GEORGES DURAND

Sur une généralisation des surfaces convexes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1931
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1931__126__1_0>

N° D'ORDRE :
2198
Série A.
N° DE SÉRIE :
1329

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. GEORGES DURAND

1re THÈSE. — SUR UNE GÉNÉRALISATION DES SURFACES CONVEXES.

2e THÈSE. — RECHERCHES RÉCENTES CONCERNANT LES MOUVEMENTS DES TOURBILLONS ISOLÉS.

Soutenues le 1931 devant la Commission d'Examen.

MM VESSIOT, *Président.*
VILLAT, GARNIER } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1931

92345-31 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

A MONSIEUR ERNEST VESSIOT

ET A MONSIEUR HENRI VILLAT

A MONSIEUR RENÉ GARNIER

PREMIÈRE THÈSE

SUR UNE

GÉNÉRALISATION DES SURFACES CONVEXES

INTRODUCTION.

1. « Si l'on jette un coup d'œil sur le début d'un Cours d'Analyse classique, une chose ne manquera pas de frapper l'esprit. Les notions fondamentales sont présentées tout d'abord au moyen d'une définition extrêmement générale; puis, immédiatement après, des restrictions sont apportées à ces définitions, de manière à limiter le champ d'études, et c'est grâce à cette limitation qu'il est possible d'aller de l'avant et de construire les différentes théories qui constituent la Science mathématique. »

Ainsi s'exprime M. René Baire au début de la Préface à ses célèbres *Leçons sur les fonctions discontinues* (1905). Comme il le laisse entendre, la tendance qu'il signale n'affecte pas seulement l'Analyse pure, mais aussi bien la Géométrie. A l'appui de cette affirmation, le rénovateur de la théorie des fonctions de variables réelles pouvait citer la découverte, due à M. Henri Lebesgue, de surfaces applicables sur le plan bien que ne contenant aucune portion de droite (1). On a longtemps enseigné que la catégorie des développables était exclusivement formée de surfaces réglées engendrées, les cônes et les

(1) H. Lebesgue, *Thèse*, Paris, 1902, Chap. V, nos 81 et suiv.

cylindres mis à part, par les tangentes à une courbe gauche. Ce résultat était le produit de la composition, avec l'hypothèse d'applicabilité sur le plan, d'hypothèses de commodité (existence et continuité de certaines dérivées) faites en cours de route pour permettre aux méthodes cartésiennes de s'exercer sous leur forme usuelle. Beaucoup de théories géométriques nécessitent à l'heure actuelle une révision à la faveur de laquelle la causalité, masquée par les restrictions de commodité, soit remise en pleine lumière (1).

2. L'étude des lignes planes et des surfaces convexes est l'un des sujets les plus familiers où apparaît le mieux la nécessité d'une étude directe, basée sur cette hypothèse unique : *Existence en chaque point de la ligne ou de la surface d'un demi-plan ou d'un demi-espace non pénétré par cette ligne ou par cette surface.* On peut considérer ce problème comme actuellement résolu : un Ouvrage récent de M. Bonnesen (2) donne une idée d'ensemble des résultats acquis par d'éminents géomètres, et notamment Minkowski, dans cet ordre d'idées.

---

(1) Ces idées résument une tendance de plus en plus marquée et désignée sous le nom de *Géométrie infinitésimale directe* par M. G. Bouligand. Elles ont été systématiquement dégagées par celui-ci dans plusieurs publications : *Sur l'évolution des idées géométriques* (*Revue scientifique*, 8 octobre 1927); *Sobre una Conceptión de la Geometría* (*Revista matemática Hispano-Americana*, nos 4-5 de 1928); *Sur quelques points de méthodologie géométrique* (*Revue générale des Sciences*, 31 janvier, 30 juin et 15 novembre 1930).

J'emprunte à M. Bouligand l'exemple particulièrement typique d'un problème (d'ailleurs solidaire du problème cité de M. H. Lebesgue) dont le caractère est bien différent, suivant qu'on y apporte ou non des restrictions de commodité. Il s'agit, dans le plan des axes rectangulaires Ox, Oy, de la recherche des courbes telles que l'abscisse curviligne s soit liée à l'ordonnée y d'un point par une relation de la forme $s = f(y)$. Bornons-nous au cas suivant $s = y\sqrt{2}$. Les seules solutions à tangente continue sont des droites parallèles à l'une des bissectrices. Si l'on ne suppose plus la continuité de la tangente, la solution est profondément modifiée : toute ligne brisée à côtés alternativement parallèles aux deux bissectrices et tels que l'ordonnée soit une fonction de s constamment croissante répond à la question, et il y a même des lignes rectifiables ne contenant aucun segment rectiligne qui sont aussi des solutions.

(2) T. Bonnesen, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

A la suite des lignes et des surfaces convexes, on aperçoit deux généralisations séduisantes.

La première aura pour objet l'étude des lignes et des surfaces dites d'*ordre borné* depuis les beaux travaux du géomètre danois M. C. Juel (1) : une ligne plane est d'ordre borné si le nombre des points où elle coupe une droite est au plus égal à un entier n préalablement fixé ; on passe des courbes planes aux courbes gauches d'ordre borné en substituant à la droite sécante un plan sécant. On définit de même (en revenant à la droite) les surfaces d'ordre borné. Dans la théorie initiale de M. C. Juel, l'existence de la tangente ou du plan tangent intervient, à titre de commodité. Janiszewski (2) et tout récemment M. Severi (3) dans le cas du plan, M. André Marchaud (4) pour l'espace ont donné des résultats que l'on peut considérer comme les premiers éléments d'une théorie des courbes (planes ou gauches) d'ordre borné, en style conforme aux exigences de la causalité.

La seconde généralisation consiste à calquer la définition des lignes planes ou des surfaces convexes en remplaçant le demi-plan ou le demi-espace par l'intérieur d'un cercle ou d'une sphère de rayon constant.

C'est de cette généralisation que nous nous occuperons dans ce travail.

3. Nous ferons voir d'abord qu'elle est distincte de la première en démontrant ce théorème négatif :

Une surface, par chaque point de laquelle passe une sphère de rayon constant n'enfermant intérieurement aucun point de la surface, n'est pas nécessairement une surface d'ordre borné.

---

(1) Les idées essentielles de ces travaux ont été exposées au Séminaire mathématique de M. Hadamard par M. Paul Montel dans une conférence intitulée : *Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel* et publiée au *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. 48, mars 1924).

(2) S. Janiszewski, *Contribution à la Géométrie des courbes planes générales* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 150, 1910, p. 606).

(3) F. Severi, *Le curve intuitive* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 54, 1930, p. 51).

(4) A. Marchaud, *Sur les continus d'ordre borné* (*Acta mathematica*, t. 55, 1930, p. 67).

Considérons, sur un axe Ox, l'ensemble E des points ayant pour abscisses

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 0$$

et centrons en chacun de ces points une sphère de rayon ρ. Considérons alors l'ensemble ouvert E_ρ réunion de ces sphères, c'est-à-dire l'ensemble des points intérieurs à une au moins des sphères précédentes. La frontière F_ρ de E_ρ jouit de la propriété annoncée : il passe par chaque point de F_ρ une sphère de rayon constant ρ n'enfermant intérieurement aucun point de F_ρ, et cependant une parallèle à la ligne des centres, menée à une distance ρ, possède en commun avec F_ρ une infinité de points, ayant même abscisse que les centres donnés.

On aurait dans le plan le même théorème négatif, mais, pour l'homogénéité de mon exposé, je laisserai systématiquement de côté le cas du plan.

4. Dans cet exemple, nous venons de voir apparaître la *construction de Cantor-Minkowski*, c'est-à-dire le passage de E à E_ρ, en appelant E_ρ l'ensemble réunion de toutes les sphères de rayon ρ centrées aux points d'un ensemble donné E. Cette construction avait été utilisée par Minkowski pour définir la longueur d'une courbe ou l'aire d'une surface. M. Henri Lebesgue, dans une Note de ses *Leçons sur l'intégration* (1) signale qu'elle avait été aussi envisagée par Cantor et rappelle les développements que M. et Mme W. H. Young lui ont consacrés dans leur *Theory of sets of points* (1907).

Plus récemment, la construction de Cantor-Minkowski a été utilisée par M. G. Bouligand pour une théorie de l'ordre dimensionnel d'un ensemble fermé, applicable à certaines questions posées par le problème de Dirichlet (2). Du Mémoire de M. Bouligand il nous suffira de retenir le résultat suivant :

---

(1) H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 2e édition, p. 37.

(2) G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel* (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 52, septembre et octobre 1928).

La frontière F_ρ *de l'ensemble ouvert* E_ρ *est d'aire bornée* (¹).

5. A la suite de ce résultat, il m'a paru séduisant d'approfondir l'étude de la frontière F_ρ. J'étudie ainsi les surfaces ou, plus généralement, les ensembles de points de l'espace à trois dimensions, qui possèdent cette propriété : *par tout point de l'ensemble on peut faire passer une sphère de rayon* ρ *n'enfermant intérieurement aucun point de cet ensemble*. En effet, un tel ensemble peut être regardé comme partie ou totalité de la frontière F_ρ d'un ensemble ouvert E_ρ obtenu par la construction de Cantor-Minkowski sur un ensemble E convenable et l'on peut, pour son étude, partir de cette construction appliquée à un ensemble E donné *a priori*. A cause de cela, un ensemble possédant la propriété précédente sera dit : *ensemble de Cantor-Minkowski* ou, en abrégé, *ensemble* $\mathcal{C}.\mathcal{M}$.

Notons que si un ensemble jouit de la propriété énoncée pour une valeur ρ_0 de ρ, il en jouit encore pour toute valeur $\rho_1 < \rho_0$. De plus, pour ρ infini, on retrouve la propriété caractéristique des surfaces convexes qui sont ainsi un cas particulier des *ensembles* $\mathcal{C}.\mathcal{M}$. (et non uniquement un cas limite).

6. La construction de Cantor-Minkowski a donc, en vertu de ces remarques, une importance capitale pour l'édification de la Géométrie dans le style qui nous intéresse. Nous menant à la théorie des *ensembles* $\mathcal{C}.\mathcal{M}$., elle conduit encore à reprendre, à un point de vue nouveau, la théorie des enveloppes.

La réunion de domaines ouverts bornés d'une même région bornée donne naissance à un ensemble ouvert. Nous dirons que sa frontière est l'ENVELOPPE des frontières des domaines primitifs, ces dernières étant les ENVELOPPÉES. Le mot *enveloppe* est donc pris dans un sens distinct du sens de la Géométrie classique, mais beaucoup plus voisin

(¹) M. Bouligand a précisé et complété cet énoncé (*loc. cit.*, p. 326) dans son Mémoire : *Une application du paratingent à une question de mesure superficielle* (*Bull. de l'Acad. polonaise des Sciences et des Lettres*, mars 1931).

que celui-ci de l'acception familière de ce terme (¹). Notre théorie des enveloppes s'applique aux familles de domaines dont les frontières sont des *ensembles* $\mathcal{C}.\,\mathcal{M}.$; on obtient ainsi une enveloppe qui est elle-même un *ensemble* $\mathcal{C}.\,\mathcal{M}.$. Les résultats de l'étude locale des frontières engendrées par la *construction de Cantor-Minkowski* donnent alors des propriétés de contact entre l'enveloppe et les enveloppées.

7. Ces préliminaires font pressentir d'une manière suffisante le plan de ce travail où, comme il a été convenu, je laisse de côté le cas de deux dimensions (²).

J'expose d'abord, au Chapitre I, les propriétés de la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur un ensemble E donné; les plus essentielles concernent la correspondance avec l'ensemble E de la frontière obtenue, ainsi que la correspondance inverse; au point de vue fini, on est conduit au *lemme des deux points* et, au point de vue infinitésimal, les caractères limites de ces correspondances se résument dans mes énoncés : *théorèmes des projections* et *théorème inversé des projections*.

Le Chapitre II est une étude locale de la frontière, basée sur les correspondances précédentes. Je classe chaque *point* frontière suivant la manière dont ses « projections » sur l'ensemble E (c'est-à-dire les points qui lui correspondent sur E) se répartissent sur la sphère de rayon ρ centrée en ce point, réservant le titre de *point* (α) à ceux dont les projections se localisent sur une calotte; j'établis alors, pour chaque point de cette classe, d'une part le fait que le *système des demi-tangentes* (ou CONTINGENT, d'après M. Bouligand) ne dépend que de l'ensemble des projections du point, d'autre part l'existence d'une représentation paramétrique locale explicite. Les points dont les pro-

(¹) Notons que le mot *enveloppe* a déjà reçu une signification différente de la signification classique (*cf.* H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 2ᵉ édition, p. 174).

(²) Bien que j'aie étudié spécialement le cas du plan, je préfère, pour la clarté, l'exposer à part, dans un autre Mémoire. L'ensemble de mes résultats a été résumé dans différentes Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (29 avril, 27 mai et 23 septembre 1929, 3 mars, 26 mai et 10 novembre 1930).

jections ne se localisent sur aucun hémisphère sont des points frontières *isolés* et, pour les points de la classe intermédiaire, j'ai souligné par de nombreux exemples la complexité et la variété des cas qu'ils sont susceptibles d'offrir.

On verra au Chapitre III que j'ai dû aussi introduire un autre mode de classification suivant que les projetantes d'un point frontière ne sont contenues dans aucun plan (3e ESPÈCE), ou bien sont dans un plan (2e ESPÈCE), ou encore sur une même droite (1re ESPÈCE). Mes énoncés d'IMPÉNÉTRABILITÉ, découlant immédiatement du *lemme des deux points*, m'ont permis d'établir que les points de troisième espèce forment un ensemble *dénombrable*. Je fais alors correspondre à un point frontière non plus le système de ses projections sur E, mais une figure déterminée, choisie parmi les projetantes du point, que j'appelle son SPÉCIFIQUE; j'établis la continuité de cette correspondance pour les points de première espèce, continuité qui est uniforme pour un ensemble fermé. A cette occasion, j'utilise l'ÉCART de M. F. Vasilesco et je signale qu'il est susceptible de jouer le rôle de *distance* entre ensembles fermés quelconques : cette extension des notions géométriques élémentaires est, en effet, essentielle pour approfondir la Géométrie dans le sens déjà indiqué; l'écart prenant sa définition dans la construction de Cantor-Minkowski, l'intérêt de celle-ci se trouve renforcé.

L'étude des points de deuxième espèce est bien plus difficile, et, pour prolonger les propriétés précédentes de continuité, il est nécessaire d'introduire une condition supplémentaire; cette condition trouve aisément son expression avec la notion d'ensemble COMPACT EN SOI de M. Maurice Fréchet; j'obtiens ainsi des applications géométriques de cette notion, applications dont le caractère particulièrement simple apparaît dans des énoncés tels que les suivants : *un continu de points de deuxième espèce, à ensemble de spécifiques compact en soi, est une courbe à tangente uniformément continue, donc rectifiable; l'ensemble des continus de cette nature est dénombrable.* Mais je démontre ensuite en toute généralité que l'ensemble total des points de deuxième espèce est inclus dans un nombre *fini* de surfaces de la forme $z=f(x, y)$ à pentes bornées sur chacune desquelles il a une aire nulle, ce qui me permet d'établir la même propriété pour l'ensemble des points sans plan tangent de la frontière; cette propriété ne subsiste pas pour les *points de multifurcation* (c'est-à-dire ayant plus d'une projetante), car point de multifurcation ne signifie pas nécessairement point sans plan tangent : j'ai attiré l'attention, tant au Chapitre II qu'au Chapitre III, sur le caractère extrêmement complexe des points à deux seules projetantes opposées.

La théorie des enveloppes par réunion (n° **6**) sera développée dans un autre Mémoire. Je me borne à noter que je réalise ici l'étude de l'enveloppe d'une famille de sphères égales et que si l'on considère, plus généralement, une famille de domaines δ tels que par chaque point de la frontière f d'un δ on puisse faire passer une sphère contenue dans $\delta + f$ et dont le rayon soit au moins égal à une longueur donnée (la même pour tous les δ), on démontre, à partir des résultats qui vont être exposés, cette propriété de contact : *par chaque point de l'enveloppe il passe une enveloppée au moins tangente à l'enveloppe, sauf peut-être en des points formant un ensemble d'aire nulle.*

8. La construction de Cantor-Minkowski et la théorie des enveloppes par réunion ont déjà fait l'objet de diverses applications. Ainsi qu'il a été indiqué, cette construction peut être utilisée pour obtenir des propriétés dimensionnelles des ensembles fermés et c'est par ce côté que M. Bouligand a été conduit à s'en occuper. A la suite de mes premières recherches sur la notion générale d'enveloppe par réunion, il a reconnu que celle-ci se présente naturellement en Calcul des Variations, pour l'obtention des minima absolus, et aussi, de ce fait, dans diverses théories connexes : équation d'Hamilton-Jacobi, principe d'Huygens, théorie généralisée des caractéristiques des équations de propagation ondulatoire (¹).

On peut noter également que la plus courte distance d'un point à un ensemble, dont notre travail étudie les surfaces de niveau, joue un rôle capital dans la théorie des fonctions analytiques. Lorsqu'un

---

(¹) G. Bouligand, *Problèmes connexes de la notion d'enveloppe de M. Georges Durand* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. **189**, 1929, p. 446); *Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi* (*Rendiconti della R. Acad. dei Lincei*, t. **12**, 1930, p. 27).

ensemble plan est l'ensemble singulier d'une fonction analytique, le lieu des points où le cercle de convergence a un rayon constant n'est autre qu'un *ensemble plan* $\mathcal{C}.\ \mathcal{M}$. On rencontre aussi la plus courte distance d'un point à un ensemble dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes [1].

D'autre part, la construction de Cantor-Minkowski a été appliquée par MM. Bouligand et Rabaté à l'analyse des ensembles discontinus [2] et, pour l'étude des fonctions multiformes de variables réelles, M. F. Vasilesco [3] fait jouer un rôle important à la notion d'*écart*, dont nous avons déjà dit que la définition est issue de la même construction; on verra d'ailleurs l'application *géométrique* que nous faisons de cette notion.

Ainsi, non seulement les questions étudiées dans ce travail se présentent de la façon la plus séduisante pour qui veut approfondir la Géométrie infinitésimale dans le sens indiqué au début, mais encore on aperçoit dès maintenant leur intervention dans des sujets importants d'Analyse et de Physique mathématique.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde gratitude à M. E. Vessiot et à M. Henri Villat pour l'intérêt bienveillant qu'ils ont témoigné à mes recherches et pour leurs précieux encouragements. Je remercie particulièrement M. René Garnier dont les remarques et suggestions ont été pour moi très fécondes. Je suis heureux aussi d'exprimer mon affectueuse reconnaissance à M. G. Bouligand qui m'a prodigué ses conseils et ses encouragements : son œuvre est le point de départ de mon travail. Enfin, je sais gré à M. F. Vasilesco de s'être intéressé favorablement à ce Mémoire et j'ai tiré grand profit de mes conversations avec lui.

---

(1) G. Bouligand, *Figuration des points imaginaires et théorie des fonctions* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. **190**, 1930, p. 1484); *Sur un problème de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables et sur divers points de la théorie des fonctions harmoniques* (*Journal de Villat*, t. **9**, 1930, p. 363).

(2) G. Bouligand et G. Rabaté, *Application de la construction de Cantor-Minkowski à l'analyse des ensembles discontinus* (*Rendiconti dei Lincei*, décembre 1930).

(3) F. Vasilesco, *Thèse*, Paris, 1925.

CHAPITRE I.

LES DEUX CORRESPONDANCES INVERSES.

I. — Théorèmes fondamentaux.

9. Lorsqu'on étudie l'ensemble ouvert E_ρ formé des points intérieurs à l'une au moins des sphères de rayon ρ centrées en chaque point d'un ensemble E borné, c'est-à-dire l'ensemble ouvert E_ρ obtenu en effectuant sur E la *construction de Cantor-Minkowski* avec le rayon ρ, on peut toujours supposer que E est *fermé;* cette restriction apparente se justifie par le théorème suivant :

L'ensemble ouvert E_ρ, *obtenu en effectuant la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon* ρ *sur un ensemble* E *quelconque*, *est identique à celui qu'on obtiendrait en effectuant la même construction sur l'ensemble* $\overline{E} \equiv E + E'$, — c'est-à-dire

$$E_\rho \equiv (\overline{E})_\rho \equiv (E + E')_\rho.$$

Comme E est contenu dans sa fermeture, il est évident que tout point de E_ρ appartient à $(\overline{E})_\rho$; il suffit de démontrer la réciproque. Pour cela, considérons un point P de $(\overline{E})_\rho$; par définition, ce point est intérieur à une sphère S_A^ρ (¹) de rayon ρ, dont le centre A appartient à $\overline{E}$. Cela signifie qu'on peut trouver une longueur ε telle que la sphère S_P^ε soit tout entière à l'intérieur de S_A^ρ, d'où $AP < \rho - \varepsilon$. Or, si A ne fait pas partie de E, il existe dans E une suite de points $\{A_i\}$ tendant vers A; comme $A_iP \leqq AP + AA_i < \rho - \varepsilon + AA_i$, toute sphère $S_{A_i}^\rho$, pour laquelle $AA_i < \varepsilon$, enferme intérieurement le point P qui, par suite, appartient bien à E_ρ.

(¹) D'une façon générale, nous désignerons par S^ρ une sphère de rayon ρ, et par S_A^ρ la sphère de centre A et de rayon ρ.

10. *Points frontières*. — L'ensemble E_ρ étant une réunion de sphères ouvertes, les points de E_ρ sont des points *intérieurs*. Les points *extérieurs* sont les points de l'espace dont le voisinage ne contient aucun point intérieur. Quant aux points qui, sans être intérieurs, sont limites de tels points, ils constituent la *frontière* de l'ensemble E_ρ, soit $F(E_\rho)$ ou, en abrégé, F_ρ. La frontière F_ρ est ainsi l'*enveloppe*, au sens du nº **6**, des sphères de rayon ρ centrées sur l'ensemble E.

L'étude des points frontières étant le principal objet de ce travail, il y a intérêt à distinguer dès maintenant ceux de ces points qui sont aussi limites de points extérieurs : nous les appellerons *points frontières extérieurs*, les autres étant des *points frontières intérieurs*. Ces derniers pourront être des points frontières non isolés ou isolés, suivant que leur voisinage contiendra ou non d'autres points de F_ρ (¹).

11. *Tout point* M *de la frontière* F_ρ *appartient à la surface de l'une au moins des sphères de rayon* ρ *centrées sur* E.

En effet, M est limite de points de E_ρ, sans appartenir à E_ρ. Si nous considérons une suite de points intérieurs $\{P_i\}$ tendant vers M et une suite de sphères S^ρ (différentes ou non) centrées sur E et enfermant ces points, on peut extraire de celle-ci une suite partielle qui tend vers une sphère limite passant en M et, comme E est fermé, le centre de cette sphère limite appartient bien à E.

12. *Projections et projetantes*. — Nous savons dès lors qu'un point frontière quelconque M appartient toujours à la surface d'une ou plusieurs sphères de E_ρ, de centres A, B, C, ... Ces centres constituent l'ensemble des points de E qui sont à la distance minima ρ de M ; pour abréger, nous dirons qu'ils sont les *projections* de M sur E, et les rayons correspondants MA, MB, MC, ... seront les *projetantes*.

13. *Critères de position*. — La frontière F_ρ constitue ainsi l'ensemble des points de l'espace dont la plus courte distance à E est égale à ρ ou encore l'ensemble des points ρ-*distants* de E. De ce fait découle une

---

(¹) On trouvera au nº **37** des exemples de ces différents points frontières.

remarque immédiate, mais qu'il importe de dégager en vue des applications ultérieures.

Soit P un point quelconque de l'espace; construisons la sphère S_P^ρ de centre P et de rayon ρ. Trois cas peuvent se présenter :

1° Si P est un point *intérieur* à E_ρ, la sphère S_P^ρ enferme intérieurement un point au moins de E;

2° Si P est un point *frontière*, la sphère S_P^ρ ne contient aucun point de E à son intérieur, mais elle en contient un au moins sur sa surface;

3° Si P est un point *extérieur*, la sphère S_P^ρ ne contient aucun point de E, ni intérieurement, ni superficiellement.

Il est clair que ces propriétés sont caractéristiques d'un point intérieur, d'un point frontière ou d'un point extérieur. En raison de leur usage fréquent, nous les désignerons sous le nom de : *critères de position* (1°, 2° et 3°).

14. *Points ordinaires et points de multifurcation.* — Selon la terminologie de M. G. Bouligand, un point frontière dont la projection est unique, ou encore qui donne lieu à un minimum strict pour sa distance à E, est un point *ordinaire* de la frontière; les autres, qui fournissent des minima larges, sont des points de *multifurcation* (1).

Je rappelle brièvement les propriétés que M. Bouligand a données de ces points (2). Après avoir établi ce lemme :

Soient M *un point frontière quelconque*, A *une de ses projections sur* E. *Tout point* N *du segment* MA, *distinct d'une de ses extrémités, est un point ordinaire lorsqu'on prend pour* ρ *la distance de* N *à* A,

il en déduit les deux propositions suivantes :

a. Tout point ordinaire est un point frontière extérieur (3);

---

(1) G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel* (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 52, 1928, p. 372).

(2) G. Bouligand, *Sur la construction de Cantor-Minkowski* (*Annales de la Soc. polonaise de Math.*, t. 9, 1930, p. 25 et 26).

(3) Nous démontrerons plus loin un théorème qui comprend cet énoncé comme cas particulier (n° **36**).

b. Tout point frontière extérieur est limite de points ordinaires sur cette frontière.

II. — Correspondance de la frontière avec les projections.

15. Soit M un point quelconque de la frontière F_ρ. Désignons par $\varpi(M)$ l'ensemble des projections de M sur E; $\varpi(M)$ est l'ensemble des points communs à E et à la surface de la sphère S^ρ_M de centre M et de rayon ρ (laquelle n'enferme intérieurement aucun point de E, — critère de position, 2°; n° **13**) : étant le produit de deux ensembles fermés, $\varpi(M)$ est donc un ensemble *fermé*, qui peut d'ailleurs se réduire à un nombre fini de points.

16. *Lemme des deux points. — Les projections de deux points frontières quelconques* M *et* M′ *sont respectivement du même côté que le point correspondant par rapport au plan médiateur de* MM′ (ou dans ce plan).

En effet, d'après les critères de position (n° **13**), toute projection de M est sur la surface de la sphère S^ρ_M, sans être intérieure à la sphère $S^\rho_{M'}$; or, la portion de S^ρ_M, non intérieure à $S^\rho_{M'}$, est précisément du même côté que M par rapport au plan médiateur Π de MM′ (ou bien dans ce plan).

16 *bis.* Si, au lieu de deux points, nous considérons trois points frontières, les plans médiateurs correspondants définissent trois dièdres et, en vertu de ce qui précède, les projections d'un point considéré sont dans le même dièdre (faces comprises) que ce point.

Cette propriété s'étend à un nombre quelconque de points frontières considérés simultanément. On est alors amené à séparer l'espace en régions de nature polyédrale contenant chacune un point et les projections de ce point.

Notons encore que le *lemme des deux points,* tout en découlant directement des *critères de position*, les complète, dans le sens suivant : deux points frontières étant donnés, il définit la région sphérique maximum offerte aux projections de chacun d'eux. Or, la réunion de ces deux régions est précisément la frontière obtenue par la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur l'ensemble composé exclusivement de ces deux points. Cette dernière forme de l'énoncé se généralise aisément au cas de n points : la région offerte aux projections de l'un d'eux est sur la frontière obtenue par la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur l'ensemble de ces points : c'est la portion de cette frontière située sur la sphère ayant pour centre le point considéré (c'est-à-dire : un ou plusieurs polygones de cette sphère, limités par des arcs de circonférence).

Ces propriétés font entrevoir, entre la frontière et ses projections, une certaine réciprocité, qui sera bientôt précisée (§ III).

Du lemme des deux points découleront nos théorèmes d'impénétrabilité (n° **65**) et plusieurs autres conséquences importantes (nos **35**, **48** et **50**).

17. *Théorèmes des projections* (1). — Passant du point de vue fini au point de vue infinitésimal, occupons-nous maintenant des projections d'un point frontière infiniment voisin d'un point fixe M. Nous allons démontrer que ces projections : ou bien sont des projections de M, ou bien sont infiniment voisines de projections de M et, dans ce cas, tendent vers ces dernières perpendiculairement à la projetante correspondante. Pour plus de clarté, nous donnerons deux énoncés distincts.

I. *Soit* $\varpi(M)$ *le système des projections sur* E *d'un point frontière quelconque* M. *A toute longueur donnée* ε, *on peut faire correspondre une longueur* η *telle que*, M′ *étant un autre point frontière*, A′ *une quelconque de ses projections*, *l'inégalité* $MM' < \eta$ *entraîne* :

$$\operatorname{dist}[A', \varpi(M)] < \varepsilon \ (^2).$$

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Alors on peut trouver une suite infinie de points frontières $\{M_i\}$ tendant vers M, telle que chaque M_i possède une projection au moins A_i située à une distance de $\varpi(M)$ supérieure à une longueur fixe.

(1) Sous-entendez : *d'un point fixe et d'un point infiniment voisin.*

(2) La distance d'un point A′ à un ensemble $\varpi(M)$ est la borne inférieure de la distance du point A′ à un point de $\varpi(M)$. Cet énoncé peut se traduire géométriquement : si l'on effectue sur $\varpi(M)$ avec le rayon arbitraire ε la construction de Cantor-Minkowski, donnant naissance à l'ensemble ouvert $[\varpi(M)]_\varepsilon$, l'inégalité $MM' < \eta$ entraîne que $\varpi(M')$ est *tout entier* intérieur à $[\varpi(M)]_\varepsilon$.

Deux points frontières distincts pouvant avoir une projection commune, examinons cette suite $\{A_i\}$ en considérant chaque point avec son ordre de multiplicité en tant que projection, c'est-à-dire qu'un point A_i sera compté comme n points confondus s'il est projection de n points M_i. — La suite $\{A_i\}$ est alors infinie et elle possède au moins un point d'accumulation A pour lequel on doit avoir, si la supposition qu'on vient de faire est exacte : $\text{dist}[A, \varpi(M)] \geqq \varepsilon$.

Or, je dis que c'est impossible et que tout point d'accumulation A de la suite $\{A_i\}$ est une projection de M [1]. En effet, comme le point A_i est sur la surface de la sphère $S^\rho_{M_i}$ et que les sphères $\{S^\rho_{M_i}\}$ tendent vers la sphère S^ρ_M, le point A est nécessairement sur la surface de S^ρ_M. De plus, l'ensemble E étant fermé, A appartient à E : c'est donc une projection de M. Il est ainsi démontré que la distance des points A_i à $\varpi(M)$ ne peut demeurer supérieure à une longueur fixe.

18. Ce théorème devant jouer un rôle essentiel, il importe d'en bien préciser la signification et de mettre en garde contre certaines erreurs auxquelles pourrait conduire une interprétation hâtive.

Tout d'abord, dans le raisonnement précédent, le point M est supposé *fixe*. Il ne faudrait pas croire qu'à tout ε on puisse faire correspondre un η tel que, M et M' étant deux points frontières *quelconques*, l'inégalité $MM' < \eta$ entraîne :

$$\text{dist}[\varpi(M), \varpi(M')] < \varepsilon \text{ [2]}$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le cas où E se réduit à deux points A et $A'(AA' < 2\rho)$. En prenant M sur la sphère S^ρ_A, M' sur la sphère $S^\rho_{A'}$, ces deux points peuvent être aussi voisins qu'on le veut tandis que leurs projections respectives sont toujours distantes de la longueur du segment AA'.

19. Notons encore ceci : soit M un point frontière ; en vertu de notre théorème, toute projection A' d'un point frontière M' infiniment voisin de M est une projection de M ou bien est infiniment voisine d'une projection de M. Mais la réciproque n'est pas exacte : il se peut qu'une projection A de M soit à une dis-

---

(1) On verra au n° **50** que cette projection A est sur la *surface* du plus petit cône convexe enfermant les projetantes de M.

(2) La distance de deux ensembles, $\varpi(M)$, $\varpi(M')$, est la borne inférieure de la distance d'un point de l'un à un point de l'autre.

tance finie de toute projection de M' [1]. Pour le voir, reprenons l'exemple précédent et supposons que M appartienne à l'intersection des deux sphères S_A^ρ et $S_{A'}^\rho$, tandis que M' est choisi sur la sphère $S_{A'}^\rho$; alors la projection unique A' de M' se trouve confondue avec une projection du point M, mais ce point possède une seconde projection A, située à une distance finie de $\varpi(M')$, lequel est identique à A'.

20. Le théorème I se complète par ce second énoncé :

II. *A tout angle donné* α, *arbitrairement petit, correspond une longueur* η *telle que, pour deux points frontières quelconques* M *et* M' *ayant respectivement des projections* A *et* A', *les deux inégalités simultanées* $MM' < \eta$ *et* $AA' < \eta$ *entraînent que les angles* $\widehat{MAA'}$, $\widehat{M'A'A}$, $\widehat{AMM'}$, $\widehat{AM'M}$ *diffèrent d'un angle droit de moins de* α.

Considérons l'angle $\widehat{MAA'}$ et supposons qu'on ait à la fois $MM' < \eta$ et $AA' < \eta$; nous allons démontrer que la différence entre $\widehat{MAA'}$ et un angle droit est infiniment petite avec η.

En effet, les deux inégalités précédentes signifient que A' et M' sont respectivement à l'intérieur des sphères S_A^η et S_M^η. Mais M', étant point frontière, n'est pas intérieur à S_A^ρ; donc, en définitive, M' est situé dans la région $\mathcal{R}$ de S_M^η non intérieure à S_A^ρ. Comme $A'M' = \rho$, le point A' est intérieur au domaine $\mathcal{R}_\rho$ obtenu par la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur $\mathcal{R}$ avec le rayon ρ.

Désignons par γ le demi-cône circulaire de sommet A ayant pour directrice la circonférence intersection de S_A^ρ et S_M^η, et soit γ' celui des deux demi-cônes supplémentaires de γ qui ne contient pas γ à son intérieur. Il est aisé de voir qu'aucun point de $\mathcal{R}_\rho$ n'est intérieur à γ'; en effet, une sphère S_P^ρ centrée en un point P de $\mathcal{R}$ n'a aucun point commun avec γ' si P est extérieur à S_A^ρ (car P est intérieur à γ) et elle a le seul point A en commun avec γ' si P est sur la sphère S_A^ρ. Il en résulte que le point A' est dans S_A^η, à l'extérieur de γ'.

D'autre part, le point A n'est pas intérieur à S_M^ρ (critère de position 2°;

---

[1] Géométriquement, cela signifie que tout $\varpi(M')$ est intérieur à $[\varpi(M)]_\varepsilon$, mais par contre $\varpi(M)$ n'est pas nécessairement à l'intérieur de $[\varpi(M')]_\varepsilon$.

n° **13**). Finalement, ce point est au voisinage de A, entre la sphère S_M^ρ et le cône γ'. Or, si η est infiniment petit, l'angle d'une génératrice de γ' avec le plan tangent en A à S_M^ρ est lui-même infiniment petit et l'angle $\widehat{MAA'}$ est bien infiniment voisin d'un angle droit [1].

Comme les points M et M' jouent le même rôle dans la démonstration précédente, il suffit de reprendre le raisonnement en permutant les lettres M et M', A et A', pour obtenir la propriété énoncée pour l'angle $\widehat{M'A'A}$.

Enfin, en permutant les lettres A et M, on démontre la même propriété pour les angles $\widehat{AMM'}$ et $\widehat{AM'M}$.

21. Nos théorèmes des projections sont susceptibles de trouver leur application chaque fois que l'on considère une suite infinie *quelconque* de points frontières $\{M_i\}$ tendant vers un point M. Associons à chaque M_i une de ses projections A_i et considérons cette suite $\{A_i\}$ en convenant, comme au n° **17**, d'envisager chaque A_i avec son ordre de multiplicité. Alors la suite $\{A_i\}$ est infinie et elle admet un ou plusieurs points d'accumulation A, A', A'', ...

On sait d'abord que *chacun de ces points d'accumulation est une projection de* M (théorème I, n° **17**) [2].

Extrayons de la suite $\{A_i\}$ des suites partielles $\{A_j\}$, $\{A_k\}$, $\{A_l\}$, ..., admettant respectivement les points A, A', A'', ... pour points limites, et soient $\{M_j\}$, $\{M_k\}$, $\{M_l\}$, ... les suites de points frontières correspondants. Si les suites $\{A_j\}$, $\{A_k\}$, $\{A_l\}$, ... ont une infinité de points distincts, le théorème II (n° **20**) s'applique aux angles $\widehat{MAA_j}$, $\widehat{MA'A_k}$, $\widehat{MA''A_l}$, ..., *qui tendent respectivement vers un angle droit*, puisque les distances MM_j et AA_j, MM_k et $A'A_k$, ... tendent respectivement vers zéro.

---

(1) D'une façon précise, un calcul élémentaire montre que la différence $\delta = \left|\widehat{MAA'} - \frac{\pi}{2}\right|$ est $< 2 \arcsin\frac{\eta}{\rho}$; de sorte que, pour satisfaire à la condition de l'énoncé, c'est-à-dire pour avoir $\delta < \alpha$, il suffit de prendre $\eta < \rho \sin\frac{\alpha}{2}$.

(2) Cet énoncé sera complété au n° **50**.

Mais, dans tous les cas, cette propriété a lieu pour les angles en M, c'est-à-dire les angles $\widehat{AMM_j}$, $\widehat{A'MM_k}$, $\widehat{A''MM_l}$, ..., *qui tendent respectivement vers un angle droit*, la démonstration que nous avons faite étant toujours valable, que les suites $\{A_j\}$, ... aient une infinité de points distincts ou non [1].

III. — Correspondance des projections avec la frontière.

22. Tandis que tout point frontière a toujours au moins une projection, un point de E n'est pas nécessairement une projection d'un point de la frontière. D'où la nécessité d'introduire la notion de *front de* E *pour la distance* ρ; M. Bouligand [2] appelle ainsi le sous-ensemble φ_ρ de E tel qu'une sphère S^ρ centrée sur φ_ρ possède sur sa surface un point au moins de la frontière F_ρ; φ_ρ est encore l'ensemble des projections sur E de tous les points frontières.

Guidé par l'idée de regarder les points de E comme des obstacles au déplacement d'une bille sphérique impénétrable, M. Bouligand a fait, des fronts successifs d'un ensemble E, une étude intrinsèque et indépendante des relations qu'ils entretiennent avec la frontière correspondante F_ρ.

Pour qu'un point A de E appartienne à φ_ρ, il faut et il suffit, d'après les critères de position (n° **13**), qu'on puisse faire passer par A une sphère de rayon ρ n'enfermant aucun point de E : le centre M d'une telle sphère appartient, en effet, à la frontière F_ρ lorsqu'on effectue sur E la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon ρ.

Considérons alors l'enveloppe (au sens du n° **6**) des sphères S^ρ qui

---

(1) Dans cette seconde éventualité, les A_j, à partir d'une certaine valeur de j, sont confondus avec A; or, A étant une projection de M, les M_j correspondants sont situés sur S^ρ_A, et la limite des demi-droites $\{MM_j\}$ est une tangente à cette sphère. Réciproquement, chaque fois que l'on considère une suite $\{M_i\}$ pour laquelle chaque M_i a une projection A_i *non contenue* dans $\varpi(M)$, on est assuré que la suite $\{A_i\}$ comprend une infinité de points distincts.

(2) G. Bouligand, *Problèmes connexes de la notion d'enveloppe de M. Georges Durand* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. **189**, 1929, p. 446); *Sur les fronts successifs d'un ensemble de points* (*Ibid.*, p. 796).

n'enferment intérieurement aucun point de E et qui sont centrées aux différents points d'une région quelconque bornée de l'espace contenant tout l'ensemble E (un cube, par exemple); de la condition nécessaire et suffisante énoncée ci-dessus, il résulte que φ_ρ est l'ensemble des points communs à cette enveloppe et à l'ensemble E (1) : étant le produit de deux ensembles fermés, le front φ_ρ est un ensemble *fermé*, pouvant d'ailleurs se réduire à un nombre fini de points.

23. Il existe entre la frontière F_ρ et le front φ_ρ une réciprocité qu'on peut préciser par les énoncés suivants :

a. Le *front* φ_ρ *est une partie de la frontière obtenue en effectuant sur* F_ρ *la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon* ρ ;

b. La *frontière* F_ρ *est une partie de la frontière* (ou toute la frontière) *obtenue en effectuant sur* φ_ρ *la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon* ρ.

La propriété *a* se vérifie immédiatement. Désignant par Ψ_ρ la frontière obtenue à partir de F_ρ avec le rayon ρ et par $F_{2\rho}$ la frontière obtenue à partir de E avec le rayon 2ρ, on a, de façon plus précise :

---

(1) On détermine ainsi un sous-ensemble de l'ensemble E donné, tel que la construction de Cantor-Minkowski, effectuée sur ce sous-ensemble avec le rayon ρ, donne naissance à une frontière comprenant tous les points de F_ρ.

Ce problème conduit à se poser une question plus générale : *étant donné un ensemble* C. M. (n° **5**), *soit* Σ_ρ, *déterminer l'ensemble* E *qui*, *par la construction de Cantor-Minkowski*, *donne naissance à une frontière comprenant* Σ_ρ. Il va de soi qu'on obtient toujours un ensemble répondant à la question en prenant la réunion des centres de *toutes* les sphères S^ρ qui passent par les différents points de Σ_ρ sans enfermer intérieurement un point de Σ_ρ. Mais il se peut qu'un autre ensemble conduise au même résultat et le problème est alors indéterminé.

Par exemple, Σ_ρ étant une portion de surface plane, on pourra prendre pour E soit les deux surfaces se déduisant de Σ_ρ par une translation d'amplitude ρ normalement au plan de Σ_ρ, de part et d'autre de ce plan, soit l'une seulement de ces surfaces. Et si Σ_ρ est la surface d'une sphère de rayon $R > \rho$, E pourra être indifféremment : les surfaces de deux sphères de rayons $R - \rho$ et $R + \rho$, la surface d'une seule de ces sphères, ou encore une sphère pleine de rayon $R - \rho$.

La frontière Ψ_ρ *est constituée par le front* φ_ρ, *la frontière* $F_{2\rho}$ *et enfin par un troisième ensemble* ψ *qui peut être vide.*

En effet, pour montrer qu'un point P appartient à Ψ_ρ, il suffit de faire voir que la sphère S_P^ρ possède un point de F_ρ sur sa surface, mais n'en contient intérieurement aucun (critère de position, 2°; n° **13**). Or, c'est le cas de tous les points du front φ_ρ, par définition.

Soit maintenant P un point de $F_{2\rho}$. D'après le même critère de position, la sphère $S_P^{2\rho}$ possède sur sa surface au moins un point A de E, mais elle n'en possède aucun à son intérieur. La sphère S_A^ρ est tangente à S_P^ρ en un point M, et la sphère S_M^ρ, tangente intérieurement à $S_P^{2\rho}$ en A, ne possède, comme $S_P^{2\rho}$, aucun point de E à son intérieur. Le point M appartient donc à F_ρ, toujours en vertu du même critère de position. Par suite, la sphère S_P^ρ possède bien un point de F_ρ sur sa surface; mais elle n'en possède aucun à son intérieur, puisqu'il n'y a aucun point de E à l'intérieur de $S_P^{2\rho}$; en définitive, P est bien contenu dans Ψ_ρ.

Ainsi, la frontière Ψ_ρ contient le front φ_ρ et la frontière $F_{2\rho}$. Pour avoir un exemple où Ψ_ρ comprend un troisième ensemble ψ, on peut prendre pour ensemble E la surface d'un hémisphère de centre O et de rayon $R < \rho$. Outre le front φ_ρ (ici identique à E) et la frontière $F_{2\rho}$, la frontière Ψ_ρ comprend la surface d'une calotte sphérique de rayon ρ, intérieure à l'hémisphère donné, ayant son centre M sur le demi-axe OX de cet hémisphère (dirigé vers l'extérieur), à une distance $OM = \sqrt{\rho^2 - R^2}$.

Relativement à la propriété *b*, il suffit de constater que F_ρ n'est pas toujours toute la frontière obtenue à partir du front φ_ρ. Prenons pour ensemble E une sphère pleine de rayon $R > \rho$; le front φ_ρ est la surface de cette sphère, et la frontière F_ρ comprend la surface d'une sphère de rayon $R + \rho$. En effectuant la construction de Cantor-Minkowski sur le front seul, on obtient pour frontière les surfaces de deux sphères de rayons respectifs $R + \rho$ et $R - \rho$.

24. *Théorème inversé des projections.* — Le lemme des deux points et les théorèmes des projections sont à la base de la correspondance de F_ρ avec φ_ρ; on prévoit que, pour la correspondance inverse, nous aurons des énoncés tout analogues. Il suffira de démontrer le suivant que nous appellerons *théorème inversé des projections* (¹) :

Soit $\{A_i\}$ *une suite de points de* E *tendant vers un point* A. *Si chaque sphère* $S^\rho_{A_i}$ *possède un point frontière* M_i, *tout point d'accumulation de la suite* $\{M_i\}$ (²) *est un point frontière situé sur la sphère* S^ρ_A.

Désignons par M un point d'accumulation quelconque de la suite $\{M_i\}$. Ce point appartient à la frontière F_ρ, car toute frontière est un ensemble fermé. De plus, le point M_i étant sur la sphère $S^\rho_{A_i}$, et la suite $\{S^\rho_{A_i}\}$ ayant pour limite la sphère S^ρ_A, le point M est nécessairement sur cette dernière (³).

25. Il résulte immédiatement de l'énoncé précédent que les A_i et le point A appartiennent au *front* φ_ρ, puisque toute sphère $S^\rho_{A_i}$ est supposée donner naissance à un point frontière M_i et que φ_ρ est fermé. D'autre part, ce théorème, complété par le théorème II (nº **20**), est susceptible de s'appliquer chaque fois que l'on considère une suite infinie *quelconque* de points $\{A_i\}$ du front, tendant vers un point A. En

---

(¹) De la même façon, nous aurions le LEMME INVERSÉ DES DEUX POINTS, dont la démonstration directe est immédiate :

Considérant deux points du front A *et* A′, *les points frontières situés sur les sphères de centres* A *et* A′ *sont respectivement du même côté que le centre correspondant par rapport au plan médiateur de* AA′ (ou dans ce plan).

En effet, M étant un point situé du même côté que A, on a $MA < MA'$; lors de la construction de Cantor-Minkowski effectuée avec le rayon A′M, le point M serait intérieur à la sphère de centre A, donc ne serait pas frontière.

Cette proposition s'étend, comme le lemme des deux points, au cas d'un nombre quelconque de points du front considérés simultanément.

(²) Chaque point M_i étant compté avec son ordre de multiplicité, c'est-à-dire qu'un point M_i est compté pour p points confondus s'il a p projections dans la suite $\{A_i\}$.

(³) Remarquons que, pour ce théorème inversé, on peut se dispenser de tout raisonnement en tenant compte de la réciprocité signalée plus haut (nº **22**). Les points A_i sont des points frontières dans la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur les M_i avec le rayon ρ et l'énoncé précédent peut alors se traduire : chaque A_i ayant une projection M_i, tout point d'accumulation de la suite $\{M_i\}$ est une projection de A. Dans ces conditions, la démonstration du nº **17** s'applique aux points M_i et fournit le résultat cherché.

associant à chaque A_i un point frontière M_i situé sur la sphère $S^{\rho}_{A_i}$ et en comptant toujours chaque M_i avec son ordre de multiplicité, cette suite $\{M_i\}$ est infinie. Alors, *chacun des points d'accumulation* M, M', M'', ... *de cette suite est un point frontière ayant une projection en* A. De plus, extrayant de la suite $\{M_i\}$ des suites partielles $\{M_j\}$, $\{M_k\}$, $\{M_l\}$, ... convergeant respectivement vers les points M, M', M'', ..., *les angles* $\widehat{AMM_j}$, $\widehat{AM'M_k}$, $\widehat{AM''M_l}$, ... *ont respectivement pour limite un angle droit,* si les suites $\{M_j\}$, $\{M_k\}$, $\{M_l\}$, ... ont une infinité de points distincts et, dans tous les cas, les angles $\widehat{MAA_j}$, $\widehat{M'AA_k}$, $\widehat{M''AA_l}$, ... existent et *tendent respectivement vers un angle droit.*

26. *Applications.* — Les lemmes et les théorèmes précédents sont fondamentaux dans l'étude des deux correspondances inverses que nous avons définies. Ils nous conduiront à diverses propriétés de la frontière F_ρ, mais auparavant il nous faudra distinguer plusieurs classes ou plusieurs espèces de points frontières. Pour l'instant, nous nous bornerons à quelques applications simples qui seront utilisées plus tard.

27. *Les projections d'un ensemble fermé.* — *Les projections d'un ensemble fermé de points frontières constituent un ensemble fermé* (ou réduit à un nombre fini de points).

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de points frontières qui, par hypothèse, est fermé; désignons par $\varpi(\mathcal{F})$ l'ensemble de toutes les projections des points de $\mathcal{F}$. Si $\varpi(\mathcal{F})$ ne se réduit pas à un nombre fini de points, il existe au moins un point A vers lequel converge une suite $\{A_i\}$ extraite de $\varpi(\mathcal{F})$ et il faut démontrer que A est contenu dans $\varpi(\mathcal{F})$.

A chaque A_i correspond au moins un point M_i de $\mathcal{F}$. Considérons cette suite $\{M_i\}$, en y regardant toujours chaque point avec son ordre de multiplicité. Alors, cette suite est infinie et possède au moins un point d'accumulation M contenu dans $\mathcal{F}$, puisque $\mathcal{F}$ est fermé. Mais on sait, d'après le théorème inversé des projections (n° **24**), que tout point d'accumulation M de la suite $\{M_i\}$ est un point frontière ayant une projection en A; le point A, étant ainsi projection d'un point de $\mathcal{F}$, est donc bien contenu dans $\varpi(\mathcal{F})$.

28. *Les projetantes d'un ensemble fermé.* — Si, au lieu d'étudier seulement la correspondance entre les points frontières et leurs projections, on envisage la correspondance entre ces points et leurs projetantes [1], on est amené à considérer des ensembles de segments de même longueur ρ.

Soit $\{A_iM_i\}$ un tel ensemble [2] formé par les projetantes des points frontières M_i. La considération de cet ensemble revient à celle de deux ensembles de points : les A_i et les M_i, en comptant toujours chaque A_i et chaque M_i avec son ordre de multiplicité. Si les $\{A_iM_i\}$ sont infinis, les deux ensembles $\{A_i\}$ et $\{M_i\}$ sont eux-mêmes infinis. Un segment $AM = \rho$ est *segment d'accumulation* des A_iM_i si les extrémités A et M sont respectivement des points d'accumulation des A_i et des M_i. On remarque que si un point M est point d'accumulation des M_i, il y a au moins une projetante d'accumulation d'extrémité M, en vertu des théorèmes des projections (n° **21**) : on peut, en effet, à la suite partielle $\{M_{i_k}\}$, tendant vers M, associer une suite de projections $\{A_{i_k}\}$ telle que tout point d'accumulation des $\{A_{i_k}\}$ — et il y en a certainement au moins un — soit une projection de M. De même, tout point d'accumulation A des A_i donne naissance à une projetante d'accumulation, au moins, issue de A, d'après le théorème inversé des projections (n° **25**). Le lemme de Weierstrass-Bolzano s'appliquant évidemment à nos deux ensembles de points $\{A_i\}$ et $\{M_i\}$, il est clair que *tout ensemble infini de projetantes admet au moins une projetante d'accumulation*. Si cette projetante d'accumulation est unique, nous pouvons dire, avec la terminologie actuellement admise, que l'ensemble considéré a une *projetante limite* [3]; dans ce cas, chacun des

---

[1] Une telle correspondance sera utilisée au Chapitre III.

[2] Remarquons que la notation adoptée ne suppose pas dénombrable l'ensemble de projetantes considéré, et il va de soi que les considérations qui suivent sont valables pour un ensemble absolument quelconque.

[3] Ces notions de *projetante d'accumulation* et de *projetante limite* ne sont, dans le cas particulier d'un ensemble de segments de même longueur ρ, que l'application des notions d'*ensemble d'accumulation* et d'*ensemble limite* introduites par Janiszewski (*Thèse*, Paris, 1911, p. 15) pour une infinité d'ensembles quelconques. L'ensemble d'accumulation de Janiszewski serait ici l'ensemble de toutes les projetantes d'accumulation, c'est-à-dire encore l'ensemble dérivé des A_iM_i, et l'ensemble limite serait la projetante limite, quand elle existe.

ensembles $\{A_i\}$ et $\{M_i\}$ a lui-même un point limite unique. Les définitions connues pour un ensemble de points s'étendent donc immédiatement à l'ensemble des A_iM_i : par exemple, un ensemble de projetantes est *fermé* s'il contient toutes ses projetantes d'accumulation.

29. Du théorème démontré plus haut (n° **27**), on déduit ce premier corollaire :

L'ensemble des projetantes d'un ensemble fermé de points frontières est lui-même fermé.

30. Considérant un ensemble fermé $\mathcal{F}$ de points frontières, l'ensemble de tous les *rayons* de longueur ρ aboutissant aux points de $\mathcal{F}$ est donc fermé. Mais il peut exister dans $\mathcal{F}$ des points de multifurcation (n° **14**) possédant deux projetantes opposées, sans détriment d'autres possibles. Deux telles projetantes forment un *diamètre* de longueur 2ρ, attaché au point frontière correspondant, et si l'on envisage un ensemble de ces diamètres, on peut lui étendre les notions de *diamètre d'accumulation*, de *diamètre limite*, etc., exactement comme on l'a fait pour des segments de longueur ρ. Le même théorème nous fournit alors cet autre corollaire :

L'ensemble des diamètres attachés à un ensemble fermé de points frontières quelconques est lui-même fermé.

Toutes ces considérations seront utiles au Chapitre III (§ III), où nous ferons correspondre à un point frontière une figure formée avec les projetantes du point.

31. *Le paratingent d'une suite de points frontières.* — La notion de *paratingent* a été introduite par M. G. Bouligand (¹). Le *paratingent*

(¹) G. Bouligand, *Sur quelques applications de la théorie des ensembles à la Géométrie infinitésimale* (*Bull. de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres*, 6 oct. 1930, p. 407). Le paratingent, de même que le contingent (n° **39**), est susceptible de se définir comme un ensemble limite (*voir* G. Rabaté, *Thèse*, Toulouse, 1931, n° 11 *bis*).

en un point d'accumulation O d'un ensemble donné est le système des droites $\Delta' O \Delta$ telles qu'il existe des cordes $O_i O_j$, joignant deux points de l'ensemble O_i et O_j arbitrairement voisins de O et faisant avec $\Delta' O \Delta$ des angles arbitrairement petits. Le théorème que nous avons en vue est le suivant :

Soit $\{M_i\}$ *une suite de points frontières tendant vers un point* M. *Si chaque* M_i *possède une projection* A_i *telle que la suite* $\{A_i\}$ *converge vers un point limite* A, *le paratingent en* M *de la suite* $\{M_i\}$ *est tout entier dans le plan perpendiculaire en* M *à* AM.

On sait déjà que le point A est une projection de M (nº **21**). Soit Π le plan perpendiculaire en M à AM, c'est-à-dire le plan tangent en M à la sphère S_A^ρ.

Considérons une suite quelconque de cordes $\{M_j M_k\}$, les points M_j et M_k appartenant à la suite $\{M_i\}$. Nous allons montrer qu'à partir d'une certaine valeur des indices j et k, la corde $M_j M_k$ fait avec le plan Π un angle arbitrairement petit. En effet, pour j et k suffisamment grands, les points M_j et M_k sont tous les deux à l'intérieur de la sphère S_M^ε, tandis que A_j et A_k sont dans la sphère S_A^ε, ε étant arbitrairement petit. Il s'ensuit que M_k est dans la sphère $S_{M_j}^{2\varepsilon}$ et A_k dans la sphère $S_{A_j}^{2\varepsilon}$. Alors, d'après le théorème des projections II (nº **20**), l'angle de la droite $M_j M_k$ avec $A_j M_j$ est arbitrairement voisin d'un angle droit. Mais les deux segments AM et $A_j M_j$ forment entre eux un angle arbitrairement petit. Il en résulte que l'angle fait par $M_j M_k$ avec AM est lui-même arbitrairement voisin d'un angle droit ou que la limite de toute corde $M_j M_k$ est bien dans le plan Π.

Ce théorème sera appliqué au Chapitre III (nº **102**) pour montrer que certains continus de points frontières forment des arcs rectifiables.

CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES POINTS FRONTIÈRES D'APRÈS LEURS PROJECTIONS. RECHERCHE DU CONTINGENT. — REPRESENTATION PARAMÉTRIQUE LOCALE.

I. — Les trois classes α, β, γ.

32. La recherche des propriétés de la frontière F_ρ prenant son point de départ dans la correspondance entre F_ρ et ses projections, il est naturel de classer les points de la frontière d'après la distribution de leurs projections ou de leurs projetantes. Nous allons introduire une telle classification qui nous conduira à d'importantes propriétés locales et qui, d'une façon générale, distinguera les points frontières dont les propriétés essentielles du voisinage dépendent exclusivement de leurs projections.

33. Reprenant une notion qui nous a servi pour obtenir des critères de dénombrabilité (¹) dont nous reparlerons plus loin (nº **116**), nous considérons le faisceau $\Phi(M)$ des projetantes d'un point frontière M et nous disons que ce faisceau est *convexe* s'il existe un plan Π passant en M et tel qu'il n'y ait pas des projetantes de M de part et d'autre de Π; la convexité est *stricte* s'il existe un tel plan Π ne contenant aucune projetante de M, *large* dans le cas contraire.

Avec ces définitions, un point M sera :

Un POINT DE LA CLASSE α ou, en abrégé, un POINT (α), si $\Phi(M)$ est *strictement convexe ;*

Un POINT DE LA CLASSE β, si $\Phi(M)$ est *largement convexe ;*

Un POINT DE LA CLASSE γ, si $\Phi(M)$ est *non convexe.*

34. Nous savons (nº **15**) que les projections du point frontière M

(¹) *Application des notions de convexité et de contingent à l'obtention de certains critères de dénombrabilité* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. **191**, 1930, p. 371); *Sur un critère de dénombrabilité* (*Acta mathematica*, t. 56, 1931, p. 363).

constituent un ensemble fermé $\varpi(M)$ réparti sur la surface de la sphère S^ρ_M. Les raisonnements ultérieurs faisant intervenir fréquemment ces projections, il importe de traduire ainsi la classification précédente :

Pour un *point* (α), $\varpi(M)$ se localise sur une calotte, moindre qu'un hémisphère, de S^ρ_M;

Pour un *point* (β), $\varpi(M)$ se localise sur un hémisphère de S^ρ_M, mais non sur une calotte moindre;

Pour un *point* (γ), $\varpi(M)$ ne peut se localiser sur un même hémisphère de S^ρ_M.

La nécessité de notre classification est justifiée dans les théorèmes suivants :

35. *Tout point de la classe γ est un point frontière isolé.*

Soit M un tel point; supposons que M ne soit pas un point frontière isolé, c'est-à-dire qu'il existe une suite de points frontières $\{M_i\}$ tendant vers M. D'après le lemme des deux points (n° **16**), les projections de M sont du même côté que M par rapport au plan médiateur Π_i de MM_i; si donc on extrait de la suite $\{M_i\}$ une suite partielle $\{M_{i_k}\}$ tendant vers M, pour laquelle les plans médiateurs $\{\Pi_{i_k}\}$ ont un plan limite Π, on voit que ce plan Π passe en M et que toutes les projetantes de M sont d'un même côté de Π, ce qui est contraire à la définition d'un point de la classe γ (n° **33**).

36. *Tout point de la classe α est un point frontière extérieur* (donc non isolé).

Soit M un tel point; d'après sa définition (n° **34**), on peut trouver un hémisphère $\mathcal{H}$ de S^ρ_M dépourvu de projection de M. Nous allons démontrer que tout point P, pris sur l'axe MX de $\mathcal{H}$ (dirigé vers $\mathcal{H}$) et suffisamment voisin de M, est un point extérieur, c'est-à-dire que la sphère S^ρ_P laisse à son extérieur tout l'ensemble E (critère de position, 3°; n° **13**).

Supposons le contraire. Alors il existerait sur MX une suite de points $\{P_i\}$ tendant vers M, tels que toute sphère $S^\rho_{P_i}$ posséderait intérieurement ou sur sa surface au moins un point A_i de E. Aucun point de E n'étant intérieur à la sphère S_M^ρ (critère de position, 2°; n° **13**), les A_i seraient situés dans la région non intérieure à S_M^ρ et non extérieure à $S_{P_i}^\rho$; or, quand P_i tend vers M, cette région a pour limite l'hémisphère $\mathcal{H}$ et la suite infinie $\{A_i\}$ aurait au moins un point d'accumulation A, qui ferait partie de E (puisque E est fermé) et qui serait situé sur $\mathcal{H}$, contrairement à notre hypothèse.

37. Pour un point de la classe β, il y a doute : un point (β) peut être soit un point frontière intérieur isolé, soit un point frontière intérieur non isolé, soit un point frontière extérieur.

Exemples. — 1° E comprend deux points A et B avec $AB = 2\rho$; le point de contact des deux sphères est un point frontière dont le système des projetantes est un couple de rayons opposés, donc un point (β) qui est point frontière extérieur.

2° E est formé des deux bases opposées d'un parallélépipède rectangle de hauteur 2ρ : le plan équidistant de ces deux bases contient un rectangle tout entier constitué de points frontières à deux projetantes opposées; le centre de ce rectangle est donc un point (β) qui est point frontière intérieur non isolé.

3° E comprend la surface de deux sphères de rayons 2ρ et de centres A et B avec $AB = 2\rho$; le milieu de AB est encore un point frontière à deux projetantes opposées, qui est point frontière isolé.

Ces exemples montrent que la connaissance des projections d'un point (β) ne renseigne pas sur la nature des points infiniment voisins. A l'inverse de ce qui se passe pour les classes α et γ, les projections d'un point (β) ne suffisent pas à caractériser le voisinage de ce point.

38. Avant d'aborder l'étude du contingent, où va s'accentuer ce caractère des points (β), nous donnerons une remarque fort simple qui sera bientôt utilisée.

Un point M *étant de la classe* α, *toute circonférence de grand cercle de la sphère* S_M^ρ *a une demi-circonférence* (extrémités comprises) *dépourvue de projection de* M.

C'est la demi-circonférence située du côté opposé aux projetantes de M, par rapport au plan Π qui intervient dans la définition d'un point de la classe α (n° **33**).

II. — La recherche du contingent.

39. *Définition.* — La notion de *contingent* est due à M. G. Bouligand qui en a tiré diverses applications, notamment pour obtenir un procédé d'intégration généralisée de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi (¹).

Le contingent en un point d'accumulation M d'un ensemble donné $\mathcal{E}$ est l'ensemble limite Φ d'une suite d'ensembles $\{\Phi_i\}$ constitués respectivement par le faisceau des demi-droites joignant M à tous les points de $\mathcal{E}$ intérieurs à la sphère $S_M^{\varepsilon_i}$, la suite des rayons $\{\varepsilon_i\}$ étant décroissante et tendant vers zéro (²). On démontre aisément (³) que le contingent est encore l'ensemble des demi-droites MT telles qu'il y ait une suite $\{M_i\}$ de points de $\mathcal{E}$ tendant vers M de manière que les angles $\{\widehat{M_i MT}\}$ tendent vers zéro. Une telle demi-droite MT sera une *demi-tangente* de l'ensemble $\mathcal{E}$ en M ou encore un *rayon* du contingent en ce point, et l'on pourra la caractériser en disant qu'il y a au moins un point, distinct de M, de l'ensemble considéré $\mathcal{E}$ dans tout cône circulaire droit de sommet M et d'axe MT, étant entendu qu'il s'agit d'un cône circulaire droit d'ouverture et de hauteur arbitrairement petites. C'est de cette dernière définition que nous nous servirons le plus souvent.

(¹) G. BOULIGAND. *Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi* (*Rendiconti dei Lincei*, juillet 1930).

(²) Cela signifie que toute demi-droite du faisceau Φ est la limite unique d'une suite de demi-droites appartenant respectivement à chacun des faisceaux Φ_i et que, de plus, toutes les demi-droites limites de telles suites appartiennent à Φ. Cette définition est la même que celle considérée plus loin à l'aide de la notion *d'écart* (fin du n° **76**). L'ensemble Φ est ainsi l'ensemble d'accumulation, ou indifféremment l'ensemble limite, au sens de Janiszewski (*Thèse*, Paris, 1911, p. 15), des ensembles Φ_i.

De la définition résulte pour le contingent la propriété d'être un ensemble *fermé* de demi-droites.

(³) *Voir* G. RABATÉ, *Thèse*, Toulouse, 1931, n° **11**.

Nous ferons ici une étude complète du contingent en un point quelconque de la frontière F_ρ pour en tirer dans la suite de nombreuses applications.

D'après sa définition, le contingent n'existe pas en un point isolé de F_ρ. Soit donc M un point frontière non isolé, c'est-à-dire un point (α) ou (β). Désignons par $\tau(M)$ le contingent de F_ρ en M.

40. Lemme de la sphère tangente. — *A toute demi-tangente* MT *correspond une sphère* S^ρ *centrée sur* E, *passant par* M *et tangente* à MT.

Soit $\{M_i\}$ une suite de points frontières tendant vers M de telle façon que les demi-droites $\{MM_i\}$ aient pour limite MT. A chaque point M_i associons une de ses projections A_i et considérons la suite $\{A_i\}$. Elle est infinie et l'on sait, en vertu des théorèmes des projections (n° **21**), que tout point d'accumulation A de cette suite est une projection de M. Extrayons de la suite $\{A_i\}$ une suite partielle $\{A_{i_k}\}$ tendant vers A et soit $\{M_{i_k}\}$ la suite des points frontières correspondants. En vertu des mêmes théorèmes, on sait encore que les angles $\widehat{AMM_{i_k}}$ tendent vers un angle droit; mais, d'après notre hypothèse, les demi-droites $\{MM_{i_k}\}$ ont une limite unique : la demi-droite MT; on a donc $\widehat{AMT} =$ un angle droit, et la sphère de centre A répond à la question (comme d'ailleurs toute sphère dont le centre est un point d'accumulation de la suite $\{A_i\}$).

41. De ce lemme, on déduit immédiatement cet énoncé général :

Le contingent $\tau(M)$ *est la surface d'un cône convexe.*

Je dis que par tout rayon MT on peut faire passer un plan Π ne traversant pas le contingent, c'est-à-dire tel qu'il n'y ait pas de rayons de $\tau(M)$ de part et d'autre de Π.

En effet, on vient de voir qu'il existe une sphère S^ρ, centrée sur E, passant en M et tangente à MT. Le plan Π, tangent à cette sphère en M, répond à la question, car aucun rayon du contingent ne peut être situé par rapport à Π du côté du centre de cette sphère.

Il est bien entendu que $\tau(M)$ n'est pas nécessairement la surface d'un cône convexe véritable; il peut dégénérer en un plan, un dièdre, un demi-plan, un secteur plan, deux demi-droites opposées ou même une seule demi-droite (1).

42. *Le contingent* $t(\mathrm{M})$. — Pour préciser la structure de $\tau(\mathrm{M})$, nous allons considérer le contingent $t(\mathrm{M})$ de la frontière f_ρ obtenue en effectuant la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon ρ sur les seules projections de M; posant, pour abréger, $e \equiv \varpi(\mathrm{M})$, cette construction fournit l'ensemble ouvert e_ρ de frontière f_ρ; $t(\mathrm{M})$ est le contingent de f_ρ en M. Nous comparerons ce contingent avec $\tau(\mathrm{M})$ après l'avoir déterminé par l'énoncé suivant :

Le contingent $t(\mathrm{M})$ *de* f_ρ *est la surface du cône supplémentaire du plus petit cône convexe* (2) *enfermant les projetantes de* M.

On a vu (n° **39**) que, pour l'existence du contingent $t(\mathrm{M})$, il est nécessaire que M soit un point (α) ou (β). Il existe donc au moins un plan Π passant par M et tel que toutes les projetantes de M soient d'un même côté du plan Π ou dans le plan; ces plans Π déterminent ainsi des régions, formées de tous les points de l'espace situés d'un même côté du plan ou dans le plan, qui contiennent toutes les projetantes M, et le plus petit cône convexe Γ enfermant les projetantes du point M est la portion d'espace commune à toutes ces régions (3).

---

(1) Le plan et le dièdre sont réalisés pour des points de la classe α (n° **63**). On trouvera un exemple des autres cas au n° **47**. *Voir* aussi la note du n° **62**.

(2) On sait qu'un cône convexe (solide) de sommet O est un ensemble fermé de demi-droites issues du point O tel qu'avec deux demi-droites OA et OB, il contienne aussi l'angle plan $\widehat{\mathrm{AOB}} < \pi$. La frontière extérieure de cet ensemble est la *surface* du cône. On démontre que la surface d'un cône convexe se caractérise encore par cette propriété : par chaque demi-droite OA de cette surface, il passe au moins un *plan d'appui*, c'est-à-dire un plan tel que toutes les demi-droites du cône non situées dans ce plan soient d'un même côté du plan.

(3) Notons que le cône Γ peut se réduire à une demi-droite (si M a une seule projetante), à deux demi-droites opposées (si M a seulement deux projetantes opposées), à un demi-plan (dans le cas de trois projetantes contenues dans un même plan, deux d'entre elles étant opposées) ou à un plan (dans le cas, par exemple, de trois projetantes contenues dans un même plan et faisant deux à deux des angles de 120°), ou encore à une pyramide (par exemple, si M a un nombre fini de projetantes non contenues dans un même plan).

Quant au cône supplémentaire Γ' de Γ, il est ainsi déterminé : une demi-droite MG appartient à la surface de Γ' si elle est normale à une projetante MA et si, de plus, le plan passant par MA et perpendiculaire à MG partage l'espace en deux régions, l'une contenant MG, l'autre contenant toutes les projetantes de M.

Cela posé, je dis d'abord qu'une demi-droite MG de la surface de Γ' appartient au contingent $t(M)$. En effet, MG étant normale à une projetante AM, il existe une sphère S^ρ (de centre A) passant par M et tangente à MG ; de plus, aucune autre sphère de e_ρ ne peut couper la demi-droite MG, puisque aucune projection n'est du côté de G par rapport au plan passant par MA et perpendiculaire à MG. Par suite, tout cône circulaire droit de sommet M et d'axe MG contient à la fois des points de e_ρ et des points extérieurs à e_ρ, donc des points de la frontière f_ρ.

Réciproquement, un rayon MT du contingent $t(M)$ appartient à la surface de Γ'. En effet, d'après le lemme de la sphère tangente (n° **40**), il existe une sphère S^ρ de centre A passant par M et tangente à MT : donc MT est normale à une projetante AM. De plus, aucune sphère de e_ρ ne coupant la demi-droite MT, il en résulte qu'aucune projection de M ne se trouve du côté de G par rapport au plan passant par AM et perpendiculaire à MG.

43. *Les deux contingents $t(M)$ et $\tau(M)$*. — Comparons maintenant $\tau(M)$ avec $t(M)$. On a d'abord ce théorème général valable pour tout point frontière où existe $\tau(M)$:

Tout rayon de $\tau(M)$ appartient à $t(M)$.

Soit MT un rayon de $\tau(M)$; il faut établir que tout cône circulaire droit γ de sommet M et d'axe MT contient des points de f_ρ ; pour cela, nous démontrerons qu'un tel cône contient toujours à la fois des points intérieurs et des points extérieurs à e_ρ.

En effet, en vertu du lemme de la sphère tangente (n° **40**), il existe une sphère de E_ρ passant en M (donc une sphère de e_ρ), tangente à MT : par suite, tout cône γ contient certainement des points de e_ρ. Mais ce cône ne peut pas contenir seulement des points de e_ρ ; autrement, tout point de e_ρ étant point de E_ρ, γ ne contiendrait pas des points de la frontière F_ρ et MT ne serait pas un rayon du contingent $\tau(M)$.

44. Ainsi *le contingent* $\tau(M)$ *est toujours contenu dans* $t(M)$. Nous allons voir que si le point M est de la classe α, réciproquement $\tau(M)$ est contenu dans $t(M)$, c'est-à-dire que les deux contingents coïncident.

En tout point de la classe α, *le contingent* $\tau(M)$ *de* F_ρ *coïncide avec le contingent* $t(M)$ *de* f_ρ (¹).

Nous venons de prouver que tout rayon MT de $\tau(M)$ appartient à $t(M)$; il reste à démontrer que, dans le cas actuel, tout rayon MT′ de $t(M)$ appartient à $\tau(M)$.

D'après le lemme de la sphère tangente (n° **40**), il existe une sphère de e_ρ, donc de E_ρ, tangente à MT′ en M. Par suite, tout cône circulaire droit de sommet M et d'axe MT′ contient des points de E_ρ. Pour établir que ce cône contient des points de la frontière F_ρ, il suffit donc de montrer qu'il ne contient pas exclusivement des points intérieurs. Supposons le contraire et admettons qu'il existe un cône γ exclusivement formé de points de E_ρ.

Appelons $\mathcal{H}$ l'hémisphère de S^ρ_M opposé à MT′, y compris la circonférence frontière C, et soit $\mathcal{H}'$ l'hémisphère complémentaire. Puisque M est de la classe α, nous savons (n° **38**) que C contient une demi-circonférence C′ (extrémités A et B comprises) ne possédant aucune projection de M. Nous allons montrer qu'il y a contradiction entre l'existence de C′ et celle du cône γ.

Outre la demi-circonférence C′, la sphère S^ρ_M n'a aucune projection de M sur $\mathcal{H}'$ car, MT′ étant un rayon du contingent $t(M)$, aucune sphère S^ρ centrée sur l'ensemble E et passant en M ne peut couper la demi-droite MT′. De plus, $\varpi(M)$ étant un ensemble fermé, il ne peut y avoir sur $\mathcal{H}$ aucun point de $\varpi(M)$ infiniment voisin de l'arc C′; par suite, on peut trouver un angle α tel que le fuseau formé sur $\mathcal{H}$ au voisinage de C′, par le plan Π de la circonférence C et par le plan Π_1

(¹) Notons que la réciproque n'est pas vraie : les contingents $\tau(M)$ et $t(M)$ peuvent coïncider l'un avec l'autre sans que le point M soit de la classe α (*voir* l'exemple 2° du n° **37**).

passant par AB et faisant avec Π un angle α, soit dépourvu de point de $\varpi(M)$. Prenons α inférieur au demi-angle au sommet de γ; alors l'hémisphère $\mathcal{H}_1$, délimité par Π_1 et contenant C', ne contient aucun point de $\varpi(M)$.

Cela posé, plaçons-nous dans le plan passant par MT' et par le milieu de la demi-circonférence C'; soit, dans ce plan, une demi-droite MΔ normale à Π_1 : cette demi-droite fait avec MT' un angle α et elle est par suite intérieure à γ. Prenons sur MΔ une suite de points $\{P_i\}$ tendant vers M. D'après ce que nous avons supposé, tout P_i est un point intérieur et la sphère $S^{\rho}_{P_i}$ enferme intérieurement au moins un point A_i de E (critère de position, 1°; n° **13**), mais les points A_i ne peuvent être ni intérieurs à S^{ρ}_{M} (critère de position, 2°; n° **13**), ni sur l'hémisphère $\mathcal{H}_1$.

La portion de surface de S^{ρ}_{M} intérieure à $S^{\rho}_{P_i}$ étant incluse dans l'hémisphère $\mathcal{H}_1$, elle ne peut contenir aucun point A_i; les points A sont donc situés dans la portion d'espace extérieure à S^{ρ}_{M} et intérieure à $S^{\rho}_{P_i}$. Mais, quand P_i tend vers M, cette portion d'espace a précisément pour limite l'hémisphère $\mathcal{H}_1$; de la sorte, la suite $\{A_i\}$ aurait un point d'accumulation au moins situé sur $\mathcal{H}_1$ et appartenant à E (puisque E est fermé), ce qui impliquerait une contradiction.

45. *Le contingent en un point* (α) *et en un point* (β). — En combinant l'énoncé précédent avec celui qui donne le contingent $t(M)$ de f_ρ (n° **42**), nous pouvons déterminer complètement le contingent $\tau(M)$ en un point (α) :

En tout point M *de la classe* α, *le contingent* $\tau(M)$ *de la frontière* F_ρ *est la surface du cône supplémentaire* Γ' *du plus petit cône convexe* Γ *enfermant les projetantes de* M.

46. Nous avons, en définitive, obtenu cette propriété importante : *le contingent de* F_ρ *en un point* (α) *ne dépend que des projections de ce point*. Ce fait souligne l'objectivité de notre classification en montrant à nouveau que les propriétés essentielles du voisinage d'un point (α) sont bien déterminées à partir de ses projections. Au contraire, en un point (β), le contingent ne peut se caractériser par la connaissance de ses seules projections : le contingent en un tel point est, en général, une partie seulement du cône supplémentaire Γ' (n° **43**).

47. Exemples. — 1° Reprenant l'exemple 3° donné plus haut (n° **37**) : E comprenant la surface de deux sphères, de rayons 2ρ et de centres A et B avec $AB = 2\rho$, le milieu M de AB est un point frontière isolé possédant deux projetantes opposées MA et MB; le contingent $t(M)$ de la frontière f_ρ relative aux seules projections de M est le plan perpendiculaire à AB, tandis que le contingent $\tau(M)$ de la frontière totale F_ρ n'existe pas.

2° Au lieu des deux sphères de l'exemple précédent, E comprend seulement les surfaces de deux hémisphères situés d'un même côté d'un plan Π passant par AB; le milieu M de AB est encore un point (β) à deux projetantes opposées. Le contingent $t(M)$ est un plan, tandis que $\tau(M)$ se réduit à une demi-droite issue de M et perpendiculaire à Π.

3° E comprend : *a*. deux demi-circonférences de centres A et B ($AB = 2\rho$) et de rayons 2ρ, situées dans un demi-plan Π limité par AB; *b*. deux demi-circonférences de mêmes centres et de mêmes rayons situées dans un autre demi-plan Π' également limité par AB. Le milieu M de AB est un point (β) à deux projetantes opposées, de sorte que le contingent $t(M)$ est un plan, tandis qu'en faisant varier l'angle α des demi-plans Π et Π', le contingent $\tau(M)$ prend différents aspects :

$\alpha = 0$, $\tau(M)$ est un demi-plan normal à AB;
$\alpha < \pi$, $\tau(M)$ est un secteur plan, supplément du rectiligne du dièdre $\Pi AB\Pi'$;
$\alpha = \pi$, $\tau(M)$ est formé de deux demi-droites opposées.

Il serait intéressant de poursuivre l'étude du contingent en un point (β). Les théorèmes précédents suggèrent de chercher sous quelles conditions supplémentaires le contingent en un tel point M ne dépend, comme celui d'un point (α), que des seules projetantes de M. En outre, les exemples ci-dessus font songer à cette question : le contingent en un point (β) peut-il être un secteur plan d'angle $> \pi$?

Ajoutons ici quelques propositions sur les points (α), qui nous seront utiles au paragraphe suivant.

48. Le paratingent en un point (α). — *Le paratingent* (*voir* n° **31**) *de la frontière* F_ρ *en un point* M *de la classe* α *ne comprend aucune droite* $\Delta M \Delta'$ *passant à l'intérieur*[1] *du cône convexe dont la surface est le contingent* $\tau(M)$.

Admettons qu'il en soit autrement. Alors, si petits que soient l'angle η et la longueur ε, on peut trouver deux points frontières M'

---

[1] L'intérieur du cône convexe défini par $\tau(M)$ est celui des deux portions de l'espace délimitées par $\tau(M)$ et ne contenant pas les projetantes de M.

et M'' tels qu'on ait à la fois $MM' < \varepsilon$, $MM'' < \varepsilon$ et $\widehat{M'M'', \Delta\Delta'} < \eta$. La droite $\Delta\Delta'$ passant à l'intérieur du cône convexe $\tau(M)$, on peut, d'après la définition de ce cône (nos **43** et **42**), choisir η de manière que le plan médiateur Π de $M'M''$ découpe sur la sphère S^ρ_M deux calottes, la surface s de l'une d'elles étant tout entière à l'extérieur du cône convexe Γ enfermant les projetantes de M; il n'y a donc aucune projection de M sur la surface de la calotte s (y compris sa circonférence frontière C), ni au voisinage de C sur l'autre calotte puisque $\varpi(M)$ est fermé (n° **15**). Or, d'après le lemme des deux points (n° **16**), les projections de M' et de M'' sont respectivement de part et d'autre du plan médiateur Π ou dans ce plan. D'autre part, la longueur ε étant arbitrairement petite, le théorème des projections I (n° **17**) nous apprend que toute projection A' ou A'', de M' ou M'', est une projection de M ou bien est infiniment voisine d'une projection de M. Il s'ensuit que l'un des deux points A' ou A'' est du côté de s par rapport au plan Π (ou dans ce plan), donc que le point M a une projection sur cette calotte, ou au moins au voisinage de C sur l'autre calotte, ce qui est impossible.

49. Les deux théorèmes suivants caractérisent la nature des points de l'espace au voisinage d'un point (α) :

I. *Si* M *est un point* (α) *et* γ *un cône quelconque de sommet* M *tout entier* INTÉRIEUR *au cône convexe* $\tau(M)$, *tout point intérieur à* γ *et suffisamment voisin de* M *est un point* EXTÉRIEUR *à* E_ρ.

Si l'on supposait le contraire, il existerait à l'intérieur de γ une suite de points $\{P_i\}$ tendant vers M tels que toute sphère $S^\rho_{P_i}$ posséderait intérieurement ou sur sa surface au moins un point A_i de E (n° **13**). Tout point A_i est situé dans la région $\mathcal{R}_i$ de l'espace non intérieure à S^ρ_M et non extérieure à $S^\rho_{P_i}$. Or, les P_i étant intérieurs à γ, on peut en extraire une suite $\{P_{i_k}\}$ tendant vers M suivant une direction intérieure ou au moins tangente à γ, donc intérieure à $\tau(M)$, les régions $\mathcal{R}_{i_k}$ ayant pour limite la surface d'un hémisphère $\mathcal{H}$ de S^ρ_M, tout entière à l'extérieur du cône Γ enfermant les projetantes de M (n° **42**). L'hémisphère $\mathcal{H}$ ne peut donc porter aucune projection de M et il y aurait contradiction puisque, à la limite, quand les P_{i_k} tendent vers M, les A_{i_k} auraient au moins un point d'accumulation situé sur $\mathcal{H}$.

II. *Si* M *est un point* (α) *et* γ' *un cône quelconque de sommet* M *tout entier* EXTÉRIEUR *au cône convexe* $\tau(M)$, *tout point intérieur à* γ' *et suffisamment voisin de* M *est un point* INTÉRIEUR *à* E_ρ.

En raisonnant encore par l'absurde, on aurait une suite de sphères $\{S^\rho_{P'_i}\}$ tendant vers S^ρ_M dont aucune n'enfermerait intérieurement un point de E; par suite, la portion de surface s_i de S^ρ_M intérieure à $S^\rho_{P'_i}$ ne porterait aucune projection de M. Mais les points P'_i étant intérieurs à γ', on pourrait en extraire une suite $\{P'_{i_k}\}$ telle que les portions s_{i_k} tendraient vers un hémisphère de S^ρ_M limité par un plan qui passerait en M et traverserait le cône Γ (du n° **42**), donc vers un hémisphère contenant au moins une projection de M, ce qui établit la contradiction.

50. Nous terminerons ce paragraphe en signalant que la considération du cône Γ (*voir* n° **42**) permet de préciser le théorème des projections (n° **17**). Si M est un point frontière fixe non isolé (donc de la classe α ou β), on sait (n° **21**) qu'en associant une projection A_i à chaque point d'une suite de points frontières $\{M_i\}$ tendant vers M, tout point d'accumulation A de la suite $\{A_i\}$ est une projection de M. Il est facile de voir qu'un tel point A appartient à la *surface* du cône Γ.

En effet, considérons une suite partielle $\{A_j\}$ extraite des A_i et admettant A pour point limite unique; soit $\{M_j\}$ la suite des points frontières correspondants. Le lemme des deux points (n° **16**) nous apprend que les projections de M et d'un point M_j quelconque sont respectivement de part et d'autre du plan Π_j médiateur de MM_j (ou dans ce plan). Extrayons alors des M_j une suite partielle M_k de façon que la suite des plans médiateurs $\{\Pi_k\}$ admette un plan limite unique Π. Comme les points A et A_k sont de part et d'autre de Π_k (ou dans ce plan) et que, de plus, les suites $\{M_k\}$ et $\{A_k\}$ tendent respectivement vers M et vers A, ce plan limite Π passe par MA et toutes les projetantes de M sont d'un même côté de Π; le cône convexe Γ est donc tout entier de ce même côté et il est impossible que MA soit une demi-droite intérieure à ce cône.

Il est ainsi prouvé que *toute projection* A′ *d'un point frontière* M′ *infiniment voisin de* M *est à l'extérieur ou sur la surface du cône* Γ *enfermant les projetantes de* M (1).

III. — Représentation paramétrique locale.

51. Une première application du contingent se rencontre en étudiant la représentation paramétrique de la portion de frontière F_ρ constituant le voisinage d'un point déterminé. M. G. Bouligand a énoncé cette proposition : Si en un point frontière M, on peut trouver un cône droit à base circulaire dont tout point intérieur est extérieur à E_ρ (*hypothèse* H), le voisinage de M est représentable sous la forme $z = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant à nombres dérivés bornés (2). A la suite des résultats que nous venons d'énoncer (nº **49**), il est clair que cette hypothèse est réalisée en tout point (α).

Nous ne reproduirons pas le raisonnement de M. Bouligand et nous établirons directement que le voisinage d'un point (α) admet une représentation paramétrique simple.

52. Point de la classe α. — *A tout point* O *de la classe* α, *on peut faire correspondre un voisinage, formé de tous les points frontières situés*

---

(1) Ajoutons que la considération de ce cône Γ conduit encore à d'intéressantes propositions, conséquences du théorème des projections I, où s'introduit la semi-continuité d'une fonction de point sur un ensemble :

I. *L'angle solide* Ω(M) *du plus petit cône convexe* Γ(M), *enfermant les projetantes d'un point frontière* M *non isolé, est une fonction semi-continue supérieurement sur la frontière.*

D'où, en vertu du nº **45** :

II. *Sur l'ensemble des points* (α), *l'angle solide du cône convexe défini par le contingent est une fonction semi-continue inférieurement.*

(2) G. Bouligand, *Sur certaines classes de surfaces de l'espace euclidien à trois dimensions* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. **190**, 1930, p. 1001); *Sur la construction de Cantor-Minkowski* (*Ann. de la Soc. polonaise de Math.*, t. **9**, 1930, p. 28). Nous retrouverons plus loin (nº **126**) l'*hypothèse* H.

à une distance suffisamment petite de O, *qui soit représentable par une équation de la forme* $z = f(x, y)$, *la fonction* $f(x, y)$ *étant continue et à nombres dérivés bornés.*

D'après la définition (n° **33**) d'un point (α), toutes les projetantes de O sont d'un même côté d'un plan Π et aucune d'elles n'est dans ce plan, ni infiniment voisine de ce plan, puisque leur ensemble est fermé (n° **15**). Prenons Π pour plan xOy, le demi-axe Oz étant la demi-droite perpendiculaire à Π, du côté opposé aux projetantes de O.

Je dis d'abord qu'il existe sur la frontière F_ρ un voisinage de O tel qu'une parallèle à Oz ait au plus un point commun avec ce voisinage. En effet, s'il en était autrement, on pourrait trouver, si petite que soit la longueur ε, deux points frontières M et M' à une distance de O moindre que ε et situés sur une même parallèle $O_1 z_1$ à Oz. La droite $z'Oz$ ferait donc partie du paratingent (n° **31**) de la frontière F_ρ en O, ce qui est impossible (n° **48**) car, d'après le choix de nos axes, cette droite passe à l'intérieur du cône convexe dont la surface est le contingent $\tau(O)$ de F_ρ en O (n° **45**).

Montrons maintenant qu'il existe une longueur l telle que toute corde de la sphère S'_0, parallèle à Oz, ait au moins un point commun avec F_ρ à l'intérieur de S'_0. Il suffit de faire voir qu'une telle corde contient à la fois un point extérieur et un point intérieur à E_ρ. Or ceci est immédiat, car on a vu (n° **49**) qu'en prenant deux cônes γ et γ', de même sommet O, respectivement intérieur et extérieur au cône $\tau(O)$, tout point de l'un de ces cônes, suffisamment voisin de O, est un point extérieur ou intérieur à E_ρ, suivant qu'il appartient à γ ou à γ'.

On a donc établi l'existence sur la frontière F_ρ d'un voisinage de O qui est en correspondance biunivoque, par projection orthogonale, avec le plan Π. Comme à deux points infiniment voisins de ce voisinage correspondent sur Π deux points infiniment voisins, la correspondance est continue de F_ρ vers Π, donc bicontinue (*voir* la note du n° **71**). Il est ainsi prouvé que ce voisinage de O est représentable sous la forme $z = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant continue.

Il reste à démontrer que pour tous les points suffisamment proches de O, la fonction $f(x, y)$ est à nombres dérivés bornés ou encore que la surface formée par ces points est à pentes bornées. Or, la demi-droite Oz étant intérieure au cône convexe formé par le contingent $\tau(O)$, nous venons de rappeler que, si l'on choisit un cône de révolution γ_1 de sommet O et d'axe $z'Oz$, tout entier intérieur à $\tau(O)$ et à son symétrique par rapport à O, ce cône ne contient au voisinage de O aucun point de F_ρ. De plus, pour un point frontière M' infiniment voisin de M, le cône γ'_1 déduit de γ_1 par la translation MM' ne peut contenir intérieurement aucun autre point frontière, sans quoi le paratingent de F_ρ en O comprendrait une droite $\Delta O \Delta'$ intérieure ou au moins tangente à γ_1, ce qui est impossible (n° **48**) puisqu'elle passerait à l'intérieur de $\tau(O)$. Le théorème annoncé est donc établi.

53. *Point* (β) *à deux seules projetantes opposées.* — Le théorème précédent, sur la représentation paramétrique de la frontière F_ρ au voisinage d'un point (α), ne s'étend pas, en général, aux points de la classe β. Toutefois, pour un type particulier de ces points, sur lequel nous reviendrons longuement au chapitre suivant, on a aisément une propriété simple : il s'agit des points dont les projetantes se réduisent à deux rayons opposés :

Soit O *un point frontière dont les projetantes sont deux rayons opposés* OA *et* OB. *Il existe un voisinage de* O, *formé de tous les points frontières situés à une distance suffisamment petite de* O, *tel qu'une parallèle à* AOB *ait au plus deux points communs avec ce voisinage.*

Désignons par $\mathcal{A}$ un voisinage de A et par $\mathcal{B}$ un voisinage de B sur l'ensemble E (c'est-à-dire le système des points de E distants de A ou de B d'au plus une longueur arbitraire). Soit $F_{\mathcal{A}}$ (ou $F_{\mathcal{B}}$) la frontière obtenue par la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon ρ sur $\mathcal{A}$ (ou sur $\mathcal{B}$). D'après le théorème des projections I (n° **17**), tout point de F_ρ suffisamment voisin de O a ses projections voisines soit de A, soit de B; on peut donc déterminer sur F_ρ un premier voisinage de O dont tous les points appartiennent à l'une au moins des deux frontières $F_{\mathcal{A}}$ ou $F_{\mathcal{B}}$. Mais, d'autre part, le point O a, pour chacune de ces frontières, une seule projetante OA ou OB : c'est donc un point (α). On sait alors (n° **52**) qu'il existe sur $F_{\mathcal{A}}$ et sur $F_{\mathcal{B}}$ des voisinages de O ayant au plus un point commun avec une parallèle à AB, et une telle parallèle ne peut avoir avec F_ρ plus de deux points communs.

54. Mais on ne saurait déduire de cette propriété qu'un point O du type considéré possède toujours un voisinage se décomposant en deux portions représentables séparément par une équation de la forme

$$z = f(x, y).$$

Il se peut, en effet, qu'une parallèle $A_1 B_1$ infiniment voisine de AB n'ait au voisinage de O qu'un seul point commun avec la frontière F_ρ ou même n'en ait aucun. Ainsi, on a vu dans l'exemple 3° du n° **37** un point à deux projetantes opposées, qui est point frontière isolé : le voisinage de ce point n'existe pas. Dans l'exemple 2°, on a le cas d'un point O pour lequel toute parallèle $A_1 B_1$ à AB rencontre la frontière en un seul point : le voisinage de O est ici une surface unique. On peut encore rencontrer le cas où ce voisinage se réduit à une ligne; par exemple, prenons pour ensemble E la surface de deux cylindres droits à base circulaire dont les directrices sont, dans un plan Π, les deux circonférences de même rayon 2ρ et de centres A et B (avec $AB = 2\rho$); tout point O de la perpendiculaire élevée au milieu de AB sur le plan Π est un point frontière à deux projetantes opposées et le voisinage de ce point est une portion de cette perpendiculaire (*cf.* l'exemple 3° du n° **47** lorsque $\alpha = \pi$).

55. Le théorème sur le voisinage d'un point (α) ne peut donc s'étendre aux points considérés qu'avec une condition restrictive :

Soit O *un point frontière dont les projetantes sont deux rayons opposés* OA *et* OB. *S'il existe un voisinage de* O (formé de tous les points frontières intérieurs à une sphère S_0^l) *pour lequel toute parallèle à* AB *ait au moins deux points communs avec ce voisinage, alors il y a un voisinage de* O *se décomposant en deux portions représentables séparément par une équation de la forme* $z = f(x, y)$, *la fonction* $f(x, y)$ *étant continue et à nombres dérivés bornés* (¹).

(¹) Notons que l'hypothèse implique des propriétés particulières des points ainsi définis. Tout d'abord, en vertu des théorèmes des projections, un point frontière O′ infiniment voisin de O a ses projections infiniment voisines de A ou de B, mais O′ ne peut avoir *à la fois* une projection A′ proche de A et une projection B′ proche de B, car la parallèle $O'z'$ à Oz ne contiendrait aux environs

Prenons pour plan xOy le plan Π perpendiculaire en O à AB, le demi-axe Oz étant, par exemple, la demi-droite OA. Considérant les frontières $F_{\mathcal{A}}$ et $F_{\mathcal{B}}$ définies plus haut (n° **55**), le point O est un point (α) pour chacune d'elles. Il existe donc (n° **52**) sur $F_{\mathcal{A}}$ et sur $F_{\mathcal{B}}$ des voisinages de O, $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$, susceptibles d'être représentés séparément par une équation de la forme indiquée, voisinages formés respectivement des points de $F_{\mathcal{A}}$ ou de $F_{\mathcal{B}}$ intérieurs à une sphère S_0^a ou S_0^b. Le voisinage annoncé pour F_ρ se compose alors des points frontières intérieurs à la plus petite des trois sphères S_0', S_0^a, S_0^b; en effet, à l'intérieur de cette sphère, la frontière F_ρ s'identifie avec les deux surfaces $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$: tout point de F_ρ appartient évidemment à l'une de ces surfaces et, réciproquement, tout point N de $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, par exemple, fait partie de F_ρ, sans quoi la parallèle Nz' à Oz devrait rencontrer l'autre surface $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ en deux points, ce qui est impossible. Notre théorème est donc établi.

56. *Autres points* (β). — Nous sommes arrivés à ce résultat que, pour un point (β) à deux projetantes opposées, on peut, dans certains cas, étendre la représentation paramétrique locale, en remarquant que le voisinage de ce point est parfois susceptible de se décomposer en *deux* surfaces. L'éventualité possible, c'est que l'une de ces surfaces ou toutes les deux fassent défaut, mais il n'y en a jamais plus de deux.

Pour un point (β), dont le système des projetantes est plus compliqué, le problème de la représentation paramétrique se révèle aussi plus complexe. Tout d'abord, il peut se produire la même éventualité que plus haut : le voisinage du point n'est pas une véritable surface; par exemple, si l'on prend pour ensemble E la surface d'un cylindre circulaire droit de rayon ρ, tout point de l'axe de ce cylindre est un

---

de O′ (donc aux environs de O) que le seul point frontière O′, les autres points de cette parallèle étant intérieurs aux sphères $S^\rho_{A'}$ et $S^\rho_{B'}$. Par suite, le point O n'a dans son voisinage aucun autre point frontière à deux projetantes opposées et tout point répondant aux conditions de l'énoncé est *isolé*. On en déduit que : *les points à deux projetantes opposées, possédant sur la frontière un voisinage ayant toujours deux points communs avec une parallèle à la ligne des projetantes, forment un ensemble dénombrable.*

point (β), dont le système des projections constitue une circonférence de rayon ρ, et le voisinage de ce point est un segment de droite.

Mais outre cette difficulté, qui résulte de l'absence de points frontières donnant lieu à une véritable surface, on doit envisager la difficulté inverse : le voisinage d'un point (β) quelconque comprend-il au plus un nombre *fini* de surfaces représentables séparément par une équation $z = f(x, y)$? Sans étudier davantage cette question, nous allons donner un exemple qui, avec les précédents, montrera la variété de structure que peut offrir un tel voisinage et aussi qu'il y a lieu, dans cette étude, de se défier des analogies.

57. Prenons un système auxiliaire d'axes $O\xi\eta\zeta$. L'ensemble E comprend dans ce système : une suite infinie de circonférences $\{\gamma_n\}$ données par les équations

$$(\gamma_n) \qquad \xi = -\rho, \qquad \eta^2 + \zeta^2 = 2\zeta\rho\frac{2n-1}{n};$$

une autre suite infinie de circonférences analogues $\{\gamma'_n\}$

$$(\gamma'_n) \qquad \zeta = -\rho, \qquad \xi^2 + \eta^2 = 2\xi\rho\frac{2n-1}{n};$$

enfin le point de coordonnées $(0, 0, \rho)$.

Considérons l'origine O; c'est un point (β) possédant trois projections, de coordonnées respectives $(0, 0, \rho)$, $(-\rho, 0, 0)$ et $0, 0, -\rho)$, qui sont les extrémités et le milieu d'une demi-circonférence de centre O et de rayon ρ, contenue dans le plan $\eta = 0$. Le contingent $\tau(O)$ de F_ρ en O est le demi-plan $\zeta = 0$, $\xi \geqq 0$.

Or, pour un point (β) du type précédemment étudié (n° **55**), où le contingent est un plan, on a pris Oz normal à ce plan. Pour un point (α) où le contingent est un dièdre, c'est-à-dire un point (α) dont les projetantes sont comme ici contenues dans un même plan, ce demi-axe doit être intérieur au plus petit dièdre ainsi déterminé par le contingent; le point O de notre exemple évoque le cas limite où les deux faces du dièdre seraient confondues. Par analogie avec les points de l'un ou l'autre type [1], on songe naturellement à prendre

[1] Avec les définitions du chapitre suivant (n° **62**), cela revient à dire : par analogie avec les points de même *classe* ou de même *espèce* que le point O.

pour demi-axe Oz soit la normale à $\tau(O)$, soit une droite de ce demi-plan.

Mais un tel choix ne conduit pas à décomposer la frontière F_ρ en un nombre fini de surfaces. En effet, l'intersection de F_ρ par le plan de coordonnées $\eta O \zeta$ comprend une suite infinie de circonférences $\{\Gamma_n\}$ déduites des γ_n par une translation $+\rho$ suivant l'axe $O\xi$; une droite normale au plan $\zeta = 0$ rencontre donc F_ρ en une infinité de points. Et il en est de même pour une droite contenue dans ce plan, car l'intersection de F_ρ avec le plan $\xi O \eta$ comprend une suite infinie de circonférences analogues $\{\Gamma'_n\}$ déduites des γ'_n par une translation $+\rho$ suivant $O\zeta$.

Cependant, on peut démontrer qu'en choisissant le demi-axe Oz dans le dièdre droit de rectiligne $\xi O \zeta$, une parallèle à ce demi-axe n'a pas plus de deux points communs avec F_ρ au voisinage de O. En effet, considérons E_ρ comme la réunion de la sphère S_A^ρ, de centre $A(0, 0, \rho)$, et du domaine restant $E_\rho^{(1)}$ après la suppression de cette sphère. Le point O, envisagé sur la frontière $F_\rho^{(1)}$ de $E_\rho^{(1)}$, est un point (α) où le contingent de $F_\rho^{(1)}$ est formé des deux faces du dièdre droit de rectiligne $\xi O \zeta$ (nº **45**); on sait alors (nº **52**) qu'en prenant Oz dans ce dièdre, toute parallèle à Oz, suffisamment voisine de ce demi-axe, rencontre $F_\rho^{(1)}$ en un point et en un seul, et la même propriété a lieu pour la surface de la sphère S_A^ρ. Comme tout point de F_ρ appartient soit à la surface de S_A^ρ, soit à la frontière $F_\rho^{(1)}$, il en résulte qu'une telle parallèle a au plus deux points communs avec F_ρ.

58. *Remarques sur les conditions d'exclusion des points* (β). — Pour terminer le chapitre, nous signalerons encore quelques questions. Les points (α) jouissant de propriétés simples, on est amené à se poser les problèmes suivants :

1° Un ensemble E étant donné, quelles sont les valeurs de ρ qui conduisent à une frontière F_ρ exclusivement formée de points (α)?

2° Quels sont les ensembles E qui ne donnent naissance qu'à des points (α) pour une valeur donnée de ρ, ou bien quel que soit ρ?

59. Nous donnerons, sur le premier de ces problèmes, un théorème appelé à jouer un rôle important (nº **114**).

Si l'on effectue sur un ensemble E, *de diamètre* D, *la construction de Cantor-Minkowski avec un rayon* $\rho > \frac{D}{\sqrt{2}}$, *la frontière obtenue ne comprend que des points de la classe* α.

Soit M un point frontière quelconque. Il faut démontrer que le système des projections $\varpi(M)$ se localise sur une calotte, moindre qu'un hémisphère, de la sphère S_M^ρ.

Soit A une projection quelconque de M. Il est facile de voir que l'hémisphère $\mathcal{H}$ (circonférence frontière C comprise) de S_M^ρ, opposé à $\overrightarrow{MA}$, ne contient aucune projection de M. En effet, s'il y avait une projection B sur $\mathcal{H}$, on aurait

$$AB \geqq \rho\sqrt{2},$$

$\rho\sqrt{2}$ étant la distance de A à un point de la circonférence C, et cette inégalité est impossible puisque deux points A et B de E sont à une distance $AB \leqq D$ et que $D < \rho\sqrt{2}$.

L'ensemble $\varpi(M)$ étant fermé, on peut trouver une longueur ε telle que $\varpi(M)$ se localise sur une calotte sphérique de pôle A, limitée par un plan situé à la distance ε du plan de C.

On remarque que l'hypothèse précédente $\rho > \frac{D}{\sqrt{2}}$ fournit un résultat plus précis que celui annoncé. Non seulement l'ensemble $\varpi(M)$ des projections d'un point frontière M se localise sur une même calotte sphérique de S_M^ρ, mais il se localise sur une calotte ayant pour pôle une quelconque des projections de M, donc sur la région commune à toutes ces calottes analogues. On pourrait se proposer de chercher la plus petite valeur k telle qu'en prenant $\rho > kD$, la frontière obtenue soit exclusivement formée de points (α). On ne saurait d'ailleurs prendre $k < \frac{1}{\sqrt{3}}$, comme le montre cet exemple : E comprend les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté D ; avec $\rho = \frac{D}{\sqrt{3}}$, le centre du triangle est un point de la classe β.

CHAPITRE III.

LES TROIS ESPÈCES DE POINTS FRONTIÈRES ET LES SPECIFIQUES. RÉSULTATS METRIQUES.

I. — Les trois espèces de points frontières. — Les spécifiques.

60. Les paragraphes précédents ont montré les difficultés que présente l'étude des points de la classe β. Dans ce chapitre, nous établirons entre les points frontières une autre distinction basée sur la figure formée par les projetantes d'un même point, cette figure étant le *spécifique* du point considéré. Grâce à cette classification, nous serons conduits à de nouvelles propriétés de la frontière, propriétés qui engloberont les points de la classe β, et nous établirons notamment que tous les points sans plan tangent sont inclus dans un ensemble d'aire nulle.

61. *Les trois espèces de points frontières.* — A côté des trois CLASSES déjà définies, nous distinguerons trois ESPÈCES de points frontières suivant la distribution de leurs projetantes. Loin de se confondre ou de se gêner, ces deux classifications, en se combinant, vont se prêter un mutuel appui et permettre de répartir les points frontières en types précis et faciles à étudier.

Nous dirons qu'un point frontière est de :

PREMIÈRE ESPÈCE, si ses projetantes sont contenues sur une même droite;

DEUXIÈME ESPÈCE, si elles sont contenues dans un même plan, sans l'être sur une même droite;

TROISIÈME ESPÈCE, si elles ne sont pas contenues dans un même plan.

62. Il sera commode, pour désigner un point frontière, d'employer une notation condensée, la lettre indiquant la classe et l'indice, l'espèce. Ainsi, un point (α_2) sera un point de deuxième espèce de la classe α.

La combinaison de nos deux classifications donne naissance aux types de points suivants :

Première espèce. — Un point de première espèce peut posséder une seule projetante, c'est alors un point *ordinaire* (nº **14**) ou point (α_1), ou bien deux projetantes opposées : point (β_1). Il n'existe pas de point de première espèce de la classe γ ou point (γ_1).

Deuxième espèce. — Les projections d'un point de deuxième espèce sont réparties sur une circonférence de rayon ρ ; lorsque celle-ci a un arc $> \pi$ dépourvu de projection, le point est de la classe α : c'est un point (α_2) ; dans le cas contraire, on a un point (β_2). Il n'existe pas de point (γ_2).

Troisième espèce. — Un point de troisième espèce sera un point (α_3), (β_3) ou (γ_3) suivant que ses projections se localisent sur une même calotte, sur un même hémisphère ou non.

Les points (γ_3) étant des points frontières isolés, c'est-à-dire dont le voisinage ne comprend que des points intérieurs à E_ρ (nº **35**), ils ne retiendront pas notre attention, et il reste six types importants de points frontières [1].

63. La proposition du nº **45** permet de préciser la forme du contingent pour les trois espèces de points (α) :

En un point (α_1), le contingent est un plan normal à la projetante unique ;

En un point (α_2), le contingent est formé des deux faces d'un dièdre, dont le rectiligne est supplémentaire de l'angle des deux projetantes extrêmes ;

En un point (α_3), le contingent est la surface d'un cône convexe véritable.

---

[1] Il est facile de réaliser des exemples de ces différents types de points ; il suffit de se donner d'abord, d'après la définition du point M cherché, l'ensemble e ou $\varpi(M)$ de ses projections sur la sphère S_M^ρ, puis on peut compliquer arbitrairement le voisinage de M en ajoutant des points voisins de ceux de $\varpi(M)$, non situés sur S_M^ρ. Notons que la frontière f_ρ de e_ρ, pour ces différents cas, fournit des exemples de contingent $t(M)$ répondant à l'énumération déjà faite (nºˢ **41** et **42**).

Ultérieurement, nous dirons un mot du contingent en un point de deuxième ou de troisième espèce (nº **121**).

64. *Les spécifiques*. — A tout point d'espèce ou de type déterminé, on peut associer une figure déterminée obtenue à partir des projetantes du point. Cette figure, étant caractéristique de l'espèce ou du type étudié, peut être appelée le SPÉCIFIQUE du point considéré.

Pour un point (α_1), le spécifique sera un *rayon* ρ, projetante unique du point. Pour un point (β_1), ce sera un *diamètre* 2ρ constitué par les deux seules projetantes du point.

Pour un point de deuxième espèce, le spécifique sera un *triangle* isocèle formé avec deux quelconques des projetantes du point, étant bien entendu que ce spécifique est un véritable triangle, non réduit à une projetante unique ou à deux projetantes opposées.

Enfin, pour un point de troisième espèce, le spécifique sera un *tétraèdre* formé avec trois projetantes quelconques non situées dans un même plan.

L'intérêt de cette notion réside dans les théorèmes d'impénétrabilité que nous énonçons maintenant, en les faisant suivre de la démonstration générale.

II. — Théorèmes d'impénétrabilité.

65. LES PROJETANTES. — *Deux projetantes quelconques ne peuvent avoir en commun qu'une extrémité.*

Cet énoncé est applicable à des points frontières d'espèce quelconque.

66. LES TRIANGLES DE PROJETANTES. — *Deux triangles isocèles formés respectivement par deux projetantes de deux points distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur la base de chacun d'eux.*

Énoncé applicable à des points de deuxième ou de troisième espèce.

67. LES TÉTRAÈDRES DE PROJETANTES. — *Deux tétraèdres formés respectivement avec trois projetantes de deux points distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur la base de chacun d'eux.*

Énoncé applicable à des points de troisième espèce.

En effet, deux des figures considérées (segments, triangles, tétraèdres), provenant de deux points frontières distincts, sont, d'après le lemme des deux points (n° **16**), appliquées à nos deux points frontières, de part et d'autre du plan médiateur et ne peuvent avoir de point commun que dans ce plan.

III. — Les points de première espèce.

68. Nous nous proposons maintenant de faire une étude séparée de chacune des trois espèces de points frontières. On associera désormais à chaque point non plus une projection ou une projetante, comme aux chapitres précédents, mais un spécifique, c'est-à-dire une figure déterminée de projetantes. On obtiendra ainsi des relations entre certains ensembles de points frontières et les ensembles de leurs spécifiques.

69. On sait (n° **62**) que les points de première espèce sont de deux types distincts, (α_1) ou (β_1), suivant qu'ils possèdent une seule projetante, ou bien deux projetantes opposées. Nous développerons, pour les ensembles de points de chacun de ces deux types, deux séries de théorèmes ayant une étroite parenté.

70. *Les ensembles de points* (α_1). — Soit M un point (α_1); son spécifique σ [1] est une projetante ou rayon $AM = \rho$. A un ensemble de points (α_1) correspond biunivoquement un ensemble de spécifiques-rayons sur lequel nous savons distinguer un spécifique d'accumulation (n° **28**). Nous allons préciser les caractères de cette correspondance biunivoque entre les points (α_1) et leurs spécifiques.

71. Considérons d'abord les ensembles *quelconques* de points (α_1). Il est évident que la correspondance étudiée est continue dans un sens, celui des spécifiques aux points frontières : si une suite de spéci-

[1] D'une façon générale, on désignera par σ, σ_i ou σ' le spécifique du point M, du point M_i ou du point M'.

fiques $\{\sigma_i\}$ tend vers un spécifique limite σ, la suite $\{M_i\}$ des points (α_1) correspondants a pour limite le point M, associé à σ. Démontrons que cette correspondance est continue dans l'autre sens (¹), c'est-à-dire :

72. *Si une suite* $\{M_i\}$ *de points* (α_1) *tend vers un point limite* M *du type* (α_1), *la suite* $\{\sigma_i\}$ *des spécifiques correspondants a pour limite le spécifique* σ *de* M.

C'est une conséquence des théorèmes des projections (n° **21**) : tout spécifique d'accumulation de la suite $\{\sigma_i\}$ est une projetante de M, et ce point, étant (α_1), n'a qu'une seule projetante qui est son spécifique.

73. On a donc ce théorème :

La correspondance entre les spécifiques et les points d'un ensemble quelconque de points (α_1) *est biunivoque et bicontinue* (ou encore : *est homéomorphe*).

On aurait le même énoncé en remplaçant *les spécifiques* par *les projections*.

(¹) Le théorème de Jordan, d'après lequel *une correspondance entre deux ensembles bornés de points ne peut être biunivoque et, de plus, continue dans un sens sans être continue dans les deux sens*, est à peu près classique, et M. Henri Lebesgue y fait allusion dans son Mémoire : *Sur les correspondances entre les points de deux espaces* (*Fundamenta mathematicæ*, t. II, 1921, p. 277). Mais ce théorème s'étend aisément à des ensembles plus généraux que des ensembles de points. J'ai démontré dans une Note : *Sur une application de la notion : compact en soi* (*Bull. des Sc. math.*, 2ᵉ série, t. 53, 1929, p. 69), qu'en considérant deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'un espace $(\mathcal{L})$ de M. Fréchet (*voir* M. Fréchet, *Les Espaces abstraits*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 163), *si la correspondance entre* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$ *est biunivoque et continue dans le sens de* $\mathcal{E}_1$ *vers* $\mathcal{E}_2$, *et si, de plus,* $\mathcal{E}_1$ *est compact en soi* (c'est-à-dire si pour tout ensemble infini de $\mathcal{E}_1$, il y a au moins un élément d'accumulation appartenant toujours à $\mathcal{E}_1$), *alors la correspondance est continue dans les deux sens, et l'ensemble* $\mathcal{E}_2$ *est compact en soi.* On voit ici une application de ce théorème, les points M_1, M_2, ..., M_i, ..., M et les spécifiques correspondants $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma$ jouant respectivement le rôle des ensembles $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_1$, ce dernier étant compact en soi, d'après le n° **74**. Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, la démonstration directe est immédiate.

74. Passant aux ensembles *fermés* de points (α_1), on a, d'après le n° **29**, ce théorème immédiat :

Les spécifiques d'un ensemble fermé de points (α_1) *constituent un ensemble fermé.*

75. Nous allons montrer que, pour ces ensembles, la correspondance entre les points et les spécifiques est uniformément continue. La voie s'ouvre ici de la façon la plus naturelle à la mise en œuvre des théories de M. Maurice Fréchet. Un ensemble de spécifiques-rayons appartient aux espaces $(\mathcal{D})$ ou espaces *distanciés*, c'est-à-dire qu'on y peut repérer le degré de proximité de deux éléments (ici : de deux spécifiques) par un nombre qui est l'analogue d'une distance géométrique (1).

76. On peut prendre pour ce nombre l'ECART, introduit par M. F. Vasilesco pour les ensembles linéaires, la notion s'étendant d'elle-même à un espace quelconque (2). Avec des considérations qui nous sont maintenant familières, on peut le définir ainsi : *étant donnés deux ensembles fermés* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$, *leur écart est la borne inférieure des longueurs* ρ *pour lesquelles simultanément* $\mathcal{E}_1$ *est contenu dans* $(\mathcal{E}_2)_\rho$ *et* $\mathcal{E}_2$ *est contenu dans* $(\mathcal{E}_1)_\rho$, en désignant toujours par $(\mathcal{E}_1)_\rho$ et $(\mathcal{E}_2)_\rho$ les ensembles ouverts obtenus par la construction de Cantor-Minkowski effectuée avec le rayon ρ (3). On représentera l'*écart* entre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ par la notation $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2]$.

Cet *écart* est bien l'analogue d'une distance géométrique car il satisfait aux postulats connus :

1° A tout couple d'ensembles fermés $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ correspond un *écart*

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] = [\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1] \geqq 0;$$

(1) *Voir* M. FRÉCHET, *Les Espaces abstraits*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 61.

(2) F. VASILESCO, *Thèse*, Paris, 1925, p. 6.

(3) La propriété $\mathcal{E}_1$ *contenu dans* $(\mathcal{E}_2)_\rho$ implique, d'après les critères de position (n° **13**), que toute sphère S^ρ centrée en un point de $\mathcal{E}_1$ contient un point de $\mathcal{E}_2$. L'*écart* est donc encore *la borne inférieure des longueurs* ρ *pour lesquelles toute sphère* S^ρ *centrée sur* $\mathcal{E}_1$ *contient au moins un point de* $\mathcal{E}_2$ *et toute sphère* S^ρ *centrée sur* $\mathcal{E}_2$ *contient au moins un point de* $\mathcal{E}_1$.

2° On a $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] = 0$, si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ coïncident et dans ce cas seulement (1);

3° Quels que soient les ensembles fermés $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, on a

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2] \leqq [\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3] + [\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2] \quad (^2).$$

De plus, la notion d'*écart* permet de retrouver celle de limite (3). Dans le cas actuel, l'*écart* redonne les définitions de *spécifique d'accumulation* et de *spécifique limite* que nous avions indiquées précédemment : par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour

---

(1) F. Vasilesco, *loc. cit.*, p. 11, n° 6.

(2) Désignons, pour abréger, par r, r', r'' les *écarts* figurant successivement dans cette inégalité. On remarque que $(\mathcal{E}_1)_{r'+r''}$ s'obtient en effectuant la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon r'' sur $(\mathcal{E}_1)_{r'}$ ou bien avec le rayon r' sur $(\mathcal{E}_1)_{r''}$, c'est-à-dire

$$(\mathcal{E}_1)_{r'+r''} \equiv [(\mathcal{E}_1)_{r'}]_{r''} \equiv [(\mathcal{E}_1)_{r''}]_{r'}.$$

On vérifie alors aisément que la longueur $r' + r''$ satisfait aux conditions simultanées (le symbole $\subset$ signifie : *contenu dans*),

$$\mathcal{E}_1 \subset (\mathcal{E}_2)_{r'+r''} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 \subset (\mathcal{E}_1)_{r'+r''}.$$

Par exemple, on a

$$\mathcal{E}_1 \subset (\mathcal{E}_3)_{r'} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 \subset (\mathcal{E}_2)_{r''},$$

d'où l'on déduit

$$\mathcal{E}_1 \subset [(\mathcal{E}_2)_{r''}]_{r'} \equiv (\mathcal{E}_2)_{r'+r''}.$$

L' *écart* r étant la borne inférieure des longueurs qui satisfont aux conditions simultanées précédentes, il s'ensuit que $r \leqq r' + r''$.

(3) La limite obtenue ainsi peut d'ailleurs différer, dans le cas général, de l'ensemble limite de Janiszewski, dont nous avons déjà parlé (n° **28**). *Voir* à ce sujet : G. Durand et G. Rabaté, *Sur deux conceptions de l'ensemble limite d'une collection infinie d'ensembles ponctuels* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. **192**, 1931, p. 474). — Il est à remarquer que, pour une suite d'ensembles, l'ensemble limite défini à partir de l'*écart* généralise la notion classique de limite d'une suite de nombres et l'on retrouve ainsi le critère de convergence de Cauchy. De plus, si l'on considère une suite d'ensembles ayant un ensemble limite $\mathcal{L}$ à ce point de vue, il se peut qu'une modification infime apportée à chacun de ces ensembles (comme celle qui est indiquée à la fin de la note citée) transforme la suite de telle façon qu'il n'y ait plus d'ensemble limite, mais alors $\mathcal{L}$ est devenu *ensemble limite à* ε *près* (*cf.* Vasilesco, *Thèse*, p. 7) ; ainsi cette modification infime dans la structure des ensembles conduit à une modification infinitésimale dans le caractère de $\mathcal{L}$.

qu'une suite infinie de spécifiques $\{\sigma_i\}$ soit convergente et ait pour limite le spécifique σ, c'est que l'*écart* $[\sigma_i, \sigma]$ tende vers zéro quand i augmente indéfiniment (1).

77. Cela posé, considérons un ensemble fermé $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ de points (α_1) et désignons par $\Sigma(\mathcal{F}_{\alpha_1})$ l'ensemble des spécifiques correspondant aux points de $\mathcal{F}_{\alpha_1}$. La correspondance biunivoque entre $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ et $\Sigma(\mathcal{F}_{\alpha_1})$ est uniformément continue dans le sens de $\Sigma(\mathcal{F}_{\alpha_1})$ vers $\mathcal{F}_{\alpha_1}$: à toute longueur ε on peut faire correspondre une longueur η telle que l'inégalité $[\sigma, \sigma'] < \eta$ entraîne $MM' < \varepsilon$. Démontrons la réciproque (2) :

(1) Il me paraît essentiel de faire observer que la notion d'*écart* permet de *distancier* des ensembles *quelconques* de points de l'espace euclidien et qu'elle est ainsi susceptible de rendre de grands services.

On envisage alors l'écart non au point de vue *arithmétique*, comme une *différence* entre les ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, mais au point de vue *géométrique*, comme une *distance* entre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Cet écart se distingue d'ailleurs de la « distance », au sens de la théorie des ensembles; on sait que cette dernière est la borne inférieure de la distance d'un point d'un ensemble à un point de l'autre. Au contraire, l'écart est *la borne supérieure de la plus courte distance d'un point d'un quelconque des deux ensembles à l'autre ensemble*. En effet, on sait que $(\mathcal{E}_1)_\rho$ est l'ensemble des points de l'espace dont la plus courte distance à $\mathcal{E}_1$ est $< \rho$; si $\mathcal{E}_2 \subset (\mathcal{E}_1)_\rho$, la plus courte distance de tout point de $\mathcal{E}_2$ à l'ensemble $\mathcal{E}_1$ est donc $< \rho$ et, Δ_2^1 étant la borne supérieure de cette plus courte distance, on a $\rho \geqq \Delta_2^1$. De même, si $\mathcal{E}_1 \subset (\mathcal{E}_2)_\rho$, on a, avec une notation analogue, $\rho \geqq \Delta_1^2$. Mais l'écart r des deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ étant la borne inférieure des longueurs ρ pour lesquelles on a simultanément $\mathcal{E}_1 \subset (\mathcal{E}_2)_\rho$ et $\mathcal{E}_2 \subset (\mathcal{E}_1)_\rho$, on en conclut que cet écart est précisément égal à la plus grande des deux longueurs Δ_2^1 et Δ_1^2.

Il est remarquable que l'écart satisfait aux postulats ci-dessus de la notion ordinaire de distance, alors que la « distance », au sens précédent, n'y satisfait pas en général. Par exemple, si l'on considère trois segments A_1M_1, A_3M_3, A_2M_2, de longueur ρ, alignés dans cet ordre sur une même droite, on n'a pas l'inégalité triangulaire du 3° : la « distance » entre A_1M_1 et A_2M_2 serait $A_2M_1 = \rho + A_3M_1 + A_2M_3$, tandis que A_3M_1 et A_2M_3 seraient respectivement la « distance » entre A_1M_1 et A_3M_3, et la « distance » entre A_2M_2 et A_3M_3. Cette « distance » serait plus précisément nommée : *plus courte* distance de deux ensembles.

J'ajoute que M. Fréchet (*loc. cit.*, p. 214) a appelé *écart* une notion différente de celle considérée ici.

(2) Ce théorème est encore général (*cf.* note du n° **71**) : *S'il existe entre deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'une classe $(\mathcal{D})$ une correspondance biunivoque et*

78. *Étant donnée une longueur arbitraire* ε, *on peut trouver une longueur* η *telle que, pour deux points* M *et* M′ *de l'ensemble fermé* $\mathcal{F}_{\alpha_1}$, *l'inégalité* $MM' < \eta$ *entraîne* $[\sigma, \sigma'] < \varepsilon$.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Alors, si petit que soit η, on peut trouver deux points M et M′ de $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ tels que $MM' < \eta$ et $[\sigma, \sigma'] > \varepsilon$, ε étant une longueur fixe.

Considérons une suite $\{\eta_i\}$ de longueurs décroissantes et tendant vers zéro. On peut choisir une double suite de points frontières $\{M_i\}$, $\{M'_i\}$ tels que $M_iM'_i < \eta_i$ et $[\sigma_i, \sigma'_i] > \varepsilon$, les suites $\{M_i\}$ et $\{M'_i\}$ convergeant respectivement vers un seul point limite. Ce point limite M_0 est, d'après sa définition, le même pour nos deux suites et il appartient à $\mathcal{F}_{\alpha_1}$, puisque $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ est fermé. Par suite, M_0 est un point (α_1) possédant un spécifique σ_0.

Or, en vertu du théorème ci-dessus (n° **72**), les suites de spécifiques $\{\sigma_i\}$ et $\{\sigma'_i\}$ tendent respectivement vers σ_0. Comme $[\sigma_i, \sigma'_i] \leqq [\sigma_i, \sigma_0] + [\sigma_0, \sigma'_i]$ (postulat 3°; n° **76**), il est impossible qu'à partir d'une certaine valeur de i, l'*écart* de σ_i et σ'_i reste supérieur à une longueur donnée ε.

79. En définitive, on a ce théorème :

La correspondance entre les spécifiques et les points d'un ensemble fermé de points (α_1) *est biunivoque et uniformément continue dans les deux sens* (¹).

Même énoncé en remplaçant *les spécifiques* par *les projections*.

80. Abordons enfin les ensembles *continus* de points (α_1) :

Soit $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ *un continu de points* (α_1) : *l'ensemble des spécifiques de* $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ *est un continu.*

---

continue dans le sens de $\mathcal{E}_1$ *vers* $\mathcal{E}_2$ *et si, de plus,* $\mathcal{E}_1$ *est compact en soi, alors* $\mathcal{E}_2$ *est aussi compact en soi* (donc fermé) *et la correspondance est uniformément continue dans les deux sens.* — La démonstration est analogue à celle développée ci-dessus.

(¹) Cette continuité uniforme n'a pas lieu, en général, pour les ensembles non fermés de points (α_1); *cf.* l'exemple du n° **18**.

On sait qu'un continu est un ensemble borné, fermé et bien enchaîné [1]. Soit $\Sigma(\mathcal{C}_{\alpha_1})$ l'ensemble des spécifiques de $\mathcal{C}_{\alpha_1}$; tout d'abord $\Sigma(\mathcal{C}_{\alpha_1})$ est fermé, comme $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ (n° **74**). Montrons que $\Sigma(\mathcal{C}_{\alpha_1})$ est bien enchaîné.

En effet, soient σ et σ' deux spécifiques quelconques appartenant à $\Sigma(\mathcal{C}_{\alpha_1})$. Il faut prouver qu'étant donnée une longueur ε aussi petite que l'on veut, on peut trouver une suite finie de spécifiques $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ appartenant à $\Sigma(\mathcal{C}_{\alpha_1})$ tels que

$$[\sigma, \sigma_1] < \varepsilon, \quad [\sigma_1, \sigma_2] < \varepsilon, \quad \ldots, \quad [\sigma_n, \sigma'] < \varepsilon.$$

Une telle suite s'appelle une *chaîne par rapport à* ε.

Or, d'après le théorème précédent (n° **78**), la longueur ε étant donnée, il est possible de trouver une longueur η telle que, M_i et M_j étant deux points de l'ensemble fermé $\mathcal{C}_{\alpha_1}$, l'inégalité $M_iM_j < \eta$ entraîne pour les spécifiques de ces deux points $[\sigma_i, \sigma_j] < \varepsilon$. L'ensemble $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ étant, de plus, bien enchaîné, on peut trouver entre les deux points M et M′, correspondant aux deux spécifiques considérés σ et σ', une chaîne par rapport à η, soit $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Chaque point M_k de cette suite a un spécifique et un seul σ_k et la suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ constitue la chaîne par rapport à ε que l'on cherchait.

L'ensemble $\Sigma(\mathcal{C}_{\alpha_1})$ est donc bien enchaîné. Étant, de plus, fermé et borné, c'est un continu.

81. D'où ces propositions :

L'ensemble des projetantes d'un continu de points (α_1) *est un continu.*

L'ensemble des projections d'un continu de points (α_1) *est un continu* (ou se réduit à un point) [2].

82. *Les ensembles de points* (β_1). — Les théorèmes sur les spéci-

---

(1) Ceci est la définition de Cantor. D'après Jordan et Schœnflies, un continu est un ensemble fermé qu'on ne peut décomposer en deux ensembles fermés sans points communs. Dans les espaces $(\mathcal{D})$ ou *distanciés*, ces deux définitions sont équivalentes.

(2) Par conséquent, si la frontière totale F_ρ est un continu de points (α_1), le front φ_ρ (n° **22**) est aussi un continu. Réciproquement, si φ_ρ n'est pas un continu et si F_ρ en est un, F_ρ contient nécessairement des points qui ne sont pas (α_1).

fiques des points (α_1) s'étendent immédiatement aux points (β_1). Soit M un tel point ; le système de ses projetantes se réduit à deux rayons opposés MA et MB, formant un spécifique-diamètre $\sigma \equiv \mathrm{AMB} = 2\rho$, associé au point M.

83. Considérant d'abord un ensemble *quelconque* de points (β_1), on a aussitôt, comme au n° **72** :

Si une suite $\{M_i\}$ *de points* (β_1) *tend vers un point limite* M, *la suite* $\{\sigma_i\}$ *des spécifiques correspondants a pour limite le spécifique* σ *de* M.

Car, d'après les théorèmes des projections, tout spécifique d'accumulation de la suite $\{\sigma_i\}$ est un diamètre de longueur 2ρ formé avec deux projetantes de M ; or, ce point, étant (β_1), n'a qu'un seul diamètre de projetantes, qui est son spécifique.

84. A partir de cette propriété fondamentale, on aboutit par les mêmes raisonnements à des propositions similaires aux précédentes. Nous nous bornerons à les énoncer.

De même qu'au n° **73** :

La correspondance entre les spécifiques et les points d'un ensemble quelconque de points (β_1) *est biunivoque et bicontinue* (ou encore : *est homéomorphe*).

85. Passant aux ensembles *fermés* de points (β_1), le n° **30** nous donne :

Les spécifiques d'un ensemble fermé de points (β_1) *constituent un ensemble fermé*.

86. Nous prendrons encore ici pour *distancier* deux spécifiques $\sigma \equiv \mathrm{AMB}$ et $\sigma' \equiv \mathrm{A'M'B'}$ l'*écart* $[\sigma, \sigma']$ de ces deux spécifiques. Reprenant les considérations développées plus haut (n^{os} **77** à **79**), on aboutit à ce théorème :

La correspondance entre les spécifiques et les points d'un ensemble *fermé de points* (β_1) *est biunivoque et uniformément continue dans les deux sens* [1].

87. Enfin, pour les ensembles *continus* de points (β_1), on a de la même façon (n° **80**) :

L'ensemble des spécifiques d'un continu de points (β_1) *est un continu*,

ce qui permet d'énoncer :

L'ensemble des projetantes d'un continu de points (β_1) *est un continu.*

88. Mais on ne saurait déduire de là, comme le suggère l'examen de certains cas simples (*cf.* l'exemple 2° du n° **37**), que l'ensemble des projections d'un continu de points (β_1) est formé de *deux* continus distincts (l'un d'eux pouvant d'ailleurs se réduire à un point). Par exemple, prenons un rectangle ABCD, de hauteur $AB = CD = 2\rho$ et de base $AD = BC$ arbitrairement grande; replions la figure de façon que C coïncide avec A, et D avec B. On obtient une courbe gauche fermée ADBCA qu'on peut prendre pour ensemble E; l'axe du rectangle primitif, parallèle à AD, est devenu lui-même une courbe gauche qui est un continu de points (β_1) et les projections de ce continu constituent un seul continu : la courbe ADBCA.

89. On peut cependant énoncer cette proposition :

L'ensemble des projections d'un continu $\mathcal{C}_{\beta_1}$ *de points* (β_1) *forme un ou deux continus, mais pas plus de deux.*

---

[1] Pour avoir un ensemble non fermé de points (β_1) où cette propriété n'a pas lieu, on peut prendre deux rectangles ABCD et A′B′C′D′ de même largeur $AB = CD = A'B' = C'D' = 2\rho$ dont les plans sont perpendiculaires entre eux, ces deux rectangles ayant en commun le milieu Q de CD et C′D′, et leurs axes PQ et QR étant en prolongement l'un de l'autre. En effectuant la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon ρ sur le périmètre de chacun de ces rectangles, l'axe PQR est un ensemble de points (β_1), à l'exception du point Q qui est de deuxième espèce. Il est alors possible de choisir deux points (β_1) infiniment voisins, de part et d'autre de Q, dont les spécifiques ne sont pas infiniment voisins.

Supposons, en effet, que $\mathcal{C}_{\beta_1}$ ait, pour ensemble de ses projections, trois continus C_1, C_2, C_3. Un point quelconque de $\mathcal{C}_{\beta_1}$, ne possédant que deux projections, ne peut en avoir à la fois dans ces trois continus. Choisissons deux points M et M′ de $\mathcal{C}_{\beta_1}$, le point M n'ayant pas de projection dans C_3, par exemple, tandis que M′ a une projection A′ dans C_3. Soit ε une longueur inférieure à la plus courte distance entre les trois continus pris deux à deux. Prenons entre M et M′ sur $\mathcal{C}_{\beta_1}$ une chaîne par rapport à la longueur η correspondant à ε (*cf.* n° **80**) de façon qu'on ait une chaîne par rapport à ε entre les spécifiques AMB et A′M′B′, ce qui implique une telle chaîne entre la projection A′ de M′ et une projection A, par exemple, de M [1], mais c'est impossible puisque A et A′ appartiennent à deux continus dont la plus courte distance est $> \varepsilon$.

90. Dans le cas de deux continus C_1 et C_2, il y a lieu d'observer que :

Chaque point de $\mathcal{C}_{\beta_1}$ a une projection dans un des continus et l'autre projection dans le second continu.

Supposons, en effet, qu'un point M de $\mathcal{C}_{\beta_1}$ ait ses deux projections A et B dans C_1. En choisissant un point M′ de $\mathcal{C}_{\beta_1}$ ayant une projection A′ dans C_2, on peut répéter le raisonnement précédent : avec une longueur ε inférieure à la plus courte distance entre C_1 et C_2, et une chaîne sur $\mathcal{C}_{\beta_1}$ par rapport à η entre M et M′, on serait conduit à une chaîne par rapport à ε entre A′ et A ou A′ et B, ce qui est impossible.

Ce cas est intéressant, car il permet de distinguer entre les deux projections d'un point de $\mathcal{C}_{\beta_1}$.

91. Nous n'insisterons pas davantage sur les propriétés des projections d'un ensemble de points (β_1). Nous avons seulement tenu à faire remarquer que les propriétés des ensembles de points (α_1) ne s'éten-

---

[1] D'après la définition (*cf.* la note 2 du n° **76**), pour deux segments de droite, les conditions simultanées : $AMB \subset (A'M'B')_\rho$ et $A'M'B' \subset (AMB)_\rho$ impliquent que les extrémités A et B sont intérieures respectivement aux sphères S^ρ centrées aux extrémités de A′M′B′, et réciproquement.

dent pas d'une manière immédiate aux *projections* des points (β_1), mais à leurs *spécifiques*, d'où l'intérêt de cette notion.

92. *Les ensembles de points de première espèce.* — A côté des théorèmes précédents qui concernent les ensembles formés exclusivement soit de points (α_1), soit de points (β_1), on peut chercher les propriétés des ensembles de points de première espèce [1], sans plus. Nous nous bornerons aux suivantes.

93. La proposition déjà rappelée sur les diamètres d'un ensemble quelconque de points frontières (n° **30**) conduit à cet énoncé :

Un point (α_1) *ne peut être limite d'une suite de points* (β_1) [2].

94. Il en découle :

Soit $\mathcal{C}_1$ *un continu de points de première espèce* (sans plus) : *ou bien* $\mathcal{C}_1$ *contient un sous-continu de points* (α_1) *ou bien* $\mathcal{C}_1$ *contient exclusivement des points* (β_1).

Supposons, en effet, que $\mathcal{C}_1$ ne contienne aucun sous-continu de points (α_1) et, de plus, que $\mathcal{C}_1$ possède un tel point M. Soit S_M^ε une sphère de rayon arbitrairement petit ; cette sphère découpe sur $\mathcal{C}_1$ un continu au moins, contenant le point M [3], qui n'est donc pas formé exclusivement de points (α_1). Par suite, elle contient au moins un point (β_1) et le point M, qui est (α_1), serait ainsi limite de points (β_1), ce qui est impossible.

---

[1] Dans la suite, nous dirons souvent pour abréger : *ensemble de première espèce* ou *continu de première espèce* pour *ensemble de points de première espèce* ou *continu de points de première espèce* (de même pour les autres espèces).

[2] Notons qu'en désignant par F_{β_1} l'ensemble de tous les points (β_1) de la frontière F_ρ, tout point du dérivé F'_{β_1} a au moins deux projetantes opposées : ce n'est donc jamais un point (α_1) ou *ordinaire* (n° **14**).

[3] On sait que : *si un continu* $\mathcal{C}$ *contient un point* M *qui soit point intérieur d'un ensemble fermé* $\mathcal{F}$ (ici la sphère S_M^ε centrée en M), *il existe un continu contenant le point* M *et contenu à la fois dans* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{F}$. (*Voir*, par exemple : S. Janiszewski, *Thèse*, Paris, 1911, p. 22, théorème IV.)

95. On déduit aussitôt, en rapprochant les nos **81** et **87** :

L'ensemble des projetantes d'un continu $\mathcal{C}_1$ *de points de première espèce* (α_1 ou β_1) *comprend au moins un continu.*

On a évidemment le même énoncé en remplaçant *projetantes* par *projections*.

IV. — Les points de deuxième espèce. — Les ensembles normaux.

96. Quand on étudie les points de deuxième espèce, une première question qui se pose est de savoir dans quelle mesure s'étendent à ces points les propriétés que nous avons établies pour les ensembles formés exclusivement de points (α_1) ou de points (β_1). Plusieurs difficultés vont se présenter.

En premier lieu, un point de deuxième espèce n'a pas, en général, un spécifique unique et bien déterminé. Si ce point a plus de deux projetantes, on peut former avec celles-ci plusieurs triangles isocèles susceptibles de jouer le rôle de spécifiques. De sorte que si l'on prend pour chaque point d'un ensemble de deuxième espèce tous les spécifiques possibles, il n'y a pas correspondance biunivoque entre les points de cet ensemble et leurs spécifiques. Les théorèmes que nous avons en vue consisteront à montrer qu'on peut associer biunivoquement à certains ensembles de deuxième espèce un ensemble de spécifiques jouissant de propriétés déterminées.

Mais même si cette correspondance biunivoque entre les points de deuxième espèce et leurs spécifiques est immédiate, les propriétés précédentes ne s'étendent pas sans restriction. Par exemple, la correspondance des points de deuxième espèce avec leurs spécifiques n'est pas toujours continue; on s'en aperçoit aisément en effectuant la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon ρ sur les deux côtés d'un angle XAY; la frontière obtenue contient un ensemble de deuxième espèce constitué par une demi-ellipse (dont le plan Π est normal à celui de XAY) à l'exception des extrémités M et M′ qui sont deux points de première espèce ayant même projection A. Supposons alors que l'ensemble E comprenne, outre l'angle XAY, un point B, situé dans le plan Π, à une distance ρ de M et extérieur à la surface de la demi-ellipse d'axe MM′ (la sphère S_B^ρ laissant à son extérieur tout l'arc de la demi-ellipse) : le point M devient un point de deuxième espèce ayant deux projections A et B, et tout point de deuxième espèce de la frontière F_ρ a un spécifique unique et bien déterminé.

Si l'on prend alors sur notre demi-ellipse une suite de points $\{M_i\}$ tendant vers M, il est clair que les spécifiques correspondants $\{\sigma_i\}$ ou $\{A_iM_iB_i\}$ ne tendent pas vers le spécifique $\sigma \equiv$ AMB de M, car les triangles isocèles $A_iM_iB_i$ ont pour limite la seule projetante MA et non tout le triangle AMB. La proposition fondamentale des n^{os} **72** et **83** n'a donc pas lieu ici.

De la même façon, en considérant un arc d'extrémité M de la demi-ellipse, on a un continu de deuxième espèce dont les spécifiques ne forment pas un continu, ce qui diffère encore des n^{os} **80** et **87**.

Les ensembles de deuxième espèce se révèlent donc d'une étude plus difficile que ceux de première espèce. Pour obtenir des énoncés analogues aux précédents, nous devrons ajouter une condition supplémentaire, condition qui conduira d'ailleurs à des propriétés nouvelles pour une classe étendue de continus de deuxième espèce.

97. Cette condition supplémentaire pourrait être précisément la continuité de la correspondance des points frontières avec leurs spécifiques. Si l'on considère *un ensemble* $\mathcal{E}_2$ *de points de deuxième espèce auquel on peut associer biunivoquement un ensemble de spécifiques tels que, pour toute suite de points* $\{M_i\}$ *de* $\mathcal{E}_2$ *tendant vers un point* M *de* $\mathcal{E}_2$, *la suite des spécifiques correspondants* $\{\sigma_i\}$ *ait pour limite le spécifique* σ *de* M, on rétablit la proposition fondamentale (n° **72**) qui a permis l'enchaînement des démonstrations précédentes. On aurait ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\mathcal{E}_2$ possède mêmes propriétés, quant à ses spécifiques, que les ensembles de points (α_1) ou de points (β_1).

98. *Définition.* — Mais, ayant surtout en vue les continus de points de deuxième espèce, on peut se borner à envisager les ensembles *fermés*. Alors la condition pour retrouver ces propriétés va s'exprimer très simplement en faisant appel à nouveau aux théories de M. Fréchet.

Nous dirons qu'un ensemble fermé $\mathcal{F}_2$ de points de deuxième espèce est NORMAL s'il possède la propriété suivante : *il est possible d'associer biunivoquement à* $\mathcal{F}_2$ *un ensemble de spécifiques* $\Sigma(\mathcal{F}_2)$ *de façon que ce dernier soit compact en soi* (1), c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble infini de spécifiques appartenant à $\Sigma(\mathcal{F}_2)$, il y ait au moins un spécifique d'accumulation contenu dans $\Sigma(\mathcal{F}_2)$. Il en résulte que l'ensemble ainsi associé $\Sigma(\mathcal{F}_2)$ est *fermé* (2).

A partir de cette définition, nous sommes à même d'étendre les théorèmes démontrés antérieurement aux ensembles *normaux*, fermés ou continus, de points de deuxième espèce et d'y ajouter des propriétés particulières à ces ensembles.

99. *Les ensembles fermés*. — Désignons par $\mathcal{F}_2$ un ensemble fermé *normal* de points de deuxième espèce et soit $\Sigma(\mathcal{F}_2)$ l'ensemble de spécifiques, compact en soi, qu'on peut lui associer biunivoquement. Démontrons notre proposition fondamentale, c'est-à-dire la continuité dans le sens de $\mathcal{F}_2$ vers $\Sigma(\mathcal{F}_2)$:

Si une suite $\{M_i\}$ *de points de* $\mathcal{F}_2$ *tend vers un point limite* M, *la suite* $\{\sigma_i\}$ *des spécifiques correspondants a pour limite le spécifique* σ *de* M (3).

En effet, l'ensemble $\Sigma(\mathcal{F}_2)$ étant compact en soi, la suite infinie $\{\sigma_i\}$ admet au moins un spécifique d'accumulation contenu dans $\Sigma(\mathcal{F}_2)$. Or, tout spécifique d'accumulation des σ_i est un triangle isocèle de projetantes de sommet M, seul point limite des M_i : c'est donc le spécifique σ associé à M, puisque ce point n'a qu'un seul spécifique dans $\Sigma(\mathcal{F}_2)$.

100. On retrouve donc le théorème général :

---

(1) *Cf.* M. FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 68 et p. 190.

(2) Si l'on prend sur la demi-ellipse de l'exemple décrit au n° **96** un arc d'extrémité M, on a un ensemble fermé $\mathcal{F}_2$ (et même un continu) non normal : la suite infinie $\{\sigma_i\}$ des spécifiques, correspondant à une suite $\{M_i\}$ de points tendant vers M, n'admet pas de spécifique d'accumulation dans $\Sigma(\mathcal{F}_2)$.

(3) Ici, ce sont exactement les mêmes hypothèses que pour le théorème général que j'énonce dans la note du n° **71**.

La correspondance entre $\mathcal{F}_2$ *et* $\Sigma(\mathcal{F}_2)$ *est biunivoque et bicontinue.*

101. Considérant alors *l'écart* $[\sigma, \sigma']$ de deux spécifiques-triangles, l'ensemble $\Sigma(\mathcal{F}_2)$ se trouve *distancié* et, par les mêmes raisonnements que plus haut (n^{os} **77** à **79**), on démontre que *la correspondance biunivoque entre* $\mathcal{F}_2$ *et* $\Sigma(\mathcal{F}_2)$ *est uniformément continue dans les deux sens.*

Ainsi, pour deux points de $\mathcal{F}_2$ infiniment voisins, il existe deux triangles de projetantes infiniment voisins. Donc : *les deux plans contenant respectivement les projetantes de deux points de* $\mathcal{F}_2$ *infiniment voisins sont eux-mêmes infiniment voisins.*

102. Ces théorèmes conduisent à des propriétés géométriques de l'ensemble $\mathcal{F}_2$:

Le paratingent (voir n° **31**) *de* $\mathcal{F}_2$ *en tout point d'accumulation* M *se réduit à une droite normale au plan formé par les projetantes de* M [1].

Considérons une suite $\{M_i\}$ de points de $\mathcal{F}_2$ tendant vers M. La suite des spécifiques correspondants $\{\sigma_i\}$ ayant pour limite le spécifique σ de M, on peut associer à chaque point M_i deux de ses projections A_i et B_i (sommets du spécifique-triangle $\sigma_i \equiv A_iM_iB_i$) de telle façon que les suites $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ tendent respectivement vers des projections A et B de M, la figure AMB étant un triangle isocèle véritable. Or, d'après le n° **31**, le paratingent en M de la suite $\{M_i\}$ est à la fois contenu dans les plans perpendiculaires en M à MA et à MB : c'est donc l'intersection de ces plans, soit une droite perpendiculaire en M au plan AMB. La suite considérée $\{M_i\}$ étant quelconque, le théorème est établi.

103. Or, le paratingent en un point d'accumulation M renferme évidemment le contingent (n° **39**) en M et son symétrique par rapport à ce point. D'où cette proposition :

En un point d'accumulation M *de* $\mathcal{F}_2$, *cet ensemble ne peut avoir qu'une tangente normale au plan formé par les projetantes de* M (c'est-

---

[1] Et, d'après ce qui précède, *en deux points infiniment voisins de* $\mathcal{F}_2$, *ces droites sont infiniment voisines.*

à-dire : *coincidant avec l'axe de la circonférence de rayon* ρ *qui contient les projections de* M), *et la répartition de ces tangentes est uniformément continue.*

Les projections d'un point M de deuxième espèce sont, en effet, réparties sur une même circonférence de centre M et de rayon ρ, située dans le plan défini par les projetantes de M. Quant à la continuité uniforme des tangentes à l'ensemble $\mathcal{F}_2$, elle résulte immédiatement du n° **101** (¹).

104. L'hypothèse dont nous sommes partis est essentielle dans le raisonnement et il est facile de concevoir un ensemble fermé non *normal* qui mettrait en défaut l'énoncé précédent. Soit, par exemple, une surface de révolution fermée convexe (²) ayant une infinité de parallèles anguleux $\{\gamma_i\}$ convergeant vers un parallèle lui-même anguleux γ. Chacun des parallèles γ_i est un continu *normal* de deuxième espèce, où notre théorème s'applique en tout point; le parallèle γ, envisagé isolément, jouit de la même propriété. Mais si l'on considère l'ensemble total f_2 des points de ces parallèles, c'est un ensemble fermé non *normal;* on s'en aperçoit en prenant une suite de points $\{M_i\}$ qui soient respectivement points d'intersection des γ_i avec une même méridienne de la surface de révolution; cette suite tend vers un point M de γ. La suite des spécifiques correspondants $\{\sigma_i\}$ n'a pas de spécifique limite, car elle tend vers une seule projetante de M et non vers le spécifique de ce point. Or, il est clair que l'ensemble fermé f_2 n'a pas de tangente en M : son contingent est un demi-plan.

105. *Les continus.* — Désignons par $\mathcal{C}_2$ un continu *normal* de points de deuxième espèce et soit $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ l'ensemble de spécifiques, compact en soi, qu'on peut lui associer.

(¹) L'existence de la tangente en M à $\mathcal{F}_2$ peut se démontrer directement par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui vient de servir pour le paratingent (n° **102**). En considérant une suite $\{M_i\}$ de points de $\mathcal{F}_2$ tendant vers M, les suites de projections $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ ont respectivement pour limites les points A et B et l'on sait, d'après le théorème des projections II (n° **21**), que la direction limite des demi-droites $\{MM_i\}$ est perpendiculaire à la fois aux projetantes MA et MB, donc au plan AMB, qui est celui formé par les projetantes de M. — D'une manière précise, ce théorème signifie que *le contingent de* $\mathcal{F}_2$ *en un point* M *se réduit à une demi-droite ou à deux demi-droites opposées, perpendiculaires au plan des projetantes de* M.

(²) Une surface convexe n'est pas seulement un cas limite des *ensembles* $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$, mais un véritable *ensemble* $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ (*cf.*, n° **5**).

Tout point de $\mathcal{C}_2$ étant un point d'accumulation, on a, d'après ce qui précède :

Un continu normal $\mathcal{C}_2$ de points de deuxième espèce est doué partout d'une tangente uniformément continue.

106. On sait aussi (n° **102**) que le paratingent en tout point de $\mathcal{C}_2$ se réduit à une droite. Utilisant ce résultat, nous pouvons préciser la structure de $\mathcal{C}_2$. En effet, d'un théorème de M. G. Bouligand, prolongé par M. G. Rabaté [1], il résulte que $\mathcal{C}_2$ est une courbe de Jordan à tangente continue : c'est donc une courbe rectifiable. D'où ce théorème :

Un continu normal de points de deuxième espèce est une courbe de Jordan rectifiable à tangente uniformément continue.

107. Reprenant la série des théorèmes établis pour les points (α_1), que nous avions en vue pour les ensembles *normaux* de deuxième espèce, il suffit de répéter le raisonnement du n° **80** pour aboutir à cet énoncé :

L'ensemble $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ des spécifiques associés au continu normal $\mathcal{C}_2$ est lui-même un continu.

108. On en déduit cette importante proposition :

L'ensemble de tous les continus normaux de points de deuxième espèce de la frontière F_ρ est dénombrable.

---

(1) M. Bouligand, qui a introduit le paratingent en Géométrie infinitésimale, en a développé les applications dans sa communication du 6 octobre 1930 à l'Académie de Cracovie. Il définit ainsi des classes étendues de variétés de toutes dimensions dans un espace euclidien quelconque : notamment, dans l'espace ordinaire, *les continus, en chaque point desquels le paratingent ne contient aucune droite d'un même plan, sont des courbes.* Ce théorème a été obtenu indépendamment par M. Rabaté qui a signalé, en outre, ce cas particulier : *lorsque le paratingent d'un continu se réduit en chaque point à une droite, ce continu est une courbe de Jordan à tangente continue.* Ici, on a vu que $\mathcal{C}_2$ est à tangente *uniformément* continue.

On trouvera en Appendice (n° **128**) une démonstration développée du théorème utilisé ici.

Désignant toujours par $\mathcal{C}_2$ un tel continu et par $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ l'ensemble de spécifiques qu'on lui associe, on vient de voir que $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ est un continu; nous allons prouver que ce continu occupe un volume non nul.

Soit $\sigma \equiv \mathrm{AMB}$ un triangle appartenant à $\Sigma(\mathcal{C}_2)$; prenons un point P à l'intérieur de ce triangle et considérons les triangles de $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ infiniment voisins de AMB et situés d'un même côté du plan Π de AMB. Il est possible de trouver une longueur l assez petite pour que le plan d'un de ces triangles coupe la sphère S_P^l suivant un cercle situé tout entier dans le triangle. Soit $\sigma' \equiv \mathrm{A'M'B'}$ un tel triangle; le cercle intersection $\mathcal{C}'$ de son plan Π' avec S_P^l n'a donc, en vertu des théorèmes d'impénétrabilité (n° **66**), aucun point commun avec le cercle c commun à Π et à S_P^l. Or, ces deux cercles c et c' délimitent une portion $\mathcal{R}$ de la sphère S_P^l dont tous les points appartiennent à $\Sigma(\mathcal{C}_2)$: en effet, les plans des triangles de $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ forment, comme ces triangles, un continu et celui-ci coupe la sphère S_P^l suivant un continu de petits cercles n'ayant deux à deux aucun point commun [1].

L'ensemble $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ forme donc un domaine, de volume non nul, et, toujours en vertu des théorèmes d'impénétrabilité (n° **66**), deux de ces domaines, correspondant à des continus distincts, n'ont en commun aucun point intérieur. Il s'ensuit que l'ensemble de ces domaines est dénombrable, comme l'ensemble des continus normaux $\mathcal{C}_2$.

---

[1] On peut encore présenter la demonstration sous une autre forme en faisant intervenir la notion d'*écart* (n° **76**). Supposons, en effet, qu'il y ait un point Q de $\mathcal{R}$ n'appartenant pas à $\Sigma(\mathcal{C}_2)$. Comme cet ensemble de triangles est fermé (*voir* le début du n° **80**), cela implique qu'il n'y a aucun point de $\Sigma(\mathcal{C}_2)$ infiniment voisin de Q, c'est-à-dire qu'il existe une sphere S_Q^η dont aucun point n'appartient à $\Sigma(\mathcal{C}_2)$. Mais, d'autre part, l'ensemble des triangles étant bien enchaîné, si ε est une longueur quelconque, on peut trouver une chaîne par rapport à ε entre σ et σ', c'est-à-dire une suite finie de triangles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ tels qu'on ait : $\sigma_\varepsilon \supset \sigma_1$ et $(\sigma_1)_\varepsilon \supset \sigma$, $(\sigma_1)_\varepsilon \supset \sigma_2$ et $(\sigma_2)_\varepsilon \supset \sigma_1$, $\ldots$, $(\sigma_n)_\varepsilon \supset \sigma'$ et $\sigma'_\varepsilon \supset \sigma_n$. Si l'on choisit alors $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$, il existe au moins un domaine $(\sigma_i)_\varepsilon$ ayant en commun avec S_Q^η une zone tout entière, limitée par deux cercles contenus dans des plans parallèles situés à une distance 2ε; il y a donc des sphères S^ε de $(\sigma_i)_\varepsilon$ contenues entièrement dans S_Q^η. Or, toute sphère S^ε de $(\sigma_i)_\varepsilon$ contient au moins un point de σ_{i+1} (*voir* la note 2 du n° **76**), de sorte que S_Q^η contient au moins un point de $\Sigma(\mathcal{C}_2)$, ce qui est contraire à notre supposition.

109. Bien que dénombrable, l'ensemble de ces continus *normaux* peut être partout dense sur la frontière F_ρ. C'est ce qu'on voit en prenant la surface représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation $z = f(x) + g(y)$, où $f(x)$ et $g(y)$ sont les primitives de deux fonctions croissantes $f'(x)$ et $g'(y)$ ayant chacune un ensemble de discontinuités partout dense. Par exemple, prenant pour x un nombre compris entre 0 et 1 et défini par son développement décimal $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$, on pourrait poser $f'(x) = 0, 0 a_1 0 a_2 0 a_3 \ldots$.

La surface représentée par l'équation précédente, pour de tels choix de $f(x)$ et $g(y)$, est une surface de translation convexe. Sur cette surface, les lignes $x =$ const. et $y =$ const. sont respectivement des continus normaux de points de deuxième espèce et ces lignes forment un ensemble dénombrable, mais partout dense sur la frontière F_ρ.

110. En définitive, nous avons obtenu ce résultat :

Un continu de points de deuxième espèce, auquel il est possible d'associer biunivoquement un ensemble compact en soi de triangles de projetantes, est une courbe rectifiable à tangente uniformément continue, et l'ensemble de tous ces continus est dénombrable.

V. — Les points de deuxième espèce. — Leur ensemble total a une aire nulle.

111. Après avoir, au paragraphe précédent, caractérisé certaines familles de points de deuxième espèce, nous allons considérer l'ensemble F_2 de tous les points de deuxième espèce de la frontière F_ρ et nous établirons cette propriété métrique : *l'ensemble* F_2 *a une aire nulle,* entendant par là, de façon très précise, que : F_2 *est inclus dans un nombre* FINI *de surfaces de la forme* $z = f(x, y)$ *à pentes bornées sur chacune desquelles il a une aire nulle* ([1]).

112. Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant :

En un point O *du type* (α_2), *la surface formée par les points frontières suffisamment voisins de* O *est dépourvue de plan tangent.*

([1]) On ne saurait étudier directement l'aire de l'ensemble des points de deuxième espèce, cet ensemble pouvant offrir, comme d'ailleurs la frontière F_ρ, une structure très complexe, tout à fait différente de celle d'une surface définie par des équations $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$.

On a vu, en effet (n° **52**), que l'ensemble des points frontières suffisamment voisins de O constituent une surface σ représentable par une équation $z=f(x, y)$. Je dis que cette surface n'a pas de plan tangent en O; cela résulte du fait que le contingent $\tau(\mathrm{O})$ de la frontière F_ρ en O est formé des deux faces d'un dièdre (n° **63**) dont l'arête passe en O, l'axe $\mathrm{O}z$ étant intérieur au plus petit des deux dièdres ainsi déterminés. Toute tangente en O à une courbe tracée sur la surface σ appartient à $\tau(\mathrm{O})$ et il est impossible que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent simultanément au point O; cela impliquerait, en effet, que les plans $x\mathrm{O}z$ et $y\mathrm{O}z$ coupent respectivement la surface suivant une courbe ayant une tangente en O, donc que chacun de ces plans coupe le contingent $\tau(\mathrm{O})$ suivant une droite, ce qui est impossible puisqu'ils sont rectangulaires [1].

113. Pour démontrer le théorème que nous avons en vue sur l'ensemble F_2, nous distinguerons deux cas suivant la valeur de ρ par rapport au diamètre D de l'ensemble E :

114. *Premier cas* : $\rho > \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{2}}$. — On sait alors (n° **59**) que la frontière F_ρ ne comprend que des points (α). D'autre part, nous venons de rappeler que tout point (α) est intérieur à un domaine superficiel σ représentable par une équation $z=f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant continue et à nombres dérivés bornés. Ce domaine superficiel σ est donc une surface à pentes bornées et appartient à la classe des surfaces *rectifiables* de M. Henri Lebesgue [2]. Or, de telles surfaces possèdent

---

[1] La même propriété a lieu pour un point (α_3), puisque le contingent est la surface d'un cône convexe véritable (n° **63**). Mais, dans ce paragraphe, nous laisserons systématiquement de côté les points de troisième espèce pour démontrer au suivant un résultat plus précis : leur ensemble est dénombrable.

[2] M. Henri Lebesgue a introduit sous le nom de *surfaces rectifiables* une classe fort étendue de surfaces quarrables, qui jouit de propriétés analogues à celles de la famille des courbes rectifiables. Une surface S définie par les équations $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$, pour un certain domaine D du plan (u, v), est rectifiable si à toute courbe rectifiable de D correspond une

un plan tangent, sauf en des points formant un ensemble d'aire nulle [1]. Comme sur σ tout point de deuxième espèce est (α_2), donc dépourvu de plan tangent d'après le lemme précédent, il s'ensuit que sur σ l'ensemble des points de deuxième espèce a une aire nulle.

Mais la frontière F_ρ étant un ensemble fermé, on peut trouver, d'après le théorème de recouvrement de Borel-Lebesgue, un nombre fini de domaines superficiels σ contenant à leur intérieur tous les points de F_ρ. L'ensemble F_2 de tous les points de deuxième espèce de la frontière F_ρ est ainsi inclus dans un nombre fini de surfaces rectifiables (donc quarrables) sur chacune desquelles il a une aire nulle.

115. *Deuxième cas :* $\rho \leqq \frac{D}{\sqrt{2}}$. — Décomposons E en un nombre fini n de sous-ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n$, chacun de diamètre $d_i \leqq \rho\sqrt{2}$. En effectuant la construction de Cantor-Minkowski avec le rayon ρ sur chacun des e_i, on obtient n domaines $(e_i)_\rho$ de frontières respectives f_i. Le domaine E_ρ est la réunion des $(e_i)_\rho$ et tout point de la frontière étudiée F_ρ appartient à une ou plusieurs frontières partielles f_i.

Considérons une de ces frontières f_i; elle a mêmes propriétés que la frontière que nous venons d'étudier au premier cas : l'ensemble de ses points de deuxième espèce est inclus dans un nombre fini de surfaces rectifiables sur chacune desquelles il a une aire nulle.

Réunissons maintenant les domaines $(e_i)_\rho$ deux par deux de toutes

---

courbe rectifiable de S. Une surface rectifiable peut cesser de l'être si l'on change de représentation paramétrique. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit donnée sous forme rectifiable est que $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, considérées comme fonctions de la seule variable u ou de la seule variable v, aient des nombres dérivés bornés (H. LEBESGUE, *Thèse*, n° 70).

[1] RADEMACHER, *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln* (I, *Math. Ann.*, t. **79**, 1918, p. 340; II, *ibid.*, t. **81**, 1920, p. 52). Ce théorème, qui met en jeu la différentielle au sens de Stolz, a été repris et étendu par M. STEPANOFF [*Ueber totale Differenzierbarkeit* (*Math. Ann.*, t. **90**, 1923, p. 318)] et par M. R. CACCIOPPOLI [*Sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili* (*Rend. della R. Acad. di Napoli*, t. 34, 1928)]. Sur l'équivalence entre l'existence du plan tangent (au sens classique utilisé au n° **112**) et celle de la différentielle de Stolz pour une fonction $z = f(x, y)$, *voir* M. FRÉCHET, *Sur la notion de différentielle totale* (*Nouv. Ann.*, 4° série, t. **12**, 1912, p. 436).

les manières possibles et considérons l'une des frontières ainsi obtenues : soit f_{ij}, par exemple, la frontière de $(e_i)_\rho + (e_j)_\rho$. Cette frontière f_{ij} est susceptible de contenir des points (β) et le raisonnement précédent ne saurait s'y appliquer; nous allons donc raisonner sur l'ensemble f_{α_2} des seuls points (α_2) de f_{ij}. — Tout point de f_{α_2} est ancore intérieur à un domaine superficiel σ d'équation $z = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant à nombres dérivés bornés, c'est-à-dire à une surface rectifiable sur laquelle l'ensemble des points (α_2) a une aire nulle. L'ensemble f_{α_2} n'étant pas nécessairement fermé, on peut lui appliquer le théorème de recouvrement de Lindelöf et le recouvrir avec une famille au plus dénombrable de surfaces σ, de sorte que f_{α_2} est ainsi inclus dans une famille *dénombrable* de surfaces rectifiables de la forme $z = f(x, y)$ sur chacune desquelles il a une aire nulle.

Mais tout point de f_{ij} appartient à l'une au moins des deux frontières f_i ou f_j; chacune de ces frontières étant contenue, comme on l'a vu au premier cas, dans un nombre fini de surfaces rectifiables de la forme $z = f(x, y)$, il en est de même de f_{ij}. L'ensemble f_{α_2} est donc inclus dans un nombre *fini* de surfaces rectifiables de la forme $z = f(x, y)$ et, en vertu de la propriété ci-dessus, on peut démontrer [1] qu'il a une aire nulle sur chacune de ces surfaces.

En définitive, la propriété cherchée a lieu pour l'ensemble des points de l'espace qui sont (α_2) soit sur une f_i, soit sur une f_{ij}, car les f_i et les f_{ij} sont en nombre fini. Pour montrer que cette propriété appartient à l'ensemble F_2 de tous les points de deuxième espèce de F_ρ, il suffit donc de prouver que tout point de F_2 revêt le type (α_2) soit sur une f_i, soit sur une f_{ij}. En effet, tout point de F_2 appartient à une ou plusieurs f_i sur chacune desquelles il revêt le type (α_1) ou (α_2), puisqu'une f_i n'a que des points (α). Si un tel point M n'est pas (α_2) sur une f_i, c'est qu'il appartient à plusieurs f_i sur chacune desquelles il a le type (α_1). Or, d'après sa définition, M possède certainement deux projetantes non opposées MA et MB, le point A étant dans un ensemble e_i et le point B dans un autre ensemble e_j : le point M est donc bien (α_2) sur la frontière f_{ij}.

Le théorème annoncé est donc établi en toute généralité.

---

[1] Cette démonstration est développée en Appendice (n° **130**).

VI. — Les points de troisième espèce.

116. Par définition, les projetantes d'un point de troisième espèce ne sont jamais dans un même plan. Un tel point peut appartenir à l'une des trois classes α, β ou γ, les points (γ_3) étant des points frontières isolés (n° **35**). Le spécifique d'un point de troisième espèce est un tétraèdre de projetantes; à partir de cette notion, nous allons établir ce résultat général :

L'ensemble F_3 *de tous les points de troisième espèce de la frontière* F_ρ *est dénombrable.*

C'est une conséquence immédiate de nos théorèmes d'impénétrabilité (n° **67**). A chaque point de F_3 on peut associer un spécifique-tétraèdre de volume non nul et deux quelconques de ces tétraèdres n'ont en commun aucun point intérieur. Il en résulte que l'ensemble de ces tétraèdres est dénombrable, ainsi que l'ensemble des points de troisième espèce [1].

117. A côté de ce resultat simple sur l'ensemble F_3, il n'est pas inutile de donner, au moyen d'exemples, certaines propriétés négatives qui montreront la complexité de cet ensemble.

Tout d'abord, *l'ensemble* F_3 *n'est pas nécessairement fermé :* une suite infinie de points de troisième espèce peut admettre pour point d'accumulation un point de première ou de deuxième espèce. *Exemple :* On considère une suite infinie de sphères égales de rayon ρ et de centres $\{M_i\}$ tendant vers M. Sur la surface de la sphère $S^\rho_{M_i}$, on prend trois points A_i, B_i, C_i, non situés dans un même plan avec M_i, extérieurs à toute autre sphère de notre suite et tels que la triple suite $\{A_i\}$, $\{B_i\}$, $\{C_i\}$ ait pour limite soit un point unique A, soit deux points A et B (les rayons MA et MB n'étant pas opposés); ces points limites sont évidemment sur la surface de S^ρ_M. Lors de la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur l'ensemble des points A_i, B_i,

[1] Cette propriété est encore une conséquence du théorème que j'ai démontré dans mon Mémoire : *Sur un critère de dénombrabilité* (*Acta math.*, t. 56, 1931, p. 363) : *Un ensemble* $\mathcal{E}$ *dont le contingent en chaque point est un faisceau strictement convexe* (*voir* n° **33**) *est dénombrable.* Il résulte, en effet, des n^{os} **42** et **43** que le contingent de la frontière F_ρ en tout point de troisième espèce est strictement convexe.

C_i, les M_i constituent une suite de points de troisième espèce ayant pour limite soit un point de première espèce, soit un point de deuxième espèce.

118. Bien que F_3 soit dénombrable, *le dérivé* F'_3 *de l'ensemble des points de troisième espèce est susceptible de comprendre des continus.* Il suffit de le montrer pour le cas des surfaces convexes ([1]) en inscrivant dans une sphère un polyèdre convexe à facettes triangulaires, se multipliant et se rapetissant au voisinage de l'équateur, de façon que les sommets formant l'ensemble F_3 s'accumulent sur l'équateur et que chaque point de ce grand cercle soit de première espèce.

119. Enfin, *l'ensemble* F_3 *peut être partout dense sur la frontière* F_ρ. C'est ce qu'on voit avec la surface convexe, déjà rencontrée au n° **109**, qui est représentée par une équation $z = f(x) + g(y)$ et sur laquelle il y a des lignes de points de deuxième espèce $x = \text{const.}$ pour un ensemble dense de valeurs de x et des lignes analogues $y = \text{const.}$ pour un ensemble dense de valeurs de y. Les points de croisement de ces lignes sont des points de troisième espèce, dont l'ensemble est lui-même partout dense.

VII. — Ensemble des points sans plan tangent et ensemble des points de multifurcation.

120. Nous nous proposons, comme conclusion de notre étude, d'examiner l'ensemble des points frontières dépourvus de plan tangent. Nous dirons qu'un point M de la frontière F_ρ possède un plan tangent si le contingent de F_ρ en M est *identique* à un plan, c'est-à-dire s'il existe un plan unique Π passant par M et jouissant de cette double propriété : toute demi-tangente MT de F_ρ est contenue dans Π, et toute demi-droite $M\Delta$ de Π est une demi-tangente de F_ρ ([2]).

([1]) Je rappelle qu'une surface convexe est un véritable *ensemble* $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ (n° **5**).

([2]) Cette définition n'est pas celle adoptée dans la plupart des Traités classiques où l'on appelle souvent plan tangent d'une surface en M un plan qui est unique et qui contient les tangentes à toutes les courbes de la surface passant en M et admettant une tangente en ce point. Notre définition se trouve imposée par ce fait que la frontière F_ρ n'est pas nécessairement une surface. D'ailleurs, cette définition, très naturelle en ce sens qu'elle généralise à trois dimensions la notion de tangente à une courbe plane, a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude même des surfaces. Dans son Mémoire : *Sur les Surfaces qui admettent un plan tangent en chaque point* (*Bull. de la Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 190),

121. Cela posé, nous avons ce théorème immédiat :

En tout point de deuxième ou de troisième espèce, la frontière F_ρ *est dépourvue de plan tangent.*

Soit M un point de deuxième espèce (ou de troisième espèce). Si M est de la classe α, le contingent $\tau(M)$ de F_ρ en M est formé (n° **63**) des deux faces d'un dièdre (ou de la surface d'un cône convexe). Si M est de la classe β, le contingent $t(M)$ de la frontière f_ρ (n° **42**) se réduit à un demi-plan ou a un couple de demi-droites opposées (à un secteur plan ou à une demi-droite). Comme $\tau(M)$ est contenu dans $t(M)$ ou coïncide avec lui (n° **43**), $\tau(M)$ n'est jamais formé d'un plan.

122. Réciproquement, tout point de F_ρ sans plan tangent est un point de deuxième ou de troisième espèce, ou encore un point (β_1), car on sait (n° **63**) que la frontière a toujours un plan tangent en un point (α_1). Comme nous avons précédemment étudié l'ensemble des points de deuxième et de troisième espèce, le problème se ramène donc à examiner l'ensemble des points (β_1).

M. G. Valiron pose des définitions qui reviennent à ceci : une surface a un plan tangent en un point si son contingent est *contenu* dans un même plan, — et ce plan tangent est *ordinaire* si le contingent est *identique* à un plan ; c'est précisément le cas du plan tangent *ordinaire* que nous considérons ici. D'autre part, M. R. Caccioppoli, dans son importante Note : *Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili* (*Rendiconti dei Lincei*, t. 7, 1928, p. 901), indique le premier exemple d'une surface quarrable au sens de M. Lebesgue, qui soit dépourvue de plan tangent sur un ensemble d'aire positive, entendant par là qu'aux points de cet ensemble *le contingent de la surface n'est pas contenu dans un même plan*.

Il est bon de noter que ces définitions sont nettement distinctes : non seulement, comme le fait observer M. Valiron, il existe des surfaces possédant en un point un plan tangent *au sens classique* et n'en ayant pas à notre sens, mais inversement on rencontre des surfaces dont le contingent en un point est contenu dans un même plan, ou même est identique à tout un plan, et qui n'ont pas en ce point de plan tangent au sens classique; par exemple : le point O de la portion de cylindre droit, d'équation $r = e^\theta$, voisine de l'origine et extérieure aux deux sphères $x^2 + y^2 + z^2 \pm 2Rz = 0$, le plan xOy étant le plan des coordonnées polaires r, θ; observons que, si l'on supprimait les deux sphères, le contingent $\tau(O)$ ne serait plus le plan xOy, mais remplirait tout l'espace.

123. *L'ensemble Ψ_{β_1} de tous les points (β_1) sans plan tangent de la frontière F_ρ a une aire nulle* (au sens du n° **111**).

Soit O un tel point, de projetantes opposées MA et MB, et soit Π le plan perpendiculaire en O à AOB. Considérant les frontières $F_{\mathcal{A}}$ et $F_{\mathcal{B}}$ (n° **53**) obtenues par la construction de Cantor-Minkowski sur des voisinages respectifs de A et de B, le point O est (α_1) sur $F_{\mathcal{A}}$ et sur $F_{\mathcal{B}}$ et l'on peut trouver (n° **52**) sur ces frontières des voisinages de O, $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$, qui soient des surfaces de la forme $z=f(x, y)$ à pentes bornées. D'après le théorème des projections (n° **17**), tout point de F_ρ situé dans un certain voisinage $\mathcal{V}$ de O appartient à l'une au moins de ces surfaces, mais il peut arriver qu'un point de $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ ou de $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ soit intérieur à E_ρ, donc n'appartienne pas à F_ρ; il peut donc se faire qu'un point possédant un plan tangent sur $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ ou $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ n'en ait plus sur F_ρ.

Considérons alors l'ensemble ψ_{β_1} des points (β_1) sans plan tangent du seul voisinage $\mathcal{V}$. En chacun de ces points O′, le contingent de F_ρ est contenu, au sens strict, dans un même plan Π' (n^{os} **42** et **43**) dont la normale A′B′ est, en vertu du théorème des projections, arbitrairement voisine de la normale AB au plan Π. Il s'ensuit qu'en effectuant une projection orthogonale de ψ_{β_1} sur Π, le contingent de l'ensemble projection, en un point quelconque, ne comprend jamais tout ce plan et il résulte alors d'un théorème de M. Bouligand [1] que cet ensemble projection est de mesure nulle. L'ensemble considéré ψ_{β_1} se projette donc dans deux domaines du plan Π, respectivement projections des surfaces $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$, sur chacun desquels il a une aire nulle et, du fait que les pentes de ces surfaces sont bornées, ce résultat s'étend immédiatement à $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ [2].

Ainsi le point O est contenu dans la réunion de deux surfaces $z=f(x, y)$ à pentes bornées sur chacune desquelles les points (β_1) sans plan tangent forment un ensemble d'aire nulle, et d'après le théorème de recouvrement de Lindelof, on peut enfermer l'ensemble total Ψ_{β_1} dans une famille *dénombrable* de telles surfaces.

---

[1] G. Bouligand, *Sur une application du contingent à la théorie de la mesure* (*Acta math.*, t. 56, 1931, p. 371). Une démonstration de ce théorème figure en Appendice (n° **129**).

[2] *Voir* le début du n° **130**.

Mais on a vu, à l'occasion de la théorie des points de deuxième espèce, que la frontière F_ρ est incluse dans un nombre fini de frontières f_i (n° **115**), chacune de ces frontières étant elle-même la réunion d'un nombre fini de surfaces $z = f(x, y)$ à pentes bornées (n° **114**). L'ensemble Ψ_{β_1} est donc inclus aussi dans un nombre *fini* de surfaces $z = f(x, y)$ à pentes bornées et, d'après la propriété précédente, on démontre qu'il a une aire nulle sur chacune de ces surfaces [1]. Notre théorème est donc établi.

124. Comme, par ailleurs, on a démontré que l'ensemble F_2 des points de deuxième espèce a une aire nulle et que l'ensemble F_3 des points de troisième espèce est dénombrable (donc a aussi une aire nulle), nous aboutissons à ce théorème général :

Un ensemble C. M. possède un plan tangent, sauf peut-être en des points formant un ensemble d'aire nulle,

étant toujours entendu que cet ensemble est inclus dans un nombre *fini* de surfaces $z = f(x, y)$ à pentes bornées sur chacune desquelles il a une aire nulle.

125. Le théorème des projections entraîne immédiatement la continuité du plan tangent sur l'ensemble des points frontières, (α_1) ou (β_1), où existe ce plan : si une suite de tels points converge vers un point analogue, la suite des plans tangents correspondants converge vers le plan tangent en ce dernier point. Mais l'ensemble des points frontières pourvus d'un plan tangent n'étant pas nécessairement *fermé*, la continuité uniforme n'a pas lieu en général (*cf.* n^{os} **79** et **86**), et deux points simultanément variables, dont la distance tend vers zéro, peuvent avoir des plans tangents non infiniment voisins (*cf.* n° **18**).

126. *Ensemble des points de multifurcation*. — Nous sommes maintenant en mesure de donner une solution dans le cas général à la question posée par M. Bouligand : *les points de multifurcation* (n° **14**)

---

(1) *Voir*, en Appendice, le n° **130**.

forment-ils sur la frontière F_ρ *un ensemble de mesure nulle* (1) ? Lui-même a donné une réponse affirmative lorsque l'hypothèse H (nº **51**) est réalisée en chaque point de la frontière F_ρ, puis il a étendu ce résultat au cas suivant : L'ensemble E étant décomposé en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \rho$, et la construction de Cantor-Minkowski étant effectuée sur chacun de ces ensembles, il faut que l'hypothèse H soit vérifiée en tout point frontière de la réunion de deux de ces domaines partiels (2).

127. Pour résoudre le problème, on doit essentiellement distinguer entre les diverses *espèces* de points de multifurcation :

Les points de troisième espèce forment un ensemble dénombrable (nº **116**);

Les points de deuxième espèce forment un ensemble d'aire nulle (nº **111**).

Quant aux points de multifurcation de première espèce, ou points (β_1), ils ne forment pas nécessairement un ensemble d'aire nulle, soit sur la frontière intérieure (*cf.* l'exemple 2º du nº **37**), soit même sur la frontière extérieure; on le voit en prenant pour E, dans deux faces opposées d'un cube d'arête 2ρ, deux ensembles discontinus d'aire positive, identiques à une translation près superposant ces deux faces.

Cependant, la propriété a lieu pour les points (β_1) *sans plan tangent* (nº **123**), et aussi pour les points (β_1) pourvus d'un plan tangent, *au voisinage desquels une parallèle à la ligne des projetantes rencontre toujours la frontière en deux points distincts*, car l'ensemble de ces derniers est dénombrable (nº **55**, en note).

(1) G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel* (*Bull. des Sc. math.*, t. 52, 1928, p. 372).

(2) G. Bouligand, *Sur certaines classes de surfaces de l'espace euclidien à trois dimensions* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 190, 1930, p. 1001); *Sur la construction de Cantor-Minkowski* (*Ann. de la Soc. polon. de Math.*, t. 9, 1930, p. 30).

APPENDICE.

Cette Note a pour objet la justification d'un certain nombre de théorèmes utilisés au cours de ce Mémoire. Les deux premiers ont été énoncés par M. Bouligand; nous en donnons une démonstration développée.

128. *Un continu $\mathcal{C}$, pour lequel il existe en tout point* O *un plan* Π *ne contenant aucune droite du paratingent* (n° **31**) *de* $\mathcal{C}$ *en* O, *est un arc de courbe.*

Il faut montrer que $\mathcal{C}$ est l'image biunivoque et bicontinue d'un segment de droite. Prenons un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, le plan yOz étant le plan Π. Je dis d'abord qu'il existe sur $\mathcal{C}$ un voisinage $\mathcal{V}$ de O tel que tout plan Π' parallèle à Π contienne au plus un point de $\mathcal{C}$; en effet, s'il en était autrement, on pourrait trouver une suite de plans parallèles $\{\Pi_i\}$ tendant vers Π, dans chacun desquels il y aurait un segment $p_i q_i$, les points p_i et q_i appartenant à $\mathcal{C}$ et tendant vers le point O : la suite des droites $\{p_i q_i\}$ admettrait alors une droite d'accumulation au moins passant en M et contenue dans Π, contrairement à l'hypothèse. D'autre part, du fait que $\mathcal{C}$ est un continu résulte que $\mathcal{V}$ a au moins un point commun avec tout plan Π'; on a donc établi une correspondance biunivoque entre $\mathcal{V}$ et l'axe Ox par projection orthogonale sur cet axe. D'autre part, comme à deux points infiniment voisins de $\mathcal{C}$ correspondent deux plans Π' infiniment voisins, cette correspondance est continue de $\mathcal{C}$ vers Ox, donc bicontinue.

Le voisinage $\mathcal{V}$ est donc un arc simple représentable sous la forme $y = f(x)$, $z = g(x)$. Mais, le continu $\mathcal{C}$ étant un ensemble fermé, on peut lui appliquer le théorème de Borel-Lebesgue et le recouvrir au moyen d'un nombre fini de tels voisinages, ce qui établit le résultat cherché.

129. *Un ensemble* $\mathcal{E}$ *de points de l'espace euclidien* (à 3 dimensions, par exemple), *tel qu'en tout point* M *il existe au moins une demi-droite* MT *non contenue dans le contingent* τ(M), *est un ensemble de mesure* (cubique) *nulle.*

Comme $\tau(\mathrm{M})$ est fermé (n° **39**), il existe pour chaque point M tout un demi-cône de révolution (solide), de sommet M et de demi-angle au sommet α_{M}, non contenu dans $\tau(\mathrm{M})$. Alors, d'après la définition du contingent, on peut associer à M une longueur ε_{M} telle qu'un cône circulaire droit de sommet M, d'apothème ε_{M} et de demi-angle au sommet $\frac{\alpha_{\mathrm{M}}}{2}$, ne contienne à son intérieur aucun point de $\mathcal{E}$.

Considérons d'abord un ensemble $\mathcal{E}_0$ pour lequel on a partout $\alpha_{\mathrm{M}} > \alpha_0$ (angle fixe). De M comme centre, décrivons les sphères de rayons $\varepsilon_{\mathrm{M}}, \frac{\varepsilon_{\mathrm{M}}}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon_{\mathrm{M}}}{n}, \ldots$. D'après le théorème de recouvrement de Vitali [1], on peut trouver une suite $\{\mathrm{M}_i\}$ de points de $\mathcal{E}_0$ et une suite associée d'entiers $\{a_i\}$ telles que les sphères successives de centres M_i et de rayons $r_i = \frac{\varepsilon_{\mathrm{M}_i}}{a_i}$ ne soient mutuellement jamais empiétantes et recouvrent $\mathcal{E}_0$ à un ensemble de mesure nulle près. On peut, d'ailleurs, faire ce choix de manière que toutes ces sphères soient dans un voisinage arbitrairement étroit de $\mathcal{E}_0$, donc que la somme de leurs volumes

$$\sum = \frac{4}{3}\pi\,(r_1^3 + r_2^3 + \ldots + r_i^3 + \ldots)$$

dépasse d'aussi peu qu'on le veut la mesure extérieure μ_0 de $\mathcal{E}_0$. On a ainsi, ε étant arbitrairement petit,

$$\mu_0 - \varepsilon < \Sigma < \mu_0 + \varepsilon.$$

Mais on peut supprimer, dans chaque sphère s_i, un cône circulaire droit ayant son sommet au centre de s_i, de demi-angle au sommet α_0 et ne contenant aucun point de $\mathcal{E}_0$. Si l'on appelle C la somme des volumes de ces cônes (qui, comme les sphères, sont sans point intérieur commun), on a encore

$$\mu_0 - \varepsilon < \Sigma - \mathrm{C} < \mu_0 + \varepsilon,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{C} < 2\varepsilon.$$

Explicitant le volume de ces cônes, cette dernière relation s'écrit

$$\frac{1}{3}\pi \sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0\,(r_1^3 + r_2^3 + \ldots + r_i^3 + \ldots) < 2\varepsilon,$$

---

[1] *Voir*, par exemple, CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reellen Funktionen*, 2. Auflage, p. 299.

d'où il vient

$$\sum = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + \ldots + r_i^3 + \ldots) < \frac{8\varepsilon}{\sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0},$$

et comme on a

$$\mu_0 < \Sigma + \varepsilon,$$

il est démontré que $\mathcal{E}_0$ est de mesure nulle.

Revenons maintenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ de l'énoncé et choisissons une suite d'angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ qui tendent vers zéro en décroissant. En vertu de ce qui précède, l'ensemble des points où l'on a $\alpha_M > \alpha_p$ est de mesure nulle, et l'ensemble $\mathcal{E}$ peut être considéré comme la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de mesure nulle, ce qui établit le théorème.

130. *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble contenu à la fois dans deux surfaces Σ_1 et Σ_2, d'équations respectives $z_1 = f_1(z_1, y_1)$ et $z_2 = f_2(z_2, y_2)$, les fonctions f_1 et f_2 étant continues et à nombres dérivés bornés. Si $\mathcal{E}$ a une aire nulle sur Σ_1, il a aussi une aire nulle sur Σ_2.*

Je rappelle, d'après M. H. Lebesgue, qu'un morceau de la surface $z = f(x, y)$ à pentes bornées a une aire au plus égale à celle de sa projection, sur le plan xOy, multipliée par $\frac{4M^2}{\pi}$, M étant supérieur aux nombres dérivés de $f(x, y)$ (1).

Soient, pour abréger, Π_1 et Π_2 les plans $x_1O_1y_1$ et $x_2O_2y_2$; S_1 et $\mathcal{E}_1$ les projections de Σ_1 et $\mathcal{E}$ sur Π_1; S_2 et $\mathcal{E}_2$ les projections de Σ_2 et $\mathcal{E}$ sur Π_2.

D'après l'hypothèse, $\mathcal{E}$ a une aire nulle sur Σ_1, et $\mathcal{E}_1$ a une aire nulle sur S_1. On peut donc enfermer les points de $\mathcal{E}_1$ dans un nombre fini ou une infinité dénombrable de surfaces planes s dont l'aire totale soit arbitrairement petite. Appelons σ la portion de Σ_1 qui se projette sur Π_1 en s, et S'_1 la surface réunion des s. La portion Σ'_1 de Σ_1 qui se projette en S'_1 a elle-même une aire infiniment petite d'après la propriété rappelée au début et, étant la réunion des σ, elle contient tous les points de $\mathcal{E}$. En projetant les surfaces σ sur Π_2, on enferme donc tous les points de $\mathcal{E}_2$ dans un nombre fini ou une infinité dénombrable de surfaces, dont la réunion (projection de Σ'_1) a encore une aire infi-

(1) H. Lebesgue, *Thèse*, n° 71, p. 87.

niment petite. Toujours en vertu de la propriété du début, $\mathcal{E}$ a donc une aire nulle sur Σ_2.

Corollaire. — *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble qui possède cette double propriété : 1° $\mathcal{E}$ est contenu dans une famille dénombrable au plus de surfaces $z=f(x,y)$ à pentes bornées, σ, sur chacune desquelles il a une aire nulle; 2° $\mathcal{E}$ est contenu dans un nombre fini de surfaces $z=f(x,y)$ à pentes bornées,* s. *Alors $\mathcal{E}$ a une aire nulle sur chaque surface* s.

Considérons une surface particulière s_i, et soit e le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ contenu dans s_i (c'est-à-dire, en employant une notation bien connue, $e \equiv s_i \times \mathcal{E}$). D'après l'énoncé, e est aussi contenu dans la famille des surfaces σ, donc il est contenu à la fois dans s_i et dans la réunion des surfaces σ :

$$e \subset s_i \times (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots),$$
$$e \subset s_i \times \sigma_1 + s_i \times \sigma_2 + \ldots.$$

Or, d'après le théorème précédent, le sous-ensemble e_1 de e contenu dans $s_i \times \sigma_1$ a une aire nulle sur s_i (car il a, comme $\mathcal{E}$, une aire nulle sur σ_1); et de même pour les sous-ensembles analogues e_2, e_3, ... Par suite, e est inclus dans une famille au plus dénombrable de morceaux de s_i, sur chacun desquels il a une aire nulle. La surface s_i étant quelconque, l'énoncé se trouve établi.

Vu et approuvé :

Paris, le 22 juin 1931.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 22 juin 1931.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.