure y soit nulle.

b) pour que E soit mesurable dans $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit qu'il soit mesurable dans $\mathfrak{M}_1$ et que sa mesure y soit nulle ; les mesures sont alors nulles dans les deux milieux.

50. *Théorème : Soient* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}'_1$, ...$\mathfrak{M}'_p$, $\mathfrak{M}''_1$, ..$\mathfrak{M}''_q$ *des milieux de translation égaux entre eux et sans point commun deux à deux. Posons*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}'_1 + \,..\, + \mathfrak{M}'_p$$
$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}''_1 + \,..\, + \mathfrak{M}''_q$$

Lorsqu'un ensemble inclus dans les deux milieux $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$ *est mesurable dans les deux, les mesures correspondantes sont nulles.*

Démonstration : En effet, E étant inclus dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$, l'est aussi dans leur produit $\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1$. En utilisant les résultats obtenus au numéro précédent on trouve :

Pour que E soit mesurable dans $\mathfrak{M}$, il faut et il suffit qu'il soit mesurable dans $\mathfrak{M}_1$ et que sa mesure y soit nulle ; alors elle est nulle aussi dans $\mathfrak{M}$ et dans $\mathfrak{N}$. Ceci démontre le théorème.

51. *Lemme : Soient des ensembles* E_1 E_2 ...E_p *et leur somme* E *respectivement inclus dans les milieux de translation* $\mathfrak{M}_1$,..$\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}$, *le dernier* $\mathfrak{M}$ *étant la somme des p autres. Dans ces conditions la mesure extérieure de* E *dans* $\mathfrak{M}$ *est au moins égale à la somme des mesures extérieures des* E_i *dans les milieux* $\mathfrak{M}_i$ *correspondants.*

En effet, on a

$$\left.\begin{array}{ll} & E_i \leqslant E \\ \text{donc} & \overline{m}s(E_i) \leqslant \overline{m}s(E) \end{array}\right\} \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots p.$$

En multipliant la dernière inégalité par ω_i et en effectuant ensuite la sommation par rapport à l'indice i, on trouve

$$\sum_1^p \omega_i \overline{m}s(E_i) \leqslant \left(\sum_1^p \omega_i\right) \overline{m}s(E),$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de la convention du numéro **47**,

$$\Sigma \overline{m}\mathfrak{M}_i(E_i) \leqslant \overline{m}\mathfrak{M}(E).$$

52. Soit S un système de milieux de translation, en nombre fini ou infini, tous égaux entre eux, et sans point commun deux à deux. Considérons un milieu de translation $\mathfrak{M}$, somme d'un nombre *fini* de milieux de S. La famille de milieux constituée par l'ensemble de ces milieux $\mathfrak{M}$ sera désignée par $\mathfrak{F}$.

Dans la suite de ce paragraphe nous supposerons, sans le rappeler chaque fois, *que tous les milieux de translation considérés appartiennent à la famille* $\mathfrak{F}$.

Il va sans dire que nous nous conformerons toujours à la convention mentionnée au numéro **47** : ω' étant la mesure du fragment $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ ($i = 1, 2, \ldots n$) d'un milieu quelconque de S, la mesure du fragment correspondant au même intervalle, dans un milieu de $\mathfrak{F}$ constitué par la réunion de k milieux de S, sera $k\omega'$.

53. *Théorème : Si un ensemble* E *est mesurable dans un milieu* $\mathfrak{M}$, *la partie* E' *de cet ensemble, qui appartient à un milieu* $\mathfrak{M}'$ *inclus dans* $\mathfrak{M}$, *est mesurable dans* $\mathfrak{M}'$.

Démonstration : Montrons d'abord que

$$\overline{m}s(E') = \overline{m}s(E). \qquad [1]$$

En effet, la relation

$$E' \leqslant E$$

entraîne

$$\overline{m}s(E') \leqslant \overline{m}s(E).$$

Il s'agit de montrer que l'inégalité ne peut pas avoir lieu dans cette relation ;

Si l'on avait

$$\overline{ms}(E') < \overline{ms}(E),$$

on pourrait poser

$$\overline{ms}(E) = \overline{ms}(E') + \delta \qquad \delta > 0. \qquad [2]$$

Soit maintenant O un ensemble ouvert dans le continu, couvrant E', et satisfaisant à la condition

$$\overline{ms}(E') \leqslant m(O) < \overline{ms}(E') + \varepsilon. \qquad [3]$$

Posons

$$F = E - EO \qquad [4]$$

et remarquons que l'on a

$$EO = E.(\mathcal{M}O).$$

O étant ouvert dans le continu, le produit $\mathcal{M}O$ est ouvert, donc mesurable, dans $\mathcal{M}$; donc EO, étant le produit de deux ensembles mesurables dans $\mathcal{M}$, l'est également.

Il s'ensuit d'après [4] que F aussi est mesurable dans $\mathcal{M}$.

De [3] et de

$$EO \leqslant \mathcal{M}O$$

on tire

$$m(EO) \leqslant m(\mathcal{M}O) = \omega\, m(O) \leqslant \omega\, \overline{ms}(E') + \omega\varepsilon. \qquad [5]$$

De même, [2] donne

$$m(E) = \omega\, \overline{ms}(E) = \omega\, \overline{ms}(E') + \omega\delta. \qquad [6]$$

Supposons maintenant que l'on a eu soin de choisir ε plus petit que δ ; dans cette hypothèse il vient d'après [4], [5] et [6]

$$m(F) = m(E) - m(EO) \geqslant \omega(\delta - \varepsilon) > 0. \qquad [7]$$

Mais, d'autre part, des relations

$$\begin{cases} E' \leqslant EO \\ E - E' \leqslant \mathcal{M} - \mathcal{M}' \end{cases}$$

on tire

$$F = E - EO \leqslant E - E' \leqslant \mathcal{M} - \mathcal{M}'.$$

Si donc $\mathcal{M}$ est formé de p milieux de S, l'ensemble F appartient à k de ces milieux de S dont la réunion forme $\mathcal{M}$, avec $k < p$. On en conclut d'après le théorème établi au numéro 48, que

$$\underline{m}\mathfrak{M}(F) = 0,$$

d'où, F étant reconnu mesurable dans $\mathfrak{M}$,

$$m(F) = 0.$$

Mais cette dernière égalité est incompatible avec la relation [7]. Donc

$$\overline{ms}(E') = \overline{ms}(E). \qquad [1]$$

Ceci étant admis, désignons par I un intervalle contenant l'ensemble E et écrivons que, E étant mesurable dans $\mathfrak{M}$, la différence $I\mathfrak{M} - E$ l'est également :

$$\overline{m}\mathfrak{M}(E) + \overline{m}\mathfrak{M}(I\mathfrak{M} - E) = m\mathfrak{M}(I\mathfrak{M}). \qquad [8]$$

De cette égalité [8] on tire, par division par ω,

$$\overline{ms}(E) + \overline{ms}(I\mathfrak{M} - E) = m(I). \qquad [9]$$

De plus, de

$$I\mathfrak{M}' - E' = (I\mathfrak{M} - E) . \mathfrak{M}'$$

on conclut, d'après ce qui a été trouvé plus haut,

$$\overline{ms}(I\mathfrak{M}' - E') = \overline{ms}(I\mathfrak{M} - E). \qquad [10]$$

En utilisant successivement les relations [10], [9], [1] on trouve, toutes les mesures étant prises par rapport au milieu $\mathfrak{M}'$ (sauf naturellement les mesures segmentaires et celle de l'intervalle I, qui sont prises par rapport au continu) :

$$\underline{m}(E') = m(I\mathfrak{M}') - \overline{m}(I\mathfrak{M}' - E') = \omega' m(I) - \omega'\overline{ms}\,(I\mathfrak{M}' - E') =$$
$$= \omega'[m(I) - \overline{ms}(I\mathfrak{M} - E)] = \omega'\overline{ms}(E) = \omega'\overline{ms}(E') = \overline{m}(E'),$$

donc

$$\underline{m}(E') = \overline{m}(E'),$$

c'est-à-dire E' est mesurable dans $\mathfrak{M}'$.

54. *Théorème : Soient des ensembles* E_1, E_2, . . . E_p *et leur somme* E *respectivement inclus dans les milieux* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, . . . $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}$. *Si les milieux* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, . . . $\mathfrak{M}_p$ *sont deux à deux sans point commun, si* $\mathfrak{M}$ *est leur somme, si de plus* E *est mesurable dans* $\mathfrak{M}$, 1° *Chaque ensemble* E_i *est mesurable dans le milieu correspondant* $\mathfrak{M}_i$.

2° *La somme des mesures des* E_i *est égale à celle de* E.

Démonstration: $\mathfrak{M}_i$ étant inclus dans $\mathfrak{M}$, l'affirmation 1) est une conséquence du théorème précédent.

Pour démontrer 2), reprenons la relation [1] du numéro précédent :

$$\overline{ms}(E_i) = \overline{ms}(E). \quad [3]$$

En la multipliant par ω_i on trouve, après avoir effectué une sommation par rapport à l'indice i

$$\Sigma\overline{m}(E_i) = (\Sigma\omega_i)\ \overline{ms}(E),$$

ce qui s'écrit

$$\Sigma m(E_i) = m(E).$$

55. *Théorème*: *Soient les ensembles* E_1, E_2, . . . E_p *et leur somme* E *respectivement inclus dans les milieux* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, . . . $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}$. *Si les milieux* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, . . . $\mathfrak{M}_p$ *sont deux à deux sans point commun et si* E *est mesurable dans* $\mathfrak{M}$ *et chaque* E_i *dans le milieu* $\mathfrak{M}_i$ *correspondant, la somme des mesures des* E_i *est égale à la mesure de* E.

Démonstration; Le cas où $\mathfrak{M}$ est la somme des $\mathfrak{M}_i$ a été traité au numéro précédent.

Supposons maintenant que les milieux $\mathfrak{M}_i$ sont tous inclus dans $\mathfrak{M}$, ce dernier milieu n'étant pas leur somme. On voit immédiatement, qu'en vertu de la relation

$$E(\mathfrak{M} - \Sigma\mathfrak{M}_i) = 0$$

et du fait que le milieu $\mathfrak{M} - \Sigma\mathfrak{M}_i$ est constitué par un au moins des milieux de S dont se compose $\mathfrak{M}$, la mesure de E, prise dans le milieu $\mathfrak{M}$, est nulle (N° 48). On en conclut que la mesure segmentaire de E est nulle, puis (sans qu'il soit nécessaire dans ce cas de *supposer* la mesurabilité des E_i) que la mesure segmentaire des E_i est nulle, ce qui montre que $m(E_i)$ existe et est nulle.

Il peut encore arriver qu'il se trouve parmi les $\mathfrak{M}_i$ des milieux non inclus dans $\mathfrak{M}$. Ce cas peut être ramené aux deux cas précédents:

Soit $\mathfrak{M}_k$ un des $\mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2, \ldots k, \ldots p$) ayant des parties extérieures à $\mathfrak{M}$.

De la relation

$$E_k(\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M} . \mathfrak{M}_k) = 0$$

et du fait que le milieu $\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M} . \mathfrak{M}_k$ est constitué par un au moins des milieux de S dont se compose $\mathfrak{M}_k$ on conclut d'après le numéro 48, que la mesure de E_k dans $\mathfrak{M}_k$ est nulle. Ceci montre que la mesure segmentaire de E_k est nulle, d'où l'on tire que E_k est mesurable dans $\mathfrak{M}$ également et que sa mesure y est nulle. La différence $E - E_k$ est donc mesurable dans $\mathfrak{M}$ et l'on a

$$m(E - E_k) = m(E).$$

On voit par cette égalité que la suppression dans E de tous les ensembles E_i dont le milieu $\mathfrak{M}_i$ excède $\mathfrak{M}$ ne modifie pas la mesure de leur somme. Après avoir effectué cette suppression nous nous trouvons dans les conditions des deux cas précédents. Le théorème est donc démontré dans toute sa généralité.

56. *Théorème général : Si les ensembles* $E_1, E_2, \ldots E_p$ *et leur somme* E *respectivement inclus dans les milieux* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}$ *y sont mesurables, la mesure de la somme est égale à la somme des mesures des* E_i :

$$m(E) = \sum_1^p m(E_i).$$

Démonstration : Désignons par M_k les milieux de S (en nombre fini) dont se compose $\mathfrak{M}$. On a

$$E = \sum_k EM_k.$$

Le milieu $\mathfrak{M}$ étant la somme des M_k, on peut appliquer le théorème établi au numéro 54 :

Le produit EM_k est mesurable dans M_k et il est

$$m(E) = \sum_k m(EM_k). \qquad [1]$$

D'autre part, on voit que pour $i = 1, 2, \ldots p$

$$E_i = \sum_k E_i M_k.$$

D'après le numéro 53 le produit E_iM_k est mesurable dans M_k (car si pour une valeur de k $E_iM_k \neq 0$, le milieu M_k correspondant est inclus dans $\mathfrak{M}_i$). On peut donc appliquer le théorème établi au numéro 55, ce qui fournit

$$m(E_i) = \sum_k m(E_iM_k) \qquad [2]$$

De même, on a

$$EM_k = \sum_i E_iM_k\,;$$

tous les produits qui se trouvent dans cette relation étant mesurables dans M_k, on en conclut que

$$m(EM_k) = \sum_i m(E\,M_k). \qquad [3]$$

Or, de [1], [3] et [2] on tire

$$m(E) = \sum_k m(EM_k) = \sum_k\sum_i m(E_iM_k) = \sum_i\sum_k m(E_iM_k) = \sum_i m(E_i)$$

d'où

$$m(E) = \sum_i m(E_i).$$

Le théorème est démontré.

57. *Conclusion : Considérons une famille $\mathfrak{F}$ de milieux de translation définie conformément au numéro* 52. *A chaque milieu de $\mathfrak{F}$ on peut, d'après le paragraphe* 3, *attacher un système d'ensembles* E, *qui est mesurable ou semi-mesurable. Le théorème du numéro précédent montre que la famille constituée par tous ces ensembles* E *est au moins semi-mesurable.*

58. Dans la suite de ce paragraphe nous allons montrer que l'on peut adjoindre de nouveaux ensembles à la famille qui vient d'être considérée, et que la famille d'ensembles ainsi agrandie conserve encore le caractère de semi-mesurabilité.

Lemme : Soient des ensembles

$$\begin{array}{l} F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_p \\ F_1',\ F_2',\ \ldots\ F_r' \\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_q \\ G_1',\ G_2',\ \ldots\ G_s' \end{array}$$

tous inclus dans des milieux et y mesurables. Soit de plus un ensemble E *pour lequel on a d'une part*

$$E + \sum_i F_i = \sum_j G_j$$

et d'autre part

$$E + \sum_k F_k' = \sum_l G_l'$$

Dans ces conditions la relation suivante est vérifiée:

$$\sum_{j=1}^{q} m(G_j) - \sum_{i=1}^{p} m(F_i) = \sum_{l=1}^{s} m(G_l') - \sum_{k=1}^{r} m(F_k')$$

Démonstration: Désignons par M_t les milieux de S (en nombre fini) dans la totalité desquels est situé ΣG_j par exemple. On voit que pour toutes les valeurs de i il est

$$F_i = \sum_t F_i M_t.$$

D'après le numéro 53 le produit $F_i M_t$ est mesurable dans M_t (car si pour une valeur de t $F_i M_t \neq 0$, le milieu M_t correspondant est inclus dans le milieu de F_i). On peut donc appliquer le théorème établi au numéro 55, qui donne

$$m(F_i) = \sum_t m(F_i M_t) \qquad [1]$$

De même, on trouve

$$\left\{ \begin{aligned} m(G_j) &= \sum_t m(G_j M_t) \\ m(F_k') &= \sum_t m(F_k' M_t) \\ m(G_l') &= \sum_t m(G_l' M_t) \end{aligned} \right. \qquad [2]$$

Remarquons maintenant que l'on a d'une part

$$E = \sum_t E M_t, \qquad [2]'$$

et d'autre part

$$\left\{ \begin{aligned} EM_t + \sum_i F_i M_t &= \sum_j G_j M_t \\ EM_t + \sum_k F_k' M_t &= \sum_l G_l' M_t \end{aligned} \right.$$

Tous les produits $F_i M_t$, $G_j M_t$, $F_k' M_t$, $G_l' M_t$ qui se trouvent dans ces relations sont mesurables dans M_t, donc les quatre sommes correspondantes le sont également. On en conclut que l'ensemble EM_t, étant la différence de deux ensembles mesurables, est mesurable dans M_t et qu'il est

$$\left\{\begin{aligned} m(EM_t) &= \sum_j m(G_jM_t) - \sum_i m(F_iM_t) \\ m(EM_t) &= \sum_l m(G_l'M_t) - \sum_k m(F_k'M_t) \end{aligned}\right.$$

Effectuons maintenant dans ces relations la sommation par rapport à l'indice t. On trouve, en utilisant les égalités [1] et [2]

$$\sum_t m(EM_t) = \sum_t\sum_j m(G_jM_t) - \sum_t\sum_i m(F_iM_t) = \sum_j\sum_t m(G_jM_t) - \sum_i\sum_t m(F_iM_t) =$$
$$= \sum_j m(G_j) - \sum_i m(F_i),$$

donc

$$\sum_t m(EM_t) = \sum_j m(G_j) - \sum_i m(F_i). \qquad [3]$$

De même, il est

$$\sum_t m(EM_t) = \sum_l m(G_l') - \sum_k m(F_k'). \qquad [4]$$

De [3] et [4] on tire

$$\Sigma m(G_j) - \Sigma m(F_i) = \Sigma m(G_l') - \Sigma m(F_k'),$$

ce qui démontre le lemme.

59. *Adjonction de nouveaux ensembles :*

Soient des ensembles

$$F_1, F_2, \ldots F_p$$
$$G_1, G_2, \ldots G_q,$$

tous inclus dans des milieux et y mesurables.

Soit de plus un ensemble E *pour lequel on a*

$$E + F_1 + F_2 + \ldots + F_p = G_1 + G_2 + \ldots + G_q.$$

Dans ces conditions on dira que E *est mesurable et on définira sa mesure* $m(E)$ *par la relation*

$$m(E) = \Sigma m(G_j) - \Sigma m(F_i).$$

On voit que cette définition de la mesure de E n'est pas en contradiction avec les résultats antérieurs (au cas de E mesurable dans un milieu) et qu'elle est obligatoire si les nouveaux ensembles peuvent être adjoints à la famille.

Pour justifier cette définition il reste à montrer qu'à un ensemble E satisfaisant à deux relations distinctes, de la forme

$$E + F_1 + \ldots + F_p = G_1 + \ldots + G_q$$
$$E + F_1' + \ldots + F_r' = G_1' + \ldots + G_s'$$

ne correspond d'après cette définition qu'un seul nombre. C'est précisément ce qu'affirme le lemme démontré au numéro précédent.

Dans la suite nous dirons qu'un ensemble est anciennement mesurable, s'il est mesurable *dans un milieu.* Tout ensemble mesurable d'après la définition précédente, mais non mesurable dans un milieu, sera appelé ensemble *nouvellement introduit.*

Rappelons encore la relation [2]′ du numéro précédent :

$$E = \sum_t EM_t.$$

Nous y avons reconnu que le produit EM_t est mesurable dans le milieu M_t; donc :

> *Tout ensemble nouvellement introduit peut être mis sous la forme d'une somme d'ensembles anciennement mesurables.*

60. *Théorème : La famille agrandie est au moins semi-mesurable.*

Démonstration : En vertu de la remarque faite à la fin du numéro précédent tout ensemble F, soit anciennement mesurable, soit nouvellement introduit, peut être représenté sous la forme d'une somme d'un nombre fini d'anciens ensembles :

$$F = \Sigma A_i.$$

(Dans le cas où F est anciennement mesurable le second membre de cette relation se réduit à un seul terme.)

Soient donc des ensembles E, E_1, E_2, . . E_p, le premier E somme des autres, et appartenant tous à la famille agrandie. Nous pouvons poser

$$E_1 = A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(n_1)}$$
$$E_2 = A_2^{(1)} + A_2^{(2)} + \ldots + A_2^{(n_2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_p = A_p^{(1)} + A_p^{(2} + \ldots + A_p^{(n_p)},$$

les A étant d'anciens ensembles et l'on a

$$m(E_i) = m(A_i^{(1)}) + m(A_i^{(2)}) + \ldots + m(A_i^{(n_i)}) = \sum_k m(A_i^{(k)})$$

D'autre part, E peut se présenter de la manière suivante sous la forme d'une somme d'anciens ensembles :

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \sum_k A_i^{(k)}.$$

On en tire

$$m(E) = \sum_i \sum_k m(A_i^{(k)}) = \sum_i m(E_i).$$

La propriété est donc établie.

61. *Théorème : Si la famille constituée par les ensembles anciennement mesurables est une famille mesurable, la famille agrandie est également mesurable.*

Démonstration : Soient des ensembles de la famille agrandie E, E_1, E_2, . . . E_i, . . ., le premier E somme des autres :

$$E = E_1 + E_2 + \ldots$$

Les A étant d'anciens ensembles, nous pouvons poser

$$\begin{aligned} E &= A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(p)} \\ E_1 &= A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(u_1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_i &= A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + \ldots + A_i^{(u_i)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Désignons par M_t les milieux de S (en nombre fini) dans la totalité desquels E est situé.

Nous avons

$$E = \sum_{h=1}^{p} A^{(h)},$$

donc

$$EM_t = \sum_{h=1}^{p} A^{(h)} M_t \qquad [1]$$

pour toutes les valeurs de t (qui sont en nombre fini).

D'après le numéro 53 le produit $A^{(h)}M_t$ est mesurable dans M_t (car si pour une valeur de t $A^{(h)}M_t \neq 0$, le milieu M_t correspondant est inclus dans le milieu de $A^{(h)}$). Donc, d'après la relation [1], le produit EM_t, étant la somme d'ensembles mesurables dans M_t, est lui aussi mesurable dans M_t et appartient par conséquent à la famille primitive, Remarquons maintenant que l'on a d'une part

$$A_i^{(j)} = \sum_t A_i^{(j)} M_t \qquad [2]$$

et d'autre part

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \sum_j A_i^{(j)},$$

ce qui entraîne

$$EM_t = \sum_i \sum_j A_i^{(j)} M_t. \qquad [3]$$

L'application du théorème établi au numéro 55 à l'égalité [2] fournit

$$m(A_i^{(j)}) = \sum_t m(A_i^{(j)} M_t). \qquad [4]$$

De plus, nous avons reconnu que tous les ensembles EM_t et $A_i^{(j)}M_t$ figurant comme des termes dans la relation [3] sont anciennement mesurables. La famille primitive étant mesurable, on conclut de [3] que

$$m(EM_t) = \sum_i \sum_j m(A_i^{(j)} M_t). \qquad [5]$$

De même, l'ensemble E se présentant sous la forme

$$E = \sum_t EM_t,$$

et les produits EM_t étant anciennement mesurables, la mesure de E est donnée par

$$m(E) = \sum_t m(EM_t). \qquad [6]$$

En utilisant maintenant successivement les relations [6], [5] et [4], on trouve

$$m(E) = \sum_t m(EM_t) = \sum_t \sum_i \sum_j m(A_i^{(j)} M_t) = \sum_i \sum_j \sum_t m(A_i^{(j)} M_t) = \sum_i \sum_j m(A_i^{(j)}),$$

donc

$$m(E) = \sum_i \sum_j m(A_i^{(j)}). \qquad [7]$$

D'autre part, la relation

$$E_i = \sum_j A_i^{(j)}$$

entraîne

$$m(E_i) = \sum_j m(A_i^{(j)}). \qquad [8]$$

De [7] et [8] on tire

$$m(E) = \sum_i m(E_i).$$

La famille agrandie est donc mesurable.

62. Nous avons pu adjoindre à la famille primitive de nouveaux ensembles en supposant que, dans l'égalité

$$E + F_1 + . . + F_p = G_1 + . . + G_q \qquad [9]$$

tous les F et tous les G sont des ensembles de la famille primitive. La remarque faite à la fin du numéro 59 montre qu'on ne réussit pas d'élargir la famille agrandie, en supposant que, dans l'égalité [9], tous les F et tous les G appartiennent à la famille agrandie. En effet, après avoir remplacé dans l'égalité [9] tous les ensembles nouvellement introduits par des sommes d'ensembles anciens, on retombe sur une égalité de même forme, tous les F et tous les G étant compris dans la famille primitive.

DEUXIÈME PARTIE

Mesure des milieux de translation.

1. Dans la première partie de cette thèse nous avons résolu le problème de la mesure pour certaines familles constituées par des ensembles bornés et inclus dans des milieux de translation. Dans la seconde partie il s'agira d'étendre la théorie de la mesure aux milieux de translation eux-mêmes :

Une famille $\mathfrak{F}$ de milieux de translation (à n dimensions) est dite mesurable *si l'on peut faire correspondre à chaque milieu de $\mathfrak{F}$ un nombre positif, sa mesure, qui satisfasse aux conditions suivantes :*

1. *Deux milieux de $\mathfrak{F}$ égaux ont même mesure.*

2. a) *Si l'ensemble somme d'un nombre fini de milieux de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$, sa mesure est la somme de leurs mesures.*

b) *Si l'ensemble somme d'une infinité dénombrable de milieux de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$, sa mesure est la somme de leurs mesures.*

3. *Les mesures sont déterminées, à un facteur positif près, par les conditions précédentes.*

Une famille est dite *semi-mesurable,* si elle satisfait aux conditions 1, 2 *a),* 3, sauf peut-être à 2 *b).*

Nous considérons d'abord les milieux de translation les plus simples : les milieux homogènes.

§ 1 Diviseurs et multiples des milieux homogènes.

2. Faisons d'abord les remarques simples suivantes :

1) Pour qu'un ensemble de points soit un milieu homogène, il faut et il suffit qu'il soit partout dense et que toute translation

amenant un point de l'ensemble sur un autre point de même ensemble fasse entièrement coincider l'ensemble avec lui-même.

2) Pour que deux milieux homogènes soient égaux, il faut et il suffit qu'ils admettent les mêmes périodes.

3) Pour que deux milieux homogènes égaux coincident il faut et il suffit qu'ils aient un point commun.

4) Pour qu'un milieu homogène soit égal à une partie d'un autre il faut et il suffit que le module de périodes du premier soit un sous-module du second.

5) Pour qu'un milieu homogène $\mathcal{M}_1$ soit inclus dans un autre $\mathcal{M}$ il faut et il suffit qu'un point de l'un coincide avec un point de l'autre et que le module de $\mathcal{M}_1$ fasse partie du module de $\mathcal{M}$.

Nous convenons de désigner le module de périodes d'un milieu de translation $\mathcal{M}$ par $(\mathcal{M})$.

3. Considérons deux milieux homogènes $\mathcal{M}$ et M tels que

$$M = M_1 < \mathcal{M}.$$

P_2 étant un point de $\mathcal{M}$, mais non de M_1, l'application du module (M) à P_2 fournit un milieu homogène M_2 égal à M, distinct de M_1 et inclus dans $\mathcal{M}$. Répétons l'opération: P_3 étant un point de $\mathcal{M} - (M_1 + M_2)$, l'application de (M) à P_3 fournit un milieu homogène M_3 sans point commun avec $M_1 + M_2$ et inclus dans $\mathcal{M}$.

Deux cas peuvent se présenter:

a) Le milieu $\mathcal{M}$ est épuisé à la $p^{ième}$ application de l'opération:

$$\mathcal{M} = M_1 + M_2 + \cdot\ \cdot + M_p.$$

Si $\mathcal{M}$ est la somme d'un nombre limité p de milieux égaux à M, nous dirons que M est un diviseur non nul de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ un multiple non infini de M et nous écrirons

$$\mathcal{M} = pM.\ M = \frac{1}{p}\,\mathcal{M}$$

$$\frac{\mathcal{M}}{M} = p.\ \frac{M}{\mathcal{M}} = \frac{1}{p}$$

b) Le milieu $\mathcal{M}$ n'est jamais épuisé par ces opérations.

Si $\mathcal{M}$ est la somme d'une infinité de milieux égaux à M, nous dirons que M est un diviseur nul de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ un multiple infini de M

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathfrak{M}} = 0, \ \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{M}} = \infty.$$

Remarquons qu'une décomposition de $\mathfrak{M}$ en un nombre fini ou infini de milieux égaux à M n'est possible que d'une seule manière : en effet, soit

$$\mathfrak{M} = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \ldots = \mathrm{M}_1' + \mathrm{M}_2' + \ldots,$$

tous les M_i et M_j' étant égaux à un même milieu M. Choisissons un point quelconque P_1 de M_1 et soit M_r' le milieu M' contenant P_1. En vertu de la remarque 3 du numéro 2 les milieux M_1 et M_r' coincident entièrement. En continuant ce raisonnement on arrive à la conclusion que les deux sommes

$$\Sigma \mathrm{M}_i \text{ et } \Sigma \mathrm{M}_j'$$

diffèrent au plus par l'ordre de leurs termes.

4. Etudions maintenant la façon dont on peut passer d'un milieu M à son multiple $\mathfrak{M}$. Soit M_0 une partie de $\mathfrak{M}$ égale à M. Désignons par μ_1 une période de $\mathfrak{M}$, mais non de M. L'application à M_0 des translations $\mu_1, 2\mu_1, 3\mu_1, \ldots$ fournit les milieux $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \ldots$ Dans cette suite de milieux $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots$ la première coincidence, s'il y en a, doit être avec M_0. En effet, si M_s coincidait avec M_r $(r < s)$ et non avec M_0, la translation $(s - r)\,\mu_1$ serait déjà période de M et la première coincidence serait celle de M_{s-r} avec M_0.

De ce résultat nous concluons que s'il n'y a pas de coincidence avec M_0, tous les milieux M_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ sont sans point commun deux à deux. Donc dans ce cas $\mathfrak{M}$ est un multiple infini de M.

Supposons maintenant que la première coincidence dans la suite considérée de milieux ait lieu pour M_{p_1}. Donc $p_1\mu_1$ est le plus petit multiple de μ_1 qui est une période de M.

Posons

$$\mathrm{M}_0^{(1)} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 + \ldots \mathrm{M}_{p_1-1}.$$

Le milieu $\mathrm{M}_0^{(1)}$ ainsi défini est homogène. Pour le démontrer il faut montrer que $\mathrm{M}_0^{(1)}$ possède les deux propriétés caractéristiques mentionnées au numéro 2 (remarque 1).

La première est évidente. Pour vérifier la seconde, nous choisissons deux points quelconques de $M_0^{(1)}$: P_i dans M_i et P_j dans M_j. Désignons par Q_j le point de M_j correspondant à P_i, c'est-à-dire tel que

$$P_iQ_j = (j-i)\,\mu_1.$$

On aura donc

$$P_iP_j = (j-i)\,\mu_1. + Q_j\,P_j.$$

Le premier terme transforme chaque M dont se compose $M_0^{(1)}$ en un autre (qui pour $i=j$ coincide avec lui) ; le second terme étant un vecteur joignant deux points de M_j est une période de M. Donc P_iP_j est une période de $M_0^{(1)}$.

Nous pouvons continuer le procédé. Soit μ_2 une période de $\mathfrak{M}$ mais non de $M_0^{(1)}$.

Nous appliquons à $M_0^{(1)}$ la suite de translations μ_2, $2\mu_2$, $3\mu_2$, . . . et nous obtenons les milieux $M_0^{(1)}$, $M_1^{(1)}$ $M_2^{(1)}$, $M_3^{(1)}$,. . . Si aucun de ces $M^{(1)}$ ne coincide avec $M_0^{(1)}$ ils sont tous sans point commun deux à deux. Alors $\mathfrak{M}$ est un multiple infini de $M_0^{(1)}$, donc aussi de M.

Sinon, soit $p_2\mu_2$ le plus petit multiple de μ_2 qui est une période de $M_0^{(1)}$. Nous posons

$$M_0^{(2)} = M_0^{(1)} + M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + \ldots + M_{p_2-1}^{(1)}$$

et nous continuons le procédé.

Deux cas peuvent se présenter : dans le premier cas ou l'une des suites $M_0^{(i)}$, $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$, $M_3^{(i)}$,... est infinie, ou la suite M_0, $M_0^{(1)}$, $M_0^{(1)}$, $M_0^{(3)}$,... est infinie, aucun des $M_0^{(j)}$ ne coincidant avec $\mathfrak{M}$. Dans ces conditions $\mathfrak{M}$ est multiple infini de M.

Dans l'autre cas la première suite est limitée et de la forme

$$M_0^{(i)},\ M_1^{(i)},\ M_2^{(i)}, \ldots M_t^{(i)}, \text{ avec } t = p_{i+1} - 1\,;$$

la deuxième est également limitée et de la forme

$$M_0,\ M_0^{(1)},\ M_0^{(2)}, \ldots M_0^{(r)},$$

$M_0^{(r)}$ coincidant avec $\mathfrak{M}$ lui-même. Dans ce cas $\mathfrak{M}$ est constitué par la réunion de p milieux égaux à M avec

$$p = p_1p_2 \cdots p_r\,,$$

5. Revenons au milieu

$$M_0^{(1)} = M_0 + M_1 + M_2 + .. + M_{p_1-1}.$$

Il est intéressant d'étudier l'effet produit par une translation de la forme $k\mu_1$ appliquée à $M_0^{(1)}$, k étant un entier quelconque. Appelons δ le plus grand commun diviseur de k et p_1. $\frac{p_1}{\delta}k$ est le plus petit commun multiple de p_1 et k. Nous en concluons que $\frac{p_1}{\delta}(k\mu_1)$ est le plus petit multiple de la translation $k\mu_1$ considérée qui est une période de M. Donc en appliquant les translations

$$0,\ k\mu_1,\ 2(k\mu_1), \ldots \left(\frac{p_1}{\delta} - 1\right)(k\mu_1)$$

au milieu M_0 par exemple, on obtient successivement $p_1' = \frac{p_1}{\delta}$ milieux égaux à M_0, pris parmi les M_i $[i = 0, 1, .. (p_1 - 1)]$, et tous distincts. Désignons-les par M_0, M_{i_1}, $M_{i_2}, \ldots$, le dernier étant affecté de l'indice $i_{p_1'-1}$. Leur somme $M_0 + M_{i_1} + ..$ est d'après le numéro 4 un milieu homogène. j_0 étant un entier pris dans la suite $0, 1, 2, ..(p_1 - 1)$ et autre que 0, i_1, $i_2, \ldots i_{p_1'-1}$, nous pouvons appliquer la même suite de translations à M_{j_0}, ce qui fournit p_1' nouveaux milieux M_{j_0}, M_{j_1}, $M_{j_2}, \ldots$ Nous continuons de la même façon. A la $\delta^{\text{ième}}$ opération la suite $0, 1, \ldots (p_1 - 1)$ est épuisée et le procédé s'arrête.

En particulier, lorsque k est un multiple de p_1, les translations de la forme $k\mu_1$ laissent invariant chaque $M_i [i = 0, 1, .. (p_1 - 1)]$; lorsque k est premier avec p_1, la suite considérée plus haut M_0, M_{i_1}, $M_{i_2}, \ldots$ se confond à l'ordre près avec M_0, M_1, $M_2, \ldots M_{p_1-1}$.

Résumons le résultat de l'étude précédente : par l'emploi d'une translation de la forme $k\mu_1$ ou bien les M_i $[i = 0, 1, ., (p_1 - 1)]$ se permutent ou bien ils se divisent en cycles, à l'intérieur desquels s'opèrent les permutations.

6. Considérons une suite de cycles menant du milieu $M_0 = M$ à un milieu multiple de M. Désignons par α les périodes de M et cherchons la forme générale des périodes des cycles successifs. Appelons, comme plus haut, μ_1 la translation qui engendre le premier cycle. En utilisant

les notations du numéro 4 nous voyons que $p_1\mu_1$ est le plus petit multiple de μ_1 qui soit un α. Cherchons la forme générale d'une période de $M_0^{(1)}$. Cette période étant une translation joignant deux points quelconques de $M_0^{(1)}$, on voit immédiatement qu'elle se présente sous la forme

$$\alpha + k_1\mu_1$$

k_1 étant un entier arbitraire. De même la translation μ_2 fournissant le milieu homogène $M_0^{(2)}$ n'est pas une période de $M_0^{(1)}$ et $p_2\mu_2$ est son plus petit multiple qui jouit de cette propriété. $\alpha + k_1\mu_1$ étant la forme générale des périodes de $M_0^{(1)}$, nous pouvons dire que $p_2\mu_2$ est le plus petit multiple de μ_2 qui est de cette forme. Si $M_0^{(2)}$ coïncide avec $\mathfrak{M}$ l'opération s'arrête ; dans le cas contraire on continue de la même façon et on voit que $p_s\mu_s$ est le plus petit multiple de μ_s qui est de la forme

$$\alpha + k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \dots + k_{s-1}\mu_{s-1}$$

Les périodes des cycles successifs M_0, $M_0^{(1)}$, $M_0^{(2)}$, . . . $M_0^{(r)}$ sont respectivement de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha + k_1\mu_1 \\ \alpha + k_1\mu_1 + k_2\mu_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha + k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \dots + k_s\mu_s \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha + k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \dots + k_r\mu_r\,; \end{array}\right. \qquad [1]$$

de même les translations μ_1, μ_2, . . . μ_s, . . . μ_r satisfont au système d'égalités suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} p_1\mu_1 = \alpha_1 \\ p_2\mu_2 = \alpha_2 + c_1^{(2)}\mu_1 \\ p_3\mu_3 = \alpha_3 + c_1^{(3)}\mu_1 + c_2^{(3)}\mu_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_s\mu_s = \alpha_s + c_1^{(s)}\mu_1 + c_2^{(s)}\mu_2 + \dots + c_{s-1}^{(s)}\mu_{s-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_r\mu_r = \alpha_r + c_1^{(r)}\mu_1 + c_2^{(r)}\mu_2 + \dots\dots\dots\dots + c_{r-1}^{(r)}\mu_{r-1} \end{array}\right. \qquad [2]$$

les c étant des entiers.

Observons que dans ces égalités (2) on peut supposer les coefficients c non négatifs et inférieurs aux p correspondants : $0 \leqslant c_j^{(s)} < p_j$ pour $j = 1, 2, \ldots (s-2)$ et $0 < c_{s-1}^{(s)} < p_{s-1}$. En effet, supposons que l'on a

$$0 < c_{s-1}^{(s)} < p_{s-1}$$
$$0 \leqslant c_{s-2}^{(s)} < p_{s-2}$$

mais que la condition $0 \leqslant c_{s-3}^{(s)} < p_{s-3}$ n'est pas remplie. Dans ce cas il suffit de déterminer le nombre m tel que

$$\begin{cases} c_{s-3}^{(s)} \equiv m \pmod{p_{s-3}} \\ 0 \leqslant m < p_{s-3} \end{cases}$$

La translation $c_{s-3}^{(s)} \mu_{s-3}$ est équipollente à $m\mu_{s-3}$ à un multiple de $p_{s-3} \cdot \mu_{s-3}$ près et cette dernière translation s'exprime d'après le système [2] au moyen de translations μ d'indices inférieurs à $s-3$. Donc la translation $c_{s-3}^{(s)} \cdot \mu_{s-3}$ s'exprime à l'aide de $m \cdot \mu_{s-3}$, d'un α et de translations μ d'indices inférieurs à $s-3$. Il suffit de remplacer dans la s[ième] relation de [2] $c_{s-3}^{(s)} \cdot \mu_{s-3}$ par cette expression pour réduire $c_{s-3}^{(s)}$ aux limites indiquées. On continue de la même façon, en réduisant successivement $c_{s-4}^{(s)}$, $c_{s-5}^{(s)}$, $c_{s-6}^{(s)}$, ...

Supposons ce travail préliminaire accompli et montrons que le système [2] se présente sous une forme bien déterminée. En d'autres termes : les relations

$$\begin{cases} p_s\mu_s = \alpha_s + c_1^{(s)}\mu_1 + \ldots + c_j^{(s)}\mu_j + c_{j+1}^{(s)}\mu_{j+1} + \ldots + c_{s-1}^{(s)}\mu_{s-1} \\ p_s\mu_s = \alpha'_s + a_1^{(s)}\mu_1 + \ldots + a_j^{(s)}\mu_j + c_{j+1}^{(s)}\mu_{j+1} + \ldots + c_{s-1}^{(s)}\mu_{s-1} \end{cases} \quad [3]$$

ne sont possibles que si l'on a

$$\begin{cases} \alpha_s = \alpha'_s \\ c_1^{(s)} = a_1^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_j^{(s)} = a_j^{(s)} \end{cases} \quad [4]$$

En effet, de [3] on tire

$$(c_j^{(s)} - a_j^{(s)})\mu_j = \alpha''_s + b_1^{(s)}\mu_1 + \ldots + b_{j-1}^{(s)}\mu_{j-1}, \text{ avec } 0 \leqslant |c_j^{(s)} - a_j^{(s)}| < p_j \quad [5]$$

ce qui entraîne $c_j^{(s)} = a_j^{(s)}$ qui est la dernière relation [4]. Donc (5) se transforme en une relation de la même forme, d'où l'on tire d'une façon analogue

$$c_{j-1}^{(s)} = a_{j-1}^{(s)},$$

et ainsi de suite.

7. *Définitions :* 1). Nous dirons que les translations $\mu_1, \mu_2, .. \mu_r$ (considérées dans cet ordre), affectées des coefficients $p_1, p_2, \ldots p_r$ constituent un *multiplicateur de translations ordonnées* et nous le noterons

$$[\mu_1(p_1), \mu_2(p_2), \ldots \mu_r(p_r)].$$

Un tel multiplicateur est défini par le système d'égalités (2).

2) Disons qu'on a, (abstraction faite de l'ordre), un *multiplicateur de translations fondamentales* $\varphi_1, \varphi_2, .. \varphi^{t}$, lorsque toute translation de $\mathfrak{M} = p_1 p_2 .. p_r \mathrm{M}$ est de la forme

$$\alpha + a_1\varphi_1 + .. + a_t\varphi \qquad \text{(les } a \text{ entiers)}$$

et qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$\varphi_i = \alpha' + a'_1\varphi_1 + .. + a'_{i-1}\varphi_{i-1} + a'_{i+1}\varphi_{i+1} + .. + a'_t\varphi_t,$$

les a' étant des entiers.

3) Soient S_1 et S_2 deux multiplicateurs de translations ordonnées, correspondant tous les deux au même milieu M et désignons par $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ les milieux multiples de M produits par S_1 respectivement par S_2. Si les deux milieux $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont égaux nous dirons que S_1 et S_2 sont *équivalents relativement à* M.

8. *Théorème : Soient*

$$S_1 = [\mu_1(p_1), .. \mu_r(p_r)]$$
$$S_2 = [\nu_1(q_1), \ldots \nu_s(q_s)]$$

deux multiplicateurs de translations ordonnées, produisant chacun un multiple d'un même milieu M. Pour que S_1 et S_2 soient équivalents il faut et il suffit que tout μ figurant dans S_1 soit de la forme

$$\alpha + a_1\nu_1 + .. + a_s\nu_s \qquad \text{(les } a \text{ entiers)}$$

et que tout ν figurant dans S_2 soit de la forme

$$\alpha' + b_1\mu_1 + .. + b_r\mu_r \qquad \text{(les } b \text{ entiers).}$$

La condition est suffisante. Pour le voir rappelons-nous que toute période du milieu $\mathfrak{M}_1$ produit par S_1 est de la forme

$$\gamma_1 = \alpha_1 + c_1\mu_1 + \ldots + c_r\mu_r \text{ (les } c \text{ entiers).}$$

De même, toute période du milieu $\mathfrak{M}_2$ produit par S_2 est de la forme

$$\gamma_2 = \alpha_2 + d_1\nu_1 + \ldots + d_s\nu_s \qquad \text{(les } d \text{ entiers).}$$

Ceci montre que, la condition ci-dessus étant remplie, tout γ_1 est un γ_2 et inversement tout γ_2 est un γ_1. Les modules de périodes $(\mathfrak{M}_1)$ et $(\mathfrak{M}_2)$ étant identiques, les milieux $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont égaux.

La condition est nécessaire. En effet, chaque μ, étant un γ_2, a la forme indiquée dans le théorème. De même chaque ν.

9. Considérons un multiplicateur de translations ordonnées :

$$S = [\mu_1(p_1), \ldots \mu_r(p_r)].$$

On voit immédiatement que si l'on applique les mêmes translations μ dans un autre ordre, on retrouve le même milieu $\mathfrak{M}$. En effet, le nouveau multiplicateur, constitué par les μ rangés dans un ordre différent de celui de S, fournit un milieu dont l'ensemble de périodes sera toujours

$$\alpha + k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \ldots + k_r\mu_r.$$

Mais il est évident que dans le nouveau multiplicateur S′ le coefficient p'_i de la translation μ_i peut être différent de la valeur p_i qu'il avait dans S. Toutefois on voit aisément que les deux produits $p_1p_2\ldots$ et $p_1'.p_2'\ldots$ doivent être égaux. Cela tient à ce qu'un même milieu homogène $\mathfrak{M}$ ne peut pas se présenter comme somme, de deux manières et en nombres différents,de milieux égaux à M.

D'ailleurs il peut arriver que dans le nouveau multiplicateur S certaines périodes μ manquent. Ceci aura lieu lorsque l'une d'elles s'exprime au moyen de celles qui sont déja introduites et d'un α, car dans ce cas cette période est période du diviseur déja obtenu de $\mathfrak{M}$.

10. Supposons donnés le milieu M et le multiplicateur S de translations ordonnées et proposons-nous de trouver le procédé permettant de former tout multiplicateur équivalent au multiplicateur S donné. Ce procédé est évident, si l'on tient compte des résultats obtenus au numéro 8. On choisit une période quelconque ν_1 de $\mathfrak{M}$ qui n'est pas période de M. ν_1 étant une période de $\mathfrak{M}$, il suffit de prendre

$$\nu_1 = \alpha_1 + d_1^{(1)}\mu_1 + d_2^{(1)}\mu_2 + \ldots + d_r^{(1)}\mu_r,$$

les d étant des entiers. Soit $q_1\nu_1$ le premier multiple de ν_1 qui est un

α. Le milieu homogène engendré à partir de M au moyen de ν_1 sera q_1M, ses périodes seront de la forme

$$\alpha + k_1\nu_1.$$

On prend une deuxième période ν_2 de $\mathfrak{M}$ en la choisissant parmi les translations de la forme

$$\alpha_2 + d_1^{(2)}\mu_1 + d_2^{(2)}\mu_2 + \ldots + d_r^{(2)}\mu_r,$$

avec la seule condition qu'elle ne soit pas période du milieu q_1M trouvé précédemment, c'est-à-dire qu'elle ne se réduise pas à une translation de la forme

$$\alpha + k_1\nu_1.$$

On opère sur elle comme sur ν_1, et ainsi de suite.

11. *Théorème : Soit $\mathfrak{M} = p$M. Il existe toujours une suite de cycles s'engendrant les uns des autres à partir de M_0 de manière de reproduire $\mathfrak{M}$ et correspondant à la décomposition de p en un produit de facteurs premiers, distincts ou non, et pris dans un ordre arbitraire.*

Démonstration : Montrons d'abord, en utilisant les notations employées plus haut, qu'on peut intervertir deux facteurs p_1 et p_2, supposés premiers entre eux. Partons de M_0 et appliquons à M_0 au lieu de la translation μ_1 la translation μ_2. Il se pose la question suivante : trouver le plus petit multiple de μ_2 qui soit une période de M.

Désignons par $k\mu_2$ ce multiple. Il doit satisfaire à une relation de la forme

$$k\mu_2 = \alpha'.$$

Rappelons-nous que $p_2\mu_2$ est est le plus petit multiple de μ_2 qui est de la forme

$$\alpha + m\mu_1 \qquad (m \text{ entier}).$$

$k\mu_2$ ayant la même forme, il s'ensuit que k doit être un multiple de p_2. Posons $k = k'p_2$. On en tire, en tenant compte de la relation

$$p_2\mu_2 = \alpha_2 + m_1\mu_1$$

l'égalité suivante

$$k\mu_2 = k'\alpha_2 + k'm_1\mu_1.$$

$k\mu_2$ étant le premier multiple de μ_2 appartenant à (M), il faut que

$k'm_1\mu_1$ soit le premier multiple de μ_1 qui soit un α et dont le coefficient soit un multiple de m_1. En tenant compte du fait que la relation

$$k'm_1\mu_1 < (M)$$

n'est possible que si $k'm_1$ est un multiple de p_1 nous en concluons que $k'm_1$ est le plus petit commun multiple de m_1 et de p_1. Désignons par δ le plus grand commun diviseur de m_1 et de p_1. On a

$$k' = \frac{p_1}{\delta},$$

et

$$k = \frac{p_1 p_2}{\delta}.$$

Ceci montre que si l'on part de M_i $\left[i = 0, 1, 2, . . (p_1 - 1)\right]$ et si on lui applique successivement les translations μ_2, $2\mu_2$, $3\mu_2$, . . $\frac{p_1 p_2}{\delta}\mu_2$, on sera revenu à l'ensemble M_i de départ, et ceci pour la première fois. Autrement dit, les $\frac{p_1 p_2}{\delta}$ milieux ainsi obtenus constituent un cycle. En appliquant $\delta - 1$ fois la translation μ_1 à ce cycle on obtient le milieu $M_0^{(2)} = M_0^{(1)} + M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + . . + M_{p_2-1}^{(1)}$.

Cette étude résout aussi, pour les deux translations μ_1 et μ_2, la question suivante qui s'est présentée au numéro 9 : $[\mu_1(p_1), \mu_2(p_2)]$ et $[\mu_2(p_2'), \mu_1(p'_1)]$ étant deux multiplicateurs de translations ordonnées, qui diffèrent seulement par l'ordre d'application de leurs translations, chercher les relations qui existent entre les coefficients p_1, p_2, p_1', p_2'. Nous venons de trouver $p_2' = \frac{p_1 p_2}{\delta}$, $p_1' = \delta$.

Considérons encore le cas particulier où m_1 est premier avec p_1, donc $\delta = 1$. Dans ces conditions ce n'est que la translation $p_1 p_2 \mu_2$ qui, appliquée à un ensemble de départ M_i $[i = 0, 1, 2, . . (p_1 - 1)]$, redonne M_i, ce qui revient à remplacer un cycle de cycles par un cycle unique.

Cette étude préliminaire étant achevée, revenons à notre problème initial : montrer qu'on peut intervertir deux facteurs premiers entre eux. Autrement dit : p_1 et p_2 étant supposés premiers entre eux et

$[\mu_1(p_1),\ \mu_2(p_2)] =$ S étant un multiplicateur donné, montrer qu'il existe toujours un multiplicateur de la forme $[\nu_1(p_2),\ \nu_2(p_1)]$.

D'après l'étude précédente il suffit de montrer qu'il existe un multiplicateur $S' = [\mu_1(p_1),\ \mu_2'(p_2)]$ équivalent à S et tel que le δ qui lui correspond et que je désigne par δ' soit égal à p_1. (En effet, alors on aura bien un cycle de p_1 cycles formés chacun de $k = \dfrac{p_1 p_2}{\delta} = p_2$ milieux égaux à M.)

Pour cela, posons

$$\mu_2' = \mu_2 + a\mu_1 \qquad (a \text{ entier})$$

et montrons d'abord que le premier multiple de la translation μ_2' ainsi définie qui est de la forme $\alpha + m\mu_1$ est effectivement $p_2\mu_2'$. Ecrivons cette condition

$$l\mu_2' = \alpha + m\mu_1, \qquad (l \text{ entier})$$

ou

$$l\mu_2 + al\mu_1 = \alpha + m\mu_1,$$

c'est-à-dire

$$l\mu_2 = \alpha + (m - al)\mu_1,$$

ce qui montre que l est égal à p_2.

Cela posé, choisissons maintenant pour a un entier tel que δ' soit égal à p_1. Il suffit pour cela de faire $m_1' = 0$ $(p_2\mu_2' = \alpha_2' + m'_1\mu_1)$, ce qui fournit

$$p_2\mu_2' = p_2\mu_2 + ap_2\mu_1 = \alpha_2'.$$

En tenant compte de

$$p_2\mu_2 = \alpha_2 + m_1\mu_1$$

nous tirons de la relation précédente une relation de la forme

$$\alpha + (m_1 + ap_2)\mu_1 = 0.$$

Pour que cette égalité soit vérifiée il faut et il suffit que l'on ait

$$m_1 + ap_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p_1).$$

p_1 et p_2 étant supposés premiers entre eux, cette congruence admet une solution en a.

Le multiplicateur $[\nu_1(p_2),\ \nu_2(p_1)]$ avec $\nu_1 = \mu_2',\ \nu_2 = \mu_1$ satisfait donc au conditions énoncées plus haut et l'on voit qu'on peut effectivement intervertir deux facteurs premiers entre eux.

Ceci étant admis, il reste, pour achever la démonstration du théorème, à montrer le fait suivant : si un facteur p_1 est le produit de deux entiers : $p_1 = p_1' p_1''$ on peut remplacer le cycle relatif à p_1 par un cycle de cycles. En effet, appliquons plusieurs fois à M_0 la translation $p_1' \mu_1$, ce qui donne les milieux

$$M_0, \; M_{p_1'}, \; M_{2p_1'}, \; \ldots \; M_{(p_1''-1)p_1'}.$$

En vertu des relations $p_1'' p_1' = p_1$ et $M_{p_1} = M_0$ la somme des milieux ainsi obtenus est un milieu homogène :

$$M'_0 = M_0 + M_{p_1'} + M_{2p_1'} + \ldots + M_{(p_1''-1)p_1'}.$$

Pour obtenir $M_0^{(1)}$ il suffit d'appliquer à M'_0 les translations μ_1, $2\mu_1$, ... $(p'_1 - 1)\mu_1$ ce qui donne un nouveau cycle composé de milieux M'_0, M'_1, ... $M'_{p_1'-1}$ et l'on a

$$M'_0 + M'_1 + \ldots + M'_{p_1'-1} = M_0 + M_1 + \ldots + M_{p_1-1}.$$

12. *Théorème : Pour qu'un milieu admette un multiple (non infini), il faut et il suffit qu'un diviseur d'une de ses périodes ne soit pas lui-même une période.*

La condition est nécessaire. Remarquons que d'après le mode de formation même d'un multiple, la translation μ_1 n'est pas période de M et que $p_1\mu_1$ en est une.

La condition est suffisante. Soit μ_1 ce diviseur et $p_1\mu_1$ le premier multiple de μ_1 qui est une période de M. Les translations μ_1, $2\mu_1$, ... $(p_1 - 1)\mu_1$, appliquées successivement à M, engendrent un milieu homogène multiple de M (ce milieu sera égal à p_1M).

13. *Théorème : Un milieu qui admet un multiple non infini en admet une infinité.*

Le milieu admettant un multiple, il existe une translation μ_1 n'appartenant pas au module de périodes de M et diviseur d'une période de M. Soit $p_1\mu_1$ le premier multiple de μ_1 qui est une période de M. On aura $\mu_1 = \frac{\alpha_1}{p_2}$, α_1 étant une période de M. Comme nous l'avons vu au numéro précédent, la translation μ_1, appliquée à M, engendre un milieu homogène égal à p_1M.

Nous pouvons supposer que p_1 est un nombre premier. Considérons la translation $\mu_1{}^{(i)} = \frac{\alpha_1}{p_1{}^i}$ qui certainement n'est pas une période de M. Son premier multiple qui en est une, est $p_1{}^i \cdot \mu_1{}^{(i)}$. Donc la translation $\mu_1{}^{(i)}$, appliquée à M, engendre un milieu homogène égal à $p_1{}^i$M. Or un milieu homogène ne peut se présenter comme somme, de deux manières et en nombres différents, de milieux égaux à M. Donc deux milieux $p_1{}^i$M correspondant à deux valeurs différentes de l'exposant i ne sont pas égaux, d'où l'on conclut que M admet une infinité de multiples.

14. *Théorème : Pour qu'un milieu admette un diviseur (non nul), il faut et il suffit que l'on puisse distinguer une translation* μ_r *et délimiter un sous-module de translations de manière à satisfaire aux conditions suivantes :*

1°) μ_r *ne fait pas partie du sous-module, mais un multiple de* μ_r *lui appartient.*

2°) *L'adjonction de* μ_r *au sous-module redonne le module.*

La condition est nécessaire. Appelons $M_0{}^{(r-1)}$ le diviseur de $\mathfrak{M}$ (dont l'existence est supposée). Le module de périodes de $\mathfrak{M}$ s'obtient en adjoignant μ_r au module de périodes de $M_0{}^{(r-1)}$ et $p_r\mu_r$ est le premier multiple de μ_r qui appartient à $(M_0{}^{(r-1)})$.

La condition est suffisante. En effet, si elle est remplie, le module restreint définit un milieu $M_0{}^{(r-1)}$ qui, par l'emploi de μ_r, engendre $\mathfrak{M}$.

15. *Théorème : Un milieu qui n'admet pas de multiple n'admet pas non plus de diviseur.*

Appelons $\mathfrak{M}$ le milieu n'admettant par de multiple. D'après le théorème du numéro 12 chaque diviseur $\frac{\mu}{m}$ de chaque période μ de $\mathfrak{M}$ est lui-même une période de $\mathfrak{M}$. Montrons que ce résultat conduit à un contradiction avec l'hypothèse de l'existence d'un diviseur M de $\mathfrak{M}$. En effet si M existait il y aurait une translation μ_1 n'appartenant pas à (M) mais appartenant à ($\mathfrak{M}$). Appelons $p_1\mu_1$ le premier multiple de μ_2 appartenant à (M). μ_1 étant un μ, la translation $\frac{\mu_1}{m}$ est période de $\mathfrak{M}$. Nous pouvons supposer que $\mathfrak{M}$ s'obtient à partir de M par l'emploi de μ_1 : $\mathfrak{M} = p_1 M$. Dans ces conditions, α désignant une période de M, toute période de $\mathfrak{M}$ est de la forme

$$\alpha + k\mu_1.$$

Donc on aura

$$\frac{\mu_1}{m} = \alpha_1 + k_1\mu_1,$$

ou

$$\mu_1 . \frac{1 - mk_1}{m} = \alpha_1.$$

$\mu_1(1 - mk_1)$ étant un α, il faut que $1 - mk_1$ soit un multiple de p_1 :

$$1 - mk_1 = qp_1,$$

d'où l'on conclut que p_1 et m sont premiers entre eux. Or m peut être quelconque. Donc contradiction.

D'ailleurs ce théorème peut être démontré à l'aide du théorème du numéro 13. En effet, si $\mathfrak{M}$ admettait un diviseur M, $\mathfrak{M}$ étant multiple de M admettrait lui aussi des multiples.

---

§ 2. — Systèmes canoniques de translations ordonnées.

Dans ce paragraphe nous allons considérer des systèmes multiplicateurs particulièrement simples. Dans ce qui suit nous supposons p décomposé en un produit de nombres premiers. De plus, on peut supposer que, dans le système de translations ordonnées, les nombres premiers égaux sont consécutifs. Soient donc

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots, \; p_1 = p_2 = \,..\, = p_{s-1}, \; p_s = p_{s+1} = \,..\, = p_{t-1}$$

16. *Lemme I* : Soit S un multiplicateur de translations ordonnées défini par des égalités conformes aux remarques précédentes. Il existe un multiplicateur S′ équivalent, tel que dans S′ la relation relative à $p_i\mu_i$ ne contienne pas de translations qui appartiennent à des nombres premiers différents de p_i.

Pour démontrer ce lemme nous allons indiquer un procédé permettant de transformer le multiplicateur S donné en un multiplicateur S′ qui possède toutes les propriétés mentionnées plus haut.

Le multiplicateur constitué par les $s-1$ premières égalités de S possède déjà les propriétés indiquées. Nous allons procéder de proche en proche en modifiant successivement la $s^{\text{ième}}$, $(s+1)^{\text{ième}}$, ... équation de S. Pour commencer, nous allons substituer à la translation μ_s une autre de la forme

$$\mu'_s = \mu_s + a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + .. + a_{s-1}\mu_{s-1},$$

de sorte que la relation

$$p_s\mu_s = \alpha_s + .. + c^{(s)}_{s-1}\mu_{s-1} \qquad [1]$$

soit transformée en une autre ne contenant ni μ_1, ni μ_2, ... ni μ_{s-1}. La transformée de [1] est

$$p_s\mu'_s = \alpha_s + (c^{(s)}_1 + p_s a_1)\mu_1 + .. + (c^{(s)}_{s-1} + p_s a_{s-1})\mu_{s-1} \quad [2]$$

Choisissons a_{s-1} de manière que le coefficient de μ_{s-1} soit multiple de p_{s-1} ; en utilisant la $(s-1)^{\text{ième}}$ égalité de S on fait disparaître μ_{s-1} du membre de droite de [2], ce qui a pour conséquence une modification des termes précédents. Ensuite on choisit a_{s-2} de façon que le coefficient modifié de μ_{s-2} soit multiple de p_{s-2}, et ainsi de suite. La $s^{\text{ième}}$ égalité transformée prend la forme

$$p_s\mu'_s = \alpha'^s.$$

Substituons maintenant la translation μ'_s, ainsi déterminée, à la translation μ_s dans toutes les égalités suivantes de S. Effaçons les accents et posons

$$\mu'_{s+1} = \mu_{s+1} + a_1\mu_1 + .. + a_{s-1}\mu_{s-1}.$$

En répétant le raisonnement fait plus haut nous déterminons les nouvelles constantes a de telle sorte que la $(s+1)^{\text{ième}}$ égalité de S

$$p_s\mu_{s+1} = \alpha_{s+1} + \dots + c^{(s+1)}_s\mu_s$$

soit transformée en une autre ne contenant ni μ_1, ni μ_2, ... ni μ_{s-1}. Elle pourra donc s'écrire

$$p_s\mu'_{s+1} = \alpha'_{s+1} + b\mu_s.$$

On procède de la même façon jusqu'à ce que toutes les égalités relatives à p_s ne fassent intervenir, outre les α, que les nouveaux μ depuis μ_s jusqu'à μ_{t-1}. Et ainsi de suite.

17. *Lemme II :* On peut remplacer S par un multiplicateur équivalent S' tel que les indices maxima des translations qui figurent effectivement dans les membres de droite des égalités relatives à un même nombre premier aillent en croissant avec le numéro d'ordre de ces relations, et que l'égalité relative à μ_i ne contienne que des translations qui correspondent à p_i.

Considérons d'abord le groupe constitué par les $s-1$ premières égalités de S. Dans ce groupe, on peut facilement empêcher une décroissance des indices maxima. En effet, si par exemple, i étant inférieur à j, l'indice final de la $i^{\text{ième}}$ relation était supérieur à celui de la $j^{\text{ième}}$, on substituerait à μ_j la translation $\mu_i + \mu_j$, ce qui aurait pour effet de rendre égal l'indice final de la $i^{\text{ième}}$ relation à celui de la $j^{\text{ième}}$.

Supposons donc que les indices maxima n'aillent jamais en décroissant. S'ils ne vont pas tous en croissant, il y a des groupes d'égalités correspondant au même indice final et tel que cet indice aille en croissant avec ce groupe. Parcourant alors les relations à partir de la dernière, considérons le premier groupe rencontré formé par des égalités donnant lieu au même indice final. Soit

$$\left\{\begin{array}{l} p_1\mu_l = \alpha_l + c_1^{(j)}\mu_1 + .. + c_i^{(j)}\mu_i \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_1\mu_l = \alpha_l + c_1^{(l)}\mu_1 + .. + c_i^{(l)}\mu_i \end{array}\right. \qquad (i < j < l) \qquad [1]$$

ce groupe. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} c_i^{(l)}\mu_j - c_i^{(j)}\mu_l = \mu'_j \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_i^{(l)}\mu_{l-1} - c_i^{(l-1)}\mu_l = \mu'_{l-1} \end{array}\right. \qquad [2]$$

On en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} p_1\mu'_j = \alpha'_j + b_1^{(j)}\mu_1 + .. + b_{i'}^{(j)}\mu_{i'} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_1\mu'_{l-1} = \alpha'_{l-1} + b_1^{(l-1)}\mu_1 + .. + b_{i''}^{(l-1)}\mu_{i''} \\ p_1\mu_l = \alpha_l + c_1^{(l)}\mu_1 + .. + c_i^{(l)}\mu_i \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} i' < i \\ i'' < i \end{pmatrix} \qquad [3]$$

Aux périodes μ_j, ,,. μ_{l-1}, μ_l, on peut substituer les périodes μ'_j, ... μ'_{l-1}, μ_l. Autrement dit, les deux multiplicateurs

$$S_1 = [\mu_1, \ldots \mu_j, \ldots \mu_{l-1}, \mu_l]$$

et

$$S'_1 = [\mu_1, \ldots \mu'_j, \ldots. \mu'_{l-1}, \mu_l]$$

sont équivalents. En effet, le système [2] montre que chaque μ' s'exprime au moyen des μ. Il reste à montrer que μ_j par exemple s'exprime au moyen des périodes de S'_1. Nous allons montrer que μ_j s'exprime en fonction de μ'_j et des périodes conservées. Or

$$0 < c_i^{(l)} < p_1,$$

d'où l'on conclut, p_1 étant un nombre premier, que $c_i^{(l)}$ et p_1 sont premiers. Il existe donc un entier x tel que

$$xc_i^{(l)} = mp_1 + 1 \qquad (m \text{ entier}) \tag{4}$$

et un entier r tel que

$$xc_i^{(j)} = m'p_1 + r \qquad (o \leqslant r < p_1). \tag{5}$$

Reprenons encore la première égalité du système [2]

$$c_i^{(l)}\mu_j - c_i^{(j)}\mu_l = \mu'_j. \tag{6}$$

Multiplions [4], [5] et [6] respectivement par μ_j, μ_l, et x. Il vient successivement

$$\mu_j = xc_i^{(l)}\mu_j - mp_1\mu_j \tag{7}$$

$$xc_i^{(j)}\mu_l = m'p_1\mu_l + r\mu_l \tag{8}$$

$$xc_i^{(l)}\mu_j = xc_i^{(j)}\mu_l + x\mu'_j \tag{9}$$

[9] s'écrit, compte tenu de [8]

$$xc_i^{(l)}\mu_j = m'p_1\mu_l + r\mu_l + x\mu'_j, \tag{10}$$

et [7] s'écrit, compte tenu de [10]

$$\mu_j = m'p_1\mu_l + r\mu_l + x\mu'_j - mp_1\mu_j. \tag{11}$$

Considérons le second membre de [11]. Il contient des termes en $p_1\mu_l$ et $p_1\mu_j$. Mais en vertu de la première et de la dernière relation du système [1] ces deux termes s'expriment au moyen d'un α et de $\mu_1, \ldots$ μ . Donc, d'après [11], μ_j s'exprime en fonction de α, de μ'_j et de μ_1, ,.. μ_i, μ_l. Les multiplicateurs S_1 et S'_1 sont équivalents.

Raisonnons maintenant sur le multiplicateur S'_1. Laissons de côté la $l^{\text{ième}}$ égalité de S'_1 (qui est la dernière du système [3]) et empêchons, comme plus haut, une décroissance des indices maxima. Ce travail préliminaire étant accompli, nous parcourons les relations à partir de la dernière et nous diminuons comme ci-dessus dans le premier groupe rencontré où ils sont égaux cet indice maximum, sauf dans la dernière relation du groupe. Finalement les $s-1$ premières relations du multiplicateur S modifié remplissent la condition annoncée.

Considérons maintenant les égalités du multiplicateur S transformé qui correspondent au nombre p_s. On leur applique le procédé exposé dans la démonstration du lemme I. Cette transformation étant effectuée, en utilisant le procédé indiqué dans le présent numéro pour les $s-1$ premières égalités de S, on trouve pour les relations relatives à p_s un système d'égalités satisfaisant aux conditions suivantes :

1°) Il ne contient que des translations correspondant à p_s.

2°) Les indices maxima des translations qui figurent dans ses membres de droite vont en croissant avec le numéro d'ordre de ses relations.

On continue d'une façon analogue pour les égalités qui correspondent au nombre p_t et ainsi de suite. Le lemme est donc démontré.

18. Supposons d'abord que p est un produit de facteurs premiers égaux entre eux[1]. Pour simplifier l'écriture considérons le multiplicateur suivant :

$$\left\{\begin{aligned} p_1\mu_1 &= \alpha_1 \\ p_1\mu_2 &= \alpha_2 \\ p_1\mu_3 &= \alpha_3 \\ p_1\mu_4 &= \alpha_4 + c_1^{(4)}\mu_1 \\ p_1\mu_5 &= \alpha_5 + c_1^{(5)}\mu_1 + c_2^{(5)}\mu_2 + c_3^{(5)}\mu_3 \\ p_1\mu_6 &= \alpha_6 + c_1^{(6)}\mu_1 + \dots\dots\dots\dots + c_4^{(6)}\mu_4 \end{aligned}\right. \qquad [1]$$

(On remarquera que ce système [1] est mis sous une forme indiquée au lemme II : les indices maxima des translations qui figurent

(1) Cette restriction sera imposée, sans être rappelée partout explicitement, jusqu'au numéro 27.

effectivement dans les membres de droite vont en croissant avec le numéro d'ordre des égalités).

Nous allons substituer aux translations μ_4 et μ_1 du système [1] deux nouvelles translations μ'_4 respectivement μ'_1 en les choisissant d'une telle façon que la première relation [1] garde sa forme simple et que la 4ième et la 6ième relation [1] soient simplifiées. Pour cela, posons

$$p_1\mu_6 = \mu'_4 \qquad [2]$$

$$p_1\mu'_4 = \mu'_1 \qquad [3]$$

Substituant aux périodes μ_1, μ_4 les périodes μ'_1, μ'_4, nous transformons le système [1] en un système analogue relatif à μ'_1, μ_2, μ_3, μ'_4, μ_5, μ_6, mais où la 4ième relation [1] est remplacée par [3] et la 6ième par [2]. La première relation du système [1] transformé sera toujours, comme nous allons le voir, de la forme $p_1\mu'_1 = \alpha'_1$.

Le système [1] définit un multiplicateur de translations ordonnées

$$S = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6] ;$$

de même le système [1] transformé définit

$$S' = [\mu'_1, \mu_2, \mu_3, \mu'_4\, \mu_5, \mu_6].$$

Nous allons montrer l'équivalence de S et S'. Elle résulte des faits suivants :

a) μ'_4, étant équipollent à $p_1\mu_6$, s'exprime en fonction d'un α, et des μ d'indice au plus égal à 4.

b) Inversement, μ_4 s'exprime en fonction d'un α, de μ'_4 et des μ d'indices inférieurs à 4. Pour le voir, remarquons que $0 < c_4^{(6)} < p_1$; il existe donc un entier x tel que

$$xc_4^{(6)} = mp_1 + 1 \qquad (m \text{ entier}). \qquad [4]$$

D'autre part, on a, en désignant par $P + c_4^{(6)}\mu_4$ le membre de droite de la 4ième relation [1], et en tenant compte de l'égalité [2]

$$P + c_4^{(6)}\mu_4 = \mu'_4. \qquad [5]$$

Multiplions [4] et [5] par μ_4 respectivement par l'entier x; il vient

$$\mu_4 = xc_4^{(6)}\mu_4 - mp_1\mu_4 \qquad [6]$$

et

$$xc_4^{(6)}\mu_4 = x\mu'_4 - xP\,, \qquad [7]$$

De [6] et [7] on tire

$$\mu_4 = x\mu'_4 - x\mathrm{P} - mp_1\mu_4. \qquad [8]$$

En remarquant que P et $p_1\mu_4$ s'expriment le premier en fonction d'un α et de μ_1, μ_2, μ_3, le second en fonction d'un α et de μ_1, on constate que d'après [8] μ_4 s'exprime effectivement en fonction d'un α, de μ'_4 et des μ d'indices inférieurs à 4.

c) μ'_1, étant égal à $p_1\mu'_4 = p_1(p_1\mu_6)$, est de la forme

$$\mu'_1 = \alpha' + c_1^{(4)}c_4^{(6)}\mu_1.$$

d) Inversement, μ_1 s'exprime en fonction de μ'_1 et d'un α. Pour le voir, posons $c_1^{(4)}c_4^{(6)} = a$ et remarquons que a est premier avec p_1 ; il existe donc un entier x tel que

$$xa = mp_1 + 1 \qquad (m \text{ entier}). \qquad [9]$$

D'autre part, on a d'après l'égalité trouvée précédemment

$$\mu'_1 = \alpha' + a\mu_1. \qquad [10]$$

Multiplions [9] et [10] par μ_1 respectivement par l'entier x, il vient

$$\mu_1 = xa\mu_1 - m(p_1\mu_1), \qquad [11]$$

et

$$xa\mu_1 = x\mu'_1 - x\alpha'. \qquad [12]$$

De [11] et [12] on tire

$$\mu_1 = x\mu'_1 - x\alpha' - m(p_1\mu_1). \qquad [13]$$

Le produit $p_1\mu_1$ étant un α, l'affirmation est démontrée.

Les multiplicateurs S, qui est défini par le système [1], et S' sont donc équivalents. Effaçons dans S' les accents. S' sera défini par le système

$$\left\{\begin{array}{l} p_1\mu_1 = \alpha_1 \qquad\qquad (p_1 = p_2 = \dots = p_6) \\ p_2\mu_2 = \alpha_2 \\ p_3\mu_3 = \alpha_3 \\ p_4\mu_4 = \mu_1 \\ p_5\mu_5 = \alpha_5 + c_1^{(5)}\mu_1 + c_2^{(5)}\mu_2 + c_3^{(5)}\mu_3 \\ p_6\mu_6 = \qquad\quad \mu_4 \end{array}\right. \qquad [14]$$

Nous pouvons reprendre notre raisonnement. Posons

$$p_1\mu_5 = \mu'_3.$$

μ'_3 s'exprime donc en fonction d'un α et des μ d'indices au plus égaux à 3. Inversement μ_3 s'exprime en fonction d'un α, de μ'_3 et des μ d'indices inférieurs à 3. Nous arrivons finalement à un multiplicateur dont les membres de droite se réduisent à un α ou à un μ. Dans l'exemple considéré on aura

$$\left\{\begin{array}{l} p_1\mu_1 = \alpha_1 \\ p_1\mu_2 = \alpha_2 \\ p_1\mu_3 = \alpha_3 \\ p_1\mu_4 = \mu_1 \\ p_1\mu_5 = \mu_3 \\ p_1\mu_6 = \mu_4 \end{array}\right.$$

D'une façon générale, et disposant convenablement les indices, on aura

$$\left\{\begin{array}{llr} p_1\mu_1^{(1)} = \alpha_1 \qquad & p_1\mu_{i-1}^{(1)} = \alpha_{i-1} & [15] \\ \left\{\begin{array}{l} p_1\mu_i^{(1)} = \alpha_i \\ p_1\mu_i^{(2)} = \mu_i^{(1)} \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} p_1\mu_{i+1}^{(1)} = \alpha_{i+1} \\ p_1\mu_{i+1}^{(2)} = \mu_{i+1}^{(1)} \end{array}\right. & [16] \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ \left\{\begin{array}{l} p_1\mu_s^{(1)} = \alpha_s \\ p_1\mu_s^{(2)} = \mu_s^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ p_1\mu_s^{(f)} = \mu_s^{(f-1)} \end{array}\right. & & [17] \end{array}\right. \qquad [18]$$

Les translations $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, ... $\mu^{(f)}$ sont dites du 1^{r}, 2^{e}, ... f^{me} ordre. Elles sont simples (relations [15]) *ou assemblées en groupements canoniques binaires ou de type* 2 (relations [16]), ... *de type f* (relations [17]). Un multiplicateur se présentant sous forme de groupements canoniques forme un *système canonique de translations* ordonnées.

19. *Remarque :* Soit S un ensemble de translations satisfaisant à des égalités de forme canonique et tel qu'entre ses translations du 1er ordre ω_1, ω_2, ... ω_s (l'indice étant celui du groupement contenant la translation considérée) n'existe aucune relation de la forme

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_s\omega_s = \alpha,$$

les c étant des entiers non négatifs, non tous nuls, et inférieurs à p_1.

Soient de plus ν_1, ν_2, ... ν_t des translations quelconques de S satisfaisant à une relation de la forme

$$a\nu_1 + b\nu_2 + \ldots = \alpha', \qquad [1]$$

les coefficients a, b... étant des entiers non tous nuls.

Dans ces conditions les coefficients des translations ν d'ordre maximum figurant dans [1] sont des multiples de p_1.

Pour simplifier l'écriture nous supposons que ν_1 et ν_2 sont précisément les translations d'ordre maximum, que nous désignerons par m, parmi toutes les translations figurant dans [1]. De plus, soit q respectivement r l'indice du groupement contenant ν_1 respectivement ν_2.

Ceci posé, rappelons l'expression générale de la période d'ordre j figurant dans le groupement d'indice i. On aura, d'après le système [18] du numéro précédent :

$$\mu_i^{(j)} = \frac{\mu_i^{(1)}}{p_1^{j-1}}.$$

De plus, observons que tout entier (positif ou négatif) peut être mis sous la forme

$$d_i p_1^i + d_{i-1} p_1^{i-1} + \ldots + d_1 p_1 + d_0,$$

les d étant des entiers inférieurs à p_1 en valeur absolue. Effectuons cette décomposition pour tout coefficient a, b, ... figurant dans [1] et soit

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \ldots + a_2 p_1^2 + a_1 p_1 + a_0 \\ b = \ldots + b_2 p_1^2 + b_1 p_1 + b_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leqslant | \, a_i \, | < p_1 \\ 0 \leqslant | \, b_i \, | < p_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right) \qquad [2]$$

D'après ce qui vient d'être dit plus haut on aura

$$\nu_1 = \frac{\omega_q}{p_1^{m-1}} \qquad\qquad \nu_2 = \frac{\omega_r}{p_1^{m-1}}$$

et des expressions analogues pour ν_3, ν_4, . . . ν_t. En utilisant [2] on déduit de [1] une égalité de la forme suivante :

$$a_0 \frac{\boldsymbol{\omega}_q}{p_1{}^{m-1}} + b_0 \frac{\boldsymbol{\omega}_r}{p_1{}^{m-1}} + \ldots = \boldsymbol{\alpha}' \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant |a_0| < p_1 \\ 0 \leqslant |b_0| < p_1 \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \quad [3]$$

les termes indiqués par des points étant tous de la forme

$$g \frac{\boldsymbol{\omega}_i}{p_1{}^{m'-1}} \qquad \begin{pmatrix} g \text{ entier} \\ 0 \leqslant |g| < p_1 \\ m' < m \end{pmatrix}$$

La multiplication de [3] par $p_1{}^{m-1}$ fournit

$$a_0\boldsymbol{\omega}_q + b_0\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\alpha}'',$$

relation qui entraîne $a_0 = 0$, $b_0 = 0$. Mais ceci signifie que a et b sont des multiples de p_1.

20. Pour qu'un ensemble de translations satisfaisant à des égalités de *forme* canonique constituent *effectivement* un système canonique de translations ordonnées, il faut et il suffit qu'entre les translations du 1^{er} ordre du système, $\boldsymbol{\mu}_1^{(1)}$, $\boldsymbol{\mu}_2^{(1)}$, . . . $\boldsymbol{\mu}_s^{(1)}$, il n'existe aucune relation de la forme

$$c_1\boldsymbol{\mu}_1^{(1)} + c_2\boldsymbol{\mu}_2^{(1)} + \ldots + c_s\boldsymbol{\mu}_s^{(1)} = \boldsymbol{\alpha},$$

les c étant des entiers non négatifs, non tous nuls, et inférieurs à p_1.

21. Les translations d'ordre maximum dans chaque groupement constituent, dans leur ensemble, un système de translations fondamentales. On le constate en tenant compte des deux faits suivants :

1°) Toute translation du milieu produit par le multiplicateur canonique S s'exprime en fonction d'un $\boldsymbol{\alpha}$ et des translations du multiplicateur. D'autre part, toute translation de S appartenant au groupement d'indice i s'exprime au moyen de la translation d'ordre le plus élevé du groupement i.

2°) D'après les résultats des numéros 19 et 20, les translations d'ordre maximum sont indépendantes.

22. *Définition :* Soit $\mathcal{M}$ un milieu multiple de M. $\boldsymbol{\omega}$ étant une période quelconque de $\mathcal{M}$, nous appellerons *ordre de* $\boldsymbol{\omega}$ le plus petit entier positif ou nul, j, tel que l'on ait $p_1^j\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha}$. D'après cela toute période de M est d'ordre zéro.

Il faut montrer encore que cette définition de l'ordre d'une période de $\mathfrak{M}$ n'est pas en contradiction avec celle donnée à l'occasion de l'étude d'un système canonique (numéro 18) ; elle constitue donc une généralisation de cette dernière.

Ceci se voit très simplement si l'on remarque qu'une translation d'ordre j (au sens du numéro 18) peut être écrite sous la forme

$$\mu^{(j)} = \frac{\alpha}{p_1^j} .$$

23. Supposons maintenant que le multiplicateur qui mène du milieu M à son multiple $\mathfrak{M}$ soit mis sous une forme canonique. Appelons S_1 ce système et désignons ses translations par μ. Toute translation de $\mathfrak{M}$ est de la forme

$$\omega = \alpha + \Sigma a\mu \qquad (0 \leqslant a < p_1) \qquad [1]$$

Soit j l'ordre maximum des translations μ de cette expression ; désignons le terme correspondant par $a'\mu^{(j)}$. Le produit $p_1(a'\mu^{(j)}) = a'\mu^{(j-1)}$ étant d'ordre j—1, l'ordre maximum des termes figurant au second membre du développement de $p_1\omega$ sera j—1 et ainsi de suite, $p_1^j\omega$ est le premier produit de cette forme qui se réduit à un α. Nous pouvons donc dire : ω étant une période quelconque du milieu produit par un multiplicateur canonique, l'ordre de ω est égal à l'ordre maximum j des translations μ figurant au second membre de l'égalité [1]. Donc si ω fait partie d'un système canonique équivalent à S_1, il y est d'ordre j.

24. Soient S_1 et S_2 deux systèmes canoniques équivalents. Désignons par μ les translations de S_1 et par ν celles de S_2. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Deux systèmes canoniques équivalents admettent le même nombre de translations de chaque ordre.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ les translations d'un certain ordre j de S_1, et $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ les translations du même ordre j de S_2. Montrons que l'hypothèse $m < n$ conduit à une contradiction.

Supposons donc $m < n$. D'après le numéro précédent chaque ν_k se développe au moyen de tous les μ_l ($l = 1, 2, \ldots m$), de tous les μ d'ordre inférieur à j et d'un α :

$$\left\{\begin{array}{l}
\nu_1 = a_1^{(1)}\mu_1 + a_2^{(1)}\mu_2 + \ldots + a_i^{(1)}\mu_i + \ldots + a_m^{(1)}\mu_m + P_1 \\
\nu_2 = a_1^{(2)}\mu_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_m^{(2)}\mu_m + P_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\nu_i = a_1^{(i)}\mu_1 + \ldots\ldots\ldots + a_i^{(i)}\mu_i + \ldots + a_m^{(i)}\mu_m + P_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\nu_n = a_1^{(n)}\mu_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_m^{(n)}\mu_m + P_n,
\end{array}\right. \qquad [2]$$

es P étant formés de termes d'ordre inférieur à j.

Montrons d'abord que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix}
a_1^{(1)} \ldots\ldots a_i^{(1)} \ldots\ldots a_m^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1^{(i)} \ldots\ldots a_i^{(i)} \ldots\ldots a_m^{(i)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1^{(m)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_m^{(m)}
\end{vmatrix}$$

n'est pas un multiple de p_1. Car si D était un multiple de p_1, il devrait exister un déterminant non multiple de p_1, faisant partie de D, et tel que tout déterminant de degré supérieur soit multiple. Soit i ($< m$) le degré de ce déterminant que nous désignons par D_i. Nous pouvons supposer D_i formé avec les i premières lignes et les i premières colonnes de D :

$$D_i = \begin{vmatrix}
a_1^{(1)} \ldots a_i^{(1)} \\
\ldots\ldots \\
a_1^{(i)} \ldots a_i^{(i)}
\end{vmatrix}$$

Prenons les $(i + 1)$ premières relations [2] et écrivons-les sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}
0 = a_1^{(1)}\mu_1 + \ldots + a_i^{(1)}\mu_i + (\ldots + a_m^{(1)}\mu_m + P_1 - \nu_1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = a_1^{(i+1)}\mu_1 + \ldots + a_i^{(i+1)}\mu_i + (\ldots + a_m^{(i+1)}\mu_m + P_{i+1} - \nu_{i+1})
\end{array}\right. \qquad [3]$$

Le système [3] fournit par l'élimination de $\mu_1, \ldots \mu_i$ la relation

$$\begin{vmatrix}
a_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots a_i^{(1)} & (\ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_1^{(i+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots a_i^{(i+1)} & (\ldots)
\end{vmatrix} = 0. \qquad [4]$$

Le développement de [4] fournit des déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} \ldots\ldots a_i^{(1)} \, (a_r^{(1)} \mu_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(i+1)} \ldots a_i^{(i+1)} (a_r^{(i+1)} \mu_r) \end{vmatrix} = \mu_r \begin{vmatrix} a_1^{(1)} \ldots\ldots a_i^{(1)} \quad a_r^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(i+1)} \ldots a_i^{(i+1)} \quad a_r^{(i+1)} \end{vmatrix} \qquad [5]$$

avec $r = i + 1, i + 2, \ldots m$.

De plus, on aura le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} \ldots a_i^{(1)} \quad P_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(i+1)} \ldots a_i^{(i+1)} \, P_{i+1} \end{vmatrix} \qquad [6]$$

et le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} \ldots a_i^{(1)} \quad \nu_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(i+1)} \ldots a_i^{(i+1)} \, \nu_{i+1} \end{vmatrix} \qquad [7]$$

Remarquons que le déterminant qui se trouve au second membre de [5], étant de degré $(i + 1)$, est un multiple de p_1. Donc le second membre de [5] s'exprime en fonction des μ d'ordre inférieur à j. En vertu du fait que chaque μ d'un certain ordre s'exprime au moyen des ν d'ordre non supérieur à celui du μ considéré, nous pouvons en conclure que le déterminant [5] s'exprime en fonction des ν d'ordre inférieur à j.

De même, remarquons que les P qui figurent dans le détermiminant [6] sont formés au moyen des μ, donc aussi des ν, d'ordre inférieur à j.

Le développement complet de [4] conduira donc à une relation entre les $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{i+1}$ qui sont d'ordre j et les ν d'ordre inférieur à j. Mais dans cette relation le coefficient de ν_{i+1} sera précisément D_i, ce qui est impossible, étant donné que D_i est premier avec p_1 (numéros 19 et 20). Donc D ne peut pas être un multiple de p_1.

D'autre part, par un raisonnement tout pareil, portant sur les $(m+1)$ premières relations [2] on arrive à la conclusion que D doit être un multiple de p_1. Donc l'hypothèse $m < n$ conduit à une contradiction. De même on verrait, par un calcul analogue, qu'il ne peut pas être $n < m$. Donc $m = n$.

25. Considérons deux systèmes canoniques S_1 et S_2 fournissant à partir du milieu M les milieux $\mathcal{M}_1$ respectivement $\mathcal{M}_2$. Nous supposons, comme jusqu'ici partout, que les facteurs premiers correspondant à S_1 sont égaux entre eux, de même que les facteurs premiers qui correspondent à S_2, et que ces deux valeurs communes sont égales toutes les deux à p_1. Faisons de plus les deux hypothèses suivantes :

1° Toute translation de S_1 est une période de $\mathcal{M}_2$.

2° Dans les systèmes S_1 et S_2 il y a autant de groupements d'un même type.

Dans ces conditions les milieux $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont égaux.

En effet, de l'hypothèse 1) on conclut que $\mathcal{M}_1$ est un diviseur de $\mathcal{M}_2$. L'hypothèse 2) montre que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont tous les deux de la forme p_1^kM, l'entier k étant le même pour les deux. Or le milieu $\mathcal{M}_1 = p_1^k$M étant un diviseur de $\mathcal{M}_2 = p_1^k$M, lui est égal: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$.

26. *Théorème : Pour que deux systèmes canoniques soient équivalents il faut et il suffit que les translations de l'un étant des périodes du milieu produit par l'autre, il y ait dans les systèmes autant de groupements d'un même type.*

27. Considérons maintenant les cas où p est un produit de facteurs premiers qui ne sont pas tous égaux. On peut supposer que, dans le système des translations ordonnées, les nombres premiers égaux soient consécutifs.

Ce cas se traite sans aucune difficulté à l'aide du lemme établi au numéro 17.

Soient, avec les notations du numéro 17:

$$p_1 = p_2 = \dots p_{s-1},\ p_s = p_{s+1} = \dots = p_{t-1},\ \dots.$$

La marche à suivre est la suivante :

On forme d'abord le système canonique équivalent au multiplicateur constitué par les $(s-1)$ premières relations du multiplicateur donné S. Après l'accomplissement des transformations indiquées au numéro 17 le groupe des égalités relatives au nombre p_s (égalités $s^{\text{ième}}$ jusqu'à la $(t-1)^{\text{ième}}$ inclusivement) prend une forme telle qu'on peut le remplacer par un système canonique équivalent. Et ainsi de suite. Finalement on arrive à un ensemble de groupements, pouvant se réduire à des translations simples, et de la forme

$$\begin{cases} p'\mu_i^{(1)} = \alpha_i \\ p'\mu_i^{(2)} = \mu_i^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ p'\mu_i^{(f)} = \mu_i^{(f-1)} \end{cases}$$

28. Pour qu'un ensemble de translations satisfaisant à des égalités de *forme* canonique constitue *effectivement* un système canonique, il faut et il suffit que les translations du premier ordre *relatives à chaque nombre premier* soient indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe entre elles aucune relation de la forme

$$c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots + c_s\mu_s = \alpha,$$

les c étant des entiers non négatifs, non tous nuls, et inférieurs au facteur premier de p auquel correspondent les μ ci-dessus.

Ceci est une conséquence du fait suivant : si la relation ci-dessus contenait des translations μ du premier ordre correspondant aux trois nombres premiers différents p_1, p_2, p_3, il suffirait de la multiplier par p_2p_3 pour obtenir une relation de la même forme ne contenant que des translations μ qui correspondent au facteur premier p_1.

De plus, pour que deux systèmes canoniques soient équivalents, il faut et il suffit que les translations de l'un étant des périodes du milieu produit par l'autre, il y ait dans les deux systèmes autant de groupements d'un même type pour chaque facteur premier de p.

29. Voici encore une application de la théorie des systèmes canoniques. Nous allons donner la forme générale d'une translation quelconque introduite par un système multiplicateur que nous pouvons supposer être mis sous la forme canonique. Il est donc représenté par un certain nombre de groupements canoniques, un ou plusieurs de ces groupements étant relatifs à chaque facteur premier.

Remarquons que l'on a, en désignant par μ les translations du système canonique considéré

$$\mu^{(j)} = \frac{\alpha}{q^j}.$$

Dans cette formule α et $\mu^{(j)}$ sont la période de M et la translation d'ordre j contenues dans un certain groupement canonique qui correspond au facteur premier q.

Rappelons-nous maintenant que l'expression générale d'une translation quelconque introduite par le multiplicateur est de la forme $\omega = \Sigma a\mu$, la somme s'étendant à tous les μ du multiplicateur et les a étant des entiers non négatifs et inférieurs aux facteurs premiers correspondants. Considérons la partie apportée dans cette somme par un groupement canonique quelconque, correspondant au facteur premier q. Désignons par τ le type de ce groupement. Toute translation appartenant à ce groupement sera de la forme

$$\mu^{(j)} = \frac{\alpha}{q^j} \qquad (j = 1, 2, \dots \tau).$$

La somme partielle dans $\omega = \Sigma a\mu$, due à ce groupement, sera donc

$$\sum_{j=1}^{\tau} a_j \mu^{(j)} \qquad (0 \leqslant a_j < q).$$

Transformons cette somme. On aura

$$\Sigma a_j \mu^{(j)} = \Sigma a_j \frac{\alpha}{q^j} = \Sigma a_j \,.\, q^{(\tau - j)} \frac{\alpha}{q^\tau} = b \,.\, \frac{\alpha}{q^\tau}$$

en posant

$$b = \sum_{j=1}^{\tau} a_j q^{(\tau - j)} \,.$$

Calculons les limites de variation de l'entier b. On a, compte tenu des inégalités $0 \leqslant a_j < q$:

$$0 \leqslant b = \sum_{j=1}^{\tau} a_j q^{(\tau - j)} \leqslant (q - 1) \sum_{j=1}^{\tau} q^{(\tau - j)} = q - 1.$$

Donc la somme partielle dans $\omega = \Sigma a\mu$, due au groupement considéré, sera

$$b \frac{\alpha}{q^\tau} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant b < q^\tau ,$$

d'où nous concluons :

Une translation quelconque introduite par le multiplicateur sera de la forme

$$\omega = c_1 \frac{\alpha_1}{q_1} + c_2 \frac{\alpha_2}{q_2} + \dots + c_s \frac{\alpha_s}{q_s}; \qquad [1]$$

$q_1, q_2, \dots q_s$ sont chacun puissance d'un nombre premier et leur produit vaut p ($\mathcal{M} = p\mathrm{M}$) ; les c sont des entiers non négatifs et inférieurs aux dénominateurs correspondants :

$$0 \leqslant c_i < q_i. \qquad [2]$$

30. On vérifie immédiatement la proposition suivante :

Pour que la translation ω (donnée par [1] et les c satisfaisant à [2]) soit un α il faut et il suffit que tous les coefficients c soient nuls.

---

§ 3. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de plusieurs milieux homogènes.

31. *Lemme I :* Soient deux milieux $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{N}_1$ dont le produit est D ($\neq 0$). Si $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{N}_2$, respectivement égaux à $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{N}_1$, ont un point commun, leur produit est égal à D :

$$\mathcal{M}_2\mathcal{N}_2 = \mathrm{D} = \mathcal{M}_1\mathcal{N}_1.$$

32. *Lemme II :* Soit un milieu $\mathcal{M}$ admettant les diviseurs F et G, tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{M} = p\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_1 + \dots + \mathrm{F}_{p-1} \\ \mathcal{M} = q\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1 + \dots + \mathrm{G}_{q-1} \end{array}\right. \qquad [1]$$

Si chaque F_i et chaque G_j ont un point commun, tous les produits

$$\mathrm{H}_{ij} = \mathrm{F}_i\mathrm{G}_j \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots (p-1) \\ j = 0, 1, 2, \dots (q-1) \end{pmatrix}$$

sont des milieux homogènes égaux et l'on a

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{F} = q\mathrm{H} \\ \mathrm{G} = p\mathrm{H}. \end{array}\right.$$

En effet, tous les H_{ij} sont égaux d'après le lemme précédent.

De plus, on a d'une part

$$H_{0j} < F_0 \qquad [(j = 0, 1, \ldots (q-1)]$$

donc aussi

$$\sum_{j=0}^{q-1} H_{0j} \leqslant F_0 \qquad [2]$$

D'autre part, le système [1] montre que tout point de F_0 appartient à un G_j, donc aussi à un produit

$$F_0 G_j = H_{0j},$$

ce qui entraîne

$$F_0 \leqslant \sum_{j=0}^{q-1} H_{0j}. \qquad [3]$$

De [2] et [3] on tire

$$F_0 = \sum_{j=0}^{q-1} H_{0j}. \qquad [4]$$

On trouverait de même

$$G_0 = \sum_{i=0}^{p-1} H_{i0} \qquad [5]$$

L'ensemble H, étant le produit (non nul) de deux milieux homogènes, admet certainement pour période toute translation joignant deux quelconques de ses points. La relation [4] montre que le système des périodes de H est compris dans le module des périodes de F. De plus il est évident, toujours d'après la relation [4], que le système des périodes de H doit être un module de translations à n dimensions. Donc H est homogène. Les relations [4] et [5] s'écrivent

$$\begin{cases} F = qH \\ G = pH. \end{cases}$$

33. *Lemme III :* Soit

$$\mathfrak{M} = A_0 + A_1 + \ldots + A_p = B_0 + B_1 + \ldots + B_q\,; \qquad (A_i \doteq A,\ B_j = B).$$

Si A_0 et B_0 sont sans point commun, tout multiple de A_0 formé à l'aide de périodes $\boldsymbol{\beta}$ de B est sans point commun avec B_0.

Pour le voir, désignons par

$$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots]$$

le multiplicateur fournissant à partir de A_0 son multiple en question. Soit $A_0^{(1)}$ le milieu homogène engendré à partir de A_0 par la translation

β_1. $A_0^{(1)}$ est sans point commun avec B_0. Car, si P était ce point commun, il devrait exister une translation, multiple de β_1, amenant P en un point P_0 de A_0. β_1 étant une période de B_0, P_0 serait aussi un point de B_0, ce qui est impossible. Donc A_0 et $A_0^{(1)}$ n'ont pas de point commun. $A_0^{(1)}$ étant un diviseur de $\mathcal{M}$, le raisonnement peut être recommencé pour $A_0^{(1)}$ et B_0 (on se servira de la translation β_2) ; et ainsi de suite.

34. *Théorème : Si un milieu $\mathcal{M}$ contient des diviseurs* F *et* G *respectivement p fois et q fois, ces derniers admettent un diviseur commun* H *qui est contenu q' fois dans F, p' fois en* G, *p' et q' étant les quotients de p et q par un même diviseur k.*

*Le milieu $\mathcal{M}$ est égal à $kp'q'$*H *ou* $\frac{pq}{k}$H.

En particulier H *peut être égal à* F *ou à* G.

Démonstration : Posons

$$\mathcal{M} = F_0 + F_1 + \dots + F_{p-1} = G_0 + G_1 + \dots + G_{q-1}.$$

Si chaque F_i et chaque G_j ont un point commun, le lemme II (numéro 32) est applicable et montre que le théorème ci-dessus est valable avec $k = 1$.

Supposons donc qu'il existe un F et un G sans point commun. Le lemme II ne peut pas être utilisé. Si l'on a (F) = (G) la remarque faite à la fin du numéro 3 est applicable et montre que l'on a $p = q = k$.

Sinon nous allons montrer qu'il existe un milieu $\mathcal{N}$ diviseur de $\mathcal{M}$ et multiple commun de F et de G :

$$\begin{cases} \mathcal{M} = k\mathcal{N} \\ \mathcal{N} = p'F = q'G \end{cases}$$

et tel qu'on se trouve dans les conditions du lemme II.

Supposons donc que les modules de périodes (F) et (G) ne sont pas les mêmes. Choisissons dans le module de F une translation φ_1 non période de G et appliquons-la au milieu G. Cette opération nous fournit un certain milieu $G^{(1)}$. Répétons l'opération : choisissons dans le module de F une translation φ_2 non période de $G^{(1)}$ et appliquons-la au milieu $G^{(1)}$, ce qui engendre $G^{(2)}$; et ainsi de suite. L'opération peut être continuée jusqu'à ce qu'on arrive au milieu $G^{(i)}$ dont le module contient toutes les périodes de F. Bref $G^{(i)}$ s'obtient à partir de G par un multiplicateur $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i]$ dont toutes les translations sont des périodes de F et l'on a

$$(F) < (G^{(i)}). \qquad [1]$$

(Si toute période de F est une période de G on posera naturellement $G^{(i)} = G$.)

Le milieu $G^{(i)}$ étant obtenu, choisissons une période $\gamma_1^{(i)}$ de $G^{(i)}$ qui ne soit pas une période de F et appliquons $\gamma_1^{(i)}$ au milieu F. Ceci nous fournit un certain milieu $F^{(1)}$ multiple de F. Nous continuons de la même façon : nous choisissons une période $\gamma_2^{(i)}$ de $G^{(i)}$ qui ne soit pas une période de $F^{(1)}$, et nous l'appliquons au milieu $F^{(1)}$, ce qui fournit le milieu $F^{(2)}$. L'opération peut être continuée jusqu'à ce qu'on soit arrivé au milieu $F^{(j)}$ dont le module contient toutes les périodes de $G^{(i)}$. Bref $F^{(j)}$ s'obtient à partir de F par un multiplicateur $[\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(j)}, \ldots \gamma_j^{(i)}]$ dont toutes les translations sont des périodes de $G^{(i)}$ et l'on a

$$(G^{(i)}) \leqslant (F^{(j)}). \qquad [2]$$

Considérons une période quelconque $\varphi^{(j)}$ de $F^{(j)}$. Elle sera de la forme

$$\varphi^{(j)} = \varphi + a_1\gamma_1^{(i)} + \ldots + a_j\gamma_j^{(i)},$$

les a étant des entiers arbitraires et φ étant une période de F. En tenant compte de la relation [1] qui montre que φ est une période de $G^{(i)}$ nous concluons de l'égalité trouvée précédemment que $\varphi^{(j)}$ est une période de $G^{(i)}$. $\varphi^{(j)}$ désignant une période quelconque de $F^{(j)}$, ce résultat peut s'écrire

$$(F^{(j)}) \leqslant (G^{(i)}). \qquad [3]$$

Des relations [2] et [3] on tire

$$(F^{(j)}) = (G^{(i)}),$$

ce qui signifie que

$$F^{(j)} = G^{(i)}.$$

Posons

$$\mathfrak{N} = F^{(j)} = G^{(i)}.$$

$F^{(j)}$ et $G^{(i)}$ étant un multiple de F respectivement de G on aura

$$\mathfrak{N} = F_0' + F_1' + \ldots + F'_{p'-1} = G_0' + G_1' + \ldots + G'_{q'-1}\,; \qquad [4]$$

dans cette relation tous les F′ sont égaux aux F et tous les G′ aux G.

Montrons maintenant que chaque F' et chaque G' ont un point commun. Pour le voir, remarquons que le milieu $\mathfrak{N}$ s'obtient par l'application du multiplicateur $[\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i]$ à un G' quelconque, à G_0' par exemple. Si donc G_0' et F_0' par exemple n'avaient pas de point commun on pourrait appliquer le lemme III (numéro 33) et conclure que

$$F_0' . \mathfrak{N} = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc chaque F' a un point commun avec chaque G'. Le lemme II est applicable et montre qu'il existe un milieu H tel que

$$\begin{cases} F = F' = q'H \\ G = G' = p'H. \end{cases}$$

D'autre part $\mathfrak{N}$ est un diviseur de $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = k\mathfrak{N}.$$

De plus

$$\mathfrak{N} = p'F = q'G = p'q'H$$

$$\begin{cases} \mathfrak{M} = pF = kp'F \\ \mathfrak{M} = qG = kq'G \end{cases}$$

Le milieu $\mathfrak{M}$ ne peut se présenter de deux manières et en nombres différents comme somme de milieux égaux à F respectivement à G. Donc $p = kp'$, $q = kq'$.

35. *Théorème : Si deux milieux* F *et* G *admettent un diviseur commun* H *(non nul) ils admettent aussi un multiple commun.*

Démonstration : Soient

$$S_1 = [\mu_1(p_1), \dots \mu_r(p_r)]$$

et

$$S_2 = [\nu_1(q_1), \dots \nu_s(q_s)]$$

les multiplicateurs de translations ordonnées au moyen desquels se déduisent F et G de leur diviseur commun H. Appelons $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \dots$, $H^{(r)} = F$ les multiples de H successifs auxquels on parvient en appliquant le multiplicateur S_1 à H.

Deux cas sont possibles :

a) μ_1 est une période de G. Nous poserons $G^{(1)} = G$.

b) μ_1 n'est pas période de G. Certainement la translation $p_1\mu_1$ est une période de G, car G admet toutes les périodes de H et $p_1\mu_1$ en est une. L'application de μ_1 à G engendre donc un milieu $G^{(1)}$ au plus égal à p_1G.

Nous continuons de la même façon : si μ_2 est une période de $G^{(1)}$ nous poserons $G^{(2)} = G^{(1)}$, sinon appelons $G^{(2)}$ le milieu engendré à partir de $G^{(1)}$ par l'application de la translation μ_2. Remarquons que le milieu $G^{(1)}$ admet toutes les périodes de $H^{(1)}$: en effet une période quelconque de $H^{(1)}$ est de la forme $\alpha + a_1\mu_1$, α étant une période de H donc aussi de $G^{(1)}$ et a_1 un entier arbitraire. La translation $p_2\mu_2$ est une periode de $H^{(1)}$, donc aussi de $G^{(1)}$; nous en concluons que le milieu $G^{(2)}$ défini précédemment est constitué par au plus p_2 milieux égaux à $G^{(1)}$. On continue de la même façon et on arrive finalement à un milieu $G^{(r)}$ multiple de G ($G^{(r)}$ est constitué par au plus $p_1p_2 \ldots p_r$ milieux égaux à G). Mais $G^{(r)}$ est aussi un multiple de F : en effet d'une part toute période α de H et toute translation μ de S_1 sont des périodes de $G^{(r)}$ et d'autre part toute période de F est de la forme $\alpha + \Sigma a\mu$: $G^{(r)}$ est un multiple de G et aussi de F. L'existence d'un commun multiple est donc démontrée.

36. *Théorème : Si deux milieux admettent un multiple commun (non infini) il existe un milieu dont les multiples sont les mêmes que les multiples communs aux deux milieux proposés.*

Démonstration : Appelons F et G les deux milieux admettant un multiple commun $\mathcal{M}$ non infini. Si l'un des milieux F, G est un multiple de l'autre il sera dejà le milieu dont l'existence est affirmée dans le théorème.

Sinon soit ν_1 une période de G, donc aussi de $\mathcal{M}$, que F n'admet pas ; l'application de ν_1 à F fournit un milieu $F^{(1)}$. Montrons que tout multiple commun à F et à G est aussi multiple commun à $F^{(1)}$ et G. En effet soit $\mathcal{M}_1$ un multiple quelconque commun à F et G. Par l'emploi de la translation ν_1 les milieux F dont est composé $\mathcal{M}_1$ se divisent en cycles à l'intérieur desquels s'opèrent des permutations. Chaque cycle correspond à un milieu $F^{(1)}$ qui apparaît de cette façon comme diviseur de $\mathcal{M}_1$. Donc $\mathcal{M}_1$ est multiple commun à $F^{(1)}$ et G. (D'ailleurs on le constate directement par la considération des périodes de $F^{(1)}$ et de $\mathcal{M}_1$).

Si le module des périodes de $F^{(1)}$ contient toutes les périodes de G, le milieu $F^{(1)}$ est un multiple de G ; d'après la propriété démontrée précédemment le milieu $F^{(1)}$ sera le milieu dont l'existence est affirmée dans le théorème.

Dans le cas contraire on continue de la même façon : à l'aide d'une période ν_2 de G on forme un milieu $F^{(2)}$ multiple de $F^{(1)}$, qui jouira de la propriété suivante : les multiples communs à F et G sont les mêmes que ceux communs à $F^{(2)}$ et G. On reprend le raisonnement. La suite des milieux $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, ... obtenus de cette façon a certainement une fin, puisque d'après la propriété même de cette suite tout milieu de cette suite est un diviseur de $\mathcal{M}$; la suite s'arrêtera au plus tard à $\mathcal{M}$ lui-même.

L'existence d'un milieu jouissant des propriétés indiquées dans le théorème est donc démontrée. Nous appellerons ce milieu *le plus petit commun multiple des milieux* F *et* G.

37. *Théorème : Si deux milieux admettent un diviseur commun (non nul), il existe un milieu dont les diviseurs sont les mêmes que les diviseurs communs aux deux milieux proposés.*

Démonstration : On utilise un procédé analogue à celui employé au numéro précédent. Appelons F et G les deux milieux en question et soit H leur diviseur commun considéré. Si H est multiple de tout autre diviseur commun à F et G, c'est déjà ce milieu H qui aura la propriété indiquée dans le théorème.

Sinon choisissons un milieu K qui soit diviseur commun à F et G et tel que H ne soit pas divisible par K. Chacun des milieux F et G est un multiple commun à H et K ; d'après le théorème précédent chacun des milieux F et G est aussi un multiple du plus petit commun multiple de H et K. Appelons M_1 ce plus petit commun multiple de H et K. On recommence le raisonnement : si tout diviseur commun à F et G est un diviseur de M_1, c'est M_1 qui sera le milieu dont l'existence est affirmée dans le théorème.

Sinon on considère un diviseur L commun à F et G et tel que

M_1 ne soit pas divisible par L. Soit M_2 le plus petit commun multiple de M_1 et L ; F et G sont tous les deux divisibles par M_2. On continue le raisonnement. La suite des milieux obtenus H, M_1, M_2, ... jouit des propriétés suivantes : tout milieu de cette suite est un multiple des milieux précédents et est un diviseur commun à F et à G ; cette suite a donc une fin ; on arrive à un milieu D qui divise F et G et qui est tel que tout diviseur commun à F et à G le divise. D'ailleurs, D étant un diviseur de F et de G, tout diviseur de D sera diviseur commun à F et à G.

Nous appellerons D *le plus grand commun diviseur des milieux* F *et* G.

38. *L'existence pour deux milieux d'un multiple commun non infini ou d'un diviseur commun non nul entraîne l'existence du plus petit commun multiple et du plus grand commun diviseur.*

39. La proposition suivante est immédiate :

Soient F *et* G *deux milieux admettant des multiples communs (non infinis) et des diviseurs communs (non nuls). Désignons par* φ *et* γ *une période quelconque de* F *respectivement de* G, *par* D *leur plus grand commun diviseur, par* $\mathcal{M}$ *leur plus petit commun multiple. Le module du plus grand commun diviseur est le produit des modules des deux milieux :*

$$(D) = (F)(G)\,;$$

le module du plus petit commun multiple $\mathcal{M}$ *de* F *et de* G *sera constitué par l'ensemble des translations* μ *de la forme*

$$\mu = \varphi + \gamma\,.$$

40. L'extension de ces résultats à un nombre fini quelconque de milieux est immédiate :

Théorème : Si plusieurs milieux ont un diviseur commun non nul ou un multiple commun non infini, il existe deux milieux que nous appellerons l'un le plus grand commun diviseur et l'autre le plus petit commun multiple de ces milieux et qui jouissent de ces propriétés : les diviseurs du premier et les multiples du second sont respectivement les mêmes que les diviseurs communs et les multiples communs aux milieux proposés.

41. *Théorème : Soient les milieux* F *et* G *admettant un diviseur commun* D *et s'en déduisant respectivement par les multiplicateurs de translations ordonnées*

$$[\mu_1(p_1), \mu_2(p_2), \dots \mu_r(p_r)]$$
$$[\nu_1(q_1), \nu_2(q_2), \dots \nu_s(q_s)],$$

les p *et les* q *étant des nombres premiers. Si aucun* p *n'est égal à un* q, D *est le plus grand commun diviseur de* F *et* G.

La démonstration est immédiate.

42. *Théorème : Soient deux milieux* F *et* G *admettant des diviseurs communs et des multiples communs. Désignons par* D *et* $\mathfrak{M}$ *leur plus grand commun diviseur respectivement leur plus petit commun multiple et soit*

$$S = [\nu_1(q_1), \dots \nu_s(q_s)]$$

le multiplicateur de translations ordonnées menant de G *à* $\mathfrak{M}$.

Dans ces conditions, le système S *constitue un multiplicateur aussi pour* D *et fournit, appliqué à* D, *le milieu* F.

Démonstration : Montrons d'abord que S est un multiplicateur pour D :

a) $q_1\nu_1$ est le premier multiple de ν_1 qui est une période de D. En effet, la translation $k\nu_1$ avec $0 < k < q_1$ n'est pas une période de D, car si elle l'était elle le serait aussi pour G qui est un multiple de D.

Rappelons-nous maintenant que toutes les translations ν sont des périodes de F. Donc la translation $q_1\nu_1$ qui d'après le multiplicateur S est une période de G, appartient au module produit des deux modules de F et G : $q_1\nu_1 < (F)(G)$. Mais d'après le numéro 39 le second membre de cette inégalité n'est autre que (D). Donc $q_1\nu_1$ est une période de D.

b) $q_2\nu_2$ est le premier multiple de ν_2 qui est une période du milieu $D^{(1)}$ engendré à partir de D par la translation ν_1.

Pour le voir, désignons par $G^{(1)}$ le milieu obtenu à partir de G par l'application de la translation ν_1 et montrons que $D^{(1)}$ est le plus grand commun diviseur des milieux $G^{(1)}$ et F. $D^{(1)}$ étant un diviseur commun aux milieux F et $G^{(1)}$, il suffit de montrer que toute translation appartenant au module (F)(G$^{(1)}$) (qui est celui du plus grand commun diviseur) est une période de D$^{(1)}$. Soit donc $\gamma + a\nu_1$ une période de G$^{(1)}$ et supposons qu'elle est aussi une période de F ; γ désigne une période quelconque de G et a un entier quelconque. ν_1 étant une période de F il faut que γ le soit également. De ce résultat nous concluons que γ est une période commune aux milieux G et F, donc une période de D, et ceci nous montre que la translation $\gamma + a\nu_1$ considérée plus haut est bien une période de D$^{(1)}$. Donc D$^{(1)}$ est le plus grand commun diviseur de G$^{(1)}$ et F.

Ceci étant admis, par un raisonnement analogue à celui qui se trouve dans a) on vérifie que $q_2\nu_2$ est le premier multiple de ν_2 qui est une période du milieu D$^{(1)}$.

En continuant de la même façon on constate que le système S constitue effectivement un multiplicateur pour le milieu D.

Montrons maintenant que le multiplicateur S, appliqué à D, fournit F. Il faut montrer que le système de toutes les translations de la forme

$$\delta + \Sigma c\nu \qquad \begin{pmatrix} \delta \text{ période de D} \\ c \text{ entiers arbitraires} \end{pmatrix} \qquad [1]$$

(qui est le module du milieu multiple de D obtenu à l'aide de S) coïncide avec le module de F.

Tout δ est une période de F, tout ν l'est également, donc toute translation de la forme [1] est une période de F.

Inversement, soit φ une période arbitraire de F. Elle est de la forme [1]. En effet, φ étant une période du plus petit commun multiple $\mathcal{M}$, on peut écrire

$$\varphi = \gamma + \Sigma a\nu \qquad \begin{pmatrix} \gamma \text{ période de G} \\ a \text{ entiers} \end{pmatrix}.$$

De cette relation on tire

$$\gamma = \varphi - \Sigma a\nu \; ; \qquad [2]$$

φ et ν étant des périodes de F, on conclut de [2] que γ l'est également. Donc γ est un δ et la relation $\varphi = \gamma + \Sigma a\nu$ montre que φ peut s'écrire sous la forme [1].

§ 4. Famille des milieux homogènes commensurables entre eux.

43. *Définitions :* Nous appellerons « *rapport d'un milieu* M_1 *à l'un de ses diviseurs non nuls* M_2 » le nombre de fois qu'il le contient.

Etant donnés deux milieux M_1, M_2 qui admettent un même diviseur D non nul, nous appellerons « *rapport de* M_1 *à* M_2 » le quotient des nombres de fois qu'ils le contiennent.

Deux milieux M_1, M_2 admettant un rapport au sens qui vient d'être défini seront dits *commensurables entre eux.*

Pour justifier la définition du rapport de deux milieux M_1 et M_2 il faut encore montrer que ce rapport est indépendant du diviseur commun à M_1 et M_2 qui intervient dans la définition.

Soient donc D et E deux diviseurs communs aux milieux M_1 et M_2 :

$$\left\{\begin{array}{ll} M_1 = m_1 D, & M_1 = n_1 E \\ M_2 = m_2 D, & M_2 = n_2 E. \end{array}\right. \qquad [1]$$

D'après le numéro 34 les milieux D et E, admettant le multiple commun M_1 par exemple, admettent un diviseur commun H contenu m fois dans D et n fois dans E :

$$\left\{\begin{array}{l} D = mH \\ E = nH. \end{array}\right.$$

Le système d'égalités [1] s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{l} M_1 = m_1 mH = n_1 nH \\ M_2 = m_2 mH = n_2 nH. \end{array}\right.$$

Un milieu homogène ne pouvant pas se présenter comme somme, de deux manières différentes et en nombres différents, de milieux égaux à H, nous concluons du système précédent que l'on a

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 m = n_1 n \\ m_2 m = n_2 n, \end{array}\right.$$

d'où

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Cette égalité démontre l'indépendance du rapport $\frac{M_1}{M_2}$ du diviseur commun considéré.

44. *Théorème : Si deux milieux M_1 et M_2 sont commensurables avec un même milieu U, ils le sont entre eux et leur rapport est égal au quotient de leurs rapports à* U.

Par hypothèse les milieux M_1 et U admettent un diviseur commun V_1 ; de même M_2 et U admettent un diviseur commun V_2. D'après le numéro 34 les milieux V_1 et V_2, admettant le multiple commun U admettent un diviseur commun V. Le milieu V sera donc un diviseur commun aux troix milieux M_1, M_2 et U :

$$M_1 = m_1 V, \qquad M_2 = m_2 V, \qquad U = uV.$$

De ces trois égalités on tire

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{m_1}{u}}{\frac{m_2}{u}} = \frac{\frac{M_1}{U}}{\frac{M_2}{U}}.$$

45. *Définition :* Soit $\mathcal{F}$ une famille de milieux homogènes possédant les propriétes suivantes :

1° Deux milieux quelconques de la famille $\mathcal{F}$ sont commensurables.

2° Tout milieu commensurable avec un milieu de $\mathcal{F}$ appartient également à la famille $\mathcal{F}$.

Bref $\mathcal{F}$ est une famille de tous les milieux commensurables entre eux.

La définition suivante de la mesure d'un milieu de $\mathcal{F}$ s'impose : nous choisissons d'une façon arbitraire un milieu U de $\mathcal{F}$ auquel nous attachons la mesure 1. Cela étant fait, nous adoptons pour mesure d'un milieu quelconque de $\mathcal{F}$ son rapport à U :

$$m(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{U} \qquad (\mathfrak{M} \text{ milieu de } \mathcal{F}).$$

Considérons d'abord la somme d'un nombre fini quelconque de milieux $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots \mathfrak{M}_k$, tous ces milieux $\mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots k$) étant des milieux de $\mathcal{F}$:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_k.$$

Appelons D le plus grand commun diviseur des milieux $\mathcal{M}_i$.
On aura

$$\mathcal{M}_i = m_i\mathrm{D} \qquad (i = 1, \ldots k).$$

On voit que l'ensemble $\mathcal{M}$, somme des $\mathcal{M}_i$, sera constitué par $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$ milieux égaux à D. Ceci montre que si $\mathcal{M}$ est un milieu homogène, il est un multiple fini de D et appartient par conséquent à la famille $\mathcal{F}$. De plus, on voit qu'une pareille famille $\mathcal{F}$ est au moins semi-mesurable.

La question se pose de rechercher si une famille $\mathcal{F}$ est mesurable.

Considérons d'abord un *cas particulier :* si une famille est formée à partir d'un milieu $\mathcal{M}$ qui n'a pas de diviseur (non nul), mais qui a un multiple (donc une infinité), tout milieu de la famille sera la somme d'un nombre *fini* de milieux égaux à $\mathcal{M}$; un ensemble de points somme d'une infinité de milieux de la famille sera la somme d'une *infinité* de milieux égaux à $\mathcal{M}$ et ne pourra pas appartenir à la famille. Donc *cette famille sera mesurable.*

Considérons maintenant, d'une façon plus générale, une infinité énumérable de milieux de $\mathcal{F}$: M_1, M_2, ... et supposons que leur somme ΣM_i fait partie de $\mathcal{F}$. Posons

$$M = M_1 + M_2 + \ldots\ldots$$

Remarquons d'abord que M_1 est inclus dans M, par conséquent M est un multiple fini ou infini de M_1. Mais M_1 et M étant commensurables, M ne peut être qu'un multiple *fini* de M_1. Il existe donc un certain multiplicateur menant de M_1 à M ; les translations multiplicatrices ordonnées, *notées dans l'ordre inverse,* sont $\mu_1(p_1)$, $\mu_2(p_2)$, ... $\mu_{i_1}(p_{i_1})$, les p étant les entiers correspondants. On aura d'après cela

$$M = p_1 p_2 \ldots . p_{i_1} M_1 .$$

Désignons par H_{i_1}, H_{i_1-1}, H_{i_1-2}, ... H_1 le milieu M_1 et ses multiples successivement formés :

$$\begin{aligned} H_{i_1} &= M_1 \\ H_{i_1-1} &= p_{i_1} M_1 \\ H_{i_1-2} &= p_{i_1-1} p_{i_1} M_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_1 &= p_2 p_3 \ldots p_{i_1} M_1 \end{aligned}$$

Considérons la suite

$$M, \mu_1, H_1, \mu_2, H_2, \mu_3, H_3, \ldots\ldots\ldots, \mu_{i_1}, H_{i_1} = M_1.$$

Parcourons-la de droite à gauche. Le μ qui se trouve entre deux H immédiatement voisins, appliqué au H de droite, fournit le H de gauche.

Cela posé, désignons par D_2 le plus grand commun diviseur de M_1 et M_2 ; M_1 se déduit de D_2 par un système de translations ordonnées qui, notées dans l'ordre inverse, sont μ_{i_1+1} μ_{i_1+2}, ... μ_{i_2}. Demandons-nous d'abord, quelles sont les translations multiplicatrices qui, appliquées à D_2, donnent M_2. Rappelons-nous que le multiplicateur qui peut être utilisé pour le passage de D_2 à M_2, est celui qui mène de M_1 au plus petit commun multiple de M_1 et M_2 (numéro 42). En vertu du fait que M est un multiple commun à M_1 et M_2 et que les translations multiplicatrices μ_1, μ_2, ... μ_{i_1} mènent de M_1 à M, le multiplicateur qui, appliqué à D_2, fournira M_2, sera constitué par quelques-unes des translations résultantes de μ_1, ... μ_{i_1}.

D_2 et M_3 ont un plus grand commun diviseur D_3 ; nous désignons par μ_{i_2+1}, ... μ_{i_3} le système multiplicateur qui, appliqué à D_3 fournit D_2 ; comme plus haut, M_3 est donné à partir de D_3 au moyen de certaines résultantes des translations μ_1, μ_2, ... μ_{i_2}.

Comme précédemment, nous désignons par des H affectés des indices correspondants les multiples successifs de D_2 respectivement de D_3 :

$$\left\{\begin{array}{l} H_{i_2} = D_2 \\ H_{i_2-1} = p_{i_2} D_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{i_1+1} = p_{i_1+2} \ldots\ldots p_{i_2} D_2 \\ H_{i_1} = M_1 = p_{i_1+1} \ldots\ldots p_{i_2} D_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} H_{i_3} = D_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ H_{i_2} = D_2 = p_{i_2+1} \ldots\ldots p_{i_3} D_3 \end{array}\right.$$

En continuant de la même façon on obtient la suite illimitée suivante :

$$M, \mu_1, H_1, \mu_2, H_2, \ldots\ldots \mu_{p-1}, H_{p-1}, \mu_p, H_p, \ldots \mu_{s-1}, H_{s-1}, \mu_s, H_s \ldots$$

Tout μ qui se trouve entre deux H immédiatement voisins fournit, appliqué au H de droite, le H de gauche. Autrement dit : μ_s appliqué à H_s engendre H_{s-1}.

Remarquons encore qu'on a pour toute valeur de s

$$M = p_1 p_2 \ldots p_s H_s = H_s^{(1)} + H_s^{(2)} + \ldots + H_s^{(p_1 \ldots p_s)}.$$

Nous désignons par γ_s une période quelconque de H_s et par μ une période quelconque de M. Remarquons que H_s admet toutes les périodes μ_{s+1}, μ_{s+2}, ... Pour simplifier, nous faisons l'hypothèse suivante :

Tout γ_s peut être représenté par une expression de la forme

$$\gamma_s = \sum_{i=s+1}^{\infty} c_i \mu_i, \qquad (0 \leqslant c_i < p_i), \tag{1}$$

les entiers c non nuls étant en nombre fini. D'une façon analogue tout μ se présente sous la forme

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu_i \qquad (0 \leqslant c_i < p_i) \tag{2}$$

les entiers c non nuls toujours en nombre fini.

Donc le système de tous les γ_s (s ayant une valeur fixe) coincide avec l'ensemble de toutes les formes linéaires [1] ; la remarque analogue s'applique au système de tous les μ.

Ces hypothèses étant admises, soit P un point quelconque de M. Choisissons d'une façon arbitraire un autre point Q de M. La translation **PQ** étant un μ, on a

$$\mathbf{PQ} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu_i \qquad (0 \leqslant c_i < p_i).$$

Les coefficients c figurant au second membre de cette égalité sont détérminés d'une façon *univoque :* en effet, si l'on avait encore

$$\mathbf{PQ} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i' \mu_i \qquad (0 \leqslant c_i' < p_i),$$

on pourrait en tirer

$$\sum_{i=1}^{\infty} (c_i - c_i') \mu_i = 0$$

avec

$$0 \leqslant |c_i - c_i'| < p_i,$$

ce qui entraîne immédiatement $c_i = c_i'$ pour toutes les valeurs de i en question.

Inversement, tout système d'entiers $c_1, c_2, \ldots\ldots$ avec $0 \leqslant c_i < p_i$, satisfaisant de plus à la condition de ne comprendre qu'un nombre limité de termes non nuls, définit une translation $\Sigma c_i \mu_i$ qui, appliquée à P, détermine un point Q de M. Bref : le point P étant fixé une fois pour toutes, il existe une correspondance réciproque et univoque entre les points Q de M et les systèmes $[c_1, c_2, \ldots]$ (ces systèmes satisfaisant aux conditions énoncées plus haut).

Définissons maintenant une représentation géométrique de l'ensemble M. Nous le faisons par la convention suivante : Q étant le point obtenu à partir du point P par la translation $\sum_{i=1}^{i=k} c_i \mu_i$, nous lui faisons correspondre (sur un axe quelconque) le point Q′ d'abscisse

$$\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{c_k}{p_1 \ldots p_k}. \qquad [3]$$

De cette façon correspond à tout point Q de M par l'intermédiaire de son système $[c_1, \ldots]$ un certain point de l'intervalle (0, 1) (premier point compris, dernier exclu).

De plus, remarquons que si un nombre se présente sous la forme [3], il ne le fait que d'une seule façon. Donc tout point d'abscisse [3] détermine un certain point de M.

L'ensemble de tous les points dont les abscisses ont la forme [3] fait partie de l'ensemble de tous les rationnels. Il est partout dense dans (0, 1). Nous l'appellerons E et nous pouvons dire : entre les points de E et ceux de M existe une correspondance réciproque et univoque.

Revenons aux translations de la forme

$$\omega = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_s\mu_s \qquad [4]$$

avec les conditions $0 \leqslant c_i < p_i$. Il n'y a donc que $q_s = p_1 p_2 \ldots p_s$ systèmes $[c_1, \ldots, c_s]$ distincts. Appelons $[c_1, \ldots c_s]$ et $[c'_1, \ldots c'_s]$ deux de ces q_s systèmes et ω et ω' les translations [4] correspondantes. Par un raisonnement facile on vérifie la proposition suivante : pour que la différence $\omega - \omega'$ soit un γ_s, il faut et il suffit que l'on ait $c_i = c'_i$ $(i = 1, 2, \ldots s)$. Donnons une interprétation géométrique à cette proposition.

Posons, comme plus haut, $M = q_s H_s = H_s^{(1)} + H_s^{(2)} + \ldots H_s^{(q_s)}$; soient $H_s^{(i)}$ et $H_s^{(j)}$ les milieux H_s auxquels appartient le point P transformé par ω respectivement ω'. *Les indices i et j sont différents.* Autrement dit : pour deux systèmes $[c_1, \ldots . c_s]$ distincts (et choisis parmi les q_s systèmes admissibles) les point P transformé par la translation [4] appartient à deux milieux H_s distincts (s étant fixe).

En tenant compte du fait qu'il y a autant de systèmes $[c_1, \ldots c_s]$ qu'il y a de milieux H_s (leur nombre commun est q_s) nous concluons du résultat précédent que la translation ω, appliquée au point P, détermine d'une façon univoque dans chaque $H_s^{(j)}$ un point $P^{(j)}$ $(j=1, \ldots s)$. Le milieu $H_s^{(j)}$ correspondant s'obtient par l'application au point $P^{(j)}$ de tous les γ_s. En combinant ceci avec [1] on trouve : l'ensemble des translations de la forme

$$c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_s\mu_s + \sum_{i=s+1}^{\infty} x_i\mu_i \qquad [5]$$

(les entiers x variables et ceux non nuls en nombre fini), appliqué au point P, fournit un des q_s milieux H_s.

Cherchons maintenant l'ensemble de points qui correspond à un des q_s milieux H_s dans E. Considérons une translation de la forme [5]

$$c_1\mu_1 + \ldots . + c_s\mu_s + \sum_{i=s+1}^{i=k} x_i\mu_i. \qquad [6]$$

Il lui correspond, d'après nos conventions, le point d'abscisse

$$\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{c_s}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s} + \frac{x_{s+1}}{p_1 \cdots p_s p_{s+1}} + \ldots + \frac{x_k}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k} =$$
$$= \frac{c_1}{p_1} + \ldots + \frac{c_s}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s} + \frac{1}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s}\left[\frac{x_{s+1}}{p_{s+1}} + \ldots + \frac{x_k}{p_{s+1} \cdots p_k}\right].$$

Si l'on donne à k et aux x toutes les valeurs admissibles, l'expression qui se trouve entre les crochets définit un certain ensemble de points rationnels qui appartient à l'intervalle (0, 1) et qui y est partout dense.

On en conclut que l'ensemble qui correspond dans E au H_s considéré, est le produit de l'intervalle

$$\left(\frac{c_1}{p_1} + \ldots + \frac{c_s}{p_1 \cdots p_s},\ \frac{c_1}{p_1} + \ldots + \frac{c_s + 1}{p_1 \cdots p_s}\right) \qquad [7]$$

(premier point compris, dernier exclu), par E. Observons que l'étendue de l'intervalle [7] est $\dfrac{1}{p_1 \cdots p_s}$; en vertu de la relation $M = p_1 \ldots p_s H_s$ c'est précisément la mesure de H_s si l'on prend comme unité M.

Tout milieu H_s détermine un intervalle [7]. Inversement par tout intervalle de la forme [7] est déterminé d'une façon univoque un certain des q_s milieux H_s. Appelons $\mathcal{J}$ l'ensemble de tous les intervalles de la forme [7]. Nous voyons qu'il existe une correspondance univoque et réciproque entre les milieux $H_s^{(j)}$ et les intervalles de $\mathcal{J}$. Cette correspondance possède les propriétés suivantes :

a) Si deux ensembles $H_s^{(j)}$ sont sans point commun, leurs intervalles le sont également.

b) Si un milieu H est inclus dans un autre, son intervalle est inclus dans celui de l'autre.

c) Si un milieu H est la somme d'un nombre limité d'autres, son intervalle est la somme de leurs intervalles.

d) M_t étant donné, il existe parmi les milieux $H_s^{(j)}$ un milieu H_s diviseur de M_t (on sait que M_t est un multiple de $D_t = H_{i_t}$ par exemple ; il suffit donc de prendre $s = i_t$). Autrement dit : M_t est constitué par la réunion de quelques-uns des q_s milieux H_s. Nous concluons de là que M_t est représenté par un nombre fini d'intervalles de $\mathcal{J}$.

Cela étant posé, nous allons montrer que la famille $\mathcal{F}$ considérée n'est pas mesurable. Pour le voir, rangeons les points de E en une suite ordonnée :

$y_1, y_2, y_3, \dots$ (l'ensemble E faisant partie de l'ensemble des rationnels est dénombrable). A tout y_n nous faisons correspondre un intervalle I_n pris dans $\mathcal{J}$, contenant y_n et de longueur inférieure à $2^{-n}\varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitraire. La somme des longueurs des I_n est inférieure à ε. On voit immédiatement qu'il est possible d'extraire de la suite I_n une suite partielle I'_n jouissant des mêmes propriétés que I_n et telle que deux intervalles I'_n, correspondant à deux valeurs de l'indice n différentes, n'aient pas de point commun. Tout l'ensemble E est couvert par l'ensemble $\Sigma I'_n$ et l'on a $\Sigma |I'_n| < \varepsilon$. Appelons H_n celui des milieux H qui correspond à l'intervalle I'_n et rappelons-nous qu'en prenant M pour unité, la mesure de H_n est précisément la longueur de I'_n. On aura donc

$$M = \Sigma H_n \text{ avec mes.} M = 1, \ \Sigma \text{mes.} H_n < \varepsilon.$$

Dans le cas général la famille des milieux sera donc seulement semi-mesurable.

§ 5 Extension a certains milieux de translation.

46. Soit $\mathcal{F}$ une famille de milieux homogènes possédant les propriétés suivantes :

1°) Deux milieux quelconques de $\mathcal{F}$ sont commensurables.

2°) Tout milieu commensurable avec un milieu de $\mathcal{F}$ appartient également à la famille $\mathcal{F}$.

Chacun des milieux H de $\mathcal{F}$ est caractérisé par l'ensemble T de ses périodes. Considérons un ensemble A *indépendant de chaque* T (chapitre I, numéro 5). Effectuons les translations de chaque T sur A; nous formons ainsi des milieux de translation $\mathfrak{M}$, dont nous dirons de l'ensemble qu'il *dérive d'une famille de milieux homogènes commensurables*. Naturellement chacun de ces milieux $\mathfrak{M}$ n'est pas fixé en position ; il n'est défini qu'à une translation près.

En particulier, l'ensemble A est indépendant de chaque T si tous les T sont des sous-modules d'un même module $\mathfrak{G}$ et si A est indépendant de $\mathfrak{G}$.

Dans la suite nous ne considérons que des milieux de translation appartenant à une famille qui dérive d'une famille de milieux homogènes commensurables.

Les notions de diviseur, de multiple, de rapport de deux milieux s'étendent aux milieux de notre famille de milieux de translation.

47. *Théorème : Si* $\mathfrak{M}_2$ *est inclus dans* $\mathfrak{M}_1$, *le module* T_2 *est un sous-module de* T_1.

Démonstration : Un vecteur joignant deux points quelconques de $\mathfrak{M}_1$ peut toujours être mis sous la forme $\alpha + \tau_1$, α étant un vecteur joignant deux points de A et τ_1 une translation de T_1. Une translation quelconque τ_2 de T_2 étant donnée, choisissons deux points P_1, P_2 de $\mathfrak{M}_2$, (donc aussi de $\mathfrak{M}_1$), tels que $P_1P_2 = \tau_2$. D'autre part on a $P_1P_2 = \alpha + \tau_1$, donc $\alpha = \tau_2 - \tau_1$. Remarquons maintenant que la translation $\tau_2 - \tau_1$ fait partie du module T définissant le plus petit commun multiple de T_1 et T_2 [numéro 39].

A étant indépendant de T, la relation $\alpha = \tau_2 - \tau_1$ ne peut avoir lieu que si $\tau_1 = \tau_2$.

48. *Lemme :* Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1$ deux milieux (de la famille considérée). Si $\mathfrak{M}_1$ est égal à $\mathfrak{M}$ et si de plus $\mathfrak{M}_1$ fait partie de $\mathfrak{M}$, ils coïncident complètement.

En effet, $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}$ étant égaux, il existe une translation $\mathfrak{T}$ qui, appliquée à $\mathfrak{M}$, fournit $\mathfrak{M}_1$. Ce dernier étant par hypothèse inclus dans $\mathfrak{M}$, on en conclut que $\mathfrak{T}$ est une période de $\mathfrak{M}$. Mais $\mathfrak{T}$ ne peut pas être une période d'un milieu de translation sans que $-\mathfrak{T}$ le soit aussi. Donc $-\mathfrak{T}$ aussi est une période de $\mathfrak{M}$.

Montrons maintenant que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1$ coïncident. Il faut montrer que tout point P de $\mathfrak{M}$ est aussi un point de $\mathfrak{M}_1$. Pour le voir, appliquons à P la translation $-\mathfrak{T}$ qui le place en un point P′. $-\mathfrak{T}$ étant une période de $\mathfrak{M}$, le point P′ sera encore un point de $\mathfrak{M}$. En vertu du fait que la translation $\mathfrak{T}$, appliquée à un point quelconque de $\mathfrak{M}$, (donc aussi au point P′) fournit un point de $\mathfrak{M}_1$, P est un point de $\mathfrak{M}_1$.

49. *Théorème :* Soient H, H_1, H_2, . . . des milieux homogènes appartenant à la famille commensurable dont dérive la famille des milieux de translation considérée. Appelons $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, . . . les milieux de translation correspondants. *Pour que l'on ait*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots,$$

il faut et il suffit que

$$H = H_1 + H_2 + \dots$$

Démonstration : a) La condition est suffisante. Supposons $H = \Sigma H_i$. Choisissons dans chaque H_i un point P_i et dans H un point P. Appliquons à l'ensemble A les translations $\mathbf{PP}_i$. Nous obtenons des ensembles A_i égaux à A. Si nous effectuons sur chaque point de A_i toutes les translations du module (H_i) et sur chaque point de A toutes les translations de (H), nous obtenons des milieux homogènes égaux à H_i respectivement à H et dont la somme est le milieu de translation $\mathfrak{M}_i$ respectivement $\mathfrak{M}$. De plus, on voit aisément que l'on a $\mathfrak{M} = \Sigma\mathfrak{M}$.

b) La condition est nécessaire. Supposons $\mathfrak{M} = \Sigma\mathfrak{M}_i$. Désignons par A, A_i les ensembles, égaux entre eux, tels que l'application des modules (H) respectivement (H_i) à A respectivement A_i donne $\mathfrak{M}$

respectivement $\mathfrak{M}_i$. Choisissons un point fixe P de A et désignons d'une façon générale par P_i un point quelconque de A_i. Soit H le milieu homogène obtenu par l'application du module (H) au point P.

Tout ensemble A_i admet un et un seul point P_i appartenant au milieu H :
Pour le voir, appliquons à tout point P_i de A_i le module (H), ce qui fournit un milieu $\mathfrak{M}^{(i)}$ égal à $\mathfrak{M}$ et inclus dans $\mathfrak{M}$. D'après le lemme démontré au numéro 48 les milieux $\mathfrak{M}^{(i)}$ et $\mathfrak{M}$ coïncident, ce qui justifie notre affirmation.

Considérons maintenant la suite des points $P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$ appartenant tous au milieu homogène H et désignons par $H_1, H_2, \ldots H_i, \ldots$ les milieux homogènes obtenus à partir des P_i par l'application des modules (H_i) correspondants. En vertu du fait que tous les (H_i) sont des sous-modules de (H) [numéro 47], tous les H_i sont inclus dans le milieu H. De plus, H_i faisant partie de $\mathfrak{M}_i$ et les $\mathfrak{M}_i$ étant sans point commun deux à deux, les H_i le sont également. Donc l'ensemble ΣH_i fait partie du milieu H.

Montrons maintenant que tout point P′ de H est un point de ΣH_i. Car s'il ne l'était pas, il devrait appartenir à un milieu H_j' obtenu à l'aide de (H_j) à partir d'un point P_j' de A_j et distinct de P_j. H_j', donc aussi P_j, serait inclus dans H, ce qui conduit à une contradiction, étant donné que H ne peut pas contenir les deux points P_j et P_j', distinct de P_j.

$$\text{On a donc bien } H = \Sigma H_i.$$

En particulier, *pour que* $\mathfrak{M} = p\mathfrak{M}_0$, *il faut et il suffit que les milieux homogènes correspondants satisfassent à l'égalité* $H = pH_0$.

50. *Théorème : Pour que* $\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2} = \dfrac{p}{q}$, *il faut et il suffit que* $\dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{p}{q}$,

H_1 *et* H_2 *étant les milieux homogènes qui correspondent à* $\mathfrak{M}_1$ *et à* $\mathfrak{M}_2$.

51. *Conclusion : La famille considérée de milieux de translation est mesurable ou semi-mesurable comme celle de milieux homogènes dont elle dérive.*