N. THÉODORESCO

La dérivée aréolaire et ses applications à la physique mathématique

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1931

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1931__121__1_0>

N° D'ORDRE :
2175
SÉRIE A.
N° DE SÉRIE :
1306

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. N. THÉODORESCO

1re THESE. — LA DÉRIVÉE ARÉOLAIRE ET SES APPLICATIONS A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

2e THÈSE. — ÉTUDE SUR LA COURBE LIMITE DANS LE MOUVEMENT D'UN COURANT D'AIR AUTOUR D'UN CYLINDRE SOLIDE.

Soutenues le Avril 1931, devant la Commission d'examen.

MM. VILLAT, *Président.*
DENJOY, BEGHIN, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1931

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen.................. C. MAURAIN, Professeur. Physique du Globe.

Doyen honoraire....... M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires. H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH. A. LEDUC, E. HEROUARD.

Professeurs............

Émile PICARD........	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
GOURSAT...........	Calcul différentiel et Calcul intégral.
KŒNIGS....	Mécanique physique et expérimentale.
JANET............. .	Electrotechnique générale.
WALLERANT........	Minéralogie.
PAINLEVÉ..........	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
CAULLERY..........	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Emile BOREL.........	Calcul des probabilités et Physique mathém.
ABRAHAM.....	Physique.
MOLLIARD..........	Physiologie végétale.
CARTAN............	Géométrie supérieure.
Gabriel BERTRAND...	Chimie biologique.
Jean PERRIN.........	Chimie physique.
LAPICQUE..........	Physiologie générale.
Mme P. CURIE........	Physique générale et radioactivité.
G. URBAIN..........	Chimie générale.
L. MARCHIS.........	Aviation.
VESSIOT......	Théorie des fonctions et théorie des transform.
COTTON.............	Physique générale.
DRACH..............	Application de l'Analyse à la Géométrie.
Ch. FABRY..........	Physique.
LESPIEAU..........	Théories chimiques.
PORTIER............	Physiologie comparée.
Charles PÉREZ........	Zoologie.
E. BLAISE...........	Chimie organique.
DANGEARD..........	Botanique.
Rémy PERRIER......	Zoologie (Enseignement P.C. N.).
Léon BERTRAND	Géologie structurale et Géologie appliquée.
RABAUD............	Biologie expérimentale.
G. JULIA............	Mathématiques générales.
Paul MONTEL...	Mécanique rationnelle.
V. AUGER...........	Chimie appliquée.
WINTREBERT........	Anatomie et Histologie comparées.
DUBOSCQ............	Biologie maritime.
Eugène BLOCH........	Physique théorique et Physique céleste.
A. MAILHE...........	Étude des combustibles.
L. LUTAUD..........	Géographie physique et Géologie dynamique.
Henri VILLAT.........	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB..........	Géologie.
P. PASCAL..........	Chimie minérale.
Léon BRILLOUIN.....	Théories physiques.
ESCLANGON.........	Astronomie.
H. BÉNARD..........	Mécanique expérimentale des fluides.
G. MAUGUIN.........	Minéralogie.
BLARINGHEM........	Botanique.

PÉCHARD.......	Chimie (Enseigt P. C. N.).
GUILLET........	Physique.
M. GUICHARD . .	Chimie minérale.
MICHEL-LEVY ..	Pétrographie.
DEREIMS..... ..	Géologie.
DENJOY.........	Calcul différentiel et intégral
MOUTON........	Chimie physique.
DUFOUR........	Physique (P. C. N.).
DUNOYER......	Optique appliquée.
JAVILLIER......	Chimie biologique.
ROBERT-LEVY..	Zoologie.
DEBIERNE......	Radioactivité.
DARMOIS.......	Physique.
BRUHAT	Physique.
GUILLIERMOND.	Botanique (P. C. N.).
F. PICARD......	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
JOLEAUD......	Paléontologie.
M. FRECHET....	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
Mme RAMART-LUCAS..........	Chimie organique.
BEGHIN.........	Mécanique théorique des fluides.
FOCH..	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER...	Physique P. C. N.
VILLEY.........	Mécanique physique et expérimentale
DE BROGLIE ...	Théories physiques.
LABROUSTE....	Physique du Globe.
FREUNDLER.. .	Chimie (P. C. N.).
PRENANT.......	Zoologie.
P. JOB..........	Chimie générale.
CHRETIEN.....	Optique appliquée.

Secrétaire...... .... A. PACAUD. — **Secrétaire honoraire**. TOMBECK.

91558-31 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

A MES PARENTS

A MESSIEURS

HENRI VILLAT
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

GEORGES BOULIGAND
PROFESSEUR
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE POITIERS

Hommage de profonde admiration.

A MONSIEUR

D. POMPEIU

MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROUMAINE
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE BUCAREST
PROFESSEUR AGRÉÉ A LA SORBONNE

Hommage de respectueuse admiration
et de profonde reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE

LA
DÉRIVÉE ARÉOLAIRE
ET SES
APPLICATIONS A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

INTRODUCTION.

L'idée d'étendre le cadre de la théorie des fonctions a préoccupé les mathématiciens, comme il était bien naturel, dès que la théorie classique a été édifiée.

Toutefois, étant donné le fait que les propriétés des fonctions holomorphes découlaient de l'existence d'une dérivée unique en chaque point, on a considéré longtemps comme inutile toute extension au domaine des fonctions pour lesquelles cette notion n'avait pas de sens.

Or, ce qui caractérise une fonction holomorphe dans l'ensemble des fonctions continues $f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\,\mathrm{Q}(x, y)$, est l'intégrale de Cauchy

$$\int_{\mathrm{C}} f(z)\,dz = 0 \tag{1}$$

pour tout contour fermé rectifiable tracé dans le domaine d'holomorphisme.

En effet, cela découle du théorème de Morera, qui peut servir à partager les fonctions $f(z)$ en deux catégories.

Le premier qui s'est demandé ce qui se passe, dans le cas où l'intégrale de Cauchy n'est plus nulle, a été M. D. Pompeiu qui en 1912 a repris la formule de Riemann

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi(\nu)\,d\omega = 0, \tag{2}$$

où

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] \tag{3}$$

et a remarqué que l'on a

$$\varphi(z_0) = \lim \frac{\displaystyle\int_C f(z)\,dz}{\text{aire de D}} \tag{4}$$

lorsque le contour C se resserre indéfiniment autour du point z_0, en supposant que les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ admettaient des dérivées partielles du premier ordre continues.

Il appela cette limite *dérivée aréolaire* de $f(z)$.

Il est remarquable que pour rentrer dans le cadre classique on n'a qu'à supposer la dérivée aréolaire partout nulle, ce qui montre que pour celui qui ferait la théorie de cette dérivée, les fonctions holomorphes doivent jouer le rôle de constantes.

L'idée de M. Pompeiu, bien que très séduisante, n'a pas reçu des développements systématiques.

Elle a été reprise en 1928 par MM. M. Nicolesco et G. Calugaréano qui ont étudié la dérivée aréolaire et l'ont appliquée à de diverses questions.

D'autre part, nous avons remarqué en 1929 qu'elle peut être utilisée avec fruit à l'intégration du système des plaques planes élastiques soumises à certaines conditions aux limites.

C'est d'ailleurs dans cette observation ainsi que dans la remarque ci-dessus que se trouve l'origine du présent travail, qui a pour but l'étude systématique de la dérivée aréolaire conçue comme *opération* indépendante de la dérivée partielle.

Les applications, auxquelles nous en avons consacré la seconde Partie, mettent en évidence l'utilité de cette notion.

Le problème qui se présente tout naturellement, dès qu'on eut remarqué le rôle de constantes que joueront les fonctions holomorphes dans cette théorie, est la recherche des *fonctions à dérivée aréolaire holomorphe*.

Ce seront les analogues des fonctions linéaires, et conduiront à la notion de *polynome aréolaire*, dont l'étude fait l'objet du premier chapitre.

La dérivée, telle que nous la concevons, c'est-à-dire comme limite du rapport (4), ne coïncide pas toujours avec l'expression (3) de M. Pompeiu.

Aussi, introduisons-nous la notion de *fonction holomorphe* (α), pour désigner les fonctions continues à dérivée aréolaire continue, extension des fonctions à dérivée ordinaire continue.

Cette idée nous conduit, dans le Chapitre III, à envisager ce symbole comme une dérivée au sens de Lebesgue de la fonction de domaine

$$F(D) = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)\, dz,$$

ce qui est conforme aux tendances actuelles dans les Mathématiques, de diminuer autant que possible le nombre des hypothèses, tout en respectant les caractères essentiels des résultats déjà acquis.

Il en découle une série de problèmes auxquels nous avons tâché de répondre au fur et à mesure.

Il est certain que si $F(D)$ est absolument continue, on peut affirmer que $f(z)$ admet une dérivée aréolaire intégrable, finie et unique presque partout, auquel cas on a la relation (2), mais la dérivée peut exister même dans des cas plus généraux.

Ayant l'honneur d'intéresser M. G. Bouligand à ces idées, il a bien voulu construire deux exemples, qui mettent en évidence la nature des difficultés qui s'y présentent.

Nous en avons, d'ailleurs, employé le premier pour montrer que la dérivée peut exister sans que $F(D)$ soit absolument continue.

La relation (2), qu'on retrouve à chaque pas dans les extensions obtenues, nous a fait penser à *la dérivée extérieure* de M. E. Cartan, idée qui va trouver des applications pratiques à la fin du travail et surtout dans un autre mémoire ultérieur.

La deuxième Partie est consacrée aux applications.

Nous nous y occupons d'abord de l'existence des dérivées partielles de la fonction

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int\int_D \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega,$$

où $\varphi(v)$ est continue.

Le symbole $g(\zeta)$ est pour nous l'intégrale aréolaire et répond au problème fondamental suivant :

Trouver les fonctions holomorphes (α) *à dérivée aréolaire connue*, qui est à la base de toute recherche sur les *équations aux dérivées aréolaires*.

Nous montrons qu'il existe un parallélisme entre certains systèmes d'équations aux dérivées partielles et les équations aux dérivées aréolaires, ce qui nous permet de les envisager sous une forme condensée et de les intégrer dans des conditions aux limites convenables.

Dans le dernier chapitre nous avons rassemblé les applications que nous avons trouvées en appliquant la dérivée à des questions se rattachant à la Physique mathématique.

A vrai dire, c'est à la suite de ces résultats que nous avons cru utile d'entreprendre une étude sérieuse de la dérivée aréolaire et de l'envisager en elle-même, c'est-à-dire comme opération indépendante de la dérivée partielle, ce qui nous a permis de remonter souvent des forces massiques données à la distribution des tensions ou des vitesses.

La dernière question traitée pose un problème nouveau et montre qu'il est possible de se proposer de trouver l'équilibre d'un milieu continu à l'aide des équations générales, sans passer par les équations aux dérivées partielles, passage qui oblige à des particularisations contraires à la nature des choses.

La dérivée aréolaire, conçue comme dérivée extérieure de M. Cartan, conduit à l'intégration de l'équation fonctionnelle qui s'y introduit, d'une manière naturelle et immédiate.

Quelle que soit la portée de ces idées, il serait regrettable si les problèmes analogues dans l'espace à trois dimensions ne pouvaient être abordés de la même façon.

Heureusement, les idées de Cauchy-Pompeiu ont été reprises récemment par M. Gr. C. Moisil qui a réussi d'étendre les résultats fondamentaux aux systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les intégrales sont des fonctions harmoniques d'un nombre quelconque de variables (1).

En particulier, nous avons montré que ces considérations conduisent à l'intégration des systèmes dont nous nous sommes occupés, dans le cas de l'espace à trois dimensions.

L'accueil si bienveillant que M. H. Villat a fait à nos recherches nous a beaucoup encouragé.

Nous profitons de cette occasion pour lui renouveler l'expression de notre profonde reconnaissance.

---

(1) *Comptes rendus*, t. **191**, 1930, p. 984 et 1192.

M. G. Bouligand a bien voulu s'intéresser de très près à ce travail. Grâce à ses précieux conseils nous avons pu éclaircir quelques points délicats de la théorie.

Nous lui exprimons ici notre profonde gratitude.

Quant à notre Maître, M. D. Pompeiu, qui nous a guidé dès nos premiers pas, il nous serait très difficile de lui exprimer toute notre reconnaissance pour ses conseils, pour ses encouragements, ainsi que pour l'honneur qu'il nous a fait d'accepter l'invitation de M. H. Villat de faire partie du Jury de notre Thèse.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

LES POLYNOMES ARÉOLAIRES.

1. Soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point du plan ; une fonction de ce point, ou une fonction de la variable complexe z sera, dans ce qui suit, de la forme

$$f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\mathrm{Q}(x, y),$$

c'est-à-dire une relation, aussi générale que l'on veut, entre deux ensembles de valeurs complexes.

Une telle fonction, sur laquelle on ne suppose rien de particulier *a priori*, sera bien différente d'une fonction analytique et pourra passer pour une fonction de deux variables réelles x, y.

Or, les propriétés fondamentales des fonctions analytiques se rattachent à l'intégrale de Cauchy.

On peut dire qu'une fonction est holomorphe dans un domaine si :

1° Elle y est continue ;

2° Elle satisfait à la relation $\int_{\mathrm{C}} f(z)\,dz = 0$ pour tout contour fermé rectifiable, tracé dans ce domaine.

Il est donc naturel de se demander si la condition 2° ne peut être remplacée par une autre de la même nature, mais plus générale, afin d'obtenir des fonctions qui jouissent des propriétés générales des fonctions holomorphes, convenablement étendues.

C'est M. D. Pompeiu le premier qui a eu l'idée de considérer de telles fonctions, en adoptant l'intégrale de Cauchy comme instrument de recherche.

Supposons qu'une fonction ne soit pas holomorphe, mais qu'elle est continue.

L'intégrale de Cauchy ne sera plus nulle, mais elle existera pour chaque contour rectifiable fermé C, tracé dans un domaine borné D, sa valeur étant une fonction de cette ligne.

Considérons le rapport (¹)

$$\frac{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)\,dz}{\frac{1}{\pi}\int\int_{\delta} d\omega}. \tag{1}$$

Il y a des cas où ce rapport a une limite unique et déterminée, lorsque la courbe γ se resserre indéfiniment autour d'un point $x_0 + iy_0$, de manière que le domaine δ puisse être enfermé dans un cercle de centre x_0, y_0 et de rayon aussi petit que l'on veut.

Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée *la dérivée aréolaire* de la fonction $f(z)$ au point z_0.

D'une manière précise, *nous dirons qu'une fonction $f(z)$ a une dérivée aréolaire au point z_0 lorsque, à un nombre positif ε, arbitrairement donné, on peut faire correspondre un nombre positif r, tel que pour tout contour fermé γ, limitant un domaine δ entièrement enfermé dans le cercle de centre x_0, y_0 et de rayon r, on ait*

$$\left| \frac{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)\,dz}{\frac{1}{\pi}\int\int_{\delta} d\omega} - \varphi(z_0) \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

le nombre $\varphi(z_0)$ étant fini et déterminé.

Si une fonction admet une dérivée aréolaire en chaque point d'un domaine ouvert, nous dirons qu'elle est *monogène* (α) *dans ce domaine.*

Si, la fonction étant définie dans un domaine (ou dans tout le plan, car on peut toujours la prendre égale à zéro dans le domaine complémentaire), la dérivée aréolaire n'existe que sur un certain ensemble de points, on dira que la fonction est *monogène* (α) *sur cet ensemble.*

Plus restrictivement, nous appellerons *fonction holomorphe* (α), une fonction qui admet *une dérivée aréolaire continue dans un domaine donné.*

Il existe des fonctions monogènes (α) ainsi que des fonctions holomorphes (α).

Un premier exemple est fourni par les fonctions holomorphes au sens

---

(¹) *Voir* D. Pompeiu, *Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, t. 33, 1912, p. 108; t. 35, 1913, p. 227.

classique pour lesquelles le rapport (1) existe dans le domaine d'holomorphisme (ouvert) et est identiquement nul.

Par conséquent, *la dérivée aréolaire des fonctions holomorphes est identiquement nulle*, ce qui leur donne un rôle de constantes dans ce qui va suivre.

2. Un second exemple, qui est très important, au point de vue des applications physiques des fonctions qui nous occupent, est celui considéré par M. D. Pompeiu, où l'on suppose que les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ admettent des dérivées partielles du premier ordre continues.

Ce cas est le seul qu'on a envisagé jusqu'à présent. Il nous conduira à une expression explicite de la dérivée aréolaire.

En effet on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C (P + iQ)(dx + i\,dy) = \frac{1}{2i\pi}\int\int_D \left[-\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dx\,dy;$$

en vertu de la continuité des dérivées partielles et par l'application de la formule de la moyenne, on arrivera à l'expression suivante de la dérivée aréolaire pour cette classe particulière de fonctions

$$(3)\qquad \frac{Df}{D\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}$$

Quoiqu'on ne puisse toujours espérer d'obtenir une expression de cette forme pour l'opérateur introduit par (1), nous conserverons cette notation dans la suite, de sorte que le symbole $\frac{D}{D\omega}$ désignera la dérivée aréolaire.

Cette opération conduisant à une nouvelle fonction du point x_0, y_0, on peut essayer d'en trouver aussi une dérivée aréolaire, et ainsi de suite. Lorsqu'une fonction $f(z)$ en admettra plusieurs, elles seront notées par $\frac{D}{D\omega}$, $\frac{D^2}{D\omega^2}, \ldots, \frac{D^n}{D\omega^n}$.

2. Il y a une seconde voie conduisant à la dérivée aréolaire dans le cas d'une fonction admettant des dérivées partielles du premier ordre continues.

Calculons la dérivée dans une direction fixe du plan d'argument φ; en posant $dz = dre^{i\varphi}$, on arrive à l'expression

$$\frac{df}{dz_\varphi} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{2}e^{-2i\varphi}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right].$$

Cette expression dépend évidemment de la direction φ, mais si la quantité dans le deuxième crochet est nulle, elle n'en dépendra plus.

Or, cette quantité coïncide avec la dérivée aréolaire $\frac{Df}{D\omega}$ donnée par la relation (3).

Sous cette forme, elle a été employée par M. G. Calugaréano [1], qui lui a donné un aspect plus simple et plus intuitif à l'aide d'un changement de variables.

Si l'on pose $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ et que l'on passe des variables x, y aux variables z, $\bar{z}$, on voit que

$$\frac{df}{dz_\varphi} = \frac{\partial f}{\partial z} + e^{-2i\varphi}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \tag{4}$$

La dérivée aréolaire coïncide, pour ces fonctions particulières, avec la dérivée partielle de f, par rapport à $\bar{z}$.

On a donc

$$\frac{Df}{D\omega} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

l'opération ayant le caractère ordinaire, quoique les variables z et $\bar{z}$ ne soient pas indépendantes l'une de l'autre.

Si la dérivée aréolaire est nulle, $\frac{dz}{df_\varphi}$ est indépendante de la direction suivant laquelle on dérive, et $f(z)$ admet une dérivée unique. On est dans le cas des fonctions analytiques.

On peut dire que ces fonctions se comportent par rapport à cette nouvelle dérivation, comme les constantes dans la dérivation ordinaire.

3. Il y a une formule fondamentale relative à ces fonctions particulières dont il est question dans le paragraphe **2**.

Elle exprime les valeurs d'une telle fonction en chaque point d'un domaine D, limité par une courbe fermée rectifiable C, lorsque l'on connaît dans le domaine les valeurs de la dérivée aréolaire supposée continue, et sur C les valeurs prises par la fonction même [supposée holomorphe (α) dans D fermé].

Cette formule est due à M. D. Pompeiu.

On peut remarquer d'abord à l'aide de la formule de Green qu'on a pour

(1) Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris, 1928.

tout γ fermé et rectifiable limitant un domaine δ, la relation suivante :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{\gamma} \frac{\mathrm{D}f(v)}{\mathrm{D}\omega}\,d\omega = 0, \tag{5}$$

z et v parcourant respectivement γ et δ.

Cette identité généralise l'intégrale de Cauchy, qu'on retrouve d'ailleurs en y faisant $\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}\omega} \equiv 0$.

Soit ζ un point intérieur à D. Entourons-le d'un petit cercle δ, joint à C par une ligne qu'on parcourt deux fois dans des sens opposés.

Appliquons la formule (5) à la fonction $\frac{f(z)}{z-\zeta}$, dans le domaine $\mathrm{D}-\delta$, ce qui est évidemment possible, car elle y est continue,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}-\gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}-\delta}\frac{\frac{\mathrm{D}f(v)}{\mathrm{D}\omega}}{v-\zeta}\,d\omega = 0.$$

Mais on a

$$\left|\int\int_{\delta}\frac{\frac{\mathrm{D}f(v)}{\mathrm{D}\omega}}{v-\zeta}\,d\omega\right| < \int\int_{\delta}\frac{\left|\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}\omega}\right|}{|v-\zeta|}\,d\omega < \mathrm{M}\int\int_{\delta} d\rho\, d\theta < 2\pi r\mathrm{M},$$

où $v-\zeta = \rho e^{i\theta}$, $r =$ rayon du cercle δ, $\mathrm{M} =$ borne supérieure de $\left|\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}\omega}\right|$.

Quant à l'expression

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz,$$

on remarque aisément qu'elle a une valeur voisine de $f(\zeta)$.

Alors

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}}\frac{\frac{\mathrm{D}f(v)}{\mathrm{D}\omega}}{v-\zeta}\,d\omega - f(z)\right| < 2\pi r\mathrm{M} + \varepsilon'$$

(ε' provenant de l'intégrale relative à γ).

Par conséquent,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}}\frac{\frac{\mathrm{D}f(v)}{\mathrm{D}\omega}}{v-\zeta}\,d\omega, \tag{6}$$

qui est la formule demandée.

Elle généralise celle de Cauchy relative aux fonctions holomorphes. Le terme portant sur l'intégrale de contour nous fournit une fonction holomorphe; c'est donc par le deuxième terme qu'on marque l'opération nouvelle.

Une remarque, utile dans la suite, est que *la fonction* $f(\zeta)$ *n'a pas besoin d'être monogène* (α) *sur le contour* C; *il suffit qu'elle y soit continue.*

En effet occupons-nous de la relation (5) valable pour tout contour tracé dans le domaine d'holomorphisme (α). Supposons que le long de C, $f(z)$ ne soit pas monogène(α), mais qu'elle y est continue. Quant à $\frac{Df}{D\omega}$ supposons seulement qu'elle reste bornée lorsque v tend vers z.

Supposons D simplement connexe, et représentons-le conformément sur un cercle de rayon 1. Soit C_r la courbe de D qui correspond à un cercle de rayon $r < 1$. Elle est analytique et entièrement comprise dans D.

On aura pour le couple C_r, D_r la relation (5).

Calculons la différence

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2i\pi}\left[\int_C f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z_r)\,dz_r\right] - \frac{1}{\pi}\left[\iint_{D_r}\frac{Df(v)}{D\omega}\,d\omega - \iint_{D_r}\frac{Df(v)}{D\omega}\,d\omega\right]\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_C\{f(z) - f[z_r(z)]\}\,dz\\ &\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_C f[z_r(z)]\{d[z_r(z)] - dz\} - \frac{1}{\pi}\iint_{D-D_r}\frac{Df(v)}{D\omega}\,d\omega.\end{aligned}$$

En vertu de la continuité de $f(z)$, lorsque $1 - r$ tend vers zéro, $f(z_r)$ tendra uniformément vers $f(z)$.

Donc

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_C [f(z) - f(z_r)]\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\,l$$

pour $1 - r < \eta$.

D'autre part, M. Alexandre Ghika a montré [1] que lorsque C_r tend vers C, on a

$$\int_C |dz - d\,z_r(z)| < \varepsilon.$$

Donc

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z_r)\{dz_r - dz\}\right| < \frac{M}{2\pi}\varepsilon \qquad \text{pour } 1 - r < \eta,$$

où M est une borne supérieure de $f(z)$.

---

[1] *Voir* Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris, 1929, p. 13.

Enfin

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\int_{D-D_r}\frac{Df}{D\omega}d\omega\right| < \frac{N}{\pi}\int\int_{D-D_r}d\omega < \frac{N}{\pi}\varepsilon',$$

ε' tendant vers zéro avec $1-r$, N désignant une borne de $\frac{Df}{D\omega}\cdot$ Par conséquent,

$$|\Delta| < \frac{\varepsilon}{2\pi}l + \frac{M}{2\pi}\varepsilon + \frac{N}{\pi}\varepsilon'.$$

Or, Δ se réduisant à une constante indépendante de C_r, qui peut être rendue aussi petite que l'on voudra, on en tire aisément la relation

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{Df(v)}{D\omega}d\omega = 0.$$

L'intérêt que nous attachons à cette remarque consiste dans le fait que, dans les applications, on a à déterminer des fonctions monogènes (α) à l'aide de leurs dérivées aréolaires et des valeurs qu'elles prennent sur un certain contour donné.

4. Reprenons la définition générale (2) que nous avons donnée au paragraphe **1**. Un premier problème qui se pose tout naturellement c'est de trouver les fonctions qui ont la dérivée aréolaire holomorphe au sens classique, donc de chercher les fonctions qui généralisent les fonctions linéaires.

En général, cela nous suggère l'idée d'envisager des expressions qui soient les analogues des polynomes.

Commençons par le cas le plus simple, celui des fonctions à dérivée aréolaire holomorphe.

Supposons donc qu'on ait

$$\frac{Df}{D\omega} = h(z),$$

où $h(z)$ est une fonction holomorphe, en chaque point d'un domaine D [1], limité par un contour simple rectifiable C.

Si l'on connaît le long du contour C les valeurs de $f(z)$ et de sa dérivée

---

[1] Nous appellerons domaine l'ensemble des points *intérieurs* à une ou plusieurs régions du plan, en nombre fini et limitées par des courbes rectifiables fermées simples, de longueur totale finie.

aréolaire, on pourra écrire [1]

$$f(\zeta)=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz-\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{h(v)}{v-\zeta}\,d\omega,$$

où ζ est un point du domaine D, et

$$h(v)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2} \frac{h(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

Calculons le terme exprimé par l'intégrale double. Pour cela, traçons un contour C′ assez voisin de C, et désignons par D′ le domaine qu'il limite. Entourons en même temps le point ζ d'un petit cercle δ. Le terme

$$-\frac{1}{\pi}\int\int_{D-D'} \frac{h(v)}{v-\zeta}\,d\omega$$

peut être rendu, par le choix convenable du contour C, aussi petit que l'on voudra, de même le terme analogue relatif au cercle δ.

Quant à celui relatif au domaine D′ — δ, on aura

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{\pi}\int\int_{D'} \frac{d\omega}{v-\zeta}\,\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{h(z)}{z-v}\,dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi^2}\int_C h(z)\,dz\int\int_{D'-\delta} \frac{d\omega}{(v-\zeta)(z-v)} - \frac{1}{2i\pi^2}\int\int_\delta \frac{d\omega}{v-\zeta}\int_C \frac{h(z)}{z-v}\,dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi^2}\int_C h(z)\,dz\int\int_{D'} \frac{d\omega}{(v-\zeta)(z-v)} - \frac{1}{2i\pi^2}\int\int_\delta \frac{d\omega}{v-\zeta}\int_C \frac{h(z)}{z-v}\,dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi^2}\int_C h(z)\,dz\int\int_\delta \frac{d\omega}{(v-\zeta)(z-v)}.
\end{aligned}$$

Or il est facile de voir que lorsque le rayon de δ tend vers zéro, les deux derniers termes tendent aussi vers zéro. Le changement d'ordre est donc légitime.

Considérons la fonction $\frac{\zeta}{\zeta-z}$ qui est continue dans D′; de plus, elle y admet des dérivées partielles du premier ordre continues.

---

(1) Cette formule est l'extension de la formule (6), établie seulement pour les fonctions particulières de M. D. Pompeiu.

Nous établirons rigoureusement plus loin qu'elle est valable pour toute fonction holomorphe (α).

Par l'application de la définition restreinte, on voit aisément que la dérivée aréolaire en est $\frac{1}{\zeta - z}$.

Appliquons-y la formule (6) :

$$\frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\bar{t}\,dt}{(t-z)(t-\zeta)} - \frac{1}{\pi}\iint_{D'} \frac{d\omega}{(v-\zeta)(v-z)}.$$

Si l'on en tire le terme relatif à l'intégrale double et qu'on l'introduise dans l'expression de A, celle-ci devient

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{\zeta}}{2i\pi}\int_C \frac{h(z)}{z-\zeta}\,dz + \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_C h(z)\,dz \int_{C'} \frac{\bar{t}\,dt}{(t-z)(t-\zeta)} \\ &= \frac{\bar{\zeta}}{2i\pi}\int_C \frac{h(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{C'} \frac{\bar{t}\,dt}{t-\zeta}\int_C \frac{h(z)\,dz}{z-\zeta} \\ &= \frac{\bar{\zeta}}{2i\pi}\int_C \frac{h(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\bar{t}\,h(z)}{t-\zeta}\,dt. \end{aligned}$$

Portons cette valeur de A dans l'expression de $f(\zeta)$ et faisons tendre C′ vers C. Il vient

$$(7) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_C (\bar{\zeta} - \bar{z})\frac{\frac{Df(z)}{D\omega}}{z-\zeta}\,dz$$

ou bien

$$(7') \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z) - \bar{z}\frac{Df}{D\omega}}{z-\zeta}\,dz + \frac{\bar{\zeta}}{2i\pi}\int_C \frac{\frac{Df}{D\omega}}{z-\zeta}\,dz,$$

la deuxième forme mettant en évidence la structure de la fonction. Cette formule exprime donc *les valeurs d'une fonction à dérivée aréolaire holomorphe, connaissant ses valeurs ainsi que celles de sa dérivée aréolaire le long d'un contour fermé simple rectifiable, exprimées par deux fonctions continues de z.*

Il est bon de remarquer que nous n'avons fait aucune supposition relative à l'existence des dérivées partielles de $f(z)$.

Or, il résulte de la formule (7) que cette fonction admet des dérivées partielles de tous les ordres.

La définition de M. Calugaréano y est donc applicable, ce qui simplifie les opérations.

En effet, on peut dire que $f(\zeta)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = h(\zeta)$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\zeta}^2} = 0,$$

qui par intégration donne

$$f(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \bar{\zeta}\,\Phi_1(\zeta),$$

où $\Phi_0(\zeta)$ et $\Phi_1(\zeta)$ sont deux fonctions holomorphes.

L'analogie entre ces fonctions et les fonctions linéaires d'une variable est évidente.

On voit bien encore une fois que les fonctions holomorphes Φ_0 et Φ_1 y jouent un rôle de constantes.

D'une manière générale, la recherche d'une fonction dont la $n^{\text{ième}}$ dérivée aréolaire soit holomorphe conduira à des fonctions généralisant les polynomes ordinaires; nous les appellerons dans la suite *polynomes aréolaires.*

En particulier, le polynome du premier ordre conduit à un système d'équations aux dérivées partielles, l'extension du système de Cauchy. En effet on a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\zeta}^2} = \frac{1}{2^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(2)}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial \bar{\zeta}^n} = \frac{1}{2^n}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(n)},$$

les puissances symboliques ayant la même signification que dans toutes les questions du même genre.

Dire que la deuxième dérivée est nulle revient à écrire le système suivant :

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, puisque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\zeta}^2} = 0,$$

on aura en même temps

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \bar{\zeta}^2\,\partial \zeta^2} = 0$$

Mais, en général,

$$\Delta^n f = 2^{2n}\frac{\partial^{2n} f}{\partial \zeta^n\,\partial \bar{\zeta}^n},$$

par conséquent, les fonctions P et Q satisfont en particulier aux équations

$$\Delta^2 P = 0 \quad \text{et} \quad \Delta^2 Q = 0, \tag{9}$$

donc ce sont des fonctions biharmoniques.

Ces remarques mettent en lumière un autre aspect du problème qui nous préoccupe.

L'intégration du système (8) et la recherche d'un polynome aréolaire du premier ordre ne sont que les deux faces d'une même question.

Or il est parfois préférable de substituer au problème brut relatif au système (8) celui concernant le polynome aréolaire correspondant.

5. Les considérations faites au sujet des polynomes aréolaires laissent entrevoir la possibilité d'une extension systématique de la théorie des fonctions, que nous allons considérer comme un premier échelon auquel nous apprendrons à en faire succéder une infinité d'autres.

En effet, au lieu de nous borner aux polynomes du premier ordre, nous pouvons passer au cas général, en suivant la même voie.

On aura d'abord pour $n = 2$

$$\frac{D^2 f}{D\omega^2} = 2\, h_2(\zeta)$$

ou bien

$$\frac{D}{D\omega}\left(\frac{Df}{D\omega}\right) = 2\, h_2(\zeta),$$

d'où

$$\frac{Df}{D\omega} = h_1(\zeta) + 2\bar{\zeta}\, h_2(\zeta),$$

$h_1(\zeta)$ et $h_2(\zeta)$ étant holomorphes. Mais on peut écrire

$$h_1(\zeta) = \frac{D}{D\omega}[\bar{\zeta}\, h_1(\zeta)] \quad \text{et} \quad 2\bar{\zeta}\, h_2(\zeta) = \frac{D}{D\omega}[\bar{\zeta}^2\, h_2(\zeta)].$$

Par conséquent

$$\frac{D}{D\omega}[f - \bar{\zeta} h_1 - \bar{\zeta}^2 h_2] = 0$$

ou bien

$$f = h_0(\zeta) + \bar{\zeta}\, h_1(\zeta) + \bar{\zeta}^2\, h_2(\zeta)$$

avec $h_0(\zeta)$ holomorphe.

Le même procédé répété suffisamment nous conduira à l'expression suivante du polynome aréolaire d'ordre n :

$$f(\zeta) = h_0(\zeta) + \bar{\zeta}\, h_1(\zeta) + \ldots + \bar{\zeta}^n\, h_n(\zeta) \tag{10}$$

qui montre qu'*une telle fonction admet dans une région où tous ses coefficients sont holomorphes des dérivées partielles de tous les ordres.*

La définition particulière y est applicable; parmi les simplifications qui en découlent, remarquons que l'on a

$$\frac{D^{n+1} f}{D\omega^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \bar{\zeta}^{n+1}} = 0.$$

Cette observation simplifie d'une part les calculs, et d'autre part *conduit à un système d'équations aux dérivées partielles* auquel les parties réelle et imaginaire de $f(\zeta)$ doivent satisfaire; on voit, de plus, qu'*un polynome aréolaire admet une infinité de dérivées partielles successives.*

Le système dont il s'agit est :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^{n+1} P}{\partial x^{n+1}} - C^1_{n+1} \frac{\partial^{n+1} Q}{\partial x^n \, \partial y} - C^2_{n+1} \frac{\partial^{n+1} P}{\partial x^{n-1} \, \partial y^2} + C^3_{n+1} \frac{\partial^{n+1} Q}{\partial x^{n-2} \, \partial y^3} + C^4_{n+1} \frac{\partial^{n+1} P}{\partial x^{n-3} \, \partial y^4} + \ldots = 0, \\ &\frac{\partial^{n+1} Q}{\partial x^{n+1}} + C^1_{n+1} \frac{\partial^{n+1} P}{\partial x^n \, \partial y} - C^2_{n+1} \frac{\partial^{n+1} Q}{\partial x^{n-1} \, \partial y^2} - C^3_{n+1} \frac{\partial^{n+1} P}{\partial x^{n-2} \, \partial y^3} + C^4_{n+1} \frac{\partial^{n+1} Q}{\partial x^{n-3} \, \partial y^4} + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

En particulier

$$\Delta^{n+1} P = 0, \qquad \Delta^{n+1} Q = 0.$$

De toutes ces considérations, ainsi que de la forme des fonctions étudiées et des relations trouvées, on déduit qu'il y a une liaison intime entre les polynomes aréolaires et les fonctions holomorphes. On retrouve d'ailleurs cette classe en y faisant $n = 0$.

Dans ce qui suit, nous allons donner *une formule exprimant les valeurs d'un polynome aréolaire d'ordre n, quand on connaît sur le contour* C *les valeurs de la fonction et de ses dérivées successives, exprimées par des fonctions continues du point z qui le décrit.*

Notons pour simplifier $\frac{D^i f}{D\omega^i} = f^i$. La fonction $f(\zeta)$ sera de la forme

$$(12) \quad f(\zeta) = \Phi_0 + \bar{\zeta}\Phi_1 + \ldots + \bar{\zeta}^n \Phi_n \qquad (\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n \text{ étant holomorphes}).$$

---

(1) Ces fonctions ont été rencontrées la première fois par M. Pietro Burgatti, indépendamment des idées que nous exposons ici, par l'introduction d'un opérateur qui ne diffère pas essentiellement de la dérivée aréolaire (au sens de M. Calugaréano). *Voir* à ce sujet P. Burgatti, *Sulle funzioni analitiche d'ordine n* (*Boll. Unione Mat. Italiana*, Anno I, n° 1, 1922).

Considérons les fonctions

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi_0[f] = f(\zeta) - \dfrac{\bar{\zeta}}{1!}\, f^1(\zeta) + \dfrac{\bar{\zeta}^2}{2!} f^2(\zeta) + \ldots + (-1)^n \dfrac{\bar{\zeta}^n}{n!} f^n(\zeta), \\ \varphi_j[f] = f^j(\zeta) - \dfrac{\bar{\zeta}}{1!} f^{j+1}(\zeta) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-j} \dfrac{\bar{\zeta}^{n-j}}{(n-j)!} f^n(\zeta). \end{cases}$$

On aura, en remarquant que $\varphi_j[f] \equiv \varphi_0[f^j]$ et en substituant dans ces expressions les valeurs de f et de ses dérivées tirées de la formule (12), les résultats suivants :

$$\varphi_0[f] \equiv \Phi_0(\zeta), \qquad \frac{1}{j!}\varphi_j[f] \equiv \Phi_j(\zeta).$$

ce qui conduit à

$$f(\zeta) = \varphi_0[f] + \frac{\bar{\zeta}}{1!}\varphi_1[f] + \ldots + \frac{\bar{\zeta}^n}{n!}\varphi_n[f],$$

toutes ces composantes étant *holomorphes*.

Appliquons la formule de Cauchy à chaque fonction $\varphi_j[f]$, et changeons convenablement l'ordre des termes.

On arrivera aisément à l'expression suivante (¹) :

$$(14)\qquad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{1!}\,\frac{f^1(z)}{z-\zeta}\,dz + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})^n}{n!}\,\frac{f^n(z)}{z-\zeta}\,dz,$$

où les fonctions $f(z)$, $f^1(z)$, $\ldots$, $f^n(z)$ *sont supposées seulement continues le long de* C.

On a pour tout contour Γ tracé dans le domaine D les relations suivantes :

$$\int_\Gamma \varphi_j[f(z)]\,dz = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

à cause de l'holomorphisme de ces fonctions.

Réciproquement, *si* $n+1$ *fonctions continues dans un domaine* D, *soient* f_0, f_1, $\ldots$, f_n, *satisfont aux relations*

$$(15)\qquad \int_\Gamma \varphi_j[f(z)]\,dz = 0,$$

(¹) Un certain nombre de résultats contenus dans ce chapitre, ont été déjà publiés par nous dans deux Notes à la Reale Accademia dei Lincei (voir *Rendiconti*, 6ᵉ série, vol. XI, 1ᵉʳ semestre 1930, fasc. 3 et 4).

où

$$\varphi_j[f] = f_j(z) - \bar{z} f_{j+1}(z) + \ldots + (-1)^{n-j} \frac{\bar{z}^{n-j}}{(n-j)!} f_n(z)$$

pour tout contour rectifiable fermé (Γ) *tracé dans ce domaine*, f_0 *est un polynome aréolaire d'ordre* n, *dont les dérivées successives sont les fonctions* f_1, $f_2, \ldots, f_n$.

En effet, en remarquant que $\varphi_n[f] \equiv f_n(z)$, on déduit que f_n est holomorphe; en vertu de l'une des relations (15) on aura,

$$\varphi_{n-1}[f] = f_{n-1}(z) - \bar{z} f_n(z).$$

Mais $\varphi_{n-1}[f]$ étant holomorphe, il suit que $f_{n-1}(z)$ est un polynome du premier ordre, et ainsi de suite.

Ce théorème sert ici de théorème de Morera et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit un polynome aréolaire.

6. La forme spéciale sous laquelle se présente un polynome aréolaire laisse à soupçonner la possibilité d'un développement plus général, en série d'intégrales.

Supposons que la fonction $f(\zeta)$ admette des dérivées aréolaires de tous les ordres, continues et également bornées dans un domaine D et sur son contour C.

Alors la fonction (ζ) *admet une infinité de dérivées partielles ordinaires et peut être représentée à l'intérieur de* D, *par la série uniformément convergente.*

$$(16) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})}{1!}\,\frac{f^1(z)}{z-\zeta}\,dz + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})^n}{n!}\,\frac{f^n(z)}{z-\zeta}\,dz + \ldots.$$

Considérons les fonctions

$$\varphi_0[f] = f(\zeta) - \frac{\bar{\zeta}}{1!}\,f^1(\zeta) + \ldots + (-1)^n \frac{\bar{\zeta}^n}{n!}\,f^n(\zeta) + \ldots,$$
$$\varphi_j[f] = f^j(\zeta) - \frac{\bar{\zeta}}{1!}\,f^{j+1}(\zeta) + \ldots + (-1)^n \frac{\bar{\zeta}^n}{n!}\,f^{j+n}(\zeta) + \ldots.$$

Puisque les fonctions $f, f^1, \ldots, f^n = \frac{D^n f}{D\omega^n}$, sont supposées bornées, on peut trouver un nombre positif M, tel qu'on ait pour tout indice n et pour tout point ζ

$$|f(\zeta)| < \mathrm{M} \quad \text{et} \quad |f^n(\zeta)| < \mathrm{M};$$

on en déduit

$$|\varphi_0[f]| < |f(\zeta)| + \left|\frac{\bar{\zeta}}{1}\right| |f'(\zeta)| + \ldots + \left|\frac{\bar{\zeta}^n}{n!}\right| |f^n(\zeta)| + \ldots < \mathrm{M}\, e^{|\bar{\zeta}|}$$

et, en général,

$$|\varphi_l[f]| < \mathrm{M}\, e^{|\bar{\zeta}|}.$$

Donc les séries $\varphi_l[f]$ sont uniformément convergentes.

Ces fonctions sont en plus, holomorphes.

En effet, par une dérivation aréolaire, terme à terme, de la série uniformément convergente [1], on trouve

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\omega}\varphi_0[f] = \lim_{n \succ \infty} (-1)^n \frac{\bar{\zeta}^n}{n!} f^{n+1}(\zeta)$$

qui est nulle partout, dans les conditions posées. On arrive au même résultat, en ce qui concerne les autres fonctions.

Considérons maintenant la série

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\varphi_0[f]}{z-\zeta} dz + \frac{\bar{\zeta}}{1!}\int_{\mathrm{C}} \frac{\varphi_1[f]}{z-\zeta} dz + \ldots + \frac{\bar{\zeta}^n}{n!}\int_{\mathrm{C}} \frac{\varphi_n[f]}{z-\zeta} dz + \ldots;$$

elle est uniformément convergente. En effet, on a

$$\frac{\bar{\zeta}^n}{n!}\int_{\mathrm{C}} \frac{\varphi_n[f]}{z-\zeta} dz < \frac{\mathrm{MN}|\bar{\zeta}^n|}{n!}\int_{\mathrm{C}} \frac{|dz|}{|z-\zeta|} < \frac{\mathrm{MN}|\bar{\zeta}^n|}{n!}\int_{\mathrm{C}} \frac{ds}{r} < \frac{2\pi \mathrm{MN}|\bar{\zeta}^n|}{n!},$$

N étant une borne de $e^{|\zeta|}$ et $r = |z-\zeta|$. (L'intégrale ci-dessus représente l'angle total sous lequel on voit le contour du point ζ, intérieur.)

De plus, les fonctions $\varphi_l[f]$ étant holomorphes dans le domaine D et continues sur C, on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{\varphi_l[f(z)]}{z-\zeta} dz = \varphi_l[f(\zeta)].$$

Dans ces conditions, la somme de la série considérée est bien $2i\pi f(\zeta)$. A cause de la convergence uniforme, on peut intervertir l'ordre des termes, de telle façon qu'on obtienne le développement (16).

---

[1] Nous allons étendre les règles de dérivation d'une somme, d'un produit, etc., à l'opération de dérivation aréolaire dans un des chapitres suivants.

L'existence des dérivées partielles de $f(\zeta)$ est immédiatement visible sur cette expression, dérivable terme à terme.

On peut aussi remarquer que les fonctions $f, f^1, \ldots, f^n$ satisfont aux relations suivantes en nombre infini

$$\int_\Gamma \varphi_j[f(z)]\,dz = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$$

pour tout contour fermé Γ, tracé dans le domaine D, à cause de l'holomorphisme des fonctions $\varphi_j[f]$.

Réciproquement : *Si une suite illimitée de fonctions continues et données $f_0, f_1, \ldots, f_n$ satisfait, dans un domaine* D, *aux relations*

$$\int_C \varphi_j[f(z)]\,dz = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n, \ldots),$$

où

$$\varphi_j[f] = f_j(z) - \frac{\bar{z}}{1!} f_{j+1}(z) + \ldots + (-1)^n \frac{\bar{z}^n}{n!} f_{j+n}(z) + \ldots,$$

pour tout contour fermé rectifiable C, $f_0(\zeta)$ *est développable en série uniformément convergente d'intégrales et ses dérivées aréolaires successives sont les fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$.

C'est un théorème de Moreva, convenablement étendu.

7. Ces cas particuliers traités, passons à celui d'une fonction ayant $n+1$ dérivées aréolaires continues dans une certaine région D, limitée par un contour C.

Notons toujours, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{D^j f}{D\omega^j} = f^j,$$

et considérons l'expression

$$u_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int\int_D \frac{(\bar{\zeta} - \bar{\rho})^n}{n!} \frac{f^{n+1}(\rho)}{\rho - \zeta}\,d\omega.$$

On aura facilement

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\pi} \int\int_D \frac{\frac{D}{D\omega}\left[f^n(\rho)\frac{(\bar{\zeta} - \bar{\rho})^n}{n!}\right]}{\rho - \zeta}\,d\omega.$$

En appliquant la formule (6) à la fonction continue

$$f^n(\zeta_1)\frac{(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1)^n}{n!},$$

on obtient en particulier, pour $\zeta_1 = \zeta$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})^n}{n!}\,\frac{f^n(z)}{z-\zeta}\,dz = u_{n+1} - u_n.$$

Cela étant valable pour $n \geqq 1$, bien entendu, car pour $n = 0$, on a

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{f^1(v)}{v-\zeta}\,d\omega = -f(\zeta) + \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

En ajoutant tous ces résultats, *on déduit la formule suivante donnant les valeurs d'une fonction à* $n+1$ *dérivées aréolaires continues dans le domaine fermé* D, *lorsque l'on connaît en chaque point de ce domaine les valeurs de* $\frac{D^{n+1}f(\zeta)}{D\omega^{n+1}}$ *et sur le contour* C, *celles de* f *et de ses* n *premières dérivées :*

$$(17) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz + \ldots + \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})^n}{n!}\,\frac{f^n(z)}{z-\zeta}\,dz$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{(\bar{\zeta}-\bar{v})^n}{n!}\,\frac{f^{n+1}(v)}{v-\zeta}\,d\omega.$$

Cette formule contient comme cas particuliers, toutes les expressions dont nous avons fait usage jusqu'ici.

Pour $n = 0$, on retrouve *les fonctions holomorphes* (α).

Pour $f^{n+1}(\zeta) \equiv 0$, on retombe sur les polynomes aréolaires.

Enfin, pour $n = 0$ et $f^1(\zeta) \equiv 0$, on a les fonctions holomorphes.

Au même sujet, remarquons que si la formule (6) marque une sorte d'opération nouvelle, en intégrant l'équation $\frac{Df}{D\omega} = \varphi$, et généralise l'intégrale définie du calcul intégral, celle que nous avons donnée ci-dessus est une extension de l'équation $y^{n+1} = f(x)$.

Cela met encore une fois en évidence l'analogie entre cette partie résiduelle que nous avons nommée *polynome aréolaire*, et les polynomes habituels.

En effet, la formule (17) permet d'approximer une fonction admettant un certain nombre de dérivées aréolaires, par un polynome aréolaire, office analogue à celui de la formule de Taylor.

Ainsi, le problème traité dans un cas particulier, au paragraphe précédent, la représentation d'une fonction par une série d'intégrales, admet une solution dès que le terme u_{n+1} tend vers zéro, quand n tend vers l'infini.

La discussion est, en général, assez compliquée, mais il y a des cas utiles et assez étendus, où l'on peut préciser la possibilité d'un développement en série.

Tel est, par exemple, le cas où la dérivée aréolaire, au lieu d'être bornée, tend vers l'infini comme M^n, M étant un nombre positif. Dans ces conditions on peut s'arranger pour qu'on ait, pour n assez grand, $|f^{n+1}| < kM^{n+1}$ (k étant constant).

Donc :

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{(\bar{\zeta}-\bar{\nu})^n}{n!}\,\frac{f^{n+1}(\nu)}{\nu-\zeta}\,d\omega\right| < 2\,\frac{KM^{n+1}}{n!\,\pi}\int\int_D r^n\,dr\,d\theta < 2kM\,\frac{(MR)^{n+1}}{(n+1)!},$$

R étant le rayon d'un cercle qui englobe le domaine D.

Or, pour n assez grand, on peut rendre ce terme aussi petit que l'on veut, ce qui prouve la possibilité du développement dans le cas étudié ci-dessus.

8. Terminons ce chapitre par un nouveau rapprochement entre les polynomes aréolaires et les fonctions holomorphes.

En effet, on peut étendre à cette classe de fonctions le *prolongement analytique*.

Soient $f_1(\zeta)$ et $f_2(\zeta)$ deux polynomes du même ordre définis dans deux régions du plan ayant une partie commune et une seule.

Si dans cette partie on a $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$, nous dirons qu'ils se prolongent l'un par l'autre, c'est-à-dire nous les regarderons comme formant une seule fonction $F(\zeta)$ définie dans la région totale.

Le théorème suivant donne quelques indications sur la nature de l'extension qu'on peut faire en passant du cas classique à celui des polynomes.

Soient $f_1(\zeta)$ et $f_2(\zeta)$ deux polynomes aréolaires, définis respectivement dans deux domaines D_1 et D_2 ayant comme frontière commune une portion de courbe rectifiable AB.

Si, le long de AB, *les fonctions $f_1(\zeta)$ et $f_2(\zeta)$ sont égales ainsi que leurs dérivées aréolaires d'ordres* 1. 2, ..., n, *$f_2(\zeta)$ est le prolongement analytique de $f_1(\zeta)$ lorsqu'on passe du domaine D_1 au domaine D_2 en traversant l'arc* AB (1).

Traçons dans le domaine D_1 un arc simple APB, limitant avec AB un domaine simplement connexe Δ_1 ; dans le domaine D_2 définissons à l'aide d'un arc AQB, un autre domaine Δ_2, simplement connexe aussi.

(1) Extension du theorème de M. Painlevé (Thèse *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, 1888).

En un point ζ_1 de Δ_1, on aura

$$f_1(\zeta_1)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n}\left[\int_{AB}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z)^j}{j!}\frac{f_1^j(z)}{z-\zeta_1}dz+\int_{BPA}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z)^j}{j!}\frac{f_1^j(z)}{z-\zeta_1}dz\right].$$

Mais pour la fonction $f_2(\zeta)$ le point ζ_1 étant extérieur au domaine Δ_2 on peut écrire :

$$0=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n}\left[\int_{BA}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z)^j}{j!}\frac{f_2^j(z)}{z-\zeta_1}dz+\int_{AQB}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z)^j}{j!}\frac{f_2^j(z)}{z-\zeta_1}dz\right].$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités et en remarquant que le long de AB

$$f_1(z)=f_2(z) \qquad \text{et} \qquad f_1^j(z)=f_2^j(z),$$

on obtiendra

$$f_1(\zeta_1)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\bar\zeta_1-\bar z}{j!}\frac{f_1^j(z)}{z-\zeta_1}dz,$$

Γ étant le contour APBQA.

Un raisonnement analogue relatif à la fonction $f_2(\zeta)$ conduira à une expression de la même forme.

La fonction

$$F(\zeta)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\bar\zeta-\bar z}{j!}\frac{f^j(z)}{z-\zeta}dz,$$

où

$$f^j(z)=\begin{cases} f_1^j(z) & \text{le long de APB,}\\ f_2^j(z) & \text{le long de AQB,}\end{cases}$$

est un polynome aréolaire égal à $f_1(\zeta)$ dans Δ_1 et à $f_2(\zeta)$ dans Δ_2 et par conséquent les deux fonctions se prolongent l'une par l'autre en franchissant l'axe AB.

Il est évident qu'il n'existe pas deux polynomes qui prolongent $f_1(\zeta)$ dans Δ_2, car leur différence serait un polynome aréolaire nul avec toutes ses dérivées le long de AB.

Or, la dernière, étant holomorphe, serait identiquement nulle; la deuxième deviendrait à son tour holomorphe et identiquement nulle et ainsi de suite.

Le même problème relatif aux séries aréolaires ne présente aucune difficulté.

En partant de la définition (2) de la dérivée aréolaire, nous avons montré comment on peut sortir du cadre classique, par l'intermédiaire de fonctions simples et voisines des fonctions analytiques.

A chaque terme on a attaché un problème complexe et un autre réel.

Dans le chapitre suivant, nous aborderons le problème général des fonctions holomorphes (α), qui peut être regardé comme l'analogue de l'intégration des fonctions continues.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS HOLOMORPHES (α).

1. Nous avons défini plus haut les fonctions holomorphes (α). Si l'on procède par analogies successives, on peut dire que ces fonctions joueront le rôle des fonctions à dérivée continue.

Le problème qui s'y rattache généralise l'intégration et a des applications physiques que nous étudierons en détail dans un des chapitres suivants.

Considérons le rapport (1) qui définit la dérivée aréolaire en un point z_0 d'un domaine D.

Nous dirons que ce rapport converge uniformément dans D, *si à tout nombre positif* ε *donné, on peut faire correspondre un nombre* ρ, *indépendant du point* z_0 *et tel que pour toute courbe fermée rectifiable* γ, *limitant un domaine* δ, *complètement intérieure au cercle de centre* z_0 *et de rayon* ρ, *on ait*

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{\varphi(z_0)}{\pi}\int\int_\delta d\omega\right| < \varepsilon\int\int_\delta d\omega, \tag{18}$$

$\varphi(z_0)$ *étant un nombre fini et déterminé en chaque point* z_0.

Nous allons montrer que pour toute fonction holomorphe (α), le rapport (1) tend uniformément vers sa limite.

Démontrons d'abord le lemme suivant *relatif aux fonctions monogènes* (α).

Si une fonction $f(z)$ *est monogène* (α) *dans un domaine* D, *on peut partager ce domaine en un nombre fini de régions telles que dans chacune d'elles, il existe au moins un point* z_0 *pour lequel,* ε *étant arbitrairement donné, on ait*

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{\varphi(z_0)}{\pi}\int\int_\delta d\omega\right| < \varepsilon\int\int_\delta d\omega,$$

quelle que soit γ, *intérieure à la région obtenue autour de* z_0.

On n'a d'ailleurs qu'à traduire la démonstration du lemme de M. Goursat.

Traçons un réseau de carrés ayant leurs côtés parallèles aux axes Ox, Oy.

Parmi ces carrés, les uns satisfont à l'énoncé. Nous allons distinguer seulement les autres qui n'y satisfont pas.

Prenons un d'entre eux et divisons-le en d'autres plus petits, joignant les milieux des côtés opposés.

Cette opération répétée pour chaque carré conduit à des régions qui, ou bien satisfont à l'énoncé, ou bien n'y satisfont pas et doivent être partagées de la même manière.

Le procédé continué aussi loin que l'on veut conduit à une suite de carrés (ou portions de carrés) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dont chacun est compris dans le précédent. Il y aura au moins un point limite z_0. Mais la fonction $f(z)$ étant monogène (α) en ce point, on peut déterminer un rayon ρ_0 tel qu'on arrive à une contradiction, car pour n assez grand, α_n peut être enfermé dans le cercle ρ_0. Donc le lemme est exact.

Dans ces conditions, partageons le domaine D en les régions satisfaisant au lemme ci-dessus, et écrivons :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz - \frac{\varphi(z_0)}{\pi} \int\int_\delta d\omega \right| < \varepsilon \int\int_\delta d\omega.$$

La fonction $\varphi(z)$ étant supposée continue, donc uniformément continue, à un nombre ε donné, on peut faire correspondre un nombre r tel que, dans tout carré de côté r, on ait

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \varepsilon.$$

En même temps, partageons les carrés de la division faite, qui sont de côté supérieur à r, de telle sorte que l'inégalité puisse être appliquée.

On aura

$$\frac{1}{\pi} \left| \int\int_\delta [\varphi(z) - \varphi(z_0)]\, d\omega \right| < \varepsilon \int\int_\delta d\omega,$$

d'où

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz - \frac{1}{\pi} \int\int_\delta \varphi(v)\, d\omega \right| < 2\varepsilon \int\int_\delta d\omega.$$

En ajoutant tous les résultats, on trouve :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)\, dz - \frac{1}{\pi} \int\int_D \varphi(v)\, d\omega \right| < 2\varepsilon \text{ (aire de D)}.$$

Mais le premier membre est une constante indépendante de ε et qui peut être rendue aussi petite que l'on veut, donc on a la relation suivante :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi(v)\,d\omega = 0 \tag{19}$$

pour toute fonction holomorphe (α) et sa dérivée aréolaire.

Appliquons-la à un contour fermé γ, compris dans un cercle de rayon r, pour lequel on a

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \varepsilon \qquad \text{ou bien} \qquad \varphi(z) = \varphi(z_0) + \varepsilon_1(z) \qquad |\varepsilon_1(z)| < \varepsilon.$$

On déduit aisément

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{\varphi(z_0)}{\pi}\int\int_\delta d\omega = \frac{1}{\pi}\int\int_\delta \varepsilon_1(v)\,d\omega;$$

donc

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{\varphi(z_0)}{\pi}\int\int_\delta d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}\int\int_\delta d\omega,$$

qui est valable pour tout point z_0 du domaine D, en vertu de la continuité uniforme de $\varphi(z)$, et prouve que *le rapport* (1) *converge uniformément vers la dérivée aréolaire pour toute fonction holomorphe* (α).

Nous allons en démontrer la réciproque :

Si pour une fonction $f(z)$, le rapport (1) *converge uniformément dans un domaine* D, *la fonction est holomorphe* (α), *donc sa dérivée aréolaire est continue en chaque point du domaine:*

Soient z_0 et z deux points assez voisins. En vertu de la convergence uniforme du rapport (1), on peut, à un nombre ε donné, faire correspondre un nombre ρ tel que, pour tout contour fermé compris dans un des cercles de centre z_0 et z, et de rayon ρ, on puisse écrire :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\varphi(z_0)\int\int_{\delta_0} d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}\int\int_{\delta_0} d\omega$$

ou

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\varphi(z_1)\int\int_{\delta_1} d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}\int\int_{\delta_1} d\omega.$$

Prenons comme courbes γ_0 et γ_1, les deux cercles décrits. Les inégalités ci-dessus peuvent être écrites :

$$\varphi(z_0)\iint_{\delta_0} d\omega = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \varepsilon_0(z_0)\iint_{\delta_0} d\omega \qquad (|\varepsilon_0| < \varepsilon),$$

$$\varphi(z_1)\iint_{\delta_1} d\omega = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \varepsilon_1(z_1)\iint_{\delta_1} d\omega \qquad (|\varepsilon_1| < \varepsilon).$$

Par la transformation linéaire $z' = z + z_1 - z_0$, on peut rapporter les intégrales au même contour. De même, on peut prendre les deux points z_0 et z assez voisins pour qu'on ait ([1])

$$|f(z) - f(z + z_1 - z_0)| < \rho^2 \qquad \text{si} \qquad |z_1 - z_0| < \eta.$$

En retranchant membre à membre les égalités considérées, on obtient

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_0)|\,\pi\rho^2 < \int_{\gamma_0} |f(z + z_1 - z_0) - f(z)|\,|dz| + 2\pi\varepsilon\rho^2 < 2\pi\rho^3 + 2\pi\varepsilon\rho^2,$$

d'où

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_0)| < 2\varepsilon + 2\rho,$$

ce qui assure la continuité de la dérivée aréolaire.

On peut donc réunir ces deux résultats sous l'aspect suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(z)$ soit holomorphe (α) *dans un domaine est que le rapport* (1) *converge uniformément vers sa limite, dans tout le domaine* ([2]).

On a vu, d'ailleurs, que toute fonction holomorphe (α) satisfait avec sa dérivée aréolaire à l'équation fonctionnelle (19).

Inversement, si un couple de fonctions continues $f(z)$ et $\varphi(z)$ satisfait à l'équation (19), *la fonction $f(z)$ est holomorphe* (α) *dans le domaine* D *et sa dérivée aréolaire est $\varphi(z)$.*

En effet, on n'a qu'à écrire cette relation pour un contour fermé convenable et y appliquer la formule de la moyenne à l'intégrale double.

([1]) Ce qui est bien possible, car ρ est indépendant des points du domaine; donc la distance $|z_1 - z_0|$ n'a aucune influence sur cette quantité.

([2]) Ce résultat appelle certaines remarques. En théorie des fonctions de variable réelle, on est amené à démontrer que si la limite du rapport $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est atteinte uniformément, la dérivée est continue; pareillement pour les fonctions holomorphes (*voir* Ch. de la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 69). Mais ici les circonstances sont un peu différentes, car au lieu d'avoir la fonction $\varphi(z)$ définie comme limite de fonctions de points, elle s'obtient comme limite de fonctions de lignes.

Précisément, la continuité de la fonction $\varphi(z)$ conduit à

$$|\varphi(z)-\varphi(z_0)|<\varepsilon \qquad \text{pour } |z-z_0|<\rho.$$

Donc

$$\varphi(z)=\varphi(z_0)+\varepsilon'(z), \qquad |\varepsilon'(z)|<\varepsilon.$$

La relation (19), appliquée au cercle ρ (ou à un contour intérieur), donne

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz-\varphi(z_0)\int\int_\delta d\omega\right|<\int\int_\delta|\varepsilon'(v)|\,d\omega<\varepsilon\int\int_\delta d\omega.$$

Or, une fonction continue est uniformément continue; donc il y a un rayon ρ qui convient à tout point de D. Les résultats énoncés ci-dessus peuvent être mis sous une autre forme :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(z)$ soit holomorphe (α) *est qu'il existe une autre fonction continue $\varphi(z)$, telle qu'on ait la relation*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz-\frac{1}{\pi}\int\int_D\varphi(v)\,d\omega=0 \tag{20}$$

pour tout contour C, *fermé et rectifiable*, *limitant un domaine* D. *De plus*, $\varphi(z)$ *est sa dérivée aréolaire partout.*

Ce théorème généralise celui de Morera, relatif aux fonctions holomorphes. On est d'ailleurs dans ce cas pour $\varphi(z)\equiv 0$.

Le cas étudié par M. Pompeiu y est compris; on n'a qu'à se reporter à la formule (5) pour voir que l'expression (20) est une extension de la formule de Green.

2. Nous allons en tirer *une formule donnant les valeurs d'une fonction holomorphe* (α), *dans un domaine* D, *limité par un contour simple fermé et rectifiable* C, *à l'aide de la dérivée aréolaire, continue en chaque point de* D *et de la fonction, le long de* C.

Soient $f(z)$ la fonction considérée, $\varphi(z)=\frac{Df(z)}{D\omega}$ sa dérivée aréolaire, ζ un point de D.

Décrivons un contour fermé C′ intérieur à D, qui limite un domaine D′.

Entourons-le de deux autres contours fermés C″ et C‴ voisins et respectivement intérieur et extérieur, limitant deux domaines D″ et D‴. Soit δ le domaine compris entre C″ et C‴ (D‴ étant compris entre C‴ et C).

Calculons

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D''} + \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{\delta} + \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D'''}$$

lorsque le point ζ décrit le contour C'.

La fonction $\frac{\varphi(v)}{v-\zeta}$ est continue et bornée en chaque point de D'' et D''', on peut donc appliquer un changement d'ordre d'intégration aux termes correspondants.

Quant à l'intégrale relative à δ, on peut s'arranger de telle manière qu'elle tende vers zéro, avec l'aire de ce domaine. Soit $\varepsilon(\zeta)$ une borne supérieure de cette intégrale. On aura

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega\right| < \frac{1}{2\pi}\int_{C'} |\varepsilon(\zeta)|\,|d\zeta| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\, l',$$

l' étant la longueur du contour C'.

Les autres termes donnent successivement

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D''} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega = \frac{1}{2i\pi}\int\int_{D'} \varphi(v)\, d\omega \int_{C'} \frac{d\zeta}{v-\zeta} = -\int\int_{D''} \varphi(v)\, d\omega$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D'''} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega = \frac{1}{2i\pi}\int\int_{D'''} \varphi(v)\, d\omega \int_{C'} \frac{d\zeta}{v-\zeta} = 0,$$

de telle sorte qu'on ait

$$\left|\int\int_{D''} \varphi(v)\, d\omega + \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}\, l'.$$

Mais on peut toujours choisir le contour C'' de manière qu'on ait

$$\left|\int\int_{D'-D''} \varphi(v)\, d\omega\right| < \varepsilon.$$

En ajoutant ces deux dernières inégalités et en remarquant que le premier membre ne dépend pas de ε, on tire

$$\int\int_{D'} \varphi(v)\, d\omega = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} d\zeta \int\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega. \tag{21}$$

Si l'on écrit la relation (20) pour le contour C' et que l'on tienne compte de l'égalité (21), on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \left[f(\zeta) + \frac{1}{\pi}\int\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega\right] d\zeta = 0.$$

L'intégrale double qui y figure est une fonction continue de ζ dans tout le plan. M. D. Pompeiu a démontré ce résultat même pour le cas très général où la fonction $\varphi(v)$, donnée a priori, *est seulement bornée et intégrable (Lebesgue)* [1].

Or, cela étant, la quantité, dans le crochet, est une fonction continue, et par suite, d'après le théorème de Morera, holomorphe dans D.

On aura donc

$$f(\zeta)+\frac{1}{\pi}\int\int_{D}\frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega=h(\zeta).$$

Il nous reste à déterminer cette fonction holomorphe $h(\zeta)$. Supposons connues les valeurs de $f(\zeta)$ sur le contour C. On connaîtra par conséquent les valeurs de $h(\zeta)$ sur la même courbe, car l'intégrale double y est parfaitement déterminée.

L'intégrale de Cauchy donne

$$h(\zeta)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)+\frac{1}{\pi}\int\int_{D}\frac{\varphi(v)}{v-z}\,d\omega}{z-\zeta}\,dz.$$

Mais cette expression se simplifie, car si l'on décrit un contour C_1 intérieur à C et aussi voisin que l'on veut, on peut écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{dz}{z-\zeta}\int\int_{D_1}\frac{\varphi(v)}{v-z}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\int_{D_1}\varphi(v)\,d\omega\int_{C}\frac{dz}{(z-\zeta)(v-z)}.$$

Mais

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{dz}{(z-\zeta)(v-z)}=\frac{dz}{2i\pi(v-\zeta)}\int\left[\frac{1}{z-\iota}-\frac{1}{z-v}\right]dz=0,\qquad \text{si } |v-\zeta|\neq 0,$$

puisque les deux points sont à l'intérieur de C et chaque intégrale est égale à 1.

Si v et ζ sont confondus, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{dz}{(z-\zeta)^2}=0,$$

d'après les propriétés classiques des intégrales de contour.

La valeur de $h(\zeta)$ devient dans ce cas

$$h(\zeta)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

---

[1] Voir *Annaes da Academia Polytecnica do Porto*, t. VIII, 1913.

Par conséquent, on peut déterminer $f(\zeta)$ par la formule

$$\boxed{f(\zeta)=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz-\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega.} \tag{22}$$

Toute fonction holomorphe (α) peut être exprimée de cette manière. Le cas des fonctions à dérivées partielles continues y est compris.

Remarquons toutefois que les valeurs de $f(z)$ ne peuvent pas être complètement arbitraires sur le contour C, parce que les valeurs de $h(z)$ ne peuvent l'être non plus. En même temps, on peut voir que $f(z)$ n'a pas besoin d'être holomorphe (α) sur C; elle peut être seulement continue comme nous l'avons montré (dans un cas particulier).

3. On peut remarquer que pour obtenir la formule (22), on fait appel à des opérations indépendantes de la liaison entre $f(\zeta)$ et $\varphi(\zeta)$. Cela nous suggère une étude plus générale d'un développement tel que (22).

Considérons l'expression

$$\left\{\begin{matrix} F(\zeta) \\ F_1(\zeta) \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz-\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega, \tag{23}$$

où $f(z)$ est une fonction continue du point z qui décrit un contour simple, fermé et rectifiable C, $\varphi(v)$ étant également continue dans le domaine D et sur le contour C; ζ est un point du plan.

Supposons d'abord qu'il soit intérieur à D.

Les deux intégrales représentent des fonctions continues de ζ, la première étant même holomorphe au sens classique, comme on le sait. Quant à la deuxième, elle représente une fonction $g(\zeta)$ holomorphe (α) dans le domaine D.

En effet, si l'on pose

$$g(\zeta)=-\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(v)}{z-\zeta}\,d\omega \tag{24}$$

et si l'on calcule l'expression $\int_{C'} g(\zeta)\,d\zeta$ le long de tout contour fermé C′, tracé dans le domaine D, on arrive, comme on l'a déjà fait au paragraphe précédent pour une expression analogue, à une relation telle que (11), soit

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} g(\zeta)\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\int_{D'} \varphi(v)\,d\omega=0,$$

ce qui nous montre, en vertu du théorème de Morera, que nous avons déjà énoncé, que $g(\zeta)$ est holomorphe (α), sa dérivée aréolaire étant la fonction $\varphi(\zeta)$.

Dans ces conditions, *la fonction* $F(\zeta)$, *définie par l'expression* (23) *est holomorphe* (α), *sa dérivée aréolaire étant la fonction* $\varphi(\zeta)$, *lorsque* ζ *décrit le domaine* D.

Supposons maintenant que ζ soit extérieur.

L'intégrale relative à C représente dans tout le plan extérieur une fonction holomorphe différente de la première. Quant à l'intégrale double, on peut démontrer la même chose [1]. En effet, calculons $\int_{C'} g(\zeta)\,d\zeta$, le long d'un contour C′ extérieur à C, après avoir fait une coupure pour isoler le point à l'infini. On aura aisément

$$\int_{C'} g(\zeta)\,d\zeta = 0,$$

ce qui prouve que cette fonction est holomorphe dans tout le plan extérieur. Elle est régulière à l'infini et nulle comme $\frac{1}{z}$·

Donc, *la fonction* $F_1(\zeta)$ *définie par* (23) *est holomorphe à l'extérieur du domaine* D, *dans tout le plan.*

Il reste à traiter le cas où ζ est sur le contour C. A cet effet, nous allons étudier d'abord deux problèmes analogues à ceux relatifs aux fonctions analytiques. Soient deux points symétriques par rapport à un point fixe z_0, du contour C. Notons-les par

$$\zeta = z_0) + \eta, \qquad \zeta_1 = z_0 - \eta.$$

Calculons l'expression

$$\lim[F(z_0+\eta) - F_1(z_0-\eta)],$$

lorsque les deux points tendent vers z_0, de manière que le chemin ne soit jamais tangent au contour supposé doué d'une tangente unique en chaque point. On a d'abord l'identité

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_C f(z_0)\left[\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z-\zeta_1}\right] dz.$$

Décalons, une petite portion C_1 autour de z_0; soit C_2 le reste du contour.

---

(1) *Voir* D. Pompeiu, *Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine*, t. I, n° 6, 1913 (troisième Note sur une intégrale double).

Calculons

$$F(\zeta)-F_1(\zeta_1)-f(z_0),$$

$$|F(\zeta)-F_1(\zeta_1)-f(z_0)|<\frac{|\zeta-\zeta_1|}{2\pi}\left|\int_{C_1}\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-\zeta)(z-\zeta_1)}dz\right|$$
$$+\frac{|\zeta-\zeta_1|}{2\pi}\left|\int_{C_2}\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-\zeta)(z-\zeta_1)}dz\right|$$
$$+\frac{1}{\pi}\left|\int\int_D\frac{\varphi(v)}{v-\zeta}d\omega-\int\int_D\frac{\varphi(v)}{v-\zeta_1}d\omega\right|.$$

Les deux derniers termes ne produisent aucune difficulté, car l'intégrale étendue à C_2 donne une contribution finie, tendant vers zéro avec $|\zeta-\zeta_1|=2|\eta|$, tandis que les intégrales doubles représentant des fonctions continues dans tout le plan, les deux termes de la différence se détruisent mutuellement.

Choisissons la portion C_1, de telle sorte qu'on ait

$$|F(\zeta)-f(z_0)|<\varepsilon \qquad \text{pour } |z-z_0|<\rho,$$

ce qui est possible en vertu de la continuité uniforme de $f(z)$. Soient

$$\delta=|\eta|; \qquad r=|z-\zeta|; \qquad r_1=|z-\zeta_1|, \qquad \sigma=|z-z_0|.$$

Une borne supérieure du premier terme est donnée par

$$\frac{1}{\pi}\int_{C_1}\frac{\delta\varepsilon\, ds}{rr_1}.$$

Soit θ l'angle de la direction z_0z avec la direction $z_0\zeta$. On aura

$$r^2=\delta^2+\sigma^2-2\,\delta\sigma\cos\theta \qquad \text{et} \qquad r_1^2=\delta^2+\sigma^2+2\,\delta\sigma\cos\theta.$$

L'arc et la corde étant du même ordre, on aura $ds<k\,d\sigma$, k étant un nombre positif.

L'intégrale à calculer devient

$$I=\frac{k\varepsilon}{\pi}\int_{ab}\frac{\delta\, d\sigma}{\sqrt{\delta^2+\sigma^2-2\,d\sigma\cos\theta}\sqrt{\delta^2+\sigma^2+2\,\delta\sigma\cos\theta}}.$$

Posons $\sigma=\delta t$. On aura

$$I<\frac{2k\varepsilon}{\pi}\int_0^{\frac{\rho}{\delta}}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1-2t\cos\theta}\sqrt{t^2+1+2t\cos\theta}}$$
$$<\frac{2k\varepsilon}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{(t^2+1-2t\cos\theta)t^2+1+2t\cos\theta)}}.$$

Par hypothèse, l'angle θ reste positif. Dans ces conditions, le dénominateur ne s'annule jamais, et la seule difficulté est de savoir si l'intégrale reste bornée dans l'intervalle $(0, \infty)$. Or, la fonction à intégrer se comporte à partir d'une certaine valeur de t comme t^{-2}, ce qui prouve qu'elle est, en effet, bornée.

Cela nous permet d'affirmer que

$$|F(\zeta) - F_1(\zeta_1) - f(z_0)| < \varepsilon M \qquad (M \text{ borné}),$$

d'où l'on tire

$$\lim_{\eta \to 0}[F(z_0 + \eta) - F_1(z_0 - \eta)] = f(z_0). \tag{25}$$

Introduisons maintenant une condition supplémentaire relative à $f(z)$. Supposons qu'elle satifasse à une condition de Lipschitz généralisée [ou de Hölder (¹)]

$$|f(z) - f(z')| < A|z - z'|^{(\alpha)} \qquad (0 < \alpha \leqq 1).$$

Dans ces conditions, calculons également l'expression

$$\lim_{\eta \to 0}[F(z_0 + \eta) + F_1(z_0 - \eta)],$$

pour deux points symétriques par rapport à z_0 (²).

On aura aisément

$$F(\zeta) + F_1(\zeta_1) + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\nu)}{\nu - \zeta}\,d\omega + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\nu)}{\nu - \zeta_1}\,d\omega = \frac{1}{i\pi}\int_C \frac{f(z)(z - z_0)}{(z - \zeta)(z - \zeta_1)}\,dz.$$

Pour le calcul du second membre, décalons autour de z_0 un petit intervalle ab, tel que $\overline{az_0} = \overline{z_0 b}$; soit C_2 le reste du contour.

On peut écrire l'identité

$$\frac{1}{i\pi}\int_C \frac{f(z_0)(z - z_0)}{(z - \zeta)(z - \zeta_1)}\,dz \equiv f(z_0),$$

puis la retrancher de l'égalité ci-dessus.

(¹) *Voir* par exemple O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Chap. VI, p. 152 (Berlin, Julius Springer).

(²) Ces deux limites sont calculées dans le cas des fonctions holomorphes dans le livre de M. Émile Picard, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, p. 67.

Le terme

$$\left|\frac{1}{i\pi}\int\frac{[f(z)-f(z_0)][z-z_0]}{(z-\zeta)(z-\zeta_1)}dz\right|<\frac{AK}{\pi}\int_{ab}\frac{\sigma^{\alpha+1}\,d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+\delta^2-2\,\delta\sigma\cos\theta)(\sigma^2+\delta^2+2\,\delta\sigma\cos\theta)}}.$$

Or

$$\sigma^2+\delta^2-2\,\delta\sigma\cos\theta\equiv(\delta-\sigma\cos\theta)^2+\sigma^2\sin^2\theta\geqq\sigma^2\sin^2\theta,$$
$$\sigma^2+\delta^2-2\,\delta\sigma\cos\theta\equiv(\delta+\sigma\cos\theta)^2+\sigma^2\sin^2\theta\geqq\sigma^2\sin^2\theta.$$

Soit θ_0 le minimum *positif* de θ, l'intégrale considérée est majorée par

$$\frac{AK}{\pi\sin^2\theta_0}\int_{ab}\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma=\frac{AK}{\pi\sin^2\theta_0}\left[\frac{\sigma^\alpha}{\alpha}\right]_{ab}=\frac{2\,AK}{\pi\alpha\sin^2\theta_0}\rho^\alpha.$$

Quant à l'intégrale relative à C_2, sa limite pour $\eta=0$ est

$$\frac{1}{\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0};$$

cette limite existe, car à cause de la condition de Hölder, elle est majorée par

$$\frac{1}{\pi}\int A\,|z-z_0|^{\alpha-1}\,|dz|.$$

Le terme en question aura donc pour limite

$$f(z_0)+\frac{1}{\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{i\pi}\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-z_0}.$$

Dans le second membre l'intégrale est prise au sens de *valeur principale de Cauchy*.

Les termes relatifs aux intégrales doubles tendent vers des valeurs précises.

On a donc

$$(26)\qquad \lim_{\eta\succ 0}[F(z_0+\eta)-F_1(z_0-\eta)]=\frac{1}{i\pi}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{2}{\pi}\int\int_D\frac{\varphi(\nu)}{\nu-z_0}d\omega$$

ou bien

$$(26')\qquad \lim_{\eta\succ 0}[F(z_0+\eta)-F_1(z_0-\eta)]$$
$$=f(z_0)+\frac{1}{i\pi}\int_C\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz-\frac{2}{\pi}\int\int_D\frac{\varphi(\nu)}{\nu-z_0}d\omega.$$

Des relations (25) *et* (26) *ou* (26′), *on peut tirer les valeurs vers lesquelles tendent les fonctions représentées par* (23) *lorsque* ζ *et* ζ_1 *s'approchent du contour, si bien entendu* $f(z)$ *satisfait à la condition de Hölder ci-dessus.*

On aura

$$\lim_{\eta \to 0} F(z_0 + \eta) = f(z_0) + \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z_0}\, d\omega,$$

$$\lim_{\eta \to 0} F_1(z_0 - \eta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z_0}\, d\omega.$$

Supposons en particulier que la fonction $F_1(z)$ *soit identiquement nulle.*

La relation (25) devient

$$\lim_{r \to 0} F(z_0 + \eta) = f(z_0);$$

c'est une condition *suffisante* pour que la fonction continue $f(z)$ puisse représenter les valeurs limites d'une fonction holomorphe (α) sur le contour C.

Démontrons que c'est en même temps une condition *nécessaire*. A cet effet, transformons par une représentation conforme la courbe C en un cercle unité γ. Considérons le cercle γ_r de rayon $r < 1$ et de centre O et remarquons qu'il a comme image dans le plan z une courbe C_r, intérieure à C et analytique.

Si $z = \varphi(t)$ est la fonction analytique qui réalise cette transformation conforme, l'équation de C_r sera $z_r = \varphi(rt)$ avec $|t| = 1$.

Soit $t = \psi(z)$ la fonction inverse de la fonction $\varphi(t)$. On aura aussi

$$z_r = \varphi[r\psi(z)] = z_r(z).$$

Puisque $F(\zeta)$ tend vers $f(z)$, on peut à tout ε donné faire correspondre un nombre r tel que l'on ait le long de C_r

$$|F[z_r(z)] - f(z)| < \varepsilon' \qquad \text{ou bien} \qquad \left| \frac{F[z_r(z)]}{z_r(z) - \zeta_1} - \frac{f(z)}{z - \zeta_1} \right| < \varepsilon,$$

car le point ζ_1 est extérieur à C.

Or, le contour C_r étant intérieur à C, la fonction $F(\zeta)$ est holomorphe (α) le long de cette courbe et par conséquent la différence

$$\Delta = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_C \frac{f(z)}{z - \zeta_1}\, dz - \int_{C_r} \frac{F(z_r)}{z_r - \zeta_1}\, dz_r\right] - \frac{1}{\pi}\left[\iint_D \frac{\varphi(v)}{v - \zeta_1}\, d\omega - \iint_{D_r} \frac{\varphi(v)}{v - \zeta_1}\, d\omega\right]$$

se réduit aux termes relatifs à C.

On peut écrire en même temps

$$\left|\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta_1}dz - \int_{C_r}\frac{F(z_r)}{z_r-\zeta_1}dz\right| = \left|\int_C\left[\frac{f(z)}{z-\zeta_1} - \frac{F[z_r(z)]}{z_r(z)-\zeta_1}\right]dz\right|$$

$$+\left|\int_C \frac{F[z_r(z)]}{z_r(z)-\zeta_1}[dz - dz_r(z)]\right|$$

$$< \varepsilon l + M\int_C |dz - dz_r(z)| < \varepsilon l + \varepsilon M,$$

M étant une borne de $\frac{F(z_r)}{z_r - \zeta_1}$.

En même temps,

$$\left|\iint_D \frac{\varphi(v)}{v-\zeta_1}d\omega - \iint_{D_r}\frac{\varphi(v)}{v-\zeta_1}d\omega\right| = \left|\iint_{D-D_r}\frac{\varphi(v)}{v-\zeta_1}d\omega\right| < \varepsilon,$$

par le choix convenable du contour C_r, car il s'agit d'une intégrale qui représente une fonction absolument continue.

Par conséquent,

$$|\Delta| < \varepsilon(l + M + 1).$$

Or, la quantité Δ est une constante qui ne dépend pas de ε, donc elle est identiquement nulle, ce qui montre que si $F(\zeta)$ tend vers $f(z)$ en chaque point de C, la fonction $F_1(\zeta_1)$ est identiquement nulle.

Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une fonction continue $f(z)$ représente les valeurs d'une fonction holomorphe (α), *dont la dérivée aréolaire est* $\varphi(\zeta)$, *sur un contour rectifiable fermé* C, *limitant un domaine* D, *est*

$$(27) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta_1}dz - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(v)}{v-\zeta_1}d\omega \equiv 0$$

pour tout point ζ_1 *extérieur à* D.

Traduisons enfin cette condition à l'aide des relations suivantes en nombre infini

$$(28) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_C z^n f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_D v^n\varphi(v)\,d\omega = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En effet, décrivons un cercle (Γ) centré à l'origine et de rayon suffisamment grand pour que D y soit contenu tout entier. Cela est toujours possible, car le point à l'infini a été supposé dans le domaine complémentaire.

Dans la région extérieure à (Γ) on peut écrire, puisque $|z| < |\zeta_1|$,

$$\frac{1}{z-\zeta_1} = -\frac{1}{\zeta_1} - \frac{z}{\zeta_1^2} - \ldots - \frac{z^{n-1}}{\zeta_1^n} - \ldots.$$

La fonction $F_1(\zeta_1)$ étant holomorphe à l'extérieur de (Γ) et, de plus, identiquement nulle d'après (27), on peut en annuler les coefficients dans le développement, suivant les puissances de $\frac{1}{\zeta}$. On trouve ainsi les relations (28), valables seulement dans cette région.

Mais à cause de l'analyticité de la fonction $F_1(\zeta_1)$, si elle est nulle dans une région d'aire finie, elle le sera dans tout son domaine d'existence, ce qui rend les relations (28) valables dans tout le plan extérieur à D.

Les fonctions holomorphes conduisent aux relations [1]

$$\int_C z^n f(z)\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Une autre forme de la condition (27) peut être déduite immédiatement si $f(z)$ satisfait à une condition de Hölder. On n'a qu'à comparer les relations (25) et (26), ou écrire que

$$\lim F_1(z_0 - \eta) = 0.$$

On en déduit l'équation intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(\nu)}{\nu - z_0}\,d\omega = 0$$

ou bien

$$\frac{f(z_0)}{2} - \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(\nu)}{\nu - z_0}\,d\omega = 0,$$

où l'intégrale de contour est prise au sens de *valeur principale*.

L'étude que nous avons faite met en évidence une sorte d'opération nouvelle qui nous conduit à une fonction holomorphe (α) lorsqu'on en connaît la dérivée aréolaire.

Si l'on remarque que la plus générale fonction holomorphe (α) dont la

---

(1) Ce résultat a été trouvé par M. Walsh, sa méthode étant d'ailleurs différente de celle que nous avons donnée et introduisant une restriction supplémentaire consistant en une condition de Lypschitz [Voir *Sur les valeurs limites d'une fonction analytique*. (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, p. 58)].

dérivée aréolaire est $\varphi(\zeta)$, est donnée par l'expression

$$f(\zeta) = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(\nu)}{\nu - \zeta}\, d\omega, \tag{29}$$

on peut considérer cette opération comme la recherche d'une primitive, la fonction holomorphe $h(\zeta)$ jouant le rôle de la constante arbitraire dans le calcul infinitésimal ordinaire.

L'intégrale définie a pour analogue la formule (23), mais il faut toutefois remarquer que la restriction de prendre une suite continue de valeurs le long de C peut conduire à un problème impossible.

Dans les applications pratiques, ce problème mérite une attention spéciale, car il a des interprétations physiques qui ne manquent pas d'intérêt.

4. Parmi les propriétés générales des fonctions holomorphes (α), signalons les deux théorèmes suivants, qui font la liaison entre ces fonctions et les fonctions holomorphes ordinaires d'une part, et d'autre part montrent la possibilité d'une extension nouvelle de la notion de dérivée aréolaire, qui fera l'objet du chapitre suivant :

Si une fonction continue $f(z)$ admet une fonction continue $\varphi(z)$ comme dérivée aréolaire en chaque point d'un domaine D, *sauf peut-être sur un ensemble dénombrable (sur lequel elles restent toutes les deux continues), cette fonction est holomorphe* (α) *dans le domaine* D *et sa dérivée est partout* $\varphi(z)$ [1].

Désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ les points de l'ensemble dénombrable considéré.

A chaque point ζ_n attachons le plus grand carré de centre ζ_n et tel qu'à tout ε donné, on puisse écrire

$$|f(\zeta) - f(z_n)| < \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad \text{et} \qquad |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_n)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

pour tout point ζ intérieur (ou du contour).

De plus, en chaque point où la fonction est monogène (α), on peut faire correspondre un carré δ, tel qu'on ait

$$\left| \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\, dz - \frac{1}{\pi}\int\int_\delta \varphi(\nu)\, d\omega \right| < \varepsilon \int\int_\delta d\omega$$

selon la définition de la dérivée aréolaire.

[1] Extension d'un théorème de M. D. Pompeiu (*voir* sa Thèse *Sur les singularités des fonctions analytiques*, Paris, 1905).

Les carrés considérés peuvent être ou bien intérieurs à D, ou bien écornés par le contour C.

On aura évidemment

$$f(\zeta_n)\int_{\gamma_n} dz = \int_{\gamma_n} f(\zeta_n)\,dz \equiv 0.$$

Donc

$$\left|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_n} [f(z) - f(\zeta_n)]\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2^n} 4 r_n,$$

r_n étant la longueur du côté du carré γ_n.

Ensuite,

$$\left|\iint_{\delta_n} [\varphi(v) - \varphi(\zeta_n)]\,d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{2^n}\alpha_n \qquad (\alpha_n = \text{aire du carré}),$$

d'où

$$\left|\iint_{\delta_n} \varphi(v)\,d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{2^n}\alpha_n + |\varphi(\zeta_n)|\,\alpha_n.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_{\delta_n} \varphi(v)\,d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{2^n\pi} 2 r_n + \frac{\varepsilon}{2^n\pi}\alpha_n + \frac{|\varphi(\zeta_n)|}{\pi}\alpha_n.$$

Évidemment un même carré peut contenir plusieurs de ces points même une infinité.

Si, dans la somme que nous allons effectuer, on considère dans le premier membre une seule fois les termes provenant d'un certain carré, tandis que dans le second on les compte tour à tour, l'inégalité sera plus accentuée.

Écrivons d'abord la contribution d'un carré écorné, relatif à un point ζ_n.

On aura

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_{d_n} \varphi(v)\,d\omega\right| < \frac{\varepsilon}{2^n\pi}\left(2 r_n + \frac{l_n}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2^n\pi}\alpha_n + |\varphi(\zeta_n)|\,\alpha_n.$$

Quant aux points de monogénéité (α), ils donnent

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_{\delta} \varphi(v)\,d\omega\right| < \varepsilon\alpha \qquad (\alpha = \text{aire de } \delta).$$

Faisons la somme pour tous les carrés, en supposant qu'on a partagé le domaine D en un nombre convenable de régions (carrés ou portions de carrés).

On obtient

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{D}\varphi(v)\,d\omega\right| < \frac{2r}{\pi}\varepsilon + \left(2r + \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon + \frac{\Omega}{\pi}\varepsilon + \frac{M}{\pi}\omega + \frac{r^2}{\pi}\varepsilon,$$

en désignant par :

r une limite supérieure des côtés des carrés,
λ la longueur du contour rectifiable C,
Ω l'aire du domaine D,
ω l'aire du domaine qui enferme l'ensemble dénombrable,
M une borne supérieure de la fonction $\varphi(z)$ dans D.

Or, le premier membre est une constante indépendante de ε et ω.

D'ailleurs celui-ci peut être rendu inférieur à ε, car un ensemble dénombrable est de mesure nulle.

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C} f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{D}\varphi(v)\,d\omega = 0$$

pour tout couple C, D; donc, en vertu d'un théorème souvent employé, $f(z)$ est holomorphe (α) et sa dérivée aréolaire est bien $\varphi(z)$.

Passons à un cas plus général, celui d'un ensemble de mesure superficielle nulle.

Supposons que $f(z)$, continue dans un domaine D, satisfasse, en plus, à une condition de Lipschitz, de la forme

$$|f(z') - f(z)| < M|z' - z|$$

en chaque point du domaine.

Dans ces conditions on peut énoncer le théorème suivant :

Si une fonction $f(z)$, continue et satisfaisant à une condition de Lipschitz, admet une fonction continue $\varphi(z)$ comme dérivée aréolaire en chaque point d'un domaine, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, elle est holomorphe (α), *et sa dérivée est partout égale à* $\varphi(z)$.

Attachons, comme précédemment, à chaque point de l'ensemble un carré, tel qu'on ait

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| < \varepsilon.$$

Faisons la division du domaine de telle sorte que chacun des points de l'ensemble soit intérieur à un carré. Le procédé de division peut être poussé autant que l'on veut, de manière que l'ensemble exceptionnel soit enfermé dans un nombre fini ou une infinité dénombrable de carrés d'aire totale $\omega < \varepsilon$.

On aura pour ces carrés

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\Gamma [f(z) - f(\zeta_0)]\,dz\right| < 8r^2 M\sqrt{2}$$

ou, si le carré est écorné,

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| < 2(4r + l)Mr\sqrt{2},$$

étant l'arc qui le traverse.

En même temps,

$$\left|\int\int_\Delta \varphi(v)\,d\omega\right| < \varepsilon\alpha + |\varphi(\zeta_0)|\alpha$$

Donc

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_\Delta \varphi(v)\,d\omega\right| < \frac{4r^2 M\sqrt{2}}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi}\alpha + \frac{|\varphi(\zeta_0)|}{\pi}\alpha$$

ou, pour un carré écorné,

$$< \frac{(4r + l)rM\sqrt{2}}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi}\alpha + \frac{|\varphi(\zeta_0)|}{\pi}\alpha.$$

En tenant compte de tous les carrés, attachés soit aux points réguliers, soit aux points de l'ensemble de mesure nulle exceptionnel, on aura

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi(v)\,d\omega\right| < \frac{\Omega}{\pi}\varepsilon + \frac{4M\sqrt{2}}{\pi}\omega + \frac{M\lambda\sqrt{2}}{\pi}\rho + \frac{(\varepsilon + N)}{\pi}\omega;$$

où :

Ω est l'aire de D;
ω, l'aire de la suite d'intervalles enfermant l'ensemble;
ρ, la borne supérieure des côtés des carrés;
λ, la longueur totale des arcs qui traversent les carrés;
N, la borne supérieure de $|\varphi(\zeta_0)|$.

De cette inégalité, où le premier membre est constant, tandis que le second peut être rendu aussi petit que l'on veut, on déduit

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi(v)\,d\omega = 0,$$

qui prouve le résultat énoncé.

Donnons, pour terminer, un autre théorème, se rattachant aux *séries uniformément convergentes de fonctions holomorphes* (α).

Si une série de fonctions holomorphes (α) *est uniformément convergente dans une région du plan, la série des dérivées aréolaires est aussi convergente uniformément et la somme de la série est une fonction holomorphe* (α), *dont la dérivée aréolaire est la somme de la série des dérivées.*

Soit, en effet, la série

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

et soient $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\ldots$, $\varphi_n(z)$, $\ldots$ les dérivées aréolaires des termes successifs.

On aura, d'après la définition de la fonction holomorphe (α),

$$\left| \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_n(z)\,dz - \frac{\varphi_n(z_0)}{\pi}\int\!\!\int_\delta d\omega \right| < \frac{\varepsilon}{2^n\pi}\int\!\!\int_\delta d\omega,$$

si l'on choisit un cercle δ assez petit pour tout point du domaine considéré.

On en tire

$$\frac{\varphi_n(z_0)}{\pi}\int\!\!\int_\delta d\omega = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_n(z)\,dz + \frac{\varepsilon_n}{2^n\pi}\int\!\!\int_\delta d\omega \qquad (|\varepsilon_n| < \varepsilon).$$

Mais la convergence uniforme permet de trouver un entier N, tel que

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| < \frac{\eta}{\pi}\int\!\!\int_\delta d\omega,$$

η étant arbitraire.

Donc,

$$\frac{1}{\pi}\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n(z_0) \right| \int\!\!\int_\delta d\omega < \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| |dz| + \frac{\varepsilon}{2^N\pi}\int\!\!\int_\delta d\omega$$

conduit à

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2^N} + \frac{\eta l}{2} < \varepsilon',$$

l étant la longueur du cercle.

Mais ε et η sont bien indépendants du point z_0 considéré, ce qui montre que la série des dérivées aréolaires est uniformément convergente aussi.

Notons par $F(z)$ et $\Phi(z)$ les sommes des deux séries. Calculons

$$A = \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \Phi(v)\,d\omega.$$

On aura, en vertu de la convergence uniforme,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_C f_n(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi_n(v)\,d\omega\right] \equiv 0;$$

dans ces conditions, il est manifeste que $F(z)$ est holomorphe (α) et que sa dérivée aréolaire est $\Phi(z)$.

Ce théorème nous permettra l'extension des règles de dérivation à bien des fonctions usuelles.

Soit, par exemple, à calculer la dérivée aréolaire d'un quotient de fonctions holomorphes (α).

Montrons d'abord que l'inverse d'une fonction holomorphe (α) a pour dérivée

$$\frac{D}{D\omega}\left[\frac{1}{f}\right] = -\frac{1}{f^2}\frac{Df}{D\omega}$$

en tout point où $f \neq 0$.

En effet, soit M une borne supérieure de f dans une petite région autour d'un point où elle est bornée. On aura

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{M-(M-f)} = \frac{1}{M}\,\frac{1}{1-\dfrac{M-f}{M}} = \frac{1}{M}\left[1 + \frac{M-f}{M} + \frac{(M-f)^2}{M^2} + \ldots\right].$$

Cette série étant uniformément convergente, et chaque terme étant holomorphe (α) dans la petite région considérée, on aura, en dérivant terme à terme [1],

$$\frac{D}{D\omega}\left[\frac{1}{f}\right] = \frac{1}{M^2}\left[-1 + 2\frac{M-f}{M} + \ldots\right]\frac{Df}{D\omega} = -\frac{1}{f^2}\frac{Df}{D\omega}.$$

On en déduit

$$\frac{D}{D\omega}\left[\frac{f_1}{f_2}\right] = \frac{D}{D\omega}\left[f_1\frac{1}{f_2}\right] = \frac{1}{f_2^2}\left[\frac{Df_1}{D\omega}f_2 - \frac{Df_2}{D\omega}f_1\right]$$

en tout point où le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ est borné.

---

[1] Nous allons démontrer dans le chapitre suivant que la règle de dérivation d'un produit est encore valable pour la dérivation aréolaire.

Il n'est pas difficile de voir qu'on aura aussi

$$\frac{D}{D\omega}[f]^m = m[f]^{m-1}\frac{Df}{D\omega},$$
$$\frac{D}{D\omega}e^f \quad = e^f\frac{Df}{D\omega},$$
$$\frac{D}{D\omega}\log f = \frac{1}{f}\frac{Df}{D\omega}.$$

CHAPITRE III.

LA DÉRIVÉE ARÉOLAIRE.

1. C'est par la considération de fonctions d'ensemble qu'on est arrivé à la notion d'intégrale généralisée ainsi qu'à la dérivée au sens large.

Il n'est pas difficile d'étendre quelques définitions du domaine des fonctions réelles à celui des fonctions complexes afin de pouvoir introduire ces extensions dans le calcul qui nous occupe.

Étant donné un ensemble E borné et mesurable, variable dans le plan, la fonction $F(E)$ aura pour expression $P(E) + iQ(E)$, où P et Q sont deux fonctions réelles de cet ensemble.

Nous nous bornerons à appliquer quelques théorèmes sur ces fonctions au cas où E est un domaine borné et quarrable limité par un contour rectifiable.

Une fonction $F(E)$ est *additive* si sa valeur sur un ensemble, somme finie ou infinie d'ensembles sans points communs deux à deux, et contenus dans un domaine borné, est la somme de ses valeurs sur chaque partie.

Une fonction $F(E)$ est *continue* dans un domaine D (ou sur un ensemble E) si, à tout nombre positif ε donné, on peut associer un nombre positif η, tel que δ désignant le diamètre de $e < E$, on ait

$$|F(e)| < \varepsilon \qquad \text{si } \delta < \eta.$$

Elle est *absolument continue* si, pour tout ε donné, on peut déterminer un η tel que

$$|F(e)| < \varepsilon \qquad \text{pour } (\text{mes } e) < \eta.$$

Une fonction $F(e)$, définie sur un ensemble E, peut être considérée comme définie dans tout l'espace si on la considère égale à F sur l'ensemble E et nulle sur son complémentaire.

Soit ω un domaine carré, centré au point z_0 du plan z.

Considérons le rapport

$$\frac{F(\omega)}{\operatorname{mes} \omega}$$

qui peut avoir une ou plusieurs limites lorsque la mesure de ω tend vers zéro.

Lorsque ces limites existent, on dira que $F(e)$ admet des *dérivées symétriques* [1] au point z_0.

Nous appellerons *la plus grande limite* de ce rapport celle dont le module est la plus grande limite des modules des limites.

S'il y en a plusieurs, on choisira entre elles celle qui correspond à la plus grande limite des arguments (à un multiple de 2π près).

La plus petite limite sera définie de la même manière.

Nous appellerons *dérivée symétrique supérieure* ou *inférieure* de $F(E)$ au point z_0 les plus grande ou plus petite des limites du rapport ci-dessus, quand la mesure de ω tend vers zéro.

Bien que ces définitions des dérivées soient commodes, elles ne sont pas satisfaisantes au point de vue de la généralité.

Considérons, avec M. Lebesgue [2], au lieu d'une famille de carrés, une famille d'ensembles quelconques e, de mesure de plus en plus petite, à condition que cette famille soit régulière.

On dit qu'une famille d'ensembles e est *régulière* au point z_0 si elle contient des ensembles de mesure infiniment petite, et si l'on a la relation

$$\frac{\operatorname{mes} \omega}{\operatorname{mes} e} < k,$$

où k est un nombre positif fixe et ω le plus petit carré qui contient e.

Les dérivées supérieure et inférieure d'une fonction $F(E)$ au point z_0 seront les plus grande et plus petite limites du rapport

$$\frac{F(e)}{\operatorname{mes} e}, \tag{30}$$

lorsque la mesure de e, contenu dans E et appartenant à une famille régulière, tend vers zéro.

---

(1) *Voir* Ch. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, etc.*, p. 59 et suiv.

(2) Henri Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 191 et suiv.

Il est évident, qu'en général, les dérivées ainsi obtenues dépendront de la famille employée.

Or, cela n'a d'importance que sur un ensemble de mesure nulle.

Aux autres points il y aura une dérivée unique, quelle que soit la définition employée.

Le problème qui se pose naturellement c'est de savoir dans quelles conditions une fonction F(E) admet une dérivée (ou des dérivées) en un point donné.

Il est évident qu'il est nécessaire que F(E) soit continue sur la famille e choisie, mais cela ne suffit pas pour assurer l'existence de la limite.

Aussi l'attention se dirige-t-elle vers des classes de fonctions continues de plus en plus larges pour lesquelles on peut affirmer que le problème est possible.

Nous considérerons, dans ce qui suit, des fonctions *additives et absolument continues*, qui se confondent, on le sait, avec la classe des intégrales (au sens de Lebesgue).

Soit d'abord $f(P)$ une fonction univoque, définie dans tout le plan et sommable sur tout ensemble E borné.

La fonction

$$F(E) = \int_E f(P)\, dP$$

a pour dérivée $f(P)$ presque partout. Les points exceptionnels où la dérivée n'est pas unique, ou n'existe pas, forment un ensemble de mesure nulle indépendant de la définition particulière qu'on ait adoptée pour la dérivée.

Le théorème réciproque qui mérite une importance particulière s'énonce comme suit ([1]) :

Une fonction d'ensemble additive et absolument continue a ses dérivées finies presque partout et sommables sur tout ensemble mesurable et borné; elle est l'intégrale indéfinie de chacune d'elle, c'est-à-dire

$$F(E) = \int_E (DF)\, dP_1. \tag{31}$$

Les démonstrations de ces propriétés ne sont pas différentes de leurs analogues dans le domaine réel. Nous nous contentons de les rappeler pour pouvoir passer à une classe spéciale de fonctions d'intervalle.

([1]) Ch. de la Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 72 et 73.

2. Soit $f(z)$ une fonction continue du point z, dans un domaine borné Δ. Soit δ un carré intérieur ou bien un domaine somme finie ou infinie de carrés sans point commun deux à deux (pouvant être toutefois contigus).

La fonction

$$F(\delta) = \frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)\,dz, \tag{32}$$

où γ est le contour de δ, peut avoir un sens même si γ est de longueur infinie.

Supposons qu'il en soit ainsi. Dans ce cas, elle est une *fonction additive de* δ, car il est bien évident que lorsque les carrés ont des côtés communs, les intégrales le long de ces lignes intérieures se détruisent deux à deux.

Supposons en plus, que pour une certaine classe de fonctions continues, $F(\delta)$ *soit une fonction absolument continue de* δ.

Occupons-nous exclusivement de ces fonctions.

Considérons le rapport

$$\frac{\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\int_\delta d\omega} = \frac{F(\delta)}{\operatorname{mes}\delta} \tag{33}$$

que nous avons déjà employé dans la définition de la dérivée aréolaire.

Soit δ un carré de centre z_0, appartenant au domaine Δ. Lorsque la mesure de δ tend vers zéro le rapport (33), où la fonction $F(\delta)$ est absolument continue, tendra vers les dérivées symétriques de F au point z_0.

D'après les théorèmes rappelés ci-dessus, ces dérivées existeront presque partout, étant sommables sur tout ensemble intérieur à Δ.

Désignons par $\varphi(z)$ une d'entre elles, obtenue à l'aide d'une certaine famille de carrés.

On aura, d'après la relation (31),

$$F(\delta) = \int_\delta \varphi(P)\,dP.$$

Or, $\varphi(P)$ n'est autre chose que la dérivée aréolaire de la fonction $f(P)$. Cela nous permet d'établir le théorème suivant :

Si, pour une fonction continue $f(z)$, l'expression

$$\int_\gamma f(z)\,dz,$$

où γ est le contour d'un domaine δ formé d'une somme finie ou infinie de carrés intérieurs à une région donnée Δ, est une fonction absolument continue de δ, la fonction de point $f(z)$ admet des dérivées aréolaires symétriques, finies presque partout et sommables sur tout ensemble $E < \Delta$.

La dérivée est unique, sauf sur un ensemble de mesure nulle.

On a, en plus, la relation

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_\delta \varphi(v)\,d\omega = 0, \tag{34}$$

la première intégrale étant prise au sens ordinaire, la seconde représentant une intégrale de Lebesgue.

Considérons un domaine quarrable D, limité par une courbe simple rectifiable C.

Traçons un carrelage de côté r qui couvre le plan des z.

On peut déterminer un domaine D′, formé de carrés, intérieur à D et aussi voisin de celui-ci que l'on voudra.

Soit C le contour polygonal qui le limite.

On aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{D'}\varphi(P)\,dP = 0.$$

Or, on peut choisir C′ suffisamment voisin de C pour que

$$\int_C |dz - d\zeta(z)| < \varepsilon.$$

En effet, considérons un des triangles rectangles qui s'appuient sur C. Si r a été choisi assez petit, dz peut être assimilé au vecteur représenté par l'hypoténuse de ce triangle; ou mieux, on aura

$$dz = (1+\rho)\,d\zeta,$$

$|\rho| < \varepsilon'$, $d\zeta$ signifiant la somme des vecteurs représentés par les deux côtés de l'angle droit.

Dans ces conditions

$$\int_C |dz - d\zeta(z)| < \int_C |\rho(z)|\,|d\zeta(z)| < \varepsilon'\int_{C'} ds < 2\varepsilon' l,$$

car la longueur du contour C′ est inférieure à $2l$, comme il est facile de le voir en examinant tour à tour les triangles successifs. Cela étant, on aura

$$D = \left| \int_C f(z)\,dz - \int_{C'} f(\zeta)\,d\zeta \right| < \int_C |f(z) - f(\zeta)|\,|dz| + \int_C |f(\zeta)|\,|dz - d\zeta(z)|.$$

Mais on peut considérer

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$$

en chaque point de C dès que r est assez petit.

Donc

$$D < \varepsilon \int_C ds + M \int_C |dz - d\zeta(z)| < l(\varepsilon + 2M\varepsilon').$$

En même temps, la fonction $\varphi(P)$ étant sommable,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_D \varphi(P)\,dP - \frac{1}{\pi} \int_{D'} \varphi(P)\,dP \right| = \frac{1}{\pi} \int_{D-D'} \varphi(P)\,dP < \varepsilon'',$$

car une intégrale est fonction absolument continue de domaine. On en tire l'inégalité

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi} \int_D \varphi(P)\,dP \right| < l(\varepsilon + 2M\varepsilon') + \varepsilon'',$$

d'où, puisque le premier membre est une constante,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi} \int\int_D \varphi(\nu)\,d\omega = 0 \tag{35}$$

pour tout contour C rectifiable limitant un domaine quarrable D dans la région bornée Δ.

Cette relation fondamentale est l'extension des formules (5) et (20) dont nous avons fait un large usage.

Elle nous permettra de remplacer la dérivée symétrique par une dérivée obtenue à l'aide d'une famille régulière de domaines limités par des contours rectifiables.

On peut dire que les fonctions continues pour lesquelles l'intégrale

$$\int_C f(z)\,dz,$$

étendue au contour C d'un domaine somme finie ou infinie de domaines limités par des contours rectifiables, est une fonction absolument continue de ce domaine, sont *presque partout monogènes* (α).

En effet, elles admettent presque en chaque point une dérivée aréolaire unique et finie, sommable sur tout ensemble borné.

Remarquons que, pour cela, il suffit que la même intégrale, étendue à un domaine somme de carrés, soit absolument continue.

En outre si, par un moyen quelconque, on a démontré qu'une fonction $f(z)$ est presque partout monogène (α) pour une certaine famille régulière, elle le sera pour n'importe quelle autre famille, les dérivées obtenues ne différant que sur un ensemble de mesure nulle.

Complétons ces résultats par un théorème réciproque :

Si deux fonctions $f(z)$ *: finie et continue dans une région bornée* Δ *et* $\varphi(z)$ *sommable sur tout ensemble mesurable* $E < \Delta$, *satisfont à la relation*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi(v)\,d\omega = 0$$

pour tout contour C *rectifiable et fermé, limitant un domaine quarrable* $D < \Delta$, $f(z)$ *est presque partout monogène* (α) *dans* Δ, *sa dérivée aréolaire ne différant de* $\varphi(v)$ *que sur un ensemble de mesure nulle.*

En effet, posons

$$F(D) = \frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz, \qquad F_1(D) = \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi(v)\,d\omega,$$

$F_1(D)$ étant une intégrale, est absolument continue et par conséquent admet presque partout la fonction $\varphi(P)$ comme dérivée au sens de Lebesgue. Mais on a partout

$$F(D) \equiv F_1(D).$$

Donc ces deux fonctions auront leurs dérivées égales presque partout.

Remarquons, cependant, que la dérivée de $F(D)$ est précisément la dérivée aréolaire de $f(z)$.

Le théorème est par cela démontré et il est bon de remarquer une fois de plus qu'*il généralise le théorème classique de Morera.*

Citons parmi les fonctions presque partout monogènes (α) *les fonctions à variation bornée en* x *et* y, *dont les nombres dérivés sont finis.*

Si les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont à variation bornée par rapport à x, pour toute valeur de y et réciproquement, et si en plus elles ont des nombres dérivés finis dans le domaine Δ, M. Montel (1) a montré d'une

(1) P. Montel, *Thèse*, 1907, p. 59, ou *C. R. Acad. Sc.*, t. 156, 1913, p. 1822.

part, que les dérivées existent presque partout et, d'autre part, que la formule de Green y est encore applicable.

Par conséquent on pourra écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C (P + iQ)(dx + i\,dy) = \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{1}{2}[(\Lambda_x P - \Lambda_y Q) + i(\Lambda_x Q + \Lambda_y P)]\,dx\,dy$$

pour tout contour C rectifiable limitant un domaine D, intérieur à Δ.

En y appliquant le théorème de Morera généralisé, qu'on a établi ci-dessus, on voit que $f(z)$ admet comme dérivée aréolaire presque partout la fonction

$$\frac{1}{2}[(\Lambda_x P - \Lambda_y Q) + i(\Lambda_x Q + \Lambda_y P)], \tag{36}$$

où le symbole Λ désigne le nombre dérivé.

On peut dire que la dérivée est aussi égale presque partout à

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right].$$

On ne peut pas affirmer pourtant que la classe des fonctions qui admettent des dérivées aréolaires doit être assujettie à des restrictions de ce genre, mais quoiqu'elle puisse comprendre aussi des fonctions discontinues, *la continuité seule de $f(z)$ ne saurait être suffisante pour assurer la continuité absolue de l'intégrale*

$$\int_C f(z)\,dz.$$

Or cette continuité absolue s'impose d'elle-même dans la plupart des questions regardant la dérivée aréolaire.

C'est sur cette propriété qu'est basée l'existence de la formule de Green généralisée (35), qui est fondamentale dans ces recherches.

Les fonctions $f(z)$ pour lesquelles la dérivée existerait sans que cette relation existe, seraient les analogues des fonctions d'une variable réelle dérivables, mais qui ne sont pas les primitives de leurs dérivées.

3. *L'exemple suivant, que nous devons à la bienveillance de M. Bouligand, montre d'une façon précise qu'on ne peut pas dire que pour toute fonction continue $f(z)$, l'expression*

$$\int_C f(z)\,dz$$

définit une fonction additive d'ensemble absolument continue.

En effet, il faudrait pouvoir dire que cette fonction d'ensemble est infiniment petite pour tout ensemble de mesure superficielle infiniment petite.

Pour démontrer qu'il n'en est rien, construisons sur les axes Ox et Oy un carré de côté égal à l'unité, que nous désignerons par OABB'.

Partageons le segment $\overline{OB}=1$, qui est sur Oy, en trois parties égales

$$OP = PQ = QB.$$

Soient P', Q' les points obtenus sur AB' par le même procédé.

Enlevons le segment central et répétons l'opération pour les deux segments extrêmes.

On obtient de cette manière l'ensemble triadique de Cantor et l'on considère les rectangles obtenus en joignant deux à deux les points correspondants sur OB et AB' par des parallèles à Ox.

Sur cet ensemble, considérons une répartition uniforme de masses, obtenue de la façon suivante :

La masse égale à l'unité est partagée entre les deux segments OP et QB, puis la masse $\frac{1}{2}$ est partagée entre les deux segments qu'on obtient sur OP par la deuxième opération, etc.

Soit $\varphi(y)$ la masse comprise entre l'origine et le point d'ordonnée y.

On aura

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \varphi\left(\frac{2}{3}\right), \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 1.$$

La fonction $\varphi(y)$ est continue et non décroissante.

Prenons $f(z) = \varphi(y)$ et pour contour l'ensemble des contours des rectangles obtenus par les divisions successives.

On a pour le premier stade de la division

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{OAP'PO} \varphi(y)\, dz + \int_{QQ'B'B} \varphi(y)\, dz \\ &= \varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{3}\right) + \varphi\left(\frac{2}{3}\right) - \varphi(1) + i\int_{AP'+Q'B'} \varphi(y)\, dy - i\int_{OP+QB} \varphi(y)\, dy, \end{aligned}$$

d'où

$$I_1 = -\varphi(1) = -1,$$

car les deux dernières intégrales se détruisent mutuellement. Au deuxième stade de subdivision, on verra pareillement que l'intégrale étendue à la somme des quatre rectangles obtenus est encore

$$I_2 = -\varphi(1) = -1,$$

et ainsi de suite.

Lorsque le nombre des subdivisions augmente indéfiniment, la somme des aires des rectangles non enlevés tend vers zéro. Cependant on a toujours

$$\int_{\text{cont tot}} f(z)\, dz = -\varphi(1) = -1.$$

Or, cela montre d'une façon évidente que pour $f(z)$ ainsi choisie, l'intégrale considérée n'est pas une fonction d'ensemble absolument continue.

On est loin pourtant de pouvoir affirmer que cette continuité absolue serait nécessaire pour assurer l'existence presque partout des dérivées aréolaires d'une fonction continue.

Le même exemple va le prouver, car *la fonction $\varphi(y)$ admet une dérivée aréolaire unique nulle en chaque point du carré de côté égal à l'unité, sauf sur les parallèles à l'axe Ox, passant par les points de l'ensemble de Cantor considéré.*

En effet, tout point de Oy compris entre 0 et 1, appartient ou bien à l'ensemble triadique ou bien à son complémentaire.

Un point η, qui n'appartient pas à l'ensemble, peut être enfermé en un des intervalles enlevés. Cela est évident et résulte du procédé de construction employé, en tenant compte toutefois que ces intervalles doivent être considérés comme ouverts.

Dans la bande rectangulaire ainsi obtenue, traçons autour d'un point ζ quelconque une famille régulière de courbes rectifiables qui se resserrent autour de ζ. Soit C_n un de ces contours. On aura

$$\int_{C_n} \varphi(y)(dx + i\, dy) = \varphi(\eta) \int_{C_n} dz = 0,$$

car $\varphi(y)$ est constant dans tout l'intervalle.

Dans ces conditions, le rapport (39) est nul pour toute famille régulière et la limite en est par conséquent égale à zéro.

La fonction $\varphi(y)$ ayant la dérivée aréolaire nulle presque partout, n'est pourtant pas holomorphe, ce qui est évident, mais doit être justifié par le fait même que le théorème de Morera n'y est pas applicable.

En effet, pour qu'une relation telle que (35) puisse exister entre $\varphi(y)$ et sa dérivée aréolaire, il faudrait que l'intégrale le long d'un contour soit absolument continue, ce qui n'est pas possible dans le cas qui nous occupe.

L'exemple ci-dessus montre que $f(z)$ peut bien avoir une dérivée aréolaire presque partout, même si l'intégrale n'est pas absolument continue.

L'exemple suivant, dû aussi à M. G. Bouligand, met en évidence un cas où la fonction n'a de dérivée en aucun point.

Prenons, en effet $f(z) = -iQ(x)$, en désignant par $Q(x)$ une fonction continue sans dérivée.

On aura

$$\int_C f(z)\,dz = -i\int_C Q(x)\,dx + \int_C Q(x)\,dy = \int_C Q(x)\,dy.$$

Prenons pour contours C une famille de carrés ayant tous pour sommet le point z_0.

Soit h la longueur du côté d'un de ces carrés

$$\int_C f(z)\,dz = [P(x_0+h) - Q(x_0)]h.$$

Pour obtenir, à l'aide de cette famille régulière, la dérivée aréolaire de $Q(x)$, on est amené à former le rapport

$$\frac{Q(x_0+h)-Q(x_0)}{h},$$

qui ne tend vers aucune limite.

Ces considérations précisent suffisamment la nature des difficultés qu'on a à rencontrer dans l'étude de l'opération de dérivation aréolaire.

4. Nous allons nous borner à *l'étude d'une classe particulière de fonctions presque partout monogènes* (α).

Supposons qu'il existe un nombre positif M, tel que pour tout domaine quarrable δ compris dans une région bornée, on ait la relation

$$(37)\qquad \left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz\right| < \frac{M}{\pi}\int\int_\delta d\omega$$

si δ appartient à une famille régulière.

Pour cette classe de fonctions, l'intégrale de contour est une fonction additive et absolument continue, car elle est majorée par l'intégrale relative à δ, multipliée par un facteur fini et déterminé.

Donc $f(z)$ admet une dérivée aréolaire sommable et unique presque partout.

De plus, *les dérivées des fonctions $f(z)$ qui satisfont à la relation* (36) *sont bornées partout.*

Cela résulte facilement de cette relation même en divisant dans les deux membres par l'aire de δ.

Cette classe particulière de fonctions monogènes (α) peut être étudiée absolument de la même manière que les fonctions holomorphes (α).

Montrons, d'abord, qu'il existe de telles fonctions.

En effet, les fonctions à nombres dérivés bornés satisfont à la condition (37).

On sait qu'une telle fonction satisfait à la condition de Lipschitz

$$|f(z') - f(z)| < \mathrm{M}\,|z' - z|$$

pour tout couple de points z et z' de la région.

On a l'identité

$$\int_\gamma f(z_0)\,dz = 0,$$

où z_0 est un point fixe intérieur à δ.

Donc

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma [f(z) - f(z_0)]\,dz\right| < \mathrm{M}\int_\gamma |z - z_0|\,|dz|.$$

Posons

$$z - z_0 = r\,e^{i\theta}, \qquad |dz| < ds = r\,d\theta.$$

Il en résulte que

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| < \mathrm{M}\int_\gamma r^2\,d\theta = \mathrm{M}\int\int_\delta d\omega.$$

Les fonctions à nombres dérivés bornés sont donc des fonctions à dérivées aréolaires bornées.

On peut, d'ailleurs, rattacher ce résultat à celui concernant les fonctions à variation bornée, dont les nombres dérivés sont finis, car on sait qu'une fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz est à variation bornée.

Cela nous permet de connaître l'expression même de la dérivée aréolaire (presque partout).

Elle est donnée par la formule (36).

Passons maintenant à *la recherche d'une formule donnant les valeurs d'une fonction continue $f(z)$, à dérivées aréolaires bornées, quand on connaît une de ses dérivées $\varphi(z)$ partout (ou presque partout) dans un domaine* D *et ses valeurs représentées par une fonction continue, le long du contour simple, fermé et rectifiable* C.

Les opérations nécessaires ne diffèrent pas de celles déjà employées dans le cas des fonctions holomorphes (α).

Considérons d'abord la fonction

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega, \tag{38}$$

qui est continue dans tout le plan, lorsque $\varphi(v)$ est bornée et intégrable Lebesgue ([1]). De plus, si ζ est extérieur à D, celle-ci est une fonction holomorphe régulière et nulle à l'infini.

Rappelons que pour tout couple C′, D′ il y a la relation

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} f(z)\, dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{D'} \varphi(v)\, d\omega = 0.$$

Les procédés du deuxième Chapitre (§ **2**), nous conduisent aisément (les opérations étant parfaitement licites, même dans ce cas général) à la formule

$$\boxed{f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz - \frac{1}{\pi}\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega.} \tag{39}$$

Il faut toutefois remarquer que la deuxième intégrale est prise au sens de Lebesgue, et que les valeurs de $f(z)$ sur C ne peuvent être données au hasard. Nous avons, d'ailleurs, précisé les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela soit possible.

5. Le calcul des dérivées aréolaires et son inverse, réalisé à l'aide de l'opération

$$-\frac{1}{\pi}\int\int_{D} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega,$$

se rattachent aux notions, les plus générales, de dérivée et intégrale, suivant les vues de MM. Lebesgue et de La Vallée Poussin.

Aussi, sommes-nous poussés par les analogies trouvées à les considérer comme des propriétés bien naturelles et utiles des fonctions de variable complexe.

D'ailleurs, les règles élémentaires du calcul infinitésimal s'y étendent sans difficulté.

La dérivée aréolaire d'une somme finie de fonctions à dérivées bornées est

---

([1]) D. Pompeiu, *Annaes da Aademia*, etc. (*loc. cit.*).

presque partout la somme des dérivées des termes, l'ensemble exceptionnel étant la somme des ensembles exceptionnels des termes.

Occupons-nous de la dérivée aréolaire d'un produit de fonctions à dérivées aréolaires bornées.

Montrons que si $f_1(\zeta)$ *et* $f_2(\zeta)$ *sont de telles fonctions, on a (presque partout)*

$$\frac{D}{D\omega}[f_1 f_2] = f_1 \frac{Df_2}{D\omega} + f_2 \frac{Df_1}{D\omega}, \tag{40}$$

l'ensemble exceptionnel, indépendant de la définition particulière des dérivées étant la somme $E_1 + E_2$ des ensembles attachés à f_1 et f_2.

Pour plus de généralité, prenons pour f_1 et f_2 deux fonctions de la forme

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F_1(z)}{z-\zeta}dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi_1(v)}{v-\zeta}d\omega,$$

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F_2(z)}{z-\zeta}dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}d\omega,$$

où $F_1(z)$ et $F_2(z)$ sont sommables le long de C, $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ bornées et intégrables dans le domaine D.

Traçons, comme nous avons déjà fait, un contour C′ limitant un domaine D′ et entourons-le de deux contours C″ et C‴. Soit δ le domaine compris entre C″ et C‴. On a

$$D = D'' + \delta + D'''.$$

Calculons l'expression

$$A = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} f_1(\zeta) f_2(\zeta)\, d\zeta.$$

On peut remplacer les valeurs de f_1 et f_2 dans cette expression parce que ζ est intérieur à C, ce qui donne

$$\begin{aligned} A = {} & \frac{1}{(2i\pi)^3}\int_{C'} d\zeta \int_C \frac{F_1(z)}{z-\zeta}dz \int_C \frac{F_2(z)}{z-\zeta}dz \\ & - \frac{1}{(2i\pi)^2\pi}\int_{C'} d\zeta \int_C \frac{F_1(z)}{z-\zeta}dz \int\int_D \frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}d\omega \\ & - \frac{1}{(2i\pi)^2\pi}\int_{C'} d\zeta \int_C \frac{F_2(z)}{z-\zeta}dz \int\int_D \frac{\varphi_1(v)}{v-\zeta}d\omega \\ & + \frac{1}{2i\pi^3}\int_{C'} d\zeta \int\int_D \frac{\varphi_1(v)}{v-\zeta}d\omega \int\int_D \frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}d\omega. \end{aligned}$$

Notons pour simplifier par $g_1(\zeta)$, $g_2(\zeta)$ les intégrales relatives à C et par $h_1(\zeta)$, $h_2(\zeta)$ celles relatives à D″.

Le premier terme

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'} g_1(\zeta)\, g_2(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

puisque ces deux fonctions sont holomorphes dans le domaine ouvert D et, par conséquent, sur C′ aussi.

Ensuite

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} g_1(\zeta)\, d\zeta \int\int_{D} \frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2i\pi^2}\int_{C} g_1(\zeta)\, d\zeta \int\int_{D''} + \frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} g_1(\zeta)\, d\zeta \int\int_{\delta} + \frac{1}{2i\pi^2}\int_{C''} g_1(\zeta)\, d\zeta \int\int_{D'''}. \end{aligned}$$

Or, on peut choisir C″ et C‴ de telle manière que le terme relatif à δ soit inférieur en module à tout ε donné.

Les deux autres donnent

$$\begin{aligned} B_1 = \frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} g_1(\zeta)\, d\zeta \int\int_{D''} \frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}\, d\omega &= \frac{1}{2i\pi^2}\int\int_{D''} \varphi_2(v)\, d\omega \int_{C'} \frac{g_1(\zeta)}{v-\zeta}\, d\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi}\int\int_{D''} \varphi_2(v) g_1(v)\, d\omega, \end{aligned}$$

à cause de l'holomorphisme de $g_1(\zeta)$ dans D′ et sur C′.

Mais

$$g_1(v) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C} \frac{F_1(z)}{z-v}\, dz = f_1(v) + \frac{1}{\pi}\int\int_{D} \frac{\varphi_1(t)}{t-v}\, d\omega.$$

En remplaçant $g_1(v)$ par cette valeur dans l'expression ci-dessus, on aura

$$B_1 = -\frac{1}{\pi}\int\int_{D''} f_1(v)\, \varphi_2(v)\, d\omega - \frac{1}{\pi^2}\int\int_{D''} \varphi_2(v)\, d\omega \int\int_{D} \frac{\varphi_1(t)}{t-v}\, d\omega.$$

Quant au terme concernant D‴, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} g_1(\zeta)\, d\zeta \int\int_{D'''} \frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}\, d\omega = -\frac{1}{2i\pi^2}\int\int_{D''} \varphi_2(v)\, d\omega \int_{C'} \frac{g_1(\zeta)}{\zeta - v}\, d\zeta = 0,$$

car v est maintenant extérieur à C′.

Donc

$$B = B_1 + \varepsilon' \qquad (\varepsilon' \text{ provenant de } \delta).$$

Le calcul du troisième terme de l'expression A conduira de la même manière au résultat suivant :

$$C_1 = -\frac{1}{\pi}\int\int_{D''} f_2(v)\varphi_1(v)\,d\omega - \frac{1}{\pi^2}\int\int_{D''}\varphi_1(t)\,d\omega\int\int_{D}\frac{\varphi_2(v)}{v-t}\,d\omega$$

et

$$C = C_1 + \varepsilon''.$$

En ajoutant ces deux résultats et en remarquant les termes qui se détruisent, on aura

$$B + C = -\frac{1}{\pi}\int\int_{D''}[f_1(v)\varphi_2(v) + f_2(v)\varphi_1(v)]\,d\omega - \frac{1}{\pi^2}\int\int_{D''}\varphi_2(v)\,d\omega\int\int_{D'''}\frac{\varphi_1(t)}{t-v}\,d\omega$$
$$-\frac{1}{\pi^2}\int\int_{D''}\varphi_1(t)\,d\omega\int\int_{D'''}\frac{\varphi_2(v)}{v-t}\,d\omega + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'''.$$

Il nous reste à calculer le dernier terme de A :

$$\frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} h_1(\zeta)\,d\zeta\int\int_{D'''}\frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}\,d\omega + \frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} h_2(\zeta)\,d\zeta\int\int_{D'''}\frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}\,d\omega$$
$$+\frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} h_1(\zeta)h_2(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} d\zeta\int\int_{D'''}\frac{\varphi_1(v)}{v-\zeta}\,d\omega\int\int_{D'''}\frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}\,d\omega + \varepsilon_1.$$

D'abord

$$\frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} h_1(\zeta)h_2(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2i\pi^2}\int\int_{D''}\varphi_1(v)\,d\omega\int\int_{D''}\varphi_2(v)\,d\omega\int_{C'}\frac{d\zeta}{(\zeta-v)(\zeta-t)} = 0$$

parce que v et t sont à la fois intérieurs à C'.

De même

$$\frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} d\zeta\int\int_{D'''}\frac{\varphi_1(v)}{v-\zeta}\,d\omega\int\int_{D'''}\frac{\varphi_2(t)}{t-\zeta}\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2i\pi^2}\int\int_{D'''}\varphi_1(v)\,d\omega\int\int_{D'''}\varphi_2(t)\,d\omega\int\int_{C'}\frac{d\zeta}{(\zeta-v)(\zeta-t)} = 0,$$

car v et t sont tous les deux extérieurs à C'.

Ensuite

$$\frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'} h_1(\zeta)\,d\zeta\int\int_{D'''}\frac{\varphi_2(v)}{v-\zeta}\,d\omega = \frac{1}{2i\pi^2}\int\int_{D''}\varphi_1(t)\,d\omega\int\int_{D'''}\varphi_2(v)\,d\omega\int_{C'}\frac{d\zeta}{(\zeta-v)(\zeta-t)}.$$

Mais

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'}\frac{d\zeta}{(\zeta-v)(\zeta-t)} = \frac{1}{2i\pi(v-t)}\int_{C'}\left[\frac{1}{\zeta-v} - \frac{1}{\zeta-t}\right]d\zeta = \frac{-1}{v-t},$$

puisque t est intérieur et v extérieur.

Ce dernier terme devient donc

$$\frac{1}{\pi^2}\int\int_{D''}\varphi_1(t)\cdot d\omega\int\int_{D'''}\frac{\varphi_2(\nu)}{t-\nu}.$$

De même, on aura

$$\frac{1}{2i\pi^2}\int_{C'}h_2(\zeta)\,d\zeta\int\int_{D'''}\frac{\varphi_1(t)}{t-\zeta}\,d\omega=\frac{1}{\pi^2}\int\int_{D''}\varphi_2(\nu)\,d\omega\int\int_{D'''}\frac{\varphi_1(t)}{\nu-t}\,d\omega.$$

Finalement, si l'on remarque les termes qui se détruisent et que l'on procède, comme dans les cas analogues déjà traités, on obtient l'identité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C'}f_1(\zeta)f_2(\zeta)\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\int_{D'}[f_1(\nu)\varphi_2(\nu)+\varphi_1(\nu)f_2(\nu)]\,d\omega=0$$

pour tout contour fermé, rectifiable C'.

Or, cela signifie qu'on a presque partout dans le domaine D

$$\frac{D}{D\omega}[f_1f_2]=f_1\frac{Df_2}{D\omega}+f_2\frac{Df_1}{D\omega}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE IV.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES ARÉOLAIRES.

Dans cette deuxième Partie, nous allons étudier des applications des fonctions monogènes (α).

Il y a, en effet, des questions se rattachant à la Mécanique des fluides, à l'Élasticité, etc. qui, traitées à l'aide de ces fonctions, se présentent d'une manière naturelle à l'esprit, les problèmes d'intégration qui s'y rattachent devenant notablement plus simples.

L'instrument de recherche, dont nous allons faire un large usage, sera l'opération inverse de la dérivée aréolaire.

1. On sait que la fonction $g(\zeta)$ définie à l'aide de l'opération

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{D}\frac{\varphi(\nu)}{\nu-\zeta}\,d\omega,$$

où $\varphi(\nu)$ est bornée et intégrable dans le domaine D, est continue dans tout le plan.

A l'extérieur de D, elle est, de plus, holomorphe (α), étant régulière et nulle à l'infini.

Il n'est pas inutile d'en donner un exemple. Considérons, à cet effet, le cercle unité, et une suite de couronnes circulaires définies à l'aide d'une suite de rayons

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots.$$

La fonction $\varphi(\zeta)$ sera égale à $\frac{1}{2^k}$, dans le domaine D_k compris entre les cercles de rayons respectivement $\frac{1}{2^{k-1}}$ et $\frac{1}{2^k}$.

On aura donc

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases} 1 & \text{dans } D_0, \\ \frac{1}{2^k} & \text{dans } D_k, \\ 0 & \text{à l'origine.} \end{cases}$$

Cette fonction est bien discontinue quand on traverse les cercles de la suite, mais elle est intégrable au sens de Riemann.

Supposons que le point ζ soit dans le domaine D_k. Calculons les intégrales relatives à un domaine d'indice inférieur ou supérieur. On aura pour $j \neq k$

$$\mathfrak{I}_j = -\frac{1}{\pi}\iint_{D_j} \frac{\frac{1}{2^j}}{v-\zeta}\,d\omega = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_j} \frac{\frac{1}{2^j}\bar{z}}{z-\zeta}\,dz$$

$\left(C_j\right.$ étant formé des deux cercles $\frac{1}{2^{j-1}}$ et $\left.\frac{1}{2^j}\right)$, car la dérivée aréolaire de $\frac{1}{2^j}\bar{\zeta}$ est bien $\frac{1}{2^j}$, et ζ est extérieur à D_j.

Posons $z = \rho e^{i\theta}$ et remarquons que

$$\frac{1}{z-\zeta} = -\frac{1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta^2} - \ldots \qquad \text{pour } |\zeta| > |z|, \text{ donc pour } j > k$$

et

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \ldots \qquad \text{pour } |\zeta| < |z|, \text{ donc pour } j < k.$$

Un calcul élémentaire donnera

$$\mathfrak{I}_j = \frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{2^{3j}} - \frac{1}{2^{3j+2}}\right] \qquad \text{pour } j > k$$

et

$$\mathfrak{I}_j = 0 \qquad \text{pour } j < k.$$

Enfin pour D_k, on obtient

$$\mathfrak{I}_k = -\frac{1}{\pi}\iint_{D_k} \frac{\frac{1}{2^k}}{v-\zeta}\,d\omega = \frac{1}{2^k}\bar{\zeta} - \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} \frac{\frac{1}{2^k}\bar{z}}{z-\zeta}\,dz.$$

car on n'a qu'à appliquer la formule fondamentale à la fonction holomorphe (α), $\frac{1}{2^k}\bar{\zeta}$, pour déduire ce résultat. Le calcul de l'intégrale relative à C_k conduit aisément à $-\frac{1}{2^{3k+2}}\cdot\frac{1}{\zeta}\cdot$ En ajoutant les contributions de la suite des domaines D_0, D_1, ..., D_k, ... et en remarquant qu'on a affaire à une progression géométrique, on obtient pour $g(\zeta)$ l'expression

$$g_k(\zeta) = \frac{1}{2^k}\left(\bar{\zeta} - \frac{1}{2^{2k}.7}\cdot\frac{1}{\zeta}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \quad \text{pour } \frac{1}{2^{k+1}} \leqq |\zeta| \leqq \frac{1}{2^k}.$$

Lorsque ζ est extérieur au cercle unité, on a

$$g(\zeta) = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{\zeta}.$$

qui est une fonction holomorphe régulière et nulle à l'infini. Le long du cercle, $g(\zeta)$ se réduit à $\frac{6}{7}e^{-i\theta}$.

Dans l'exemple suivant, $\varphi(\zeta)$ *sera non bornée;* cela prouve que la restriction imposée à cette fonction de rester bornée n'est pas essentielle pour assurer la continuité de l'intégrale.

Prenons le même domaine, la même suite de cercles concentriques et définissons $\varphi(\zeta)$ égal à

$$\frac{1}{\sqrt{\rho - \frac{1}{2^k}}} \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{2^k} \leqq |\zeta| \leqq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{et} \quad \zeta = \rho e^{i\theta}.$$

Dans ces conditions, elle est infinie sur une infinité de cercles concentriques.

Supposons toujours ζ dans le domaine D_k compris entre $\frac{1}{2^k}$ et $\frac{1}{2^{k-1}}$ et calculons d'abord les contributions des intégrales I_j étendues aux domaines $D_j (j \neq k)$.

Supposons $j > k$ et notons $v = re^{i\varphi}$

$$I_j = -\frac{1}{\pi}\iint_{D_j} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(re^{i\varphi} - \rho e^{i\theta})\sqrt{r - \frac{1}{2^j}}} = -\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2^j}}^{\frac{1}{2^{j+1}}} \frac{r\,dr}{\sqrt{r - \frac{1}{2^j}}}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{re^{i\theta} - \rho e^{i\theta}}.$$

Considérons séparément l'intégrale

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{re^{i\varphi} - \rho e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{re^{-i\varphi}\,d\varphi}{r^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2} - \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{-i\theta}\,d\varphi}{r^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \theta) + \rho^2}.$$

On a dans D_j $|\zeta| \geqq |v|$, donc $\rho \geqq r$.

Considérons dans le cercle de rayon ρ, une fonction harmonique égale à $re^{-i\theta} = \xi + i\eta$.

Les valeurs sur ce cercle en seront

$$\rho e^{-i\varphi} = \frac{\rho}{r} r e^{-i\varphi};$$

on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{-i\varphi}\, d\varphi}{r^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2} = \frac{2\pi r}{\rho(\rho^2 - r^2)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2)\rho e^{-i\varphi}\, d\varphi}{r^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \theta) + \rho^2}$$
$$= \frac{2\pi r}{\rho(\rho^2 - r^2)} re^{-\theta}.$$

De même, la fonction harmonique égale à 1 dans le même cercle conduira à l'expression

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{-i\theta}\, d\varphi}{r^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \theta) + \rho^2}$$
$$= \frac{2\pi\rho e^{-i\theta}}{\rho^2 - r^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2)\, d\varphi}{r^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \theta) + \rho^2} = \frac{2\pi\rho e^{-i\theta}}{\rho^2 - r^2)}.$$

Il s'ensuit que

$$A = -\frac{2\pi}{\rho} e^{-i\theta}.$$

Dans ces conditions,

$$I_j = \frac{2}{\rho} e^{-i\theta} \int_{\frac{1}{2^j}}^{\frac{1}{2^{j-1}}} \frac{r\, dr}{\sqrt{r - \frac{1}{2^j}}} \frac{8\sqrt{2}}{\rho e^{i\theta}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{2}j}}.$$

Quant aux termes relatifs à $j < k$, on aura $I_j \equiv 0$.

Le calcul de I_k se fait de la même façon, en écrivant

$$I_k = -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2^k}}^{\rho} \frac{r\, dr}{\sqrt{r - \frac{1}{2^k}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{re^{i\varphi} - \rho e^{i\theta}} - \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{\frac{1}{2^{k-1}}} \frac{r\, dr}{\sqrt{r - \frac{1}{2^k}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{re^{i\varphi} - \rho e^{i\theta}},$$

car pour $\varphi = \theta$, $r = \rho$ peut donner un point singulier. D'ailleurs, la méthode que nous avons employée est basée sur la position relative de ζ.

On a aisément

$$I_k = \frac{4}{3\rho} e^{-i\theta} \left(\rho - \frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\rho + \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

En ajoutant les contributions de tous les domaines, on obtient pour $g(\zeta)$

l'expression

$$g_k(\zeta) = \frac{4}{3\zeta}\left[\left(\rho - \frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\rho + \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \frac{4}{(2\sqrt{2}-1)2^{\frac{3}{2}k}}\right]$$

pour

$$\frac{1}{2^k} \leqq |\zeta| \leqq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Lorsque ζ est extérieur, on a

$$g(\zeta) = \frac{16}{3(2\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{1}{\zeta},$$

qui est holomorphe et nulle à l'infini.

La continuité de la fonction, dans tout le plan, est évidente.

Dans certaines applications, il est nécessaire de connaître des propriétés plus particulières de la fonction $g(\zeta)$, par exemple, l*a possibilité de l'existence des dérivées partielles par rapport à* ξ *ou* η $(\zeta = \xi + i\eta)$, car en ce cas la dérivée aréolaire de cette fonction se réduit à la forme particulière (3), qui est particulièrement utile dans bien des problèmes d'intégration relatifs à des systèmes aux dérivées partielles.

2. Le problème auquel nous avons fait allusion dans le paragraphe précédent s'énonce d'une manière précise : *Dans quelles conditions la fonction* $g(\zeta)$ *définie par l'opération*

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega,$$

où $\varphi(v)$ *est continue dans le domaine fermé* D, *admet les dérivées partielles par rapport à* ξ *et* η $(\xi + i\eta = \zeta)$, *en chaque point du domaine ouvert* D ?

Considérons d'abord un cas particulier suffisamment général pour toutes les applications et très fréquent dans la Théorie du Potentiel.

S*upposons que la fonction* $\varphi(\zeta)$ *satisfasse à une condition de Hölder de la forme*

$$|\varphi(\zeta') - \varphi(\zeta)| < M\,|\zeta' - \zeta|^{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

pour chaque couple de points ζ, ζ' tels que $|\zeta - \zeta'| < c$, α, M et c étant des constantes positives, les mêmes pour tout le domaine D [1].

[1] Cette condition, généralisant celle de Lipschitz, est employée souvent dans la théorie du potentiel (*voir* à ce sujet le livre de M. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory* (*Berlin*, 1929).

Écrivons

$$\varphi(v) = [\varphi(v) - \varphi(\zeta)] + \varphi(\zeta)$$

et posons pour simplifier

$$\varphi(v) - \varphi(\zeta) = \psi(v).$$

La condition de Hölder deviendra

$$|\psi(v)| < M\rho^{\alpha}, \qquad \rho = |v - \zeta|.$$

Le problème peut être ramené à l'étude d'une intégrale où $\varphi(v) \equiv 1$, et à celle d'une intégrale où $\varphi(v)$ s'annule au point ζ, tout en satisfaisant à la condition imposée.

On aura aisément

$$g_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\zeta)}{v-\zeta}\,d\omega = \left[\bar{\zeta} - \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\bar{z}\,dz}{z-\zeta}\right]\varphi(\zeta),$$

d'où l'on peut tirer, tout de suite, les dérivées $\frac{\partial g_1}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial g_1}{\partial \eta}$. En particulier

$$\frac{\partial g_1}{\partial \xi} = \left[1 - \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\bar{z}\,dz}{(z-\zeta)^2}\right]\varphi(\zeta),$$

pour tout point ζ *intérieur*.

Or, on remarque sans peine que si l'on décrit autour du point ζ *un cercle* Γ *de rayon fini* et suffisamment petit pour qu'il soit compris dans D, on peut négliger dans toute étude concernant les dérivées de $g(\zeta)$ la contribution du domaine $D - \Delta$, car celle-ci admet les dérivées partielles continues.

Occupons-nous donc seulement de l'apport du domaine Δ.

Dans ces conditions, posons $z - \zeta = \rho e^{i\theta}$; on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\bar{z}\,dz}{(z-\zeta)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\bar{\zeta} + \rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}}\,d\theta = 0$$

et

$$\frac{\partial g_1}{\partial \xi} = \varphi(\zeta), \qquad \frac{\partial g_1}{\partial \eta} = -i\varphi(\zeta).$$

Considérons maintenant la fonction

$$g_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_\Delta \frac{\psi(v)}{v-\zeta}\,d\omega.$$

On aura donc

$$g(\zeta) = g_0(\zeta) + g_1(\zeta),$$

quand il s'agit d'un cercle Γ limitant un domaine Δ, ζ étant son centre.

Prenons des axes au point ζ. Pour obtenir la dérivée de $g_0(\zeta)$ par rapport à ξ, considérons sur l'axe réel le point d'abscisse h.

L'intégrale

$$J = -\frac{1}{\pi}\int\int_\Delta \psi(\nu)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{\nu-\zeta}\right]d\omega = -\frac{1}{\pi}\int\int_\Delta \frac{\psi(\nu)}{(\nu-\zeta)^2}d\omega$$

est uniformément convergente; elle a donc un sens déterminé. En effet,

$$|J| < \frac{1}{\pi}\int\int_\Delta \frac{|\psi(\nu)|}{|\nu-\zeta|^2}d\omega < \frac{M}{\pi}\int\int_\Delta \frac{d\omega}{\rho^{2-\alpha}} < \frac{2M}{\alpha}r^\alpha,$$

$$\nu = \zeta = \rho e^{i\theta} \qquad (r = \text{rayon du cercle } \Gamma).$$

Calculons maintenant la différence :

$$\frac{g_0(\zeta+h)-g_0(\zeta)}{h} - J = I,$$

$$I = -\frac{1}{\pi}\int\int_\Delta \psi(\nu)\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\nu-h-\zeta}-\frac{1}{\nu-\zeta}\right)-\frac{1}{(\nu-\zeta)^2}\right]d\omega$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\int_\Delta \frac{h\psi(\nu)}{(\nu-\zeta)^2(\nu-\zeta-h)}d\omega.$$

Cette intégrale a un sens pour $h = 0$, car elle est nulle, mais on n'est pas sûr qu'elle n'ait pas d'autres limites pour $h > 0$ tendant vers zéro.

Si l'on peut montrer que $I(h)$ est continue pour $h = 0$, on pourra affirmer que, à tout ε donné, on sait attacher une valeur h_0 de h, telle que

$$|I(h)| < \varepsilon \qquad \text{pour } h < h_0.$$

Pour prouver la continuité de I, à l'origine, entourons les deux points ζ et $\zeta + h$, d'un cercle γ, de centre ζ et de rayon $r_0 > h$.

La fonction à intégrer est continue en h dans le domaine $\Delta - \delta$. Montrons que la contribution de δ tend *uniformément vers zéro*, avec r_0, indépendamment de la position de h. Donc, que pour ε donné, on peut déterminer r_0, tel que

$$|I_\delta| < \varepsilon \qquad \text{pour } h < r_0.$$

En effet, on aura aisément

$$|I_\delta| < \frac{1}{\pi}\int\int_\delta \frac{hM\rho^{\alpha+1}\,d\rho\,d\theta}{\rho^2\sqrt{\rho^2-2\rho h\cos\theta+h^2}} = \frac{hM}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r_0}\frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha}\sqrt{\rho^2-2\rho h\cos\theta+h^2}}.$$

Posons $\rho = ht$. Il vient

$$h\int_0^{r_0}\frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha}\sqrt{\rho^2-2\rho h\cos\theta+h^2}} = h^\alpha\int_0^{\frac{r_0}{h}}\frac{dt}{t^{1-\alpha}\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}$$
$$< h^\alpha\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1-\alpha}\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}.$$

Supposons $\alpha < 1$, car pour $\alpha > 1$, une fonction satisfaisant à une condition de Holder se réduit à une constante; le cas de $\alpha = 1$ est assez simple à traiter directement.

Considérons à part

$$\int_0^1\frac{dt}{t^{1-\alpha}\sqrt{t^2+1-2t\cos\theta}}.$$

Les points singuliers en sont o et 1 (pour $\cos\theta = 1$, donc $\theta = 0$ ou 2π). L'intégrale a évidemment un sens dans l'intervalle o, $\frac{1}{2}$, car $1-\alpha < 1$.

D'autre part,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{t^{1-\alpha}\sqrt{t^2+1-2t\cos\theta}} < \frac{1}{2^{1-\alpha}}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{\sqrt{t^2+1-2t\cos\theta}}.$$

Quant à cette dernière intégrale, elle vaut

$$\left\{\log\left[t-\cos\theta+\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}\right]\right\}_{\frac{1}{2}}^{1}.$$

Le terme qui nous intéresse est

$$\log(1-\cos\theta)\left[\sqrt{2}+\sqrt{1-\cos\theta}\right] \qquad \text{ou bien} \qquad \log(1-\cos\theta),$$

qu'on aura à intégrer de o à 2π. Il n'est pas difficile de voir que la question sera portée à l'étude de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\varphi\,d\varphi,$$

qui se comporte à l'origine comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\varphi\,d\varphi$.

Or, celle-ci a bien un sens, car on peut faire une intégration par parties et arriver à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\varphi\,d\varphi = [\varphi\log\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi,$$

qui ne présente plus aucune difficulté.

Quant au terme

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}},$$

il se comporte à l'infini comme $\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$, donc a un sens bien déterminé.

Dans ces conditions, si l'on désigne par K une borne supérieure de l'intégrale calculée, il vient

$$|\,\mathrm{I}\,|_{\delta} < \frac{\mathrm{MK}}{\pi} h^{\alpha} < \frac{\mathrm{MK}}{\pi} r_0^{\alpha},$$

ce qui prouve qu'on peut déterminer une valeur de r_0, telle que

$$|\,\mathrm{I}_{\delta}\,| < \varepsilon, \qquad \text{pour tout } h < r_0.$$

Or, $\mathrm{I} = \mathrm{I}_{\delta} + \mathrm{I}_{\Delta-\delta}$; donc cette fonction est continue en h comme $\mathrm{I}_{\Delta-\delta}$, et puisqu'elle est nulle pour $h = 0$, elle va rester aussi petite que l'on voudra pour $h < r_0$.

Dans ces conditions,

$$\left|\frac{g_0(\zeta + h) - g_0(\zeta)}{h} - \mathrm{J}\right| < \varepsilon, \qquad \text{si } (h < r_0)$$

et, par suite,

$$\lim_{h=0} \frac{g_0(\zeta + h) - g_0(\zeta)}{h} = \mathrm{J}.$$

La dérivée à droite de la fonction $g_0(\zeta)$ est bien $\mathrm{J}(\zeta)$. En reprenant le même raisonnement, on arrivera à la conclusion que *la dérivée à gauche* de $g_0(\zeta)$ au point ζ sera aussi égale à $\mathrm{J}(\zeta)$, ce qui démontre l'unicité de la dérivée.

En ce qui concerne sa continuité. on peut raisonner comme suit :

Prenons un point ζ' voisin de ζ; pour simplifier les notations, transportons les axes en ce point et, de plus, prenons pour axe réel, la direction $\zeta\zeta'$, Soit $h = |\zeta - \zeta'|$; décrivons un cercle γ, de rayon $2h$ et de centre ζ.

Calculons

$$\mathrm{J}(\zeta + h) - \mathrm{J}(\zeta) = \mathrm{H}.$$

On aura

$$-\pi\mathrm{H} = \iint_{\Delta-\delta} \frac{\psi(\rho)}{(\rho - h)^2} d\omega - \iint_{\Delta-\delta} \frac{\psi(\rho)}{\rho^2} d\omega + \iint_{\delta} \frac{\psi(\rho)}{(\rho - h)^2} d\omega - \iint_{\delta} \frac{\psi(\rho)}{\rho^2} d\omega.$$

La première différence du second membre pourra être écrite

$$\iint_{\Delta-\delta} \frac{\psi(\rho)[2\rho h - h^2]}{(\rho - h)^2 \rho^2} d\omega = \iint_{\Delta-\delta} \frac{2h\psi(\rho)}{\rho^2(\rho - h)} d\omega + \iint_{\Delta-\delta} \frac{h^2\psi(\rho)}{(\rho - h)^2 \rho^2} d\omega.$$

Le premier terme ne présente aucune difficulté. Son module est plus petit que celui de I considéré ci-dessus.

Le deuxième conduit aux calculs suivants :

$$\left|\int\int_{\Delta-\delta}\frac{h^2\psi(\nu)}{(\nu-h)^2\nu^2}\,d\omega\right| < \mathrm{M}h^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_{2h}^{r}\frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha}(\rho^2-2h\rho\cos\theta+h^2)}$$

$$= \mathrm{M}h^\alpha\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^{\frac{r}{h}}\frac{dt}{t^{1-\alpha}(t^2-2t\cos\theta+1)},$$

où l'on a posé $\rho = ht$.

Or la deuxième intégrale est majorée par

$$\int_2^{\infty}\frac{dt}{t^{1-\alpha}(t^2-2t\cos\theta+1)},$$

qui ne dépend pas de h et est bien déterminée si $\alpha < 1$ (comme on l'a d'ailleurs supposé).

On en déduit que, à tout ε donné on peut déterminer une valeur h_0 de h, telle que la différence considérée soit inférieure en module à ε pour $h < h_0$.

Quant au terme

$$\int\int_\delta\frac{\psi(\nu)}{\nu^2}\,d\omega,$$

il ne produit aucune difficulté.

Il nous reste à considérer

$$\int\int_\delta\frac{\psi(\nu)}{(\nu-h)^2}\,d\omega = \int\int_\delta\frac{\psi'(\nu)}{(\nu-h)^2}\,d\omega + [\varphi(\zeta')-\varphi(\zeta)]\int\int_\delta\frac{d\omega}{(\nu-h)^2},$$

où

$$\psi'(\nu) = \varphi(\nu)-\varphi(\zeta'),$$

donc

$$|\psi'(\nu)| < \mathrm{M}\,|\nu-h|^\alpha;$$

en même temps

$$|\varphi(\zeta')-\varphi(\zeta)| < \mathrm{M}h^\alpha.$$

Or

$$\left|\int\int_\delta\frac{\psi'(\nu)}{(\nu-h)^2}\,d\omega\right| < \mathrm{M}\int\int_\delta\rho_1^{\alpha-1}\,d\rho_1\,d\varphi < \frac{2\mathrm{M}\pi}{\alpha}(3h)^\alpha,$$

car le maximum de ρ_1 sera $3h$.

Remarquons, quant au dernier terme, que si γ_1 désigne le cercle de centre ζ' et de rayon h,

$$\int\int_{\sigma_1}\frac{d\omega}{(\nu-h)^2} = 0$$

(valable pour tout cercle concentrique à γ', d'ailleurs).

Or, dans le domaine $\delta - \delta_1$, le minimum de $|v - h|$ est h.
Donc

$$|\varphi(\zeta') - \varphi(\zeta)| \left| \iint_{\delta} \frac{d\omega}{(v-h)^2} \right| \leqq \mathrm{M} h^{\alpha} \iint_{\delta - \delta_1} \frac{d\omega}{|v-h|^2} < \frac{\mathrm{M} h^{\alpha}}{h^2} \iint_{\delta - \delta_1} d\omega = 3\mathrm{M}\pi h^{\alpha}.$$

Enfin, il est devenu manifeste qu'on peut déterminer une valeur de h, telle que $|\pi \mathrm{H}| < \pi\varepsilon$ et, par suite,

$$|\mathrm{J}(\zeta + h) - \mathrm{J}(\zeta)| < \varepsilon \qquad \text{si } h < h_0.$$

La continuité de J est assurée par cette inégalité.

Il s'ensuit que *la fonction $g(\zeta)$ admet des dérivées partielles du premier ordre continues en chaque point du domaine* D ; celles-ci satisfont à l'équation

$$\frac{\partial g(\zeta)}{\partial \xi} + i \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \eta} = 2\varphi(\zeta),$$

ou bien, si l'on pose

$$g(\zeta) = \mathrm{P}(\xi, \eta) + i\mathrm{Q}(\xi, \eta), \qquad \varphi(\zeta) = \mathrm{A} + i\mathrm{B},$$

il vient

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta} = 2\mathrm{A}(\xi, \eta), \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta} = 2\mathrm{B}(\xi, \eta).$$

Par suite, $g(\zeta)$ est une *intégrale* de ce système, où $\mathrm{A} + i\mathrm{B}$ satisfait à la condition de Holder imposée.

3. Passons à l'examen du cas général. Supposons que la fonction $\varphi(\zeta)$ soit continue dans un domaine D, et *tâchons de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $g(\zeta)$ admette des dérivées partielles par rapport à ξ et η en chaque point intérieur à* D.

Il est évident que dans une région extérieure à un certain cercle de rayon r et de centre ζ, ces dérivées existent et sont continues.

Considérons donc ce qui se passe dans ce cercle Γ, en envisageant la fonction

$$g_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - \zeta} d\omega.$$

Prenons, pour simplifier, l'origine des axes au point ζ et dérivons dans une direction d'argument θ_0.

Posons $w = \rho_0 e^{i\theta_0}$, $v = \rho e^{i\theta}$ et considérons la différence

$$g(w) - g(0) = -\frac{w}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v(v - w)} d\omega = -\frac{\rho_0 e^{i\theta_0}}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta \int_0^r \frac{\varphi(\rho, \theta)}{\rho e^{i\theta} - \rho_0 e^{i\theta_0}} d\rho.$$

Posons $\rho = \rho_0 t$. Il vient

$$\frac{g(w) - g(0)}{\rho_0} = -\frac{e^{i\theta_0}}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}\,d\theta \int_0^r \frac{\varphi(\rho,\theta)}{\rho - \rho_0 e^{i(\theta_0-\theta)}}\,d\rho$$

$$= -\frac{e^{i\theta_0}}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}\,d\theta \int_0^{\frac{r}{\rho_0}} \frac{\varphi(\rho_0 t,\theta)}{t - e^{i(\theta_0-\theta)}}\,dt.$$

Nous allons employer ici une méthode analogue à celle de M. H. Petrini pour les dérivées du potentiel [1].

Il faut, à cet effet, s'occuper de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{r}{\rho_0}} \frac{\varphi(\rho_0 t,\theta)}{t - e^{i(\theta_0-\theta)}}\,dt$$

lorsque ρ_0 tend vers zéro.

Le point $t = 1$ est singulier si $\theta = \theta_0$. Partageons donc l'intervalle d'intégration en deux parties : de o à 1 et de 1 à $\frac{r}{\rho_0}$, le dernier pouvant être aussi grand que l'on veut par le choix convenable de ρ_0,

Pour $t > 1$, on saura développer $\frac{1}{t - e^{i(\theta_0-\theta)}}$ sous la forme

$$\frac{1}{t - e^{i(\theta_0-\theta)}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}e^{i(\theta_0-\theta)} + \ldots = \frac{1}{t} + \frac{\mathrm{F}}{t^2},$$

où F reste finie pour $t > 1$.

Soient α et β deux constantes positives indépendantes de ρ_0 et telles que

$$0 < \alpha < 1 < \beta < \frac{r}{\rho_0}.$$

Les intégrales

$$\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}\,d\theta \int_0^{\beta} \frac{\varphi(\rho,\theta)}{t - e^{i(\theta_0-\theta)}}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}\,d\theta \int_\alpha^{\beta} \frac{\varphi(\rho,\theta)}{t}\,dt$$

restent finies pour tout $\rho_0 \geqq 0$.

En effet, dans la première, c'est le point $t = 1$ qui peut être gênant

---

(1) *Voir* le livre de M. H. Villat (*Leçons sur l'Hydrodynamique*, p. 140), où l'on trouve une étude du Mémoire de M. H. Petrini [*Les dérivées premières et secondes du potentiel* (*Acta mathématica*, t. 31, 1908, p. 127)].

pour $\theta = \theta_0$. Mais on aura

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_0^1 \frac{\varphi(\rho, \theta)}{t - e^{i(\theta_0 - \theta)}} d\theta \right| < \mathrm{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t\cos(\theta_0 - \theta) + 1}},$$

où M désigne une borne supérieure de $|\varphi(\rho, \theta)|$.

La dernière intégrale, déjà rencontrée dans cette étude, reste bornée, malgré la présence du point $\theta = \theta_0$.

Quant à la seconde intégrale à examiner, elle est déterminée et ne présente aucune difficulté.

Cela étant, écrivons

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\varphi(\rho_0 t, \theta)}{t - e^{i(\theta_0 - \theta)}} dt + \int_1^\beta \varphi(\rho_0 t, \theta) \left[\frac{1}{t - e^{i(\theta_0 - \theta)}} - \frac{1}{t} \right] dt$$
$$+ \int_\beta^{\frac{r}{\rho_0}} \varphi(\rho_0 t, \theta) \left[\frac{1}{t - e^{i(\theta_0 - \theta)}} - \frac{1}{t} \right] dt + \int_1^{\frac{r}{\rho_0}} \varphi(\rho_0 t, \theta) \frac{dt}{t}.$$

Le troisième terme de ce développement peut être rendu aussi petit que l'on veut par le choix convenable de β, car il sera de la forme

$$\left| \int_\beta^{\frac{r}{\rho_0}} \frac{\varphi(\rho_0 t, \theta)\,\mathrm{F}}{t^2} dt \right| < \mathrm{N} \int_\beta^{\frac{r}{\rho_0}} \frac{dt}{t^2} < \mathrm{N} \left[\frac{\rho_0^2}{r^2} - \frac{1}{\beta^2} \right] < \varepsilon.$$

Considérons la fonction

$$g_0(\zeta) = -\frac{\varphi(\zeta)}{\pi} \int\int_{\mathrm{D}} \frac{d\omega}{v - \zeta} \equiv \left[\bar{\zeta} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}} \frac{\bar{z}\, dz}{z - \zeta} \right] \varphi(\zeta).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que sa dérivée dans la direction θ_0, au point ζ, se réduit à la valeur $\varphi(\zeta) e^{-i\theta_0}$ pour un cercle Γ de centre ζ.

Répétons le raisonnement ci-dessus, pour ce cas particulier, et retranchons les relations obtenues membre à membre de celles relatives à la fonction $g(\zeta)$.

Le calcul de $\mathrm{I} - \mathrm{I}_0$ exigera les limitations supérieures de quelques intégrales :

Supposons ρ_0 assez petit pour que $|\varphi(\rho_0 t, \theta) - \varphi(o)| < \varepsilon$:

$$\left| \int_0^1 \frac{\varphi(\rho_0 t, \theta) - \varphi(o)}{t - e^{i(\theta_0 - \theta)}} dt \right| < \varepsilon \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t\cos(\theta_0 - \theta) + 1}}.$$

Ensuite

$$\left| \int_1^\beta [\varphi(\rho_0 t, \theta) - \varphi(o)] \left[\frac{1}{t - e^{i(\theta_0 - \theta)}} - \frac{1}{t} \right] dt \right| < \varepsilon \int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 2t\cos(\theta_0 - \theta) + 1}}.$$

Or, toutes les deux intégrales ont un sens bien déterminé et restent bornées malgré les singularités qu'elles contiennent.

En même temps l'expression

$$\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_1^{\frac{r}{\rho_0}} \varphi(o) \frac{dt}{t} = \varphi(o) \log \frac{r}{\rho_0} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta = o.$$

Sous la restriction que

$$\lim_{\rho_0 = 0} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_{\rho_0}^{r} \frac{\varphi(\rho, \theta)}{\rho} d\rho$$

existe, il est manifeste que

$$\left| \frac{g(w) - g(o)}{\rho_0} - \frac{dg_0}{d\rho_0} + \frac{e^{i\theta_0}}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_1^{\frac{r}{\rho_0}} \varphi(\rho_0 t, \theta) \frac{dt}{t} \right| < \varepsilon.$$

Le raisonnement habituel montrera ensuite qu'on a

$$\frac{dg}{d\rho_0} = e^{-i\theta_0} \varphi(\zeta) - \frac{e^{i\theta_0}}{\pi} \lim_{(\rho_0 = 0)} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_{r_0}^{r} \varphi(\rho, \theta) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Par conséquent, *la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $g(\zeta)$ admette des dérivées partielles en un point ζ est que*

$$\lim_{\rho_0 = 0} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_{\rho_0}^{r} \frac{\varphi(\rho, \theta)}{\rho} d\rho$$

existe.

En particulier, le cas étudié, où $\varphi(\rho, \theta)$ satisfait à la condition de Hölder, y est compris, car on aura

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_{\rho_0}^{r} \frac{\varphi(\rho, \theta)}{\rho} d\rho \right| = \left| \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta \int_{\rho_0}^{r} \frac{\varphi(\rho, \theta) - \varphi(o)}{\rho} d\rho \right| < \frac{2\pi M}{\alpha} [r - \rho_0]^{\alpha}.$$

Remarquons que, pour $\theta_0 = o$ et $\frac{\pi}{2}$, on obtient les dérivées partielles par rapport à ξ et η, et qu'on aura

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} + i \frac{\partial g}{\partial \eta} = 2\varphi(\zeta),$$

ou bien

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 2A(\xi, \eta), \qquad \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial \eta} = 2B(\xi, \eta).$$

La fonction $g(\zeta)$ fournit donc une intégrale particulière de ce système.

Vu son importance dans bien des applications physiques, cette remarque est essentielle.

C'est d'ailleurs à cette fin que nous avons cherché les conditions dans lesquelles on peut affirmer l'existence des dérivées partielles de l'intégrale $g(\zeta)$.

4. Nous avons assez souvent insisté sur le caractère de réversibilité du calcul aux dérivées aréolaires. La fonction $g(\zeta)$ est une sorte d'intégrale qui réalise le passage d'une fonction bornée et intégrable, à la fonction continue qui l'admet presque partout comme dérivée aréolaire.

Il est naturel de penser à des équations aux dérivées aréolaires, généralisant les équations différentielles ordinaires.

Nous allons en donner quelques exemples de types simples :

$$\frac{D^{n+1}f}{D\omega^{n+1}}=0, \tag{1°}$$

dont l'intégrale générale a fait l'objet du Chapitre II, et généralise les polynomes;

$$\frac{D^{n+1}f}{D\omega^{n+1}}=\varphi(\zeta) \tag{2°}$$

qui a été également rencontrée; elle généralise les fonctions holomorphes (α), qui peuvent passer pour les intégrales de l'équation

$$\frac{Df}{D\omega}=\varphi(\zeta). \tag{3°}$$

Il est intéressant d'étudier aussi l'équation linéaire du premier ordre :

Soient $\lambda(\zeta)$ et $\mu(\zeta)$ deux fonctions continues dans un domaine D, limité par un contour simple C.

Cherchons l'intégrale de l'équation

$$\frac{Df}{D\omega}=\lambda(\zeta)f(\zeta)+\mu(\zeta), \tag{4°}$$

quand on connaît le long de C la partie réelle de f, exprimée par une fonction continue.

Soit d'abord l'équation homogène

$$\frac{Df}{D\omega}=\lambda(\zeta)f(\zeta),$$

qui peut être écrite à l'aide des règles d'opération que nous avons étudiées,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\omega}[\log f] = \lambda(\zeta).$$

Il vient, par suite,

$$\log f = \log h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}} \frac{\lambda(\nu)}{\nu - \zeta}\, d\omega,$$

où $h(\zeta)$ est une fonction holomorphe dans D.

On en tire

$$f = h(\zeta)\, e^{-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{D}} \frac{\lambda(\nu)}{\nu - \zeta} d\omega}.$$

Revenons à l'équation initiale. Supposons que $h(\zeta)$ soit une fonction holomorphe (α), et tâchons de la déterminer de façon que l'équation soit vérifiée par la valeur de $f(\zeta)$ ci-dessus.

Cela conduit, tout de suite, à la condition

$$\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}\omega} = \mu(\zeta)\, e^{\frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{D}} \frac{\lambda(\nu)}{\nu - \zeta} d\omega}.$$

Or, le second membre étant connu, on en déduit

$$h(\zeta) = \varphi(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}} \frac{\mu(\nu)\, e^{\frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{D}} \frac{\lambda(t)}{t-\nu} d\omega}}{\nu - \zeta}\, d\omega,$$

où $\varphi(\zeta)$ désigne une fonction holomorphe.

L'intégrale générale de (4°) sera donc

$$f(\zeta) = e^{-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{D}} \frac{\lambda(\nu)}{\nu - \zeta} d\omega} \left[\varphi(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}} \frac{\mu(\nu)\, e^{\frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{D}} \frac{\lambda(t)}{t-\nu} d\omega}}{\nu - \zeta}\, d\omega \right].$$

Pour déterminer l'intégrale demandée, remarquons que si l'on désigne par $c(\theta)$ la partie réelle de $f(\zeta)$ sur le contour C, par $u(\theta)$ et $v(\theta)$ les parties réelle et imaginaire de $\varphi(\zeta)$ sur la même courbe, on obtient une relation de la forme

$$a(\theta)\, u(\theta) + b(\theta)\, v(\theta) = c(\theta),$$

où $a(\theta)$ et $b(\theta)$ sont des fonctions continues.

La recherche de la fonction

$$\varphi(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta),$$

holomorphe dans D et satisfaisant à la relation ci-dessus, constitue un problème de Hilbert dont la solution dépend de deux constantes arbitraire [1].

Il est *évident* que si l'on demandait la solution de l'équation (4°), satisfaisant elle-même à une relation de ce genre, le problème serait le même.

Enfin, en supposant que $f(\zeta)$ ainsi trouvée reste sur le contour C bornée et intégrable, on arrive à la formule

$$f(\zeta)=e^{-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\lambda(\nu)}{\nu-\zeta}d\omega}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)e^{\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\lambda(\nu)}{\nu-z}d\omega}}{z-\zeta}dz-\frac{1}{\pi}\int\int_{D}\frac{\mu(\nu)e^{\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\lambda(t)}{t-\nu}d\omega}}{\nu-\zeta}d\omega\right].$$

Les cas particuliers intéressants compris dans cette équation sont :

Celui des fonctions holomorphes (α) pour $\lambda=0$;

Celui d'une équation envisagée par M. Pompeiu pour $\lambda=1$, $\mu=0$.

Cette dernière équation

$$\frac{Df}{D\omega}=f \tag{5°}$$

généralise la fonction exponentielle. L'intégrale peut être mise sous la forme

$$f(\zeta)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{e^{\bar{\zeta}-\bar{z}}}{z-\zeta}f(z)\,dz.$$

Il n'est pas inutile de considérer aussi quelques *types linéaires d'ordre supérieur*, où les coefficients soient des fonctions holomorphes.

Par exemple

$$\frac{D^2f}{D\omega^2}+2a(\zeta)\frac{Df}{D\omega}+b(\zeta)f(\zeta)=0. \tag{6°}$$

Déterminons une fonction holomorphe $r(\zeta)$, telle que l'expression $e^{\bar{\zeta}r(\zeta)}$ soit une intégrale de (6°).

On obtient une équation caractéristique

$$r^2+2ar+b=0$$

qui donne

$$r=-a\pm\sqrt{a^2-b}.$$

Supposons que $a^2-b\neq 0$ dans D; dans ces conditions $r(\zeta)$ sera holomorphe.

---

(1) *Voir* à ce sujet H. VILLAT, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, p. 226.

On peut prendre une intégrale de la forme

$$f(\zeta) = \mathrm{C}_1(\zeta) e^{r_1\bar{\zeta}} + \mathrm{C}_2(\zeta) e^{r_2\bar{\zeta}},$$

où $\mathrm{C}_1(\zeta)$ et $\mathrm{C}_2(\zeta)$ sont holomorphes et arbitraires.

Si l'on connaît les valeurs de $f(\zeta)$ et de sa première dérivée aréolaire le long de C, on en tire sans difficulté la formule suivante :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{f(z)\left[r_1 e^{r_2(\zeta)\bar{\zeta} - r_2(z)\bar{z}} - r_2 e^{r_1(\zeta)\bar{\zeta} - r_1(z)\bar{z}}\right]}{(r_1 - r_2)(z - \zeta)}\,dz$$
$$+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{\dfrac{\mathrm{D}f(z)}{\mathrm{D}\omega}\left[e^{r_1(\zeta)\bar{\zeta} - r_1(z)\bar{z}} - e^{r_2(\zeta)\bar{\zeta} - r_2(z)\bar{z}}\right]}{(r_1 - r_2)(z - \zeta)}\,dz.$$

Le cas où $r_1 = r_2$ n'est pas difficile.

Citons parmi les cas particuliers les deux suivants, généralisant les lignes trigonométriques (naturelles et hyperboliques),

$$\frac{\mathrm{D}^2 f}{\mathrm{D}\omega} = -f \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{D}^2 f}{\mathrm{D}\omega} = f.$$

Une première application des équations aux dérivées aréolaires est à l'intégration de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Insistons en particulier sur l'équation

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}\omega} = \varphi(\zeta);$$

supposons que $\varphi(\zeta)$ *soit continue et satisfasse à une condition de Hölder dans le domaine* D.

Dans ces conditions la fonction $g(\zeta)$ admet, on le sait, des dérivées partielles du premier ordre continues dans tout le domaine.

Posons

$$\varphi(\zeta) = \mathrm{A}(x, y) + i\mathrm{B}(x, y).$$

Dans les conditions posées, l'équation ci-dessus conduit au système

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 2\mathrm{A}(x, y); \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 2\mathrm{B}(x, y).$$

Inversement, un système de cette forme se ramène aisément à une équation de la forme considérée. Alors, intégrer ce système revient à chercher une certaine fonction holomorphe (α).

Le problème le plus intéressant est le suivant :

Trouver l'intégrale du système ci-joint, qui satisfait sur le contour simple C, *à la relation*

$$A(t)P(t)+B(t)Q(t)=C(t),$$

où A, B, C *désignent trois fonctions continues d'un paramètre lié au contour.*

Or, on connaît une intégrale particulière de ce système. Elle est

$$g(\zeta)=P_0+iQ_0=-\frac{1}{\pi}\int\int_D\frac{\varphi(\zeta)}{v-\zeta}\,d\omega.$$

Celui-ci se ramène donc à l'intégration de l'équation

$$\frac{D}{D\omega}[f-g]=0,$$

qui donne

$$f=g+h(\zeta),$$

$h(\zeta)$ étant holomorphe.

De même, si l'on pose

$$h(\zeta)=u(x,y)+iv(x,y),$$

la relation à vérifier le long de C devient

$$A(t)u(t)+B(t)v(t)=C(t)-A(t)P_0(t)-B(t)Q_0(t).$$

Or, le second membre est bien connu et continu.

Le nouveau problème, concernant la fonction holomorphe $h(\zeta)$ est un problème de Hilbert, qu'on sait résoudre.

Nous allons, d'ailleurs, insister sur ces considérations dans le chapitre suivant.

L'équation

$$\frac{Df}{D\omega}=f$$

conduit aisément au système

$$(41)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}-\dfrac{\partial Q}{\partial y}=2P,\\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial P}{\partial y}=2Q.\end{cases}$$

De plus, les fonctions P et Q satisfont en particulier à l'équation

$$(42)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}-4\frac{\partial\Theta}{\partial x}+4\Theta=0.$$

La connaissance d'une relation de la forme

$$A(t)P(t)+B(t)Q(t)=C(t),$$

le long d'un contour C, entraîne celle de l'intégrale du système qui y satisfait.

En particulier, si l'on donne sur C la partie réelle de f, c'est-à-dire P, on détermine à la fois l'intégrale du système obtenu et celle de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus.

Réciproquement, on peut intégrer l'équation (42) à l'aide du système (41).

En effet, attachons à la fonction $P(x, y)$ une autre $Q(x,y)$ de telle façon qu'elles satisfassent au système (41), qui est parfaitement équivalent à l'équation aux dérivées aréolaires

$$\frac{Df}{D\omega}=f.$$

Or, on a une intégrale en écrivant

$$\frac{D}{D\omega}\log f=1, \qquad \text{d'où} \qquad f=h(\zeta)e^{-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{d\omega}{v-\zeta}}.$$

Déterminons $h(\zeta)$ de manière que sur C on connaisse à l'avance les valeurs de $P(x, y)$, exprimées par une fonction continue $P(t)$.
Soit

$$h(\zeta)=u(x, y)+iv(x, y).$$

On arrivera facilement à une relation de la forme

$$P(t)=A(t)u(t)+B(t)v(t).$$

La détermination de la fonction holomorphe $h(\zeta)$, telle que u et v satisfassent à cette relation, est un problème de Hilbert.

On connaîtra de cette façon la fonction $f(\zeta)$ (*à deux constantes près*) *et par suite* $P(x, y)$.

L'unicité de l'intégrale est assurée par un raisonnement regardant directement l'équation aux dérivées aréolaires, donc la fonction holomorphe $h(\zeta)$.

Terminons ces considérations en remarquant que les équations

$$\frac{D^2f}{D\omega^2}=\frac{1}{4}f \qquad \text{et} \qquad \frac{D^2f}{D\omega^2}=-\frac{1}{4}f$$

conduisent aux systèmes

$$(42')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= \pm P,\\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} &= \pm Q,\end{aligned}\right.$$

et à l'équation

$$\Delta^2\Theta \mp \left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right) + \Theta = 0.$$

5. On peut se proposer aussi d'autres applications des équations aux dérivées aréolaires, en particulier d'en étudier aussi la nature analytique des intégrales.

Il est possible de faire un rapprochement entre certaines fonctions complexes et les *fonctions à champ réel autonome.*

M. G. Bouligand appelle fonction à champ réel autonome toute fonction uniforme $\varphi(P)$, *qui au voisinage d'un point régulier quelconque du champ réel se développe en une série de polynomes homogènes par rapport aux composantes de* $\overrightarrow{P_0P}$, *cette série étant absolument convergente dans la sphère de centre* P_0, *passant par le point singulier réel le plus rapproché de* P_0.

Les polynomes aréolaires conduisent à de telles fonctions, puisque les composantes P et Q en sont polyharmoniques.

Mais on peut en donner encore d'autres exemples plus compliqués. Prenons par exemple une équation linéaire *à coefficients constants.* Pour l'intégrer on est amené à faire les calculs comme s'il s'agissait d'une véritable équation différentielle ordinaire.

L'intégrale générale sera de la forme

$$\Sigma C_i(\zeta)e^{r_i\bar\zeta},$$

où les r_i sont les racines de l'équation caractéristique.

Or, il est clair qu'on peut développer cette fonction autour d'un point z_0 en une série de polynomes homogènes, absolument convergente dans le cercle de centre z_0 et passant par le point singulier le plus rapproché de z_0 et appartenant à l'ensemble des points singuliers des coefficients $C_i(\zeta)$.

---

(1) G. Bouligand, *Sur un problème de la theorie des fonctions analytiques de plusieurs variables et sur divers points de la théorie des fonctions harmoniques* (*Journal de Mathematiques pures et appliquées*, t. IX, fasc. IV, 1930).

En prenant respectivement les parties réelle et imaginaire, les fonctions obtenues sont à champ réel autonome.

Un autre exemple :

Considérons l'équation

$$\frac{D^n f}{D\omega^n} + \varphi_1(\bar{\zeta}) \frac{D^{n-1} f}{D\omega^{n-1}} + \ldots + \varphi_n(\bar{\zeta}) f = 0,$$

où les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions entières de $\bar{\zeta}$.

Si l'on en cherche les intégrales régulières, en négligeant la présence de z, on peut la considérer comme une équation différentielle ordinaire. Or on sait qu'une telle équation où les coefficients sont des fonctions entières a des intégrales entières aussi.

L'intégrale générale étant de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(\zeta) f_i(\bar{\zeta}),$$

il s'ensuit qu'elle est à champ réel autonome, l'ensemble des points singuliers étant fourni seulement par les coefficients holomorphes $C_i(\zeta)$.

On pourrait être tenté de croire que toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i(\zeta) f_i(\bar{\zeta}),$$

uniformément convergente dans un domaine (ou même dans tout le plan), serait une fonction à champ réel autonome.

Il n'en est pas ainsi, comme le montre l'exemple suivant :

La fonction $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ n'a aucun point singulier réel.

Or, on a

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{1+\zeta\bar{\zeta}} = 1 - \zeta\bar{\zeta} + \zeta^2\bar{\zeta}^2 - \ldots + (-1)^n \zeta^n \bar{\zeta}^n + \ldots,$$

développement qui ne converge que dans le cercle unité, tandis que la fonction existe dans tout le plan et n'a aucun point singulier sur ce cercle.

6. Il y a enfin une classe d'équations fonctionnelles, dont nous avons déjà rencontré le type le plus simple et plus intéressant, qui se rattache aux fonctions monogènes (α).

Étant donnée une fonction $\varphi(\zeta)$ *bornée, et intégrable dans un domaine* Δ, *chercher toutes les fonctions* $f(z)$ *continues telles qu'on ait*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\int\int_D \varphi(v)\,d\omega = 0$$

pour tout contour simple rectifiable C, *limitant un domaine* D *dans la région* Δ.

Il est presque inutile d'insister sur ce type. Le problème proposé conduit aux fonctions à dérivée aréolaire bornée (et presque partout unique).

La forme générale de la solution est

$$f(\zeta) = h(\zeta) + g(\zeta),$$

$h(\zeta)$ désignant une fonction holomorphe dans Δ et $g(\zeta)$ la fonction définie par l''intégrale

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int\int_\Delta \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega.$$

Le problème d'intégration devient intéressant lorsqu'on *demande l'intégrale dont la partie réelle prenne sur un contour fermé simple et rectifiable* (Γ) *des valeurs données à l'avance et exprimées par une fonction continue* $P(s)$.

En écrivant

$$f(\zeta) - g(\zeta) = h(\zeta)$$

et en remarquant que $g(\zeta)$ est continue partout, on aura en posant

$$g(\zeta) = a(x, y) + ib(x, y), \qquad h(\zeta) = u + iv, \qquad P(s) = a(s) + u(s),$$

d'où l'on détermine $u(s)$, et puis la fonction $h(\zeta)$, holomorphe dans Δ, dont la partie réelle $u(s)$ est donnée sur le contour Γ par une fonction continue.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

1. Ce dernier chapitre est consacré aux applications physiques des fonctions monogènes (α).

Le langage de la variable complexe rend parfois très claires et naturelles des questions difficiles à traiter directement.

On connaît, en particulier, les grands services que l'introduction des fonctions analytiques rend à l'hydrodynamique des fluides parfaits.

Malheureusement, il n'est pas toujours possible de s'en servir, précisément à cause du fait que ces fonctions ne forment qu'une classe particulière, le premier terme d'une théorie générale.

Les applications physiques montrent que la dérivée aréolaire n'est pas seulement un agent de passage, mais surtout un instrument actif de mise en équations.

L'opération inverse est une véritable quadrature, qui s'introduit naturellement dès que la mise en équations est réalisée.

Si parfois ces caractères ne se révèlent pas immédiatement, c'est parce que la forme donnée aux équations qui se présentent dans les problèmes n'est pas la plus naturelle à ce point de vue.

Nous montrerons que les équations générales, telles qu'on les obtient en appliquant les théorèmes généraux, sont souvent plus maniables que les équations aux dérivées partielles qui s'en déduisent.

2. Il n'est pas sans intérêt d'analyser le rôle des différents éléments physiques qui entrent dans les problèmes de la Mécanique des milieux continus.

Prenons le cas le plus simple, celui d'*un fil flexible et inextensible à une dimension*, c'est-à-dire étendu sur un segment de droite.

Appelons $T(x)$ la tension en un point x de ce fil, $X(x)$ la force massique exercée, $\rho(x)$ la densité linéaire.

En tout point intérieur, l'équation unique d'équilibre est

$$\frac{dT}{dx} = \rho(x)X(x),$$

d'où l'on tire

$$T(x) = T(x_0) + \int_{x_0}^{x} \rho(s)X(s)\,ds,$$

si l'on suppose, bien entendu, $\rho(x)X(x)$ intégrable, ou en particulier continu.

La statique de ce fil est équivalente à la théorie de l'intégrale indéfinie et de la dérivée.

La force massique est en chaque point la dérivée de la tension, *son régulateur de variation* [1].

---

[1] Selon la désignation de M. D. Pompeiu dont nous rééditons dans ce paragraphe des idées exposées dans ses conférences à l'Université de Bucarest en 1929.

Prenons un deuxième exemple : celui d'*un fluide incompressible à deux dimensions*, dont l'équilibre est assuré par les équations

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y,$$

à condition que X et Y admettent des dérivées partielles du premier ordre, qui satisfassent à la relation

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Supposons remplie cette condition, auquel cas on aura

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy),$$

d'où

$$p = p_0 + \int_{M_0}^{M} \rho(X\,dx + Y\,dy).$$

Il est clair que la force massique intervient *de la même manière que dans le cas précédent*, quoique l'instrument analytique ne soit plus parfaitement le même.

La statique d'un milieu continu à deux dimensions montrera que cette analogie se poursuit, à condition qu'on y adopte des instruments de recherche de plus en plus compliqués.

En effet, si l'on prend *un milieu continu particulier* où $N_1 = -N_2 = U$, les équations de l'équilibre intérieur

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 2\rho X,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 2\rho Y$$

deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} &= 2\rho X \\ \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} &= 2\rho Y \end{aligned}\right. \qquad (\rho = \text{const.}).$$

Considérons la fonction $F(z) = T(x, y) + i\,U(x, y)$, et supposons que la fonction $\rho(Y + iX)$ satisfasse à une condition de Holder dans un domaine D.

Dans ces conditions, le système ci-dessus s'intègre immédiatement par la formule

$$F(\zeta) = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\rho(Y + iX)}{v - \zeta}\, d\omega.$$

En comparant les trois formules obtenues dans ces trois cas envisagés, on voit clairement qu'il y a une analogie poussée très loin entre les opérations qui résolvent ce même problème de l'équilibre, et que la dérivation aréolaire devient d'un emploi naturel, au moins dans ce cas bien précis.

3. *Le principe de d'Alembert* affirme que dans un système matériel en mouvement, les forces appliquées se décomposent : la première composante, *la force effective*, agit comme si le système était sans liaisons, tandis que la deuxième, *la force complémentaire*, doit équilibrer le système des forces de réaction produit par les liaisons.

Montrons que cette décomposition se fait d'une manière unique et déterminée, et prenons à cet effet un cas particulier : *un fluide parfait à deux dimensions et incompressible* (1).

Supposons qu'il soit enfermé dans un vase limité par un contour simple fermé C, les forces appliquées étant exprimées par des fonctions continues $2\rho X$, $2\rho Y$, satisfaisant à une condition de Hölder dans le domaine D.

Soient ρX_1, ρY_1 la *force effective*, ρX_2, ρY_2 *la force complémentaire.*

Sur le contour, supposons connue la pression $p(t)$, donnée par une fonction continue d'un paramètre t.

Le principe de d'Alembert exprime le fait que les forces complémentaires se font équilibre en vertu des liaisons. On aura

$$\begin{aligned} 2X &= X_1 + X_2 \\ 2Y &= Y_1 + Y_2 \end{aligned} \qquad (\rho = 1),$$

$$X_2 = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad Y_2 = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Les accélérations effectives X_1, Y_1 et les vitesses u, v satisfont, dans le cas d'un fluide incompressible, à la relation suivante :

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0;$$

(1) Cette question forme l'objet d'une Note de M. D. Pompeiu dans les *Comptes rendus*, t. 187, p. 1121. Nous la reprenons ici pour préciser les données, pour introduire des conditions aux limites et pour montrer l'unicité des résultats.

si le fluide part du repos, à l'instant initial, elle devient

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} = 0,$$

d'où l'on tire tout de suite

$$X_1 = -\frac{\partial q}{\partial y}, \qquad Y_1 = \frac{\partial q}{\partial x},$$

q étant une fonction arbitraire admettant des dérivées partielles du premier ordre continues.

Les relations ci-dessus conduisent donc au système

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 2X,$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 2Y.$$

qui, dans les conditions posées, s'intègre facilement à l'aide de la fonction $g(\zeta)$. Posons à cet effet

$$p_0 + iq_0 = -\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{X + iY}{v - \zeta} d\omega,$$
$$P = p - p_0, \qquad Q = q - q_0.$$

On arrive facilement aux relations

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

qui montrent que la fonction $P + iQ$ est holomorphe dans D. Le long de C, on a

$$P(t) = p(t) - p_0(t);$$

donc on en connaît la partie réelle. Le problème est maintenant simple : il s'agit de déterminer une fonction holomorphe dont on connaît la partie réelle le long de C.

Il y a une solution unique (à une constante imaginaire près). La connaissance de P et de Q entraîne celle de p et q et, par suite, celle de X_1 et Y_1. La constante introduite disparaissant par dérivation, on peut affirmer qu'*en connaissant p sur le contour, la distribution des forces selon le principe de d'Alembert est parfaitement déterminée en chaque point intérieur.*

4. Les équations d'équilibre pour une *plaque plane élastique*, homogène et isotrope sont :

$$\Delta u + \xi \frac{\partial \theta}{\partial x} = 2\nu X,$$

$$\Delta v + \xi \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2\nu Y,$$

où l'on pose

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \nu = -\frac{\rho}{2\mu} \quad (\mu \neq 0) \qquad \text{et} \qquad \xi = \frac{\lambda}{\mu} + 1.$$

Posons, pour simplifier ces équations,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \theta_2.$$

On a

$$\Delta u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y},$$

$$\Delta v \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x},$$

de sorte que le système ci-dessus devient

$$(1 + \xi)\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 2\nu X,$$

$$(1 + \xi)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 2\nu Y.$$

Supposons que la plaque soit limitée par un contour simple C, et notons $(1 + \xi)\theta = \theta_1$.

On obtient

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 2\nu X, \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 2\nu Y.$$

Ce système s'intègre facilement à l'aide de la fonction $g(\zeta)$.

Supposons que l'on connaisse le long de C une relation de la forme

$$a(t)\,\theta_1(t) + b(t)\,\theta_2(t) = c(t),$$

où $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sont des fonctions continues de t.

On aura aisément, *en supposant que les fonctions* X *et* Y *soient continues et satisfassent à une condition de Holder :*

$$\theta_1(x, y) + i\,\theta_2(x, y) = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\nu(X + iY)}{\nu - \zeta}\,d\omega.$$

Notons

$$h(\zeta) = p(x, y) + i\,q(x, y) \qquad \text{et} \qquad g(\zeta) = g_0(x, y) + i\,g_1(x, y).$$

La relation le long du contour peut s'écrire :

$$a(t)p(t)+b(t)q(t)=c(t)-a(t)g_0(t)-b(t)g_1(t).$$

Le second membre étant connu, on est ramené à un problème de Hilbert qui conduit à une fonction $h(\zeta)$ unique (à deux constantes près).

La connaissance de $h(\zeta)$ entraîne celle de $\theta_1(x, y)$ et $\theta_2(x, y)$. Dans ces conditions, le système

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\theta_1}{1+\xi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=\theta$$

nous fera connaître $u(x, y)$ et $v(x, y)$ par un artifice analogue.

En effet, la fonction $\frac{1}{2}\left[\theta_2+i\frac{\theta_1}{1+\xi}\right]$ est continue et satisfait à une condition de Holder, car les deux composantes admettent des dérivées partielles du premier ordre continues.

Supposons connue le long de C *une nouvelle relation de la forme*

$$\alpha(t)\,u(t)+\beta(t)\,v(t)=\gamma(t).$$

On aura

$$v(x, y)+i\,u(x, y)=\mathrm{H}(\zeta)-\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}}\frac{\frac{1}{2}\left[\theta_2+i\frac{\theta_1}{1+\xi}\right]}{v-\zeta}\,d\omega.$$

En suivant une voie analogue à la précédente, on arrivera à un problème de Hilbert pour trouver $\mathrm{H}(\zeta)$ (à deux constantes près).

Le problème posé admet donc une solution, sauf pour $\xi=-1$, quand il n'en admet plus aucune, en général.

Cette solution est unique (à quatre constantes près).

Pour obtenir une solution tout à fait unique, il faut se donner les valeurs de θ_1, θ_2, u, v en un certain point du domaine ou bien d'autres conditions ponctuelles.

On peut donc affirmer que le problème de l'élasticité plane admet une solution pour une plaque limitée par un contour simple, lorsqu'on se donne le long de ce contour deux relations linéaires entre les fonctions θ_1 et θ_2 d'une part et u, v de l'autre ([1]).

([1]) Dans une Note aux *Comptes rendus*, t. 189, p. 565, nous avons résolu ce même problème, en supposant connues sur C les fonctions $\theta(t)$ et $u(t)$.

C'est un problème un peu plus particulier, mais ne différant pas essentiellement de celui qu'on traite ici.

Cette solution est unique (à quatre constantes près).

Il faut toutefois remarquer que l'application de la méthode suivie exige une certaine restriction relative à la continuité des fonctions X, Y, restriction qui est d'ailleurs d'un usage très fréquent dans les problèmes d'intégration, quelle que soit leur nature.

En même temps, on peut se demander si le problème naturel n'est pas possible avec des données bien plus générales.

Nous allons résoudre cette question par l'affirmative dans ce qui va suivre, mais pour le moment nous nous contentons d'en faire la remarque et d'examiner un autre exemple de la même nature.

5. Il s'agit du *mouvement stationnaire d'un liquide doué de frottement.*

Le Mémoire de A. Korn [*Sur l'équilibre des plaques élastiques* (¹) (prix Vaillant, 1907)] traite aussi cette question en la rattachant à un problème d'intégration de l'élasticité.

Nous allons la reprendre en suivant une voie tout à fait différente.

Le problème consiste en l'intégration du système

$$k\,\Delta u = \frac{\partial p}{\partial x} - X,$$

$$k\,\Delta v = \frac{\partial p}{\partial y} - Y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

à l'intérieur d'un domaine D *limité par un contour simple* C, *en connaissant le long de celui-ci les valeurs de la fonction* p *exprimées par une fonction* $p_0(t)$, *et une relation de la forme*

$$a(t)\,u_0(t) + b(t)\,v_0(t) = c_0(t)$$

entre les valeurs limites des fonctions u *et* v.

Les fonctions X, Y *sont supposées continues et satisfaisant à des conditions de Hölder dans le domaine* D (²).

Introduisons la fonction

$$q = k\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

(¹) Voir *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. 25, 1908, p. 529.

(²) Le problème de Korn suppose connues les valeurs limites de u et v.

En écrivant

$$\Delta u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)= \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{k}\right),$$
$$\Delta v \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{k}\right),$$

le système nous conduit à

$$\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}=\mathrm{X}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=\mathrm{Y};$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{q}{k}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Or, le premier montre que la fonction $p+iq$ de variable complexe $x+iy$ a pour dérivée aréolaire $\frac{1}{2}(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})$.

Dans ces conditions, on a

$$p+iq=h(\zeta)-\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}}\frac{\frac{1}{\pi}(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})}{v-\zeta}d\omega.$$

Posons

$$h(\zeta)=h_0(x,y)+i\,h_1(x,y), \qquad g(\zeta)=g_0(x,y)+i\,g_1(x,y).$$

Le long de C, on en déduira la relation

$$p_0(t)=h_0(t)+g_0(t),$$

qui fait connaître $h_0(t)$.

On est ramené à la recherche d'une fonction holomorphe dans un domaine, en connaissant sa partie réelle le long de son contour, ce qui fournit une solution unique (à une constante près).

La connaissance de $h(\zeta)$ entraîne celle de $p+iq$.

Par conséquent, la recherche de u et v devient facile. Le second système ci-dessus montre que la fonction $-\frac{q}{2k}$ est la dérivée aréolaire de la fonction $v+iu$.

On aura aisément :

$$v+iu=\mathrm{H}(\zeta)-\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathrm{D}}\frac{-\frac{q}{2k}}{v-\zeta}d\omega.$$

Posons

$$\mathrm{H}(\zeta)=\mathrm{H}_0(x,y)+i\,\mathrm{H}_1(x,y)$$

et notons par

$$G(\zeta) = G_0(x, y) + i G_1(x, y)$$

l'intégrale double.

La relation donnée sur C conduit à la suivante :

$$a(t) H_0(t) + b(t) H_1(t) = c(t) - a(t) G_0(t) - b(t) G_1(t).$$

Le second membre étant parfaitement connu, on arrive à un problème de Hilbert, auquel on a fait appel assez souvent dans ce qui précède.

Le problème proposé admet une solution unique à trois constantes près si, bien entendu, $k \neq 0$.

On peut établir cette dernière proposition en examinant un problème particulier où $X \equiv 0$, $Y \equiv 0$ dans D et $p_0 = 0$,

$$a(t) u_0(t) + b(t) v_0(t) = 0 \qquad \text{sur C.}$$

Dans ces conditions, la fonction $p + iq$ est holomorphe et, puisque $p_0 = 0$, elle se réduit à une constante qu'on peut prendre nulle (à l'aide d'une condition ponctuelle supplémentaire).

Passons au deuxième système. La fonction $v + iu$ doit être holomorphe dans D et satisfaire à une condition de la forme

$$a(t) u_0(t) + b(t) v_0(t) = 0.$$

A l'aide d'une autre condition ponctuelle, on peut s'arranger de sorte que cette fonction soit identiquement nulle aussi.

Le cas général peut y être ramené par un raisonnement bien simple et assez fréquent dans les questions de cette nature [1].

En ce qui concerne les conditions aux limites, elles sont des plus naturelles, car la seconde peut exprimer, par exemple, que la vitesse normale est nulle à la paroi, ou qu'on y connaît la vitesse tangentielle.

Enfin faisons la même remarque que plus haut sur la généralité des données, car il est bien naturel de soupçonner que la restriction faite par la condition de Hölder s'attache plutôt à l'instrument analytique employé qu'à la nature du problème.

6. Examinons enfin un problème de la théorie des tourbillons : *la déter-*

---

[1] *Voir* notre Note aux *Comptes rendus*, t. **189**, 1929, p. 969.

mination des vitesses en fonction des tourbillons dans le cas d'un fluide à deux dimensions (1).

Supposons que, dans un fluide à deux dimensions, on connaisse à l'instant donné t les tourbillons ζ, représentés par des fonctions continues satisfaisant à une condition de Holder dans les régions contigues qui constituent l'ensemble de ce fluide. (On peut, d'ailleurs, avoir à côté de telles régions d'autres où les tourbillons soient nuls).

Le vase à deux dimensions, un domaine D, simplement connexe, limité par un contour simple C, est animé d'un mouvement donné.

Sur le contour, supposons donnée une relation linéaire

$$a(s)\,u(s)+b(s)\,v(s)=c(s)$$

entre les composantes uv de la vitesse, a, b, c désignant les fontions continues sur C.

Les notations étant celles habituelles, *le problème consiste en l'intégration du système*

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\zeta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

avec la relation ci-dessus comme condition aux limites.

Dans les conditions de l'énoncé le système ci-joint montre que la fonction $v(x, y)+iu(x, y)$ a pour dérivée aréolaire la fonction $\zeta(x, y)$.

Il vient donc

$$v(x, y)+i\,u(x, y)=h(z)-\frac{1}{\pi}\int\!\!\int_{D}\frac{\zeta(w)}{w-z}\,d\omega.$$

Or, posons

$$h(z)=h_0(x, y)+i\,h_1(x, y)$$

et notons par

$$g(z)=g_0(x, y)+i\,g_1(x, y)$$

l'intégrale double de l'expression de $v+iu$.

Lorsque le point x, y décrit le contour C, on peut tirer aisément

$$u(s)=h_0(s)+g_0(s)\qquad\text{et}\qquad v(s)=h_1(s)+g_1(s).$$

---

(1) C'est un problème déjà traîté dans le livre de M. Henri Villat, *Théorie des tourbillons*, p. 26 (Gauthier-Villars, 1930). La méthode, qu'on y suit, diffère de celle que nous employons, se rattachant, d'ailleurs, à une condition spéciale à la paroi : composante normale de la vitesse donnée en chaque point.

Ces valeurs, introduites dans la condition aux limites imposée, la transforment en la suivante :

$$a(s)\,h_0(s) + b(s)\,h_1(s) = c(s) - a(s)\,g_0(s) - b(s)\,g_1(s).$$

La recherche de la fonction holomorphe $h(z)$ est un problème de Hilbert, qui admet, comme on le sait bien, une solution unique (à deux constantes près).

La connaissance de $h(z)$ entraîne évidemment celle de $u(x, y)$ et $v(x, y)$ (1).

Pour revenir au cas envisagé par M. H. Villat, dans son livre précité, on n'a qu'à se donner le long de C la composante normale de la vitesse qui, si le vase est fixe, doit être nulle, donc $\alpha u + \beta v = 0$; si le vase est animé d'un mouvement donné, on aura $\alpha u + \beta v = V_n$, avec $V_n(s)$ donné.

Il n'y a pas de difficulté non plus, dans le cas où l'on en connaît la composante tangentielle : $V_t = \alpha v - \beta u$.

Ces trois exemples, tirés de la Physique mathématique, montrent, une fois de plus, que *le rôle de forces massiques dans les problèmes, soit d'équilibre, soit de mouvement, est analogue à celui de la dérivée dans un problème d'intégration. Il n'y a que la manière particulière, l'algorithme, qui varie d'un cas à l'autre.* C'est bien ce principe, qui nous a conduit à l'emploi de l'intégrale $g(\zeta)$.

7. Les restrictions imposées à la généralité des forces massiques données s'attachent plutôt à l'imperfection relative des instruments de recherche employés qu'à la nature intrinsèque des problèmes examinés dans ce qui précède.

Nous avons d'ailleurs fait allusion à la possibilité d'une certaine extension de la question, ayant en vue le rôle de dérivées joué par les forces massiques dans tout problème d'intégration relatif aux milieux continus.

Dans ce qui suit, nous allons tâcher d'élargir en quelque sorte le cadre classique du problème d'équilibre, afin de pouvoir montrer que la généralité des solutions est en fonction de l'algorithme particulier qu'on veut employer.

Il est en effet évident que le problème d'équilibre peut se poser pour une distribution de forces continues sans plus, ou même pour une distribution seulement intégrable.

(1) Le problème qui nous occupe forme l'objet d'une Note que nous avons publiée dans les *Comptes rendus*, t. 190, 1930, p. 916.

En même temps il est presque évident que le système d'équations aux dérivées partielles ne saurait répondre à cette question.

Nous allons montrer qu'il existe des moyens simples d'envisager ce problème qui, à nos yeux, se pose tout naturellement ([1]).

A cet effet, nous ferons appel à la notion de *dérivée extérieure de* M. Cartan ([2]).

Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions continues dans un domaine Δ, $R(x, y)$ une troisième fonction bornée et intégrable, λ une fonction qui admet des dérivées partielles du premier ordre continues. La forme linéaire $\omega = P\,dx + Q\,dy$ admet une dérivée extérieure $\omega' = R[dx dy]$ si pour tout contour C (fermé et rectifiable) limitant un domaine D intérieur à Δ, on a

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_D R\,dx\,dy.$$

On démontre que si cette relation a lieu, on a, en même temps,

$$\int_C \lambda(P\,dx + Q\,dy) = \int\int_D \left(\lambda R + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

C'est à cette formule que nous allons recourir dans le problème suivant :

Étant donné un milieu continu à deux dimensions, établir les équations qui en expriment l'équilibre intérieur, le champ de forces X, Y *étant supposé borné et intégrable en chaque point.*

En appliquant les théorèmes généraux relatifs à des systèmes matériels, tenant compte des expressions des efforts, on arrive sans autre restriction au système suivant :

$$\int_\gamma \rho(\alpha X_1 + \beta X_2)\,ds = \int\int_\delta \rho X\,d\sigma,$$
$$\int_\gamma \rho(\alpha Y_1 + \beta Y_2)\,ds = \int\int_\delta \rho Y\,d\sigma,$$
$$\int_\gamma \rho[\alpha(xY_1 - yX_1) + \beta(xY_2 - yX_2)]\,ds = \int\int_\delta \rho(xY - yX)\,d\sigma,$$

([1]) C'est d'ailleurs une tendance générale dans la Mécanique des Fluides. Citons seulement les travaux de MM. G. Bouligand et C. W. Oseen : G. Bouligand, *Sur divers problèmes de la dynamique des liquides;* C. W. Oseen, *Neue Methoden ni der Hydrodynamik.*

([2]) E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 69.

([3]) La restriction relative à l'existence d'une tangente unique est superflue, car si γ est rectifiable α, β sont uniques pour presque tout point du contour.

qui doit être vérifié pour toute région δ limitée par un contour γ, simple rectifiable, possédant une tangente unique et intérieur au milieu envisagé.

La troisième équation ci-dessus peut être transformée en remarquant que

$$\int_\gamma \rho[\alpha(xY_1 - yX_1) + \beta(xY_2 - yX_2)]\,ds$$
$$= \int_\gamma \rho x(\alpha Y_1 + \beta Y_2)\,ds - \int_\gamma \rho y(\alpha X_1 + \beta X_2)\,ds.$$

En effet les fonctions x, y admettent des dérivées partielles du premier et du second ordre.

Donc, en vertu des deux premières équations écrites et compte tenu de la formule établie précédemment, on aura

$$\int_\gamma x(\alpha Y_1 + \beta Y_2)\,ds = \iint_\delta (x\rho Y + Y_1)\,d\sigma,$$
$$\int_\gamma y(\alpha X_1 + \beta X_2)\,ds = \iint_\delta (y\rho X + X_2)\,d\sigma,$$

ce qui conduit aisément à la relation

$$\iint_\delta (Y_1 - X_2)\,d\sigma = 0$$

pour tout domaine δ.

La continuité des fonctions X_2 et Y_1 entraîne leur identité dans tout le milieu. Par suite, $X_2 \equiv Y_1$.

Les équations d'équilibre intérieur deviennent donc, pour tout milieu, à deux dimensions :

$$\int_\gamma (\alpha X_1 + \beta Y_1)\,ds = \iint_\delta \rho X\,d\sigma,$$
$$\int_\gamma (\alpha Y_1 + \beta Y_2)\,ds = \iint_\delta \rho Y\,d\sigma.$$

Le problème qui nous intéressera dans la suite est le suivant :

Supposons que dans un certain milieu on ait partout $X_1 = -Y_2$, *et que l'on connaisse le long de son contour une relation linéaire de la forme*

$$a(s)\,X_1(s) + b(s)\,Y_1(s) = c(s),$$

$a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ *étant trois fonctions continues données.*

Dans ces conditions il s'agit d'intégrer le système ci-dessus qui donne la distribution des efforts dans le cas d'équilibre.

Il n'est pas difficile de voir que si l'on pose

$$X_1 + iY_1 = f(z) \qquad \text{et} \qquad -X + iY = 2i\varphi(z),$$

on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int\int_\delta \varphi(v)\,d\sigma = 0.$$

Or, étant données deux fonctions X, Y, *bornées et intégrables dans* D, *on peut trouver deux fonctions* X_1, Y_1 *continues dans le même domaine et telles que l'équation ci-jointe soit vérifiée pour tout couple* γ, δ.

On aura, on le sait bien,

$$f(z) = h(z) - \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\varphi(v)}{v - z}\,d\omega \qquad (z = x + iy).$$

Si, le long de C, on connaît une relation linéaire de la forme indiquée, le problème sera ramené à un autre, auquel nous avons souvent fait appel, c'est-à-dire à un problème de Hilbert concernant la fonction $h(z)$.

En conclusion, on peut, sans passer aux équations aux dérivées partielles dont on fait usage dans la Mécanique des fluides, considérer des problèmes d'équilibre exprimés directement par les équations générales tirées des théorèmes généraux relatifs aux systèmes matériels.

Dans l'exemple traité, on a pu de cette manière, *faire sur les forces massiques des suppositions bien plus larges que celles habituelles, ce qui a permis d'envisager une solution qui, tout en restant unique et continue, ne doit plus admettre que des dérivées partielles continues.*

En même temps, on en déduit l'utilité pratique de l'algorithme employé, qui s'y introduit nécessairement, se rattachant, pour ainsi dire, à la nature des choses.

Reprenons, pour être dans un cas tiré de la pratique, le problème d'élasticité traité au paragraphe **4**.

On y supposait l'existence des dérivées du second ordre $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, ainsi que leur continuité. Nous allons nous en dispenser, en raisonnant comme suit :

8. Les équations d'équilibre d'un milieu à deux dimensions sont :

$$\int_\gamma (N_1\alpha + T\,\beta)\,ds = \int\int_\delta \rho X\,d\sigma,$$
$$\int_\gamma (T\,\alpha + N_2\beta)\,ds = \int\int_\delta \rho Y\,d\sigma.$$

Supposons qu'il s'agisse d'une plaque élastique D limitée par un contour fermé simple et rectifiable C.

Les forces données X, Y sont représentées par deux fonctions bornées et intégrables dans le domaine D.

On sait que, si u, v désignent les déplacements et que l'on pose

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

en admettant, par conséquent, l'existence et la continuité des dérivées partielles pour ces fonctions, on a

$$N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$N_2 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$T = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Nous nous proposons de déterminer la distribution des déplacements u, v, *en admettant qu'ils possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues, lorsque l'on connaît le long du contour* C *deux relations linéaires de la forme*

$$A(s)\,u(s) + B(s)\,v(s) = C(s),$$
$$a(s)\,\theta(s) + b(s)\,\theta_2(s) = c(s),$$

où

$$\theta_2(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

les fonctions A, B, C, a, b, c *étant continues.*

En introduisant les valeurs de N_1, N_2, T dans les équations d'équilibre, tout en remarquant que $\alpha ds = dy$, $\beta ds = -dx$, on obtient sans difficulté :

$$-\int_\gamma (\lambda + 2\mu)\theta\,dy + \mu\theta_2\,dx + \int_\gamma 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right) = \int\int_\delta \rho X\,d\sigma,$$

$$\int_\gamma (\lambda + 2\mu)\theta\,dx - \mu\theta_2\,dy - \int 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \int\int \rho Y\,d\sigma.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} = \xi, \qquad -\frac{\rho}{2\mu} = \nu,$$

et remarquons les termes qui se détruisent par intégration :

$$\int_\gamma 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \equiv 0,$$

de même

$$\int_\gamma 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \equiv 0.$$

Il vient

$$\int_\gamma (1+\xi)\theta\,dy + \theta_2\,dx = \iint_\delta 2\nu\mathrm{X}\,d\sigma,$$

$$\int_\gamma (1+\xi)\theta\,dx - \theta_2\,dy = -\iint_\delta 2\nu\mathrm{Y}\,d\sigma.$$

Notons encore $(1+\xi)\theta = \theta_1$, multiplions la première relation par i et ajoutons-y, membre à membre, la deuxième. On trouve

$$\int_\gamma (\theta_1 + i\theta_2)\,(dx + i\,dy) = \iint_\delta 2\nu i(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})\,d\sigma,$$

d'où, si l'on pose

$$\theta_1 + i\theta_2 = f(z), \qquad \mathrm{X}+i\mathrm{Y} = \varphi(z) \qquad \text{et} \qquad z = x+iy :$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(v)\,d\sigma = 0$$

pour tout contour fermé γ.

Maintenant, la détermination de la fonction $f(z)$ est simple. Le problème de Hilbert relatif à la fonction $h(z)$, tirée de la formule

$$f(z) = h(z) - \frac{1}{\pi}\iint_\mathrm{D} \frac{\mathrm{X}+i\mathrm{Y}}{v-z}\,d\sigma,$$

conduit à une solution unique, à deux constantes près. On aura de cette manière θ_1 et θ_2.

Considérons le système

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\theta_1}{1+\xi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \theta_2.$$

Si les fonctions θ_1 et θ_2 satisfont à des conditions de Hölder, on peut en tirer aisément les valeurs de u et v, car on aura

$$u + iv = \mathrm{H}(z) - \frac{1}{\pi}\iint_\mathrm{D} \frac{\frac{1}{2}\left[\theta_2 + \frac{\theta_1}{1+\xi}\right]}{v-z}\,d\sigma,$$

la fonction $\mathrm{H}(z)$ étant obtenue par un problème de Hilbert. Il reste donc, pour achever la démonstration, d'établir ce point accessoire.

A cet effet, remarquons que si z est intérieur à D et que l'on décrit un cercle Γ de centre z et de rayon fini r, assez petit pour qu'il soit aussi intérieur à D, on peut négliger le domaine $D - \Delta$, car la fonction

$$g_1(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D-\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - z}\, d\sigma$$

admet des dérivées partielles du premier ordre continues au point z, donc elle satisfait, à plus forte raison, à une condition de Holder ($\alpha < 1$).

Considérons donc l'expression

$$g_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - z}\, d\sigma.$$

Soit z' un point intérieur au cercle Γ. Posons $|z - z'| = h$. On aura

$$g_0(z') - g_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} \frac{\varphi(v)(z - z')}{(v - z)(v - z')}\, d\sigma.$$

Notons $v - z = \rho e^{i\theta}$ en prenant pour axe des x la direction zz'. Soit M une borne supérieure de $|\varphi(v)|$ dans Δ.

On aura

$$|g_0(z') - g_0(z)| < \frac{Mh}{\pi}\iint_{\Delta} \frac{d\varphi\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho h \cos\theta + h^2}}$$
$$= \frac{Mh}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho h \cos\theta + h^2}}.$$

Posons $\rho = ht$, et calculons l'intégrale relative à ρ :

$$I = \int_0^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho h \cos\theta + h^2}} = \int_0^{\frac{r}{h}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}.$$

La présence du point singulier $t = 1$, pour $\theta = 0$, n'est pas gênante, comme on l'a vu à plusieurs reprises.

On trouvera comme résultat :

$$I = \log\left(r - h\cos\theta + \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta}\right) - \log(1 - \cos\theta) - \log h.$$

En intégrant par rapport à θ, on obtiendra un terme de la forme

$$\pi N + 2\pi \log\frac{1}{h} \qquad \text{(N, borné et positif),}$$

d'où l'on tire

$$|g_0(z') - g_0(z)| < MN\,h + 2Mh\log\frac{1}{h}.$$

Supposons $h < 1$, car la difficulté qu'on craint peut intervenir seulement pour les petites valeurs de ce paramètre.

Soit α un nombre compris entre o et 1. L'expression $h^{1-\alpha}\log\frac{1}{h}$ tend vers zéro avec h. Donc il est manifeste que, pour α donné, on peut trouver une valeur de $h < 1$ telle que l'on ait

$$h^{1-\alpha}\log\frac{1}{h} < 1,$$

d'où

$$h\log\frac{1}{h} < h^{\alpha},$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$|g_0(z') - g_0(z)| < \mathrm{K}h^{\alpha}.$$

Cela étant, les fonctions $g(z)$ satisfont à des conditions de Hölder. En particulier, leurs parties réelle et imaginaire y satisfont aussi.

En conclusion, l'examen des équations générales d'équilibre permet, au moins dans des cas importants, de traiter le problème directement, *sans faire appel aux équations aux dérivées partielles*, qui introduisent des restrictions gênantes et cachent en quelque sorte le véritable aspect de la question, en imposant des instruments de travail qui ne s'y rattachent pas directement.

Au contraire, la voie que nous avons suivie plus haut s'impose naturellement et n'exige qu'un petit nombre de restrictions à la généralité des données.

En même temps on vérifie l'affirmation faite, sur le rôle des forces massiques, dans tout problème d'équilibre, qui doit se réduire à un problème d'intégration lorsqu'on en sait trouver l'algorithme convenable.

Vu et approuvé :

Paris, le 26 mars 1931.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 26 mars 1931.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.