ÉDOUARD CALLANDREAU

Sur l'application et l'extension des méthodes de Boussinesq à la détermination des coefficients de poussée dans les massifs pulvérulents à talus inclinés

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1931

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1931__120__1_0>

N° D'ORDRE :
2169
Série A.
N° de Série 1300.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. ÉDOUARD **CALLANDREAU**

Ingénieur des Arts et Manufactures,
Maître de Conférences à l'École Centrale des Arts et Manufactures,
Licencié ès Sciences mathématiques.

1re THÈSE. — SUR L'APPLICATION ET L'EXTENSION DES MÉTHODES DE BOUSSINESQ A LA DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DE POUSSÉE DANS LES MASSIFS PULVÉRULENTS A TALUS INCLINÉS.

2e THÈSE. — ÉTUDE DES FONCTIONS HARMONIQUES RÉGULIÈRES DE DEUX VARIABLES DANS LE DOMAINE DU POINT A L'INFINI.

Soutenues le mars 1931, devant la Commission d'examen

MM. KŒNIGS, *Président.*
VILLAT, CHAZY } *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1931

91060-31 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

OCTAVE CALLANDREAU

MEMBRE DE L'INSTITUT

A MA FEMME

PREMIÈRE THÈSE

SUR L'APPLICATION ET L'EXTENSION DES MÉTHODES DE BOUSSINESQ

A LA

DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DE POUSSÉE

DANS

LES MASSIFS PULVÉRULENTS A TALUS INCLINÉ

I. Équations d'équilibre-limite d'une masse pulvérulente homogène à profil supérieur rectiligne. — **II.** Solutions des équations d'équilibre, (Solution de Maurice Levy; Solutions voisines de Barré de Saint-Venant; Massifs hétérogènes de Boussinesq. Expressions approchées par défaut et par excès de la poussée). — **III.** Cas du mur vertical. Étude de la plus petite limite supérieure. (Existence d'un minimum unique. Sa recherche pratique). — **IV.** Les coefficients k_0 par défaut; les plus faibles coefficients k par excès; les coefficients de poussée K. Résultats numériques. Cas où le mur n'est pas vertical. — Conclusion.

INTRODUCTION.

Le présent travail est destiné à servir de contribution à la théorie de la poussée des terres et des masses pulvérulentes. Son but est d'étendre au cas d'un massif pulvérulent en pente, les méthodes proposées par Boussinesq pour le terre-plein horizontal et en particulier de rechercher la limite supérieure la meilleure, c'est-à-dire la plus petite, de la poussée exercée par le massif sur le mur qui le contient. Il a d'une manière plus générale, en vue la détermination théorique et pratique des coefficients de poussée à intervenir lors de l'état d'équilibre-limite de la masse pulvérulente considérée.

Avant toutes choses, nous croyons dès le début devoir faire quelques remarques sur le problème de la poussée des terres, ou d'une manière plus générale des masses pulvérulentes, spécialement en ce qui concerne les hypothèses qui résident à la base des recherches. Nous voulons espérer que cela permettra en tout cas d'avoir une vue d'ensemble sur une question qui reste d'ordinaire assez confuse.

Rankine paraît le premier avoir d'une manière un peu précise étudié les conditions d'équilibre intérieur d'un solide sans cohésion. Il a résolu la question pour le cas particulier d'un massif indéfini, limité par une surface libre plane. Il utilise la répartition connue des efforts autour d'un point du milieu et suppose que le glissement dans le massif se produit dès que l'angle de plus grande obliquité dépasse l'angle φ de frottement intérieur. Il admet l'existence en tout point du milieu d'un élément plan pour lequel la condition limite est satisfaite, ce qui revient à supposer la plus grande obliquité égale alors partout à φ, c'est-à-dire l'équilibre-limite réalisé en même temps en chaque point dans tout le massif intéressé. La théorie de Rankine énonce que dans ces massifs pulvérulents le frottement principalement intervient pour l'équilibre, que la résistance au cisaillement est nulle.

La matière considérée est en effet incapable de supporter des efforts de traction et de cisaillement simple. Ses particules ne sont retenues au contact les unes des autres que par l'existence de leur pression mutuelle p et du frottement qui en résulte $p \tang \varphi$. On doit donc tenir compte, pour l'équilibre, principalement du frottement intime de la matière sur elle-même, et comme la considération du frottement ne peut fournir que des inégalités, on devra avoir recours pour obtenir les égalités nécessaires, à des hypothèses auxiliaires, à la considération par exemple de l'équilibre-limite réalisé en même temps en tout point du massif intéressé. Le cisaillement effectif vaudra alors en chaque point la différence à l'effort tangentiel en ce point de l'effort de frottement relatif à la composante normale correspondante, et aura par suite pour valeur $t - p \operatorname{tang} \varphi$ où $\operatorname{tang} \varphi$ désigne le coefficient de frottement de la matière sur elle-même et où p représente toujours une compression. Ceci posé, pour qu'il n'y ait pas glissement, c'est-à-dire rupture de cisaillement, on devra avoir

$$t - p \operatorname{tang} \varphi < 0,$$

le premier membre étant pris avec sa valeur maxima, qui se produit comme l'on sait sur des directions telles que leurs normales fassent avec la direction de la plus grande pression principale l'angle

$$\pm\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Ce qui permet de mettre l'inégalité précédente sous la forme

$$\sin\varphi > P_2 - P_1,$$

où P_1 et P_2 désignent les pressions principales au point considéré.

La transformation de l'inégalité précédente en égalité fournit la condition de l'état d'équilibre-limite et constitue, pour cet état, l'équation caractéristique du massif dont les particules ne sont retenues en contact les unes des autres que par leur pression mutuelle et par le frottement qui en résulte $p \tan\varphi$. L'influence prépondérante du frottement dans une telle question rendrait donc nécessaire l'extension de la notion de frottement, définie seulement pour des *corps solides* en contact, à de semblables particules de masses pulvérulentes sans cohésion.

L'attention de Boussinesq, qui le premier a abordé l'étude du massif pulvérulent limité par une surface libre et un mur invariable, a été retenue par ce point. Sans entrer pour l'instant dans le détail de ses hypothèses que nous reproduisons du reste par la suite, nous dirons seulement, et cela servira à interpréter celles-ci, qu'il regarde une particule du massif tassé comme une particule *solide isotrope*, en considérant celle-ci — ce qui semble correspondre à une réalité physique pour de tels corps — comme beaucoup plus déformable que compressible. Les pressions y sont donc dépendantes en fonctions entières des déformations éprouvées à partir de l'état naturel, mais sans faire intervenir la loi de Hoocke qui indique une rigidité constante pour le *solide élastique*.

Le coefficient de rigidité de Lamé, au lieu d'être constant, serait alors variable et admis à titre de première et plus simple hypothèse, être proportionnel à la pression p, de sorte que le massif aurait à pression nulle une rigidité nulle, et une rigidité proportionnelle à la pression, soit np pour des pressions modérées. Boussinesq étend alors à la particule incompressible et soumise à des déformations planes la notion d'une limite d'élasticité, quant à la dilatation principale positive. On est ainsi conduit à l'équation caractéristique de l'état ébouleux, ou à la connaissance de l'angle de frottement de telles masses pulvérulentes, qui ne peut bien entendu être dépassé sans amener l'état ébouleux. L'équation caractéristique obtenue a du reste même écriture que l'expression susmentionnée.

*
* *

Arrêtons-nous un instant sur ces hypothèses qui servent de base au développement du présent travail. Qu'un tel massif soit supposé *continu*, cela semble nécessaire quand ce ne serait que pour légitimer l'emploi des équations indéfinies de l'équilibre, mais on peut toutefois remarquer que les grains pulvérulents qui composent le massif sont loin d'être identiques, ou même toujours très petits. Des discontinuités existent, des vides entre les grains restent toujours assez notables, et la preuve en est que l'on peut, par exemple, verser une quantité d'eau appréciable à travers la masse pulvérulente même tassée, sans que son volume apparent en semble modifié.

a. Les lois usuelles du *frottement* dans les corps solides sont-elles, d'autre part, applicables à des corps pulvérulents ? La notion de *frottement* entre les grains est difficile à préciser; elle semble pourtant fondamentale dans une question où le frottement paraît jouer le rôle principal. S'agit-il de grains sphériques ? mais alors le frottement intervient-il encore effectivement et ne serait-ce pas en tout cas plutôt un frottement accompagné d'un roulement qui serait à considérer. Le mouvement des grains qui en résulterait ne conduirait-il pas plutôt alors à un problème dynamique qu'à un problème statique ? S'agit-il au contraire de grains cubiques ? des coincements pourraient alors se produire, d'arêtes ou de sommets sur des faces; qu'entend-on alors par frottement ? Notons seulement que Boussinesq considère non les grains eux-mêmes, mais une réunion, un petit agglomérat de grains qu'il assimile à une particule solide isotrope à laquelle il étend alors pour la masse pulvérulente les notions de frottement et d'élasticité.

b. La considération d'état ébouleux introduit en fait deux hypothèses distinctes qui paraissent, *a priori*, et physiquement parlant assez arbitraires, savoir :

1° Que l'état ébouleux est partout réalisé à la fois dans le massif.

2° Que, contre le mur, la poussée fait avec la normale au mur l'angle φ de frottement intérieur.

Boussinesq fait abstraction des perturbations dues au voisinage du fond solide, ce qui revient à supposer le massif indéfiniment étendu vers le bas; il admet aussi et cela semble être bien rarement réalisé pratiquement, que l'état physique du massif ne dépende que de la profondeur sous la surface libre et par conséquent soit indépendant de la distance au mur. Or, si nous considérions le massif sablonneux, à double versant, la dernière hypothèse permettrait l'intégration du système, puisque alors les équations aux dérivées partielles du problème deviendraient de simples équations différentielles. On vérifierait facilement que sur l'une des surfaces libres les efforts s'annulent comme il convient et que l'état ébouleux se trouve bien réalisé dans le voisinage de cette surface. Mais il ne paraît pas, à moins que la seconde surface libre ne soit dans le prolongement de la première, possible de réaliser sur celle-là l'annulation des efforts, ni la condition d'état ébouleux. Peut-être est-il raisonnable de mettre en cause particulièrement la dernière hypothèse. Il n'en reste pas moins aussi que sans un état ébouleux réalisé en chaque point du massif intéressé, le problème ne saurait plus être pratiquement abordé puisque l'équilibre ne serait plus régi que par des inégalités.

En fait, Boussinesq considère seulement la partie du massif située en deçà du plan idéal de Maurice Lévy, c'est-à-dire du côté de la surface libre, comme possédant un état ébouleux y résidant partout à la fois en même temps, tout comme si le massif était indéfini en tous sens sous la surface libre. L'angle de la poussée avec la normale au plan de Lévy est l'angle φ de frottement intérieur du massif donné. L'influence de l'existence voisine du mur qui a vraisemblablement une répercussion plus ou moins sensible sur l'état physique de cette partie du massif est négligée. La portion du massif homogène située à partir et au delà du plan de Lévy jusqu'au mur est assimilée à une masse hétérogène par rapport à l'angle de frottement intérieur φ' supposé variable dans cette région et croissant jusqu'au mur où il atteint sa plus forte valeur. Cette région comporte alors un état d'équilibre, qui est démontré être à très peu près l'équilibre-limite du massif homogène donné.

c. Rappelons aussi qu'un milieu homogène est isotrope quand, à l'état naturel, la constitution du milieu autour de chaque point est la même dans toutes les directions. L'hypothèse de l'*isotropie* suppose donc l'existence d'un état naturel. Boussinesq suppose la masse d'abord sans pesanteur tout entière à l'état naturel, puis soumise peu à peu à une pesanteur croissante, de manière à passer par une suite d'états d'équilibre, sans que jamais soient dépassées ses primitives limites d'élasticité. Mais l'existence de cet état naturel semble moins que prouvée, car il est clair que les massifs ordinaires de sable ont leurs éléments disposés en général successivement les uns sur les autres et par chocs sans que jamais leur *ensemble* se trouve à l'état naturel, c'est-à-dire y admette l'absence de pressions tant intérieures qu'extérieures. Il est alors plus simple, ce qui du reste revient au même, de supposer le massif assez uniforme pour regarder les particules comme constituées de même dans toute leur étendue, de sorte que l'annulation des pressions de surface entraîne la disparition des pressions intérieures.

Il est vrai que, tenir compte de toutes ces conditions physiques est pratiquement impossible et que semblables difficultés, qui existent aussi dans les problèmes d'équilibre relatifs aux petites déformations que produit la pesanteur dans les solides, y sont alors en général négligées. On admet en effet d'ordinaire dans ces corps l'existence d'un état naturel antérieur à l'application de cette force, hypothèse qui ne semble de manière rigoureuse être défendable que pour des solides très petits où les déformations dues à leur poids sont alors insignifiantes vis-à-vis de celles qui résultent de leur élasticité.

* * *

Nous n'avons pas à insister davantage. Ce n'est pas du reste notre rôle, qui consiste moins à discuter des hypothèses qu'à appliquer celles-ci au problème qui nous a été posé. Mais nous avons cru qu'il était indispensable d'indiquer aussi nettement que possible et de bien préciser les bases de la méthode suivie. Nous avons voulu aussi mettre en évidence la difficulté que présentent de tels problèmes quant à leur point de départ et au choix des hypothèses. Car si celles-ci même dans un but de clarté ou de simplification ne tiennent pas assez compte de la réalité physique de la matière étudiée, on peut craindre que la question s'en trouve dénaturée, et les résultats faussés. Les chiffres donnés par l'expérience pourront alors être utilement consultés, qui diront, si celles-ci sont toutefois susceptibles d'être retenues, pour expliquer et fixer, ne serait-ce que d'une manière approchée, la question.

Ceci dit, les grandes lignes de notre étude seront les suivantes :

Un premier chapitre aura pour objet de rappeler ou d'établir les équations générales ou particulières du système considéré en l'état d'équilibre-limite élastique plan avec répartition plane des pressions.

Une deuxième partie comporte une étude des équations elles-mêmes, et la recherche de leurs solutions ou plutôt la reconnaissance d'une solution *particulière* qui constitue la solution dite de Maurice Lévy. Nous pensons avoir réalisé celle-ci sous une forme plus simple qu'il n'était connu jusqu'alors par la mise en évidence, pour des systèmes de coordonnées convenablement choisis, de certaines de leurs propriétés analytiques. Des solutions voisines de cette solution dite de *mur idéal*, et à partir de celle-ci se déduiront suivant le procédé proposé par Barré de Saint-Venant, par l'adjonction à cette dernière de certains petits termes correctifs. L'introduction enfin, avec Boussinesq, de massifs hétérogènes (quant à l'angle de frottement intérieur φ) convenables permet d'obtenir des expressions par défaut et par excès de la poussée cherchée dans le massif homogène donné.

L'éloignement assez grand pour l'expression par excès de la valeur *exacte* nous a conduit à rechercher la *plus petite* limite supérieure. Il s'agit là d'un assez important problème de minimum qui fera l'objet d'un troisième chapitre. L'étude théorique en sera faite et l'on établira ensuite à l'usage du calcul numérique des formules à solutions approchées mais se confondant pratiquement, ainsi qu'il résulte de l'application de la théorie des erreurs, dans le domaine d'existence du problème, avec les solutions théoriques exactes.

Un certain nombre de coefficients de poussée proprement dits sont calculés dans un quatrième et dernier chapitre, en partant des arguments qui définissent les massifs. Ils permettent de jeter les bases éventuelles d'une table générale. Nous comparons les valeurs de ceux-ci qui paraissent être les meilleurs qu'il soit possible, pour nos hypothèses, d'obtenir, avec celles de coefficients tirés pour les mêmes arguments, soit d'autres théories, soit de résultats expérimentaux.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS D'EQUILIBRE-LIMITE D'UNE MASSE PULVERULENTE HOMOGÈNE, A PROFIL SUPERIEUR RECTILIGNE.

1. Nous considérons un massif pulvérulent, du genre d'un tas de sable, homogène, de densité constante et retenu d'un côté par le mur

qui le contient. Nous le supposons en état d'équilibre-limite, c'est-à-dire que nous admettons que le massif se trouve, par suite, par exemple d'un commencement d'ébranlement du mur, sur le point de s'ébouler, ce qui, puisque le massif est supposé sans cohésion, se produira en même temps dans toute son épaisseur. La poussée qu'il exerce à ce moment correspond à une plus grande valeur à laquelle en pratique le mur devra être calculé capable de résister.

Découpons dans le massif un volume élémentaire tel qu'un petit prisme par exemple, autour d'un point P (x, y, z). Les six quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 caractéristiques des efforts en ce point sont, à l'état d'équilibre, reliées, comme l'on sait, par le système d'équations indéfinies

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} = \rho X, \\[2mm] \dfrac{\partial N_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial T_3}{\partial z} = \rho Y, \\[2mm] \dfrac{\partial N_3}{\partial x} + \dfrac{\partial T_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} = \rho Z, \end{cases}$$

où ρ représente la densité au point xyz, et où X, Y, Z désignent les composantes des forces extérieures agissant sur l'élément de volume, système auquel du reste il y aurait lieu d'adjoindre les relations des conditions aux limites.

Il ne peut être question, pour expliciter ces systèmes, de recourir aux relations connues entre efforts et déformations telles qu'en théorie mathématique de l'élasticité pour les solides élastiques. Car il s'agit ici de corps *pulvérulents* ou *semi-fluides* comme les a dénommés Boussinesq dont les lois mécaniques sont particulières : aussi croyons-nous qu'il n'est pas inutile, autant pour fixer les idées dès le début que dans un but de simplification pour la suite, de noter les hypothèses que celui-ci a, assez récemment du reste et le premier, énoncées comme base de la mécanique de telles substances.

2. Les petits grains qui constituent le volume élémentaire ou particule sont supposés très peu compressibles, ce qui correspond du reste à une réalité physique d'autant plus vérifiée que la hauteur de semblables massifs n'est pas trop considérable. La dilatation cubique de la particule peut alors être regardée comme négligeable ou, en d'autres termes, sa densité peut être admise, comme il est supposé ici, constante. De sorte

que la particule semble ne comporter tout compte fait, *à la façon d'un sac rempli de sable*, que des déformations modifiant sa figure, mais non de manière appréciable son volume.

Pour chaque particule du massif, composée du reste d'une multitude de grains sablonneux, il existe, du moins quand on la conçoit isolée de ses voisines, un *état naturel* dans lequel aucune action ne s'exerce entre ses grains, chacun n'étant alors soumis qu'à la pression atmosphérique, mais uniquement pour son propre compte et sans action des grains entre eux.

A partir de cet état naturel, la particule peut éprouver des petites déformations. Les unes sont invisibles ou négligeables, et consistent en des contractions d'ensemble semblables en tous sens, et capables de produire entre les grains à travers les éléments plans menés à son intérieur, et par unité d'aire de ceux-ci, une pression normale commune p.

3. Les autres, beaucoup plus sensibles, ne modifiant toujours pas la densité de la particule, sont réductibles, suivant trois directions rectangulaires, à trois dilatations ou contractions principales δ_1, δ_2, δ_3 qui sont corrélatives à des roulements limités des grains les uns devant les autres, et à l'existence sur les éléments plans de cette particule respectivement perpendiculaires à ces directions de trois *pressions* principales P_1, P_2, P_3.

4. Par suite, et d'après les lois générales des pressions dans tous les corps, la moyenne arithmétique de ces trois forces principales P_1, P_2, P_3 n'est autre que la pression p, changée de signe puisque dans les milieux sans cohésion considérés, les forces P_1, P_2, P_3, pressions proprement dites, sont toujours négatives; de sorte que les déformations sensibles dont il s'agit, qui modifient encore la figure, mais non d'une manière appréciable le volume de la particule, paraissent y inégaliser les trois pressions principales P_1, P_2, P_3 sans changer leur moyenne p. Il leur correspond certainement des déformations des grains inégales dans les divers sens, et véritablement productrices des différences $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, $P_3 - P_1$ mais invisibles comme la contraction cubique à laquelle est due p.

Le massif pulvérulent, à grains sans actions mutuelles, quand s'annulent $-P_1$, $-P_2$, $-P_3$ et leur moyenne p acquiert au contraire dès que cette pression p devient positive une rigidité, ou résistance au glissement mutuel de ses couches contiguës que l'on supposera en première analyse proportionnelle à p. Ce qui revient à dire, ainsi qu'il résulte des relations relatives à la particule admise isotrope et incompressible,

$$(P_1, P_2, P_3) = -p + 2g(\delta_1, \delta_2, \delta_3),$$
$$(T_3, T_1, T_2) = \left(\frac{P_1 - P_2}{2}, \frac{P_2 - P_3}{2}, \frac{P_3 - P_1}{2}\right)$$
$$= g(\delta_1 - \delta_2, \delta_2 - \delta_3, \delta_3 - \delta_1),$$

que le rapport des différences $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, $P_3 - P_1$ des pressions principales aux doubles différences correspondantes $2(\delta_1 - \delta_2)$, $2(\delta_2 - \delta_3)$ $2(\delta_3 - \delta_1)$, des dilatations, admet une expression commune np, où n désigne un coefficient unique, caractéristique de la matière pulvérulente considérée, prise à son degré effectif de tassement.

5. Mais si chaque particule, prise à part, comporte pour la densité qu'elle a un état naturel où s'annulent $-P_1$, $-P_2$, $-P_3$ et leur moyenne $+p$, ainsi que les dilatations $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, et à partir duquel $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ restent insensibles quel que devienne p, pourvu que P_1, P_2, P_3 conservent leur égalité, il n'en est pas de même en général du massif entier que l'on forme en déposant et superposant peu à peu des couches pulvérulentes qui se tassent à mesure et irrégulièrement sous leur propre poids ou sous leur choc; en sorte que des particules contiguës ainsi déformées, si on les portait à l'état naturel, en les isolant, prendraient des figures incapables de se juxtaposer ensuite et de constituer un massif d'apparence continue.

Toutefois, quand il s'agit, comme c'est le cas ici, de déformations planes, où toutes les couches minces parallèles au plan vertical sont déformées de même en restant dans leurs plans respectifs, on peut admettre à titre de première hypothèse que chaque particule de ces couches a perdu son état naturel par des déformations analogues *ou sans sortir de son plan*, et pareilles pour toutes les particules juxtaposées suivant une normale à ce plan. Par suite, si l'on amenait une telle particule, en l'isolant de ses voisines, à son état naturel, puis de cet état à celui qui est effectivement le sien, ces changements se feraient par de pareilles déformations la laissant dans son plan et déplaçant de la même manière dans leurs plans respectifs parallèles les particules alignées en ligne perpendiculaire à ces plans.

Mais ces plans, pour les phénomènes étudiés, seraient alors des plans de symétrie sur lesquels s'exercerait une pression principale, soit P_3 par exemple. De plus, à partir de l'état naturel, la dilatation correspondante δ_3 serait nulle. Et comme la densité, c'est-à-dire la dilatation cubique, n'a pas pratiquement changé, on aurait donc

$$\delta_1 + \delta_2 = 0.$$

Dès lors, la double égalité

$$\frac{P_1 - P_2}{2(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{P_2 - P_3}{2(\delta_2 - \delta_3)} = np$$

s'écrira

$$\frac{P_1 - P_2}{4\delta_1} = \frac{P_2 - P_3}{-2\delta_1} = np,$$

d'où l'on tire

$$P_3 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2).$$

On aura donc

$$(2) \qquad p = -\frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3) = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) = -P_3,$$

ce qui confirme, soit dit en passant, que dans notre hypothèse la pression principale P_3 normale au plan des déformations vaut bien la moyenne arithmétique des deux autres P_1 et P_2 et représente au signe près la pression p.

Les équations précédentes donnent, d'autre part, en y remplaçant p par $-\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$,

$$\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = 2n\,\delta_1.$$

6. Or, dans un tel état d'équilibre avec répartition plane des pressions, les composantes tangentielle et normale de la pression en un point, ainsi qu'il est facile de les obtenir en les rapportant aux axes constitués par les éléments rectangulaires isostatiques porteurs des pressions principales, ont pour valeur

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{P_1 - P_2}{2} \sin 2\gamma, \\ \mathcal{N} &= \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2} \cos 2\gamma, \end{aligned} \right.$$

où γ représente l'angle que forme avec la direction de la plus grande des deux pressions principales l'élément plan du petit prisme sur lequel agit la pression en question.

Le maximum du rapport $\frac{\mathfrak{T}}{-\mathcal{N}}$ correspond à l'élément plan sur lequel s'exerce la pression la plus oblique, ou pour lequel l'angle φ, dont la tangente vaut $\frac{\mathfrak{T}}{-\mathcal{N}}$, de la pression et de la normale prolongée au point où celle-ci agit sur l'élément, est le plus grand. L'inclinaison γ correspondante s'obtient en annulant à zéro la dérivée par rapport à γ du quotient $\frac{\mathfrak{T}}{-\mathcal{N}}$, ce qui conduit, puisque P_1 est différent de P_2, à la relation

$$\cos 2\gamma = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}. \tag{4}$$

Le maximum du rapport $\frac{\mathfrak{T}}{-\mathcal{N}}$ vaut donc

$$\frac{P_2 - P_1}{2\sqrt{P_1 P_2}} = \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\sin\varphi = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}, \tag{5}$$

ce qui revient à dire que la quantité $2n\delta_1$ vaut alors le sinus de l'angle φ.

Or, l'analogie, d'une part des deux couches pulvérulentes en contact que sépare cet élément plan, avec deux solides tendant à glisser l'un contre l'autre, et d'autre part de la composante tangentielle $\mathfrak{T}$ au frottement mutuel de pareils solides sous une pression normale $(-\mathcal{N})$ porte à leur étendre la loi usuelle du frottement des solides d'après laquelle le rapport de $\mathfrak{T}$ à $(-\mathcal{N})$ ne saurait dépasser le coefficient de frottement mutuel des corps, ou la tangente de leur angle φ de frottement, sans amener entre eux un glissement effectif ou fini, c'est-à-dire ici cette instabilité du mode d'agrégation des grains de sable ou de la contexture des particules, qu'on appelle l'état ébouleux du massif.

Donc le produit $2n\delta_1$ atteindra tout au plus la valeur sin et rendra dès lors imminente la désagrégation de la particule par glissement mutuel fini des couches que sépare l'élément plan supportant la pression la plus oblique. Ce qui revient à dire que δ_1 comporte pour chaque matière pulvérulente une limite supérieure $\frac{\sin\varphi}{2n}$ qui est en quelque sorte la limite d'élasticité de cette matière pulvérulente. On déduit aussi de là que l'angle de frottement intérieur est aussi l'angle de terre coulante, c'est-à-dire le plus grand que puisse faire avec l'horizon, à l'état de repos ou sans s'ébouler, la surface libre d'un talus plan indéfini de la matière considérée se soutenant sous son propre poids.

7. L'équation (5) peut s'écrire en remplaçant $\frac{P_2+P_1}{2}$ par sa valeur $-p$ et φ ayant la signification précédente

$$P_1 - P_2 = 2p\sin\varphi. \tag{6}$$

La masse sablonneuse considérée, soutenue d'un côté par le mur, se trouve alors, ce qui correspond à la plus grande poussée sur celui-ci, en cet état d'équilibre-limite voisin de l'éboulement caractérisé par les relations (2) et (6) entre les pressions principales. On admet qu'il règne dans l'ensemble de la masse homogène sans cohésion, supposée s'étendre indéfiniment vers le bas, en faisant abstraction des perturbations dues au voisinage du fond solide sur lequel repose le massif, ce qui, comme déjà dit, est d'autant plus vérifié que la masse a une plus grande profondeur.

Le profil rectiligne supérieur du talus, incliné de l'angle ω sur l'horizon, est pris comme axe des y. L'axe des x normal à la surface supérieure est dirige vers le bas. Désignons par χ l'angle *aigu* que fait avec la direction Ox la plus grande des deux pressions principales; on aura alors, comme l'on sait, pour les composantes principales de la pression, les expressions

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 = \dfrac{N_1+N_2}{2} + \dfrac{N_2-N_1}{2\cos 2\chi}; \qquad P_2 = \dfrac{N_1+N_2}{2} - \dfrac{N_2-N_1}{2\cos 2\chi} \\ \text{et aussi} \\ \qquad\qquad T_3 = -\dfrac{N_2-N_1}{2}\,\mathrm{tang}\,2\chi, \end{array}\right. \tag{7}$$

N_1, N_2 et T_3 représentant dans le plan les efforts agissant sur l'élément. Portons celles-ci dans les équations (2) et (6) reliant entre elles les valeurs des pressions principales; il vient d'abord, ainsi que l'on sait, cette quantité constituant un invariant

$$N_1 + N_2 = -2p;$$

puis

$$N_1 - N_2 = -2p\sin\varphi\cos 2\chi,$$

d'où l'on tire pour expressions des efforts

$$N_1 = -p(1+\sin\varphi\cos 2\chi);$$
$$N_2 = -p(1-\sin\varphi\cos 2\chi);$$
$$T_3 = -p\sin\varphi\sin 2\chi.$$

8. Et les équations indéfinies, de l'équilibre, qui se réduisent ici à

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} = \rho X, \qquad \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = \rho Y$$

donnent alors le système en p et χ

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \sin\varphi \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(p\cos 2\chi) + \dfrac{\partial}{\partial y}(p\sin 2\chi) \right] - \rho X = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} + \sin\varphi \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(p\sin 2\chi) - \dfrac{\partial}{\partial y}(p\cos 2\chi) \right] - \rho Y = 0. \end{cases}$$

que l'on peut, au moyen des symboles connus

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

écrire en coordonnées polaires

$$(9) \qquad \begin{cases} [\cos\theta + \sin\varphi\cos(2\chi - \theta)] \dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial p}{\partial \theta} [-\sin\theta + \sin\varphi \sin(2\chi - \theta)] \\ \qquad - 2p\sin\varphi\sin(2\chi - \theta) \dfrac{\partial \chi}{\partial r} + 2\dfrac{p}{r}\sin\varphi\cos(2\chi - \theta)\dfrac{\partial \chi}{\partial \theta} - \rho X = 0, \\ [\sin\theta + \sin\varphi\sin(2\chi - \theta)] \dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial p}{\partial \theta} [\cos\theta - \sin\varphi\cos(2\chi - \theta)] \\ \qquad + 2p\sin\varphi\cos(2\chi - \theta) \dfrac{\partial \chi}{\partial r} + 2\dfrac{p}{r}\sin\varphi\sin(2\chi - \theta)\dfrac{\partial \chi}{\partial \theta} - \rho Y = 0, \end{cases}$$

les conditions aux limites étant fournies par les valeurs particulières de p et de χ à la surface libre, et par la considération de glissement contre le mur.

CHAPITRE II.

SOLUTIONS DES ÉQUATIONS D'EQUILIBRE. — EXPRESSIONS DE LA POUSSÉE EXERCEE PAR LA MASSE PULVÉRULENTE CONTRE LE MUR QUI LA CONTIENT.

Solution de Maurice Lévy. — Les solutions voisines de Barré de Saint-Venant. Les massifs hétérogènes de Boussinesq. — Approximations par défaut et par excès de la poussée.

9. Le système précédent d'équations aux dérivées partielles est trop complexe pour qu'il soit possible d'en envisager l'intégrale générale. En fait, on se limite au cas où les lignes d'égale inclinaison χ des pres-

sions principales, c'est-à-dire les lignes $\chi =$ const., constituent un système de droites concourantes dans une partie du massif avec parallélisme de ces pressions dans tout le reste.

Considérons alors le point de concours de ces droites. Le coefficient angulaire de chacune d'elles est caractéristique de chaque inclinaison χ, qui, par suite, se trouve être indépendante du rayon polaire r et ne dépendre, par sa tangente, que du seul angle polaire θ, ou encore constituer une fonction homogène de degré zéro des quantités $r \sin\theta$ et $r \cos\theta$. Le terme en $\frac{\partial \chi}{\partial r}$ de nos dernières équations s'évanouit alors; et si l'on multiplie chaque autre terme des deux équations par r^2, et encore leur dernier terme par la quantité $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$; on reconnaît que par raison d'homogénéité, la pression moyenne p devra être une fonction homogène du premier degré des quantités $r \sin\theta$ et $r \cos\theta$, c'est-à-dire être simplement proportionnelle au rayon polaire r, de sorte que l'on pourra poser

$$p = \mathrm{P} r,$$

où P sera indépendant de r et ne dépendra par suite que de l'angle polaire θ.

10. Le système (9), compte tenu de ces résultats, pourra alors s'écrire, en remplaçant les composantes ρX et ρY par leurs valeurs $-\Pi \cos\omega$ et $+\Pi \sin\omega$, en fonction du poids spécifique Π de la masse sablonneuse

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{P}[\cos\theta + \sin\varphi \cos(2\chi - \theta)] \\ & \quad + \frac{d\mathrm{P}}{d\theta}[-\sin\theta + \sin\varphi \sin(2\chi - \theta)] + 2\mathrm{P} \sin\varphi \cos(2\chi - \theta)\frac{d\chi}{d\theta} = \Pi \cos\omega, \\ & \mathrm{P}[\sin\theta + \sin \sin\varphi\,(2\chi - \theta)] \\ & \quad + \frac{d\mathrm{P}}{d\theta}[\cos\theta - \sin\varphi \cos(2\chi - \theta)] + 2\mathrm{P}\sin\varphi \sin(2\chi - \theta)\frac{d\chi}{d\theta} = -\Pi \sin\omega. \end{aligned} \right.$$

ou encore, en isolant les termes différentiels

$$(10\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{P} \sin 2(\chi - \theta) - \frac{d\mathrm{P}}{d\theta}[\cos 2(\chi - \theta) - \sin\varphi] = \Pi \sin(2\chi + \omega - \theta), \\ & \mathrm{P}\cos^2\varphi + 2\mathrm{P}\sin\varphi \frac{d\chi}{d\theta}[\cos 2(\chi - \theta) - \sin\varphi] \\ & \quad = \Pi[\cos(\omega + \theta) - \sin\varphi \cos(2\chi + \omega - \theta)]. \end{aligned} \right.$$

11. L'intégrale générale de ce système ne semble pas pouvoir être explicitée; mais on peut, pour des conditions aux limites données, obtenir les intégrales particulières correspondantes.

Le cas le plus usuel est celui d'une surface libre du talus supérieur, par conséquent d'une valeur nulle de p ou P sur celui-ci. On peut alors considérer un autre plan — le mur idéal de Maurice Lévy — correspondant à une surface libre du talus supérieur, dont la trace passant par l'origine et inclinée sur la verticale descendante d'un angle i, est telle que la poussée du massif (à surface libre au talus supérieur) sur un de ses éléments y fasse avec la normale à cet élément l'angle φ rendant maximum le rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{N}}$ de la composante tangentielle à la composante normale changée de signe; ce qui exprime ainsi en fait la condition de glissement contre le plan en question.

Analytiquement, on exprimera ces conditions en écrivant que, pour ces directions particulières, c'est-à-dire pour des valeurs données de θ, les valeurs correspondantes de p ou P et de χ vérifient les équations indéfinies de l'équilibre. L'existence d'une surface libre, conduit en faisant dans le système (10 *bis*) avec $\theta = \frac{\pi}{2}$. P égal à zéro, aux deux relations suivantes; d'abord :

$$\sin\omega + \sin\varphi \sin(2\chi + \omega) = 0, \tag{11}$$

qui fournit la valeur constante de χ sur la surface libre: et au moyen d'une transformation facile

$$\left(\frac{dP}{d\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\Pi \sin\omega}{\sin\varphi \sin 2\chi}$$

qui dérive en fait de l'expression

$$P = -\frac{\Pi \sin\omega}{\sin\varphi \sin 2\chi} \cos\theta. \tag{12}$$

qu'il est aisé d'obtenir directement du système cartésien (8), en remarquant que la condition de surface libre conduit à des valeurs de p ou P et de χ indépendantes de y.

Sur le plan Lévy d'autre part, l'angle φ qui rend maximum le rapport $\frac{\mathcal{T}}{-\mathcal{N}}$ et qui n'est autre que l'angle de terre coulante, est relié à l'angle γ fait avec la direction de la plus grande pression principale par l'élément plan sur lequel agit cette pression par la relation obtenue du rapprochement de (4) et (5)

$$\cos 2\gamma = \sin\varphi$$

qui, puisque φ est toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$, peut s'écrire

$$\cos 2\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

et d'où l'on tire, puisque pour la même raison on peut passer à l'égalité des arcs eux-mêmes,

$$\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

L'inclinaison χ_1, qui représente l'angle fait avec l'axe Ox par la direction de la plus grande pression principale, vaudra donc la somme changée de signe puisque l'inclinaison χ_1 est comptée vers la verticale descendante, c'est-à-dire du côté des y négatifs, de l'angle $\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ d'inclinaison de l'élément plan sur cette direction, et de la différence $\omega - i$ qui constitue l'inclinaison de ce même élément sur l'axe Ox. De sorte que l'on pourra écrire

$$(13) \qquad -\chi_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \omega - i,$$

d'où l'on tire la valeur de l'inclinaison i sur la verticale, du plan de M. Lévy, sans ambiguïté en fonction de χ_1 et réciproquement

$$(13\ bis) \qquad i = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \omega + \chi_1.$$

les équations indéfinies de l'équilibre (10 *bis*) devront donc se trouver vérifiées avec $\theta = -\omega + i$ par la valeur particulière χ_1 de χ sur le plan en question. Elles s'écrivent en remarquant qu'alors les coefficients des termes différentiels $\frac{dP}{d\theta}$ et $\frac{d\chi}{d\theta}$ s'évanouissent

$$(14) \qquad \begin{cases} -P\cos\varphi = \Pi \sin(2\chi_1 + 2\omega - i), \\ P\cos^2\varphi = \Pi[\cos i - \sin\varphi\cos(2\chi_1 + 2\omega - i)]. \end{cases}$$

L'addition membre à membre de ces deux relations, après avoir multiplié les deux membres de la première par $\cos\varphi$ donne après une réduction évidente

$$\sin(2\chi_1 + 2\omega - i - \varphi) + \cos i = 0,$$

c'est-à-dire la valeur (13 *bis*) pour i. On aura aussi

$$(P)_{\theta=i-\omega} = \Pi \frac{\sin(2\chi_1 + 2\omega - i)}{\cos\varphi}$$

qui fournit la valeur de P sur le plan Lévy et permet de retrouver de suite, en y remplaçant χ_1 par sa valeur (13) et remarquant que la poussée P sur l'élément d'aire vaut $p\cos\varphi$ ou $\mathrm{P}r\cos\varphi$, l'expression de Maurice Lévy

$$\mathfrak{P} = \Pi r \cos(\varphi + i). \tag{15}$$

12. Mais soit un plan quelconque passant par l'origine et dont la position est déterminée par l'angle θ. La valeur de P des éléments plans relatifs à cette direction étant retenue égale à (12), la valeur correspondante de χ s'obtiendra de la manière suivante.

Multiplions respectivement par $-\sin\theta$ et $+\cos\theta$ les deux équations indéfinies de l'équilibre (10), et ajoutons-les membre à membre, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\sin\varphi\sin(2\chi - \theta) + \frac{d\mathrm{P}}{d\theta}[1 - \sin\varphi\cos(2\chi - \theta)] \\ + 2\mathrm{P}\sin\varphi\sin 2(\chi - \theta)\frac{d\chi}{d\theta} = -\Pi\sin(\omega + \theta) \end{aligned}$$

qui, si nous y remplaçons P par sa valeur actuelle (12), donne l'équation du premier ordre en χ après évanouissement des dénominateurs, et d'autres réductions immédiates

$$2\sin\omega\cos\theta\sin\varphi\sin 2(\chi - \theta)\frac{d\chi}{d\theta} = \sin\theta[\sin\omega + \sin\varphi\sin(2\chi + \omega)]. \tag{16}$$

Cette équation est du reste valable dans les limites physiques où valent les équations générales elles-mêmes, et où est susceptible de se produire l'équilibre-limite de la masse sablonneuse, c'est-à-dire entre le plan $\theta = -\omega + i$ du mur idéal, et la surface libre du talus supérieur. Elle montre en particulier que sur la surface libre, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on aura comme l'on a vu $[\sin\omega + \sin\varphi\sin(2\chi + \omega)]$ nul, ce qui résulte du fait que son premier membre devient alors nul, la dérivée $\frac{d\chi}{d\theta}$ ne pouvant prendre une valeur infinie. C'est en effet près du plan supérieur, soit loin du mur que les pressions se répartissent le mieux, comme si le mur n'existait pas, c'est-à-dire ne dépendent plus que de la profondeur sous la surface, comme c'est le cas pour la surface libre où l'on a $\frac{d\chi}{d\theta} = 0$. Mais alors le second membre de (16) qui, au facteur $\sin\theta$ près, ne dépend pas de θ, et se trouve avoir la valeur zéro pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, conservera donc nécessairement cette valeur nulle dans le champ d'existence du problème, c'est-à-dire pour les valeurs de l'angle θ comprises entre $(-\omega + i)$ et $+\frac{\pi}{2}$. Il en résulte, tous les facteurs du premier membre de l'équation (16) ne prenant dans cet intervalle que des valeurs finies et non nulles, que le coefficient différentiel $\frac{d\chi}{d\theta}$ est nul dans tout cet intervalle, ce qui revient à dire que l'inclinaison χy conserve la valeur constante (11).

Nous pouvons donc dire que l'ensemble des expressions de P et χ

$$P = -\frac{\Pi \sin\omega}{\sin\varphi \sin 2\chi} \cos\theta$$

et

$$\sin\omega + \sin\varphi \sin(2\chi + \omega) = 0$$

représentent tout au moins entre les deux plans-limites considérés, ainsi du reste que sur ces plans eux-mêmes, comme il est facile de le vérifier directement sur les équations (10 *bis*) elles-mêmes, et pour le cas d'une surface libre du talus supérieur, l'intégrale du système d'équations aux dérivées partielles. Cette solution est d'ailleurs unique, car des deux seules valeurs négatives correspondant à des angles aigus que donnerait la résolution en χ de l'équation (11), une seule doit être retenue, la plus petite en valeur absolue; la plus grande correspondant non au problème de la poussée, mais de la butée des terres.

On vérifie enfin aisément l'identité de la valeur (15) particulière de la poussée sur le plan Lévy avec l'expression générale (12) de celle-ci, où l'on a fait $\theta = i - \omega$, dès que l'on y égalise dans celle-là, comme l'on doit, χ à χ_1.

13. Ce ne sera donc que dans le cas, le seul usuel, où l'inclinaison du mur serait supérieure (négativement) à celle du mur idéal soit $-\omega + i$, et dans ce seul petit intervalle que χ pourrait varier avec θ. Soient alors p' ou P' (avec $p' = P'r$, où P' ne dépend plus que de θ),

et χ' les valeurs nouvelles de p ou P et de χ dans cet intervalle. Comme nous ne recherchons pour p' et χ' que des valeurs voisines de celles correspondant à la solution de Lévy, nous pourrons admettre, comme Barré de Saint-Venant, que les petites variations entre p' et p d'une part, entre χ' et χ d'autre part sont linéaires en θ dans ce petit intervalle s'étendant entre les inclinaisons i et i' sur la verticale du mur idéal et du mur réel voisin considéré.

Nous poserons donc en notant que p' doit être proportionnel à r

$$p'=p+\Pi r\,\mathrm{A}(\theta_0-\theta),\qquad \chi'=\chi-\frac{c}{2}(\theta_0-\theta), \tag{17}$$

où χ aura la valeur constante relative au gros de la masse sablonneuse et p la valeur courante (12); et où les quantités A et c représentent des constantes convenablement choisies, et θ_0 l'inclinaison polaire correspondant au mur idéal pour laquelle p' et χ' prennent les valeurs particulières de la solution de Lévy.

Les solutions p' et χ' relatives à ce petit intervalle devront nécessairement vérifier pour θ voisin de θ_0, les équations indéfinies de l'équilibre. La condition de frottement ou de glissement de la masse sablonneuse contre le mur imposera toujours à la poussée d'y être inclinée, également pour θ voisin de θ_0, de l'angle φ sur la normale au nouveau mur prolongée. Enfin, l'état d'équilibre-limite dans le petit intervalle devra aussi y être encore réalisé.

L'ensemble de ces conditions nous permettra de calculer A et c. Les équations indéfinies (10) qui doivent être vérifiées par le couple des variables P′ et χ' le sont déjà par le couple Pχ. Elles devront donc l'être en leurs différences, de sorte que l'on devra avoir pour θ voisin de θ_0

$$(18)\left\{\begin{aligned}&(\mathrm{P}'-\mathrm{P})\cos\theta+\sin\varphi[\mathrm{P}'\cos(2\chi'-\theta)-\mathrm{P}\cos(2\chi-\theta)]\\&\quad-\sin\theta\frac{d(\mathrm{P}'-\mathrm{P})}{d\theta}+\sin\varphi\left[\frac{d\mathrm{P}'}{dt}\sin(2\chi'-\theta)-\frac{d\mathrm{P}}{d\theta}\sin(2\chi-\theta)\right]\\&\qquad+2\sin\varphi\left[\mathrm{P}'\cos(2\chi'-\theta)\frac{d\chi'}{d\theta}-\mathrm{P}\cos(2\chi-\theta)\frac{d\chi}{d\theta}\right]=0,\\&(\mathrm{P}'-\mathrm{P})\sin\theta+\sin\varphi[\mathrm{P}'\sin(2\chi'-\theta)-\mathrm{P}\sin(2\chi-\theta)]\\&\quad+\cos\theta\frac{d(\mathrm{P}'-\mathrm{P})}{d\theta}-\sin\varphi\left[\frac{d\mathrm{P}'}{d\theta}\cos(2\chi'-\theta)-\frac{d\mathrm{P}}{d\theta}\cos(2\chi-\theta)\right]\\&\qquad+2\sin\varphi\left[\mathrm{P}'\sin(2\chi'-\theta)\frac{d\chi'}{d\theta}-\mathrm{P}\sin(2\chi-\theta)\frac{d\chi}{d\theta}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Mais on a de suite, en partant des relations (17),

$$P' - P = \Pi A(\theta_0 - \theta),$$

$$\frac{d(P'-P)}{d\theta} = -\Pi A, \qquad \chi' - \chi = -\frac{c}{2}(\theta_0 - \theta), \qquad \frac{d(\chi'-\chi)}{d\theta} = \frac{c}{2},$$

et il est facile de calculer les crochets de (18), en se limitant, d'après notre hypothèse aux termes du premier ordre en $(\theta_0 - \theta)$.

Remarquons du reste qu'à la limite considérée et pour $\theta = \theta_0$, les termes en $\theta_0 - \theta$ s'évanouissent, et les équations (18) ordonnées en A et c s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
&\Pi A[\sin\theta_0 - \sin\varphi \sin(2\chi - \theta_0)] + \sin\varphi\cos(2\chi - \theta_0) P c = 0,\\
&\Pi A[-\cos\theta_0 + \sin\varphi\cos(2\chi - \theta_0)] + \sin\varphi\sin(2\chi - \theta_0) P c = 0.
\end{aligned}$$

Multiplions la première par $\cos\theta_0$, et la seconde par $\sin\theta_0$, et additionnant d'une part; puis multiplions la première par $\cos(2\chi - \theta_0)$ et la seconde par $\sin(2\chi - \theta_0)$ et additionnant d'autre part; le système précédent prend alors la forme plus simple, division faite des deux membres de la première équation par $\sin\varphi$

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned}
&-\Pi A \sin 2(\chi - \theta_0) + P c \cos 2(\chi - \theta_0) = 0,\\
&-\Pi A \sin 2(\chi - \theta_0) + P c \sin\varphi = 0.
\end{aligned}\right.$$

Mais c'est là un système d'équations homogènes en A et c, du premier degré sans second membre. Pour qu'il présente conformément à nos hypothèses des solutions non toutes nulles à la fois de A et c, il faut et il suffit que le déterminant principal du système soit identiquement nul, c'est-à-dire que l'on ait en divisant par le facteur non nul $\sin 2(\chi - \theta_0)$

$$\cos 2(\chi - \theta_0) - \sin\varphi = 0,$$

écriture qui correspond bien pour $\theta_0 = -\omega + i$ à une identité, si l'on y remplace 2χ par sa valeur (13) et qui confirme par conséquent que ce n'est qu'à partir de la valeur θ_0 de θ égale à $-\omega + i$ et en s'éloignant des y positifs, qu'il y a lieu d'envisager pour valeurs de p et χ les expressions (17)

La première équation (19) donne alors en y remplaçant χ et θ_0 par leurs valeurs respectives actuelles (13), et $-\omega + i$

$$\Pi A = P c \frac{\cos 2(\chi - \theta_0)}{\sin 2(\chi - \theta_0)} = -P c \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où l'on tire, en remplaçant P par sa valeur (12) où l'on a fait $\theta = i - \omega$, puisque ces écritures valent seulement pour $\theta = \theta_0 = -\omega + i$,

$$A = c\frac{\sin\omega\cos(\omega - i)}{\cos\varphi\sin 2\chi}. \tag{20}$$

14. La condition pour la masse pulvérulente d'avoir toujours contre le mur (supposé voisin du mur idéal, et caractérisé par la petite différence $\delta = i - i'$ des inclinaisons de celui-ci et du premier, sur la verticale descendante, qui vaut également l'écart des angles polaires $\theta_0 - \theta$ caractéristiques des positions de ceux-ci), une poussée inclinée de l'angle φ de terre coulante sur sa normale prolongée, conduit, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{N}$ représentant les composantes tangentielle et normale de cette poussée, à la relation

$$\frac{\mathfrak{T}}{(-\mathfrak{N})} = \operatorname{tang}\varphi. \tag{21}$$

Les valeurs de $\mathfrak{T}$ et de $\mathfrak{N}$ sont fournies par les expressions (3), où l'on tiendra compte des relations (7) entre pressions principales et efforts, mais en notant que N_1, N_2, T_3 y seraient remplacés par les développements jusqu'aux termes du premier ordre en la petite différence $(\theta_0 - \theta)$ des quantités

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= -p'(1 + \sin\varphi\cos 2\chi'),\\ N_2 &= -p'(1 - \sin\varphi\cos 2\chi'),\\ T_3 &= -p\ \sin\varphi\sin 2\chi', \end{aligned}\right. \tag{22}$$

qui tiennent compte des petites corrections à apporter aux N_1, N_2, T_3, par suite de la variation de p et de χ dans la partie du massif pulvérulent, située au delà du mur idéal du côté de la verticale descendante.

On a donc, en remarquant de plus que l'inclinaison γ de l'élément plan, sur la direction de la plus grande pression principale vaut ici la différence $(\theta - \chi')$, soit $-(\chi' - \theta)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= -p'\sin\varphi\sin 2(\chi - \theta),\\ \mathfrak{N} &= -p' + p'\sin\varphi\cos 2(\chi' - \theta) \end{aligned}$$

Reportons-nous aux expressions (17) de p' et de χ', et utilisons en l'adaptant ici le procédé de calcul indiqué plus haut : il viendra de suite, en nous en tenant toujours aux termes du premier ordre, ce qui conduit en particulier à considérer dans le facteur du terme en $(\theta_0 - \theta)$, les petites variations de P comme négligeables, c'est-à-dire à y donner à P, la valeur *constante* [(12) avec $\theta = i - \omega$] de la solution Lévy, la notation p ou P continuant à désigner la valeur courante (12); puis remplaçant enfin la petite différence angulaire $(\theta_0 - \theta)$ par son sinus, et χ par sa valeur (13)

$$(23)\qquad \mathcal{T} = p \sin\varphi \left[\cos(\varphi + 2\theta_0 - 2\theta) + c\,\frac{\sin(\theta_0 - \theta)\cos\theta_0}{\cos\varphi\cos\theta}\sin(2\theta_0 - 2\theta) \right].$$

On trouverait de semblable manière

$$(24)\qquad \mathcal{N} = -p\sin\varphi\left[\frac{1}{\sin\varphi} - \sin(\varphi + 2\theta_0 - 2\theta) - c\,\frac{\sin(\theta_0-\theta)\cos\theta_0}{\cos\varphi\cos\theta}[1 - \cos(2\theta_0 - 2\theta)]\right].$$

La substitution de ces valeurs de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{N}$ dans la relation précédente (21) conduit, après avoir chassé les dénominateurs, à l'égalité (où l'on a groupé ensemble les termes correspondants), qui doit être vérifiée pour $\theta = \theta_0 - \delta$,

$$c\cdot\frac{\sin(\theta_0 - \theta)\cos\theta_0}{\cos\theta}[\sin(2\theta_0 - 2\theta) + \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi\cos(2\theta_0 - 2\theta)] = 1 - \cos(2\theta_0 - 2\theta)$$

d'où l'on tire, en divisant les deux membres par la quantité non nulle $2\sin^2(\theta_0 - \theta) = 1 - \cos(2\theta_0 - 2\theta)$, après des réductions faciles

$$c\,\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\,\frac{\cos(\varphi - \theta_0 + \theta)}{\cos\varphi} = 1.$$

c'est-à-dire, puisque cette écriture n'est valable que pour $\theta = \theta_0 - \delta$, et résolvant par rapport à c

$$(25)\qquad c = \frac{\cos\varphi\cos(\theta_0 - \delta)}{\cos\theta_0\cos(\varphi - \delta)}.$$

15. Mais, d'une manière générale, l'angle φ' que fait sur la normale à un élément d'inclinaison θ la pression la plus oblique, est donné, dans l'état d'équilibre élastique plan par la relation (5)

$$(26)\qquad \sin\varphi' = \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}, \qquad \text{soit} \qquad \sin^2\varphi' = \frac{(N'_2 - N_1)^2 + 4T_1^2}{(N_2 + N_1)^2}.$$

Or, on a de suite par (22) en calculant comme plus haut, et en remplaçant c par sa valeur (25) et 2χ par la sienne (13) les expressions de $\frac{N'_2 + N'_1}{2}$, $\frac{N'_2 - N'_1}{2}$ et T_1; ce qui permet d'écrire après quelques réductions faciles

$$\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi} = 1 + \left[\frac{\cos\varphi \sin(\theta_0 - \theta)\cos(\theta_0 - \delta)}{\cos(\varphi - \delta)\cos\theta - \sin\varphi\sin(\theta_0 - \theta)\cos(\theta_0 - \delta)}\right]^2$$

La fraction du second membre varie dans le champ du problème, en sens inverse de θ, ou dans le même sens que les variations de $(-\theta)$ ou de $(\theta_0 - \theta)$. Ceci résulte de ce que la dérivée de cette fraction en θ est du signe de la quantité négative $[-\cos\theta_0 \cos(\varphi - \delta)]$. Or, en valeur absolue, θ varie entre θ_0 et $\theta_0 - \delta$; pour $\theta = \theta_0$ cette fraction est nulle, et le rapport $\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi}$ vaut l'unité d'où l'égalité de φ' à φ. Puis, lorsque θ tend vers $\theta_0 - \delta$, la fraction croît pour atteindre son maximum pour $\theta = \theta_0 - \delta$ contre le mur, au moment où l'angle φ' caractéristique de l'angle polaire θ, prendra sa plus forte valeur Φ, obtenue en faisant dans la relation précédente $\theta = \theta_0 - \delta$, ce qui donne après division des deux termes de la fraction par le facteur $\cos(\theta_0 - \delta)$ et quelques réductions faciles et prenant les racines carrées

$$\frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\delta} = 1 + \frac{\delta^2}{2} + \dots, \tag{27}$$

Ces résultats montrent :

1° Que, au degré d'approximation poursuivi, on a l'égalité de l'angle φ' voire Φ, à l'angle φ de terre coulante, ce qui revient à dire que l'état d'équilibre obtenu, aux termes près du second ordre en la petite différence $\delta = \theta_0 - \theta$, n'est autre que l'état d'équilibre-limite de la masse pulvérulente homogène considérée.

2° Que les formules précédentes, sans que l'on y considère δ petit, sont *exactes*, si on les regarde comme caractérisant non plus la masse pulvérulente *homogène* considérée, mais un massif *hétérogène*, qui aurait le long de chaque couche d'inclinaison polaire θ, comme angle de *frottement intérieur* ou de terre coulante φ, l'angle *variable* φ' valant justement φ pour la couche correspondant à la position du mur idéal et atteignant son maximum Φ contre le mur. La paroi de celui-ci est, d'autre part, supposée telle que l'angle de frottement *extérieur* reste toujours égal à φ inférieur à Φ.

16. Ce dernier résultat est intéressant, car si nous appliquions à la masse sablonneuse *homogène* considérée d'angle φ constant de frottement

intérieur et extérieur les formules précédentes pour des valeurs non petites de δ la valeur de $\sin\varphi$ deviendrait sensiblement inférieure au sinus contre le mur de l'angle Φ de frottement intérieur du massif *hétérogène* dont nous venons de parler, et pour lequel les formules précédentes seraient exactes. De sorte que, φ' étant toujours supérieur à φ, et d'autant plus contre le mur lorsque φ' atteint son maximum Φ, les couches du massif hétérogène ont, surtout contre le mur, une moindre tendance à s'ébouler que les couches correspondantes de la masse sablonneuse homogène; ce qui revient à dire que la poussée exercée sur le mur par le massif hétérogène pour lequel les formules sont exactes, serait plus faible que celle exercée réellement par la masse sablonneuse homogène considérée.

Mais, soit alors un autre massif hétérogène qui serait caractérisé par le maximum Φ de l'angle φ', égal à l'angle constant de frottement intérieur de la masse sablonneuse homogène. L'angle φ dans nos formules y prendrait alors une valeur plus petite dont le sinus vaudrait (27) $\sin\Phi\cos\delta$, où Φ vaut justement l'angle de terre coulante. L'angle φ' qui est inférieur à Φ est dont inférieur à l'angle de terre coulante. Le massif hétérogène considéré a, par suite, des angles de frottement intérieur et extérieur, inférieurs à ceux de la masse sablonneuse homogène, et comporte alors plus particulièrement contre le mur des couches qui tendent à s'ébouler plus vite que celles correspondantes de la masse homogène; ce qui revient à dire que la poussée exercée sur le mur par ce massif hétérogène, pour lequel les formules précédentes, où l'on tiendra compte des valeurs actuelles des angles de frottement, sont toujours exactes, serait plus forte que celle exercée par la masse sablonneuse homogène considérée.

17. On a ainsi, avec Boussinesq, un procédé permettant d'obtenir une limite par défaut, et une limite par excès de la poussée exercée sur le mur par la masse pulvérulente homogène, ou ce qui revient au même, et qui est plus pratique, de sa composante normale, en admettant que le renversement du mur tend à se produire par rotation autour d'un axe normal au plan de la poussée situé à la base du mur et dans le plan de sa paroi intérieure; et que par conséquent c'est le moment, plus que la poussée elle-même, qui importe. Mais il est toutefois nécessaire d'avoir des limites par défaut et par excès suffisamment rapprochées; comme, d'autre part, de pouvoir mesurer ces

valeurs par défaut ou par excès, suivant la direction *effective* de la poussée, c'est-à-dire en laissant dans les deux cas à l'angle de frottement extérieur φ_1 sa valeur physique donnée. Or, dans la limite par excès, où Φ a la valeur de l'angle constant de frottement intérieur et extérieur de la masse homogène existante, il y a lieu de remarquer que prendre φ_1 égal à φ, comme nous l'avons fait, c'est prendre pour l'angle de frottement extérieur du massif hétérogène une valeur certainement plus faible qu'elle n'est dans la réalité physique, ou trop surévaluer la valeur par excès de la poussée ou de son moment. Le mieux est donc de partir d'une valeur φ_1 de l'angle de frottement extérieur du massif hétérogène; l'angle Φ ne vaudra plus alors exactement l'angle φ; et l'on pourra déterminer l'angle φ_1 indéterminé jusqu'alors, mais inférieur à Φ, ou ce qui revient au même la nouvelle valeur de φ en écrivant que la composante normale de la poussée $\mathcal{N}$ prendra pour cette valeur de φ sa plus petite valeur; de sorte que l'on aura ainsi, et c'est ce qui importe, une expression de la plus petite valeur par excès de la poussée.

Posons alors, φ désignant maintenant cette nouvellevaleur de φ,

$$\frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varepsilon},$$

où ε représente un angle auxiliaire, aigu et positif, indéterminé avec φ_1, c'est-à-dire avec φ, mais qui deviendrait égal à δ, si l'angle φ valait l'angle de frottement de la masse sablonneuse homogène.

La relation (31), ses deux membres étant divisés par $\sin^2\varphi$, *écrite contre le mur* — [où le premier membre vaudra $\frac{1}{\cos^2\varepsilon} = 1 + \tang^2\varepsilon$, et où l'on remplacera dans le second les efforts par leurs valeurs tirées de (22), mais en y laissant, dans leur développement, indéterminé le coefficient c qui, comme Φ, ne vaudrait sa valeur précédente que pour $\varepsilon = \delta$, c'est-à-dire pour l'angle φ égal à l'angle de frottement de la masse sablonneuse homogène existante] — s'écrira, après suppression de l'unité dans les deux membres, et extraction de leur racine carrée qui donne deux termes positifs

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{c\cos\theta_0\sin\delta\cos\varphi}{\cos(\theta_0-\delta)\cos\varphi - c\cos\theta_0\sin\delta\sin\varphi},$$

d'où l'on tire

$$c = \frac{\cos\varphi\cos(\theta_0-\delta)\sin\varepsilon}{\cos(\varphi-\varepsilon)\cos\theta_0\sin\delta}.$$

D'autre part, la condition de glissement ou frottement contre le mur, soit maintenant $\left(\frac{-\mathcal{N}}{\mathcal{T}}\right) = \operatorname{tang}\varphi_1$, s'écrira en tenant compte des expressions (23) et (24) de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{N}$, et y remplaçant c par sa dernière valeur,

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi_1}{\sin\varphi} = \frac{\cos(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}{\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}.$$

La composante normale de la poussée vaut alors en valeur absolue

$$(28) \quad \mathcal{N} = \mathcal{P}\cos\varphi_1 = \frac{\mathcal{T}}{\operatorname{tang}\varphi_1} = p\,\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tang}\varphi_1}\left[\cos(\varphi + 2\delta) + \frac{\sin\varepsilon}{\cos(\varphi - \varepsilon)}\sin 2\delta\right].$$

On y remplacera le quotient $\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tang}\varphi_1}$ par sa valeur précédente, et la pression moyenne p par sa valeur courante (12) que l'on peut mettre (dernier alinéa du nº 12) sous la forme $\Pi r\,\frac{\cos(\varphi + i)\cos\theta}{\cos\varphi\cos(\omega - i)}$.

18. Tenons compte enfin, dans le but d'introduire l'angle i' d'inclinaison du mur sur la verticale, de la relation $i - i' = \delta$, et remarquons que θ vaut en valeur absolue $\omega - i'$. Il viendra pour valeur de la composante normale de la poussée (28), après réductions simples effectuées,

$$\mathcal{N} = \Pi r\,\frac{\cos(\varphi + i' + \delta)\cos(\omega - i')\cos\varepsilon}{\cos(\omega - i' - \delta)\cos(\varphi - \varepsilon)}[1 - \sin\Phi\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)],$$

et l'on aura pour la valeur supérieure la plus faible que nous désignerons par P_m de cette composante

$$(29) \qquad P_m = k'\Pi r,$$

avec

$$(30) \qquad k' = \frac{\cos(\varphi + i' + \delta)\cos(\omega - i')\cos\varepsilon}{\text{co})(\omega - i' - \delta)\cos(\varphi - \varepsilon)}[1 - \sin\Phi\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)],$$

où l'on a [en utilisant les relations (13 *bis*) et (11) et se rappelant qu'il y a lieu de ne considérer que la plus petite en valeur absolue des deux solutions χ de celle-ci] pour valeur de $\delta = -i + i'$ en fonction des inclinaisons données ω et i' du talus et du mur respectivement sur l'horizontale et la verticale descendante

$$\delta = -i' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \omega + \chi = -i' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(\omega + \arcsin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right)$$

et où l'angle φ est déterminé par la condition de minimum

$$\frac{dk'}{d\varphi} = 0.$$

On a de suite, d'autre part, l'expression de la limite inférieure par défaut P_i correspondante en partant des valeurs (23, 24) de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{N}$ établies plus haut, avec la valeur (25) de c, et contre le mur

$$P_i = \frac{\mathcal{E}}{\operatorname{tang}\varphi} = p\cos^2\varphi\frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos(\varphi-\delta)},$$

soit, en remplaçant p par sa valeur (12),

$$P_i = k_0 \Pi r \tag{31}$$

avec

$$k_0 = \frac{\cos\varphi\cos(\varphi+i'+\delta)\cos(\omega-i')\cos(\varphi+\delta)}{\cos(\omega-i'-\delta)\cos)\varphi-\delta)}, \tag{32}$$

où δ a la même valeur que précédemment, mais où l'angle φ vaut l'angle de frottement de la masse sablonneuse homogène existante.

La première limite supérieure que nous avions envisagée aurait pour expression

$$P_s = k\Pi r, \tag{33}$$

où k serait donné par la même fraction que celle correspondant à la valeur de k_0, avec la même valeur de δ, mais où φ serait fourni par la solution de l'équation

$$\sin\varphi = \sin\Phi\cos\delta,$$

où Φ vaudrait alors l'angle de terre coulante de la masse pulvérulente homogène donnée, c'est-à-dire la valeur de φ dans le calcul de k_0.

CHAPITRE III.

DES COEFFICIENTS DE POUSSÉE DANS LE CAS DU MUR VERTICAL. ÉTUDE DE LA PLUS PETITE LIMITE SUPÉRIEURE.

De la plus petite limite par excès. — Existence d'un minimum unique. — Sa recherche pratique. — Formule approchée pour φ.

19. Bornons-nous actuellement au cas déjà complexe, où l'angle i' est nul, c'est-à-dire au cas du mur vertical. Introduisons l'angle aigu

et positif ω' défini par la relation

$$(34) \qquad \omega' = \arc\sin \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \qquad \text{soit} \qquad \sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

L'angle δ vaudra alors

$$\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' - \omega}{2},$$

valeur dont nous aurons à tenir compte dans les expressions des coefficients k_0, k, et k'. Occupons-nous du reste tout d'abord du coefficient k' dont l'étude présente le plus de difficultés. Sa valeur (30), dans ce cas, prend la forme

$$(35) \quad k' = \cos\omega \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \omega' + \omega}{2}\right)\cos\varepsilon}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' + \omega}{2}\right)\cos(\varphi - \varepsilon)} [1 - \sin\Phi\cos(\omega' - \omega + \varepsilon)]$$

ou encore, en introduisant les paramètres auxiliaires λ et μ, définis sans ambiguïté par les relations

$$(36) \qquad \cos\omega' \sin\varphi = \lambda, \qquad \sin\varepsilon \sin\Phi = \mu$$

et qui permettent d'écrire

$$\sin\varepsilon = \frac{\mu}{\sin\Phi}, \qquad \cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}, \qquad \sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \qquad \cos\omega' = \frac{\lambda}{\sin\varphi},$$

prendra l'écriture

$$k' = \frac{\cos\omega}{\cos^2\Phi} \frac{(\cos\omega - \lambda)^2}{\sin\varphi\cos\varphi} [\mu\sin\omega + \sin\varphi\cos\omega](\cos\varphi - \mu).$$

Notons du reste, de suite, que par leur définition même, les paramètres λ et μ peuvent se mettre sous la forme

$$(37) \qquad \begin{cases} \lambda = +\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\omega} = +\sqrt{\sin(\varphi + \omega)\sin(\varphi - \omega)}, \\ \mu = +\sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi} = +\sqrt{\sin(\Phi + \varphi)\sin(\Phi - \varphi)}, \end{cases}$$

où l'on reconnaît aisément leur loi de variation.

On peut aussi écrire

$$(\cos\omega + \lambda)(\cos\omega - \lambda) = \cos^2\varphi; \qquad (\cos\varphi + \mu)(\cos\varphi - \mu) = \cos^2\Phi.$$

ce qui permet de reconnaître que les quatre facteurs $\cos - \lambda$, $\cos + \lambda$, d'une part; $\cos\varphi + \mu$, $\cos\varphi - \mu$, d'autre part, ayant deux à deux leur somme et leur produit positifs, sont eux-mêmes toujours positifs.

20. La dérivée $\frac{dk'}{d\varphi}$ se met facilement sous la forme

$$(38)\qquad \frac{dk'}{d\varphi} = \frac{\cos\omega}{\cos^2\Phi}\,\frac{(\cos\omega - \lambda)^2}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}(\cos\varphi - \mu)\frac{\xi}{\lambda\mu},$$

où ξ représente le trinome du second degré en μ

$$(39)\qquad \begin{aligned}\xi = &- \mu^2\sin\omega(2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda)\\ &- \mu[2\sin\varphi\cos^2\omega + \lambda\sin(\varphi - \omega)] + \lambda\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(\varphi - \omega),\end{aligned}$$

tous les autres facteurs du second membre étant sans cesse positifs.

21. Posons encore, en désignant par ψ un angle auxiliaire aigu et positif

$$(40)\qquad \frac{\lambda\sin(\varphi - \omega)}{\cos^2\omega\sin\varphi} = \sin\psi,$$

ainsi qu'il est légitime puisque chacun des facteurs $\left(\frac{\lambda}{\cos\omega}\right)$ et $\left[\frac{\sin(\varphi - \omega)}{\cos\omega\sin\varphi}\right]$ du premier membre est respectivement positif et inférieur à l'unité. La fonction $\sin\psi$ et l'angle ψ lui-même sont ainsi définis sans ambiguïté et à chaque valeur de φ dans le champ du problème, correspondra une et une seule valeur de ψ. La fonction $\sin\psi$ varie du reste d'une manière continue, dans le même sens que φ et dans un sens contraire à ω, ainsi qu'il résulte des deux écritures

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d\sin\psi}{d\varphi} &= \frac{\cos\varphi\sin^2\varphi\sin(\varphi - \omega) + \lambda^2\sin\omega}{\lambda\sin^2\varphi\cos^2\omega} > 0,\\ \frac{d\sin\psi}{d\omega} &= -\frac{\sin\omega\sin(\varphi - \omega)\cos^2\varphi + \lambda^2\cos\varphi}{\lambda\sin\varphi\cos^3\omega} < 0.\end{aligned}\right.$$

L'expression (38) de $\frac{dk'}{d\varphi}$ pourra donc, en mettant en évidence hors de ξ le facteur $\frac{\lambda\sin(\varphi - \omega)\sin^2\varphi}{\cos\varphi + \mu}$, puis en remplaçant dans le trinome du second degré en μ, le paramètre λ par sa valeur tirée de (40) qui introduira l'angle auxiliaire ψ, s'écrire aisément après quelques réductions faciles

$$\begin{aligned}\frac{dk'}{d\varphi} = &\frac{\cos\omega}{\cos^2\Phi}\,\frac{\sin(\varphi - \omega)}{\cos^2\varphi}\,\frac{(\cos\omega - \lambda)^2}{\mu}\,\frac{\cos\varphi - \mu}{\cos\varphi + \mu}\\ &\times\left\{-\mu^2\sin\omega(\cos\varphi + \mu)\left[\frac{1}{\sin^2\varphi\sin(\varphi - \omega)} + \frac{2}{\cos\omega\sin\varphi\sin\psi}\right]\right.\\ &\left.\qquad - \frac{2\mu^2}{\sin\psi} - \frac{2\mu\cos\varphi}{\sin\psi} + \cos^2\Phi\right\}.\end{aligned}$$

Sous cette forme on voit de suite le signe de $\frac{dk'}{d\varphi}$; les facteurs du second membre y constituent en effet un ensemble toujours positif. D'autre part, dans chaque fraction du crochet où il figure, $\sin\psi$ au dénominateur varie dans le même sens que φ; $\cos\varphi$ et μ aux numérateurs varient en sens inverse; de sorte que si l'on tient compte de leur signe négatif, on reconnaît que chacune de ces fractions, et par suite le crochet lui-même, varie dans le même sens que φ. Le crochet pour φ croissant dans son champ d'existence de ω à Φ variera donc, et ce constamment dans le même sens de l'infini négatif à la quantité $+\cos^2\Phi$.

On en conclut que la dérivée $\frac{dk'}{d\varphi}$, d'abord négative pour $\varphi = \omega$, puis finalement positive pour $\varphi = \Phi$, s'annule une fois et une fois seulement pour une valeur intermédiaire qui, vu la forme (38) de cette dérivée, correspond évidemment à une solution de l'équation $\xi = 0$.

La quantité k' ayant sa dérivée d'abord négative, puis positive, admet donc bien le minimum, d'ailleurs unique, cherché; et celui-ci se produit pour une valeur de φ comprise entre ω et Φ, et satisfaisant à l'équation $\xi = 0$, valeur dont notre transformation même prouve l'existence.

22. Pour obtenir d'une manière pratique la racine φ de l'équation transcendante $\frac{dk'}{d\varphi} = 0$, ou mieux de l'équation $\xi = 0$, nous regarderons cette équation comme une équation du second degré en

$$\mu = \sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi}.$$

De la valeur de μ, il sera facile de déterminer φ lui-même sans ambiguïté puisque nous savons que nous n'aurons qu'une racine convenable φ positive dans l'intervalle d'existence $\omega\Phi$. Au reste, cette inconnue μ a un certain intérêt par elle-même, car elle indique, en somme, le degré d'hétérogénéité du massif en chaque point. Et nous appliquerons alors à cette équation $\xi = 0$, qui peut, après avoir changé tous les signes de son premier membre, se mettre sous la forme réduite $a\mu^2 + b\mu - e = 0$, où les coefficients abe sont alors positifs, le procédé de résolution par approximations successives.

Supposons donc l'équation considérée, mise sous l'écriture particulière

$$\mu = f(\mu) \tag{42}$$

et négligeons les termes du second membre qui contiendraient μ. Nous trouvons alors pour μ une *certaine valeur* μ_1. *Si alors nous substi*tuons à μ cette valeur μ_1 dans le second membre de l'équation précédente, nous obtiendrons une seconde valeur

$$\mu_2 = f(\mu_1)$$

qui devra être plus approchée de la valeur exacte de μ, que μ_1; et si l'on substitue encore cette seconde valeur à la place de μ dans le second membre de l'équation (42), on sera conduit à une troisième valeur

$$\mu_3 = f(\mu_2)$$

et ainsi de suite, les valeurs μ_1, μ_2, μ_3 devant converger vers la valeur exacte de μ que nous appellerons m. Pour que ceci ait lieu, il faut et il suffit que, d'une manière générale, μ_2 soit plus approchée de m que μ_1, ce qui revient à écrire la condition

$$|\mu_2 - m| < |\mu_1 - m|.$$

Mais comme on a

$$\mu_2 = f(\mu_1) \quad \text{et} \quad m = f(m),$$

l'inégalité précédente devient

$$\left|\frac{f(\mu_1) - f(m)}{\mu_1 - m}\right| < 1,$$

c'est-à-dire encore puisque les μ doivent tendre vers m

$$f'(\mu_1) < 1 \quad \text{ou} \quad f'(\mu) < 1.$$

Au reste, si l'on remarque que l'on peut également écrire

$$|\mu_2 - m| < f'(\mu_2)\,|\mu_1 - m|,$$

on reconnaît en outre que la quantité dérivée $f'(\mu)$ indique à peu près la rapidité de la convergence à la racine exacte m des valeurs approchées μ_1, μ_2, μ_3.

Ici l'équation du second degré, c'est-à-dire le trinome (39) égalé à zéro, se mettra sous la forme

$$\mu = + \frac{e}{b} - \frac{a\mu^2}{b}, \tag{43}$$

et nous devrons vérifier, pour que la méthode soit applicable, l'inégalité

$$f'(\mu) = - \frac{2a\mu}{b} < 1,$$

ce qui revient à

$$\mu > -\frac{b}{2a}.$$

Si μ' et μ'' désignent alors les deux racines de l'équation (43), le procédé d'approximation ne s'appliquera donc qu'à la seule racine

$$\mu' = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ae}}{2a}.$$

Or la valeur cherchée de φ, unique comme l'on sait, ne saurait correspondre qu'à la seule racine positive de l'équation du second degré en μ, c'est-à-dire précisément à la racine μ' pour laquelle la méthode adoptée de résolution est applicable. La valeur de μ' est voisine de $\frac{e}{b}$ et, comme il fallait s'y attendre, assez voisine de zéro, car la quantité $\frac{ae}{b^2}$, nulle pour les valeurs extrêmes de ω variant de o à φ, reste, ainsi qu'il est souhaitable pour une bonne approximation, comme nous le montrons ci-dessous, toujours très voisine de zéro, dans cet intervalle.

23. Voici du reste comment on peut se rendre compte de son écart maximum de la valeur zéro. Remplaçant en effet a, b, e par leurs valeurs, on a pour valeur de $\frac{ae}{b^2}$

$$\frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\varphi}\,\frac{(2\sin^2\varphi\cos^2\omega + \lambda\cos\omega)\lambda\sin\varphi\sin(\varphi-\omega)}{[2\sin^2\varphi\cos^2\omega + \lambda\sin\varphi\sin(\varphi-\omega)]^2} = \mathrm{IJ}.$$

où I vaut $\frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\varphi}$. L'étude des fonctions I et J est aisée et permet de se rendre compte exactement de la valeur du produit IJ, pour toute valeur des ω, φ; et l'on reconnaît facilement qu'une plus grande valeur de IJ, c'est-à-dire de la quantité $\frac{ae}{b^2}$ dans le champ de notre problème vaudrait 0,062. La quantité $\frac{ae}{b^2}$ reste donc toujours petite, ou ce qui revient au même, ae est toujours petit vis-à-vis de b^2.

C'est là une condition en effet de bonne application de la méthode de résolution approchée indiquée plus haut de l'équation en μ. En effet, μ' y est proche de la solution $\frac{e}{b}$, de sorte que l'on pourra écrire

$$\mu' = \frac{e}{b}\left[1 - \frac{ae}{b^2} + 2\left(\frac{ae}{b^2}\right)^2 - 5\left(\frac{ae}{b^2}\right) + \dots\right],$$

et l'on pourra, puisque $\frac{ae}{b^2}$ est petit, approcher la valeur exacte de μ' par une suite d'approximations, dont l'ordre est de plus en plus élevé, de sorte que l'erreur qui persisterait après addition de chaque terme peut être regardée comme très petite par rapport à ce terme lui-même. Comme le crochet représente d'autre part une série alternée, les signes de a, b, e étant mis en évidence, on aura toujours une limite supérieure de l'erreur commise, inférieure comme on sait en valeur absolue au premier terme négligé, et cette approximation sera obtenue par défaut ou par excès suivant le signe de ce premier terme négligé. Les conditions de tout procédé d'approximation sont donc complètement satisfaites.

24. Ainsi donc la solution μ, qui nous intéresse de l'équation en μ^2, pourra s'écrire sous forme simple

$$\mu = \frac{e}{b}\,\mathrm{B},$$

en désignant par B la série alternée, où l'on a posé $q = \frac{ae}{b^2}$,

$$\mathrm{B} = 1 - q + 2q^2 - 5q + \ldots. \tag{44}$$

Nous pouvons alors écrire en remplaçant b et e par leurs valeurs et introduisant l'angle auxiliaire ψ défini précédemment

$$\mu = \frac{\sin\psi\cos\varphi}{\sin\psi + 2}\,\mathrm{B}.$$

Élevant au carré les deux membres, et remplaçant μ^2 par $\sin^2\Phi - \sin^2\varphi$ ou $\cos^2\varphi - \cos^2\Phi$, il vient en isolant $\cos^2\Phi$

$$\cos^2\Phi = \cos^2\varphi\left[1 - \frac{\mathrm{B}^2\sin^2\psi}{(\sin\psi + 2)^2}\right]$$

qui s'écrit, si nous y remplaçons les cosinus en fonction des tangentes, puis prenons les inverses

$$1 + \operatorname{tang}^2\Phi = 1 + \operatorname{tang}^2\varphi\,\frac{(\sin\psi + 2)^2}{(\sin\psi + 2)^2 - \mathrm{B}^2\sin^2\psi},$$

d'où, après simplification et remarquant que $4(1 + \sin\psi) = 8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)$

$$\operatorname{tang}^2\Phi = \operatorname{tang}^2\varphi\left[1 + \frac{\sin^2\psi}{\sin^2\varphi}\,\frac{1}{8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\,\frac{4(1 + \sin\psi)\mathrm{B}^2}{(\sin\psi + 2)^2 - \mathrm{B}^2\sin^2\psi}\right]$$

ou encore

$$(45) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin^2\psi}{\sin^2\varphi}\,\dfrac{1}{8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)}\,\dfrac{4(1+\sin\psi)B^2}{(\sin\psi + 2)^2 - B^2\sin^2\psi}}}.$$

Cette expression de $\operatorname{tang}\varphi$ est susceptible de fournir une valeur approchée de φ si l'on y remplace dans le second membre φ par Φ qui en diffère assez peu comme l'on sait. Cette valeur approchée serait en général un peu inférieure à la valeur exacte de φ, sauf dans le voisinage de ω nul, où elle lui serait légèrement supérieure, car alors $\sin\Phi$ l'emporte sur les autres facteurs du radical.

Faisons de plus $B = 1$, ce qui revient à ne considérer que le premier terme de la série définissant B, nous aurons en désignant par φ_0 la valeur approchée ainsi obtenue de φ, et par Ψ la valeur de ψ où l'on a remplacé φ par Φ

$$(46) \qquad \operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin^2\Psi}{\sin^2\Phi}\,\dfrac{1}{8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Psi}{2}\right)}}}$$

qui correspond en somme à une solution de l'équation $\xi = 0$, dans laquelle les termes en μ^2 seraient d'un ordre de petitesse supérieur à celui des termes en μ, ce qui n'a guère lieu du reste que dans le voisinage immédiat de ω nul.

Afin d'avoir toujours par la suite des points de comparaison numériques certains, nous avons déterminé *directement*, après des calculs de longueur rebutante, et pour un certain nombre de valeurs des arguments ω et Φ (Φ ne varie pratiquement qu'entre les limites de 20° à 50°), les racines de l'équation $\xi = 0$; les solutions pour des variations de 10° en 10° de ces arguments, consignées dans le tableau ci-dessous, ont été obtenues par l'emploi raisonné de la méthode de fausse position, et sont *exactes à une seconde près* par défaut.

(47)

			ω.			
Φ.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°......	18° 27′ 6″	19° 40′ 1″	20°			
30°......	28° 5′ 31″	29° 10′ 9″	29° 48′ 40″	30°		
40.......	37° 59′ 4″	38° 49′ 16″	39° 26′ 33″	39° 51′ 53″	40°	
50°......	48° 6′ [illegible]″	48° 40′ 51″	49° 9′ 45″	49° 34′ 15″	49° 53′ 7″	50°

Pour les mêmes valeurs des couples $\omega\Phi$, la formule (46) donnera les valeurs suivantes de φ_0 :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°......	18°28′42″	19°36′23″	20°			
30°......	28° 7′32″	29° 1′47″	29°46′44″	30°		
40°......	38° 0′55″	38°39′57″	39°16′34″	39°50′34″	40°	
50°......	48° 7′23″	48°32′31″	49° 0′31″	49°28′33″	49°52′6″	50°

et par comparaison avec les valeurs exactes correspondantes de φ, nous en déduisons la grandeur des écarts $\varphi - \varphi_0$ respectifs; ils valent :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.........	−1′36″	+3′38″	0			
30°.........	−2′ 1″	−8′22″	+1′56″	0		
40°.........	−1′51″	+9′19″	+6′59″	+1′19″	0	
50°.........	−1′18″	+8′19″	+9′14″	−5′42″	+1′1″	

Les écarts sont assez notables, et pour être utilisable la formule précédente en tang φ_0 devrait subir une correction. Remarquons, en passant, que pour $\omega = 0$, lorsque cette formule est susceptible de donner une assez bonne approximation, car alors le terme en μ^2 disparaît, les écarts sont à peu près constants et voisins de deux minutes environ. On pourrait donc en déduire, par exemple, pour le cas du massif horizontal ($\omega = 0$), la formule approchée suivante, en notant qu'alors l'angle auxiliaire Ψ vaut justement Φ :

$$\tag{48} \operatorname{tang}(\varphi + 2') = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Phi}{2}\right)}}}$$

donnée par Boussinesq pour le cas du massif à talus horizontal qu'il a étudié. Mais une généralisation de celle-ci pour les massifs à talus inclinés ne conduit à aucun résultat pratique.

25. Revenons donc à l'expression (45) qui peût s'écrire

$$\tag{49} \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{1 - z\rho}},$$

en posant

$$\tag{50} z = \frac{1}{4\sin^2\varphi}\,\frac{\sin^2\psi}{1 + \sin\psi}, \qquad \rho = \frac{4(1 + \sin\psi)B^2}{(\sin\psi + 2)^2 - B^2\sin^2\psi},$$

On reconnaît aisément par l'étude de la dérivée en ω que la fonction positive z, pour des ω croissants, décroît constamment jusqu'à zéro, qu'elle atteint pour $\omega = \varphi$. Il en serait de même d'une fonction Z obtenue en substituant dans z l'argument Φ à φ.

Mais étudions plus spécialement la fonction z dans sa correspondance avec Z. Pour cela, partons de l'expression (50) de z et du quotient

$$\frac{z}{Z} = \frac{\sin^2\Phi}{\sin^2\varphi}\,\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\Psi}\,\frac{1+\sin\Psi}{1+\sin\psi},$$

et remarquons que l'on peut, dans le développement suivant la différence toujours petite $(\Phi - \varphi)$, s'en tenir aux termes du premier ordre en $(\Phi - \varphi)$; il viendra

$$(51)\qquad \frac{z}{Z} \cong 1 + (\Phi - \varphi)\left[\frac{2\cos\Phi}{\sin\Phi} - \frac{\sin\Psi+2}{\sin\Psi+1}\,\frac{\cos\Phi\sin^2\Phi + \sin\omega\sin(\Phi+\omega)}{(\sin^2\Phi - \sin^2\omega)\sin\Phi}\right],$$

où l'on reconnaît que le crochet d'abord positif pour les petites valeurs de ω décroit constamment jusqu'à $\omega = \Phi$ en s'annulant une fois et une fois seulement pour une valeur $\omega_1 = \frac{\Phi}{\varepsilon_1}$ de ω où ε_1 représente une quantité positive supérieure à l'unité.

Nous concluons de là, $\Phi - \varphi$ étant positif, que le rapport $\frac{z}{Z}$ est supérieur à l'unité, c'est-à-dire que z est supérieur à Z pour les petites valeurs de ω (jusqu'à $\omega = \omega_1$), et qu'ensuite Z l'emporte sur z; les quantités z et Z sont du reste égales pour $\omega = \omega_1$ et aussi pour $\omega = \Phi$, car alors φ vaut Φ.

La valeur ω_1 correspond, d'autre part, à la racine positive de l'équation du second degré en tangω

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{tang}^2\omega\cos\Phi\left[2\cos^2\Phi + \frac{\sin\Psi+2}{\sin\Psi+1}(1+\sin^2\Phi)\right] \\ + \frac{\sin\Psi+2}{\sin\Psi+1}\sin\Phi\operatorname{tang}\omega - \frac{\sin\Psi}{\sin\Psi+1}\cos\Phi\sin^2\Phi \end{aligned}$$

et l'on trouve que Φ variant de 20° à 50°, ω_1 varie d'un peu moins de 2° à 5° à peine; on en déduit que la quantité ε_1 est très peu variable, car pour ces valeurs usuelles de Φ de 20° à 50°, elle décroît seulement de 10,4 à 9,5 environ.

Les deux fonctions z et Z toutes deux positives, et sans cesse décroissantes pour ω croissant sont donc telles qu'initialement pour de faibles valeurs de ω, Z ait une ordonnée représentative inférieure à celle de z; puis les deux courbes z et Z se traversent pour $\omega = \omega_1 = \frac{\Phi}{\varepsilon_1}$ où les deux fonctions prennent la même valeur. Au delà de cette valeur particulière de ω, Z a une ordonnée supérieure à celle de z; les deux fonctions décroissent toujours ensemble jusqu'à $\omega = \Phi$ où elles prennent de nouveau une même valeur — nulle ici — en touchant l'axe des abscisses tangentiellement à ce même point. Les deux fonctions z et Z peuvent donc avoir, d'une manière approchée qui se trouvera légitimée par la suite, leurs variations relatives représentées sous la forme parabolique

$$\frac{z}{Z} = 1 + \left(\frac{\omega}{\Phi} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)N \tag{52}$$

et l'égalité pour ω nul des seconds membres de (51) et (52), la différence $\Phi - \varphi$ s'entendant alors seulement pour ω nul permet d'écrire

$$\frac{N}{\varepsilon_1} = (\Phi - \varphi)\,\frac{\cos\Phi}{1 + \sin\Phi},$$

qui définit N, d'où il résulte que cette quantité comme ε_1 ne varie que dans des limites assez étroites. Le calcul effectué dans le champ du problème donne, $\Phi - \varphi$ exprimé en radians, des valeurs de N variant en effet de 0,205 à 0,177 pour Φ variant de 20° à 50°.

26. La fonction ν peut, en posant $\beta^2 = \frac{\sin\psi}{(2 + \sin\psi)}$ s'écrire

$$\nu = 1 - \frac{1 - B^2}{1 - \beta^2 B^2}.$$

Comme β^2 est toujours positif et inférieur à l'unité, ν sera lui-même inférieur à l'unité puisque $1 - B^2 < 1 - \beta^2 B^2$; de sorte que ν reste compris entre 0 et 1. Son plus grand écart de l'unité se déduit du minimum de ν ou du maximum de la fraction $\frac{1 - B^2}{1 - \beta^2 B^2}$ Ce dernier sera certainement inférieur à la valeur obtenue, en considérant dans cette fraction un maximum de $1 - B^2$ ou un minimum de B^2 pour le numérateur, et une plus petite valeur de $1 - \beta^2 B^2$, ou une plus grande de $\beta^2 B^2$ pour le dénominateur. Une plus petite valeur de B vaudra d'après (44) $1 - q$; une plus grande valeur de B est l'unité; d'autre part, la fonction $\beta^2 = \frac{\sin\psi}{(2 + \sin\psi)}$ est maxima pour $\omega = 0$ et pour le plus grand φ ou Φ, ainsi qu'il résulte des expressions dérivées (41), d'où sa valeur 0,068. De sorte qu'un écart maximum cherché de l'unité pour v vaudra

$$1 - v = \frac{2q - q^2}{0{,}932} \simeq 0{,}128,$$

en prenant pour q sa valeur maxima obtenue plus haut, soit 0,062.

La fonction v positive est toujours voisine et par valeurs inférieures de l'unité. Une limite supérieure de son plus grand écart de l'unité vaut 0,128. Elle vaut l'unité pour les valeurs extrêmes $\omega = 0$ et $\omega = \varphi$ ou Φ. Sa courbe représentative est de plus tangente aux mêmes points extrêmes à la droite $v = 1$. Dans ces conditions, on peut admettre que le plus grand écart de v de l'unité se produira à peu près au voisinage de $\omega = \frac{\varphi}{2}$ ou $\frac{\Phi}{2}$, de sorte que les variations de v pourraient être représentées *approximativement* sous la forme parabolique qui se trouvera justifiée par la suite

$$v = 1 + \frac{\omega}{\Phi}\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)\mathrm{M} \tag{53}$$

où nous pourrions prendre pour M la valeur constante 0,512, qui exprime justement qu'une limite supérieure de la quantité $(1 - v)$ vaut 0,128.

27. Remplaçant alors dans le produit zv, z et v par leurs expressions approchées (52) et (53), développant, puis supprimant les termes en MN toujours petits vis-à-vis des autres; posant enfin

$$\zeta = \varepsilon_1 \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}}{\mathrm{N}} \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{\mathrm{N}}{\varepsilon_1},$$

il viendra

$$zv \cong \mathrm{Z}\left[1 + \zeta\nu\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)\left(\frac{\omega}{\Phi} - \frac{1}{\zeta}\right)\right] = \mathrm{Z}\Lambda, \tag{54}$$

qui permet ainsi d'exprimer, sous forme simple et d'une manière approchée, qui se trouvera légitimée par la suite, le rapport à Z du produit zv par l'intermédiaire d'un coefficient de forme parabolique.

28. La quantité ζ caractérise en somme le point où la courbe représentative du facteur parabolique correctif Λ coupe l'horizontale d'ordonnée l'unité; la quantité ν, d'autre part, représente la petite quantité à ajouter à l'unité pour obtenir pour $\omega = 0$ la valeur du

facteur Λ. On reconnaît du reste que $\nu = \frac{N}{\varepsilon_1}$ varie assez peu, de 0,0197 à 0,0123 pour Φ variant de 20° à 50°. On a d'autre part

$$\zeta = \varepsilon_1 + \frac{M}{\nu} \cong (10,4 \text{ à } 9,5) + \frac{0,512}{(0,0197 \text{ à } 0.0123)} \cong 37 \text{ à } 47 \text{ environ.}$$

$\frac{1}{\zeta}$ varie donc également dans des limites assez étroites de 0,027 à 0,0213. Le calcul exact vérifie ces résultats.

Utilisons en effet les valeurs exactes à une seconde près par défaut de φ, calculées précédemment (47) : nous pourrons alors résoudre l'équation (49) suivant les produits $z\nu$ qui auraient les valeurs suivantes :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°...........	0,18996	0,03710	0			
30°...........	0,16995	0,06988	0,01538	0		
40°...........	0,15474	0,08749	0,04038	0,00962	0	
50°...........	0,14330	0,09770	0,06103	0,03088	0,00818	0

Comme d'autre part il est aisé d'évaluer les valeurs correspondantes de Z :

Φ.	ω. 0°.	10°	20°.	30°.	40°.	50°.
20°...........	0,18628	0,04105	0			
30°...........	0,16666	0,08218	0,01799	0		
40°...........	0,15218	0,09962	0,04899	0,01118	0	
50°...........	0,14156	0,10788	0,07258	0,03779	0,00951	0

on en déduit facilement les valeurs *exactes* du facteur correctif Λ :

(55)

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.......	1,0197	0,8421	1			
30°.......	1,0197	0,8502	0,8547	1		
40°.......	1,0168	0,8782	0,8241	0,8606	1	
50°.......	1,0123	0,9055	0,8407	0,8170	0,8600	1

Si nous reportons graphiquement en ordonnées ces valeurs de Λ suivant les valeurs correspondantes de ω en abscisses, nous voyons que les courbes représentatives des Λ ainsi obtenues coupent l'horizontale d'ordonnée l'unité, en des points *presque* confondus, voisins de l'abscisse

$$\omega_1 = \frac{\Phi}{\zeta} \cong \frac{\Phi}{40}.$$

(Nous avons déjà vu que $\frac{1}{\zeta}$ avait ses valeurs extrêmes comprises entre $\frac{1}{37} = 0,027$ et $\frac{1}{47} = 0,0213$ environ.) D'autre part, les valeurs de la fonction ν qui représente la petite quantité dont pour $\omega = 0$, le rapport $\frac{z}{Z}$ surpasse l'unité, dans ces conditions, seraient les suivantes [(55), première colonne] :

Φ.			
20°.	30°.	40°.	50°.
0,0197	0,0197	0,0168	0,0123

Notre approximation, et c'est là en fait la seule approximation de la méthode, consiste alors à regarder d'une part la fonction ν peu variable, comme constante et égale à une valeur *moyenne* 0,0180; et comme constante également la quantité peu variable $\frac{1}{\zeta}$ que nous remplacerons par la valeur moyenne $\frac{1}{40} = 0,025$.

L'expression (45) ou (49) devient alors, en tenant compte de (54), et en y faisant comme on vient de le dire $\zeta = 40$, et $\nu = 0,018$

$$(56)\quad \tang \varphi_4 = \frac{\tang \Phi}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \Psi}{\sin^2 \Phi} \frac{1}{8 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}\right)} \left[1 + 0,018 \times 40\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)\left(\frac{\omega}{\Phi} - \frac{1}{40}\right)\right]}}$$

où φ_4 [1] désigne une valeur approchée de φ, et où, comme l'on sait, l'angle Ψ, ou mieux son sinus, dérive de l'expression (40) de $\sin \psi$, où l'on a introduit l'angle Φ à la place de φ.

C'est la formule (56) que nous proposons pour le calcul de l'angle φ. La formule (48) proposée par Boussinesq pour le cas du talus horizontal serait donc à remplacer par celle d'un calcul au moins aussi simple

$$\tang \varphi_0 = \frac{\tang \Phi}{\sqrt{1 + 1,018 \times \frac{1}{8 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)}}},$$

qui non seulement a l'avantage, comme nous le verrons plus loin, de fournir une meilleure approximation, mais qui présente surtout l'intérêt de rentrer dans le cadre d'une expression d'application plus vaste,

(1) Deux essais non reproduits ici nous avaient donné des valeurs φ_2 et φ_3 moins approchées que φ_4.

puisqu'elle n'est qu'un cas particulier pour $\omega = 0$ de la formule générale (56) que nous proposons.

29. Mais il faut noter que notre approximation a consisté à remplacer le facteur *exact* Λ, par le facteur approché Λ_4, se déduisant du précédent, en y faisant ζ et ν constants, et dont la courbe représentative n'est autre qu'une parabole dont les ordonnées s'écartent très peu de celles de la courbe Λ.

Nous devons alors remarquer que l'introduction de coefficients numériques *moyens* empêche de se rendre compte *a priori*, et du degré d'approximation lui-même, et surtout du sens de cette approximation. Nous ignorons par suite, *a priori*, la répercussion que cette approximation peut avoir sur le coefficient k' lui-même que nous cherchons à évaluer; et c'est là ce qui importe. Or, il est possible, par l'emploi de la théorie des erreurs, de s'assurer de la bonne approximation de cette formule pour toutes les valeurs usuelles de Φ.

On sait que l'erreur absolue commise dans un calcul quelconque effectué sur une grandeur φ dont on n'a qu'une valeur approchée $\varphi_4 = \varphi \pm \eta$ est égale au produit de $\eta = |\varphi - \varphi_4|$ par la valeur que prend la dérivée de la fonction qui représente le résultat du calcul à effectuer, lorsqu'on y remplace φ par une valeur moyenne entre φ et le nombre $\varphi_4 = \varphi \pm \eta$ utilisé dans le calcul. Ainsi, l'erreur commise sur k' en y substituant φ_4 à φ aura pour expression

$$(57) \qquad |\varphi - \varphi_4| \left(\frac{dk'}{d\varphi}\right)_{\varphi \pm \theta(\varphi - \varphi_4)} \qquad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

ou encore

$$|\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4)| \left(\frac{dk'}{d\varphi}\right)_{\varphi \pm \theta(\varphi - \varphi_4)},$$

en remarquant que $\varphi - \varphi_4$ est par hypothèse très petit, et que, d'autre part, la tangente trigonométrique étant supérieure à l'arc fournit une limite supérieure de la première écriture.

A la vérité, la valeur moyenne à substituer dans k' entre φ et φ_4 n'est pas connue; mais il est facile par une substitution convenable, de tirer de la formule précédente une limite supérieure de l'erreur commise, et c'est cette limite seule qu'il importe d'avoir.

L'égalité (38) nous fournit la valeur de $\frac{dk'}{d\varphi}$, de sorte que l'expression précédente peut s'écrire

$$(57\ bis) \qquad |\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_1)| \left[\frac{\cos\omega}{\cos^2\Phi} \frac{(\cos\omega - \lambda)^2}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi} (\cos\varphi - \mu) \frac{\xi}{\lambda\mu} \right]_{\omega \pm (\varphi - \omega)}$$

dont nous devons considérer une limite supérieure pour toutes les valeurs possibles des arguments ω et φ ou Φ dans le champ du problème. On reconnaît facilement que le produit $\cos\omega\,(\cos\omega - \lambda)^2$ est maximum pour $\omega = \varphi$. La quantité $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + \mu} \cdot \frac{1}{\sin^2\varphi}$ est toujours inférieure ou au plus égale à $\frac{1}{\sin^2\varphi}$ et l'on trouve facilement un nombre positif u tel que l'on ait

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} < \frac{1+u}{\sin^2\Phi},$$

en remarquant que le rapport $\frac{\sin^2\Phi}{\sin^2\varphi}$ est le plus grand pour les plus faibles valeurs de φ, qui présentent en même temps les écarts les plus considérables d'avec les Φ correspondants. Ceci se produira ici pour φ égal à $18^\circ 27' 6''$ (47), soit pour une valeur de 1,1167 du rapport $\frac{\sin^2\Phi}{\sin^2\varphi}$; d'où résulte une valeur de $1 + u$, soit 1,12 par exemple. De sorte qu'une limite supérieure de l'expression (57 *bis*) et, par suite, de (57) sera

$$(58) \qquad |\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_1)| \left[\frac{1,12}{\sin^2\Phi} \frac{\xi_{\omega \pm (\omega - \varphi)}}{\lambda\mu} \right],$$

Nous pouvons choisir comme valeur de remplacement dans ξ la valeur de φ *exacte à une seconde près* par défaut. Or, nous avons reconnu sur un certain nombre d'exemples lors de la recherche directe des racines de l'équation $\xi = 0$, et par raison de continuité ce résultat subsiste pour toutes les valeurs de φ dans le champ du problème que le premier membre de cette équation, où l'on remplaçait φ par sa valeur exacte à une seconde près par défaut, était au plus égal à $\frac{1}{10^5}$, comme le montre le tableau suivant des substitutions faites dans ξ pour les couples d'arguments de $\omega\,\Phi$ déjà considérés :

	ω.					
Φ_0	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20........	0,000010	0,0000012	0,000000			
30........	0,000006	0,0000015	0,000009	0,000000		
40,........	0,000004	0,000004	0.000005	0,000009	0,000000	
50........	0,000010	0,000010	0 000010	0 000009	0,0000018	0,000000

Mais les accroissements d'une fonction quelconque sont sensiblement proportionnels aux petits accroissements de la variable, à condition bien entendu que sa dérivée ne cesse pas d'être finie et continue, ainsi que c'est le cas ici comme il résulte autant de l'étude précédemment faite de ξ, que de la signification physique du problème. Nous en déduisons pour $\xi_{\varphi \pm j(\varphi - \varphi_4)}$, l'écart $|\varphi - \varphi_4|$ exprimé en secondes étant par hypothèse petit, la valeur $\frac{1}{10}|\varphi - \varphi_4|$ dont une plus grande valeur exprimée en lignes trigonométriques vaut $|\text{tang}\,(\varphi - \varphi_4)| \times 2{,}06265$: de sorte que l'expression (58) et *a fortiori* (57) de l'erreur commise aura pour limite supérieure

$$(59) \qquad 2{,}06265 \times \frac{1{,}12}{\sin^2\Phi}\,\frac{\text{tang}^2(\varphi - \varphi_4)}{\lambda\mu}.$$

30. On obtient facilement une plus petite valeur de λ. Tirons, en effet, la valeur de φ de la relation générale (49) jointe à l'égalité (54), il viendra

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,\Phi}{\sqrt{1 + Z\Lambda}},$$

et portons-la dans l'expression de λ (37); on aura

$$\lambda^2 = \sin^2\varphi - \sin^2\omega = \sin^2\Phi[1 + Z\Lambda\cos^2\Phi]^{-1} - \sin^2\omega,$$

où le crochet peut se développer suivant les puissances croissantes de $Z\Lambda\cos^2\Phi$, cette dernière quantité étant inférieure à l'unité. On en déduit, ce développement étant à termes de grandeur décroissante et à signes alternés, une plus petite valeur de λ^2

$$\sin^2\Phi - \sin^2\omega - \frac{\sin^2 2\Phi}{4} Z\Lambda$$

avec Z égal à

$$\frac{1}{4\sin^2\Phi}\,\frac{\sin^2\Psi}{1 + \sin\Psi}$$

ou en remplaçant Z par une plus grande valeur, obtenue par exemple en y substituant l'unité au facteur $(1 + \sin\Psi)$ du dénominateur

$$(\sin^2\Phi - \sin^2\omega)\left[1 - \Lambda\frac{\sin^2(\Phi - \omega)\cos^2\Phi}{4\cos^2\omega\sin^2\Phi}\right].$$

La fraction du crochet a en ω une dérivée dont le signe est celui de l'expression $[\sin(\Phi - \omega)\sin\omega - \cos\Phi]$, toujours négative dans le champ du problème puisque ce n'est que pour des valeurs de Φ supérieures à 70°

environ qu'elle peut devenir, pour certaines valeurs de ω, positive. Cette fraction décroissante en ω prendra donc une plus grande valeur pour ω nul, soit $\frac{\cos^2\Phi}{4}$ division faite aux deux termes du facteur $\sin^2\Phi$. Le crochet $\left(1 - \frac{\cos^2\Phi}{4}\right)$ prendra une plus petite valeur pour une plus petite valeur de Φ, soit 20^0. Une plus grande valeur de Λ vaudra, d'autre part, 1,03, ainsi qu'il résulte d'un calcul précédemment effectué (55), de sorte qu'une plus petite valeur de λ^2 sera $0{,}76\,(\sin^2\Phi - \sin^2\omega)$, ce qui donne, en extrayant la racine carrée, une plus petite valeur de λ égale à

$$0{,}86\lambda_\Phi, \tag{60}$$

λ_Φ représentant la valeur de λ où l'on aurait remplacé φ par Φ.

31. On a aussi, en utilisant encore les relations (49) et (54)

$$\mu^2 = \sin^2\Phi - \sin^2\varphi = \frac{Z\Lambda}{4}\sin^2 2\Phi\,[1 + Z\Lambda\cos^2\Phi]^{-1}$$

qui donnera, comme plus petite valeur de μ^2 en raisonnant ainsi qu'il vient d'être fait pour λ,

$$\frac{Z\Lambda}{4}\sin^2 2\Phi\,[1 - Z\Lambda\cos^2\Phi]$$

ou encore, en opérant comme précédemment, c'est-à-dire en remplaçant dans le crochet Z, Λ, $\cos^2\Phi$ par les valeurs maxima qu'ils peuvent respectivement admettre

$$\frac{Z\Lambda}{4}\sin^2 2\Phi \times 0{,}76.$$

Une plus petite valeur de Λ pourra ainsi qu'il résulte d'un calcul déjà effectué (55), être prise égale à 0,76, de sorte qu'en extrayant la racine carrée, nous aurons une plus petite valeur de μ égale à

$$0{,}38\sin 2\Phi Z^{\frac{1}{2}}. \tag{61}$$

32. On obtient enfin une plus grande valeur de $|\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_1)|$ en partant des deux expressions

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{1 + Z\Lambda}}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{1 + Z\Lambda_1}}, \tag{62}$$

la seconde étant écrite par analogie à la première. On en déduit, après une réduction évidente,

$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4) = \operatorname{tang}\Phi \frac{\sqrt{1 + Z\Lambda_4} - \sqrt{1 + Z\Lambda}}{\operatorname{tang}^2\Phi + \sqrt{1 + Z\Lambda_4}\sqrt{1 + Z\Lambda}},$$

dont une plus grande valeur s'obtient par substitution de l'unité aux deux radicaux du dénominateur, soit

$$\frac{\sin 2\Phi}{2}\left[(1 + Z\Lambda_4)^{\frac{1}{2}} - (1 - Z\Lambda)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Les développements des parenthèses suivant les puissances croissantes de $Z\Lambda$ et de $Z\Lambda_4$ s'effectuent sans difficulté puisque ces deux quantités sont inférieures respectivement à l'unité.

Le sens de l'approximation est évident, ces développements présentant, à partir du second, des termes de grandeur décroissante et à signes alternés. On a donc, comme plus grande valeur de $|\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_1)|$, et en valeur absolue

$$\frac{\sin 2\Phi}{4} Z\,|\Lambda_4 - \Lambda|.$$

Il ne semble pas aisé d'évaluer un maximum théorique du produit $Z|\Lambda_4 - \Lambda|$. Mais nous connaissons les variations de Z. Nous savons, d'autre part, que les différences $\Lambda - \Lambda_4$ par suite de la continuité des fonctions Λ et Λ_4 de même allure générale et de même sens de variation et parce qu'elles sont des différences d'ordonnées de courbes représentatives très voisines ayant aussi des points communs, restent toujours faibles. On les mesure facilement, et l'on trouve ainsi que $\frac{1}{10}$ représente une plus grande valeur du produit $Z|\Lambda - \Lambda_4|$. On a du reste, pour les valeurs déjà considérées des arguments $\omega\Phi$, pour les écarts $\Lambda - \Lambda_4$:

	ω					
Φ.	0°.	10°	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.........	0,0017	+0,0131	0.0000			
30°....... .	-0,0017	—0,0022	+0,0086	0,0000		
40°.........	—0,0012	—0.0003	—0,0049	—0,0089	0,0000	
50°....... .	—0,0057	+0,0063	+0.0027	+0.0174	+0,0284	0,0000

et les valeurs correspondantes de $Z(\Lambda - \Lambda_4)$:

	ω.					
Φ.	0°.	10°	20°.	30°.	40°.	50°.
20°...... .	+0,00031	+0,00057	0.00000			
30°.......	+0,00028	—0,00018	-0,00015	0,00000		
40°.......	—0,00018	—0,00003	—0.00023	—0,00010	0,00000	
50°.......	—0.00079	—0,00067	—0.00019	+0.00065	+0.00026	0,00000

Une plus grande valeur de $|\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4)|$ vaut donc

$$\frac{\sin 2\Phi}{4 \cdot 10^3}. \tag{63}$$

Ce ne sera, au reste, pas toujours une telle limite qu'il conviendra de considérer : le type des relations (62) en φ et φ_4 montre, en effet, que lorsque ω tend vers φ ou Φ, l'écart $(\varphi - \varphi_4)$ diminue extrêmement pour devenir nul à la limite. La plus grande valeur constante obtenue précédemment pour $\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4)$ serait alors vraiment trop éloignée. Mais nous pourrons lui en substituer une autre qui tienne compte de cette décroissance de l'écart $(\varphi - \varphi_4)$ avec celle de la différence $\Phi - \omega$. Il suffit, pour cela, de mettre en évidence dans Z qui le contient le facteur $(\Phi - \omega)$. Prenant alors une valeur supérieure en valeur absolue des petits écarts $|\Lambda - \Lambda_4|$ soit $\frac{4}{10^2}$, nous aurons comme plus grande valeur de $|\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4)|$

$$\frac{\sin 2\Phi}{10^2} Z. \tag{64}$$

Les deux expressions (63) et (64) fournissent des valeurs supérieures en valeur absolue de $\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4)$. L'expression (63) sera utilisée dans le cas de valeurs de ω assez éloignées de Φ, l'expression (64) étant réservée pour les valeurs de ω qui s'en rapprochent.

33. Ceci posé, si nous envisageons des inclinaisons ω par trop fortes, une plus grande valeur de l'erreur commise sur k', en y substituant à φ la valeur φ_4 approchée, sera obtenue en remplaçant dans l'expression (59), $\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4)$ par sa valeur supérieure (63), λ et μ par leurs valeurs inférieures (60) et (61), et en substituant également dans Z au facteur $(1 + \sin\Psi)$ le facteur $(1 + \sin\Phi)$ qui lui est supérieur; soit

$$\frac{1,12}{10^6} \times \frac{2,06265}{2,614} \times \frac{\sin 2\Phi \sqrt{1 + \sin\Phi} \cos^2\omega}{\sin(\Phi + \omega) \sin^2(\Phi - \omega)}. \tag{65}$$

Cette expression varie évidemment en sens inverse de Φ. De plus, elle varie dans le même sens que ω puisque sa dérivée en ω est toujours positive. Une plus grande valeur de l'expression (65) sera donc obtenue pour une plus petite valeur de Φ et pour une plus grande valeur de ω.

Pour les valeurs élevées de ω, d'autre côté, une plus grande valeur de l'erreur, définie par l'expression (59), pourra, en remplaçant $\operatorname{tang}(\varphi - \varphi_4)$ par sa valeur supérieure (64), λ et μ par leurs plus petites valeurs (60) et (61), et en substituant dans Z au facteur $(1 + \sin\Psi)$ l'unité, être mise sous la forme

$$\frac{1,12}{10^4} \times \frac{2,06265}{2,614} \times \frac{\sin 2\Phi \sin(\Phi + \omega) \sin^4(\Phi - \omega)}{\sin^8\Phi \cos^6\omega}. \tag{66}$$

Cette expression varie évidemment en sens inverse de Φ. D'autre part, sa dérivée en ω est du signe de la quantité

$$-3 \sin\Phi \cos\Phi \cos\omega - \sin^2\omega - \sin\omega(5 - 6 \sin^2\Phi)$$

toujours négative, puisque dans le champ du problème le facteur entre parenthèses reste toujours positif. Une plus grande valeur de cette expression sera donc obtenue pour une plus petite valeur de Φ, et une plus petite valeur de ω.

Et, pour que l'erreur faite sur k' en y substituant à φ la valeur approchée φ_4 soit inférieure à une unité du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal, il suffira de pouvoir déterminer le nombre entier n tel que les deux expressions (65) et (66) précédentes soient à la fois toutes deux inférieures à $\frac{1}{10^n}$, lorsqu'on y remplacera Φ par sa plus petite valeur dans le champ du problème, et ω par une certaine valeur comprise entre ω et Φ.

Or, pour $\omega = \frac{2}{3}\Phi$ et pour Φ égal à sa valeur minima, soit 20°, les deux inégalités

$$\frac{1,12}{10^6} \times \frac{2,06265}{2,614} \times \frac{\sin 2\Phi \sqrt{1 + \sin\Phi} \cos^2\omega}{\sin(\Phi + \omega) \sin^2(\Phi - \omega)} < \frac{1}{10^n},$$

$$\frac{1,12}{10^4} \times \frac{2,01265}{2,614} \times \frac{\sin 2\Phi \sin(\Phi + \omega) \sin^4(\Phi - \omega)}{\sin^8\Phi \cos^6\omega} < \frac{1}{10^n}$$

se trouvent toutes deux vérifiées pour $n = 4$, puisque leurs premiers membres prennent alors respectivement les valeurs $\frac{8,410}{10^5}$ et $\frac{3,567}{10^5}$, inférieures à $\frac{1}{10^4}$.

Nous concluons de là :

D'une part que notre formule approchée (56) donne des valeurs φ_4 qui ne diffèrent des valeurs exactes φ que d'un écart faible dont une valeur théorique supérieure de la tangente trigonométrique serait $\frac{\sin 2\Phi}{4.10^3}$, ce qui correspond à un écart maximum théorique $\varphi - \varphi_4$ d'environ $52''$.

D'autre part, et c'est là le plus important, que l'écart sur φ résultant de la formule approchée (56) n'a qu'une *très faible* répercussion sur la valeur de k' et qu'en particulier l'erreur commise sur k' par la substitution de φ_4 à φ est inférieure à une unité du quatrième ordre décimal.

Dans ces conditions, la résolution de l'équation $\xi = 0$ (39) en φ, est donnée avec une approximation très suffisante par la formule approchée (56).

34. Il peut n'être pas sans intérêt de comparer de suite aux valeurs *exactes* de φ que nous avons calculées directement à une seconde près par défaut, les valeurs φ_4 obtenues par notre formule approchée (56). Cette dernière est du reste d'une application numérique facile en se servant de l'angle auxiliaire Ψ dont l'expression se prête parfaitement par sa ligne trigonométrique sinus au calcul. Ces valeurs de φ_4 sont les suivantes pour les mêmes couples des arguments $\omega\Phi$:

			ω			
Φ.	0°.	10°.	20°.	30°.	50°.	50°.
20°......	18°27′14″	19°40′19″	20°			
30°......	28° 5′42″	29°10′ 2″	29°48′47″	30°		
40°......	37°58′57″	38°49′14″	39°26′20″	39°51′48″	40°	
50°......	48° 5′30″	48°41′21″	49° 9′55″	49°33′43″	49°52′54″	50°

Les petites différences $\varphi - \varphi_4$ sont alors en secondes d'arcs :

			ω			
Φ.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.............	— 8″	—18″	0			
30°.............	— 9″	+ 7″	— 7″	0		
40°.............	+ 7″	+ 2″	+13″	+ 5″	0	
50°.............	+35″	—30″	—10″	+32″	+13″	0

Mais ce qui présente le plus d'intérêt, c'est de se rendre compte numériquement de la répercussion que l'écart $\varphi - \varphi_4$ a eu sur k'. L'expression (35) de k' est prête à un calcul rapide avec l'introduction des deux angles auxiliaires aigus et positifs ω' et ε définis par les relations

$$\cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}, \qquad \sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

Soit k'_4 la valeur de l'expression (35) de k' où l'on aurait remplacé φ par φ_4, où par suite les angles auxiliaires seraient devenus ε_4 et ω'_4 définis par les relations

$$\cos\varepsilon_4 = \frac{\sin\varphi_4}{\sin\Phi}, \qquad \sin\omega'_4 = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi_4};$$

les valeurs de k' valent alors :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.....	0,45675	0,51425	0,88304			
30°.....	0,30211	0,32884	0,38475	0,75000		
40°.....	0,19271	0,20554	0,22685	0,27020	0,58680	
50°.....	0,11531	0,12108	0,12944	0,14309	0,17155	0,41318

et les valeurs correspondantes de K'_1 sont :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.....	0,45675	0,51426	0,88304			
30°.....	0,30213	0,32886	0,38476	0,75000		
40°.....	0,19270	0,20555	0,22686	0,27020	0.58680	
50°.....	0,11530	0,12108	0,12945	0,14307	0,17155	0,41318

ce qui donne, comme erreurs faites sur k' les écarts suivants, exprimés en unités du quatrième ordre décimal :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°...........	0,0	—0,1	0,0			
30°...........	—0,2	—0,2	—0,1	0,0		
40°...........	+0,1	—0,1	—0,1	0,0	0,0	
50°...........	+0,1	0,0	—0,1	+0,2	0,0	0,0

Ces résultats confirment l'étude précédente.

CHAPITRE IV.

DES MEILLEURS COEFFICIENTS PRATIQUES DE POUSSÉE A INTERVENIR.

Les coefficients k_0. — Les coefficients k. — Les coefficients de poussée K.
Autres résultats. — Cas ou le mur n'est pas vertical.

35. En nous reportant au paragraphe 18, nous avons pour expression de la limite (31) par défaut de la composante horizontale de la poussée, dans les conditions de notre étude, c'est-à-dire dans le cas d'un mur à paroi intérieure verticale, la quantité $P_i = k_0 \Pi r$ où k_0 est donné par la formule

$$k_0 = \cos\varphi \frac{\cos^2(\varphi+\delta)\cos\omega}{\cos(\omega-\delta)\cos(\varphi-\delta)}, \tag{67}$$

dans laquelle φ représente l'angle de frottement intérieur du massif donné. Nous trouvons facilement les diverses valeurs de k_0 pour les mêmes valeurs déjà envisagées des arguments ω et Φ, c'est-à-dire ici ω et φ :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.........	0,39073	0,48439	0,88304			
30°.........	0,25000	0,29378	0,316025	0,75000		
40°.........	0,15628	0,17676	0,20555	0,25733	0,58680	
50°.........	0,092396	0,10103	0,112826	0,13000	0,16333	0,41318

36. Nous évaluerons aussi numériquement, et dans les mêmes conditions, l'autre limite supérieure qui, comme on l'a vu au paragraphe 18, peut se mettre sous la forme $P_1 = k\Pi r$, où k est donné par la même relation (67) que ci-dessus pour k_0, mais où φ ne sera plus pris égal à l'angle de frottement intérieur du massif donné, mais sera fourni par l'équation

$$\sin\varphi = \sin\Phi\cos\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\omega + \arcsin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right)\right],$$

où Φ est alors égal à l'angle donné de frottement intérieur du massif homogène. Quelques tâtonnements sont nécessaires pour résoudre en φ cette équation, mais on obtient assez rapidement, par la méthode de fausse position, ce qui conduit à remplacer tout d'abord φ par Φ dans le second membre, les valeurs suivantes de φ, à une seconde près par défaut :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.....	15° 49′ 58″	18° 12′ 16″	20° 00′ 00″			
30°.....	24° 55′ 53″	26° 52′ 57″	28° 25′ 31″	30° 00′ 00″		
40°.....	34° 42′ 30″	36° 9′ 52″	37° 23′ 7″	38° 34′ 33″	40° 00′ 00″	
50°.....	45° 3′ 41″	46° 2′ 33″	46° 54′ 30″	47° 45′ 43″	48° 42′ 32″	50° 00′ 00″

d'où l'on déduit aisément les valeurs correspondantes de k :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°......	0,47045	0,53157	0,88304			
30°......	0,31382	0,34293	0,40238	0,75000		
40°......	0,20132	0,21555	0,23865	0,28506	0,58680	
50°......	0,12093	0,12738	0,13668	0,15165	0,18227	0,41318

37. Il est clair que le coefficient K par lequel il faudra multiplier le facteur Πr pour avoir la composante normale de la poussée, dans l'état d'équilibre-limite étudié aura comme valeur *théorique la meilleure,*

la moyenne arithmétique de l'évaluation de k_0, par défaut, et de la plus petite évaluation k' par excès, ou plutôt $k'_{,}$. On aura alors, pour les valeurs de K correspondant aux valeurs déjà retenues, des arguments $\omega\Phi$:

(68)

	ω.					
Φ.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.....	0,42374	0,49932	0,88304			
30°.....	0,27606	0,31132	0,37539	0,75000		
40°.....	0,17449	0,19115	0,21620	0,26376	0,58680	
50°.....	0,103848	0,11105	0,121138	0,136535	0,16744	0,41318

38. On ne peut s'empêcher de comparer la difficulté qu'il y a eu à obtenir k' ou plutôt $k_{,}$ avec la facilité que l'on a à calculer k, et si l'on remarque en outre, avec Boussinesq, que tout au moins dans le cas du massif horizontal qu'il a traité, k' excède k_0 des $\frac{9}{11}$ environ de la différence $k - k_0$, on en vient à se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir d'une manière générale et pour des talus d'inclinaison ω non nulle les coefficients K en fonction des seuls k et k_0. L'expression

$$K = k_0 + \frac{9}{22}(k - k_0), \tag{69}$$

proposée pour le cas du massif horizontal par Boussinesq donnerait ici pour les différentes valeurs de $\omega\Phi$ les valeurs suivantes de K :

	ω.					
Φ.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.....	0,42334	0,50370	0,88304			
30°.....	0,27610	0,313886	0,38090	0,75000		
40°.....	0,17470	0,192528	0 21907	0,26867	0,58680	
50°.....	0,104069	0,111809	0 122584	0,13886	0,17108	0,41318

qui présentent vis-à-vis des valeurs correspondantes obtenues par la formule $K = \frac{k_0 + k_{,}}{2}$ avec une approximation de l'ordre du quatrième ordre décimal, c'est-à-dire avec une formule qui donne pratiquement des chiffres *exacts*, les écarts suivants comptés justement en unités du quatrième ordre décimal, pour les mêmes valeurs des arguments $\omega\Phi$:

	ω.					
Φ.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.........	−4,0	+43,8	0,0			
30°.........	+0,4	+25,6	+55,0	0,0		
40°.........	+2,1	+14,7	+28,7	+49,1	0,0	
50°.........	+2,2	+ 7 5	+14,4	+23,2	+36,4	0,0

Ces écarts, en dehors du cas du talus horizontal ($\omega = 0$), sont trop importants pour que l'expression précédente (69) des coefficients K puisse être conservée telle quelle pour des talus inclinés sur l'horizon, puisqu'en fait elle ne garantit pas l'exactitude des chiffres du second ordre décimal. Ces écarts assez considérables proviennent évidemment de ce que la différence $k' - k_0$ ou $k'_1 - k_0$ n'est plus dans le rapport de 9 à 11 $\left(\frac{9}{11} = 0{,}81818\right)$ à la différence $k - k_0$, ainsi du reste qu'il ressort des valeurs calculées de la fraction $\frac{k' - k_0}{k - k_0}$, ou mieux $\frac{k'_1 - k_0}{k - k_0}$:

	ω.					
Φ	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.......	0,82815	0,63324	0,00000			
30°.......	0,81650	0,71333	0,51513	0,00000		
40°.......	0 80884	0,74194	0,64350	0,4641[illegible]	0,00000	
50°.......	0,80308	0,76090	0,69656	0,60460	0.43400	0,00000

De sorte que si l'on voulait utiliser l'expression (69) précédente sous une forme *analogue*, il y aurait lieu d'y remplacer le coefficient constant $\frac{9}{11}$ représentant la valeur de la fraction $\frac{k' - k_0}{k - k_0}$ ou $\frac{k_1 - k_0}{k - k_0}$ par une fraction toujours inférieure à $\frac{1}{2}$, variable pour un Φ déterminé avec ω, de valeur initiale $\frac{9}{11}$ et de valeur finale nulle lorsque l'angle ω prend la valeur de l'angle de frottement du massif homogène considéré, c'est-à-dire son angle de terre coulante.

Considérons en effet, pour ce dernier point avec Boussinesq, le petit écart α entre l'angle de terre coulante du massif *donné* et son inclinaison connue ω sur l'horizon, soit $\alpha = \varphi - \omega$. On a, ω étant supposé très voisin de φ, c'est-à-dire α très petit,

$$\sin\omega = \sin(\varphi - \alpha) \simeq \sin\varphi - \alpha\cos\varphi.$$

d'où

$$\sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi} \simeq 1 - \alpha\cot\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2\alpha\cot\varphi}\right)$$

et

$$\omega' = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\alpha\cot\varphi},$$

On a donc

$$\delta = \sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\varphi} - \frac{\alpha}{2} \sim \sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\varphi},$$

d'où

$$\cos(\varphi \pm \delta) \simeq \cos\varphi\left(1 \mp \sqrt{\frac{\alpha}{2}\tang\varphi}\right)$$

et l'expression de k_0 à laquelle est applicable l'écart $\varphi - \omega = \alpha$, puisque α est négligeable devant δ et que l'on peut, par suite, y remplacer φ par ω s'écrit

$$k_0 = \left[\frac{\cos\omega\cos(\omega+\delta)}{\cos(\omega-\delta)}\right]^2 \simeq \cos^2\omega\left[1 - 2\sqrt{2\alpha\tang\omega}\right].$$

Dans le cas du coefficient k', l'angle Φ doit être pris égal à l'angle de frottement du massif homogène donné. On aura donc

$$\Phi - \omega = \alpha.$$

On a de suite également

$$\cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}, \qquad \sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

d'où

$$\varepsilon = \sqrt{2(\Phi - \varphi)\cot\Phi}, \qquad \omega' = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2(\varphi - \omega)\cot\varphi}$$

qui, en introduisant l'angle auxiliaire ϖ défini par les relations

$$\sqrt{\varphi - \omega} = \sqrt{\alpha}\sin\varpi, \qquad \sqrt{\Phi - \varphi} = \sqrt{\alpha}\cos\varpi,$$

donnent, en remplaçant devant α, $\cot\varphi$ et $\cot\Phi$ par $\cot\omega$,

$$\varepsilon = \sqrt{2\alpha\cot\omega}\cos\varpi, \qquad \omega' = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\alpha\cot\omega}\sin\varpi,$$

et l'on en déduit

$$\cos\varepsilon \simeq 1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi+\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) \simeq \cos\omega\left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\omega}\sin\varpi\right],$$

$$\cos(\omega' - \omega + \varepsilon) \simeq \sin\omega\left[1 + \cot\omega\sqrt{2\alpha\cot\omega}(\sin\varpi - \cos\varpi)\right].$$

$$\cos(\varphi - \varepsilon) \simeq \cos\omega(1 + \varepsilon\tang\omega),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi+\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}\right) \simeq \cos\omega\left[1 + \sqrt{\frac{\alpha}{2}\cot\omega}\sin\varpi\right],$$

$$1 - \sin\Phi\cos(\omega' - \omega + \varepsilon) = \cos^2\omega\left[1 + \sqrt{2\alpha\tang\omega}(\sin\varpi - \cos\varpi)\right].$$

d'où, après des réductions faciles,

$$k' \simeq \cos^2\omega\left[1 - 2\sqrt{2\alpha\tang\omega}\sin\varpi\right]$$

dont la valeur minima correspond évidemment à $\sin\varpi$ égal à l'unité, c'est-à-dire a pour expression

$$k' \sim \cos^2\omega\left[1 - 2\sqrt{2\alpha\tang\omega}\right].$$

On reconnaît alors que la différence $k' - k_0$ ou $k'_1 - k_0$ vaut zéro, aux termes près d'ordre de petitesse supérieure à $\sqrt{\alpha}$.

Or, la valeur du coefficient k dans des conditions analogues s'obtient de la même manière que k_0; mais α n'y aura plus la même valeur puisque ce sera l'angle Φ devenu différent qui sera égal à l'angle de frottement intérieur du massif homogène donné. Soit alors $\alpha' = \alpha t$ la nouvelle valeur de α où t représente un coefficient numérique positif. On obtiendra de suite

$$k - k_0 \cong 2\cos^2\omega\left[\sqrt{2\alpha \operatorname{tang}\omega} - \sqrt{2\alpha' \operatorname{tang}\omega}\right] \cong 2\cos^2\omega\sqrt{2\alpha\operatorname{tang}\omega}\,(1-\sqrt{t}),$$

résultat qui montre que la différence $k - k_0$ pour les valeurs de ω voisines de celles de l'angle Φ est de l'ordre de $\sqrt{\alpha}$.

Il résulte de là que la fraction $\frac{k' - k_0}{k - k_0}$ ayant un numérateur dont l'ordre de petitesse, au voisinage de $\omega = \varphi$ ou Φ, est supérieur à celui du dénominateur, est bien nulle à la limite lorsque l'écart $\alpha = \varphi - \omega$ vaut zéro.

Ces données théoriques fournissent des résultats précieux sur l'allure de la fraction $\frac{k' - k_0}{k - k_0}$ ou $\frac{k_1 - k_0}{k - k_0}$ pour laquelle il semble naturel d'admettre un sens de variation toujours semblable, c'est-à-dire décroissant. Des tâtonnements divers, car la simplicité doit être, pour cette formule destinée à un calcul numérique rapide, à la base de la recherche entreprise, nous ont conduit à ne pouvoir utilement envisager comme fraction simple équivalente, que l'expression

$$\frac{9}{11}\left(1 - \frac{\omega^2}{\Phi^2}\right).$$

Nous aurions donc dans ces conditions la formule suivante pour K

$$K = k_0 + \frac{9}{22}\left(1 - \frac{\omega^2}{\Phi^2}\right)(k - k_0), \tag{70}$$

où nous n'avons à connaître que k et k_0 et où k' ne figure pas. Les valeurs de K calculées avec cette formule, pour les mêmes valeurs des arguments Φ et ω déjà considérées sont alors les suivantes :

	ω.					
Φ.	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°.......	0,42334	0,49887	0,88304			
30°.......	0,27610	0,31165	0,374289	0,75000		
40°.......	0,17470	0,19163	0,21569	0 262291	0,58680	
50°.......	0,104069	0,111378	0,121022	0,13567	0,16612	0,41318

Et ces nouveaux coefficients K diffèrent des premiers (68) calculés par la formule $K = \frac{k''_0 + k'}{2}$ ou $K = \frac{k_0 + k_1}{2}$ que nous pouvons regarder comme exacts jusqu'au moins au quatrième chiffre décimal, des grandeurs ci-dessous exprimées en unités de ce quatrième ordre décimal :

Φ.	ω. 0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
20°...........	—4,0	—4,5	0,0			
30°......... ..	+0,4	+3,3	—11,0	0,0		
40°......... ..	+2,1	+4,8	— 5,1	—14,7	0,0	
50°...........	+2,2	+3,2	— 1,1	— 8 6	—13,2	0,0

L'approximation est donc meilleure, mais pas encore suffisante.

39. De la comparaison de ces différents résultats, il semble donc logique de conclure que les coefficients de poussée à employer devront être calculés au moyen de l'expression

$$\mathrm{K} = \frac{k_0 + k'_4}{2} \tag{71}$$

par l'intermédiaire de la formule (56) que nous avons établie et que nous proposons à cette fin. L'expression (71) paraît du reste préférable à celle (70) qui utilise les seuls k_0 et k, non seulement au point de vue de l'approximation des résultats, puisqu'elle assure l'exactitude de la quatrième décimale, tandis que la dernière ne garantit pas même la seconde; mais encore au point de vue de la rapidité du calcul numérique et de l'estimation pratique, notre formule (56) en tang φ_4 étant établie une fois pour toutes et donnant toute satisfaction tant au point de vue de l'exactitude que de la commodité du calcul.

40. Il pourrait n'être pas sans intérêt, en terminant, de comparer les valeurs numériques que nous avons obtenues dans la recherche des meilleurs coefficients pratiques de poussée, avec celles proposées déjà, et résultant d'autres hypothèses, d'autres théories, comme de l'expérience elle-même.

La plupart des recherches théoriques ne se rapportent qu'aux massifs à surface libre horizontale. Parmi celles qui ont abordé le problème du talus incliné, il y a lieu de mentionner la méthode purement géométrique et graphique de Rebhahn. Il y a lieu surtout de citer le travail de feu l'Inspecteur général des Ponts et Chaussées Résal, qui ramène la question à l'étude d'une courbe dite ligne de poussée dont l'équation non intégrable permet pourtant de reconnaître les propriétés, et que l'auteur trace par points en utilisant le calcul des différences finies. Les résultats numériques de Résal ont une similitude assez notable et par là même intéressante avec ceux que nous avons obtenus. Aussi, mentionnerons-nous à titre indicatif dans le tableau ci-après et pour le domaine commun de 5° en 5°, où leurs valeurs numériques ont été obtenues, sur une première ligne les coefficients publiés par Résal d'abord en 1903 (à gauche), puis après révision de ses calculs en 1910 (à droite); sur une seconde ligne, en caractères gras, les valeurs correspondantes de nos propres coefficients; et enfin, au-dessous, quelques résultats obtenus de mesures expérimentales, dans des conditions aussi rapprochées que possible de celles qu'envisage la théorie.

Les mesures effectuées ne l'ont guère été que pour des massifs à surface libre horizontale, et avec du sable ordinaire dont l'angle naturel tourne autour de 35°. Au reste, et à titre de comparaison, notons que pour cette valeur de φ et pour le talus horizontal ($\omega = 0$), le coefficient théorique de Rankine vaudrait 0,271; celui de Malevé 0,250; celui de Rebhahn 0,215; ceux de Résal 0,206 puis 0,214; le nôtre ressortirait à 0,2206. Le prisme de la plus grande poussée de Coulomb conduirait à une valeur 0,198. Le coefficient mesuré par Gobin sur un sable d'angle φ égal à 34° vaut 0,228, ce qui correspond presque exactement à celui qui résulterait de nos formules, soit 0,23095.

Nous mentionnerons plus spécialement deux séries de mesures qui paraissent avoir été réalisées dans des conditions préférables. Ce sont celles effectuées par Gobin (G) et par G. H. Darwin (D), sur des talus plans et inclinés. Le premier réalisait ses expériences sur un sable d'angle naturel de 34°, et avec un talus incliné à 14°. L'expérience fournit un coefficient égal à 0,273 alors que nos formules conduiraient à une valeur théorique égale à

$$\frac{0,25716 + 0,28572}{2} = 0,27144.$$

Darwin opérait sur un sable d'angle naturel de 41° avec un talus incliné à 35°. Il obtenait un coefficient expérimental de 0,291, alors que nos formules donneraient

$$\frac{0,28698 + 0,29430}{2} = 0,29064.$$

Nous mentionnons aussi les expériences du colonel Audé (A).

Ces résultats semblent indiquer que nos coefficients sont bien en concordance avec la réalité physique.

ω.	Φ = 20°.	25°.	30°.	33°37.	34°.	35°.	40°.	41°.	45°.	46°.	50°.
0°	0,407–0,418 **0,42374**	0,324–0,338 **0,34281**	0,259–0,270 **0,27606**	**0,23500** 0,244 (A)	**0.23095** 0,228 (G)	0,206–0 214 **0,22066**	0,167–0,167 **0,17449** 0,178 (D)		0,130–0,130 **0.13595**	**0,12917** 0,132 (D)	**0,103848**
5°	0,440–0,453 **0,45606**	0,349–0,362 **0,36500**	0,277–0,289 **0,29188**			0,219–0,228 **0 23161**	0,174–0,177 **0.18213**		0,137–0,137 **0,14118**		**0,10729**
10°	0,482–0,499 **0,49932**	0,382–0,389 **0,39396**	0,301–0,312 **0,31132**			0,234–0,244 **0.24499**	0,185–0,189 **0.19115**		0.145–0,145 **0,14717**		**0,11105**
14°					**0,27144** 0,273 (G)						
15°	0,560–0,570 **0,57309**	0,424–0,430 **0,43568**	0,329–0,341 **0,33739**			0,253–0,262 **0.26186**	0,198–0,201 **0,20159**		0 154–0,154 **0.15429**		**0.11571**
20°	0,883–0,883 **0,88304**	0,503–0,505 **0,50673**	0,366–0,380 **0,37539**			0,278–0,286 **0.28454**	0,214–0.216 **0.21620**		0.163–0.164 **0 16305**		**0,121138**
25°		0,821–0,821 **0,82141**	0,435–0,442 **0,41148**			0,312–0,321 **0 31807**	0,234–0,236 **0,23557**		0,174–0,176 **0.17434**		**0.12788**
30°			0,750–0,750 **0,75000**			0,374–0,379 **0.37762**	0,264–0,265 **0.26376**		0,190–0,192 **0,18987**		**0,136535**
35°						0,671–0,671 **0,67100**	0,320–0,317 **0.31591**	**0,29064** 0,291 (D)	0,215–0,217 **0.21353**		**0.14868**
40°							0,587–0.587 **0,58680**		0,259–0,259 **0.25739**		**0.16744**
45°									0,500–0,500 **0,50000**		**0,20303**
50°											**0,41318**

CONCLUSION.

41. Nous résumons. Le mur contre lequel agit la masse sablonneuse est à paroi intérieure verticale. La composante horizontale de la poussée, par unité d'aire, qui intervient plus particulièrement, lors du renversement du mur autour d'un axe horizontal de sa paroi intérieure et dans l'état d'équilibre-limite du massif soutenu, a pour expression, à une distance r de l'origine définie comme intersection des profils rectilignes du mur et du talus supérieur

$$P = K\Pi r,$$

où Π représente le poids spécifique de la matière pulvérulente supposée homogène. Le coefficient K y a pour valeur $\frac{k_0 + k'}{2}$; k_0 est donné par la formule

$$k_0 = \cos\varphi\cos\omega\,\frac{\cos^2(\varphi+\delta)}{\cos(\omega-\delta)\cos(\varphi-\delta)},$$

où ω désigne l'inclinaison du massif sur l'horizon; φ l'angle de frottement donné; et où δ est déduit de la relation

$$\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\omega + \arc\sin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right).$$

Le coefficient k' qui correspond à la plus faible valeur supérieure, par suite à la meilleure approximation par excès de la poussée, résulte de la formule

$$k' = \cos\omega\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \omega' + \omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' + \omega}{2}\right)}\,\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varphi-\varepsilon)}\left[1 - \sin\Phi\cos(\omega' - \omega + \varepsilon)\right],$$

ω y désigne encore l'angle d'inclinaison du massif; l'angle Φ y représente cette fois l'angle donné de terre coulante du massif homogène considéré; ω' et ε sont des angles auxiliaires définis par les relations simples

$$\cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}, \qquad \sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

L'angle φ enfin y est fourni par la formule approchée que nous avons établie

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2\Psi}{\sin^2\Phi}\,\frac{1}{8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}\right)}\left[1 + 0{,}72\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)\left(\frac{\omega}{\Phi} - \frac{1}{40}\right)\right]}},$$

où Ψ représente un angle auxiliaire aigu et positif qui ne dépend que de ω et Φ, tel que

$$\sin\Psi = \frac{\sin^{\frac{1}{2}}(\Phi + \omega)\sin^{\frac{1}{2}}(\Phi - \omega)}{\cos^2\omega\,\sin\Phi}.$$

Les coefficients de poussée qui résultent de notre étude, nettement inférieurs à ceux de divers auteurs, supérieurs à ceux qui résultent de la théorie de Coulomb, se trouvent assez voisins, bien qu'un peu supérieurs en général à ceux de Résal. Ils semblent constituer, pour les hypothèses retenues, les meilleurs coefficients de poussée à intervenir dans le cas d'équilibre-limite d'une masse pulvérulente homogène contre le mur à paroi intérieure verticale qui la contient. Les quelques données expérimentales que l'on possède semblent enfin confirmer les valeurs théoriques de nos résultats.

Le cas où l'angle i' est différent de zéro, c'est-à-dire le cas où la paroi intérieure du mur n'est pas verticale se déduit du cas de la verticalité.

On obtient, sans trop de calculs, la nouvelle expression de $\frac{dk'}{d\varphi}$ et l'on peut encore établir que l'équation résultant de l'égalité à zéro de cette dérivée représente une équation du second degré en μ, qui comporte une et une seule racine φ dans le champ du problème. On peut aussi montrer que la méthode des approximations successives est encore applicable à la seule racine du trinome en μ qui convient au problème. On peut encore former une expression donnant d'une manière approchée la racine φ recherchée. Cette expression est de type analogue à la formule que nous avons établie et proposée (56) pour le cas du mur vertical; mais un facteur comportant i' y vient alors multiplier sous le radical le terme ajouté à l'unité.

Il semble également que l'application de la théorie des erreurs conduit au même résultat que celui que nous avons obtenu pour la paroi verticale, à savoir que l'approximation faite sur φ par l'emploi d'une formule approchée n'entache pratiquement pas d'erreur le coefficient k' dont l'étude et l'obtention représentent encore la partie la plus complexe de la question.

Mais il s'agit là de longs développements et de calculs fastidieux qui ne peuvent trouver place ici. Ils feront éventuellement l'objet d'un travail ultérieur.

BIBLIOGRAPHIE.

ARDANT (Général), *Recherches expérimentales sur la poussée des terres* (*Mémorial de l'Officier du Génie*, XV, 1848, p. 239).

AUDÉ (Colonel), *Recherches expérimentales sur la poussée des terres* (*Mémorial de l'Officier du Génie*, 1832, p. 349; XV, 1848, p. 269; IX, 1849).

AUDOY (Colonel), *Recherches expérimentales sur la poussée des terres* (*Mémorial de l'Officier du Génie*, IV, 1820, p. 207).

AUERBACH, *Die Gleichgewichtsfiguren pulverformiger Massen* (*Ann. Phys. Leipzig*, t. 5, 1901, p. 140).

AZUMONTI, *Considérations et données théorico-pratiques sur la poussée des terres* (*Giornale del Genio Civile*, 30 juin 1917).

BAKER (B.), *Experiments on the pressure of Sand* (*M. Inst.C. E., Minutes of proceedings*, vol. LXV, Londres).

BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Solutions approchées de la solution de Maurice Lévy* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 14 février 1870, et *Journ. de Math. pures et appliquées*, 2e série, t. XV, 1870, p. 237).

BATICLE, *Sur un point de vue de la théorie de la poussée des terres* (*Génie civil*, 6 mai 1916 et 27 janvier 1917).

— *Sur le problème du mur soutenant un massif pulvérulent* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 164, 1917, p. 698; t. 168, 1919, p. 818; t. 190, 1930, p. 1280.

BEGERHAUS, *Die wagerechte Seitenkraft des Erddruckes* (*Zentralblatt Bauverein*, Berlin, t. 21, 1901, p. 451).

— *Neigungen der Böschungen* (*Zentralblatt Bauverein*, Berlin, t. 21, 1901, p. 140).

BELL, *The lateral pressure and resistance of clay* (*Minutes Proc. Civ. Eng.*, t. 195, p. 233).

BOISTARD et MORIN, *Expériences sur la poussée des terres.*

BOUSSINESQ, *Solutions approchées de la solution Rankine-Lévy* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 4 avril 1870, et *Journ. de Math. pures et appliquées*, t. XV, 1870).

— *Sur le calcul de la stabilité des massifs pulvérulents de Macquorn-Rankine* (*Ann. Ponts et Chaussées*, t. 2, 1874, p. 169).

— *Sur le mode d'équilibre limite le plus simple que peut présenter un massif sans cohésion fortement comprimé* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 80, 1874, p. 546).

— *Essais théoriques de l'équilibre des massifs pulvérulents comparés à celui des massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion* (*Recueil des savants étrangers de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique*, t. XL, 1876).

— *Sur la détermination de l'épaisseur minima que doit avoir un mur vertical d'une hauteur et d'une densité données, pour contenir un massif terreux sans cohésion, dont la surface supérieure est horizontale* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, t. III, juin 1882, p. 625).

— *Compléments à la Note précédente* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, t. VI, novembre 1883, p. 494 et 509).

— *Compléments à des Notes précédentes* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, t. VII, 1884, nº 26, p. 443).
— *Note sur l'équilibre des masses pulvérulentes* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 164, 30 avril, 7 et 14 mai, 4 et 18 juin 1917, p. 657, 698, 755, 873, 929; t. 165, 2 juillet 1917, p. 5).
— *Recherche des lois générales de l'état ébouleux, produit dans un massif de sable par des déformations planes, parallèles à un plan vertical* (*Ann. École Normale*, 3e série, t. XXXIV, 1917).
— *Calcul de deuxième approximation de la poussée limite exercée sur un mur vertical par un terre-plein à surface libre horizontale* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 22 et 29 avril, 13 mai, 10 et 17 juin 1918).
Braune et Jacobfeld, *Erddruckversuche in grösserem Masstabe* (*Bau Ingenieur*, 1922, p. 152).
— *Measures pressure againts Walls* (*Engineering News Record*, 25 août 1921, p. 314).
Brigtmore (Dr A. W.), *Wedge theorie on the pressure of Sand* (*M. Inst. C. E.*).
Buchwald, *Erddrucks problem* (*Beton und Eisen*, 1919, p. 21 et 90; *Diss. Techn. Zeitung*, Berlin, t. 27, 1910, p. 552; *Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1916, p. 563; 1917, p. 346; 1918, p. 301 et 314).
— *Bestimmung der gleitflächen bei Erddruckermittlungen* (*Bautechnik*, 1924, p. 546).
Campus, *Remarques sur des formules de la poussée des terres* (*Génie civil*, 15 mars 1930, p. 267).
Canevazzi, *Considerazione sulla theoria della spinta delle terre* (*Mem. Ac. Sc. Bologna*, Seria 6 V, 1908, p. 21 et VI, 1909, p. 81).
Canter Cremers, *Les effets de la poussée des terres* (Rapport publié par le ministère du Waterstaat des Pays-Bas, 1916).
Considère, *Note sur la poussée des terres* (*Ann. Ponts et Chaussées*, 4e série, t. 19, 1870, p. 547).
Couplet, *Mémoire sur la poussée des terres*, 1727.
Coulomb, *Essai sur une application des règles des maximum et minimum à quelques problèmes de statique, relatifs u l'architecture* (*Savants étrangers de l'Ac. Sc. de Paris*, t. VII, 1773, p. 359).
Cramer, *Du plan de glissement du prisme de poussée des terres* (*Zeitschrift für Bauwesen*, 1879, p. 521; *Zeitschrift für Arch. ù Ingenieurwesen*, 1898, 5e fascicule; *Beautchnik*, 1925, p. 627),
Crosthwaite (P. M.), *Experiments on the horizontal pressure of Sand* (*Institut of civil english Engineers*, 10 février 1920; *Engineering*, février 1920, p. 253).
Curie (Colonel), *Théorie de la poussée des terres*, 1870.
Dariès, *Sur le mouvement des terres*, 1899.
Darwin (H.), *Horizontal Thrust of Sand* (*Exc. Min. Proc. Inst. C. E.*, vol. LXXI, 1883, et *Ann. Ponts et Chaussées*, 1883, 2e semestre).
Descamps (L.), *Remarques sur des formules de poussée des terres* (*Génie civil*, 15 mars 1930, p. 267).
Diesbach (R. de), *Sur la poussée des terres* (*Schweizerische Bauzeitung*, 11 et 18 février 1928).
Doucet, *Efforts à l'intérieur d'un massif indéfini.*
Dörrath, *Erddruck gegen Stutzwände* (*Zeitschrift für Bauwesen*, 1891).
Dorr, *Bemerkungen zu den Versuchen über den Erdwiderstand* (*Bauingenieur*, 1924, Heft 17).
Ehlers, *Beitrag zur statischen Berechnung von Stützwänden* (*Zeitschrift Archit. Wiesbaden*, t. 56, 1916, p. 1).
Elwitz, *Die Sicherheit der Mauer und verwandter Tragwerke gegen Erddruck* (*Zeitschrift f. Archit. ù Ingenieurwesen*, Dusseldorf, 1913, nos 1, 5, 6).
Engesser, *Geometrische Erddrucktheorie* (*Zeitschrift für Bauwesen*, 1880, p. 189).
— *Neuere Versuche über die Richtung und Grösse der Erddruckes* (*Deutsche Bauzeitung*, 1893, p. 325).
— *Versuche ùnd Untersùchùngen neben Erddrùck* (*Zeitschrift Archit. Wiesbaden*, t. 51, 1905, p. 465; t. 52, 1906, p. 533; *Zeitschrift für Archit. u Ingenieurwesen Hannover*, t. 54, 1908, p. 11).

— *Versuche über den Erddruck gegen Stützwände* (*Zeitschrift für Archit. u Ingenieurwesen*, 1919, n° 5, p. 173).

Engels, *Essais pratiques sur la poussée des terres* (*Zeitschrift für Bauwesen*, 1903).

Exner, *Ueber den Druck in Sandhügeln* (*Wiener Akad. Bericht.*, t. 133, 1924, n^{os} 7 et 8).

Flamant, *Construction d'après les formules de M. Boussinesq d'une chaussée à Londres* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, t. 2, 1883, p. 477).

— *Table numérique pour le calcul de la poussée des terres* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, t. 1, 1882, p. 616; t. 1, 1885, p. 515).

Färber, *Neue Lösung der Erddrucksproblem* (*Deutsche Bauzeitung*, 1917).

Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik* (*Leipzig*, t. V, Chap. 6).

Forchheimer, *Ueber den Sanddruck und Bewegungserscheinungen im innern troknen Sande* (*Dissertation Tübingen*, 1883).

— *Considérations sur la poussée des terres* (*Polytechnisch Weekblad*, n° 2, 1923).

Français, *Recherches sur la poussée des terres* (*Mémorial de l'Officier du Génie*, 1820, p. 157).

Franke, *Beitrag zum Erddruck* (*Zeitschrift für Bauwesen*, Berlin, t. 51, 1901, p. 639).

Franzius, *Vereinfachung der Erddruckberechnungen* (*Zeitschrift für Archit. u Ingenieurwesen*, 1918, p. 185).

Freund, *Neue Ergebnisse und Untersuchungen über Erddrucktheorie* (*Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1920, p. 625; *Zeitschrift für Bauwesen*, 1921, p. 48).

— *Der Spannungszustand in loser Erde* (*Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1921, p. 589-601-1922, p. 599).

— *Untersuchung der Erddruckstheorie von Coulomb* (*Bautechnik*, n° 12, 1924).

Fulton, *Overturning moment on retaining walls* (*Engineering*, février 1920, p. 254).

Gebbia, *Sull' equilibrio-limite dei massi de terra* (*Rend. c. mat.*, Palerme, Suppl. 2, 1907, p. 38).

Gaudard, *Note sur la poussée des terres* (*Proceedings C. I.*, Londres, LXXI et LXXVII).

Gauthey, *Nouveau mémoire* (Dijon, 1784-1785).

Gobin, *Détermination précise de la stabilité des murs de soutènement et expériences sur la poussée des terres* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, II, 1883, p. 98 et 104, et chez Bernard, R. Thorigny, Paris, 1884).

Godyckiz-Crisko, *Analytische Abteilung des Grundformels der Theorie des Erddruckes* (*Zurn. min. put. soolx Petrograd*, 1910, p. 41).

Guilhelm, *Mémoire sur la poussée des terres* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, I, 1885, p. 319).

Guillaumin, *Sur certaines solutions particulières du problème de l'état ébouleux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 168, 1919, p. 818 et 885).

Hagen, *Untersuchung über den Druck und die Reibung des Sandes* (*Ann. Phys. und Chemie*, t. 28, 1883, p. 316).

Hirschthal, *Engineer News Record*, 10 août 1922.

Hisely, *Poussée des terres sur un mur de soutènement* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, I, 1899, p. 99).

Hoffmann, *Beitrag zur Erddruckstheorie* (*Zeitschrift Arch. Wiesbaden*, t. 57, 1911, p. 457).

Hope (Lieutenant), *Expériences sur la poussée des terres* (Ingénieurs royaux de Chatam).

Jacobfeld, *Measured Retaining-wall pressure of Sand* (*Eng. news record*, 19 janvier 1922).

Jacoby, *Zur Erddruckslehre* (*Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1918, p. 81).

Karman, *Elastische Grenzproblem* (*Erddruck*) (*Verhandlung des internat. Kongress für Technik*, Zürich, 1926).

Kayser, *Neigungen der Böschungen* (*Zentralblatt Bauverwaltung*, Berlin, t. 21, 1901, p. 63).

Klasmer, *Theorie des Erddruckes* (*Breslau Jahresber. Ges. Vaterl. Cultur*, t. 87, 1910, Math. Sect.).

Kötter, *Die Bestimmung des Druckes angekrümmten Gleitflächen. Eine Aufgabe an der Theorie* *vom Erddruck* (*Berlin, Sitz. Bericht Ak. Wissenschaft*, 1903, p. 229; *Zeitschrift Arch. Wiesbaden*, t. 54, 1908, p. 55).

— *Ueber den Problem der Erddrucksleitung* (*Zeitschrift für Archit. u Ingenieurwesen*, 1908; *Verhandlung der Phys. Gesell. zu Berlin*, 1888, t. 7, p. 1; *Jahresbericht der deutschen Mathematikvereinigung*, t. 2, 1893, p. 75).

— *Ueber den Druck von Sand* (*Bericht der Berliner Akad. u Wissenschaft*, 1909, p. 493).

Klopper, *Sur un point de la poussée des terres* (*Génie civil*, 27 janvier 1917).

Krey (H.), *Erddruck, Erdwiderstand u Tragfähigkeit des Baugrundes* (*Verlag. W. Ernst u S.*, Berlin, 1926).

Lagrené (de), *Sur la poussée des terres* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, 1881).

Lancelin, *Forme du prisme de poussée des terres* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, II, 1889, p. 257).

Lévy (Maurice), *Mémoire manuscrit sur la poussée des terres* (présenté à l'*Académie des Sciences de Paris*, 1869; *Journ. de Math.*, 2e série, t. 18, 1873, p. 241).

Leygue (L.), *Recherche sur la poussée des terres* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, X, 1885, p. 788).

Malevé, *Poussée des terres contre les murs de soutènement* (*Ann. des Travaux publics de Belgique*, II, 1904, p. 947 et 196; I, p. 283).

Macquorn, *Mémoire sur la stabilité des terres sans cohésion* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, II, 1874, p. 131).

Michaux (Colonel), *Recherches expérimentales sur la poussée des terres* (*Mémorial de l'Officier du Génie*, 1832, p. 349).

Mohr, *Eine neue Theorie des Erddruckes* (*Z. A. I.*, t. 2, 1912, p. 441).

Möller, *Erddruck-Tabellen mit Erlauterungen über Erddruck* (chez Hirzel à Leipzig, 1922).

Muller-Breslau, *Erddruck*, 1906.

— *Neben d. Problem der Erddrucksleitung* (*Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung*, t. 2, 1893, p. 43).

— *Bemerkungen über die Berechnung des Erddruckes* (*Zeitschrift der Archit. u Ingenieurwesen*, *Hannover*, 1908, p. 43).

Panetti, *Spinta dei materiali incoerenti contro le pareti delle camere che li contengeno* (*Milano Cemento*, t. 5, 1908, p. 169).

Pasley (Général), *Expériences sur la poussée des terres.*

Petermann, *Neuere amerikanische Erddruchversuch* (*Zentralblatt der Bauverwalting*, 1924, p. 45).

Poncelet, *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations* (*Mémorial de l'Officier du Génie*, XIII, 1840).

Püller, *Neigung von Böschungen* (*Zentralblatt der Bauverwalting*, n° 34, 1901, p. 216 et 452).

Rankine, *Mémoire sur la stabilité des terres sans cohésion* !*Ann. des Ponts et Chaussées*, 1874, 2e semestre, p. 181).

— *Manuel de Mécanique appliquée.*

— *Philos. Trans. Royal Society of London.*

Ramisch, *Beitrag zur Theorie des Erddruckes* (*Wasserbau-Iena*, t. 3, 1904, S. p. 218).

Ravier, *Formules générales pour la poussée des terres* (*C. R. Acad. Sc.*, 2 décembre 1929 et 20 février 1930; *Génie civil*, 14 décembre 1929 et 15 mars 1930).

Rebhahn, *Théorie des Erddruckes*, Vienne, 1875.

Reissner, *Théorie des Erddruckes* (*Encyc. Math. Wissenschaft*, Bd 4, Abt. II, 1910, p. 386; *Sitzungberichte der Berliner Math. Gesellschaft*, XXIII, 1924, p. 14; *Verhandlungen des Internat. Kongress f. Technik*, Delft 1924).

Résal, *Théorie de la poussée des terres* (Paris, Bérenger, 1903 et 1910).

Safir, *Erddruck Trajectorien* (*Zeitschrift Archit. Wiesbaden*, t. 51, 1905, p. 465; *Z. A. I.*, XI, p. 534).

SCHNIDTMANN, *Neuere Wege in der Anwendung des alten Erddruckslehre* (*Bauingenieur*, nº 15, 1924).

SCHULTZE, *Gekrümmte Erdgleitflächen* (*B. u Eisen*, 1915, p. 285).

SENFT, *Neue Ergebnisse der Erddruckstheorie* (*Zentralblatt der Bauverwalting*, 1921, p. 270).

SACHSE, *Neigung der Böschungen* (*Zentralblatt Bauverwaltung*, Berlin, t. 21, 1901, p. 139).

SCHICK (H. S.), *Expériences sur la poussée des terres. Résultats numériques* (*Engineering News Record*, 15 juin 1922).

SIEGLER, *Expériences sur la poussée du sable* (*Ann. des Ponts et Chaussées*, I, 1887, p. 488).

SOURISSEAU, *Cinématique physique des masses granuleuses sans cohésion* (*Ann. Faculté des Sciences de Toulouse*, X, 1908, p. 335).

SKIBINSKY, *Gleichgewicht des Sandigen Materials* (*Oester Wochenschrift f. offentlichen Baudienst*, 1916 et 1917).

SZILI, *Beiträge zur Coulombschen Lehre des Erddruckes* (*Zeitschrift des Verbandes deutsch. Archit. u Ingenieurverein*, 1914, p. 303).

TAASWELL, *Retaining walls their design and Construction*, New-York, 1920.

TERZAGHI, *Old Earth pressure theorie and new test resultats* (*Engineering News Record*, 30 avril 1920; 1925, nor 19, 20, 25, 26, 27 et 29).

— *Erddrucksmekanik und Bodenphysoicalische Grundlage*, Leipzig, 1925, chez Dasticke.

WEYRAUSCH, *Erddruck-Trajektorien* (*Zeitschrift für Archit. Wiesbaden*, t. 52, 1905, p. 463; 1906, p. 533.

WINKLER, *Erddruck*, Vienne, 1872.

Vu et approuvé :

Paris, le 10 janvier 1931.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 10 janvier 1931.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction.

Chapitre I. — *Équation d'équilibre limite d'une masse pulvérulente homogène à profil supérieur rectiligne.*

Chapitre II. — *Solutions des équations d'équilibre. Expression de la poussée exercée par la masse pulvérulente contre le mur qui la contient.*