MYRTIE COLLIER

Sur quelques points de la théorie des fonctions entières ou méromorphes d'ordre fini

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1930

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__117__1_0>

N° D'ORDRE : 70
Série U.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
(MENTION : *Sciences mathématiques*)

PAR

Myrtie COLLIER
Ancien professeur assistant de mathématiques
à l'Université de California à Los Angelès

1re THÈSE. — SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES D'ORDRE FINI.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DE LA FACULTÉ.

28 AVRIL 1930
Soutenues le ~~1930~~, devant la Commission d'Examen.

MM. VALIRON. *Président.*
CERF
~~[illegible]~~
Roussel
Examinateurs.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1930

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

MM.

Doyen	E. ROTHÉ, Professeur de Physique du Globe.	
Doyens honoraires......	E. BATAILLON, P.-Th. MULLER.	
Professeurs honoraires...	H. VILLAT, GIGNOUX et FRÉCHET.	
Professeurs..	G. VALIRON	Analyse supérieure.
	P. WEISS..................	Physique générale.
	H. OLLIVIER	Physique générale.
	L. HACKSPILL	Chimie minérale.
	H GAULT	Chimie organique.
	E. TOPSENT	Zoologie et Anatomie comparée
	C. HOUARD	Botanique.
	E. TERROINE	Physiologie générale.
	J. DE LAPPARENT.........	Pétrographie.
	E. CHATTON	Biologie générale.
	R. THIRY	Mécanique.
	G. CERF...................	Calcul différentiel et intégral.
	G. DUBOIS	Géologie et Paléontologie.
	G. RIBAUD................	Physique expérimentale.
	P. FLAMANT	Mathématiques générales.
	E. CORNEC	Chimie générale.
	N..........................	Physique biologique.
	P. DE BEAUCHAMP.........	Biologie générale.
	L. BOUNOURE	Zoologie.
	G. FOEX...................	Physique générale.
	H. CHERMEZON	Botanique.
	G. REMPP..................	Physique du Globe.
	R. ROMANN................	Chimie physique et Électrochimie.
	N..........................	Astronomie.
Chargés de cours et Maîtres de conférences.......	G. FRIEDEL................	Minéralogie.
	J. LAGARDE................	Botanique.
	Ch. STAEHLING............	Chimie appliquée.
	J. LACOSTE	Physique du Globe.
	G. HUGEL..................	Chimie du Pétrole.
	H. WEISS	Physico-Chimie du Pétrole.
	H. MILLOUX	Mathématiques.
	A. ROUSSEL	Mathématiques générales.
	P. SOLEILLET	Physique mathématique.
	FAILLEBIN..................	Chimie appliquée.
	G. MIGNONAC.............	Chimie organique.
Secrétaire....	G. CUVIER.	

88916-30 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

PREMIÈRE THÈSE

SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES

OU MÉROMORPHES D'ORDRE FINI

INTRODUCTION.

Le théorème classique de M. Picard relatif à l'indétermination d'une fonction uniforme aux environs d'un point singulier essentiel et le théorème de M. Borel sur l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - x$, $f(z)$ étant une fonction entière, ont donné naissance à un grand nombre de travaux, les uns de nature qualitative se rattachant au théorème de M. Picard, les autres de nature quantitative se rattachant au théorème de M. Borel.

M. Julia a montré en 1919 que le théorème de M. Picard d'après lequel la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur sauf 2 au plus dans le voisinage de la singularité que nous supposerons à l'infini reste vrai lorsqu'on remplace ce voisinage complet par un voisinage plus restreint : petit angle convenablement choisi, suite de cercles, etc., à la condition que $f(z)$ admette une valeur asymptotique. Ces résultats, obtenus par la méthode des familles normales, ont été complétés d'une part par M. Ostrowski qui, employant la même méthode, a établi que les théorèmes de M. Julia valent pour presque toutes les fonctions méromorphes, et d'autre part par M. Milloux qui, moyennant l'hypothèse de l'existence d'une valeur asymptotique et par l'emploi direct d'une inégalité de M. Carleman et du théorème de Schottky, a démontré l'existence de *cercles de remplissage*. Ces cercles dans chacun desquels les valeurs de la fonction couvrent toute la surface de la sphère de Riemann, sauf le voisinage de deux points, ont un rayon lié à la façon dont la fonction tend vers sa valeur asymptotique.

Dans l'ordre d'idées du théorème de M. Borel, M. Valiron a résolu la question du genre des fonctions entières en introduisant l'idée de classes. Une fonction entière d'ordre ρ et de module maximum $M(r)$ est dite de la classe supérieure ou inférieure suivant que l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}}\,dx$$

diverge ou converge. Si $r_n(y)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) - y$, la série

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{r_n(y)^{\rho}}$$

converge ou diverge suivant que la fonction est de la classe inférieure ou supérieure, il ne peut y avoir exception que pour une valeur de y lorsque $f(z)$ est d'ordre entier de la classe supérieure. Ces résultats ont été étendus aux fonctions méromorphes par M. Nevanlinna dans son important Mémoire *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*, dans lequel il introduit la fonction caractéristique $T(r)$ d'une fonction méromorphe, définit l'ordre au moyen de cette fonction et donne au théorème de M. Borel une forme précise qui généralise et précise celle qui avait été obtenue antérieurement par M. Valiron dans le cas des fonctions entières. M. Valiron a introduit la fonction $T(r)$ dans l'étude des cercles de remplissage des fonctions méromorphes. Il montra d'abord que le rayon de ces cercles est lié à la valeur de $T(r)$ (1) pour les fonctions d'ordre fini ou nul à croissance assez rapide, précisa cette valeur du rayon pour les fonctions méromorphes et donna sa valeur presque définitive pour les fonctions entières (2). Il montra ensuite qu'en augmentant convenablement

(1) *Comptes rendus Acad. Sc.*, 29 mai 1926.

(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 51, 1927.

le rayon de ces cercles les valeurs de la fonction couvrent la sphère de Riemann (sauf le voisinage des points exceptionnels) un nombre de fois qui est de l'ordre de T (r_n), r_n étant le module du centre du cercle. Le théorème de M. Julia et le théorème de M. Borel apparaissent ainsi comme cas particulier d'une même proposition générale. Ces résultats furent complétés par M. Milloux, puis de nouveau par M. Valiron.

Dans le paragraphe final de son article sur les fonctions entières d'ordre fini, déjà cité, M. Valiron a suggéré que les considérations qu'il développe doivent s'étendre au cas où, au lieu de prendre x^ρ comme fonction de comparaison, on prend les fonctions $x^\rho (\log x)^{\rho_1}, \ldots, (\log_p x)^{\rho_p}$ introduites par M. Lindelöf dans la théorie des fonctions entières, et, d'une façon générale, au cas où la fonction de comparaison est une fonction croissante et dérivable U (x) telle que

$$\lim_{x=\infty} \frac{x\,\mathrm{U}'(x)}{\mathrm{U}(x)} = \rho.$$

Le but de cette Thèse est de donner ces extensions. Dans les deux premiers Chapitres, j'étends dans le sens indiqué les résultats du Mémoire cité de M. Valiron. Dans les troisième et quatrième, j'applique des considérations analogues au cas des fonctions méromorphes en tout point à distance finie ou méromorphes dans un cercle. Dans le cinquième, j'étudie le cas des fonctions de la classe supérieure du type U (x), c'est-à-dire telles que

$$\int^{\infty} \frac{\mathrm{T}(x)}{x\,\mathrm{U}(x)^\rho}\,dx$$

diverge, et en utilisant la méthode esquissée par M. Valiron dans une note récente [1], j'établis notamment qu'il existe pour une telle fonction $f(z)$ une direction au moins telle que, dans tout angle l'admettant pour bissectrice, la série

$$\sum \frac{1}{\mathrm{U}[r(n, x)]^\rho},$$

étendue aux zéros $r\,(n, x)$ de $f(z) - x$ intérieurs à cet angle, diverge pour tous les x sauf deux au plus.

---

[1] Valiron, *Sur les valeurs d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, 1928, p. 803-805).

En terminant cette introduction, je me permets d'adresser mes vifs remerciements aux Professeurs de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg pour leur bienveillant accueil, tout particulièrement au Directeur de l'Institut, M. Valiron, qui a inspiré mon travail et auprès duquel j'ai trouvé une aide constante.

CHAPITRE I.

RELATION ENTRE LA CONVERGENCE DE CERTAINES SÉRIES ET INTÉGRALES.

I, 1. Nous considérons une suite de nombres positifs a_n non décroissants et non bornés et nous supposons que cette suite admet un exposant de convergence fini, ρ, c'est-à-dire que la série

$$\sum \frac{1}{a_n^{\tau}}$$

converge pour $\tau > \rho$ et diverge pour $\tau < \rho$.

Soit U (x) une fonction croissante, continue et dérivable de la variable positive x dont la croissance est comparable à celle d'une puissance de x, en ce sens que

$$\frac{x\,\mathrm{U}'(x)}{\mathrm{U}(x)} \tag{I, 1}$$

tend vers une limite finie positive lorsque x croît indéfiniment. Si α est cette limite, la fonction U $(x)^{\frac{1}{\alpha}}$ est encore une fonction de même espèce que U (x), mais la limite de l'expression (I, 1) correspondante est égale à 1. Comme nous opérerons sur des fonctions de la forme $\mathrm{U}(x)^{\tau}$ il est donc loisible de supposer que la limite de (I, 1) est égale à 1. C'est ce que nous ferons désormais.

Nous nous proposons d'étudier les séries de la forme

$$\sum \frac{1}{\mathrm{U}(a_n)^{\tau}}. \tag{I, 2}$$

Il est aisé de vérifier que de telles séries convergent encore pour $\tau > \rho$

et divergent pour $\tau < \rho$. Car en intégrant l'égalité asymptotique

$$\frac{U'(x)}{U(x)} \sim \frac{1}{x}, \tag{I, 3}$$

on voit que

$$U(x) = x^{1+\alpha(x)}$$

avec

$$\lim \alpha(x) = 0.$$

Pour $\tau = \rho$, la série (I, 2) peut converger ou diverger.

Appelons $n(x)$ le nombre des quantités a_n dont la valeur est inférieure ou égale à x. Donc

$$\begin{aligned} a_n &\leqq x \quad \text{si } n \leqq n(x), \\ a_n &> x \quad \text{si } n > n(x). \end{aligned}$$

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sum \frac{1}{U(a_n)^\rho} \tag{I, 4}$$

converge est que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{n(x)}{x\, U(x)^\rho}\, dx \tag{I, 5}$$

ait un sens.

On a en effet, si $a_n < a_{n+1}$,

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} n(x)\, d\left[\frac{-1}{U(x)^\rho}\right] = n\left[\frac{1}{U(a_n)^\rho} - \frac{1}{U(a_{n+1})^\rho}\right];$$

donc

$$\int_0^{a_m} n(x)\, d\left[\frac{-1}{U(x)^\rho}\right] = \sum_1^m \frac{1}{U(a_n)^\rho} - \frac{m-1}{U(a_m)^\rho}. \tag{I, 6}$$

Si la série (I, 4) converge le second membre de (I, 6) est borné, donc l'intégrale du premier membre converge. Mais on a

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{U(x)^\rho}\right] = \rho\, \frac{U'(x)}{U(x)^{\rho+1}} \sim \frac{\rho}{x\, U(x)^\rho},$$

et par suite, le premier membre de (I, 6) et (I, 5) converge en même temps.

La ocnvergence de (I, 4) entraîne bien celle de (I, 5).

Inversement, si (I, 5) converge

$$\int_{x}^{2x} \frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx > n(x)\,\frac{1}{2\,U(2x)^\rho}$$

tend vers zéro, donc, puisque d'après (I, 3)

$$U(2x) < U(x)\,2^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0),$$

on voit que $m : U(a_m)^\rho$ tend vers zéro.

La convergence de (I, 5), donc du premier membre de (I, 6), entraîne donc la convergence de (I, 4), ce qui achève la démonstration.

I, 2. Si l'on pose

$$N(x) = \int_0^x \frac{n(x)}{x}\,dx,$$

le théorème I prend la forme suivante :

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que la série* (I, 4) *converge est que l'intégrale*

$$\text{(I, 7)} \qquad \int_0^\infty \frac{N(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx$$

converge.

Car en intégrant par parties, nous avons

$$\text{(I, 8)} \qquad \int_0^r N(x)\,d\left[\frac{-1}{U(x)^\rho}\right] = \int_0^r \frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx - \frac{N(r)}{U(r)^\rho},$$

et pour les mêmes raisons que ci-dessus, le premier membre de (I, 8) converge en même temps que (I, 7). Donc, si (I, 4) converge, (I, 5) et par suite (I, 7) converge. Si (I, 7) converge, on voit comme ci-dessus que $N(x) : U(x)^\rho$ tend vers zéro, donc le premier membre de (I, 8) étant convergent, (I ,7) converge.

M. Valiron établit l'inégalité

$$\int^r \frac{n(x)}{x^{1+k}}\,dx < K \frac{\log M(r)}{r^k} + k \int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{1+k}}\,dx$$

en divisant les deux membres de l'égalité de Cauchy donnant le nombre $n(x)$ des zéros de fonction entière $(f(z)$ intérieure au cercle $|z| = x$

$$n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,\frac{f'(x\,e^{i\varphi})}{f(x\,e^{i\varphi})}\,e^{i\varphi}\,d\varphi \qquad [f(0) \neq 0]$$

par x^{1+k}, k étant positive, et intégrant entre $x_1 = r_{n-1} - \varepsilon$ et $x_2 = r_n + \varepsilon$, K étant une constante et $M(x)$ étant le maximum du module dans le cercle $|z| \leq x$.

Cette inégalité peut se généraliser en remplaçant la fonction r par les fonctions utilisées ci-dessus. On obtient

$$\left[\frac{-1}{\rho\, U(r)^\rho}\right]' = \frac{U'(r)}{U(r)^{\rho+1}} = \frac{1+\varepsilon(r)}{r\, U(r)^\rho}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité de M. Jensen

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = V(r) - V(0)$$

par $\dfrac{dr}{r\,U(r)^\rho}$ et en intégrant de α à r. on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^r \frac{1+\varepsilon(r)}{r\,U(r)^\rho}\,dr \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx \\
&= \left[\frac{-1}{\rho\,U(r)^\rho}\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx\right]_\alpha^r + \int_\alpha^r \frac{n(x)}{\rho x\,U(x)^\rho}\,dx \\
&= \frac{1}{\rho\,U(\alpha)^\rho}\int_0^\alpha \frac{n(x)}{x}\,dx - \frac{1}{\rho\,U(r)^\rho}\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx + \int_\alpha^r \frac{n(x)\,dx}{\rho x\,U(x)^\rho} \\
&= K - \frac{V(r)}{\rho\,U(r)^\rho} + \frac{1}{\rho}\int_\alpha^r \frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_\alpha^r \frac{V(x)}{x\,U(r)^\rho}\,dx \sim K - \frac{V(r)}{\rho\,U(r)^\rho} + \frac{1}{\rho}\int_\alpha^r \frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx,$$

où

$$V(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(x\,e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Mais $V(x) < \log M(x)$. On a le résultat suivant :

III. *$f(z)$ étant une fonction entière, $n(x)$ le nombre des zéros et $M(x)$ le maximum du module dans le cercle $|z| < x$ et ρ un nombre positif, on a*

$$(\text{I}, 9) \qquad \int_\alpha^r \frac{n(x)}{x\,U(r)^\rho}\,dx < K\left[\frac{\log M(r)}{\rho\,U(r)^\rho} + \rho\int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x\,U(r)^\rho}\,dx\right],$$

K étant une constante.

I, 3. Si l'on écrit

$$U(x) = x^{1+\alpha(x)},$$

$1 + \alpha(x)$ vérifie les conditions des fonctions que M. Valiron a appelé *ordre précisé* ou exposant de convergence précisé, on a

$$\lim \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} x\,\alpha'(x) \log x = 0.$$

On peut prendre pour $U(x)$ toute fonction telle que $\alpha(x)$ tend vers zéro et obtenue par un nombre fini d'opérations d'addition, multiplication, itération de $\log x$. On peut prendre non seulement les fonctions de Lindelöf

$$U(x) = x(\log x)^{\alpha_1} \ldots (\log_p x)^{\alpha_p},$$

mais aussi celles correspondant par exemple à

$$\alpha(x) = A \log x^{-\gamma} \qquad (0 < \gamma < 1),$$

qui donnent des types de croissance plus variés.

Les résultats qui suivent s'étendent au cas où l'on suppose seulement

$$\lim_{x=\infty} x\frac{U'(x)}{U(x)} > 0, \qquad \overline{\lim_{x=\infty}}\, x\,\frac{U'(x)}{U(x)} = 1,$$

ce qui permettrait d'introduire des fonctions $U(x)$ à croissance irrégulière.

Pour une fonction d'ordre ρ non entier, et de genre p, on a

$$\log M(r) < B r^p + A \int_\alpha^\infty \frac{r^{p+1}\, n(y)}{y^{p+1}(y+r)}\, dy;$$

donc, si $p < \rho < p+1$,

$$\int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x\,U(x)^\rho}\, dx < B' + A \int_\alpha^r \frac{dx}{x\,U(x)^\rho} \int_\alpha^\infty \frac{x^{p+1}\, n(y)}{y^{p+1}(y+x)}\, dy$$
$$< B' + A \int_\alpha^\infty \frac{n(y)}{y^{p+1}}\, dy \int_\alpha^r \frac{x^p\, dx}{(x+y)\,U(x)^\rho}$$

(on peut intervertir l'ordre des intégrations puisque tout est positif).

Or,

$$\int_\alpha^r \frac{x^p\, dx}{(x+y)\,U(x)^\rho} < \int_\alpha^y \frac{x^p\, dx}{(x+y)\,U(x)^\rho} + \int_y^\infty \frac{x^p\, dx}{(x+y)\,U(x)^\rho}$$
$$< \frac{1}{y} \int_\alpha^y \frac{x^p}{U(x)^\rho}\, dx + \int_y^\infty \frac{x^{p-1}}{U(x)^\rho}\, dx$$

et

$$\left[\frac{x^{p+1}}{U(x)^\rho}\right]' = \frac{x^p}{U(x)^{\rho+1}}[(p+1)U(x) - x\rho\, U'(x)] \sim \frac{(p+1-\rho)x^p}{U(x)},$$

$$\left[\frac{x^p}{U(x)^\rho}\right]' \sim \frac{(p-\rho)x^{p-1}}{U(x)^\rho} = -\frac{(\rho-p)x^{p-1}}{U(x)^\rho},$$

donc

$$\frac{1}{y}\int_\alpha^y \frac{x^p}{U(x)^\rho}dx < k\frac{y^p}{U(y)^\rho},$$

$$\int_y^\infty \frac{x^{p-1}}{U(x)^\rho}dx < k'\frac{y^p}{U(y)^\rho}$$

et

$$A\int_\alpha^\infty \frac{n(y)}{y^{p+1}}dy\int_\alpha^r \frac{x^p\,dx}{(x+y)\,U(x)^\rho} < B''\int_\alpha^\infty \frac{n(y)\,dy}{y\,U(y)^\rho};$$

donc, la convergence de

$$\int_\alpha^\infty \frac{n(y)}{y\,U(y)^\rho}dy$$

entraîne bien celle de

$$\text{(I, 9')} \qquad \int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x\,U(x)^\rho}dx$$

si $p < \rho < p+1$, et nous avons ce résultat :

IV. *Pour toute fonction entière d'ordre* ρ *non entier et telle que la série* (I, 4) *formée avec les modules des zéros converge, l'intégrale*

$$\text{(I, 9')} \qquad \int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x\,U(x)^\rho}dx$$

est bornée.

I, 4. Convenons de dire que $f(z)$ *est de la classe inférieure ou de la classe supérieure de l'ordre et du type* U (x) *suivant que*

$$\text{(I, 10)} \qquad \int^\infty \frac{\log M(x)}{x\,U(x)^\rho}dx$$

converge ou diverge.

L'application des propositions précédentes aux fonctions d'ordre fini non entier se présente alors comme suit : le théorème IV montre que toute fonction d'ordre non entier telle que (I, 4) converge, est de la classe inférieure; inversement, si l'intégrale (I, $9'$) est bornée, donc convergente, le rapport

$$\frac{\log M(r)}{U(r)^\rho}$$

tend vers zéro; d'après (I, 9) l'intégrale

$$\text{(I, 11)} \qquad \int_0^\infty \frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx$$

est bornée. Par suite :

V. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre ρ non entier soit de la classe inférieure est que la série*

$$\sum \frac{1}{U(a_n)^\rho}$$

soit convergente.

I, 5. Considérons maintenant la dérivée. Il est clair que si $f(z)$ est donnée, la dérivée $f'(z)$ est de la même *classe d'un type* $U(x)$ quelconque puisque

$$\frac{\log M(r, f')}{\log M(r, f)}$$

tend vers un lorsque l'ordre est fini.

Donc, pour une fonction d'ordre non entier ρ, les séries

$$\sum \frac{1}{U(a_n)^\rho}, \quad \sum \frac{1}{U(a'_n)^\rho}$$

formées avec les zéros de $f(z)$ et de sa dérivée respectivement convergent ou divergent simultanément.

Dans le cas de l'ordre entier, il n'en est plus de même, mais *la convergence de*

$$\sum \frac{1}{U(a_n)^\rho}$$

entraîne toujours celle de

$$\sum \frac{1}{U(a'_n)^\rho}.$$

On le voit par le théorème de Jensen appliqué à $\frac{f'(z)}{f(z)}$ [1]. On a, quel

[1] VALIRON, *Le théorème de Laguerre-Borel dans la théorie des fonctions entières* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 46, 1922, p. 432-445).

que soit r,

$$\int_{R_0}^{r} n'(x)\frac{dx}{x} < \int_{R_0}^{2r} \frac{n(x)}{x}\,dx + h\log r,$$

$n(x)$ étant le nombre total de zéros de $f(z)$ et $n'(x)$ celui de $f'(z)$ dans la couronne $R_0 < |z| \leqq x$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par $d\left[\frac{-1}{U(r)^\rho}\right]$ et intégrant de R_0 à R, on obtient

$$\int_{R_0}^{R} d\left[\frac{-1}{U(r)^\rho}\right]\int_{R_0}^{r}\frac{n'(x)}{x}\,dx < 2^\rho\int_{R_0}^{2R} d\left[\frac{-1}{U(r)^\rho}\right]\int_{R_0}^{r}\frac{n(x)}{n}\,dx + h_1,$$

h_1 étant une constante. En intégrant par parties dans les deux membres, on a

$$\left[\frac{-1}{U(r)^\rho}\int_{R_0}^{r}\frac{n'(x)}{x}\,dx\right]_{R_0}^{R} + \int_{R_0}^{R}\frac{n'(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx$$
$$< 2^\rho\left[\frac{-1}{U(R)^\rho}\int_{R_0}^{2R}\frac{n(x)}{x}\,dx + \int_{R_0}^{2R}\frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx\right] + h$$

ou

$$\frac{-1}{U(R)^\rho}\int_{R_0}^{R}\frac{n'(x)}{x}\,dx + \int_{R_0}^{R}\frac{n'(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx$$
$$< 2^\rho\left[\frac{-1}{U(R)^\rho}\int_{R_0}^{2R}\frac{n(x)}{x}\,dx + \int_{R_0}^{2R}\frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx\right] + h.$$

A fortiori,

$$\int_{R_0}^{R}\frac{n'(x)}{x}\left[\frac{1}{U(x)^\rho} - \frac{1}{U(R)^\rho}\right]dx < 2^\rho\int_{R_0}^{2R}\frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx + h,$$

et puisque la quantité sous le signe d'intégration du premier membre est positive

$$\int_{R_0}^{\frac{1}{2}R}\frac{n'(x)}{x}\left[\frac{1}{U(x)^\rho} - \frac{1}{U(R)^\rho}\right]dx < 2^\rho\int_{R_0}^{2R}\frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx + h.$$

et enfin, puisque $U(R) > U\left(\frac{R}{2}\right)2^{1+\varepsilon} > U(x)\,2^{1+\varepsilon}$ si $x < \frac{R}{2}$,

$$\int_{R_0}^{\frac{1}{2}R}\frac{n'(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx < \frac{2^{2\rho+\varepsilon\rho}}{2^{\rho+\varepsilon\rho}-1}\int_{R_0}^{2R}\frac{n(x)}{x\,U(x)^\rho}\,dx + h'.$$

Cette inégalité démontre la propriété en vue. On voit ainsi que l'on peut énoncer le théorème

VI. *Pour une fonction d'ordre ρ non entier, les séries*

$$\sum \frac{1}{\mathrm{U}(a_n)^\rho}, \quad \sum \frac{1}{\mathrm{U}(a'_n)^\rho}$$

formées respectivement avec les zéros de la fonction et avec ceux de la dérivée convergent ou divergent simultanément. Lorsque ρ est entier, la convergence de la première série entraîne celle de la seconde.

Il en résulte que, lorsque $f(z)$ étant donné, les zéros de sa dérivée rendent divergente la série

$$\sum \frac{1}{\mathrm{U}(a'_n)^\rho}, \tag{I, 12}$$

la série analogue formée avec les zéros de $f(z) - x$ est divergente, quel que soit x. En particulier, si $f(z)$ est une fonction réelle d'ordre entier, à zéros réels pour laquelle la série

$$\sum \frac{1}{\mathrm{U}(a_n)^\rho}$$

diverge, cette série diverge aussi pour les zéros de $f(z) - x$, quel que soit x. Car, d'après le théorème de Rolle, la série (I, 12) est divergente.

CHAPITRE II.

FONCTIONS ENTIÈRES DONNÉES PAR LEUR SÉRIE DE TAYLOR.

II, 1. Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n \qquad (c_0 = 1)$$

une fonction entière définie par sa série de Taylor. Introduisons le polygone de Newton utilisé par M. Hadamard et M. Valiron. En posant $\log |c_n| = -g_n$, et en désignant par B_n le point de coordonnées n, g_n on considère le polygone dont les sommets sont certains de ces points (il y a une suite infinie de tels sommets) et qui est tel que tous les autres points B_n sont sur ses côtés ou au-dessus de ses côtés. Soit $\log R_n$ la pente des côtés de ce polygone entre les points d'abscisses $n - 1$ et n. R_n est ce que M. Valiron a appelé le *rapport rectifié* de c_{n-1} à c_n et il a montré que si $N_R(x)$ désigne la fonction $N(x)$ du Chapitre I, (I, 2) correspondant à la suite R_n, on a

$$\text{(II, 1)} \qquad \log M(r, f) \sim N_R(r).$$

$M(r, f)$ désignant le maximum de $f[(re^{iu})]$ lorsque $0 \leqq u \leqq 2\pi$. Il suit de (II, 1) que α étant fixe et arbitraire

$$\text{(II, 2)} \qquad \int_\alpha^r \frac{\log M(x, f)}{x\, U(x)^\rho}\, dx \sim \int_\alpha^r \frac{N_R(x)}{x\, U(x)^\rho}\, dx.$$

II, 2. Appliquons le théorème II. Nous obtenons cette proposition :

VII. *La condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit de la classe inférieure de l'ordre ρ et du type $U(x)$ est que la série*

$$\text{(II, 4)} \qquad \sum \frac{1}{U(R_n)^\rho}$$

converge.

Il en découle inversement que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit de la classe supérieure de l'ordre ρ et du type $U(x)$ est que la série (II, 4) diverge.

Il est clair que lorsqu'une fonction entière $f(z)$ est majorée par une autre fonction d'ordre ρ et de *classe inférieure*, elle est de *classe inférieure*, si elle est d'ordre ρ. Comme application de cette remarque, on peut démontrer la proposition suivante :

VIII. *Si les coefficients du développement de Taylor de $f(z)$ sont tels que la série*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{U(b_n)^\rho},$$

où $\dfrac{1}{b_{n+1}} = \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ est convergente, la fonction $f(z)$ est d'ordre ρ au plus et si elle est d'ordre ρ, elle est de la classe inférieure.

Les nombres b_n ont une limite inférieure infinie pour $n = +\infty$; on peut donc les ranger en une suite croissante b'_1, b'_2, ..., b'_n, où

$$b'_1 \leqq b_1,$$
$$b'_1 b'_2 \leqq b_1 b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$\frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_n} \leqq \frac{1}{b'_1 b'_2 \ldots b'_n}.$$

Si l'on pose

$$A_p = \frac{|c_0|}{b'_1 b'_2 \ldots b'_n},$$

la fonction

$$F(z) = \sum_1^{\infty} A_p z^p$$

majore $f(z)$, car $\frac{A_p}{|c_0|}$ est le produit des p plus grands nombres $\frac{1}{b'_p}$, tandis que $\frac{|c_p|}{|c_0|}$ est le produit de p de ces nombres. Or, cette fonction $F(z)$, pour laquelle $R_n = b'_p$, est d'ordre inférieur à ρ ou bien d'ordre et de *classe inférieure*. La proposition énoncée est donc démontrée.

M. Valiron a démontré le lemme suivant [1] :

Si tous les nombres a_n sont positifs et si la série

$$\sum_1^{\infty} a_n$$

converge, la série

$$\sum_1^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

converge.

Il suit, puisque les nombres R_n sont non décroissants, que les séries (II, 4) et

(II, 5) $$\sum \frac{1}{[U(R_1)U(R_2)\ldots U(R_n)]^{\frac{\rho}{n}}}$$

---

[1] Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, 1923.

convergent et divergent en même temps. Mais la série (II, 4) peut converger alors que la série

(II, 6) $$\sum \frac{1}{U(R_1 R_2 \ldots R_n)^{\frac{\rho}{n}}}$$

divergerait. Prenons

$$U(x) = x \log x, \qquad \rho = 1,$$
$$R_n = n(\log_2 n)^2,$$

alors

$$U(R_n) > n(\log_2 n)^2 \log n.$$

Tandis que

$$x = R_1 R_2 \ldots R_n = n!\,(\log_2 1 . \log_2 2 \ldots \log_2 n)^2$$
$$< \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(\log_2 n)^{2n}$$

et

$$U(x) = x \log x < \left|\frac{n}{e}\right|^n \sqrt{2\pi n}\,(\log_2 n)^{2n}\, n(2\log n),$$
$$[U(R_1 R_2 \ldots R_n)]^{\frac{1}{n}} < 2\frac{n}{e}(\log_2 n)^2;$$

donc

$$\sum \frac{1}{[U(R_1 R_2 \ldots R_n)]^{\frac{1}{n}}}$$

diverge.

Le problème qui se pose ici serait :

1° De chercher s'il existe des fonctions $U(x)$ autres que $U(x) \equiv x^k$, qui seraient telles que la convergence de (II, 4) entraîne celle de (II, 6);

2° De chercher s'il existe des fonctions $U(x)$ autres que $U(x) \equiv x^k$ qui seraient telles que la convergence de (II, 6) entraîne celle de (II, 4).

Naturellement, on exclut les fonctions $U(x)$ telles que $\frac{U(x)}{A x^k}$ tend vers 1, qui répondent à la question.

En comparant (II, 4), (II, 5) et (II, 6) on voit que si $U(x)$ vérifie les inégalités

(II, 7) $$U(R_1)U(R_2)\ldots U(R_n) < U(R_1 R_2 \ldots R_n) < U(R_n)^n,$$

elle répond à la question. En posant

$$R = e^x, \qquad U(R) = e^{v(x)},$$

on a à chercher les fonctions $v(x)$ croissantes, telles que

$$v(x_1) + v(x_2) + \dots + v(x_n) < v(x_1 x_2 \dots x_n) < n\, v(x_n)$$

si

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \dots \leqq x_n.$$

Si l'on désigne par G_n l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe $\pi(f)$, tel que

$$e^{G_n} = R_1 R_2 \dots R_n,$$

on peut remplacer les conditions de convergence et de divergence de la série (II, 4) par les mêmes conditions pour la série

$$\sum \frac{1}{U(|c_n|)^{\frac{\rho}{n}}} \qquad (|c_n| = e^{G_n}).$$

En particulier, on aura la proposition suivante :

IX. *Si $f(x)$ est d'ordre ρ entier, et si $U(R_n)$ satisfait* (II, 7) *et est tel que la série*

$$\sum \frac{1}{U(|c_n|)^{\frac{\rho}{n}}}$$

diverge, la fonction $f(z) - x$ est de la classe supérieure, sauf peut-être une valeur exceptionnelle.

CHAPITRE III.

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE ENTIER ET FONCTIONS MÉROMORPHES.

I. — Fonctions entières d'ordre entier.

III, 1. Dans l'Appendice B, à la conclusion de ses lectures *on the General Theory of Integral Functions*, M. Valiron discute un critérium pour que la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^\rho} \tag{III, 1}$$

converge. Cette étude conduit aux relations entre la convergence et la divergence de cette série et certaines intégrales.

Au moyen de l'équation de Jensen, sous la forme

$$\int_{\alpha}^{r} \frac{n(x)}{x}\, dx = V(r) - V(\alpha),$$

nous avons établi (au Chapitre I) l'inégalité

$$(\text{III}, 2) \qquad \int_{\alpha}^{r} \frac{n(x)\, dx}{x\, U(x)^{\rho}} < K \left[\frac{\log M(r)}{\rho\, U(r)^{\rho}} + \rho \int_{\alpha}^{r} \frac{\log M(x)}{x\, U(r)^{\rho}}\, dx \right],$$

où K est une constante, et $\alpha > 0$, et nous avons démontré que si l'intégrale

$$(\text{III}, 3) \qquad \int_{\alpha}^{r} \frac{\log M(x)}{x\, U(r)^{\rho}}\, dx$$

est bornée, donc convergente, le rapport

$$(\text{III}, 4) \qquad \frac{\log M(r)}{U(r)^{\rho}}$$

tend vers zéro comme r tend vers l'infini, et la série

$$(\text{III}, 5) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{U(r_n)^{\rho}}$$

est convergente.

III, 2. L'inverse n'est pas vrai lorsque ρ est entier. D'un théorème général [1],

Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, et $n(r, x)$ le nombre des zéros de la fonction $f(z) - x$ dans le cercle $|z| = r$, pour chaque nombre $k > 1$, il existe un nombre positif $H(k)$ tel que, pour toute valeur de a et b, $(a \neq b)$, et pour tout $r > r(a, b)$,

$$(\text{III}, 6) \qquad \int_{\alpha}^{r} \frac{n(x, a) + n(x, b)}{x}\, dx > H(k) \log M\left(\frac{r}{k}\right) \qquad (\alpha > 0),$$

où $M(r)$ est le maximum de module de $f(z)$ sur le cercle de rayon r.

M. Valiron a déduit une proposition complémentaire pour les fonctions d'ordre entier.

---

[1] VALIRON, *Lectures on the General Theory of Integral Functions* 1923, p. 81.

L'inégalité (III, 6) peut s'écrire sous la forme

$$\text{(III, 7)} \qquad W(r, a, b) = \sum_{2} \int_{\alpha}^{r} \frac{n(x, a)}{x} dx > H \log M\left(\frac{r}{k}\right),$$

où W (r, a, b) est une fonction croissante continue dans les intervalles adjacents.

Si l'on multiplie les deux membres de cette inégalité par $\frac{dx}{x\,U(x)^\rho}$ en faisant un changement de variable sur la droite, et que l'on intègre de β à R, on obtient

$$\text{(III, 8)} \qquad \sum_{2} \int_{\beta}^{R} \frac{n(x, a)}{x\,U(x)^\rho} dx > \rho H k^\rho \int_{k\beta}^{kR} \frac{\log M(x)}{x\,U(x)^\rho} dx - K(\alpha, a, b),$$

K une constante, et $0 < k < 1$; $\beta > 0$.

Si

$$\text{(III, 9)} \qquad \int_{k\beta}^{kR} \frac{\log M(x)}{x\,U(x)^\rho} dx$$

est divergent, il suit que l'intégrale

$$\text{(III, 10)} \qquad \sum_{2} \int_{\beta}^{R} \frac{n(x, a)}{x\,U(x)^\rho} dx$$

est divergente aussi; donc, l'intégrale (III, 10) n'est pas bornée pour deux valeurs distinctes.

Si R_n est le module de $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) - x$, la série

$$\text{(III, 11)} \qquad \sum \frac{1}{U(R_n, x)^\rho}$$

ne peut converger que pour *une* valeur de x.

On voit qu'il existe les propriétés suivantes :

X. *Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre ρ et si l'intégrale* (III, 3) *est bornée, la série* (III, 11) *est convergente pour toute valeur de x. Si l'intégrale* (III, 9) *est divergente, la série* (3, 11) *est divergente, sauf au plus pour une valeur exceptionnelle seulement.*

II. — Fonctions méromorphes en général.

III, 3. Nous allons étendre les considérations du Chapitre I aux fonctions méromorphes en utilisant les résultats de M. R. Nevanlinna, *le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (1).

Si $f(z) = C_0 + \ldots$ est une fonction méromorphe, non nulle pour $z = 0$, on a, pour $0 < r < R$,

$$(\text{III}, 12) \qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 24 + 3 \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{C_0}\right| + 2 \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 4 \overset{+}{\log} R + 3 \overset{+}{\log}\frac{1}{R-r} + 4 \overset{+}{\log} T(R, f),$$

$m(r, g)$ et $T(r, g)$ désignant les deux fonctions connues.

$$m(r, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|g(r e^{i\varphi})|\, d\varphi,$$
$$T(r, g) = m(r, g) + N(r, \infty).$$

Prenons, avec M. Nevanlinna (2),

$$R = r + \frac{r'-r}{r'} \qquad (r' \geqq r > 1).$$

Multiplions les deux membres de (III, 12) par $\dfrac{dr}{r\, U(r)^{\rho}}$, ρ étant ici positif mais quelconque, et intégrons de r_0 à r' $(1 < r_0 < r')$. Chacune des intégrales des cinq premiers termes du second membre est bornée par une fonction de r_0, c_0, ρ, dépendant aussi de la forme de $U(r)$, mais bornée lorsque r' croît indéfiniment.

D'autre part,

$$\int_{r_0}^{r'} \overset{+}{\log} T(R, f)\frac{dr}{r\, U(r)^{\rho}} = \int_{r=r_0}^{r=r'} \frac{\log T(R, f)}{R\, U(R)^{\rho}}\,\frac{U(R)^{\rho}}{U(r)^{\rho}}\,\frac{R}{R-1}\, dR$$
$$\leqq \frac{r_0}{r_0-1}\int_{r_0}^{r'} \frac{\log T(R, f)}{R\, U(R)^{\rho}}\,\frac{U(R)^{\rho}}{U(r)^{\rho}}\, dR.$$

---

(1) Déjà cité.

(2) *Voir* page 62 de son Ouvrage cité dans la note précédente.

Mais

$$U(R) < U(r+1) < U(r)\left(\frac{r+1}{r}\right)^{\rho+\varepsilon},$$

donc

$$(\mathrm{III},\ 13)\qquad \int_{r_0}^{r} m\left(t, \frac{f'}{f}\right)\frac{dt}{t\,U(t)^{\rho}} = O\left[\int_{r_0}^{r}\frac{\log T(t, f)}{t\,U(t)^{\rho}}\,dt\right].$$

Il suit de là que le reste S (r) figurant dans l'inégalité fondamentale

$$(\mathrm{III},\ 14)\qquad (q-2)\,T(r) < \sum_{1}^{q} N(r, x) - N_1(r) + S(r),$$

où les x_1, x_2, ..., x_q désignent q nombres distincts, jouit de la propriété suivante :

$$(\mathrm{III},\ 15)\qquad \int_{r_0}^{r}\frac{S(t)}{t\,U(t)^{\rho}}\,dt = O\left[\int_{r_0}^{r}\frac{\log T(t, f)}{t\,U(t)^{\rho}}\,dt\right].$$

III, 4. Convenons de dire que la fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre fini ρ est de la classe supérieure ou de la classe inférieure du type U (x) suivant que l'intégrale

$$(\mathrm{III},\ 16)\qquad \int^{\infty}\frac{T(x, f)}{x\,U(x)^{\rho}}\,dx$$

diverge ou converge. Dans le cas d'une fonction entière on retombe sur la définition donnée au Chapitre I, puisque alors

$$T(x, f) = m(x, f)$$

et que l'on a des relations connues entre $m(x, f)$ et $\log M(x, f)$.

L'inégalité de Jensen

$$N(r; x) < T(r; f) + h_x,$$

où h_x est fini, montre que la convergence de (III, 16) entraîne la convergence des séries

$$(\mathrm{III},\ 17)\qquad \sum \frac{1}{U[r_n(x)]^{\rho}}$$

formées avec les modules r_n (x) des zéros de $f(z) - x$, quel que soit x (si x est infini, il s'agit des modules des pôles).

Supposons maintenant que (III, 16) diverge. Les séries (III, 17) divergeront sauf au plus pour deux valeurs x. Car, si elles convergeaient pour trois valeurs x_1, x_2, x_3 de x l'inégalité (III, 14) appliquée à ces trois valeurs et multipliée par $\frac{dr}{r\,U(r)^\rho}$ et intégrée de r_0 à r conduirait à une impossibilité puisque le second membre serait borné d'après le théorème II et d'après l'inégalité (III, 15) dont le second membre est ici borné. On obtient ainsi le résultat suivant qui généralise ceux de M. Valiron relatifs aux fonctions entières et ceux de M. Nevanlinna relatifs aux fonctions méromorphes.

XI. *Pour une fonction d'ordre ρ de la classe inférieure du type* U (r), *la série* (III, 17) *converge quel que soit x. Pour une fonction d'ordre ρ de la classe supérieure du type* U (r), *la série* (III, 17) *diverge sauf au plus pour deux valeurs de x.*

Si pour trois valeurs de x la série (III, 17) *converge, la fonction $f(z)$ est de la classe inférieure de l'ordre ρ.*

III, 5. Dans le cas des fonctions entières, il ne peut y avoir qu'une seule valeur exceptionnelle x dans le cas des fonctions de la classe supérieure. On sait, d'après le Chapitre I qu'il n'y en a aucune lorsque l'ordre n'est pas entier.

Pour les fonctions méromorphes d'ordre non entier, le nombre des valeurs exceptionnelles possibles s'abaisse à *un*. Supposons, en effet, que $f(z)$ d'ordre non entier ρ et de la classe supérieure admette une valeur exceptionnelle x, valeur rendant (III, 17) convergente. On peut écrire

$$\frac{1}{f(z)-x}=\frac{g(z)}{h(z)},$$

$h(z)$ étant le produit canonique formé avec les zéros de $f(z)-x$. C'est une fonction d'ordre inférieur à ρ ou une fonction d'ordre ρ de la classe inférieure du type U (r) d'après le théorème V. L'équation $f(z)=y$, $y\neq x$ équivaut à

$$g(z)=h(z)\frac{1}{y-x}.$$

Le second membre étant au plus de la classe inférieure du type U (r), le premier membre est de la classe supérieure, sans quoi (III, 17) convergerait quel que soit x. Mais alors

$$g(z)-h(z)\frac{1}{y-x}$$

est encore de la classe supérieure du type U (r) et comme ρ **n'est** pas entier, le théorème V s'applique encore. Par suite :

XII. *Dans le cas d'une fonction d'ordre ρ non entier de la classe supérieure du type* U (r), *la série* (III, 17) *diverge sauf au plus pour une valeur unique x.*

III, 6. La fonction $N_1(r)$ du second membre de (III, 14) est la somme de deux fonctions dont l'une est

$$N\left(r; \frac{1}{f'}\right).$$

En prenant $q = 3$, et en utilisant l'inégalité de Jensen, on voit que pour une fonction d'ordre fini ρ

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < N(r; x_1) + N(r; x_2) + O(\log z),$$

et en multipliant par $\dfrac{dr}{r\,U(r)^\rho}$ et intégrant, on obtient cette proposition qui généralise celle donnée plus haut pour une fonction entière.

XIII. *Si la série* (I, 17) *converge pour deux valeurs distinctes de x (dont l'une peut être infinie), elle converge également pour les zéros de $f'(z)$.*

Il s'ensuit encore que :

Corollaire. — *Si la série*

$$\sum \frac{1}{U(r'_n)^\rho}$$

formée avec les modules des zéros de $f'(z)$ diverge, la série (III, 17) ***relative aux zéros de $f(z) - x$ diverge pour tous les x sauf un au plus.***

III, 7. Dans le cas des fonctions entières, on peut remplacer la condition de convergence ou divergence de

$$\int_\alpha^\infty \frac{\log M(x, f)}{x\,U(x)^\rho}\,dx$$

par la condition de convergence ou divergence de série (II, 4),

$$\sum_1^\infty \frac{1}{U(R_n)^\rho},$$

où la fonction $U(R_n)$ est la même que celle définie dans le paragraphe II, 1.

On peut annoncer le théorème suivant :

XIV. *Pour une fonction entière d'ordre entier* ρ, *la convergence de* (II, 4) *implique la convergence de* (III, 5) *et la divergence de* (II, 4) *implique la divergence de* (III, 11) *pour toutes valeurs de* x, *sauf au plus une valeur exceptionnelle seulement.*

CHAPITRE IV.

FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE CERCLE DE RAYON UN.

IV, 1. *Généralisation des résultats de M. Nevanlinna.* — Dans la quatrième section de son article *Zur Theorie der Meromorphen Funktionen* (1), M. Nevanlinna étudie les fonctions méromorphes dans le cercle de rayon *un*. On peut généraliser certains résultats de M. Nevanlinna en utilisant la fonction $U(x) = x^{1+\alpha(x)}$ introduite dans le Chapitre I.

Considérons une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| < 1$, et d'ordre fini.

Si l'on pose toujours

$$N(x) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx,$$

on a

$$N(x) \sim \int_0^r n(x)\,dx, \tag{IV, 1}$$

puisque x tend vers *un*.

Si r_n est le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z)$, posons

$$a_n = \frac{1}{1 - r_n},$$

a_n tendra vers l'infini lorsque r_n tend vers 1. Pour étudier la convergence de la série

$$\sum [U(a_n)]^{-\lambda-1},$$

(1) R. Nevanlinna, *Zur Theorie der Meromorphenn Funktionen* (*Acta mathematica*, t. 46, 1925, p. 1-99).

donc de

$$\sum \left[\mathrm{U}\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right]^{-\lambda-1}$$

nous avons considéré

$$\int_0^{\mathrm{R}} \frac{n_1(x)}{x\,\mathrm{U}(x)^{\lambda+1}}\,dx;$$

nous introduirons donc ici

$$(\mathrm{IV},\ 2)\qquad \int_0^r \frac{n(y)}{\dfrac{1}{1-y}\,\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-y}\right)^{\lambda+1}}\,\frac{dy}{(1-y)^2} = \int_0^r n(y)\left[\mathrm{U}\left(\frac{1}{1-y}\right)\right]^{-\lambda-1}\frac{dy}{1-y},$$

$n(x)$ étant le nombre des zéros de $f(z)$ qui figure déjà dans (IV, 1). Intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^r n(y)\left[\mathrm{U}\left(\frac{1}{1-y}\right)\right]^{-\lambda-1}\frac{dy}{1-y}\\
&= \left\{\int_0^r n(y)\,dy\left[\mathrm{U}\left(\frac{1}{1-y}\right)\right]^{-\lambda-1}\frac{1}{1-y}\right\}_0^r\\
&\quad + \int_0^r \mathrm{N}(y)\left[\frac{(\lambda+1)\,\mathrm{U}'\left(\dfrac{1}{1-y}\right)}{(1-y)^3\,\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-y}\right)^{\lambda+2}} - \frac{1}{(1-y)^2\,\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-y}\right)^{\lambda+1}}\right]dy\\
&= \frac{\mathrm{N}(r)\left[\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right]^{-\lambda-1}}{1-r} - \int_0^r \mathrm{N}(y)\,\frac{1}{(1-y)^2\,\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-y}\right)^{\lambda+1}}\\
&\quad \times\left[1-(\lambda+1)\,\frac{\mathrm{U}'\left(\dfrac{1}{1-y}\right)}{(1-y)\,\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-y}\right)}\right]dy,
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\mathrm{U}'\left(\dfrac{1}{1-y}\right)}{(1-y)\,\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-y}\right)}$ tend vers 1, d'ici l'intégrale

$$\begin{aligned}
(\mathrm{IV},\ 3)\qquad &\int_0^r n(y)\left[\mathrm{U}\left(\frac{1}{1-y}\right)\right]^{-\lambda-1}\frac{dy}{1-y}\\
&= \frac{\mathrm{N}(r)\left[\mathrm{U}\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right]^{-\lambda-1}}{1-r}\\
&\quad + (\lambda+\varepsilon)\int_0^r \mathrm{N}(x)\left[\mathrm{U}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^{-\lambda-1}\frac{dx}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Si l'intégrale dans le second membre (IV,3) converge, donc si l'intégrale

$$\int_r^{r+\frac{1-r}{2}} \frac{N(r)\left[U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{-\lambda-1}}{(1-r)^2}\,dr$$

tend vers zéro, le rapport

$$\frac{N(r)\left[U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{-\lambda-1}}{1-r}$$

tend vers zéro, et par suite la série

$$\text{(IV, 4)} \qquad \sum\left[U\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right]^{-\lambda-1}$$

converge, l'intégrale du premier membre du (IV, 3) est nécessairement bornée et, inversement, si l'intégrale du premier membre converge, l'intégrale dans le second membre est bornée et le rapport

$$\frac{N(r)\left[U\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{-\lambda-1}}{1-r}$$

tend vers zéro.

On a ainsi le résultat suivant :

XV. *Si r_n est le module du $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < 1$, et si λ est un nombre positif, la série*

$$\sum\left[U\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right]^{-\lambda-1}$$

converge ou diverge avec les intégrales

$$\int_0^1 n(x)\left[U\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^{-\lambda-1}\frac{dx}{1-x},$$

$$\int_0^1 N(x)\left[U\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^{-\lambda-2}\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

IV, 2. *Définition.* — Lorsque $f(z)$ est une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < 1$, on prendra pour définition de l'ordre

$$\rho = \overline{\lim_{r=1}}\, \frac{\log T(r)}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

M. Valiron a montré que la seconde inégalité fondamentale de M. Nevanlinna peut s'écrire (IV, 5)

$$\text{(IV, 5)} \quad T(r) < N(r;\, a) + N(r;\, b) + N(r;\, c) + k \log \frac{1}{1-r} \qquad (k > 0),$$

et que cette forme est valable pour les fonctions méromorphes dans un cercle $|z| < 1$ [1].

Multiplions les deux membres de (IV, 5) par $\dfrac{dr}{U(r)^{1+\rho}}$ et intégrons de α à r; comme ρ est positif, on obtient en remplaçant x par $\dfrac{1}{1-x}$, l'inégalité

$$\text{(IV, 6)} \quad \int_0^r T(x)\left[U\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^{-\lambda-1} \frac{dx}{(1-x)^2} < \sum_3 \int_0^r N(x;\, a)\left[U\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^{-\lambda-1} \frac{dx}{(1-x)^2} + c,$$

c étant une constante si l'ordre est fini. Pour une fonction d'ordre fini ρ, l'intégrale

$$\text{(IV, 7)} \quad \int_0^r T(x)\left[U\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^{-\lambda-1} \frac{dx}{(1-x)^2}$$

converge pour $\lambda > \rho$ et diverge pour $\lambda < \rho$. L'ordre peut donc aussi être défini comme suit : c'est le nombre ρ tel que (IV, 7) converge pour $\lambda > \rho$ et diverge si $\lambda < \rho$.

Lorsque ρ est positif et fini, la fonction sera de la classe inférieure ou supérieure de son ordre suivant que (IV, 7) converge ou diverge pour $\lambda = \rho$.

En se reportant aux définitions et propriétés de (IV, 5), on voit que l'on a la propriété suivante :

XVI. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini dans un cercle $|z| < 1$, et a, b, c trois nombres distincts, $a \neq b \neq c \neq a$, l'inégalité* (IV, 6) *est valable pour $r < 1$.*

Il en résulte de (IV, 6) et du théorème XV que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit

---

(1) VALIRON, *Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes* (*Acta mathematica*, t. 47, 1925).

d'ordre ρ *est que la série* (IV, 4) *converge pour* $\lambda < \rho$ *et pour trois valeurs* a, b, c *et diverge pour* $\lambda < \rho$ *et pour l'une au moins de ces valeurs.*

Il s'ensuit immédiatement que :

XVII. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit d'ordre* ρ *et de la classe inférieure du type* $U(x)$ *est que la série* (IV, 4) *converge pour* $\lambda = \rho$ *et pour trois valeurs* a, b, c, *et diverge pour* $\lambda > \rho$ *et pour l'une au moins de ces valeurs.*

IV, 3. On pourra, comme au Chapitre III, obtenir des propositions relatives à la dérivée. La convergence de la série (IV, 4) pour ($\lambda = \rho$) les zéros de $f(z) - a$ et $f(z) - b$ entraîne la convergence de la série analogue relative aux zéros de la dérivée. Si la série (IV, 4) diverge pour $\lambda = \rho$ et pour les zéros de la dérivée, elle diverge pour les zéros de $f(z) - x$, sauf au plus pour une seule valeur de x (finie ou infinie).

CHAPITRE V.

SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION MÉROMORPHE DE LA CLASSE SUPÉRIEURE DANS LE VOISINAGE D'UNE SINGULARITÉ.

V, 1. En généralisant les résultats obtenus par M. Valiron [1], on peut obtenir la proposition suivante concernant l'intégrale

$$\text{(V, 1)} \qquad \int^{\infty} \frac{T(r)}{r\,U(r)^{\rho}}\,dr$$

supposée divergente.

XVIII. *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe, sauf à l'infini, d'ordre* ρ *fini et positif, et soit* $T(r)$ *la fonction caractéristique correspondante. Nous supposons que* $f(z)$ *est de la classe supérieure de son ordre, c'est-à-dire que l'intégrale* (V, 1) *diverge. Dans ces conditions,*

---

[1] VALIRON, *Sur les valeurs d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 187, 1928, p. 803-805).

il existe une suite de cercles C (n)

$$|z - z(n)| < \varepsilon_n |z(n)|,$$

ε_n *tendant vers zéro et* $|z(n)|$ *croissant indéfiniment lorsque l'indice* n *croît indéfiniment, qui jouissent de cette propriété. Pour chaque* n, $f(z)$ *prend* N (n) *fois au moins dans* C (n) *toute valeur, sauf au plus celles qui sont représentées sur la sphère de Riemann à l'intérieur de l'un ou l'autre de deux cercles de rayon* e^{-n}. *la série*

$$\sum \frac{N(n)}{U[|z(n)|]^\rho}$$

étant divergente.

Supposons d'abord que

$$\frac{T(r)}{U(r)^\rho}$$

ne tende pas vers zéro. Il existe une suite de r_n pour lesquels

$$\frac{T(r_n)}{U(r_n)^\rho} > \alpha > 0. \tag{V, 2}$$

D'après (V, 2), il existe *a fortiori* des valeurs r pour lesquelles

$$\frac{T(r)}{U(r)^\rho} > \frac{\alpha}{25}. \tag{V, 3}$$

Distinguons deux cas :

1° L'inégalité (V, 3) a lieu à partir d'une valeur de r. Alors, d'après le théorème VI du Mémoire déjà cité de M. Milloux [1], il existe une suite de cercles $C_n(q)$ de rayon $\frac{r_n}{q}$, centre z_n, $|z_n = r_n|$, dans chacun desquels $f(z) - a$ possède au moins

$$N(n) = \frac{A}{q^2}\frac{\alpha}{25}U(r_n)^\rho$$

zéros, sauf au plus pour des valeurs a qui peuvent être enfermées dans deux cercles de rayon e^{-n}. En prenant $q = \sqrt{n}$, on a

$$\sum \frac{N(n)}{U(r_n)^\rho} = \sum \frac{A\alpha}{25\,n},$$

ce qui démontre le théorème XVIII.

---

[1] MILLOUX, *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta mathematica*, t. 52, 1928).

2° L'inégalité (V, 3) est vérifiée seulement pour une suite **infinie** de valeurs de r, donc dans une infinité d'intervalles (R_n, R'_n). Une infinité de ces intervalles renferment des points r_n pour lesquels (V, 2) est vérifiée.

Considérons l'un d'eux. On a

$$T(R_n) = \frac{\alpha}{25} U(R_n)^\rho, \qquad T(R'_n) = \frac{\alpha}{25} U(R'_n)^\rho,$$

$$T(R'_n) > T(r_n) > \alpha U(r_n)^\rho > \alpha U(R_n)^\rho,$$

puisque

$$R_n < r_n < R'_n.$$

Il s'ensuit que

$$U(R'_n) > 25^{\frac{1}{\rho}} U(R_n)$$

et, d'après les propriétés de U (x),

$$R'_n > 25^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} R_n.$$

Il existe donc, dans l'intervalle (R_n, R'_n) un nombre

$$R''_n = R_n k, \qquad \left(k = 25^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}\right),$$

et l'on a

$$T(R''_n) > \frac{\alpha}{25} U(R''_n)^\rho = \frac{\alpha}{25} 25^{1-\varepsilon'} U(R_n)^\rho > 24\, T(R_n).$$

On peut alors appliquer le théorème IV de M. Milloux [1], en y prenant

$$R = R''_n = k R_n, \qquad r = \frac{R_n}{k},$$

et les cercles (C_i) de l'énoncé de M. Milloux satisfaisant aux mêmes conditions que les cercles C (n) trouvés dans le premier cas.

Le théorème XVIII est encore démontré dans ce second cas.

V, 2. Supposons maintenant que T (r) : U $(r)^\rho$ tende vers zéro. On a vu au Chapitre III que

$$\int_{r_0}^{r} \frac{T(r)}{r\, U(r)^\rho} dr < \sum_{3} \int_{r_0}^{r} \frac{N(r\,;\, a_i)}{r\, U(r)^\rho} dr - k$$

---

(1) Milloux, *Les cercles de remplissage*... (déjà cité).

ou, encore, d'après le Chapitre I,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{T}(r)}{r\,\mathrm{U}(r)^{\rho}}\,dr < (1+\varepsilon)\sum_{\mathfrak{J}} \int_{r_0}^{r} \frac{n(x;\,a)}{x\,\mathrm{U}(x)^{\rho}}\,dx + k',$$

puisque, par hypothèse, $\mathrm{T}(r) : \mathrm{U}(r)^{\rho}$; donc, *a fortiori*, $\mathrm{N}(r, a) : \mathrm{U}(r)^{\rho}$ tend vers zéro. Écrivons cette inégalité pour une valeur $r = 2^n$ et remplaçons-y les intégrales par la somme des intégrales prises dans les intervalles $(r_0 = 2^{q_0}, 2^{q_0+1})$, $(2^{q_0+1}, 2^{q_0+2})$, ..., $(2^m, 2^{m+1})$.

Comme

$$\int_{2^q}^{2^{q+1}} \frac{n(x;\,a)}{x\,\mathrm{U}(x)^{\rho}}\,dx < \frac{n(2^{q+1},\,a)}{\mathrm{U}(2^q)^{\rho}},$$

$$\int_{2^q}^{2^{q+1}} \frac{\mathrm{T}(r)}{r\,\mathrm{U}(r)^{\rho}}\,dr > \frac{\mathrm{T}(2^q)}{2\,\mathrm{U}(2^{q+1})^{\rho}},$$

et puisque $\mathrm{U}(2^{q+1}) = \mathrm{U}(2^{q-1})(4+\varepsilon)$ et que $n(r, a) : \mathrm{U}(r)^{\rho}$ tend aussi vers zéro, on obtient

$$\text{(V, 4)} \qquad \sum_{m_0}^{m} \frac{\mathrm{T}(2^{q+1})}{\mathrm{U}(2^q)^{\rho}} < \mathrm{K}'' \sum_{\mathfrak{J}} \sum_{m_0}^{m-1} \frac{2+\varepsilon}{\rho}\,4^{\rho}\,\frac{n(2^{q+1},\,a)}{\mathrm{U}(2^q)^{\rho}}.$$

Si l'on désigne par $p(q, a)$ le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans la couronne

$$2^{q-1} < |z| \leqq 2^q,$$

on a

$$n(2^{q+1},\,a) = p(q+1,\,a) + p(q,\,a) + \ldots + p(1,\,a) + n(1,\,a)$$

et, en portant ces valeurs dans le second membre de (V, 4), on voit que le coefficient de $p(q, a)$ sera

$$\frac{1}{\mathrm{U}(2^{q-1})^{\rho}} + \frac{1}{\mathrm{U}(2^q)^{\rho}} + \ldots < 2\int_{2^{q-2}}^{\infty} \frac{dx}{x\,\mathrm{U}(x)^{\rho}} = \frac{2+\varepsilon}{\rho}\,\frac{1}{\mathrm{U}(2^{q-2})^{\rho}}$$

et l'on aura

$$\text{(V, 5)} \qquad \sum_{m_0}^{m} \frac{\mathrm{T}(2^{q+1})}{\mathrm{U}(2^q)^{\rho}} < \mathrm{K}''' + \frac{4+\varepsilon}{\rho^2}\,16^{\rho} \sum_{\mathfrak{J}} \sum_{m_0}^{m} \frac{p(q,\,a)}{\mathrm{U}(2^q)^{\rho}}.$$

On peut alors combiner, d'après la manière de M. Valiron [1], le

---

[1] Valiron, *Sur les valeurs d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité* (déjà cité).

théorème I du Mémoire déjà cité de M. Milloux avec l'inégalité (V, 5).

Comme l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r\,U(r)^{\rho}}\,dr \tag{V. 6}$$

diverge, le premier membre de (V, 5) diverge.

Considérons la couronne Δ_n

$$2^{n-1} < |z| < 2^n,$$

et partageons-la en petits domaines de dimensions $2^n \varepsilon$, il y en a $\frac{k}{\varepsilon^2}$. On entoure chacun d'un cercle Γ, et l'on prend le cercle concentrique de rayon double. Si, dans le cercle concentrique, le nombre des zéros de $f(z) - x$ est moindre que

$$\eta\, T(2^{n+1})$$

pour trois valeurs x à la distance e^{-n}, le nombre des zéros de $f(z) - x$ dans Γ est au plus

$$\eta H\, T(2^{n+1}) + H' n,$$

sauf pour x appartenant à un cercle de rayon e^{-n}.

I. Si ceci a lieu dans chaque cercle concentrique avec Γ, le nombre de zéros de $f(z) - x$ dans Δ_n est au plus

$$\frac{k}{\varepsilon^2}\eta H\, T(2^{n+1}) + \frac{H' k n}{\varepsilon^2},$$

sauf peut-être pour des x intérieurs à des cercles dont la somme des rayons est

$$\frac{k}{\varepsilon^2 e^n}.$$

II. Si, dans Δ_n, cette circonstance n'a pas lieu, il y a un cercle Γ_n coupant Δ_n dans lequel $f(z) - x$ possède

$$\eta\, T(2^{n+1})$$

zéros, sauf au plus pour des valeurs x enfermées dans deux cercles de rayon $\frac{1}{e^n}$. Pour $n > n_0$, on peut trouver des nombres a, b, c, extérieurs à tous les cercles exclus dans le cas I.

Pour toute couronne Δ_n, on a le cas I ou le cas II.

Considérons les couronnes où l'on a le cas II. Je dis que pour ces couronnes

$$(\text{V}, 7) \qquad \sum{}'' \frac{T(2^{n+1})}{U(2^n)^\rho}$$

diverge. Car, si cette série convergeait, la série

$$\sum{}'' \frac{p(n,\,a)}{U(2^n)^\rho}$$

étendue aux mêmes valeurs de n convergerait aussi, puisque

$$p(n,\,a) < \frac{T(2^{n+1})}{\log 2} + H'.$$

Donc, pour les n donnant I, on aurait

$$\sum_1^m{}' \frac{T(2^{n+1})}{U(2^n)^\rho} < K'' + K' \sum_3 \left[\sum_1^m{}' \frac{p(n,\,a)}{U(2^n)^\rho} \right]$$

$$< K'' + K' \frac{3kH}{\varepsilon^2} \eta \sum_1^m{}' \frac{T(2^{n+1})}{U(2^n)^\rho} + \frac{3H'k}{\varepsilon^2} \sum \frac{n}{U(2^n)^\rho},$$

et la série du premier membre divergerait. Cette inégalité est impossible si

$$\frac{3kH}{\varepsilon^2} \eta < 1.$$

V, 3. Le cas II se présente donc dans une suite infinie de couronnes Δ_n, rendant (V, 7) divergente. Le rayon de Γ_n est $\varepsilon 2^{n+1}$ et $\eta < \frac{\varepsilon^2}{3kH}$. Or, ε et par suite η étant donnés,

$$\sum{}'' \frac{T(2^{n+1})}{U(2^n)^\rho}$$

diverge. Prenons des cercles Γ_n assez nombreux pour que la somme de la série pour ces cercles soit supérieure à un nombre donné, 100 par exemple. Soit n_1 la dernière valeur de n utilisée.

Ensuite, remplaçons ε' par $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$, donc η par $\eta_{,} = \frac{\eta}{4}$, et prenons de nouveaux cercles Γ_n, $n < n_1$, correspondant à ces nombres ε' et η' et tels que

$$\sum_{\eta'} \frac{T(2^{n+1})}{U(2^n)^\rho} > 100,$$

et ainsi de suite. On voit ainsi qu'il existera une suite de cercles Γ_n

$$| z - z(n) | < \varepsilon(n) | z(n) |,$$

$\varepsilon(n)$ tendant vers zéro, tels que dans Γ_n $f(z) - x$ possède au moins $N(n) = \eta\, T(2^{n+1})$ zéros, sauf pour les x enfermés dans deux cercles de rayon $\frac{1}{e^n}$ et

$$\sum{}'' \eta \frac{T(2^{n+1})}{U(2^n)^\rho} = \sum \frac{N(n)}{U(2^n)^\rho}$$

diverge, ce qui démontre encore dans ce dernier cas le théorème XVIII.

V, 4. On a une suite de cercles C (n), telle que, dans C (n) $f(z)$ prend N (n) fois au moins les valeurs x extérieures à deux cercles γ_n, γ'_n de rayon e^{-n}, et

$$\text{(V, 8)} \qquad \sum \frac{N(n)}{U[|z(n)|]^\rho}$$

diverge.

Considérons la série

$$\text{(V, 9)} \qquad \sum \frac{1}{U[r(q, x)]^\rho}$$

étendue aux modules $r(q, x)$ des zéros de $f(z) - x$ situés dans ces cercles C (n). Supposons que cette série converge pour une valeur $x = a$. Le point a appartient à une suite de cercles γ_n ou γ'_n. Supprimons les cercles C (n) pour lesquels a est extérieur à γ_n et γ'_n. Pour ces cercles supprimés, les termes correspondants de (V, 8) forment une série convergente, sans quoi (V, 9) divergerait pour $x = a$, contrairement à l'hypothèse. Donc, pour les cercles C (n) conservés

$$\text{(V, 10)} \qquad \sum{}' \frac{N(n)}{U[|z(n)|]^\rho}$$

diverge encore et a appartient à l'un des cercles γ_n, γ'_n. Si pour $b \neq a$ (V, 10) converge, on procédera de même.

On conservera ainsi une suite de cercles C″ (n) *pour lesquels*

$$\text{(V, 11)} \qquad \sum{}'' \frac{N(n)}{U[|z(n)|]^\rho}$$

diverge encore et pour lesquels a et b appartiennent tous deux à γ_n et γ'_n, donc l'un à γ_n, l'autre à γ'_n dès que n est assez grand. Si c est distinct de a et b, pour n assez grand, il est extérieur à γ_n et γ'_n. donc $f(z) - c$ a au moins $N(n)$ zéros dans les $C(n)$ et

$$\sum\nolimits'' \frac{N(n)}{U[|z(n)|]^\rho}$$

diverge, donc aussi *a fortiori* (V, 9) pour $x = c$.

On obtient ainsi le théorème suivant :

XIX. *Si la fonction $f(z)$ méromorphe d'ordre fini ρ est de la classe supérieure du type* $U(x)$, *il existe une suite infinie de cercles* $C(n)$

$$|z - z(n)| < \varepsilon_n |z(n)|, \qquad \lim \varepsilon_n = 0.$$

tels que la série

$$\sum \frac{1}{U[r(q, x)]^\rho},$$

étendue aux modules des zéros de $f(z) - x$ (si x infini, il s'agit des pôles) situés dans les $C(n)$, *est divergente pour toutes les valeurs de x, sauf pour deux valeurs au plus (dont l'une peut être infinie).*

Considérons maintenant les cercles $C''(n)$ et la série divergente correspondante (V, 11). Divisons le plan en p secteurs égaux de sommet origine et ouverture $\frac{2\pi}{p}\cdot$ Considérons les cercles $C''(n)$ dont les centres sont dans l'un des secteurs et formons la série

$$\sum\nolimits''' \frac{N(n)}{U[|z(n)|]^\rho}$$

relative à ce secteur. Pour l'un des secteurs au moins, cette série est divergente. On peut de nouveau diviser ce secteur en p secteurs et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une direction Δ telle que, si l'on prend les cercles $C''(n)$ dont le centre est dans un angle α de sommet origine et bissectrice Δ, la série (V, 11) restreinte à ces cercles divergera. Les cercles $C''(n)$ de rang assez élevé dont le centre est dans l'angle α seront dans un angle de bissectrice Δ et d'ouverture double. On obtient ainsi ce théorème :

XX. *$f(z)$ étant de la classe supérieure de l'ordre ρ et du type* $U(x)$, *il existe une direction au moins telle que, dans tout angle de bissectrice Δ, la série* (V, 9) *restreinte aux modules des zéros de $f(z) - x$ intérieurs à cet angle est divergente, sauf au plus pour deux valeurs de x.*

On sait, par ce qui se passe pour les directions, que M. Valiron a appelé *directions de Borel*, que la direction peut être unique pour une fonction méromorphe d'ordre quelconque. Mais on peut se demander s'il n'existe pas toujours deux directions Δ au moins pour les fonctions entières d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$.

Vu et approuvé :

Strasbourg, le 26 février 1930.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

E. ROTHÉ.

Vu et permis d'imprimer :

Srasbourg, le 28 février 1930.

LE RECTEUR,

PRÉSIDENT DU CONSEIL DE L'UNIVERSITÉ,

CH. PFISTER.

OUVRAGES A CONSULTER.

BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903).

BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, 2[e] édition (Paris, Gauthier-Villars, 1921).

BOREL, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II et III (Paris, Gauthier-Villars, 1925).

HADAMARD et MANDELBROJT, *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

JULIA, *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

KNOPP, *Theorie und Anwerdung der Unendlichen Reihen* (Verlag von Julius Springer in Berlin, 1924).

MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la Théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

VALIRON, *Lectures on the General Theory of integral Functions* (Deighton, Bell and C°, Cambridge).

BIBLIOGRAPHIE.

1. Bloch (A.). — Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité (*Mémorial des Sciences mathématiques*, 1926).
2. Hadamard (J.). — Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (*Journal de Mathématiques*, t. 9, 1893).
3. Julia (G.). — Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. 36, 1919; t. 37, 1920; t. 38, 1921).
4. Lindelöf (E.). — Sur les fonctions entières d'ordre entier (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. 22, 1905).
5. Milloux (H.). — *a*. Sur la croissance des fonctions entières d'ordre fini et leurs valeurs exceptionnelles dans des angles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 176).

   b. Sur la théorie des fonctions entières d'ordre fini (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 185, 1927).

   c. Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel (*Acta mathematica*, t. 52, 1928).
6. Nevanlinna (R.). — *a*. Sur les fonctions méromorphes (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 178, 1924).

   b. Zur Theorie der meromorphen Funktionen (*Acta mathematica*, t. 46, 1925, p. 1-99).
7. Valiron (G.). — *a*. Sur le maximum du module des fonctions entières (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 166, 1918, p. 605).

   b. Remarques sur le théorème de M. Picard (*Bull. des Sc. math.*, 2^e^ série, t. 44 A, 1920, p. 91-104).

   c. Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. 37, 1920).

   d. Sur les fonctions entières d'ordre fini (*Bull. des Sc. math.*, 2^e^ série, t. 45, 1921).

   e. Sur les fonctions entières d'ordre entier (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 174, 1922).

   f. Le théorème de Laguerre-Borel dans la théorie des fonctions entières (*Bull. des Sc. math.*, 2^e^ série, t. 46, 1922, p. 432-445).

   g. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. 49, 1925).

h. **Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes** (***Acta mathematica***, t. **47**, 1925, p. 117-141).

i. Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable (***Mémorial des Sciences mathématiques***, Paris, Gauthier-Villars, 1925).

j. Sur une propriété des fonctions méromorphes d'ordre positif (***Bull. des Sc. math.***, t. **50**, 1926).

k. Remarque sur la convergence des suites de fonctions holomorphes (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. **50**, 1926).

l. Sur les fonctions méromorphes sans valeurs asymptotiques (***Comptes rendus Acad. Sc.***, t. **182**, 1926).

m. Sur quelques propriétés des fonctions entières (***Comptes rendus Acad. Sc.***, t. **185**, 1927).

n. Sur les coefficients des séries de Taylor usuelles (***Comptes rendus Acad. Sc.***, t. **185**, 1927).

o. Compléments au théorème de Picard-Julia (***Bull. des Sc. math.***, 2e série, t. **51**, 1927, p. 167-183).

p. Sur les chemins de détermination des fonctions entières (***Bull. Soc. math.***, t. **45**, 1917).

q. Sur les valeurs d'une fonction méromorphe dans le voisinage d'une singularité (***Comptes rendus Acad. Sc.***, t. **186**, 1928).

r. Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes (***Comptes rendus Acad. Sc.***, t. **186**, 1928).

s. **Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes** (*Acta mathematica*, t. **52**, 1928).