MARIE CHARPENTIER

Sur les points de Peano d'une équation différentielle du premier ordre

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1931

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1931__124__1_0>

M. Charpentier

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE POITIERS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M^LLE Marie CHARPENTIER

1^re THÈSE. — SUR LES POINTS DE PEANO D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE.

2^e THÈSE. — LES SURFACES MINIMA.

Soutenues le 12 Juin 1931, devant la Commission d'examen.

M. M. Montel *Président.*

Garnier
Bouligand } *Examinateurs.*
Got

C L U J
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL", STR. MEMORANDULUI 22
1 9 3 1

UNIVERSITÉ DE POITIERS

Faculté des Sciences de Poitiers

	M. M.	
Doyen :	BILLARD A.	Zoologie
Prof. hon. :	SCHNEIDER A.	
Professeurs :	TURPAIN A.	Physique
	BODROUX F.	Chimie
	TABOURY F.	Chimie
	GARNIER R.	Calcul différentiel et intégral
	BOULIGAND G.	Mécanique rationnelle
	GRUMBACH A.	Physique
	BECQUEREL P.	Botanique
	PATTE E.	Géologie et minéralogie
	GOT chargé du cours de calcul différentiel et intégral	
Secrétaire :	BESSE S.	

A

Monsieur Paul Montel

Hommage de respectueuse admiration.

A

Monsieur René Garnier

et

Monsieur Georges Bouligand

Hommage de profonde reconnaissance.

SUR LES POINTS DE PEANO D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Introduction

Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad y' = f(x, y)$$

où f est *continue sans plus* par rapport à l'ensemble des variables y et x. L'existence en un point P de la région de continuité de f, d'au moins une intégrale de (E) a été démontrée par plusieurs méthodes (1) et M. PEANO (2) découvrit de plus, le fait appelé aujourd'hui „*phénomène de* PEANO“: possibilité d'existence d'une infinité d'intégrales issues d'un même point P. Ce faisceau issu de P est „sans trous“ [résultat de MIE (3)] et il est limité en haut et en bas par deux intégrales: l'intégrale supérieure M(P) et l'intégrale inférieure m(P) (4). Le domaine d'existence des intégrales a été prolongé par M. PERRON (5) Toutefois la question traitée dans la plupart des travaux existants sur ce problème est celle de *l'unicité*: recherche de conditions suffisantes pour assurer en un point P, l'unicité de la solution, soit des deux côtés de P, soit d'un seul côté. Je ne puis entreprendre ici, même d'énumérer les nombreux résultats obtenus dans cet ordre d'idées; je citerai seulement le cas d'unicité à droite obtenu par M. PEANO (6); f décroissante en y, les conditions d'unicité (des deux côtés) de M. OSGOOD (7), M. NIKLIBORC (8),

(1) Voir en particulier: ARZELA: Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna (5e série, t. V 1895 p. 75, 88 et 5e série t. VI 1896 p. 33—42). LA VALLÉE POUSSIN: Mémoires couronnés et autres mémoires. Acad. de Belgique in 8° 47, 1892/3 mem. n° 6 p. 3–82, P. MONTEL, Thèse, Paris 1907 ou Ann. Ecole Normale. 3e série t. 24, 1907 p. 264.

(2) PEANO, *Mathematische Annalen* Band 37, (1890) p. 182–220.

(3) MIE, *Mathematische Annalen* Band 43, (1893) p. 533: Traduction avec additions de l'article de M. PÉANO écrit en symboles logiques.

(4) OSGOOD: *Monatshefte für Mathematik und Physik* T. 9, 1898 p. 331.

(5) PERRON: *Math. Ann.* 78 (1915) p. 378-384.

(6) et (7) PEANO et OSGOOD loc. cit.

(8) W. NIKLIBORC: *Studia Mathematica*, Lwow T. I, 1929 p. 201—210.

M. MÜLLER [1] et les conditions d'unicité, (à droite en général) obtenues dans de récents travaux japonais prolongeant ceux de M. TONELLI [2] et M. MONTEL [3] : en particulier le critérium de M. IYANAGA [4] et les résultats de M. NAGUMO [5]

Ce travail laisse de côté toute recherche sur les conditions d'unicité et s'occupe plus spécialement de l'étude du champ des intégrales dans le cas d'une seule équation $y' = f(x, y)$ [6] où f n'est soumise à aucune autre condition que celle de la continuité.

Une condition d'unicité unilatérale (d'ailleurs absolument quelconque) n'interviendra qu'à titre d'hypothèse lorsqu'il s'agira d'appliquer les résultats généraux à des cas particuliers.

Les points où se produit le „*Phénomène de* PEANO" ou „*Points de* PEANO" peuvent couvrir un domaine d'après l'exemple de M. LAVRENTIEFF [7], ce qui montre l'inutilité de tout effort tendant à déterminer l'ensemble E des points de PEANO dans le cas général. D'autre part, la relation entre la nature de f et la répartition des points de PEANO est difficile à saisir : pour faire disparaître un point de PEANO il peut suffire de changer f en $-f$ ou en $\frac{f}{2}$ [8] par conséquent l'étude de E en partant de f semble encore interdite. Il y a donc lieu de chercher un moyen indirect d'atteindre ces points : c'est ce que j'ai tenté en considérant systématiquement la dépendance d'une intégrale vis à vis de son point d'origine, et en particulier la dépendance du faisceau issu d'un point P [ou zône d'émission de P, ou H(P)] vis à vis de P.

Ce dernier problème est déjà posé dans sa Thèse, puis repris en 1925 par M. MONTEL qui obtient les premiers résultats dans cette voie.

Même ainsi circonscrit, le problème n'est pas facile, étant donnée la souplesse avec laquelle H(P) échappe à tous les moyens de mesure que l'on tente de lui appliquer, et par suite la difficulté de comparer

---

(1) MÜLLER : *Mathematische Zeitschrift* T. 26, 1927, p. 617—645.

(2) L. TONELLI : *Rendiconti della R. Acad. Naz. dei Lincei* vol. I, série 6 1° sem. p. 272.

(3) P. MONTEL : *Bulletin des Sciences Mathématiques* 2e série T. 30, p. 205—217.

(4) IYANAGA : *Japanese Journal of Mathematics* 1928, p. 253.

(5) NAGUMO : Voir en particulier : *Japanese Journal of Mathematics* 1930, p. 144.

(6) Pour le cas d'un système d'équations différentielles voir : MÜLLER, loc. cit. FUKUHARA : *Japanese Journal of Mathematics* 1929, 30 *Proceedings of the Imperial Academy*, 1928. etc.

(7) LAVRENTIEFF : *Math. Zeitschrift*, 1925, T. 23, p, 197 à 209. C'est ce que nous appellerons dans la suite le „Phénomène de LAVRENTIEFF".

(8) Par exemple pour le point singulier de M. MÜLLER loc. cit. ou pour l'exemple de point de PEANO : BIEBERBACH, Differentialgleichungen, p. 54.

des valeurs de deux points de Peano P et P′ en donnant un sens à une relation de la forme: $H(P) \gtrless H(P')$.

Cependant une des tendances des mathématiques modernes à l'origine de laquelle se trouve M. Hadamard, et dont l'importance s'est accrue dans différentes directions, tant par les travaux de M. **Fréchet** que par ceux de M. Montel, et bien d'autres recherches, consiste à raisonner sur des êtres de plus en plus compliqués, considérés simplement comme des éléments d'ensembles plus généraux. C'est ainsi qu'une fonction ne sera plus uniquement *un nombre* dont la valeur dépend de la valeur *d'un nombre*, mais un élément d'un ensemble déterminé, $\mathfrak{M}$ en dépendance avec un élément d'un ensemble $\mathfrak{N}$ (les deux ensembles pouvant d'ailleurs coïncider). Ainsi, pour les fonctions de lignes, si $\mathfrak{M}$ reste un ensemble de nombres, $\mathfrak{N}$ devient un ensemble de courbes, etc....

Il est vrai qu'en général, comme dans l'exemple précédent, $\mathfrak{M}$ reste un ensemble de nombres, la complexité se portant sur $\mathfrak{N}$, tandis que dans le cas actuel, $\mathfrak{N}$ est simplement une région du plan des xy et $\mathfrak{M}$: ensemble des intégrales de E, devient très compliqué. Il semble même difficile de déterminer à quelle classe d'ensembles appartient $\mathfrak{M}$: peut-il être distancié ? Cependant on peut affirmer qu'il est un espace (V) car le voisinage d'un de ses éléments est parfaitement déterminé (bande de largeur ε construite sur une intégrale) et les „*points d'accumulation*“ ainsi définis, lui appartiennent.

Ainsi la dépendance de l'intégrale I (P) vis à vis de P, m'a semblé pouvoir être considérée comme une relation fonctionnelle généralisée. Remarquons que cette relation, si elle est toujours continue quand l'unicité est assurée, peut ne pas l'être dans d'autres cas. Or, les fonctions continues de variables réelles ont été prolongées par les *fonctions de* Baire. C'est pourquoi, dès l'apparition, dans mes recherches, de la *semi-continuité* de H (P), semi-continuité qui joue un rôle essentiel dans les travaux de M. Baire, j'ai cherché, sinon des théorèmes à appliquer, du moins des idées directrices, dans la théorie des fonctions discontinues, espérant que cette théorie, orientée vers la détermination des ensembles de points singuliers, me permettrait d'atteindre l'ensemble des points de Peano apparenté à l'ensemble des points de non-continuité de l'intégrale.

Non-seulement j'ai pu, grâce à ce guide, obtenir, (Chapitre IV) effectivement l'ensemble des points de Peano, dans un cas particulier, mais bien des fois, j'ai trouvé des résultats analogues dans les deux théories: tels les théorèmes suivants qui s'appliquent, soit directement, soit avec certaines restrictions, à la correspondance [P, I (P)].

a) Le maximum d'une fonction est une fonction semi-continue supérieure et le minimum une fonction semi-continue inférieure (1).

Ce théorème s'applique sans restriction: M(P) est semi-continue supérieurement et m(P) est semi-continue inférieurement.

b) Les discontinuités de première espèce d'une fonction d'une variable sont au plus en infinité dénombrable (2).

c) Une fonction semi-continue supérieure est ponctuellement discontinue (3).

Je n'ai pu appliquer ces deux derniers théorèmes à H(P) que si P appartient à une courbe de Jordan à tangente continue.

d) L'ensemble des points où ω(P) $\geq \sigma$ est fermé (4).

Le théorème s'applique en considérant la surface de H(P) prolongée jusqu'aux frontières droite et gauche de R [voir chap. IV], surface qui caractérise un certain ensemble de points, plus vaste que celui des points de Peano.

e) Exemple d'une fonction ponctuellement discontinue.

Le problème qui se pose naturellement après ces résultats est le suivant: que dire du champ des intégrales d'une équation différentielle, limite d'une suite d'équations différentielles pour lesquelles l'unicité est assurée partout? C'est en quelque sorte le „*problème de* Baire"; que pourrons-nous dire des fonctions limites des fonctions continues?

Malheureusement, ici, la distance augmente entre les deux théories: *Dans quels cas, à quelles conditions, pourrons-nous affirmer que le champ des intégrales de l'équation limite est bien limite des champs des intégrales des équations de la suite?*

M. Montel a démontré qu'il existe toujours en un point P, une intégrale limite d'une suite d'intégrales des équations de la suite, issue de P.

Grâce a ce résultat, j'ai pu, sans résoudre le problème, le rapprocher d'une autre question: étude des intégrales d'une équation différentielle pour laquelle il existe une „*intégrale complète*". Ce mot pouvant être entendu dans un sens très général que m'a signalé M. Bouligand, „*famille d'intégrales telle qu'il en passe au moins une par chaque point du plan et qui, par conséquent suffisent* à déterminer par la pente de leur tangente, la valeur de $f(x, y)$.

Quelques exemples éclairent un peu la question et permettent de poser avec précision le problème suivant: *existe-t-il des intégrales in-*

(1) Baire: Leçons sur les fonctions discontinues p. 72.

(2) Hobson: Theory of functions of a real variable p. 286.

(3) Baire: Loc. cit. p. 73.

(4) Ibid: p. 77,

accessibles au processus limite défini plus haut, c'est-à-dire *qui ne peuvent être limites d'aucune suite d'intégrales des équations de la suite ci-dessus, de quelque façon que soient choisies ces fonctions et de quelque façon que soit choisi pour chaque équation le point d'origine des intégrales ?*

Les principaux résultats de ce travail ont paru aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris (1) et de l'Académie Royale de Belgique (2).

Je remercie vivement M. MONTEL pour les encouragements et les conseils qu'il m'a donnés, prolongeant les enseignements de ses beaux travaux ; je remercie aussi M. POMPEIU et M. SERGESCO qui ont bien voulu faciliter l'impression de ce mémoire, et j'adresse à M. BOULIGAND l'expression de ma profonde reconnaissance pour la formation que je lui dois et le dévouement avec lequel il n'a cessé de me prodiguer ses conseils au cours de ce travail.

Chapitre I.

Existence d'un faisceau continu d'intégrales issues d'un point.

1. Soit l'équation

$$(E) \qquad y' = f(x, y)$$

$f(x, y)$ fonction continue sans plus par rapport à l'ensemble des variables x et y dans une certaine région $\mathcal{R}$ (3) du plan des $x\,y$ (4). Soit $P_0(x_0, y_0)$ un point du plan, supposons que dans le rectangle R (contenu dans $\mathcal{R}$) :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \quad , \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

on ait :

$$|f(x, y)| < M ;$$

nous choisissons a de façon que $aM < b$.

2. **Théorème d'existence.** *Par tout point P_0 il passe au moins une intégrale de E définie dans l'intervalle $x_0 - a$, $x_0 + a$.*

Appelons ligne polygonale de CAUCHY une ligne brisée :

$$y = \phi_p(x)$$

(1) Comptes rendus 191, 1930, p. 509 et 912 — 192, 1931, p. 139 et 401.

(2)

(3) Par exemple un rectangle tel qu'il est défini plus bas.

(4) La substance de ce chapitre est empruntée à la Thèse de M. MONTEL ; ayant besoin pour les chapitres suivants de mettre en évidence certains lemmes ou théorèmes, j'ai été amenée à en modifier quelque peu l'exposé.

telle que le coefficient angulaire de chacun de ses côtés soit égal à la valeur que prend $f(x, y)$ à l'une des extrémités de ce côté.

Divisons l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$ en intervalles partiels par les points de division $x_1 x_2 \dots x_n$ et $X = x_0 + a$; construisons la ligne polygonale de Cauchy $y = \phi_p(x)$ passant en P_0 et dont les sommets sont sur les parallèles à oy d'abcisses $x_0, x_1 \dots x_n$ X. Dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}), $\phi_p(x)$ varie linéairement et la pente du côté correspondant de la ligne brisée est égale soit à $f[x_k, \phi_p(x_k)]$ soit à $f[x_{k+1}, \phi_p(x_{k+1})]$. Il est facile de voir que toutes les fonctions $\phi_p(x) - y_0$ sont bornées et inférieures à b, en valeur absolue.

Toutes les fonctions $\phi_p(x)$ passant par P_0 forment une famille de fonctions également continues (elles sont à nombres dérivés bornés); par conséquent, de toute suite infinie de fonctions ϕ_p, ou peut extraire une suite nouvelle ayant une fonction limite. Il reste à montrer que cette fonction limite est une intégrale lorsque le nombre des côtés des lignes polygonales augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers O.

Soit :

$$\phi_1 \; \phi_2 \dots \phi_p \dots$$

une suite infinie de fonctions ϕ_p ayant pour limite la fonction $\phi(x)$. Appelons $\phi_p'(x)$ la dérivée à droite, par exemple, de la fonction ϕ_p. Prenons une valeur x de l'intervalle $x_0, x_0 + a : x$ appartient à l'un des intervalles partiels relatifs à la ligne brisée ϕ_p.

Supposons que x_k soit l'un des points de cette division, extrémité de l'intervalle partiel qui contient x et tel que $\phi'_p(x)$ soit égal à la valeur de $f(x, y)$ au sommet de la ligne polygonale dont l'abcisse est x_k. On a :

$$\phi'_p(x) = f[x_k, \phi_k(x_k)];$$

étant donné un nombre positif ε on peut lui faire correspondre un nombre positif δ tel que, dans tout carré de côté inférieur à 2δ, l'oscillation de f ne dépasse pas ε. Prenons p assez grand pour que

$$|x - x_k| < \delta$$

$$|\phi(x_k) - \phi_p(x_k)| < \frac{\delta}{2} \qquad |\phi(x_k) - \phi(x)| < \frac{\delta}{2}$$

La dernière inégalité étant possible, parce que le nombre des points de division x_k augmente indéfiniment avec p tandis que la distance de deux points consécutifs tend vers O. On a alors

$$|\phi(x) - \phi_p(x_k)| < \delta$$

et par suite,

$$| \phi_p'(x) - f[x, \phi(x)] | < \varepsilon$$

Donc les fonctions

$$\phi_1'(x), \phi_2'(x) \ldots \phi'_p(x) \ldots$$

tendent uniformément vers la limite :

$$f(x, \phi).$$

Par suite, les fonctions

$$\int_{x_0}^{x} \phi'_p(x)\, dx$$

tendent uniformément vers :

$$\int_{x_0}^{x} f(x, \phi)\, dx$$

Or,

$$\phi_p(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi'_p(x)\, dx$$

Donc

$$\phi(x) = \lim_{p=\infty} \phi_p(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \phi)\, dx$$

et par conséquent :

$$\phi'(x) = f[x, \phi(x)];$$

$\phi(x)$ est une intégrale issue de P_0 définie dans : $x_0 - a, x_0 + a$.

3. Théorème de compacité. *Les intégrales de* (*E*) ***forment un ensemble compact en soi*** (1) c'est-à-dire que toute famille infinie d'intégrales admet au moins une fonction d'accumulation qui est encore une intégrale de (E).

Les intégrales de (E) forment une famille de ***fonctions également continues à dérivée également continue***.

En effet, à tout nombre positif ε arbitrairement petit, on peut faire correspondre un nombre positif δ, tel que dans le carré de côté δ l'oscillation de f soit inférieure à ε.

(1) Voir l'article de M. MONTEL : *Bulletin des Sciences Math.* 54, 1926 p. 507.

Or si nous prenons :

$$\rho \leq \frac{\delta}{M} \quad \text{et} \quad \rho \leq \delta$$

tout arc d'intégrale défini pour :

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

avec

$$|x_1 - x_2| \leq \rho$$

appartient à un carré de côté δ :

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq \delta$$

Il en résulte que le *long d'une intégrale* on a :

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon \text{ pour } |x_1 - x_2| \leq \rho$$

c'est-à-dire

$$|\phi'(x_1) - \phi'(x_2)| \leq \varepsilon \text{ pour } |x_1 - x_2| \leq \rho$$

Or on a un théorème de M. Montel (1). *Si une famille de fonctions continues est telle que ces fonctions possèdent toutes des dérivées également continues, de toute suite infinie des fonctions $f(x)$ on pourra extraire une suite partielle, convergente, telle que la suite des dérivées de ses termes converge vers la dérivée de la fonction limite.*

En appliquant ce théorème à une suite d'intégrales de (E) nous voyons que de toute suite infinie d'intégrales, nous pouvons extraire une suite partielle convergeant uniformément vers une fonction continue dont la dérivée est *limite* des dérivées des fonctions de la suite, donc est égale à $f(x, y)$ qui est continu, et par conséquent est une intégrale.

Donc de *toute suite infinie d'intégrales, on peut extraire une suite partielle convergeant vers une intégrale.*

Corollaire I. *Une suite infinie d'intégrales issues d'une suite de points P_i convergeant vers un point P_0, possède un ensemble d'accumulation formé d'intégrales issues de P_0.*

Corollaire II. *Si toutes les intégrales de la suite passent par un point fixe Q, toutes les intégrales d'accumulation de la suite passent par Q.*

4. Théorème de Mie. *Par tout point situé entre deux intégrales issues de P, il passe toujours une intégrale issue de P.*

Soit Q un point dont l'ordonnée Y est comprise entre les ordonnées $\phi_1(X)$ et $\phi_2(X)$ des points de même abcisse de deux intégrales issues de P.

(1) P. Montel : *Thèse* p. 20.

Par Q il passe une intégrale de (E) définie dans l'intervalle ($X-a$, X) soit $\Phi(x)$; en Q on a :

$$\phi_1(X) \leq \Phi(X) \leq \phi_2(X).$$

Deux cas peuvent se présenter :

1°. Il existe une valeur x_1 de x, telle que : $(x_0 < x_1 \leq X)$

$$\Phi(x_1) = \phi_1(x_1) ;$$

il existe donc une intégrale issue de P passant par Q, soit $\theta(x)$

$$\theta(x) = \phi_1(x) \qquad \text{pour} \qquad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$\theta(x) = \Phi(x) \qquad \text{pour} \qquad x_1 \leq x \leq X$$

Même raisonnemet si pour une abcisse x_2 on a : $\Phi(x_2) = \phi_2(x_2)$.

2°. On a toujours pour

$$x_0 < x \leq X$$

$$\phi_1(x) < \Phi(x) < \phi_2(x)$$

comme $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$ et que ϕ_1, ϕ_2 et Φ sont continues, on a nécessairement :

$$\Phi(x_0) = \phi_2(x_0) = \phi_1(x_0) = y_0$$

C. Q. F. D.

5. **Théorème d'Osgood-Montel.** *Les intégrales de (E) issues de P sont comprises entre deux courbes limites qui sont des intégrales issues de P : l'intégrale supérieure M(P) et l'intégrale inférieure m(P).*

Soit I(P) une intégrale quelconque issue de P ; désignons par M(P) la fonction supérieure (la plus grande des limites) des I(P).

Lemme I. *Par un point Q de M(P) il passe une intégrale issue de P.*

Q par hypothèse, est point accumulation de points appartenant à des I(P), par Q il passe donc une I(P) [d'après les corollaires du théorème de compacité].

Lemme II. *Au-dessus de M(P) il n'existe aucune I(P).*

Soit Q un point d'une $I_1(P)$ situé *au-dessus* de M(P), soit R le point de même abcisse de M(P), soit 2ε la longueur QR et soit enfin T le milieu de QR.

Tout point du segment QT est situé *entre* deux intégrales issues de P : $I_1(P)$ et l'intégrale issue de P qui passe par R (lemme I) et par conséquent est situé sur une intégrale issue de P (Théorème de Mie)

Il existe donc une infinité d'intégrales issues de P possédant des points dans QT, donc à une distance positive au dessus de M(P) ce qui est contraire à la définition de la plus grande des limites.

LEMME III. *Si Q appartient à M(P), à droite de Q [si Q est à droite de P] M(P) et M(Q) sont confondues.*

1) Supposons que M(Q) possède un point R au-dessus de M(P), il existerait alors une intégrale passant par P et Q, puis une intégrale passant par Q et R (Lemme I) donc une intégrale issue de P passant par R *au-dessus* de M(P) ce qui est impossible (lemme II).

2) Si M(Q) posséde un point R *au-dessous* de M(P), il existe une intégrale passant par Q et R et une intégrale passant par P et T [T = point de M(P) de même abcisse que R]. Cette dernière intégrale qui ne peut *passer au-dessus de Q* [Lemme II] doit couper la première en un point S d'abcisse comprise entre les abcisses de Q et de R, par conséquent on obtient une intégrale issue de Q [QST] qui possède au moins un point T au-dessus de M(Q), ce qui est impossible.

6. On peut maintenant démontrer que M(P) est une intégrale. Soient Q_1 Q_2 $Q_3 \ldots Q_n \ldots$ une infinité de points de M(P) tels que leurs abcisses forment un ensemble partout dense [par exemple dans: $x_0 \leq x \leq x_0 + a$]. Il existe une intégrale passant par P et Q_1, soit $\psi_1(x)$. Prenons Q_1 et Q_2 et soit Q' celui de moindre abcisse, et l'autre Q'' : il existe une intégrale reliant P et Q' puis Q' et Q'', il y a donc une intégrale passant par P, Q_1, Q_2 soit $\psi_2(x)$ etc....

Il y a une intégrale $\psi_n(x)$ issue de Q_1 $Q_2 \ldots Q_n$; en effet soient Q' $Q'' \ldots Q^{(n)}$ ces mêmes points rangés dans l'ordre des abcisses croissantes, il existe une intégrale passant par P et Q' puis une intégrale passant par P, Q' et Q'' etc.

Considérons la suite des intégrales:

$$\psi_1(x) \ldots \psi_n(x) \ldots$$

elles ont pour limite une intégrale issue de P [théorème de compacité], intégrale qui doit passer par construction, par tous les points Q_n et par suite se confondre avec M(P), deux fonctions continues ne pouvant être égales pour un ensemble partout dense de valeurs de x, sans être confondues.

M_d(P) est donc une intégrale.

Même raisonnement à gauche.

Même raisonnement pour m(P) qui, par conséquent, est aussi une intégrale issue de P.

Chapitre II.

Semi-continuité et limites du faisceau d'intégrales

7. Appelons *zône d'émission* de P ou H(P), la région limitée par M(P) et **m**(P): d'après le théorème de Mie, H(P) se confond avec l'ensemble des intégrales issues de P et elle est fermée. Elle caractérise en quelque sorte P dans le champ des intégrales, tout en remarquant que la nature de P est déterminée par l'allure de H(P) *au point de vue local*: pour qu'un point soit *régulier* il faut et il suffit que H(P) se réduise à une courbe unique au *voisinage de P.* Cependant l'étude de H(P) dans sa totalité, étude plus accessible, peut fournir de précieux renseignements sur le champ des intégrales.

Appelons *„arc de contact"* de M(P_i) et de M(P_j) un arc d'un seul tenant commun à M(P_i) et M(P_j), plus spécialement, un *„arc de traversée"* A sera un arc de contact tel que, si M(P_i) est immédiatement à gauche de A, au-dessous de M(P_j), immédiatement à droite de A, M(P_i) sera au-dessus de M(P_j) ou réciproquement.

1°. **Semi-continuité de** H(P).

8. Considérons simultanément deux points de la région utile, P_i et P_j: nous établissons d'abord le théorème auxiliaire suivant.

Théorème A. (¹) *Les intégrales supérieures [inférieures] issues de deux points distincts P_i et P_j ont au plus un arc de traversée lequel est dans la bande Δ_{ij} située entre les verticales de P_i et P_j. De plus si P_j n'appartient pas à la zône d'émission de P_i, bord supérieur exclu [bord inférieur exclu] les intégrales supérieures [ou inférieures] n'ont aucun arc de traversée.*

Remarque. Il existe au plus pour deux intégrales supérieures [ou inférieures] outre peut-être l'arc de traversée quand il existe, deux arcs de contact qui, lorsque P_i n'appartient pas à $H(P_j)$ sont strictement extérieurs, de part et d'autre, à Δ_{ij}.

La démonstration s'effectue en quatre étapes.

I. *$M(P_i)$ et $M(P_j)$ possèdent au plus un arc de contact dans chacune des bandes Δ_g Δ_{ij} Δ_d.* [Δ_g est à gauche de Δ_{ij} et Δ_d à droite.]

Admettons l'existence de deux points de contact consécutifs K et Q extrémités de deux arcs de contact disjoints situés dans un même **Δ.** Ces deux points définissent sur M(P_i) un arc l et sur M(P_j) un arc

(¹) Voir la thèse de M. Montel, p, 40. Dans la suite les théorèmes auxiliaires seront désignés par des lettres A, B . . . et les résultats seront énoncés sous le nom de théorèmes : I, II, III, etc.

h, sans points communs autres que leurs extrémités K et Q ; soit l, au-dessus de h, mais l peut être prolongé par $M(P_j)$ [*à gauche* ou *à droite* suivant la position de P_j], jusqu'en P_j, il appartiendrait donc à une intégrale issue de P_j et serait situé au-dessus de $M(P_j)$ ce qui est impossible [Théorème d'OSGOOD-MONTEL].

Même énoncé avec $m(P_i)$ *et* $m(P_j)$.

II. $M(P_i)$ *et* $M(P_j)$ *ne possèdent aucun arc de traversée extérieur à* Δ_{ij}

Soit K un point d'un arc de traversée appartenant par exemple à Δ . Ainsi K est sur $M(P_i)$ *à gauche* de P_i et sur $M(P_j)$ *à gauche* de P_j, donc à gauche de K, $M(K)$ est confondue tant avec $M(P_i)$ qu'avec $M(P_j)$ [lemme III du Théorème d'OSGOOD-MONTEL] dans toute la région utile. $M(P_i)$ et $M(P_j)$ peuvent donc avoir dans Δ_g un arc de contact, mais non un arc de traversée — *de même dans* Δ_d; *même énoncé pour* $m(P_i)$ *et* $m(P_j)$.

III. *Si* P_i *est extérieur à* $H(P_j)$, *il n'y a aucun point de contact dans* Δ_{ij} *entre une intégrale issue de* P_i, $I(P_i)$, *et une intégrale issue de* P_j, $I(P_j)$.

Soit K le premier point de contact (à partir de P_i) de $I(P_i)$ et de $H(P_j)$ [dans Δ_{ij}], P_iK est au-dessus de $H(P_j)$, si P_i est au-dessus $H(P_j)$ [au dessous dans le cas contraire].

Il est possible de former une intégrale issue de P_i de la façon suivante : l'arc $P_i K$ est emprunté à $I(P_i)$, puis, à partir de K dans la direction $K P_j$, nous prenons l'arc $K P_j$ de l'intégrale supérieure [ou inférieure] de P_j. Nous formons ainsi une intégrale passant par P_i et P_j, ce qui est impossible par hypothèse.

Remarque : Si P_i n'appartient pas à $H(P_j)$, P_j n'appartient pas à $H(P_i)$.

IV. *Si* P_i *appartient à* $M(P_j)$, $M(P_i)$ *et* $M(P_j)$ *n'ont aucun arc de traversée.*

Soit P_i à droite de P_j [donc sur $M_d(P_j)$]. A droite de P_i, $M(P_i)$ et $M(P_j)$ sont confondues [lemme III du théorème d'OSGOOD-MONTEL] ; il n'y a donc pas d'arc de traversée à droite de P_i. A gauche de P_i, $M(P_i)$ n'est au-dessous d'aucune des intégrales issues de P_i et en particulier de $M(P_j)$ qui est une intégrale passant par P_i. Soit K le premier point [de P_i inclus à P_j exclu] où $M_g(P_i)$ se sépare de $M(P_j)$, à partir de K tout point de $M_g(P_i)$ satisfait aux conditions de III et $M(P_i)$ à partir de K possède au plus un arc de contact avec $M(P_j)$ à gauche de P_j. [I et II].

Même raisonnement dans Δ_d. même énoncé avec $m(P_i)$ et $M(P_j)$ et le théorème A est démontré

9. **Théorème I.** [1] *L'intégrale supérieure $M(P)$ est fonction semi-continue supérieure de la position de P et l'intégrale inférieure $m(P)$ est fonction semi-continue inférieure de la position de P,* ou : à tout nombre positif ε arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre positif η, tel que les inégalités :

$$|x_i - x| \leq \eta \quad , \quad |y_i - y| \leq \eta$$

entraînent :

$$M(P_i) \leq M(P) + \varepsilon$$
$$m(P_i) \geq m(P) - \varepsilon.$$

Convenons d'écrire pour deux intégrales I_1 et I_2 :

1) $I_1 \geqq I_2$

si pour toute abcisse x de $\mathcal{R}$ on a :

$$y_1 \geqq y_2$$

2) $I_1 \geqq I_2 - \varepsilon$

si pour toute abcisse x de $\mathcal{R}$ on a :

$$y_1 \geqq y_2 - \varepsilon$$

[on définirait de façon analogue : $I_1 \leqq I_2$, $I_1 \leqq I_2 + \varepsilon$]

3) $I_1 > I_2$

si pour toute abcisse x de $\mathcal{R}$ on a :

$$y_1 > y_2.$$

Pour la démonstration du théorème I nous avons deux cas à considérer.

Démontrons seulement le théorème pour l'intégrale supérieure.

10. *a*) Les points P_i tendent vers P en restant dans la *„région supérieure“* de $M(P)$ [2], c'est-à-dire qu'aucun point P_i n'est au-dessous de $M(P)$.

D'après le théorème A :

$$M(P_i) \geqq M(P). \tag{1}$$

D'après le théorème de compacité, les $M(P_i)$ ont pour ensemble

---

[1] Voir mon article du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 54, Juillet 1930, p. 203.

[2] Voir le mémoire de M. Montel : *Bulletin des Sciences Mathematiques* ; 50, p. 205, où est établi cette partie *a*) du théorème.

d'accumulation une ou plusieurs intégrales issues de P ; soit L_p l'une d'elles. Comme l'inégalité (1) a lieu, quelque soit P_i :

$$L_p \geq M(P) \tag{2}$$

mais d'autre part, par définition de M (P) :

$$L_p \leq M(P) \tag{3}$$

ce qui entraîne :

$$L_p = M(P)$$

et les $M(P_i)$ convergent uniformément vers M (P). Donc : *à tout nombre positif* ε *arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre positif* η *tel que les inégalités :*

$$|x_i - x| \leq \eta \qquad |y_i - y| \leq \eta$$

pour tout point tel que : [en appelant y_M l'ordonnée d'un point de M (P)]

$$y_i \geq y_M(x_i)$$

entraînent :

$$M(P) \leq M(P_i) \leq M(P) + \varepsilon \tag{4}$$

11. *b*) Considérons maintenant une suite de points P_i convergeant vers P en restant au-dessous de M (P).

D'après le théorème A, l'unique arc de traversée K de M (P) et de $M(P_i)$ est, quand il existe, d'un seul tenant et appartient à la bande Δ_{0i} [située entre les verticales de P et de P_i].

1) K n'existe pas ; on a alors immédiatement : (Théorème A) :

$$M(P) \geq M(P_i) \tag{5}$$

2) K existe, il sépare alors sur $M(P_i)$ une partie L non au-dessous de M (P) et une partie N (contenant P_i) non au-dessus de M (P). Il vient donc :

$$K = M(P) \tag{6}$$

$$N \leq M(P) \tag{7}$$

Considérons Q_i extrémité commune à K et à L. L prolonge $M(P_i)$ dans le sens $P_i\,Q_i$, donc en L, $M(P_i)$ et $M(Q_i)$ sont confondues [lemme III du théorème d'Osgood-Montel], Q_i qui est contenu dans Δ_{0i} et appartient à M (P) tend vers P en même temps que P_i ; or Q_i satisfait aux conditions de *a*) et il vient : à tout nombre positif ε arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre positif θ tel que les inégalités

$$|x(Q_i) - x| \leq \theta \quad , \quad |y(Q_i) - y| \leq \theta \tag{8}$$

entraînent

(9) $$M(P) \leq L \leq M(P) + \varepsilon\,;$$

il suffira de choisir η tel que les inégalités :

$$|x_i - x| \leq \eta \quad , \quad |y_i - y| \leq \eta$$

entraînent les inégalités (8) et par conséquent pour que, en réunissant (6, 7, 9), elles entraînent :

$$M(P_i) \leq M(P) + \varepsilon.$$

12. Corollaire I. *Lorsque l'unicité de l'intégrale est réalisée en un point P, l'intégrale unique issue de P est fonction continue de P* [1].

Corollaire II. *La zône d'émission H(P) est fonction semi-continue supérieure de P* — c'est-à-dire que : à tout nombre positif ε arbitrairement petit, on peut faire correspondre un nombre positif η tel que les inégalités :

$$|x_i - x| \leq \eta \quad , \quad |y_i - y| \leq \eta$$

entraînent

$$H(P_i) \leq H(P) + \varepsilon$$

en appelant $H(P) + \varepsilon$ la figure obtenue en construisant une bande de largeur ε *au-dessus et au-dessous* de $H(P)$. Il serait difficile de concevoir $H(P) - \varepsilon$.

Corollaire III. *Si pour un point P, H(P) se réduit à une courbe unique, à tout nombre positif ε arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre positif η tel que les inégalités :*

$$|x_i - x| \leq \eta \qquad |y_i - y| \leq \eta$$

entraînent

$$M(P_i) - \varepsilon \leq m(P_i) \leq M(P_i).$$

Il suffit de choisir η de façon à avoir simultanément :

$$M(P_i) \leq M(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(P_i) \geq m(P) - \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où :

$$M(P_i) - \frac{\varepsilon}{2} \leq M(P) = m(P) \leq m(P_i) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

[1] Résultat déjà obtenu par M. Montel loc. cit et depuis par plusieurs auteurs à des points de vue différents.

2° Limites de H(P) pour une courbe de Jordan extérieure à H(P).

13. **Théorème B.** *Si une courbe de* Jordan *C, en un de ses points P est extérieure à $H(P)$, le long d'un arc A d'origine P, à tout point P' de A on peut faire correspondre un point Q' de l'arc $P'P$ distinct de P tel que l'arc $Q'P$ (extrémités exclues) appartienne au domaine situé entre $H(P)$ et $H(P')$.*

Lemme. *Si l'arc $P'P$ n'est pas situé entre $H(P)$ et $H(P')$ [P et P' exclus] il a au moins un point commun avec le bord de $H(P')$ le plus voisin* de $H(P)$.

Supposons A au-dessus de H(P).

Soit δ_s la *région supérieure* de M(P) [voir Théorème I, *a*)]; par hypothèse δ_s contient A. Mais δ_s est divisée en deux parties par m(P') [bord de H(P') le plus voisin de H(P)], soient δ_{ss} et δ_{si} [ne contenant ni l'une ni l'autre m(P')]. P appartient à δ_{si}.

Si P'P (ouvert) n'appartient pas à δ_{si}, il possède, au moins un point soit de m(P') soit de δ_{ss}; dans le premier cas le théorème est démontré, dans le second, soit K ce point de δ_{ss} [distinct de P' par hypothèse], mais l'arc KP qui appartient à δ_s et possède des points à la fois dans δ_{ss} et δ_{si} a au moins un point commun P″ avec la *frontière* de δ_s et δ_{si}, soit m(P').

C. Q. F. D.

14. Si P″P n'appartient pas au domaine situé entre H(P) et H(P'), c'est-à-dire si P″ ne satisfait pas aux conditions du théorème B, il existe sur P″P un point P‴ de m(P'), puis sur P‴P un autre point P^{IV} de m(P') etc.

Considérons l'ensemble e de tous les points P' P″... possibles ; c'est un *ensemble fermé* [intersection des deux continus m(P') et arc P'P] il a donc un dernier point Q' qui se trouve par conséquent soit à une distance positive de P, soit confondu avec P, ce dernier cas doit être écarté immédiatement : m(P') ne passant par pas P, et *l'arc $Q'P$* appartient au domaine situé entre H(P) et H(P').

Corollaire. *En tout point R intérieur à $Q'P$ on a* (Théorème A).

$$\left.\begin{array}{l} M(P') \geq M(R) \geq M(P) \\ m(P') \geq m(R) \geq m(P) \end{array}\right\} \text{ si A est au-dessus de H(P)}$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} M(P') \leq M(R) \leq M(P) \\ m(P') \leq m(R) \leq M(P) \end{array}\right\} \text{ si A est au-dessous de H(P)}$$

15. **Théorème II.** *Si un arc simple A d'origine P est extérieur à*

$H(P)$, pour toute suite de points P_i convergeant vers P sur A, les $M(P_i)$ ont une limite unique en P, $M(P)$, si a est au-dessus de $H(P)$, $L(P)$ si A est au-dessous de $H(P)$. Les limites uniques correspondantes pour les $m(P_i)$ seront $l(P)$ et $m(P)$. Elles sont indépendantes du choix de A.

a) Prenons A au-dessous de H(P).

Nous pouvons extraire de la suite P_i une suite partielle P_j telle que l'on ait constamment pour P_{j+1} *entre* P_j et P : $H(P_{j+1})$ *entre* $H(P_j)$ et H(P) ; pour cela il suffit de prendre pour P_{j+1} un point des P_i *intérieur* à Q_j P, ce qui est toujours possible d'après le théorème B.

Nous formons ainsi une certaine *suite monotone* [1] de $M(P_i)$

$$M(P_j) \leq M(P_{j+1}) \leq \dots \qquad \leq M(P)$$

Cette suite a une limite unique en P qui est une intégrale (théorème de compacité) soit $L_1(P)$.

Il est donc possible de trouver un point P_k de la suite des P_i tel que :

$$L_1(P) \geq M(P_k) \geq L_1(P) - \varepsilon$$

16. *b)* Mais au point P_k nous pouvons faire correspondre le point Q_k [th. B] tel que tout point R intérieur à Q_k P soit *entre* $H(P_k)$ et H(P) donc :

$$M(P) \geq M(R) \geq M(P_k) \geq L_1(P) - \varepsilon.$$

Considérons une suite quelconque de points T_n convergeant sur A vers P ; à partir d'un certain rang *m*, ils appartiennent tous à l'arc positif Q_k P et satisfont ainsi aux inégalités ci-dessus :

$$(1) \qquad M(P) \geq \underset{n>m}{M(T_n)} \geq L_1(P) - \varepsilon.$$

Soit $L_2(P)$ une limite des $M(T_n)$; des T_n, nous pouvons extraire la suite partielle U_p telle que les $M(U_p)$ convergent uniformément vers $L_2(P)$ — il est possible de choisir cette suite de façon que les $M(U_p)$ forment une suite monotone comme ci-dessus. On a donc :

$$(2) \qquad L_2(P) \geq M(U_p)$$

donc d'après (1)

$$L_2(P) \geq L_1(P) - \varepsilon$$

Mais on pourrait intervertir les rôles de $L_1(P)$ et de $L_2(P)$; ε étant

[1] Les ordonnées des points d'intersection des $M(P_j)$ avec une *verticale* sont des fonctions *monotones* de l'abcisse curviligne de A.

arbitraire on aurait simultanément :

$$L_2(P) \geq L_1(P)$$

et
$$L_1(P) \geq L_2(P)$$

d'où
$$L_1(P) = L_2(P)$$

17. Il nous reste à prouver que cette limite est indépendante du choix de l'arc A.

Il nous suffit de considérer le cas de deux arcs A_1 et A_2, sans autre point commun que P dans un certain voisinage de P. Ceci est toujours possible en diminuant assez le voisinage, car, s'ils avaient une infinité de points communs P_i convergeant vers P, la limite des $M(P_i)$ *unique et égale* à L_1 sur A_1, sera aussi unique et égale à L_2 sur A_2, ce qui entraîne la coïncidence de L_1 et L_2.

Supposons A_2 à droite de A_1, par exemple [au-dessous de H(P)], et considérons les intégrales supérieures à droite d'une suite de points P_i convergeant vers P sur A_1.

Par suite de la convergence uniforme des $M(P_i)$ sur A_1, à partir d'un certain rang m, les P_i satisfont à :

$$L_1(P) - \varepsilon \leq M(P_i) \leq L_1(P) \qquad \text{pour } i \geq m$$

On peut choisir ε assez petit pour que A_2, qui n'est pas une intégrale issue de P, et possède le seul point P commun avec H (P) ait au moins un point extérieur à la bande : $L_1(P)$, $L_1(P) - \varepsilon$ donc au-dessous de $L_1(P) - \varepsilon$. Par suite, à partir d'un certain rang *tous* les $M_d(P_i)$ coupent A_2 : P étant *au-dessus* de tous les $M(P_i)$, soient R_k ces points d'intersection; à droite de R_k, les courbes $M_d(P_i)$ et $M_d(R_k)$ sont confondues.

Les R_k forment une suite dont la limite doit 1°. appartenir à la limite des $M_d(P_i)$ 2°. appartenir à A_2 ; ils convergent donc vers P et par conséquent les $M_d(R_k)$ doivent converger vers $L_1(P)$. Mais ici les $M_d(R_k)$ sont des $M_d(P_i)$ qui convergent vers $L_1(P)$, ce qui entraîne la coïncidence de $L_1(P)$ et de $L_2(P)$ à *droite de P*.

En intervertissant les rôles de A_1 et A_2, on démontrerait la coïncidence de $L_1(P)$ et de $L_2(P)$ *a gauche de* P.

Même raisonnement pour m (P).

Chapitre III.

Etude de H (P) sur une courbe de Jordan à tangente continue.

18. Nous voyons que les renseignements fournis ci-dessus sont assez précis pour ce qui concerne les discontinuités de

H (P) en un point ; par contre ils deviennent insuffisants lorsqu'il s'agit de déterminer l'ensemble de ces discontinuités ; pour cela il y aurait encore à résoudre nombre de questions accessoires et notamment les suivantes : qu'appellera-t-on point de continuité de H (P) non plus relativement à telle ou telle courbe mais au sens absolu. Comment pourra-t-on déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire C une courbe de JORDAN pour être extérieure en tout point P à H (P), etc.

Le problème se simplifie si nous considérons l'empreinte de la fonction H (P) sur une courbe de JORDAN J a tangente continue, procédé nous ramenant à l'étude d'une *fonction d'une variable réelle.*

1° Étude de l'ensemble des points où la pente de J est égale à f (x, y).

19. Théorème C. *L'ensemble E des points de tangence de J à la direction p de pente $f(x, y)$, est fermé.*

C'est une conséquence immédiate de la continuité de $f(x, y)$ et de la continuité de la tangente à J : deux fonctions continues [de l'abcisse curviligne de J] sont égales en un ensemble fermé de points.

COROLLAIRE I. *Une courbe J tangente à une suite convergente d'intégrales I_i est tangente à leur limite I_ω* (1).

Soit P_i le point de tangence de J et de I_i, soit P_ω le point limite des P_i, il appartiendra 1°. à J, 2°. à I_ω.

De plus J possédant une tangente continue a pour tangente en P_ω la limite de ses tangentes aux points P_i c'est-à-dire la direction p de pente $f(x_\omega, y_\omega)$ tangente déjà a I_ω.

COROLLAIRE II. *J peut être décomposée en trois ensembles, [qui n'existent pas nécessairement tous les trois] :*

1°. *un système au plus dénombrable d'arcs d'intégrales A,*
2°. *un système au plus dénombrable d'arcs de non-tangence B,*
3°. *un ensemble non dense de points de tangence.*

En effet E, étant fermé, peut comprendre une infinité au plus dénombrable d'arcs constamment tangents a p, soient des arcs d'intégrales A [nous supposons la tangente à J continue et orientée]. Soit C le complémentaire sur J des arcs A : sur C, E sera non dense et les points de non tangence de J à p forment une infinité dénombrable d'arcs ouverts [toujours parce que E est fermé].

(1) *Limite* doit être entendue dans le même sens que precedemment (voir théorème de compacité, Ch. I) : limite vers laquelle convergent uniformément les I_i.

20. **Théorème D.** *Sur un arc simple B à tangente continue, jamais tangent à la direction p de pente $f(x, y)$, tout couple de points P et Q détermine un arc PQ situé entre $H(P)$ et $H(Q)$.*

S'il n'en était pas ainsi, PQ aurait des points communs avec H (P) [par exemple]: A partir de P, PQ aurait un premier point K commun avec H (P) [PQ n'étant pas tangent à H (P) par hypothèse] ; K appartient soit à m (P), soit à M (P), à gauche ou à droite de P; supposons-le, par exemple sur $M_g(P)$: PK est entièrement au-dessus de l'arc d'intégrale μ d'extrémités P, K. Fermons l'arc PK par un arc simple à tangente continue que nous pouvons choisir au-dessous de μ, soit λ la courbe de JORDAN à tangente continue ainsi obtenue.

Soit $\vec{r}$, le vecteur unitaire de pente $f(x, y)$ et $\vec{s}$ le vecteur unitaire de la tangente à l'arc PK de B, orientée dans le sens KP.

$\vec{r}$ étant orienté dans le sens des x croissants et μ étant à l'intérieur de λ, $\vec{r}$ est dirigé à l'intérieur de λ en K et à l'extérieur de λ en P. Par conséquent, le triangle construit sur $\vec{r}$ et $\vec{s}$ sera en K orienté dans le sens KSR et en P dans le sens PRS, en choisissant comme sens positif le sens des aiguilles d'une montre.

Ce triangle varie de façon continue: pour que son orientation change, son aire doit s'annuler, sur l'arc PQ entre P et K il doit donc exister un point où $\vec{r}$ et $\vec{s}$ deviennent colinéaires ; par conséquent un point où B est tangent à la direction de pente $f(x, y)$, ce qui est impossible par hypothèse.

COROLLAIRE. *Si un point Q est sur B entre P et R, on a les relations:*

soit:

$$m(P) \leq m(Q) \leq m(R)$$
$$M(P) \leq M(Q) \leq M(R)$$

soit:

$$m(P) \geq m(Q) \geq m(R)$$
$$M(P) \geq M(Q) \geq M(R)$$

quels que soient P, Q, R, pourvu qu'ils appartiennent à un même arc B.

C'est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus.

2°. Discontinuités de première espèce.

21. On appelle *point de discontinuité de première espèce* d'une fonction d'une variable $f(x)$ un point x_0 tel que $f(x_0 + \varepsilon)$ et $f(x_0 - \varepsilon)$

aient des limites bien déterminées en x_0.

Par extension de cette définition nous appellerons *„point de discontinuité de première espèce"* pour une intégrale I(P), P variant sur une courbe de JORDAN C, un point P tel que I(P′) et I(P″) aient des limites bien déterminées en P, P′ étant un point quelconque précédant P sur C et P″ un point quelconque suivant P sur C.

D'après le théorème II (Chapitre II) si en un point P, C est extérieure à H(P), H(P) aura *au plus une discontinuité de première espèce en P sur C.*

Ceci posé, je vais démontrer que sur les arcs A et sur les arcs B définis plus haut, H(P) n'a que des discontinuités de première espèce au plus en infinité dénombrable. [Voir Introduction th. b.]

Étude des discontinuités des différentes branches de M(P) et m(P) sur un arc A.

22. Soit $M_d(P)$: considérons deux points P et Q appartenant à un même arc A, si Q est à *droite* de P, l'intégrale : PQ + $M_d(Q)$ *ne sera pas au-dessus* de M_d (P), puisque issue de P.

Donc $$M_d(P) \geq M_d(Q).$$

Si nous considérons l'ensemble des points d'intersection avec une verticale des $M_d(P)$, P appartenant à A : d'après la remarque ci-dessus, l'ordonnée du point R d'intersection de V avec $M_d(P)$ sera une fonction monotone de l'abcisse curviligne de P sur A [fonction croissante ou décroissante suivant le sens adopté sur A], par conséquent n'aura que *des discontinuités de première espèce en infinité dénombrable.* (1)

23. Mais il serait facile de raisonner directement sur les $M_d(P)$: en un point Q, les $M_d(P)$ ont une limite unique pour *P à droite de Q* [ce qui est clair] puisqu'elles forment une suite croissante bornée supérieurement par $M_d(Q)$. Elles ont de même une limite unique si P s'approche de Q à gauche [suite décroissante bornée inférieurement par $M_d(Q)$ qu'elle atteint]. Si M_d est discontinue en Q, ces deux limites ne sont pas égales et par conséquent délimitent entre elles une petite aire d'où est exclue toute autre $M_d(P)$ issue d'un point P quelconque de A Nous justifions ainsi le nom de point de discontinuité de première espèce donné à un tel point Q et il ne peut y en avoir au

(1) HOBSON: The Theory of functions of a real variable p. 286.

plus qu'une infinité dénombrable sur un même arc A, nous pouvons dire aussi qu'une telle suite [$M_d(P)$] est *monotone.*

Le raisonnement est identique pour $M_g(P)$, $m_g(P)$, $m_d(P)$.

Théorème III. *Sur un arc d'intégrale A, $H(P)$ ne possède que des discontinuités de première espèce et en infinité au plus dénombrable.*

Étude analogue sur un arc B.

24. Sur un arc B, d'après le théorème D les intégrales supérieures [ou inférieures] vont encore former une suite monotone, tout point de discontinuité de H (P) sera par conséquent un point de discontinuité de première espèce [*limites déterminées* de chaque côté tant pour m(P) que pour M (P), d'après le th. II. Ch. II] ; il peut y avoir doute seulement aux extrémités de B qui ne lui appartiennent pas [B est ouvert d'après le th. C] mais ces extrémités forment au plus un ensemble dénombrable qui peut être négligé momentanément.

A chaque point de discontinuité de M (P) sur B est attachée, comme dans le théorème précédent, une *petite aire positive* [comprise entre M (P) et L (P)] et deux aires caractérisant deux points d'un *même arc* B n'empiètent pas [à cause de la monotonie] ; donc M (P) [et m(P)] ne possède sur B qu'au plus une infinité dénombrable de discontinuités de première espèce.

Théorème IV. *Sur un arc B, $H(P)$ ne possède que des discontinuités de première espèce en infinité au plus dénombrable.* [Voir Introduction. Th. b.]

Discontinuités sur J.

25. En réunissant ces différents résultats, nous obtenons sur une courbe de JORDAN J à tangente continue, un ensemble au plus dénombrable de discontinuités, plus un ensemble non dense [qui contient en particulier les extrémités des arcs B qui n'appartiennent pas aux arcs A.] sur lequel on ignore ce qui se passe.

La réunion de ces deux ensembles contiendra donc certainement l'ensemble des discontinuités de H (P) sur J et on obtient ainsi le :

Théorème V. *Sur une courbe de* JORDAN *J à tangente continue, l'ensemble des discontinuités de $H(P)$ est au plus de première catégorie.*

Ou bien : *$H(P)$ est ponctuellement discontinue sur toute courbe J.* [Voir Introduction, théorème c.]

Chapitre IV.

Étude d'un cas particulier.

Définitions.

26. On peut, d'une façon générale, distinguer les points de PEANO suivant l'allure de H(P) au voisinage de P.

1) H(P) se réduit à une courbe unique dans un intervalle positif à droite de P.

Nous appellerons P un *point gauche de* PEANO.

2) H(P) se réduit à une courbe unique dans un intervalle positif à gauche de P.

P est alors un *point droit de* PEANO.

3) Par P passent au moins deux intégrales distinctes tant à droite qu'à gauche, P sera dit un *point complet de* PEANO.

On peut chercher le rapport possible entre la répartition des points de PEANO en général et la répartition des points de PEANO d'une catégorie donnée. Les méthodes employées dans les chapitres précédents permettent d'étudier un champ où *tous les points de* PEANO appartiendraient à une seule catégorie et montrent qu'alors le *phénomène de* LAVRENTIEFF n'est plus possible. C'est à cette étude qu'est consacré le présent chapitre.

27. De nombreuses conditions d'unicité unilatérale [à droite p. ex.] ont été proposées : sans nous préocuper de savoir si telle ou telle de ces conditions est réalisable en tout point d'une région R, remarquons que si f est monotone en y dans R, les points de PEANO de R appartiendront tous à la classe α [si f est décroissante] à la classe β dans le cas contraire.

Nous supposerons dans la suite, *l'unicité réalisée à droite.*

Pour éviter toute difficulté accessoire, nous supposons R choisie de façon que, pour tout point P de R, H(P) soit prolongée jusqu'aux verticales extrêmes droite et gauche de R, la région S dans laquelle se trouve ainsi prolongée H(P) étant soumise aux mêmes hypothèses que R : continuité de f, existence en tout point d'une condition d'unicité à droite.

Propriété fondamentale. *Deux intégrales issues de points différents d'une même verticale ne peuvent se rencontrer à gauche de la verticale* (1).

---

(1) Dans le cas d'une fonction monotone voir M. NAGUMO, *Japanese Journal of Mathematics* 1930, p. 144.

Soient I(P) et I(P′) deux telles intégrales : soit K leur premier point de recontre à gauche [il doit exister si la propriété est fausse, l'ensemble des points communs à I(P) et I(P′) étant fermé]. En K l'unicité à droite ne serait plus réalisée contrairement à notre hypothèse.

Ensemble des points de Peano.

28. Lemme. *Si P est un point de* Peano, *H(P) est discontinue en P sur la verticale de P.*

Soit un point P tel que H(P) y soit continu, ainsi : à tout nombre positif ε arbitrairement petit, on peut faire correspondre un nombre positif η tel que :

$$|y(P) - y(P')| \leq \eta$$

pour tout point P′ de la verticale V de P, entraîne :

$$(1) \qquad \begin{aligned} |M(P) - M(P')| &< \varepsilon \\ |m(P) - m(P')| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Supposons P′ au-dessous de P, par suite de notre hypothèse deux intégrales quelconques issues de P et P′ n'ont aucun point commun à gauche de V par conséquent :

$$m(P) - M(P') > 0 ;$$

il vient donc :

$$(2) \qquad M(P) > m(P) > M(P')$$

donc d'après (1) et (2) :

$$M(P) - m(P) \leq \varepsilon$$

relation qui existe quelque soit ε, par conséquent

$$M(P) = m(P)$$

et P n'est pas un point de Peano il s'ensuit qu'en un point de Peano, H(P) ne peut être continue.

Il n'y a pas lieu de chercher ce qui se passe à droite, H(P) s'y réduisant à une courbe unique.

Théorème VII. *L'ensemble des points de* Peano *est dénombrable sur toute verticale.*

Il se confond avec l'ensemble des points de discontinuités de H(P), sur un arc de non tangence [Théorème IV].

Le même raisonnement est valable, non seulement pour les points de Peano, ou points immédiats de Peano mais pour tous les points de la verticale considérée qui possèdent à leur gauche dans la région utile un point de PEANO de l'intégrale qu'ils déterminent ; nous les désignerons dans la suite par le nom de *„points médiats de* PEANO".

Leur ensemble est encore dénombrable sur toute verticale ; par conséquent :

COROLLAIRE. *L'ensemble des points qui déterminent une intégrale unique dans tout S, est partout dense dans R.*

Il est, sur une verticale, le complémentaire de l'ensemble des points médiats et immédiats de PEANO.

Appelons «*surf. $H(P)$*» la surface fermée découpée dans S par H (P) ; tout point où surf. $H(P) > 0$ est soit un point médiat, soit un point immédiat de PEANO.

La semi continuité de H (P) [Th. I], entraîne :

29. **Théorème VIII.** *L'ensemble des points où surf. $H(P) \geq \sigma$ et fermé.* (1)

En effet, on peut faire correspondre à tout nombre positif ε arbitrairement petit un nombre positif η tel que :

$$\text{dist. } PP' \leq \eta$$

entraîne

$$H(P') \leq H(P) + \varepsilon$$

(voir Th. I).

Si nous prenons les surfaces :

$$\text{surf. } H(P') \leq \text{surf. } H(P) + s(\varepsilon)$$

$s(\varepsilon)$ étant infiniment petit avec ε,

Si, par hypothèse, on a pour tout point P' :

$$\text{surf. } H(P') \geq \sigma.$$

Il vient, *quel que soit* ε

$$\text{surf. } H(P) + s(\varepsilon) \geq \sigma$$

donc, ε étant arbitraire :

$$\text{surf. } H(P) > \sigma$$

COROLLAIRE I. *L'ensemble des points où surf. $H(P) \geq \sigma$ est non dense.*

(1) Ce théoreme est valable dans le cas général, il se trouve placé ici pour faciliter l'exposition des résultats suivants.

C'est une conséquence du théorème VIII et du corollaire ci-dessus [1].

Corollaire II. *L'ensemble des points où surf. $H(P) > 0$ est de première catégorie.*

Il suffit de donner à σ des valeurs positives, décroissantes, tendant vers zéro, on obtient une suite dénombrable d'ensembles non denses :

$$\text{ensemble des points où surf. } H(P) \geq \sigma_1$$
$$\text{ensemble des points où surf. } H(P) \geq \sigma_2$$

dont la réunion forme l'ensemble des points où surf. H (P) $>$ 0, celui-ci est donc au plus de première catégorie.

30. Théorème IX. *L'ensemble des points de* Peano *est au plus de première catégorie dans R et dénombrable sur toute verticale.*

Il est contenu dans l'ensemble considéré au corollaire ci-dessus.

On peut remarquer que plusieurs points de ce raisonnement sont très voisins de celui de M. Baire dans l'étude des fonctions limites de fonctions continues.

Lignes de Peano.

31. Les résultats précédents, tout en nous apprenant que le phénomène de Lavrentieff n'est pas possible dans ce cas, ne nous donnent aucun renseignement sur la structure de l'ensemble des points de Peano, que nous allons étudier maintenant.

Appelons *„ligne de* Peano*"* une ligne $y = \phi(x)$ composée exclusivement de points de Peano.

Lemme. *A gauche d'un de ses points P, une ligne de* Peano *I appartient à la zône d'émission de P.*

A gauche de la verticale V de P, nous savons (Théorème VII) que l'ensemble de toutes les zônes d'émission de tous les points médiats et immédiats de Peano de V est dénombrable, ces zônes d'émission étant toutes fermées et sans points communs et aucun point de Peano ne leur étant extérieur. I qui appartient exclusivement à la réunion de ces zônes d'emission ne peut appartenir à toutes [un continu compact ne peut être décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints [2]] elle doit appartenir a une seule, donc a H (P) avec laquelle,

[1] Voire Baire, loc. cit. l'étude des ensembles fermés.

[2] Hausdorff : *Mengenlehre*, 2e edition p. 162. Théorème de Sierpinski.

elle a déjà un point commun P.

Théorème X. *Toute ligne de* PEANO *est une intégrale.*

Par suite du lemme précédent, I étant en P intérieure à H (P) possède en tout point une demi-tangente à gauche de pente $f(x, y)$ qui, par conséquent, varie continûment : I possède donc une tangente de pente $f(x, y)$ (1), *elle est une intégrale.*

32. LEMME. *L'existence d'un point de* PEANO *P' sur une intégrale J issue d'un point P d'une ligne de* PEANO *I entraîne sur I la discontinuité de H(P) en P.*

Supposons J au-dessus de I et considérons uue suite de points P_i de I tendant vers P a gauche de P.

Soit Q_i, l'intersection de J avec la verticale de P_i : *à gauche de P'*, on a évidemment (voir Chapitre I, lemmes du théorème d'OSGOOD-MONTEL) :

$$m(P') \geq m(Q_i)$$

[Q_i pouvant être pris à droite de P'].

Or, par suite de la *„Propriété fondamentale"* $m(Q_i)$ et $M(P_i)$ ne peuvent se rencontrer a gauche de P_i :

$$m(Q_i) > M(P_i)$$

donc P_i étant à partir d'un certain rang à droite de P' [comme plus haut]:

$$m(P') > M(P_i)$$

Or $\quad M(P) \geq M(P') \quad$ *à gauche de* P'

donc :

$$M(P) > M(P') > m(P') > M(P_i)$$

Si H (P) était continu en P on aurait à partir d'un certain rang :

$$M(P_i) \geq M(P) - \varepsilon$$

donc

$$M(P) \geq M(P') \geq m(P') \geq M(P) - \varepsilon \quad \text{à gauche de } P'.$$

ε étant arbitraire il vient :

$M(P') = m(P')$ contrairement à notre hypothèse.

33. **Théorème XI.** *Une ligne de* PEANO *rencontre au plus une infinité dénombrable de lignes de* PEANO.

Soit I une ligne de PEANO et P un point de bifurcation où I rencontre une autre ligne de PEANO J ; par définition, il existe au moins

(1) LEBESGUE : Leçons sur l'intégration, 2e édition p. 76.

un point de PEANO P′ sur J, par conséquent (lemme précédent) H (P) est discontinue en P sur I. Les discontinuités de H (P) sur T sont donc au moins aussi nombreuses que les points de ramification de I et comme (Théorème III) elles sont au plus en infinité dénombrable, le théorème est démontré.

Lignes λ.

34. *Remarquons* que, de même que nous avons défini les points médiats de PEANO, nous pouvons aussi définir les lignes mixtes de PEANO, intégrales possédant au moins un point de PEANO, à gauche, dans S et les raisonnements ci-dessus leur sont aussi bien applicables qu'aux lignes de PEANO.

Soit λ une de ces courbes [ligne de PEANO ou ligne mixte de PEANO.]

Théorème XII. *Il y a au plus dans R une infinité dénombrable de courbes λ fermées.*

Nous disons qu'une courbe λ est fermée lorsque l'ensemble P de ses points médiats et immédiats de PEANO est fermé, ceci à gauche bien entendu puisqu'il est toujours fermé à droite.

Deux cas peuvent se présenter.

1°. λ est entièrement couverte par P, par conséquent jusqu'à la frontière gauche de R, elle possède toujours un point de PEANO à gauche de toute verticale, λ existe jusqu'à cette frontière et par toute verticale il ne peut passer qu'une infinité dénombrable de lignes λ. (Th. VII)

2°. P a sur λ un dernier point K qui lui appartient. Ce point K est évidemment un point de PEANO. Considérons M_g (K) et m_g (K) distinctes par hypothèse : elles déterminent dans S une région d'aire positive d'où est exclu tout point de PEANO, donc toute autre ligne λ ; à de telles courbes λ nous pouvons donc attacher des aires positives non-empiètantes ; elles sont par suite au plus en infinité dénombrable.

Il n'est plus ainsi, probablement, lorsque le dernier point de P sur une courbe λ, n'est pas un point de PEANO [cas possible].

Il pourrait être intéressant de rapprocher l'étude de l'ensemble des courbes λ de celle d'une fonction multiforme [1], ceci montre l'intérêt de l'étude des fonctions multiformes fermées horizontalement *d'un côté.* En particulier, si notre ensemble des λ était fermé horizontalement des deux côtés, il se composerait d'une *infinité dénombrable de fonctions uniformes,* il ne serait pas nécessaire qu'il soit fermé verticalement.

---

[1] F. VASILESCO : *Thèse* Paris 1925, Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles.

Nous pouvons remarquer que les procédés employés dans les deux derniers chapitres sont très voisins; pour déterminer l'ensemble des points de discontinuité de H (P) sur J, l'ensemble des points de PEANO et l'ensemble des lignes de PEANO nous avons été amenés à les *„majorer"* par des ensembles de points ou de lignes qui pouvaient être déterminés; c'est d'ailleurs le même principe directeur qui agit dans les conditions d'unicité connues.

Chapitre V.

Extension du problème de Baire.

I. Position du problème.

35. Dans le chapitre précédent nous avons obtenu effectivement une fonction ponctuellement discontinue et sommes ainsi amenés à nous demander si l'étude de certaines (¹) équations limites d'équations pour lesquelles l'unicité est réalisée: où par conséquent l'intégrale est *fonction continue* du point dont elle est issue (Corollaire I, Théorème I), ne pourrait être entreprise.

Mais alors, il faudrait résoudre un problème préliminaire qui semble très complexe:

Quand pourra-t-on dire que le champ des intégrales de l'équation limite est limite des champs des intégrales des équations de la suite?

Il existe toujours des intégrales de l'équation limite, limites d'intégrales des équations de la suite: c'est ce que nous apprend le théorème suivant dû à M. MONTEL:

36. **Théorème.** (²) *Si la suite infinie de fonctions $f_n(x, y)$ converge uniformément vers la fonction continue $f(x, y)$ toute suite infinie des intégrales des équations:*

$$y' = f_n(x, y)$$

passant par P admet au moins une fonction limite intégrale de

$$y' = f(x, y)$$

Reprenons le nombre M supérieur à $|f|$ dans le rectangle R [Chapitre I]. On peut prendre n assez grand pour que:

$$|f_n| < M$$

(¹) *D'une certaine façon* cela va sans dire; puisque toute fonction continue est limite de polynomes.

(²) P. MONTEL: *Bulletin des Sc. Math.* loc. cit., p. 209.

dans R. Nous supposerons en supprimant au besoin un nombre fini de ces fonctions que toutes les fonctions de la suite f_n vérifient cette inégalité. Nous prendrons $|x| \leq a'$; toute intégrale y_n de l'équation :

$$y' = f_n(x, y)$$

verifie l'inégalité

$$|y_n| < b$$

donc :

$$|y'_n| < M$$

Les fonctions $y_1, y_2 \ldots y_n$ forment une famille également continue. On peut extraire de cette suite une suite partielle y_n, convergeant uniformément vers la fonction $y_0(x)$ dans l'intervalle $(-a', +a')$.

Prenons $n > N$ tel que :

$$|f(x, y) - f_n(x, y)| < \varepsilon$$

dans R. Au nombre ε correspond un nombre δ, tel que l'inégalité :

$$y_1 - y_2| < \delta$$

entraîne

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$$

Prenons $n' > N'$ tel que :

$$|y_{n'} - y_0| < \delta$$

Alors si n' est à la fois supérieur à N et N' on aura :

$$|f(x, y_{n'}) - f_{n'}(x, y_{n'})| < \varepsilon$$

$$|f(x, y_0) - f(x, y_{n'}| < \varepsilon$$

donc :

$$|f(x, y_0) - f_{n'}(x, y_{n'})| < 2\varepsilon$$

Ainsi $y'_{n'} = f_{n'}(x, y_{n'})$ a pour limite $f(x, y_0)$ uniformément, y_0 a donc une dérivée y'_0 égale à $f(x, y_0)$, c'est-à-dire que y_0 est une intégrale issue de 0 de l'équation $y' = f(x, y)$.

La réciproque de cette proposition [1] n'est certainement pas vraie. Supposons, par exemple, que les fonctions $f_n(x, y)$ soient des polynomes, l'intégrale y_n est unique. Choisissons une suite $y_{n'}$ convergeant vers l'intégrale y_0. La fonction $f(x, y)$ est la limite des polynomes $f_{n'}(x, y)$, mais une seule intégrale de (E), l'intégrale y_0 peut être obte-

---

[1] Cette remarque est aussi dûe à M. Montel.

nue comme limite de la suite $y_{n'}$ puisque cette suite est convergente.

37. Si maintenant, nous considérons toutes les intégrales A de (E) issues d'un point P, nous pouvons nous demander, si elles ne pourraient être limites de certaines suites d'intégrales L_n des équations (E_n), ces intégrales *n'étant plus astreintes à passer par P*: pour tendre vers une A issue de P *il suffit* que les L_n passent par des points P_n qui tendent vers P quand f_n tend vers f.

Il est, en effet, possible dans l'exemple suivant, d'obtenir toutes les intégrales issues de 0 par ce *processus limite élargi*.

Prenons dans un rectangle contenant l'origine (¹)

$$f = 0 \qquad \text{pour} \qquad y \leq 0$$
$$f = \frac{2y}{x} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq y \leq x^2$$
$$f = 2x \qquad \text{pour} \qquad x^2 \leq y\,.$$

Soit l'équation :

$$(E_n) \quad y' = f_n = \frac{n}{n+1} f \qquad n = 1,\ 2\ \ldots$$

Pour cette équation l'unicité est réalisée dans tout le rectangle et la seule intégrale issue de 0 est l'axe des x. Considérons la suite : L_n^k : intégrale de (E_n) issue de point P_n^k

$$x = 0$$
$$y = \frac{1}{nk^n}$$

quand f_n converge vers f, L_n^k tend vers la parabole :

$$y = \frac{x^2}{k}$$

Il est donc possible d'obtenir toutes les intégrales A issues de 0 comme limites d'intégrales des (E_n).

II. Intégrales complètes au sens large. Cas des familles C.

38. Appelons *„Intégrale complète“* au sens large (²) d'une équation

(¹) Cet exemple de point de Peano est emprunté à M. Bieberbach. *Theorie der Differentialgleichungen* p. 54.

(²) Cette notion d'intégrale complete généralisée m'a été signalée par M. Bouligand qui l'a utilisée dans un exposé consacré aux équations aux dérivées partielles (tome II du *Précis d'Analyse* de M. Laine p. 266) et où il remarque en particulier que pour les équations formées par élimination de a dans : $f(x,\ y,\ a) = 0$, sous certaines hypothèses complémentaires, donc possédant une certaine *intégrale complète*, le phénomène de Peano ne se produit pas.

différentielle (E) une famille d'intégrales de (E) telles qu'il en passe au moins une par chaque point du plan et que, par conséquent, elles suffisent à déterminer $f(x, y)$ par les pentes de leurs tangentes.

En somme, grâce au théorème de M. MONTEL on est assuré de l'existence en tout point P d'au moins une intégrale Λ limite d'une suite d'intégrales des (E_n) ; on possède donc en quelque sorte, parmi les intégrales de (E) une „*Intégrale complète*" au sens large. Une telle intégrale complète obtenue par ce procédé particulier, je veux dire : limite de L_n, sera appelée dans la suite une *famille C.*

Le problème préliminaire est alors ramené à celui-ci : d'après la remarque de M. MONTEL il peut exister des intégrales *étrangères* à cette famille C ; mais existe-t-il des intégrales *inaccessibles*, même par le processus limite élargi, qui, par conséquent ne *pourraient être limites d'aucune suite L_n, de quelque façon que soient choisis les f_n et les P_n^k.*

III. Intègrale complète au sens classique ou famille Γ.

39. Il est un cas où l'on possède effectivement une intégrale complète, c'est celui où il est possible de satisfaire à (E) par les lignes de niveau d'une fonction continue :

$$\phi(x, y) = \gamma$$

Appelons *famille* Γ une telle famille d'intégrales, je ne sais pas si, en général, elle est elle-même accessible aux suites L_n.

Il est possible, pour certaines équations, d'obtenir des intégrales étrangères à la famille Γ.

Premier exemple.

Soit :

$$\phi(x, y) = x + \varepsilon\sqrt{2\varepsilon(y-x)} \quad \varepsilon \text{ étant du signe de } y-x \quad \varepsilon = \pm 1$$

l'équation différentielle de ces courbes :

$$y' = 1 - \sqrt{2|y-x|}$$

admet pour intégrales non seulement les courbes :

$$\phi = \gamma$$

mais aussi la première bissectrice. Des exemples analogues sont fournis par bien de cas classiques.

Deuxième exemple.

Soit l'ensemble de CANTOR, défini sur le segment (0, 1) de l'axe des x : appelons Y une fonction positive sur chaque segment contigu et nulle en ses extrémités de façon que la figure formée par un segment contigu et l'arc attaché d'une part, la figure formée de même sur un autre segment, soient homothétiques.

En tous les points de l'ensemble triadique nous avons :

$$Y = 0.$$

Considérons :

$$y = \int_0^x Y \, dx$$

C'est une fonction croissante de x d'où l'on peut tirer $x = \phi(y)$; nous appelons a la surface de la figure formée par le premier segment contigu et Y :

$$\int_0^1 Y \, dx = \frac{9a}{7} \, .$$

La courbe représentative de y est tangente à un ensemble parfait discontinu de parallèles à $0x$, dont on obtient les points d'intersection avec $0y$ en enlevant du segment $\left(0, \frac{9a}{7}\right)$ de $0y$ un segment médian égal à $\frac{7}{9}$, puis de chaque segment restant un autre segment médian égal à $\frac{7}{9}$ etc.

Les courbes $x - \phi(y) = \gamma$

forment une famille Γ et elles admettent une famille non dénombrable d'enveloppes qui sont des intégrales de l'équation différentielle : $y' = f(x, y)$ des courbes de la famille Γ *étrangères à l'intégrale complète* (famille Γ) donnée.

Un exemple analogue serait donné par la famille :

$$x - \psi(y) = \gamma \text{ en posant } x = \psi(y) \text{ dans } y = \int_0^x (Y + K) \, dx + C \, .$$

En tentant de généraliser ces résultats, on est amené à chercher à quelles conditions doit satisfaire une famille de courbes pour être les enveloppes d'une famille Γ : une telle enveloppe *traverse* les courbes Γ, sauf peut-être aux points d'un ensemble de première catégorie. [1]

[1] Bulletin international de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Mars 1931.

Il serait intéressant d'étudier davantage cette question et de résoudre en particulier le problème suivant: Une même équation différentielle peut-elle admettre deux *intégrales complètes* différentes ?

IV. Renseignements donnés par les familles Γ.

40. En tenant compte des résultats précédents, étudions ce qui se passe dans un cas simple où les familles C et Γ sont confondues.

Soit l'équation :

$$y' = 3\, y^{2/3}$$

On obtient l'intégrale complète (famille Γ)

$$x - \sqrt[3]{y} = x_0$$

Formons une suite L_n issue de $(x_0, 0)$:

$$y = (x - x_0)\left[(x - x_0)^2 + \frac{1}{n}\right]$$

L'unicité est réalisée en tout point et en x_0:

$$y' = \frac{1}{n}$$

Considérons toutes les L_n issues de points voisins de 0, on peut choisir n assez grand pour que toutes ces L_n [pour $n > N$ par exemple) passent à une distance au plus égale à ε des points $(-1, -1)$ et $(+1, +1)$: par conséquent $0x$ n'est limite d'aucune suite des L_n et de plus, l'intégrale complète considérée ici est bien une famille C.

Il resterait à prouver que ce fait se produit pour toutes les E_n possibles.

Au contraire si l'on prend :

$$y' = 3\, y^{2/3} \quad \text{pour} \quad y \geq 0$$

$$y' = 0 \quad \text{pour} \quad y \leq 0$$

toutes les intégrales issues de 0 [dans une certaine région entourant 0] sont *accessibles* par le processus limite élargi : il suffit de prolonger les L_n *au-dessous de* $0x$ par : $y = \dfrac{x - x_0}{n}$;

nous voyons alors que pour n assez grand, toute intégrale de $y' = f_n$, issue d'un point de $0x$ de la région utile *à droite de 0,* possède un point dans un cercle de centre 0 et de rayon ε : point que nous appeletons P_n^k conformément aux notations déjà employées et qui tend vers 0 quand f_n converge vers f.

Il en est de même pour tout autre point de l'axe des x.

Nous pouvons remarquer qu'il n'existe pas ici de familles Γ.

NOTE

Le théorème II (Chapitre II) peut s'énoncer ainsi (1).

L'intégrale supérieure est fonction continue de son point d'origine dans la région supérieure (fermée) et dans la région inférieure (ouverte) de $H(P)$.

De même, l'intégrale inférieure est fonction continue de son point d'origine dans la région inférieure (fermée) et dans la région supérieure (ouverte) de $H(P)$.

Voici un exemple où L (P) est différent de M (P) et de m (P).

Soit $x \geq 0$

pour $y \leq 0$, nous prenons pour courbes intégrales de (E) les courbes :

$$y = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{a^3}{6} \qquad 0 \leq x \leq a;$$

puis nous prenons :

$$\begin{aligned} &\text{pour } 0 \leq y \leq x^2, && y' = 2\sqrt{y} \\ &\text{pour } x^2 \leq y \leq 2x^2, && y' = \frac{2y}{x} \\ &\text{pour } 2x^2 \leq y \quad , && y' = 4x; \end{aligned}$$

pour $x \leq 0$ nous faisons dans les formules ci-dessus les modifications nécessaires pour changer y' en $-y'$ pour deux abcisses égales en valeur absolue et de signes contraires (pour une même valeur de y).

On peut voir (2) qu'à l'origine P :

M (P) est la parabole $y = 2x^2$,
L (P) la parabole $y = x^2$
m (P) l'axe des x $y = 0$.

Vu et approuvé

Poitiers, le 21 Avril 1931.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. Billard

Vu et permis d'imprimer

Poitiers, le 22 Avril 1931.

Le Recteur,

L. Pineau.

(1) C'est M. Montel qui m'a signalé cet énoncé qui se rattache à celui de son théorème du Bulletin des Sciences Mathématiques. — La région inférieure de H (P) est la région inférieure de m (P) et la région supérieure de H (P), la région supérieure de M (P).

(2) Le lecteur est prié de faire la figure.