RENÉ DE POSSEL

**Quelques problèmes de représentation conforme**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1932
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1932__133__1_0>

N° D'ORDRE :
2223
Série A.
N° DE SÉRIE :
1354

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES


**Par M. René de POSSEL**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.


---

1re THÈSE. — Quelques problèmes de représentation conforme.

2e THÈSE. — L'Uniformisation des fonctions algébriques.

---

**Soutenues le 1932 devant la Commission d'Examen.**

---

MM. JULIA, *Président.*
VILLAT, GARNIER } *Examinateurs.*


PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1932

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

| | MM. | |
|---|---|---|
| Doyen | C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe. | |
| Doyen honoraire | M. MOLLIARD. | |
| Professeurs honoraires | H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, E. HÉROUARD, E. PICARD, R. PERRIER. | |
| Professeurs | GOURSAT | Analyse supérieure et Algèbre supérieure. |
| | N | Mécanique physique et expérimentale. |
| | JANET | Electrotechnique générale. |
| | WALLERANT | Minéralogie. |
| | PAINLEVÉ | Mécanique analytique et Mécanique céleste. |
| | CAULLERY | Zoologie (Evolution des êtres organisés). |
| | EMILE BOREL | Calcul des probabilités et Physique mathématique. |
| | ABRAHAM | Physique. |
| | M. MOLLIARD | Physiologie végétale. |
| | E. CARTAN | Géométrie supérieure. |
| | GABRIEL BERTRAND | Chimie biologique. |
| | JEAN PERRIN | Chimie physique. |
| | LAPICQUE | Physiologie générale. |
| | Mme P. CURIE | Physique générale et radioactivité. |
| | G. URBAIN | Chimie générale. |
| | L. MARCHIS | Aviation. |
| | E. VESSIOT | Théorie des fonctions, théorie des transformations. |
| | A. COTTON | Physique générale. |
| | J. DRACH | Application de l'Analyse à la Géométrie. |
| | CH. FABRY | Physique. |
| | R. LESPIEAU | Théories chimiques. |
| | P. PORTIER | Physiologie comparée. |
| | CH. PEREZ | Zoologie. |
| | E. BLAISE | Chimie organique. |
| | P.-A. DANGEARD | Botanique. |
| | LÉON BERTRAND | Géologie structurale et Géologie appliquée. |
| | E. RABAUD | Biologie expérimentale. |
| | G. JULIA | Calcul différentiel et Calcul intégral. |
| | P. MONTEL | Mécanique rationnelle. |
| | V. AUGER | Chimie appliquée. |
| | P. WINTREBERT | Anatomie et histologie comparées. |
| | O. DUBOSCQ | Biologie maritime. |
| | EUGÈNE BLOCH | Physique théorique et Physique céleste. |
| | A. MAILHE | Etude des combustibles. |
| | L. LUTAUD | Géographie physique et géologie dynamique. |
| | HENRI VILLAT | Mécanique des fluides et applications. |
| | CH. JACOB | Géologie. |
| | P. PASCAL | Chimie minérale. |
| | LÉON BRILLOUIN | Théories physiques. |
| | E. ESCLANGON | Astronomie. |
| | H. BÉNARD | Mécanique expérimentale des fluides. |
| | G. MAUGUIN | Minéralogie. |
| | L. BLARINGHEM | Botanique. |
| | A. GUILLIERMOND | Botanique (P. C. N.) |
| | A. DENJOY | Mathématiques générales. |
| | A. DUFOUR | Physique (P. C. N.) |

| | |
|---|---|
| E. PÉCHARD | Chimie (Enseignnt P.C.N.). |
| A. GUILLET | Physique. |
| M. GUICHARD | Chimie minérale. |
| A. MICHEL-LEVY | Pétrographie. |
| A. DEREIMS | Géologie. |
| H. MOUTON | Chimie physique. |
| L. DUNOYER | Optique appliquée. |
| M. JAVILLIER | Chimie biologique. |
| ROBERT-LÉVY | Zoologie. |
| A. DEBIERNE | Radioactivité. |
| E. DARMOIS | Physique. |
| G. BRUHAT | Physique. |
| F. PICARD | Zoologie (Evolution des êtres organisés). |
| L. JOLEAUD | Paléontologie |
| M. FRECHET | Calcul des Probabilités et Physique mathématique. |
| Mme RAMART-LUCAS | Chimie organique. |
| BÉGHIN | Mécanique théoriqne des fluides |
| FOCH | Mécanique expérle des fluides. |
| PAUTHENIER | Physique P C.N |
| VILLEY | Mécanique physique et expérimentale. |
| DE BROGLIE | Théorie physique. |
| LABROUSTE | Physique du Globe. |
| FREUNDLER | Chimie (P.C.N.). |
| PRENANT | Zoologie. |
| P. JOB | Chimie générale. |
| CHRÉTIEN | Optique appliquée. |

**Secrétaire** . . . . . . . . . . . A. PACAUD.

93850 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A MA FEMME

A

MONSIEUR CARATHÉODORY

# PREMIÈRE THÈSE.

## QUELQUES PROBLÈMES DE REPRÉSENTATION CONFORME

### PRÉFACE.

Les problèmes étudiés dans ce Mémoire se rattachent à la question générale suivante : étant donné un ensemble de points sur une circonférence, on veut représenter conformément l'intérieur de cette circonférence sur un domaine, la représentation étant telle que la partie de la frontière de ce domaine qui correspond à l'ensemble jouisse de propriétés données.

Ces problèmes m'ont paru fondamentaux dans l'étude du prolongement des surfaces de Riemann [T. Radó (*a*)] (¹). Les questions rencontrées ne sont résolues qu'en bien faible partie. Une conséquence des résultats me semble spécialement digne d'intérêt : le rôle qui semblait devoir être joué par les ensembles de mesure $2\pi$ situés sur la circonférence de rayon un, conformément à une hypothèse émise par P. Kœbe en 1918 (*b*), est en réalité joué par des ensembles dont la mesure peut être inférieure à $2\pi$, et que j'ai nommés *ensembles du type maximum*. Pour les étudier, j'ai utilisé l'intégrale de Stieltjès. Dans un chapitre préliminaire se trouvent réunies les propriétés utilisées de cette intégrale. La place m'a manqué pour en donner l'exposé systématique que je compte publier prochainement.

Je suis amené en passant à résoudre le problème de la représentation conforme d'un domaine à connexion infinie sur un domaine dont chaque élément

(¹) Les lettres qui suivent les noms d'auteurs renvoient à l'index bibliographique placé à la fin du Mémoire.

de frontière est un segment de droite dont le prolongement passe par l'origine, problème résolu par P. Kœbe ($a_1$) en 1908, par une méthode différente.

Enfin, les deux premiers chapitres sont consacrés l'un à une étude topologique des domaines étoilés, l'autre aux propriétés des fonctions étoilées.

Qu'il me soit permis de remercier tout spécialement M. C. Carathéodory, pour ses conseils si précieux et pour la bonne grâce avec laquelle il m'a constamment guidé dans l'accomplissement de ce travail.

Il m'est agréable de mentionner aussi M. C. Plâtrier qui s'est si aimablement occupé de l'impression de ce Mémoire.

## TERMINOLOGIE.

I. L'*intersection* de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E et à F. On le désigne par la notation E.F. Des ensembles sont *disjoints* lorsque aucun élément n'appartient à deux d'entre eux.

II. L'expression « ensemble mesurable — B » pourrait prêter à confusion avec l'expression « ensemble mesurable — $\lambda$ », qui signifie « mesurable par rapport à la fonction monotone (ou à variation bornée) $\lambda(t)$ ». Cette dernière notion est d'ailleurs tout à fait analogue à celle d' « ensemble mesurable » au sens ordinaire du mot (sens de Lebesgue), tandis que celle d' « ensemble mesurable — B » est de nature toute différente. Pour ces deux raisons, nous adopterons la terminologie « *ensemble de Borel* », qui est utilisée déjà depuis longtemps par de nombreux mathématiciens. [Pour les définitions, *voir* H. Lebesgue ($a$), ou C. Carathéodory ($b$).]

III. A moins d'indication contraire, nous distinguerons toujours entre l'*intervalle* (ou *intervalle ouvert*) d'une droite ou d'une circonférence, et le *segment* (ou intervalle fermé). Le premier ne contient pas ses extrémités, le second les contient.

IV. L'expression « *domaine du plan* » a pour nous le sens adopté partout en théorie des fonctions. C'est un ensemble de la sphère de Riemann qui est *connexe*, et dont chaque point est centre d'une calotte sphérique ne contenant que des points de l'ensemble. *Connexe* signifie que deux points du domaine peuvent être joints par un arc de Jordan situé dans le domaine.

Si toute calotte de centre P contient des points du domaine et des points qui ne lui appartiennent pas, P est dit *point frontière*.

V. Un *continu* du plan est un ensemble parfait qui est bien enchaîné entre deux quelconques de ses points. Ceci veut dire qu'étant donnés deux de ses points A et B et un nombre $\varepsilon$, on peut trouver une chaîne de points de l'ensemble $AM_1M_2\ldots B$ telle que la distance cordale de deux points consécutifs soit inférieure à $\varepsilon$.

VI. L'ensemble des points frontières d'un domaine est fermé. On l'appelle la *frontière du domaine*.

Soit P un point frontière. Les points frontières qui sont bien enchaînés avec P forment un continu que l'on appelle un *élément de frontière*. S'il n'y a pas de point frontière bien enchaîné avec P, on dit que P est un élément de frontière réduit à un point.

Si un domaine n'a pas de point frontière, il est constitué par la sphère de Riemann; on dit que son ordre de connexion est nul. Un domaine qui a 1, 2, ... éléments de frontière est dit simplement, doublement, ..., connexe. S'il y a une infinité d'éléments de frontière, le domaine est dit à connexion infinie.

VII. Une *entaille* d'un domaine D est un arc de Jordan dont tous les points sauf une extrémité appartiennent à D.

Une *transversale* est un arc de Jordan dont tous les points sauf les deux extrémités appartiennent à D. On démontre que si un domaine est simplement connexe, toute transversale le partage en deux autres domaines, et réciproquement [*voir* B. de Kerekjartó (*a*)].

VIII. La *circonférence unité* est la circonférence de centre origine et de rayon un.

IX. Les deux mots *régulière* et holomorphe étant employés dans le même sens pour qualifier une fonction analytique, nous choisirons le premier.

X. Une fonction méromorphe dans un domaine D est dite *univalente* si elle prend deux valeurs différentes en deux points quelconques de D.

XI. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'extérieur d'un cercle de rayon assez grand, et qui admet un développement de la forme

$$f(z) = az + b + \frac{c}{z} + \ldots.$$

On appelle *dérivée à l'infini* la quantité $a$. C'est d'ailleurs la limite vers laquelle tend $f'(z) = a - \frac{c}{z^2} - \ldots$ lorsque $z$ tend vers l'infini.

XII. Soient A un ensemble quelconque du plan complexe et $z_0$ un point de A, qui peut être à l'infini.

On dit qu'une suite de fonctions complexes (pas nécessairement analytiques), définies sur A, *converge continûment* par rapport à A au point $z_0$ si, pour toute suite $z_1, z_2, \ldots$ de points de A qui converge vers $z_0$, la suite $w_n = f_n(z_n)$ est convergente.

Si une suite de fonctions méromorphes dans un domaine D y converge continûment, nous dirons qu'elle *converge régulièrement* dans D [*voir* C. Carathéodory ($e$)].

XIII. Nous dirons, avec M. Fréchet ($b$), qu'une famille $\Phi$ de fonctions méromorphes dans un domaine D est *compacte* si toute fonction limite d'une suite de fonctions de $\Phi$ appartient encore à $\Phi$.

## INTRODUCTION.

**1. Les ensembles du type maximum.** — Soit $\Delta$ un ensemble d'*intervalles ouverts disjoints* $\delta_i$ (I et III) (1), situés sur la *circonférence unité* (VIII) C définie par $|z| = 1$. Supposons qu'une fonction analytique $w = f(z)$ satisfasse aux conditions suivantes :

1° $f$ est *régulière* (IX) pour $|z| < 1$ avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ;

2° $f$ représente conformément l'intérieur de C sur un *domaine* (IV) D' intérieur à un cercle C' dont le centre est à l'origine du plan $w$, et l'on suppose qu'à chaque intervalle $\delta_i$ *correspond* (2) un intervalle $\delta'_i$ situé sur C'.

(1) Les chiffres romains renvoient à la terminologie.

(2) Ceci demande quelque explication. Soit une fonction $w = f(z)$ régulière et *univalente* (X) pour $|z| < 1$ et qui satisfait à $|f(z)| < R$. Désignons par $\delta$ un arc ouvert du cercle $|z| = 1$. Supposons que lorsque $z$ tend vers un point de $\delta$, $|f(z)|$ tende vers R : alors, d'après le principe de symétrie de Schwarz [*voir* par exemple G. Julia ($a$)], $f(z)$ est régulière aux points de $\delta$, et représente $\delta$ sur un arc $\delta'$ du cercle C' de centre origine et de rayon R.

*Désignons par $\Phi_\Delta$ la famille formée par ces fonctions; si elle ne comprend que $w = z$, nous dirons que $\Delta$ est du type maximum.* [Dire que $f(z)$ est différente de $z$ revient à dire que $D'$ a des points frontières intérieurs à $C'$ (1).]

Dans le cas banal où l'ensemble des points de C complémentaire de $\Delta$, soit $C - \Delta$, contient un intervalle $d$, il existe une fonction de $\Phi_\Delta$ différente de $z$; elle représente l'intérieur de C sur le domaine formé de l'intérieur d'un cercle $C'$ diminué d'une *entaille* (VII) correspondant à $d$ et dirigée suivant un rayon (2).

Dans les autres cas, $\Delta$ est partout dense, et $C - \Delta$ est fermé discontinu; à priori, on pourrait croire que $\Delta$ est toujours du type maximum, mais on connaît depuis longtemps des exemples du cas contraire. En effet, on peut trouver un domaine D formé d'une partie de l'intérieur d'un cercle $C'$, dont la frontière contienne des arcs *libres* (3) $\delta'_i$ situés sur $C'$, et tel que si on le représente conformément sur un cercle C, les images $\delta_i$ des $\delta'_i$ soient denses en tout point de C : l'ensemble des $\delta_i$ n'est évidemment pas du type maximum. On obtient aisément un tel domaine D au moyen d'un exemple de C. Carathéodory ($a$) (4). Un autre exemple direct est donné par P. Kœbe ($b$). Nous en donnerons un au Chapitre I. Dans ces exemples, le complémentaire de $\Delta$ est de mesure non nulle (5). En effet, nous montrerons très simplement au Chapitre III que si le complémentaire de $\Delta$ est de mesure nulle, $\Phi_\Delta$ ne comprend que la fonction $z$.

L'hypothèse la plus simple serait alors la suivante : si $C - \Delta$ n'était pas de mesure nulle, $\Delta$ ne serait pas du type maximum. On y serait d'autant plus porté que si elle était fausse, une autre hypothèse faite par P. Kœbe ($b$) sur les « *minimale Schlitzbereiche* » serait également fausse (*voir* Chap. V). Cependant, nous donnerons un exemple d'ensemble du type maximum dont le complémen-

---

(1) C'est une conséquence du lemme de Schwarz. *Voir*, par exemple, G. Julia ($a$).

(2) *Voir* au Chapitre III le calcul de cette fonction.

(3) C'est-à-dire que tout point de l'arc ouvert $\delta_i$ est centre d'un cercle dont la portion intérieure à $C'$ appartient à D.

(4) Conservons les notations du Mémoire cité. Menons une parallèle à AB, équidistante de AB et de CD, et qui rencontre en E et F les côtés AD et BC. Soient $E'$ et $F'$ les points de cette droite situés sur le contour du polygone $\mathfrak{P}_2$ et les plus rapprochés de E et F. Représentons conformément sur un cercle le rectangle dont deux sommets sont $E'$ et $F'$ et dont un côté est sur AB. La portion de G intérieure à ce rectangle est alors représentée sur un domaine de l'espèce voulue.

(5) Pour la théorie de la mesure, *voir* H. Lebesgue ($a$), ou C. Carathéodory ($b$).

taire n'est pas de mesure nulle; c'est par conséquent l'hypothèse de P. Kœbe qui doit être rejetée (1).

*Un des buts de ce Mémoire est la recherche de conditions portant sur la structure de l'ensemble Δ et permettant d'affirmer qu'il est ou qu'il n'est pas du type maximum.*

Parmi les fonctions de $\Phi_\Delta$, nous verrons qu'il y en a une et une seule pour laquelle le rayon du cercle C′ atteint son maximum. Nous la nommerons extrêmale-Δ. Nous montrerons que cette fonction est étoilée, et que l'ensemble d'intervalles $\delta'_i$ qui lui correspond est du type maximum.

Lorsque l'ensemble Δ n'est pas du type maximum, deux cas sont possibles : le complémentaire de l'ensemble des $\delta'_i$ correspondant à l'extrêmale-Δ peut être de mesure nulle ou de mesure non nulle. Nous donnerons des exemples des deux cas.

**2. Quelques questions où interviennent les ensembles du type maximum** (2). — L'étude des ensembles du type maximum paraît présenter un triple intérêt.

I. Tout d'abord, comme nous le verrons au Chapitre VI, elle touche aux questions relatives aux « *minimale Schlitzbereiche* » posées par P. Kœbe (*b*).

II. Ensuite, elle est liée aux ensembles parfaits discontinus de singularités [A. Denjoy (*a*), (*b*)]. En effet, prolongeons une fonction $f(z)$ de la famille $\Phi_\Delta$ par réflexion (3) sur les cercles C et C′. Si $f(z)$ est différente de $z$ et si Δ est partout dense, on voit qu'elle possède un ensemble parfait discontinu de singularités contenu dans C — Δ; elle est univalente au voisinage de cet ensemble, mais n'est pas continue sur l'ensemble.

III. Enfin, les ensembles du type maximum sont intimement liés à la théorie des surfaces de Riemann générales. Comme nous n'y reviendrons pas, traitons ici cette question en détails, et commençons par rappeler la définition de la surface de Riemann.

---

(1) J'apprends qu'un tel exemple vient d'être donné par H. Grötzsch au moyen de procédés différents (voir *Berichten zu Leipzig*, Bd 83, 1931, p. 186 et suiv.).

(2) Ce paragraphe est destiné à montrer l'intérêt des questions étudiées, et comment j'y ai été amené. Cette partie est inutile au lecteur qui ne s'intéresserait qu'à la représentation conforme.

(3) Pour le prolongement d'une fonction par réflexion, *voir* par exemple G. Julia (*a*).

## DÉFINITION DE LA SURFACE DE RIEMANN.

Nous adopterons la définition de T. Radó ($a$) équivalente à celle de H. Weyl ($a$), mais peut-être plus maniable [*voir* aussi S. Bochner ($a$)].

Donnons d'abord les notions indispensables de topologie des surfaces.

Espace topologique. — Soit un ensemble d'éléments P appelés points. Supposons qu'à chaque point P on ait fait correspondre des sous-ensembles de l'ensemble précédent, contenant P. Ce sont les voisinages de P, et on les désigne par V(P). Nous dirons qu'un tel système de points et voisinages constitue un *espace topologique* quand il vérifie les trois conditions suivantes :

1° *Si un point* P *a deux voisinages, il en a aussi un troisième qui est contenu dans chacun des deux premiers;*

2° *Tout point* Q *pris dans un voisinage* V(P) *d'un point* P *possède un voisinage* V(Q) *contenu dans* V(P)*;*

3° *Si* P *et* Q *sont des points différents, ils possèdent des voisinages sans point commun.*

La définition est due à F. Haussdorff ($a$). C'est un cas particulier des espaces-V de M. Fréchet ($b$).

Considérons maintenant deux espaces topologiques $R_1$ et $R_2$. Supposons une correspondance biunivoque entre les points d'un ensemble $E_1$ contenu dans $R_1$ et ceux d'un ensemble $E_2$ contenu dans $R_2$. $P_1$ et $P_2$ étant deux points correspondants, nous dirons que cette correspondance entre $E_1$ et $E_2$ est *topologique* si, étant donné un voisinage quelconque $V(P_2)$, on peut trouver un voisinage $V(P_1)$ tel que l'image de $E_1.V(P_1)$ (¹) soit contenue dans $E_2.V(P_2)$, et réciproquement.

Nous dirons que deux espaces topologiques formés des mêmes points, mais de voisinages différents, sont *identiques*, si la correspondance identique entre les deux espaces est *topologique*. Par exemple, un *domaine* D *du plan* (IV) forme deux espaces topologiques identiques, que l'on prenne comme voisinages de P les intérieurs de tous les carrés de centre P contenus dans D, ou les intérieurs

---

(¹) Lire : les points communs à $E_1$ et à $V(P_1)$.

des cercles de centre P contenus dans D. En effet, dans tout carré de centre P, il y a un cercle de centre P, et inversement ([1]).

Un espace topologique est dit *connexe* si tout point P peut être atteint à partir de l'un d'eux A au moyen d'une chaîne de voisinages en nombre fini $V(A)$, $V(M_1)$, ..., $V(M_n)$, $V(P)$, deux voisinages consécutifs ayant au moins un point commun. Il est équivalent de dire que l'espace topologique n'est pas formé de la réunion de deux espaces topologiques.

Un point P d'un espace topologique est dit *point limite* d'une suite infinie de points si tout voisinage de P contient des points de la suite. Lorsque toute suite infinie de points d'un espace topologique a au moins un point limite, on dit que cet espace est *fermé*.

Surface. — Un espace topologique connexe dont chaque voisinage est en correspondance *topologique* avec l'intérieur d'un cercle est une « *surface* » ou *variété à deux dimensions*. Ainsi, le plan tout entier y compris le point à l'infini, un domaine du plan, sont des « surfaces ».

Une *rétrosection* d'une surface est un ensemble en correspondance topologique avec une circonférence, celle-ci étant considérée comme ensemble de la « surface » formée par le plan ([2]).

Un *arc* a même définition, la circonférence étant remplacée par un segment de droite AB, extrémités comprises. A ces dernières correspondent des points P et Q de la surface. Décrire l'arc de P vers Q, c'est considérer les points de cet arc dans l'ordre où leurs images sont rencontrées en allant de A vers B.

Un *arc ouvert* est un ensemble en correspondance topologique avec un intervalle rectiligne (extrémités non comprises).

Si de plus, à toute suite de points de l'intervalle tendant vers une des extrémités correspond sur la surface une suite n'ayant aucun point limite, l'arc ouvert est appelé *section transverse*. (Il n'y a pas de section transverse sur une surface fermée.)

Deux points d'une surface appartenant à un même voisinage peuvent être joints au moyen d'un arc : on obtient ce dernier au moyen de l'image plane du voisinage. Deux points quelconques d'une surface pouvant être joints au

---

([1]) Dans ce paragraphe nous entendrons par *domaine du plan* l'espace topologique qui lui est ainsi attaché.

([2]) Il revient au même de considérer la circonférence comme un espace topologique, les voisinages d'un point étant les arcs ouverts qui contiennent ce point.

moyen d'une chaîne de voisinages en nombre fini, ils peuvent donc l'être aussi par une chaîne d'arcs, de laquelle on peut déduire un arc joignant les deux points.

On dit qu'une surface est *simplement connexe* si elle peut être mise en correspondance topologique avec l'intérieur d'un cercle; qu'elle est « *schlichtartig* » si elle peut être mise en correspondance topologique avec un domaine du plan.

Domaine situé sur une surface. — Considérons sur une surface S un ensemble D dont tout point possède un voisinage contenu dans D. Cet ensemble constitue un espace topologique à condition de ne conserver, comme voisinages des points de D, que ceux qui sont contenus dans D. Si cet espace est connexe, c'est une « surface » que nous nommerons *domaine de* S. Par exemple tout voisinage de S est un domaine simplement connexe de S.

Un point dont tout voisinage contient des points de D et des points n'appartenant pas à D est un *point frontière du domaine*. Supposons D différent de S. Il y a alors au moins un point frontière. En effet joignons au moyen d'un arc un point P de D à un point Q de S n'appartenant pas à D; en décrivant cet arc à partir de P, le premier point rencontré qui n'appartient pas à D est un point frontière. L'ensemble des points frontières forme la frontière.

Une *transversale* de D est un arc de S dont tous les points sauf les extrémités appartiennent à D. Les définitions sont d'accord avec celles qui sont ordinairement employées pour les domaines du plan.

Remarquons enfin que les points communs à deux domaines constituent évidemment un ensemble de domaines.

Citons encore quelques propriétés des surfaces.

Théorème I. — *Étant donné un arc (ou un arc ouvert) $\gamma$ d'une surface* S, *il existe un domaine simplement connexe de* S *qui contient $\gamma$. Autrement dit la correspondance topologique qui, par définition, existe entre l'arc $\gamma$ et un segment ectiligne du plan peut être étendue à tout un domaine de la surface contenant l'arc.*

Le théorème est évident pour un arc situé en entier dans un voisinage. Étendons-le d'abord à un arc $\alpha = \widehat{ABC}$ tel que $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$ soient contenus respectivement dans des voisinages $V_1$ et $V_2$. Appliquons aux images planes de $V_1$ et $V_2$ les procédés de la topologie plane [B. de Kerekjartó ($a$)] : traçons dans $V_1$ une rétrosection $f$, ne rencontrant $\alpha$ qu'en B et entourant $\widehat{AB}$. Prenons sur $f$ un arc ouvert $f_1$ contenant B et contenu dans $V_2$. Réunissons les extrémités de $f_1$ par un arc ouvert $f_2$ situé dans $V_2$, ne rencontrant ni $f$ ni $\alpha$. Les arcs $f - f_1$ et $f_2$ limitent le domaine cherché.

Le théorème s'étend alors à un arc (ou un arc ouvert) quelconque $\gamma$. En effet, chaque point de $\gamma$, sauf ses extrémités s'il y en a, est intérieur à un arc de $\gamma$ contenu dans un voisinage. Or $\gamma$ a, par définition, un segment rectiligne (ou un intervalle ouvert) pour image topologique. Le lemme de Borel-Lebesgue appliqué à ce segment permet de recouvrir $\gamma$ au moyen d'un nombre fini (ou d'une infinité dénombrable) d'arcs, contenus chacun dans un voisinage, et tels que deux arcs consécutifs aient une portion commune.

On en conclut immédiatement le

THÉORÈME II. — *Une surface* S *diminuée d'un arc constitue une nouvelle surface. On exprime ce fait en disant qu'un arc tracé sur une surface ne la partage pas.* (Il n'en est pas de même pour un arc ouvert.)

Du théorème I on déduit aisément le

THÉORÈME III. — *Considérons sur la surface* S *une rétrosection (ou une section transverse)* $\mathcal{C}$. *De trois points distincts* A, B, C *n'appartenant pas à* $\mathcal{C}$, *deux peuvent toujours être joints par un arc ne rencontrant pas* $\mathcal{C}$.

En effet, joignons un point O de $\mathcal{C}$ aux trois points A, B, C par des arcs. Sur $\widehat{AO}$ est un premier point P appartenant à $\mathcal{C}$, de même sur $\widehat{BO}$ est un premier point Q et sur $\widehat{CO}$ un premier point R.

Soit $\gamma$ un arc de $\mathcal{C}$ qui contient les points P, Q, R. D'après le théorème I, il

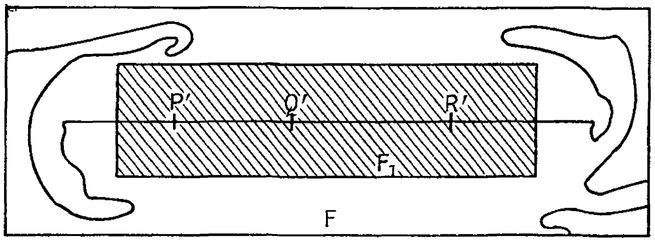


Fig 1.

existe un domaine simplement connexe contenant $\gamma$. Représentons-le topologiquement sur un rectangle F, l'arc $\gamma$ correspondant à un segment parallèle à deux côtés de F. On peut tracer dans F un nouveau rectangle $F_1$ qui entoure les images P′, Q′, R′ de P, Q, R sans contenir ni à l'intérieur ni sur son périmètre un point image de $\mathcal{C} - \gamma$. Les images des arcs AP, BQ, CR rencontrent chacune le périmètre de $F_1$ en un premier point. Deux de ces trois points peuvent être joints par le périmètre du rectangle sans rencontrer l'image de $\gamma$. On en conclut le théorème annoncé.

Une conséquence immédiate de ce théorème est le suivant :

Théorème IV. — *Une surface* S *diminuée d'une rétrosection* (*ou d'une section transverse*) $\mathcal{C}$ *constitue un ou deux domaines. Dans le premier cas, on dit que* $\mathcal{C}$ *ne partage pas* S ; *dans le deuxième cas,* $\mathcal{C}$ *partage* S *en deux surfaces.*

Si la surface est « schlichtartig », toute rétrosection la partage (théorème de Jordan); si de plus elle est simplement connexe, toute section transverse la partage aussi (puisque la propriété est vraie pour un cercle) ([1]).

Surface de Riemann. — Soient S une surface, $\{V\}$ le système de ses voisinages, $\{T[V]\}$ le système des représentations topologiques des voisinages sur des cercles. Considérons deux de ces voisinages, $V_1$ et $V_2$, contenant un domaine commun G. Soient $G'_1$ et $G'_2$ les domaines du plan images de G données par les représentations $T[V_1]$ et $T[V_2]$. *Si la correspondance ainsi définie entre les domaines* $G'_1$ *et* $G'_2$ *est toujours conforme et conserve le sens d'orientation, nous dirons que la surface* S *et le système des représentations* $T[V]$ *constituent une surface de Riemann.*

Ainsi un domaine du plan avec cercles comme voisinages, et correspondance identique pour chaque voisinage, répond à la définition ([2]).

---

([1]) D'après T. Radó (*a*), si une surface peut être recouverte au moyen d'une infinité dénombrable de voisinages, elle est triangulable, mais ce n'est pas toujours le cas (exemple de Prüfer cité par T. Radó). Pour une surface triangulable, on démontre que si toute section transverse (rétrosection) la partage, elle est simplement connexe (« schlichtartig ») [*voir* H. Weyl (*a*)].

([2]) Considérons une fonction analytique. Prenons comme *points* les éléments de la fonction (réguliers, polaires, algébriques); comme voisinages d'un élément, l'ensemble des éléments contenus dans un cercle concentrique et de rayon au plus égal au cercle de convergence de l'élément (cercles à un ou plusieurs feuillets); enfin comme représentation de chaque voisinage, $z' = z$ pour un élément régulier, $z' = \frac{1}{z}$ pour un élément polaire, et $z' = (z - a)^{\frac{1}{p}}$ ou $z' = \frac{1}{z^{\frac{1}{p}}}$ pour un élément algébrique. Nous venons de définir une surface de Riemann au sens du texte.

On peut remarquer que tout domaine d'une surface de Riemann est encore une surface de Riemann.

*Correspondance conforme entre deux surfaces de Riemann* $F_1$ *et* $F_2$. — C'est une correspondance topologique jouissant de la propriété suivante : si un domaine $G_1$ de $F_1$ est contenu dans un voisinage $V_1$, et si son image $G_2$ est contenue dans $V_2$, la correspondance entre les deux domaines plans $G'_1$ et $G'_2$ donnés par $T[V_1]$ et $T[V_2]$ est conforme et directe.

Deux surfaces de Riemann qui seraient identiques si on les considérait comme de simples surfaces seront des *surfaces de Riemann identiques* si la correspondance identique entre elles deux est conforme.

THÉORÈME V. — *Toute surface de Riemann simplement connexe peut être représentée conformément sur l'intérieur d'un cercle* [c'est un cas particulier du théorème de l'uniformisation (¹)]. [*Voir* une démonstration rapide dans C. Carathéodory (*d*), p. 131.]

THÉORÈME VI. — *Toute surface de Riemann « schlichtartig » peut être représentée conformément sur un domaine du plan* [*voir* P. Kœbe (*a*) (²)].

Voici la forme particulière de ce théorème que nous utiliserons plus loin.

THÉORÈME VI *bis*. — *Supposons qu'une rétrosection* $\gamma$ *limite sur une surface* S *un domaine « schlichtartig »* D. *On peut alors représenter conformément* D *sur un domaine* H *avec les propriétés suivantes :* H *est intérieur à un cercle* C, *et il existe une correspondance biunivoque entre* C *et* $\gamma$, *telle qu'à toute suite de points de* D *qui tend vers un point de* $\gamma$ *corresponde une suite de points de* H *qui tende vers le point correspondant de* C, *et inversement.*

DOMAINE DONT LA FRONTIÈRE EST UN ARC OUVERT. — Supposons que la frontière d'un domaine D situé sur une surface S soit un arc ouvert $\gamma$. D'après le théo-

---

(¹) La théorie générale de l'uniformisation peut être établie, comme le fait H. Weyl (*a*), pour les surfaces triangulables [c'est-à-dire recouvrables par une infinité dénombrable de voisinages; *voir* (¹), p. 11]. En utilisant cette théorie, T. Radó (*a*) montre que toute surface de Riemann est triangulable : par conséquent la théorie de l'uniformisation s'applique à toute surface de Riemann.

(²) En réalité, P. Kœbe démontre le théorème pour une surface de Riemann étalée sur un plan. Mais toute surface de Riemann peut être représentée conformément sur une surface étalée sur un plan [*voir* H. WEYL (*a*)].

rème I, nous pouvons trouver dans S un domaine E contenant $\gamma$ et simplement connexe. $\gamma$ est alors une section transverse de E et partage E en deux domaines $E_1$ et $E_2$. L'un des deux contient certainement des points de D ; on en conclut que *des deux domaines* $E_1$ *et* $E_2$, *ou bien l'un est contenu dans* D, *et l'autre n'a aucun point dans* D, *ou bien ils sont tous deux contenus dans* D (¹).

Supposons maintenant D simplement connexe. D'après le théorème V, nous pouvons représenter conformément D sur l'intérieur $D'$ d'un cercle $C'$. *Étudions la correspondance entre les frontières aux points de* $\gamma$. Pour cela, représentons conformément E sur l'intérieur d'un cercle $\overline{C}$. Soient $\overline{E_1}$, $\overline{E_2}$, $\overline{\gamma}$ les images de $E_1$, $E_2$, $\gamma$.

*Supposons d'abord que* D *contienne* $E_1$, *mais aucun point de* $E_2$. Nous avons alors une représentation conforme de $\overline{E_1}$ sur un domaine $E'_1$ contenu dans $D'$ telle qu'à toute suite de points de $\overline{E_1}$ tendant vers un point de $\overline{\gamma}$ corresponde une suite tendant vers $C'$. On sait alors [C. Carathéodory ($a$)] qu'à $\overline{\gamma}$ correspond biunivoquement un arc ouvert $\gamma'_1$ de $C'$, de sorte qu'à toute suite tendant vers un point de $\overline{\gamma}$ corresponde une suite tendant vers le point correspondant de $\gamma'_1$, et inversement. *Si donc une suite de points de* D *tend vers un point de* $\gamma$, elle est, à partir d'un certain rang, intérieure à $E_1$ ; il lui correspond dans $\overline{E_1}$ une suite qui tend vers le point correspondant de $\overline{\gamma}$, et, *dans* $D'$, *une suite qui tend vers le point correspondant de* $\gamma'_1$. Inversement, si une suite de $D'$ tend vers

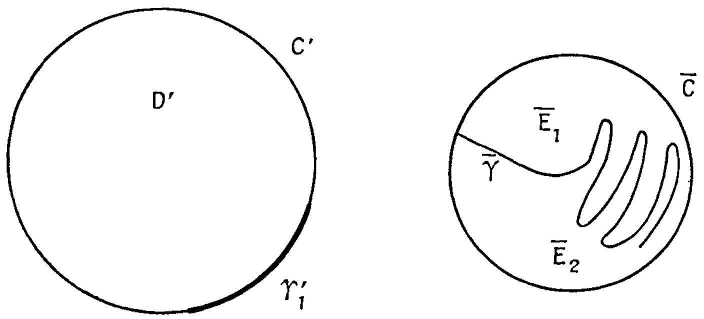



Fig. 2.

un point de $\gamma'_1$, elle est, à partir d'un certain rang, intérieure à $E'_1$, et par suite il lui correspond dans D une suite qui tend vers le point correspondant de $\gamma$.

(¹) On voit aisément que $\gamma$ partage S dans le premier cas et ne la partage pas dans le second.

*Dans le cas où les domaines* $E_1$ *et* $E_2$ *appartiennent à* D, on démontrerait de même qu'il existe deux arcs ouverts $\gamma'_1$ et $\gamma'_2$ de C' dont chacun est en correspondance biunivoque avec $\gamma$, de sorte que :

1° *Si une suite de points de* D *tend vers un point de* $\gamma$, *la suite correspondante dans* D' *ne peut avoir comme points limites que les points correspondants* $\gamma'_1$ *et* $\gamma'_2$ ;

2° *Si une suite de points de* D' *a pour point limite un point de* $\gamma'_1$ (*ou de* $\gamma'_2$), *la suite correspondante dans* D *tend vers le point correspondant de* $\gamma$.

Arc ouvert isolé dans la frontière d'un domaine. — Supposons que la frontière F d'un domaine D situé sur une surface S contienne un arc ouvert $\gamma$. Si à tout point de $\gamma$ appartient un voisinage qui ne contient aucun point de $F - \gamma$, nous dirons que $\gamma$ est un arc ouvert *isolé*.

Dans ce cas, $F - \gamma$ est un ensemble fermé ; $S - (F - \gamma)$ est un ensemble de domaines disjoints dont l'un, H, contient D et a pour frontière $F - \gamma$; de plus $\gamma$ est un arc ouvert de H. Par conséquent D peut être considéré comme un domaine de H dont la frontière serait $\gamma$. Les résultats obtenus ci-dessus s'appliquent donc à D.

## LE PROLONGEMENT DES SURFACES DE RIEMANN.

La notion de prolongement a été introduite par T. Radó (*b*) à peu près dans les termes suivants :

« Soit F une surface de Riemann. *Nous dirons qu'elle est prolongeable si l'on peut la représenter conformément sur un domaine* F' *situé sur une autre surface de Riemann* $\mathcal{F}$, *on suppose que* F' *est différente de* $\mathcal{F}$.

» Tout d'abord, si F est prolongeable, F' a sur $\mathcal{F}$ un point frontière P; en utilisant l'image sur un cercle d'un voisinage de P, on peut trouver une suite de points de F' ayant P comme seul point limite sur $\mathcal{F}$, et par conséquent sans point limite sur F' : la surface F n'est pas fermée. *Une surface fermée n'est donc pas prolongeable.*

» Si F n'est pas fermée et est par exemple « schlichtartig », elle est prolongeable par le plan tout entier (c'est-à-dire le plan y compris le point à l'infini). Demandons-nous s'il existe des surfaces de Riemann non fermées qui ne soient pas prolongeables. Au point de vue de la théorie des fonctions, la question s'énonce ainsi : existe-t-il en dehors du cas algébrique d'autres fonctions analytiques qui soient complètes, c'est-à-dire telles que leurs éléments ne puissent être mis en correspondance biunivoque et conforme avec un système partiel d'éléments appartenant à une autre fonction analytique. »

T. Radó répond à la question en donnant un exemple de surface non fermée qui n'est pas prolongeable. Le sujet a été repris par S. Bochner (*a*). Celui-ci démontre que toute surface prolongeable admet un prolongement complet, c'est-à-dire qui n'est plus prolongeable. Sa démonstration fait appel à la bien-ordonnance du continu.

*La notion d'ensemble du type maximum permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Riemann soit prolongeable.* Pour l'énoncer simplement, introduisons quelques définitions :

Étant donnée une surface de Riemann F, nommons *rétrosection de l'espèce* Γ toute rétrosection qui partage la surface en deux autres dont l'une au moins est « *schlichtartig* » et multiplement connexe.

Un domaine D de la surface F sera dit *de l'espèce* $\mathcal{D}$ s'il jouit des deux propriétés suivantes :

1° D *est simplement connexe ;*

2° *La frontière de* D *est formée de sections transverses* ISOLÉES $t_i$, *en nombre fini ou en infinité dénombrable.*

Représentons conformément D sur l'intérieur d'un cercle C'. D'après l'étude faite ci-dessus, à chaque $t_i$ correspondent un ou deux arcs ouverts de C'.

*Si l'ensemble de ces arcs est du type maximum, nous dirons que le domaine de l'espèce* $\mathcal{D}$ *est lui-même du type maximum.*

Ces définitions posées :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Riemann soit prolongeable est qu'elle contienne une rétrosection de l'espèce* Γ [1], *ou bien un domaine de l'espèce* $\mathcal{D}$ *qui ne soit pas du type maximum.*

---

[1] Si une surface F possède une rétrosection de l'espèce Γ, elle possède aussi un élément de frontière de première espèce, au sens de B. de Kerekjartó (*a*). Considérons une suite de rétrosections $C_i$, jouissant des propriétés suivantes :

1° $C_i$ partage la surface en deux autres $F_i$ et $\overline{F}_i$.

2° Les $F_i$ forment une suite monotone non croissante et tendant vers zéro, c'est-à-dire

*La condition est nécessaire.* — Nous pouvons supposer que la surface de Riemann F est un domaine situé sur une autre surface $\mathcal{F}$. Il existe alors au moins un point P de $\mathcal{F}$ qui est point frontière de ce domaine. En tant que point de la surface $\mathcal{F}$, P possède sur cette surface un voisinage V(P). Soit V′(P′) l'image plane de ce voisinage sur un cercle; traçons-y un cercle C′ entourant P′. Il correspond à C′ une rétrosection $\mathcal{C}$ de la surface $\mathcal{F}$ limitant un domaine simplement connexe U contenant P. Les points de F contenus dans U

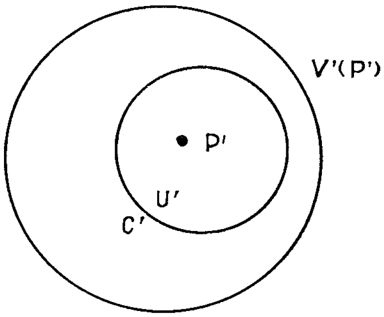



Fig. 3.

forment un nombre fini ou une infinité dénombrable de domaines de F. Soit D l'un de ces domaines; sa frontière appartient à F et est constituée par des points de $\mathcal{C}$. Or, les points de $\mathcal{C}$ situés dans F forment des arcs ouverts de $\mathcal{C}$ qui sont en même temps des transversales de F. La frontière de D est donc constituée par certaines de ces transversales; ce sont des arcs *isolés* de la frontière; nous les désignons par $t_i$. Leurs images sur C′ sont des arcs ouverts $\delta'_i$. Le domaine D a dans U′ une image $d$, et les $\delta'_i$ sont des arcs libres de la frontière de $d$.

*Premier cas.* — Si $d$ est multiplement connexe, nous pouvons y tracer une

---

que $F_i$ est contenue dans $F_{i-1}$, et que, pour $i$ assez grand, tout point de F finit par être extérieur à $F_i$.

3° $C_{i-1}$ est située dans $F_i$.

On dit qu'une telle suite définit *un élément de frontière*. Si, à partir d'un certain rang, les $F_i$ sont « schlichtartig », on dit que l'élément est de première espèce, sinon il est dit de deuxième espèce.

Comme je l'ai fait remarquer dans une Note aux *Comptes rendus* ($b$), une surface qui n'a que des éléments de deuxième espèce admet un modèle topologique constitué de deux disques plans égaux percés de trous circulaires en nombre fini ou non et qui sont accolés le long des bords des trous. Au contraire, pour obtenir le modèle topologique d'une surface ayant des éléments de première espèce, il faut retirer de l'un des modèles précédents un ensemble fermé de points.

rétrosection contenant à son intérieur une portion de *d schlichtartig* et multiplement connexe; c'est l'image d'une rétrosection de l'espèce $\Gamma$ située sur la surface F.

*Deuxième cas.* — Si au contraire $d$ est simplement connexe, $d$ est l'image d'un domaine de l'espèce $\mathfrak{D}$ sur la surface F. Représentons conformément sur $d$ le cercle unité C d'un plan $z$ au moyen d'une fonction $w = f(z)$ : les arcs $\delta_i'$ correspondent à des arcs $\delta_i$ du cercle C; ces derniers forment un ensemble $\Delta$. La fonction $\frac{f(z)}{f'(0)}$ appartient à la famille $\Phi_\Delta$, et ne peut être $z$, puisque $d$ a des points frontières intérieurs à C'. *d est donc un domaine de l'espèce $\mathfrak{D}$ qui n'est pas du type maximum.*

*La condition est suffisante.*

Lemme. — *Soient* F *une surface de Riemann*, $F_1$ *un domaine de* F, $\gamma$ *la frontière de* $F_1$. *Soient* $\overline{F}$ *une autre surface de Riemann*, $\overline{F_1}$ *un domaine de* $\overline{F}$, $\overline{\gamma}$ *la frontière de* $\overline{F}_1$. *Supposons que* $F_1$ *et* $\overline{F_1}$ *soient en correspondance conforme, et que, pour un point* P *de* $\gamma$ *et un point* $\overline{P}$ *de* $\overline{\gamma}$, *on puisse toujours trouver des voisinages sans points communs. Il existe alors une surface de Riemann* $\mathfrak{F}$ *qui prolonge à la fois* F *et* $\overline{F}$. *Elle est définie comme il suit : ses points seront de trois sortes :*

1° *Ceux de* $F - F_1$ ;

2° *Ceux de* $\overline{F} - \overline{F_1}$ ;

3° *Les couples formés d'un point de* $F_1$ *et de son image dans* $\overline{F_1}$.

*Les voisinages seront, pour un point de la première ou de la troisième sorte, ceux de* F ; *pour un point de la deuxième sorte, par exemple ceux de* $\overline{F}$.

En effet, ces voisinages satisfont évidemment aux deux premières conditions de la définition d'un espace topologique. La troisième condition est évidente, sauf si P est sur $\gamma$ et Q sur $\overline{\gamma}$; dans ce dernier cas, elle est vraie par hypothèse.

$\mathfrak{F}$ est donc une surface. Le fait que c'est une surface de Riemann résulte immédiatement de ce que $F_1$ et $\overline{F_1}$ sont par hypothèse en correspondance conforme. La surface $\mathfrak{F}$ constitue alors un prolongement pour F aussi bien que pour $\overline{F}$.

*Arrivons à la démonstration du fait que la condition est suffisante.*

1° Supposons qu'il existe une rétrosection $\gamma$ de l'espèce $\Gamma$, limitant une portion

« schlichtartig » $F_1$ de la surface F. D'après le théorème VI *bis*, représentons $F_1$ sur un domaine plan $\overline{F_1}$ intérieur à un cercle C′ en correspondance avec $\gamma$.

Considérons le domaine simplement connexe $\overline{F}$ constitué par l'intérieur de C′. La frontière de $F_1$ sur F est constituée par $\gamma$. Étant donné un point P de $\gamma$, son image P′ sur C′, et un cercle $\varkappa$ de centre P′, il existe un voisinage V(P) tel que l'image de $F_1 . V(P)$ soit entièrement contenue dans $\varkappa$. Si donc Q est un point frontière de $\overline{F_1}$ considéré comme domaine de $\overline{F}$, il existe un voisinage de P et un voisinage de Q sans points communs. *C'est précisément le cas du lemme, les notations étant les mêmes.*

2° Supposons qu'il existe sur F un domaine de l'espèce $\mathcal{D}$ qui ne soit pas du type maximum, limité par des sections transverses $t_i$; appelons-le $F_1$. Représentons conformément $F_1$ sur le cercle unité C. Les images des $t_i$ sur C forment un ensemble $\Delta$ d'intervalles $\delta_i$ qui n'est pas du type maximum. Il existe une fonction de la famille $\Phi_\Delta$ qui représente l'intérieur de C sur un domaine $\overline{F_1}$ intérieur à un cercle C′, dont la frontière comprend des arcs $\delta'_i$ du cercle C′, images des $\delta_i$, et qui possède des points frontières intérieurs à C′. Le raisonnement s'achève comme au 1°, avec les mêmes notations, sauf que $\gamma$ est remplacé par les $t_i$, et qu'un point P de $t_i$ peut avoir deux images sur C′.

Remarquons enfin qu'on peut aisément prolonger une surface de Riemann par une autre ne contenant plus de contour de l'espèce Γ (1), mais il semble plus difficile de la prolonger par une autre dont tous les domaines de l'espèce $\mathcal{D}$ soient du type maximum.

**3. Contenu du Mémoire.** — Dans le chapitre préliminaire se trouvent sous une forme générale les définitions et propriétés de l'intégrale de Stieltjès uti-

---

(1) Pour cela, traçons sur la surface F un système de rétrosections disjointes $\mathcal{C}_i$ la rendant « schlichtartig ». Et, appliquant le théorème VI, représentons conformément $F - \Sigma\mathcal{C}_i$ sur un domaine du plan contenant le point à l'infini. A chaque $\mathcal{C}_i$ correspondent deux éléments de frontière de D; soient $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}'_i$. Le plan se trouve partagé en domaines par ces éléments de frontière. Soit D celui de ces domaines qui contient l'image de $F - \Sigma\mathcal{C}_i$.

Définissons une surface de Riemann dont les points sont :

1° Ceux du domaine D, avec mêmes voisinages que pour la « surface » constituée par D.

2° Ceux des rétrosections $\mathcal{C}_i$, avec mêmes voisinages que sur la surface F, à condition de remplacer les points de $F - \Sigma\mathcal{C}_i$ par leurs images dans D.

La surface ainsi définie prolonge F ou est identique à F et ne possède plus de contour de l'espèce Γ. [J'ai indiqué cette méthode dans une Note aux *Comptes rendus* (*a*). Certains résultats indiqués dans cette Note sont faux.]

lisées au cours du Mémoire. Je définis d'abord la mesure d'un ensemble de l'axe réel par rapport à une fonction monotone $\lambda(t)$, et les ensembles mesurables par rapport à cette fonction; en particulier, les ensembles de Borel (II) sont mesurables par rapport à $\lambda$ quel que soit $\lambda$. L'intégrale $\int_E f(t)\,d\lambda(t)$ est alors définie au moyen de la mesure par rapport à $\lambda$; il suffit par exemple que E soit un ensemble de Borel et $f(t)$ une fonction de Baire.

Le Chapitre I contient une étude topologique de la frontière des domaines étoilés, ou étoiles. C'est une application de la théorie des bouts premiers de la frontière d'un domaine [C. Carathéodory $(a)$]. Ce chapitre n'est pas absolument indispensable pour la suite.

Après un rappel des propriétés connues des fonctions étoilées [R. Nevanlinna, W. Seidel $(a)$], le Chapitre II contient plusieurs propriétés plus ou moins nouvelles de ces fonctions. La correspondance biunivoque entre fonctions monotones et fonctions étoilées y est établie; après vient une formule fondamentale pour la suite; elle donne le logarithme du module d'une fonction étoilée $f(z)$ en un point du cercle unité, sous forme d'un potentiel logarithmique dû à des masses dont la répartition sur ce cercle est celle de la variation d'argument de $f(z)$.

Puis se trouve une curieuse propriété relative à la représentation conforme de deux étoiles l'une sur l'autre. Dans le cas où la frontière de chaque étoile se réduit à une courbe de Jordan, elle s'énonce ainsi : supposons que les origines se correspondent, et que la dérivée à l'origine soit égale à un; si $\rho$ et $\theta$ sont les coordonnées polaires d'un point frontière de l'une des étoiles, $\rho'$ et $\theta'$ celles du point correspondant de l'autre, on a

$$\int \log\rho \, d\theta' = \int \log\rho' \, d\theta.$$

C'est ici qu'est utilisée l'interversion de deux intégrations successives au sens de Stieltjès.

Au Chapitre III se trouve d'abord une définition des ensembles du type maximum un peu différente de celle que nous avons donnée ci-dessus. On suppose qu'il s'agit uniquement de fonctions étoilées, mais l'ensemble $\Delta$ situé sur la circonférence unité n'est plus forcément un ensemble d'intervalles. Au Chapitre V, on démontrera l'équivalence des deux définitions, lorsque $\Delta$ est un ensemble d'intervalles.

La famille F comprend les fonctions étoilées pour $|z| < 1$, avec $f(0) = 0$,

$f'(0)=1$; la famille $F_\Delta$ comprend les fonctions de F dont l'accroissement d'argument sur $\Delta$ est $2\pi$. Comme conclusion du dernier théorème du Chapitre II, la borne supérieure dans le cercle unité du module d'une fonction de $F_\Delta$ est toujours supérieure à la borne inférieure sur $\Delta$ du module d'une fonction de F. J'en déduis une condition suffisante pour que $\Delta$ soit du type maximum : il suffit qu'il existe dans la famille $F_\Delta$ des fonctions dont la borne supérieure du module soit inférieure à $1+\varepsilon$, quel que soit le nombre positif $\varepsilon$. On verra au Chapitre VI que pour un ensemble d'intervalles, la condition est aussi nécessaire.

Au Chapitre IV, grâce à la condition précédente, et à la représentation du logarithme du module par une intégrale de Stieltjès, je trouve une autre condition suffisante pour qu'un ensemble soit du type maximum; cette condition porte directement sur la structure de l'ensemble $\Delta$. Je forme alors un exemple d'un ensemble d'intervalles qui vérifie cette condition, et dont le complémentaire n'est pas de mesure nulle.

Le Chapitre V contient d'abord une solution du problème de la représentation conforme des domaines à connexion infinie. En utilisant cette solution, je montre que lorsque la famille $\Phi_\Delta$ déjà définie au paragraphe **1** ne contient pas d'autre fonction étoilée que $z$, elle ne contient que $z$. Il en résulte l'équivalence entre la définition des ensembles du type maximum donnée au Chapitre III, et celle du début de l'Introduction. La portée du résultat du Chapitre IV se trouve grandement accrue. Ceci permet de montrer que l'hypothèse de P. Kœbe (*b*) sur les « minimale Schlitzbereiche » est fausse [*voir* (¹), p. 6, § **1**].

Enfin, dans le sixième Chapitre, je poursuis l'étude des familles F et $F_\Delta$ dans le cas d'un ensemble d'intervalles. Je montre en particulier qu'un ensemble $\Delta$ d'intervalles $\delta$, tel que la série $\dfrac{1}{\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{\delta_i}}$ converge n'est pas du type maximum, et que l'ensemble des intervalles $\delta_i$ donné par l'extrémale-$\Delta$ a alors un complémentaire de mesure nulle.

## CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

### L'INTÉGRALE DE STIELTJÈS.

**1. Mesure d'un ensemble par rapport à une fonction monotone. Correspondance biunivoque entre fonctions monotones et fonctions d'ensemble de points**

**d'un axe complètement additives.** — Soit $\lambda(t)$ une fonction monotone non décroissante et bornée. Il sera commode de la supposer définie dans un intervalle à demi ouvert I : $a \leqq t < b$, et aussi pour la valeur $a - 0$. Ceci veut dire que si $\lambda(t)$ n'est pas connue pour des valeurs de $t$ inférieures à $a$, nous supposerons que la quantité $\lambda(a - 0)$ est donnée, et satisfait à la condition

$$\lambda(a - 0) < \lambda(a).$$

A la fonction $l = \lambda(t)$, on peut faire correspondre un ensemble de points du plan que l'on appelle son *graphe* (*voir* C. Carathéodory ($b$), § 157). Sur une parallèle à l'axe des $l$ d'abscisse $t$ contenue dans I, les points du graphe sont ceux dont les ordonnées $l$ satisfont à

$$\lambda(t - 0) < l \leqq \lambda(t - 0).$$

Considérons un ensemble E de l'intervalle I. Il lui correspond un certain ensemble de points du graphe. Les ordonnées de ces points forment un ensemble $\overline{\mathrm{E}}$ que nous nommerons *l'image de* E *donnée par la fonction* $\lambda(t)$.

*On dit qu'un ensemble* E *est mesurable-*$\lambda$ *lorsque son image* $\overline{\mathrm{E}}$ *est mesurable au sens ordinaire, et la mesure-*$\lambda$ *de l'ensemble* E *est, par définition, la mesure ordinaire de son image, et s'écrit* $m_\lambda(\mathrm{E})$ ([1]).

On a en particulier, pour un intervalle à demi ouvert $\alpha \leqq t < \beta$,

$$m_\lambda(\alpha \leqq t < \beta) = \lambda(\beta - 0) - \lambda(\alpha - 0);$$

pour un point,

$$m_\lambda(t = \alpha) = \lambda(\alpha + 0) - \lambda(\alpha - 0);$$

pour un intervalle ouvert,

$$m_\lambda(\alpha < t < \beta) = \lambda(\beta - 0) - \lambda(\alpha + 0);$$

pour l'intervalle fermé correspondant,

$$m_\lambda(\alpha \leqq t \leqq \beta) = \lambda(\beta + 0) - \lambda(\alpha - 0).$$

On voit que la mesure d'un point est nulle, sauf pour les points de discontinuité de $\lambda(t)$ qui, comme on sait, sont au plus en infinité dénombrable. En particulier, si $\lambda(t)$ est continue, tout point a une mesure nulle, et la mesure d'un intervalle est unique, que celui-ci soit ouvert ou fermé.

On démontre que la fonction d'ensemble $m_\lambda(\mathrm{E})$ est complètement additive

---

([1]) On peut aussi définir la mesure-$\lambda$ sans s'appuyer sur la mesure ordinaire, cette dernière correspondant au cas particulier $\lambda(t) = t$. *Voir* H. Lebesgue ($a$).

[*voir*, pour les démonstrations, H. Lebesgue $(a)$]; de plus, si E est mesurable-$\lambda$, son complémentaire $I - E$ l'est aussi, et si un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles sont mesurables-$\lambda$, il en est de même de leur intersection (ou ensemble de leurs points communs). En particulier, tout *ensemble de Borel* (terminologie II) est mesurable-$\lambda$, car on peut l'obtenir à partir d'intervalles au moyen des deux opérations précédentes, répétées transfiniment. Ainsi la famille des ensembles mesurables-$\lambda$ varie avec la fonction $\lambda(t)$, mais comprend toujours les ensembles de Borel (¹).

On ne modifie évidemment en rien la mesure-$\lambda$ si l'on change la valeur de $\lambda$ en ses points de discontinuité sans modifier $\lambda(a - 0)$, ou si l'on ajoute une constante à $\lambda(t)$. Nous dirons que les fonctions $\lambda(t)$ ainsi obtenues sont *équivalentes*.

Inversement, donnons-nous à priori une fonction d'ensemble de points de I, $\nu(E)$, complètement additive et jamais négative. Supposons de plus que si $\nu(E)$ est définie pour un ensemble E, elle l'est aussi pour son complémentaire $I - E$, et que si elle est définie pour des ensembles en nombre fini ou en infinité dénombrable, elle l'est aussi pour leur produit. Considérons la fonction monotone définie par

$$\lambda(t_0) = \nu(a < t \leq t_0), \qquad \lambda(a - 0) = \lambda(0) = 0.$$

On a alors

$$m_\lambda(E) = \nu(E)$$

pour tous les ensembles E pour lesquels $m_\lambda$ et $\nu$ sont simultanément définies. Toutes les fonctions *équivalentes* à $\lambda(t)$ conduisent à une mesure identique.

La mesure-$\lambda$ d'un ensemble E s'appelle aussi l'*accroissement* de $\lambda(t)$ sur l'ensemble E, et se note alors

$$\mathbf{A}[E; \lambda(t)].$$

Soit $E_1$ un sous-ensemble de E; si l'on a

$$m_\lambda(E) = m_\lambda(E_1),$$

on dira que tout l'accroissement de $\lambda$ sur l'ensemble E est concentré sur $E_1$. On

---

(¹) Dans le cas particulier où $\lambda(t)$ est *absolument continue*, la mesure-$\lambda$ possède comme expression analytique

$$m_\lambda(E) = \int_E \lambda'(t)\,dt,$$

où $\lambda'(t)$ est la *presque dérivée* de $\lambda(t)$, c'est-à-dire est égale à la dérivée de $\lambda(t)$ en tout point où cette dérivée existe (ce qui a lieu presque partout), et quelconque ailleurs.

a alors

$$m_\lambda(\mathrm{E} - \mathrm{E}_1) = m_\lambda(\mathrm{E}) - m_\lambda(\mathrm{E}_1) = 0.$$

Dans ce cas, si $\mathrm{E} - \mathrm{E}_1$ contient un intervalle ouvert, $\lambda$ devra y être constante.

**2. Intégrale de Stieltjès** [1]. — La théorie de l'intégration par rapport à la fonction monotone $\lambda(t)$ peut se développer d'une façon tout à fait analogue à celle de l'intégration ordinaire au sens de Lebesgue, la mesure-$\lambda$ jouant le rôle de la mesure ordinaire.

La fonction réelle à intégrer $f(t)$ sera supposée définie en tout point de l'intervalle I, sa valeur pouvant être $\pm\infty$. Désignons, comme d'ordinaire, par

$$\mathbf{M}_{\mathrm{I}}[\alpha \leqq f(t)]$$

l'ensemble des points de I où $f(t)$ satisfait à l'inégalité $\alpha \leqq f(t)$. *Si cet ensemble est, quel que soit $\alpha$, mesurable-$\lambda$, et si de plus les ensembles*

$$\mathbf{M}_{\mathrm{I}}[f(\mathrm{P}) = +\infty] \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathrm{I}}[f(\mathrm{P}) = -\infty]$$

*sont également mesurables-$\lambda$, nous dirons que $f(t)$ est elle-même* MESURABLE-$\lambda$. *En particulier, toute fonction de Baire est mesurable-$\lambda$.* On démontre que l'ensemble

$$\mathbf{M}_{\mathrm{I}}[\alpha \leqq f(t) < \beta]$$

est alors mesurable-$\lambda$. De plus, la somme, le produit de deux fonctions mesurables-$\lambda$, la limite d'une suite convergente de fonctions mesurables-$\lambda$ sont encore mesurables-$\lambda$.

*Supposons d'abord que la fonction mesurable-$\lambda$, $f(t)$, soit finie. Nous allons définir l'intégrale de Stieltjès de $f(t)$, prise par rapport à la fonction déterminante $\lambda(t)$.*

Prenons une suite L de nombres $l_i$ croissant avec $i$, et telle que

$$\lim_{i=+\infty} l_i = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{i=-\infty} l_i = -\infty.$$

De plus, deux nombres $l_i$ consécutifs doivent être au plus distants de $\varepsilon$. Nous dirons que L est une « *échelle de largeur* $\varepsilon$ ». Considérons les ensembles mesurables-$\lambda$

$$\mathrm{E}_i(\mathrm{L}) = \mathbf{M}_{\mathrm{I}}[l_i \leqq f(t) < l_{i+1}],$$

---

[1] La théorie s'applique presque sans modification à l'intégration d'une fonction de l'élément d'un ensemble abstrait E, par rapport à une fonction complètement additive d'ensemble définie pour des sous-ensembles de E. *Voir* par exemple M. FRÉCHET ($a$).

dont la somme est égale à l; désignons par $\xi_i$ un nombre satisfaisant à la condition

$$l_i \leq \xi_i \leq l_{i+1},$$

et formons la série (1)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \xi_i \nu[E_i(L)]. \tag{1}$$

*Si cette série converge pour une échelle* L *particulière, on démontre qu'elle converge pour toutes. Dans ce cas, lorsque* $\varepsilon$ *tend vers zéro, sa somme tend vers une limite unique et finie qui sera, par définition, l'intégrale cherchée; nous dirons alors que la fonction* $f(t)$ *est sommable-*$\lambda$ *sur* I. *Une fonction mesurable-*$\lambda$ *bornée sera donc toujours sommable-*$\lambda$. *Dans le cas contraire, il n'y aura pas d'intégrale. Toutefois, si la série* (1) *converge du côté négatif seulement, nous dirons que l'intégrale est égale à* $+\infty$*; cela aura lieu en particulier si* $f(t)$ *est bornée inférieurement; si la série converge du côté positif seulement, on dira que l'intégrale est égale à* $-\infty$.

L'intégrale ainsi définie (2) s'écrit

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)\, d\lambda(t)$$

ou encore, en désignant par $\nu(e)$ la fonction d'ensemble $m_\lambda(e)$ :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)\, d\nu(e).$$

Cette définition s'étend aisément au cas où $f(t)$ peut prendre des valeurs infinies. Si les ensembles $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}[f(t) = \pm\infty]$ ont des mesures-$\lambda$ nulles, la définition n'est pas changée. Dans le cas contraire, on dira que $f(t)$ n'est pas sommable-$\nu$. Toutefois, si $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}[f(t) = +\infty]$ a une mesure non nulle, si $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}[f(t) = -\infty]$ a une mesure nulle, et si, de plus, la série (1) converge du côté négatif, on dira que l'intégrale est égale à $+\infty$. Dans le cas inverse, on dira que l'intégrale est égale à $-\infty$.

Donnons maintenant une légère extension. *Soit* E *un ensemble mesurable-*$\lambda$ *contenu dans* I. *Désignons par* $\varphi_{\mathrm{E}}(t)$ *la fonction qui est égale à un pour les points*

---

(1) Pour une fonction bornée, la série se réduit à un nombre fini de termes.

(2) Si l'on modifie la valeur de la fonction $f(t)$ aux points d'un ensemble de mesure-$\lambda$ nulle, elle ne cessera pas d'être mesurable-$\lambda$, et son intégrale ne changera pas.

*de* E *et qui est nulle partout ailleurs. Nous poserons*

$$\int_{E} f(t)\, d\lambda(t) = \int_{I} \varphi_{E}(t) f(t)\, d\lambda(t)$$

et $f(t)$ sera dite *sommable-*$\lambda$ sur E lorsque $\varphi_{E}(t) f(t)$ sera sommable-$\lambda$ sur I. *Ainsi, pour toute fonction $f(t)$ sommable-$\lambda$ sur* I, *cette dernière intégrale est une fonction d'ensemble définie pour les ensembles* E *mesurables-*$\lambda$. *On démontre qu'elle est complètement additive.*

La plupart des propriétés de l'intégrale de Lebesgue ont leur analogue pour l'intégrale de Stieltjès, et se démontrent de même. Citons la *formule de la moyenne.*

Soit $f(t)$ une fonction sommable-$\lambda$ sur E contenu dans I. Désignons par

$$\overline{\mathfrak{M}}_{t \subset E} f(t) \quad \text{et} \quad \underline{\mathfrak{M}}_{t \subset E} f(t)$$

les bornes supérieure et inférieure de $f(t)$ sur l'ensemble E. On a alors

$$\boxed{\underline{\mathfrak{M}}_{t \subset E} f(t) \,.\, m_{\lambda}(E) \leqq \int_{E} f(t)\, d\lambda(t) \leqq \overline{\mathfrak{M}}_{t \subset E} f(t) \,.\, m_{\lambda}(E).}$$

La formule s'applique si $f(t)$, sans être sommable-$\lambda$, a une intégrale égale à $\pm\infty$.

Une intégrale de Stieltjès peut se ramener à une intégrale de Lebesgue en prenant $\lambda$ pour variable. Soit $\tau(\lambda)$ l'une des fonctions inverses de $\lambda(t)$; on a l'égalité

$$\boxed{\int_{a<t<b} f(t)\, d\lambda(t) = \int_{\lambda(a+0)}^{\lambda(b-0)} f[\tau(\lambda)]\, d\lambda,}$$

les deux membres pouvant être infinis.

*Cas d'une fonction à variation bornée.* — On peut remplacer $\lambda(t)$ par une fonction $\mu$ à variation bornée, définie encore dans I et aussi pour $a - 0$. Décomposons $\mu$ en ses variations positive et négative

$$\mu(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t).$$

Si E est un ensemble mesurable-$\lambda_1$ et mesurable-$\lambda_2$, et $f(t)$ une fonction sommable-$\lambda_1$ et sommable-$\lambda_2$ sur I, on posera

$$\int_{I} f(t)\, d\mu(t) = \int_{I} f(t)\, d\lambda_1(t) - \int_{I} f(t)\, d\lambda_2(t).$$

On peut, dans ce cas, généraliser la formule de la moyenne; on démontre aisément :

$$\int_{\mathrm{E}} f(t)\, d\mu(t) \leqq \underset{t \subset \mathrm{E}}{\mathfrak{M}} f(t) . m_{\gamma_1}(\mathrm{E}) - \underset{t \subset \mathrm{E}}{\mathfrak{M}} f(t) . m_{\gamma_2}(\mathrm{E}).$$

Les quantités $m_{\gamma_1}(\mathrm{E})$ et $m_{\gamma_2}(\mathrm{E})$ sont appelées les *variations positive et négative de $\mu(t)$ sur l'ensemble* E.

En particulier, l'intégrale

$$\int_{\mathrm{E}} d\mu(t) = m_{\gamma_1}(\mathrm{E}) - m_{\gamma_2}(\mathrm{E})$$

se nommera la *mesure-$\mu$* de l'ensemble E, ou encore l'*accroissement* de $\mu$ sur E; on l'écrit aussi

$$\mathbf{A}[\mathrm{E} ; \mu(t)].$$

**3. Interversion de l'ordre des intégrations, pour deux intégrations successives au sens de Stieltjès.** — Énonçons d'abord, dans le cas particulier qui nous sera utile, un résultat connu relatif à l'interversion de l'ordre des intégrations pour les intégrales ordinaires de Lebesgue.

Soit $\varphi(\lambda, \mu)$ une fonction définie dans le rectangle lui-même défini par $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ et $\mu_1 < \mu < \mu_2$, bornée inférieurement, mais pouvant prendre la valeur $+\infty$. Pour supprimer toute difficulté relative à la mesurabilité, nous admettrons que $\varphi(\lambda, \mu)$ appartient à l'une des classes de Baire. Dans ces conditions, l'intégrale

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda, \mu)\, d\lambda$$

a une valeur déterminée finie ou égale à $+\infty$, et elle est une fonction de $\mu$ qui appartient encore à une classe de Baire. [Pour le voir, il suffit de considérer $\varphi(\lambda, \mu)$ comme limite d'une suite de fonctions de classes inférieures, et appliquer le théorème sur la limite d'une suite d'intégrales.] Cette fonction de $\mu$ est donc mesurable et bornée inférieurement, et *par conséquent, l'expression*

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \left[ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda, \mu)\, d\lambda \right] d\mu$$

*aura toujours une valeur déterminée, finie ou égale à $+\infty$; il en sera de même de l'expression*

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ \int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi(\lambda, \mu)\, d\mu \right] d\lambda.$$

*De plus, ces deux expressions sont toujours égales.* En effet, on sait que si l'une d'elles a une valeur finie, l'autre a aussi une valeur finie qui lui est égale [*voir* C. Carathéodory ($b$) théorème 1, § 548 et théorème 7, § 553]. Par conséquent, si l'une d'elles est égale à $+\infty$, l'autre sera aussi égale à $+\infty$.

Revenons aux intégrales de Stieltjès; *soient* $\lambda(t)$ *et* $\mu(\theta)$ *deux fonctions monotones non décroissantes et bornées définies dans l'intervalle* $\mathrm{I}: a \leqq t < b$, *et aussi pour* $a - 0$. *Désignons par* $t(\lambda)$ *et* $\theta(\mu)$ *deux fonctions inverses de* $\lambda(t)$ *et de* $\mu(\theta)$. *Soit* $f(t, \theta)$ *une fonction définie lorsque* $t$ *et* $\theta$ *sont dans* I, *bornée inférieurement, mais pouvant prendre la valeur* $+\infty$, *et de plus, appartenant à l'une des classes de Baire.*

Dans ces conditions, l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} f(t, \theta)\, d\lambda(t)$ a une valeur déterminée finie ou égale à $+\infty$. Cette valeur est une fonction de $\theta$ qui, pour la même raison que ci-dessus, appartient à une classe de Baire. Elle est donc mesurable-$\mu$ et bornée inférieurement, et l'expression

$$\int_{\mathrm{I}} \left[ \int_{\mathrm{I}} f(t, \theta)\, d\lambda(t) \right] d\mu(\theta)$$

a elle-même une valeur déterminée, finie ou égale à $+\infty$. Il en est de même de l'expression

$$\int_{\mathrm{I}} \left[ \int_{\mathrm{I}} f(t, \theta)\, d\mu(\theta) \right] d\lambda(t).$$

Or, en remplaçant les intégrations au sens de Stieltjès par des intégrations au sens de Lebesgue, on voit que ces deux expressions sont respectivement égales à

$$\int_{\mu(a-0)}^{\mu(b-0)} \left[ \int_{\lambda(a-0)}^{\lambda(b-0)} f[t(\lambda), \theta(\mu)]\, d\lambda \right] d\mu$$

et

$$\int_{\lambda(a-0)}^{\lambda(b-0)} \left[ \int_{\mu(a-0)}^{\mu(b-0)} f[t(\lambda), \theta(\mu)]\, d\mu \right] d\lambda,$$

qui, d'après le résultat rappelé ci-dessus, sont toujours égales. *On a donc toujours* (¹):

$$\boxed{\int_{\mathrm{I}} \left[ \int_{\mathrm{I}} f(t, \theta)\, d\lambda(t) \right] d\mu(\theta) = \int_{\mathrm{I}} \left[ \int_{\mathrm{I}} f(t, \theta)\, d\mu(\theta) \right] d\lambda(t).}$$

(¹) Cette formule est donnée par R. Caccioppoli, *Rendiconti di Palermo*, t. 52, 1928, p. 19.

**4. Intégration par parties.** *Soient $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ deux fonctions monotones bornées et non décroissantes, définies dans l'intervalle* I : $(a \leqq t < b)$, *ainsi que pour* $a - 0$. *Dans ces conditions, nous allons démontrer la formule suivante :*

$$\int_{\mathrm{I}} \lambda(t+0)\,d\mu(t) + \int_{\mathrm{I}} \mu(t-0)\,d\lambda(t) = \int_{\mathrm{I}} d[\lambda(t).\mu(t)]. \tag{1}$$

Le second membre peut aussi s'écrire $m_{\lambda.\mu}(\mathrm{I})$, ou encore

$$\lambda(b-0).\mu(b-0) - \lambda(a-0).\mu(a-0).$$

Cherchons une valeur approchée de la première intégrale de (1). Posons

$$\lambda(a-0) = \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \lambda(b-0) = \mathrm{B}. \tag{2}$$

La fonction $\lambda(t+0)$ ne prend dans I aucune valeur en dehors de (A, B). Nous obtiendrons donc cette valeur approchée au moyen d'une échelle de largeur $\varepsilon$ telle que

$$\mathrm{A} = l_1 < l_2 < \ldots < l_k = \mathrm{B}.$$

L'intégrale est la limite, pour $\varepsilon$ tendant vers zéro, de la somme

$$\sum_{i=1}^{k-1} l_i m_\mu[\mathbf{M}(l_i \leqq \lambda(t+0) < l_{i+1})]. \tag{3}$$

Voyons de quoi se compose l'ensemble $\mathbf{M}[l_i \leqq \lambda(t+0) < l_{i+1}]$. Quelques précautions sont nécessaires. Considérons celle des fonctions inverses de $\lambda(t)$ qui est toujours égale à sa limite à gauche, et désignons-la par $\varphi(l)$ [*voir* C. Carathéodory (*b*), § 157-161]. Elle est définie dans l'intervalle $\bar{\mathrm{I}}$ qui peut être, suivant les cas,

$$\mathrm{A} \leqq l < \mathrm{B} \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{A} \leqq l \leqq \mathrm{B}.$$

On a $\varphi(\mathrm{A}) = a$, et, dans le deuxième cas seulement, $\varphi(\mathrm{B}) = b$. Dans le premier cas, $\varphi$ n'est pas définie pour B, mais il sera commode de poser aussi $\varphi(\mathrm{B}) = b$. Si $l$ satisfait à la condition $\mathrm{A} \leqq l < \mathrm{B}$, l'ensemble

$$\mathbf{M}[l \leqq \lambda(t+0)]$$

se compose (*loc. cit.*) de l'intervalle à demi ouvert

$$\varphi(l) \leqq t < b. \tag{4}$$

L'ensemble $\mathbf{M}[\lambda(t+0) < l]$ sera alors le complémentaire du précédent par rapport à I ; c'est-à-dire qu'il sera défini par

$$a \leqq t < \varphi(l). \tag{5}$$

On conclut de (4) et (5) que pour tous les intervalles $(l_i, l_{i+1})$ sauf pour le dernier, l'ensemble $\mathbf{M}(l_i \leqq \lambda(t) < l_{i+1})$ est identique à l'intervalle

(6) $$\varphi(l_i) \leqq t < \varphi(l_{i+1}).$$

Pour le dernier intervalle $(l_{k-1}, \mathrm{B})$, cet ensemble est identique à

$$\varphi(l_{k-1}) \leqq t < b.$$

Comme nous avons posé, dans tous les cas, $\varphi(\mathrm{B}) = b$, la formule (6) est générale. *La mesure-$\mu$ de l'intervalle* (6) *est donc, quel que soit* $i$ :

$$\mu[\varphi(l_{i+1}) - 0] - \mu[\varphi(l_i) - 0],$$

et la somme (3) s'écrit

$$\sum_{i=1}^{k-1} l_i \{\mu[\varphi(l_{i+1}) - 0] - \mu[\varphi(l_i) - 0]\}.$$

Considérons maintenant la deuxième intégrale du premier membre de (1). On peut l'écrire sous la forme d'une intégrale de Lebesgue :

$$\int_{\mathrm{I}} \mu(t-0)\, d\lambda(t) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mu[\varphi(l) - 0]\, dl.$$

Or, $\mu[\varphi(l) - 0]$ est une fonction de $l$ qui est intégrable au sens de Riemann, et son intégrale est la limite, pour $\varepsilon$ tendant vers zéro, de la somme

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mu[\varphi(l_{i+1}) - 0](l_{i+1} - l_i).$$

Le premier membre de (1) est donc la limite de

$$\sum_{i=1}^{k-1} l_i \{\mu[\varphi(l_{i+1}) - 0] - \mu[\varphi(l_i) - 0]\} + \mu[\varphi(l_{i+1}) - 0](l_{i+1} - l_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} l_{i+1}\mu[\varphi(l_{i+1}) - 0] - l_i\mu[\varphi(l_i) - 0] = l_k\mu[\varphi(l_k) - 0] - l_1\mu[\varphi(l_1) - 0]$$

$$= \mathrm{B}\mu[\varphi(\mathrm{B}) - 0] - \mathrm{A}\mu[\varphi(\mathrm{A}) - 0],$$

ou, d'après (2) :

$$\lambda(b-0)\mu(b-0) - \lambda(a-0)\mu(a-0),$$

ce qui est précisément le second membre de (1). La formule (1) est démontrée [1].

[1] Cette formule se généralise aisément : soient $\lambda$ et $\mu$ deux fonctions à variation bornée,

# CHAPITRE I.

## TOPOLOGIE DES ÉTOILES.

**1. Définition d'une étoile.** — On appelle *domaine étoilé* ou *étoile* par rapport à l'origine O un *domaine* (terminologie IV) du plan de la variable complexe tel que tout segment joignant l'origine à un point du domaine y est contenu en entier.

Écartant le cas où le domaine est le plan tout entier, y compris le point à l'infini, une étoile est toujours simplement connexe.

Sur toute demi-droite d'argument $\lambda$ issue de l'origine, les points M appartenant au domaine sont définis par une inégalité :

$$OM < \rho(\lambda).$$

La fonction $\rho(\lambda)$ finie ou non définit complètement l'étoile.

Réciproquement, étant donnée une fonction $\rho(\lambda)$ de période $2\pi$, et ayant une borne inférieure positive, considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points dont les coordonnées polaires $r$, $\theta$ vérifient l'inégalité

$$r < \rho(\theta).$$

Tout segment joignant l'origine à un point de cet ensemble y est contenu en entier; *mais $\mathcal{E}$ n'est pas toujours un domaine.*

*Pour que ce soit un domaine, il faut et il suffit que $\rho(\lambda)$ soit semi-continue inférieurement* [1].

En effet, si $\mathcal{E}$ est un domaine, et M un de ses points d'argument $\lambda_0$, on peut trouver un cercle $c$, de centre M et de rayon $r_1$, qui soit intérieur à $\mathcal{E}$. Dans ces

---

$f(t)$ une fonction sommable par rapport à deux des trois fonctions $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\lambda(t)\mu(t)$, sur un ensemble E lui-même mesurable par rapport à deux de ces trois fonctions; on a alors la formule :

$$\int_E f(t)\lambda(t+0)\,d\mu(t) + \int_E f(t)\mu(t-0)\,d\lambda(t) = \int_E f(t)\,d[\lambda(t)\mu(t)].$$

[1] Une fonction *semi-continue inférieurement* est une fonction toujours égale à sa *limite inférieure*. Soit $g_1$ la borne inférieure d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle ouvert I contenant $x_0$; la borne supérieure des nombres $g_1$ ainsi obtenus est appelée *limite inférieure de $f(x)$ pour la valeur $x_0$ de la variable.*

conditions, on a, pour $\lambda$ assez voisin de $\lambda_0$, $\rho(\lambda) > OM$. La différence entre OM et $\rho(\lambda_0)$ pouvant être rendue inférieure à tout nombre positif $\varepsilon$, on en déduit

$$(I, 1) \qquad \rho(\lambda) > \rho(\lambda_0) - \varepsilon,$$

d'où l'on conclut la semi-continuité inférieure de $\rho(\lambda)$ au point $\lambda_0$.

Inversement, si $\rho(\lambda)$ est semi-continue inférieurement pour $\lambda_0$, on peut, quel

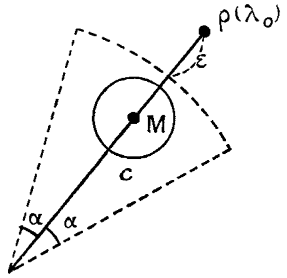



Fig. 4.

que soit $\varepsilon$, déterminer un nombre $\alpha$ tel que, si $|\lambda - \lambda_0| < \alpha$, on ait l'inégalité (I, 1). On en déduit que le domaine défini par les inégalités

$$\lambda_0 - \alpha < \theta < \lambda_0 + \alpha,$$
$$r < \rho(\lambda_0) - \varepsilon$$

est, quel que soit $\varepsilon$, intérieur à l'ensemble $\mathcal{E}$. Par conséquent, tout point dont les coordonnées satisfont à

$$\theta = \lambda_0,$$
$$r < \rho(\lambda_0)$$

est centre d'un cercle contenu dans $\mathcal{E}$.

**2. Étude de la frontière d'une étoile. Recherche des bouts premiers** [1] **dont elle se compose.** — Recherchons les points frontières d'une étoile E qui sont situés sur une demi-droite $D(\lambda_0)$ issue de l'origine et d'argument $\lambda_0$. Nous distinguerons deux cas.

*Premier cas.* — Supposons d'abord que pour la valeur $\lambda_0$ considérée, la fonc-

[1] Pour toutes les définitions relatives à la frontière d'un domaine, *voir* C. CARATHÉODORY *(a)*.

tion semi-continue inférieurement définie ci-dessus satisfasse à la condition

(I, 2) $$\rho(\lambda_0) = \underline{\lim}_{\lambda=\lambda_0-0} \rho(\lambda) = \underline{\lim}_{\lambda=\lambda_0+0} \rho(\lambda) \quad [1].$$

On sait qu'il en est ainsi pour toute valeur de $\lambda$ sauf pour des *valeurs exception-*

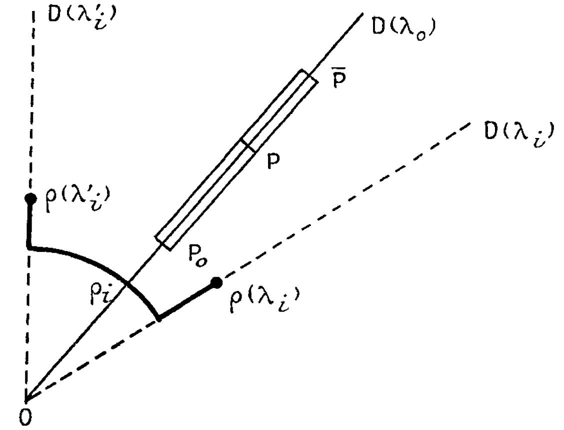



Fig. 5.

*nelles*, qui sont au plus en infinité dénombrable (*voir* § 5 de ce chapitre). Dans ce cas nous aurons le théorème suivant :

*Les points frontières de* E *situés sur* $D(\lambda_0)$ *forment un segment allant du point* $P_0$, *situé à la distance* $\rho(\lambda_0)$ *de l'origine, au point* $\overline{P}$, *situé à la distance* $\overline{\lim}_{\lambda=\lambda_0} \rho(\lambda)$ *de l'origine. Ce segment n'est autre que le bout premier* B *dont* $P_0$ *est point accessible* [2] *par le chemin* $OP_0$. *De plus, aucun point de* B *n'appartient à un autre bout premier de* E, *sauf peut-être le point à l'infini.*

Remarquons d'abord que d'après la définition des points $P_0$ et $\overline{P}$, tous les points de $D(\lambda_0)$ hors du segment $P_0\overline{P}$ sont points intérieurs à E ou bien points extérieurs, et ne peuvent être points frontières.

Formons une chaîne de transversales $q_i$ relative au bout premier B. Pour cela, déterminons, d'après (I, 2), une suite croissante $\lambda_i$ et une suite décroissante $\lambda'_i$ tendant toutes deux vers $\lambda_0$, et telles que :

$$\lim_{i=\infty} \rho(\lambda_i) = \lim_{i=\infty} \rho(\lambda'_i) = \rho(\lambda_0).$$

---

[1] L'expression $\underline{\lim}_{\lambda=\lambda_0-0} \rho(\lambda)$ signifie : *limite inférieure de la fonction* $\rho(\lambda)$ *pour la valeur* $\lambda_0$, *quand on fait abstraction des valeurs de* $\rho$ *pour* $\lambda \geq \lambda_0$.

[2] *Voir* [1], p. 31.

Soit maintenant une suite croissante de nombres $\rho_i$, telle que l'on ait

$$\rho_i < \rho(\lambda),$$

pour toute valeur de $\lambda$ satisfaisant à

$$\lambda_i \leqq \lambda \leqq \lambda'_i,$$

et de plus, telle que

$$\lim_{i=\infty} \rho_i = \rho(\lambda_0).$$

On peut prendre, par exemple,

$$\rho_i = \underset{\lambda_i \leqq \lambda \leqq \lambda'_i}{\mathfrak{M}} [\rho(\lambda)] - (\lambda'_i - \lambda_i).$$

Prenons pour $q_i$ la transversale composée de l'arc

$$r = \rho_i,$$
$$\alpha_i \leqq \theta \leqq \alpha'_i$$

et des deux intervalles :

$$\rho_i < r < \rho(\lambda_i), \qquad \rho_i < r < \rho(\lambda'_i),$$
$$\theta = \lambda_i, \qquad \theta = \lambda'_i.$$

Les $q_i$ tendent vers $P_0$ et coupent toutes le chemin d'accès $OP_0$ ; donc la chaîne $q_i$ définit bien B.

Les domaines $d_i$, séparés par les $q_i$ et ne contenant pas l'origine, sont définis par les inégalités

$$\text{(I, 3)} \qquad \begin{cases} \lambda_i < \theta < \lambda'_i, \\ \rho_i < r < \rho(\theta). \end{cases}$$

Le bout premier B n'est autre que l'ensemble des points communs à tous les $d_i$. La première de ces inégalités montre que cet ensemble est sur la droite $D(\lambda_0)$, et la deuxième, qu'il se compose du segment $P_0\bar{P}$, le point $\bar{P}$ pouvant d'ailleurs être à l'infini.

Il nous reste à montrer qu'un point P du bout premier B à distance finie ne peut appartenir à un autre bout premier B'. Supposons qu'il en soit ainsi et que B' soit défini par une chaîne de domaines $d'_i$. Désignons par $V_l(P)$ l'ensemble des points de E qui sont dans un cercle de centre P et de rayon $l$. Il résulte des propriétés des bouts premiers que $V_l(P)$ doit avoir des points dans $d_i$ et dans $d'_i$, et que, si $i$ est assez grand, $d_i$ et $d'_i$ sont sans points communs. D'autre part, les inégalités (I, 3) montrent que, si $l$ est assez petit, $V_l(P)$ est contenu dans $d_i$ ; il y a impossibilité.

Dans le cas où $\rho(\lambda_0)$ est infini, nous avons bien un bout premier réduit au point à l'infini et atteint par la demi-droite $D(\lambda_0)$, mais nous ne savons pas, pour le moment, si ce même bout premier n'est pas aussi atteint par d'autres demi-droites $D(\lambda)$.

*Deuxième cas.* — Supposons que la condition (1, 2) ne soit plus réalisée; le résultat sera moins simple. Admettons que l'on ait, par exemple :

$$\rho(\lambda_0) < \underline{\lim}_{\lambda=\lambda_0-0} \rho(\lambda) \leqq \underline{\lim}_{\lambda=\lambda_0+0} \rho(\lambda). \tag{1, 4}$$

Soient $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P'_1$, $P'_2$ les points de $D(\lambda_0)$ tels que

$$\overline{OP}_0 = \rho(\lambda_0), \qquad \overline{OP}_1 = \underline{\lim}_{\alpha=\alpha_0-0} \rho(\lambda), \qquad \overline{OP}_2 = \overline{\lim}_{\alpha=\alpha_0-0} \rho(\lambda),$$
$$\overline{OP'_1} = \underline{\lim}_{\alpha=\alpha_0+0} \rho(\lambda), \qquad \overline{OP'_2} = \overline{\lim}_{\alpha=\alpha_0+0} \rho(\lambda).$$

Tout d'abord, comme dans le premier cas, on voit que les seuls points frontières situés sur $D(\lambda_0)$ sont sur $\overline{P_0 P_2}$ ou sur $\overline{P_0 P'_2}$.

Prenons un point P de l'intervalle $\overline{P_0 P_1}$, et considérons le demi-cercle de centre P et de rayon $l$, dont les points ont un argument inférieur à $\lambda_0$. Si $l$ est

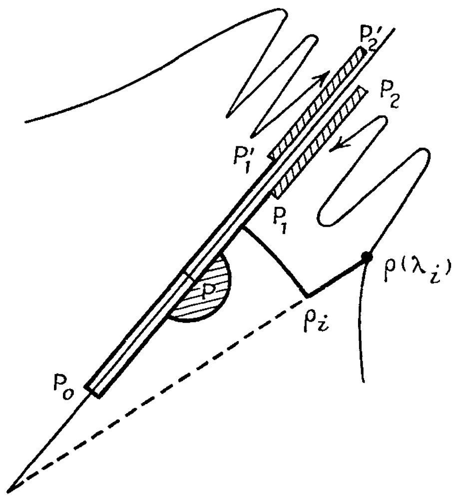



Fig. 6.

assez petit, ce demi-cercle sera intérieur à E, d'après la définition du point $P_1$ (démonstration analogue à la fin du paragraphe 1). *On en conclut que* $P_0 P_1$ *est* *un arc libre* [1] *de la frontière de* E, *dont le bord situé du côté des* $\lambda$ *inférieurs à* $\lambda_0$ *appartient à l'étoile* E.

Le point $P_1$ est donc un point accessible par le bord de $P_0P_1$. Étudions le bout premier B correspondant. On peut d'après (I, 4) trouver une suite croissante $\lambda_i$ tendant vers $\lambda_0$ et telle que

$$\lim_{i=\infty} \rho(\lambda_i) = OP_1.$$

Déterminons, comme dans le premier cas, une suite de transversales $q_i$ tendant vers $P_1$ et composées de l'arc

$$r = \rho_i, \quad \lambda_i \leqq \theta < \lambda_0$$

et de l'intervalle

$$\rho_i < r < \rho(\lambda_i), \quad \theta = \lambda_i.$$

Elles coupent toutes le chemin d'accès du bout premier B, et définissent bien B. les domaines $d_i$, séparés par les $q_i$ et ne contenant pas l'origine, sont définis par les inégalités :

$$\lambda_i < \theta < \lambda_0, \quad \rho_i < r < \rho(\theta),$$

ce qui montre que B, ensemble des points communs à tous les $d_i$, se compose du segment $\overline{P_1P_2}$.

De même, $P_0P'_1$ sera un arc libre de la frontière de E, dont le bord situé du côté des $\lambda$ supérieurs à $\lambda_0$ appartient à E; le point $P_0$ réunit ces deux arcs libres pour n'en former qu'un : $P_1P_0P'_1$. Le point $P'_1$ est point accessible d'un bout premier B′ formé du segment $\overline{P'_1P'_2}$.

Dans le cas où le point $P_1$ par exemple est confondu avec $P_0$, le seul arc libre est $P_0P'_1$, et $P_0$ est point accessible d'un bout premier $\overline{P_0P_2}$, pour lequel la définition ci-dessus des transversales $q_i$ doit être légèrement modifiée : on doit leur ajouter un demi-cercle de centre $P_0$ (*fig.* 7).

Tout point frontière de $D(\lambda_0)$ appartient donc à un ou deux des bouts premiers en nombre infini que l'on vient de trouver. Montrons que si P est un de ces points situé à distance finie, et appartenant au bout premier $B_1$ défini par la chaîne de domaines $d_i$ (ou à $B_1$ et à $B_2$ définis par les chaînes $d_i^{(1)}$ et $d_i^{(2)}$), il ne peut apppartenir à un autre bout premier $B_3$ défini par une chaîne $d_i^{(3)}$. Ceci

[1] *Voir* [1], p. 31.

résulte du fait que, si $l$ est assez petit, $V_l(P)$ est, d'après ce qui précède, contenu dans $d_i$ (ou dans $d_i^1 + d_i^2$); $V_l(P)$ aurait aussi des points dans $d_i^3$, et, si $i$ était assez grand, $d_i$ et $d_i^3$ (ou $d_i^1$, $d_i^2$ et $d_i^3$) seraient sans points communs; il y a impossibilité.

*En résumé, pour toute valeur* $\lambda_0$ *telle que* $\rho(\lambda_0)$ *soit fini, nous avons un bout premier, ou bien un arc libre frontière dont les extrémités sont points accessibles de*

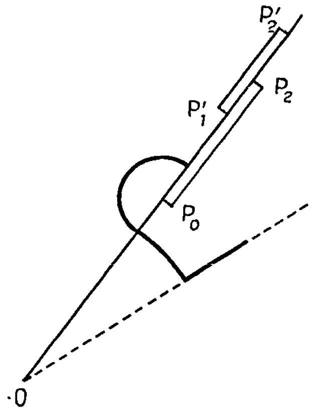



Fig. 7.

*deux bouts premiers* (ce dernier cas ne peut d'ailleurs se présenter que pour l'infinité dénombrable des valeurs exceptionnelles de $\lambda$). La frontière de E ne pouvant avoir qu'une infinité dénombrable d'arcs libres, nous retrouvons ainsi ce résultat : les valeurs exceptionnelles sont au plus en infinité dénombrable.

Toute demi-droite $D(\lambda_0)$ telle que $\rho(\lambda_0) = \infty$ constitue, d'après ce qui précède, un chemin d'accès pour un bout premier réduit au point à l'infini. L'étude de ces bouts premiers repose sur la remarque suivante. Soient deux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\rho(\lambda_1) = \rho(\lambda_2) = \infty$. Les bouts premiers correspondants ne sont identiques que si l'un des deux angles formés par les deux chemins d'accès $D(\lambda_1)$ et $D(\lambda_2)$ ne contient aucun point frontière, c'est-à-dire si, pour toute valeur de $\lambda$ comprise dans cet angle, on a $\rho(\lambda) = \infty$. Inversement, si pour toute valeur de $\lambda$ telle que $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, on a $\rho(\lambda) = \infty$, les deux bouts premiers réduits au point à l'infini qui sont atteints par les demi-droites $D(\lambda_1)$ et $D(\lambda_2)$ sont identiques.

Considérons alors les intervalles $(\lambda_i', \lambda_i'')$ dans lesquels on a $\rho(\lambda) = \infty$. Ils sont au plus en infinité dénombrable et nous les nommerons intervalles exceptionnels; ils peuvent être, selon le cas, ouverts, demi-ouverts, ou fermés. A chacun d'eux correspond un bout premier distinct.

Dans le cas de l'intervalle ouvert $(\lambda', \lambda'')$, on a

$$\rho(\lambda') < \lim_{\lambda=\lambda'+0} \rho(\lambda) = \infty,$$

donc la valeur $\lambda'$ est exceptionnelle; il en est de même de $\lambda''$. Le bout premier défini par les chemins d'accès $D(\lambda)$ pour $\lambda' < \lambda < \lambda''$ est extrémité des arcs libres qui correspondent à $\lambda'$ et $\lambda''$ et qui sont situés du côté de l'intérieur de l'intervalle $(\lambda', \lambda'')$. Pour un intervalle demi-ouvert, une conclusion analogue subsiste pour l'extrémité ouverte.

Au contraire, si une valeur $\lambda_1$, telle que $\rho(\lambda_1) = \infty$, n'appartient pas à l'un de ces intervalles exceptionnels, il lui correspond un bout premier distinct, réduit au point à l'infini.

*Définition de l'argument et du module d'un bout premier d'une étoile.* — Si le bout premier n'est pas confondu avec le point à l'infini, son *argument* sera l'argument commun à tous ses points à distance finie. S'il est confondu avec le point à l'infini, ce sera l'argument de l'une quelconque des demi-droites issues de l'origine et qui constituent pour lui des chemins d'accès.

Enfin nous nommerons *module* d'un bout premier la distance de son point accessible à l'origine.

**5. Illustrons l'étude précédente de deux exemples.** — Pour cela, construisons une fonction $\rho(x)$ semi-continue supérieurement, définie pour $-1 < x < 1$, et qui vérifie les conditions suivantes [1]:

1° $$0 \leq \rho(x) \leq 1;$$

2° $$\rho(x_0) = \overline{\lim_{x=x_0-0}}\, \rho(x) = \overline{\lim_{x=x_0+0}}\, \rho(x)$$

3° $$\underline{\lim_{x=x_0-0}}\, \rho(x) = \underline{\lim_{x=x_0+0}}\, \rho(x) = 0$$

quel que soit $x_0$ compris dans l'intervalle $(-1, +1)$;

4° Il n'y a aucun intervalle dans lequel la fonction soit nulle;

5° $$\lim_{\rho=+1} \rho(x) = \lim_{\rho=-1} \rho(x) = 0.$$

Pour cela, désignons par $a_n$ une suite de nombres qui vérifient la condition $0 < a_n \leq 1$, et qui forment un ensemble partout dense dans l'intervalle $(0, 1)$.

Soit E l'ensemble des nombres de l'intervalle $(-1, +1)$ qui sont de la

[1] On arriverait au même résultat au moyen de l'exemple de C. Carathéodory ($a$), p. 366.

forme $\frac{p}{2^\alpha}$ où $p$ est un entier positif ou négatif. Définissons d'abord $\rho(x)$ sur l'ensemble E. Posons $\rho(0) = 1$, $\rho\left(\pm\frac{1}{2}\right) = a_1$. Supposons $\rho(x)$ définie pour les valeurs de $x$ de la forme $\frac{p}{2^{n-1}}$, et définissons $\rho(x)$ pour les valeurs $\frac{q}{2^n}$ ($q$ impair). Ce sera l'opération $O_n$. Le nombre $\frac{q}{2^n}$ est compris entre des nombres $\frac{p}{2^{n-1}}$ et $\frac{p+1}{2^{n-1}}$. Soit A le plus grand des deux nombres

$$\rho\left(\frac{p}{2^{n-1}}\right) \quad \text{et} \quad \rho\left(\frac{p+1}{2^{n-1}}\right).$$

*Posons* $\rho\left(\frac{q}{2^n}\right)$ *égal au plus petit des deux nombres* A *et* $a_n$. Une propriété remarquable de cette construction est la suivante. Soient deux nombres $\frac{p}{2^\alpha}$ et $\frac{p+1}{2^\alpha}$, et $\theta$ une valeur appartenant à E et comprise entre ces deux nombres : l'opération qui définit $\rho(\theta)$ a un indice supérieur à $\alpha$, et par conséquent $\rho(\theta)$ ne peut dépasser le plus grand des deux nombres $\rho\left(\frac{p}{2^\alpha}\right)$ et $\rho\left(\frac{p+1}{2^\alpha}\right)$.

Soit maintenant $\tau$ une valeur de $t$ située dans l'intervalle $(-1, +1)$, mais n'appartenant pas à E. Nous allons montrer que les limites supérieures à droite et à gauche de la fonction $\rho(t)$ définie sur l'ensemble E sont égales. Supposons

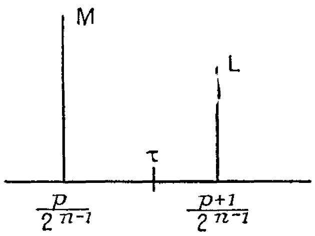



Fig. 8

en effet qu'au point $\tau$ la limite supérieure à gauche soit M, et la limite supérieure à droite $L < M$. Pour toute valeur de $n$, le point $\tau$ est compris entre deux points $\frac{p}{2^{n-1}}$ et $\frac{p+1}{2^{n-1}}$; par conséquent, si $n$ est supérieur à un certain nombre N, on aura

(I, 5) $$\rho\left(\frac{p+1}{2^{n-1}}\right) < L + \varepsilon.$$

$n_0$ étant un indice supérieur à N et tel que $L + \varepsilon < a_{n_0} < M$, on aura

(I, 6) $$\rho\left(\frac{2p+1}{2^n}\right) = a_{n_0}.$$

Deux cas sont possibles :

1° Si $\tau < \frac{2p+1}{2^n}$, (I, 5) est en contradiction avec (I, 6);

2° Si $\frac{2p+1}{2^n} < \tau$, on aura, pour tout point de la forme $\frac{p'}{2^{n'}}$ compris entre

$$\frac{2p+1}{2^n} \quad \text{et} \quad \frac{p+1}{2^{n-1}},$$

l'inégalité $\rho\left(\frac{p'}{2^{n'}}\right) \leqq a_{n_0}$, et la limite supérieure à gauche ne pourra être M.

Ainsi les limites à droite et à gauche de $\rho(t)$ au point $\tau$ sont égales. *Nous donnerons à $\rho(\tau)$ cette valeur commune.* La fonction ainsi définie vérifie donc la condition 2° en tout point n'appartenant pas à E. On démontrerait de même que 2° est encore vérifiée aux points de E.

La condition 3° se démontre aisément. Soit $\tau$ un point quelconque de l'intervalle $(-1, +1)$ : pour $n$ assez grand, il existe un nombre de la forme $\frac{p}{2^n}$ aussi voisin de $\tau$ qu'on le veut. Il suffit de prendre un indice $n$ tel que $a_n < \varepsilon$, et l'on a

$$\rho\left(\frac{p}{2^n}\right) \leqq a_n < \varepsilon.$$

Le 4° est évident, car, dans tout intervalle, il existe des points de la forme $\frac{p}{2^n}$ où la fonction $\rho$ n'est pas nulle.

Enfin, la condition 5° résulte du fait qu'entre $\frac{2^n-1}{2^n}$ et 1, la fonction $\rho(t)$ ne peut dépasser $a_n$.

*L'ensemble des points dont les coordonnées polaires $r$, $\theta$ satisfont à l'inégalité*

$$r < 1 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

*est, d'après* 2° *et* 5°, *une étoile* $E_1$. D'après 3°, toute demi-droite issue de l'origine porte un bout premier de la frontière de $E_1$ dont l'extrémité est sur la circonférence unité. Les demi-droites pour lesquelles ce bout premier ne se réduit pas à un point sont, d'après 4°, denses dans toutes les directions.

Désignons maintenant par $\rho_1(x)$ la fonction égale à $\rho(x) - \frac{1}{2}$ lorsque $\rho(x)$ est supérieure à $\frac{1}{2}$, et nulle partout ailleurs. $\rho_1(x)$ est nulle dans des intervalles denses partout. L'inégalité

$$r < 1 - \rho_1\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

définit une étoile $E_2$ dont tous les bouts premiers ont un point sur la circonférence unité C; mais l'étoile touche C suivant des intervalles partout denses.

**4. Étude de la représentation biunivoque et continue d'une étoile sur un cercle, faisant correspondre aux bouts premiers de l'étoile des points du cercle.** — Précisons d'abord les résultats topologiques que nous admettrons :

*a.* la notion de sens d'orientation sur une courbe de Jordan fermée;

*b.* la notion de transformation biunivoque et continue d'un domaine simplement connexe sur l'intérieur d'un cercle, qui conserve le sens d'orientation;

*c.* soit un point O intérieur à un cercle C et trois lignes de Jordan $l'_0$, $l'_1$, $l'_2$ intérieures à C, issues de O, ne se coupant pas, et aboutissant en des points $M_0$, $M_1$, $M_2$ de C; soit maintenant une courbe de Jordan fermée intérieure à C,

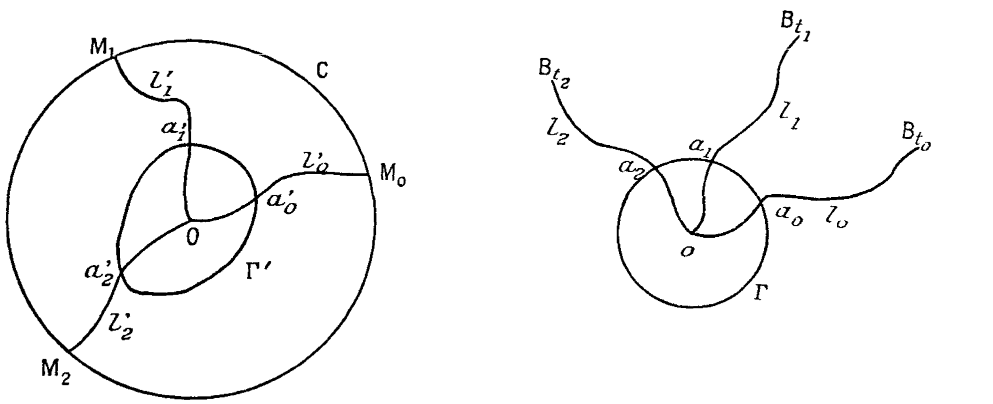



Fig. 9.

entourant O, et ne coupant chacune des trois lignes ci-dessus qu'en un point. Soient $a'_0$, $a'_1$, $a'_2$ les points d'intersection de $l'_0$, $l'_1$, $l'_2$ avec Γ'. Si l'on décrit Γ' en partant de $a'_0$ et C en partant de $M_0$, tous deux dans le sens positif, les points $a'_1$ et $a'_2$ sont rencontrés dans le même ordre que $M_1$ et $M_2$.

Nous obtenons alors la propriété suivante :

Théorème. — *Soit une correspondance biunivoque, continue et conservant le sens d'orientation entre un domaine* D *et l'intérieur d'un cercle* C, *et faisant correspondre aux points de* C *les bouts premiers de* D (¹), (²) (*comme c'est le cas pour*

(¹) On entend par là qu'à toute suite de points tendant vers un bout premier correspond une suite tendant vers le point correspondant de la circonférence.

(²) Pour l'établissement d'une telle correspondance sans faire appel à la représentation conforme, *voir* B. de Kerekjartó (*a*).

*une représentation conforme). Prenons un cercle* $\Gamma$ *de centre* O *et intérieur à* D. *Désignons par* $B_t$ *le bout premier qui correspond au point d'argument t sur le cercle* C. *Choisissons une valeur particulière de* $t_0$ *telle que* $B_{t_0}$ *ait un point accessible pour un chemin d'accès* $l_0$ *coupant* $\Gamma$ *en* $a_0$. *Prenons deux autres valeurs de t satisfaisant à*

$$t_0 \leqq t_1 < t_2 < t_0 + 2\pi,$$

*et correspondant à deux bouts premiers* $B_{t_1}$ *et* $B_{t_2}$ *accessibles par des chemins* $l_1$ *et* $l_2$ *issus de* O *et coupant* $\Gamma$ *en* $a_1$ *et* $a_2$. *Dans ces conditions, si l'on décrit le cercle* $\Gamma$ *en partant de* $a_0$ *dans le sens positif, le point* $a_1$ *est rencontré avant* $a_2$.

En effet, puisque la transformation conserve le sens d'orientation, si $\Gamma$ est décrit dans le sens positif, son image $\Gamma'$ est décrite dans le même sens; le théorème est alors une conséquence immédiate de *c*.

Les bouts premiers d'une étoile E étant tous accessibles, ce résultat va nous permettre de déterminer dans quel ordre ils sont rencontrés lorsque le point correspondant décrit la circonférence C.

Choisissons pour $B_{t_0}$ un bout premier situé sur une demi-droite non exceptionnelle $D(\lambda_0)$, et donnons à $\lambda$ des valeurs satisfaisant à

$$\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + 2\pi. \tag{I, 5}$$

Tous les bouts premiers autres que $B_{t_0}$ ont un argument différent de $\lambda_0$. Soient

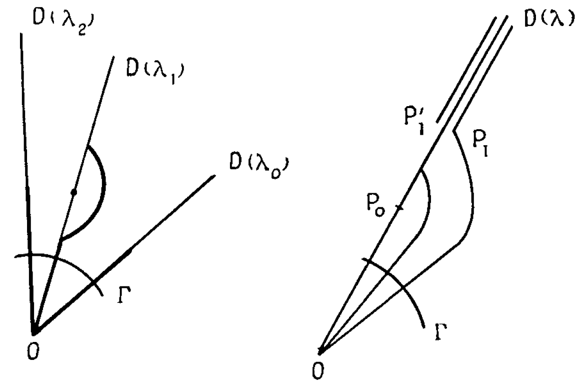



Fig. 10.

deux bouts premiers $B_{t_1}$ et $B_{t_2}$ d'arguments différents $\lambda(t_1)$ et $\lambda(t_2)$ vérifiant (I, 5), et tels que $t_1 < t_2$. Étant donné un cercle $\Gamma$ de centre origine et intérieur à l'étoile, on peut trouver, d'après le paragraphe **2**, pour $B_{t_1}$ et $B_{t_2}$, des chemins d'accès qui ne se coupent pas entre eux, qui ne coupent pas $D(\lambda_0)$, et qui soient confondus avec $D(\lambda_1)$ et $D(\lambda_2)$ depuis l'origine jusqu'au delà de la rencontre avec $\Gamma$. On déduit alors du théorème précédent :

$$\lambda(t_1) < \lambda(t_2).$$

*On en conclut que la fonction $\lambda(t)$ est monotone croissante.*

Considérons maintenant les bouts premiers situés sur une même demi-droite exceptionnelle $D(\lambda)$. Prenons-les dans l'ordre suivant (mêmes notations qu'au paragraphe **2**) :

1° le bout premier B de point accessible $P_1$;

2° les points de l'arc libre $P_1 P_0 P'_1$ dans l'ordre où ils sont rencontrés en décrivant cet arc;

3° le bout premier B' de point accessible $P'_1$. On peut trouver aisément pour deux d'entre eux des chemins d'accès ne se coupant pas, ne coupant pas $D(\lambda_0)$, et qui coupent $\Gamma$ en des points qui se succèdent dans le même ordre.

Par conséquent il existe un segment $t_1 \leq t \leq t_2$ du cercle C tel que lorsqu'un point décrit ce segment dans le sens positif, le bout premier $B_t$ parcourt l'ensemble des bouts premiers d'argument $\lambda$ dans l'ordre décrit ci-dessus. $\lambda(t)$ est constante dans cet intervalle, et présente ainsi un palier pour chaque demi-droite exceptionnelle.

Enfin $\lambda(t)$ est discontinue et saute de $\lambda'_i$ à $\lambda''_i$ pour les valeurs de $t$ correspondant aux bouts premiers réduits au point à l'infini qui sont accessibles par les demi-droites $D(\lambda)$ de l'intervalle exceptionnel $(\lambda'_i, \lambda''_i)$.

Si l'on désigne par $J(t)$ le module du bout premier $B_t$, on peut voir, en examinant les différents cas possibles, que $J(t)$ est, non plus seulement semi-continue inférieurement comme $\rho(\lambda)$, mais toujours égale à ses limites inférieures à droite et à gauche.

Dans l'intervalle $(t_1, t_2)$ du cercle C qui correspond aux bouts premiers d'une demi-droite exceptionnelle, $J(t)$ commence par décroître lorsque $t$ varie de $t_1$ jusqu'à une certaine valeur $\bar{t}$, puis croît lorsque $t$ varie de $\bar{t}$ à $t_2$. $\bar{t}$ peut d'ailleurs être confondu avec $t_1$ ou $t_2$.

Faisons encore une remarque qui sera utilisée plus loin : *si tout l'accroissement de $\lambda(t)$ est concentré sur un ensemble $\Delta$, la borne supérieure de $J(t)$ sur le cercle C est égale à la borne supérieure de $J(t)$ sur l'ensemble $\Delta$.*

Il faut montrer qu'étant donné un point $t_0$ quelconque, on peut trouver un point $t$ de $\Delta$ tel que

$$J(t) > J(t_0) - \varepsilon$$

et cela quel que soit $\varepsilon$ positif. Si $t_0$ est point limite de l'ensemble $\Delta$, cela résulte immédiatement de la semi-continuité inférieure de $J(t)$.

Si, au contraire, il n'y a pas au voisinage de $t_0$ de points de $\Delta$, c'est que la variation de $\lambda(t)$ est nulle dans ce voisinage, et $\lambda(t)$ est constante dans tout un intervalle $t_1 t_2$ contenant $t_0$. Cet intervalle correspond aux bouts premiers d'une demi-droite exceptionnelle. L'un des deux nombres $J(t_1)$ et $J(t_2)$ est alors au moins égal à $J(t_0)$; c'est par exemple $J(t_1)$, et il y a, au voisinage de $t_1$, des points de $\Delta$ tels que

$$J(t) > J(t_1) - \varepsilon.$$

**5. Les fonctions semi-continues inférieurement.** — Soit $f(x)$ une fonction semi-continue inférieurement, définie pour toute valeur de $x$, et pouvant prendre la valeur infinie. Soit $m$ sa borne supérieure.

1° L'ensemble $\mathbf{M}[f(x) > \alpha]$ (1), s'il n'est pas vide, est ouvert; en effet si l'on a $f(x_0) > \alpha$, on a aussi $f(x) > \alpha$ pour $x$ compris dans un certain voisinage de $x_0$. On en conclut que l'ensemble $\mathbf{M}[f(x) = m]$ est le produit de l'infinité dénombrable des ensembles ouverts emboîtés $\mathbf{M}[f(x) > \alpha_i]$ pour une suite croissante de nombres $\alpha_i$ tendant vers $m$. Nous dirons qu'un tel ensemble est de la *catégorie* A. De plus, cet ensemble ne peut être vide.

2° Si, en outre, la fonction $f(x)$ est en chaque point égale à ses limites inférieures à droite et à gauche (2), on voit que lorsque l'ensemble $\mathbf{M}[f(x) = \mathrm{M}]$ contient un intervalle $\alpha\beta$, il contient aussi ses extrémités, car on a alors $f(\alpha) = f(\beta) = m$. Nous dirons dans ce dernier cas que l'ensemble est de la *catégorie* A'.

3° Inversement, si l'on se donne un ensemble quelconque E de la catégorie A, on peut former une fonction $f(x)$, semi-continue inférieurement, et pour laquelle l'ensemble $\mathbf{M}[f(x) = m]$ soit confondu avec E.

En effet, nous pouvons supposer que E est le produit d'une suite d'ensembles ouverts $E_i$, telle que $E_{i+1} \subset E_i$ ($E_1$ étant confondu avec l'axe des $x$ tout entier).

---

(1) Lire : l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x) > \alpha$.

(2) Ceci a lieu, dans le cas d'une fonction semi-continue inférieurement, pour toute valeur de $x$, sauf au plus pour une infinité dénombrable, que nous appellerons *valeurs exceptionnelles*.

Prenons une suite croissante $\alpha_i$ tendant vers un, et définissons une fonction $f(x)$ de la façon suivante :

1° En tout point qui appartient à tous les $E_i$, donc à E, nous posons

$$f(x)=1;$$

2° En tout point qui n'appartient qu'à un nombre fini d'$E_i$, à savoir $E_1$, $E_2$, ..., $E_k$, nous posons

$$f(x)=\alpha_k.$$

La semi-continuité est immédiate, et l'ensemble $\mathbf{M}[f(x)=1]$ est bien égal à E.

Si l'on supposait en outre que l'ensemble E fût de la catégorie A′, on pourrait former, par un procédé analogue, mais plus compliqué, une fonction toujours égale à ses limites inférieures à droite et à gauche, et dont l'ensemble $\mathbf{M}[f(x)=\mathrm{M}]$ serait précisément E.

**6. Étude des bouts premiers d'une étoile dont le module est maximum.** — Désignons par K la circonférence de centre origine et de plus petit rayon contenant une étoile E, et par R ce rayon (qui peut être infini) et que nous nommerons *rayon de l'étoile*.

*Nous allons étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des bouts premiers de* E *qui ont pour module* R.

Leur point accessible est sur K, et comme il ne peut y avoir de point frontière de E à l'extérieur de K, ces bouts premiers se réduisent chacun à un point de K. *Nous allons montrer que l'image $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ sur le cercle* C *est un ensemble de la catégorie* A′ (*voir* paragraphe précédent). En effet, en désignant par $J(t)$ la fonction toujours égale à ses limites inférieures à droite et à gauche du paragraphe **4**, on a :

$$\mathcal{E}'=\mathbf{M}[J(t)=R],$$

R étant le maximum de $J(t)$, et il résulte du paragraphe **5** que $\mathcal{E}'$ appartient à la catégorie A′.

*On peut montrer que, dans le cas où* R *est fini, l'ensemble $\mathcal{E}$ lui-même constitue, sur le cercle* K, *un ensemble de points de la même catégorie* A′.

En effet, $\mathcal{E}$ se compose de l'ensemble $e_1$ des points frontières de E qui sont sur K et qui sont accessibles par des rayons, augmenté de points $P_i$, au plus en infinité dénombrable, situés sur des droites exceptionnelles.

L'ensemble des arguments des points de $e_1$ n'est autre que l'ensemble des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles la fonction $\rho(\lambda)$ qui définit l'étoile (*voir* § **1**) atteint son maximum R. $\rho(\lambda)$ étant semi-continue inférieurement, $e_1$ appartient à la catégorie A, et l'ensemble $\mathcal{E}$ obtenu en lui ajoutant un ensemble dénombrable appartient encore à la catégorie A. De plus, on voit aisément d'après l'étude faite au paragraphe **2**, que si un intervalle appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$, ses extrémités lui appartiennent aussi; donc $\mathcal{E}$ est de la catégorie A'.

L'ensemble $e_1$ est même le plus général de la catégorie A. En effet, étant donné un ensemble $e_1$ quelconque de cette catégorie, on peut trouver, d'après le paragraphe **5**, une fonction $\rho(\lambda)$ semi-continue inférieurement, de maximum un, de période $2\pi$, et de borne inférieure positive. Elle définit une étoile, pour laquelle l'ensemble $\mathbf{M}[\rho(\lambda)=1]$ est identique à $e_1$

On verrait de même que l'ensemble $\mathcal{E}$ est le plus général de la catégorie A'.

## CHAPITRE II.

### LES FONCTIONS ÉTOILÉES.

**1. Généralités.** — *Une fonction $w=f(z)$ régulière pour $|z|<1$, avec $f(0)=0$, est dite étoilée dans le cercle unité lorsqu'elle en représente conformément l'intérieur sur une étoile de centre origine dans le plan $w$.*

D'après le théorème général de la représentation conforme [*voir* par exemple C. Carathéodory (*d*) ou (*f*)], étant donnée une étoile de centre origine dans le plan $w$ dont la frontière comprend un point autre que le point à l'infini, il lui correspond une fonction étoilée et une seule, si l'on veut que l'argument de la dérivée à l'origine soit nul.

Commençons par rappeler quelques propriétés des fonctions étoilées qui nous seront utiles dans la suite [pour les démonstrations, *voir* W. Seidel (*a*)].

1° *Si $w=f(z)$ est une fonction étoilée dans le cercle unité, les domaines $E_r$ limités par les images $\Gamma_r$ des cercles $C_r$ du plan $z$, de centre origine et de rayon $r<1$, sont aussi des étoiles.*

2° $\arg f(re^{it})$ *est une fonction croissante de $t$ pour tout $r<1$, et l'on a*

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg f(re^{it}) = \mathcal{R}\, z\frac{f'(z)}{f(z)} > 0 \tag{II, 1}$$

*en tout point intérieur au cercle unité.*

3° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$ régulière dans le cercle unité avec la condition $f(0)=0$ soit étoilée dans ce cercle est que l'on ait, dans ce même cercle :*

$$\mathcal{R}\, z\frac{f'(z)}{f(z)} > 0,$$

*et de plus que la dérivée à l'origine $f'(0)$ ne soit pas nulle.*

**2. Définition de la valeur d'une fonction étoilée en un point du cercle unité.** — Une fonction étoilée étant univalente, la limite de $f(z)$ quand on tend vers le cercle unité le long d'un rayon, ou plus généralement sur les chemins non tangents, existe et est finie presque partout [W. Seidel ($a$)]. Mais nous allons voir que *la limite, finie ou infinie, existe partout.*

En effet, le module de $f(re^{it})$ est une fonction croissante de $r$, car on a, en considérant la fonction $\operatorname{Log} f$, de la variable $\operatorname{Log} r + it$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{I}(\operatorname{Log} f) = \frac{\partial}{\partial(\operatorname{Log} r)}\mathcal{R}(\operatorname{Log} f),$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg f(re^{it}) = r\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Log}|f(re^{it})| .$$

Le premier membre, d'après (II, 1), est positif, et par conséquent $|f(re^{it})|$ croît avec $r$. Il en résulte que ce module tend vers une limite, finie ou infinie, pour $r$ tendant vers un.

Utilisons les résultats topologiques du Chapitre I. Le point $f(re^{it})$ tend vers le bout premier $B_t$ de l'étoile E, et comme tous les points à distance finie d'un bout premier d'une étoile ont le même argument, on en conclut le

Théorème I. — *$f(re^{it})$ tend vers le point accessible de $B_t$ situé à distance finie ou infinie, et que nous désignerons par $f(e^{it})$.*

Les quantités $\arg f(e^{it})$ et $|f(e^{it})|$ sont égales à l'argument et au module de $B_t$ tels qu'ils ont été définis Chapitre I, paragraphe **2**. On a par conséquent le

Théorème II. — *$\arg f(e^{it})$ est une fonction monotone non décroissante, et $|f(e^{it})|$ est une fonction toujours égale à ses limites inférieures à droite et à gauche.*

**3. Correspondance entre fonctions à partie réelle positive et fonctions monotones.** — Cette correspondance a été étudiée par C. Carathéodory ($c$). L'énoncé dont nous avons besoin étant quelque peu différent, nous reproduirons la démonstration avec de légères modifications.

Soit

$$\left\{\begin{aligned}&\psi(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^k,\\&\beta_k=b_k-i\bar{b}_k\end{aligned}\right.$$

une fonction analytique, qui est régulière dans le cercle unité $|z|<1$, y possède une partie réelle positive, et satisfait à $\psi(0)=1$. Posant $z=re^{i\vartheta}$, on peut écrire

$$(\text{II}, 2)\qquad \mathcal{R}\psi(re^{i\vartheta})=1+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos k\vartheta+\bar{b}_k\sin k\vartheta)r^k.$$

Remarquons que les fonctions

$$(\text{II}, 3)\qquad \lambda(r,t)=\int_0^t \mathcal{R}\psi(re^{i\vartheta})\,d\vartheta$$

sont, comme fonctions de $t$, monotones croissantes et uniformément bornées dans l'intervalle $0<t<2\pi$, car on a toujours

$$\lambda(r,t)<\int_0^{2\pi}\mathcal{R}\psi(re^{i\vartheta})\,d\vartheta=2\pi.$$

De plus, il résulte de (II, 2) que les coefficients de Fourier de $\lambda(r, t)$ qui dépendent de $r$ convergent vers des nombres déterminés lorsque $r$ tend vers 1.

Au moyen du théorème 2 du Mémoire cité, on voit que pour tous les points de l'intervalle $0<t<2\pi$, sauf au plus pour une infinité dénombrable d'entre eux, la valeur limite

$$(\text{II}, 4)\qquad \lim_{r=1}\lambda(r,t)=\lambda_0(t)$$

existe [1], $\lambda(t)$ étant une fonction monotone, non nécessairement continue. On

---

[1] La valeur limite existe pour tous les points de l'intervalle $0<t<2\pi$. Posons $z=z_1e^{i\alpha}$ et $\vartheta_1=\arg z_1$. $\psi(z)$ devient une fonction $\psi_1(z_1)$ telle que

$$(\text{II}, 5)\qquad \psi_1(re^{i\vartheta_1})=\psi(re^{i\vartheta}),\qquad \vartheta=\vartheta_1+\alpha.$$

D'après le resultat obtenu ci-dessus, la limite de l'expression

$$\int_0^t \mathcal{R}\psi_1(re^{i\vartheta_1})\,d\vartheta_1,$$

lorsque $r$ tend vers 1 existe pour toute valeur de $t$ sauf au plus pour une infinité dénoma de plus

$$\lambda_0(+0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_0(t) \leqq \lambda_0(2\pi - 0) \leqq 2\pi.$$

Soient maintenant $z$ un nombre complexe et $\rho$ un nombre positif qui satisfont aux conditions

$$|z| < \rho < 1;$$

on a alors l'égalité connue (dont la partie réelle coïncide avec la formule de Poisson) :

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{it} + z}{\rho e^{it} - z}\, \mathcal{R}\psi(\rho e^{it})\, dt + \mathcal{I}\psi(0).$$

Par hypothèse $\mathcal{I}\psi(0) = 0$, et la formule s'écrit, d'après (II, 3) :

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{it} + z}{\rho e^{it} - z}\, \frac{d}{dt}\lambda(\rho, t)\, dt.$$

Une intégration par parties donne :

$$\psi(z) = \frac{\rho + z}{\rho - z} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\, \frac{\rho e^{it} + z}{\rho e^{it} - z}\, \lambda(\rho, t)\, dt.$$

ou, si l'on fait tendre $\rho$ vers un,

$$\text{(II, 6)} \qquad \psi(z) = \frac{1 + z}{1 - z} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\, \frac{1 + z e^{-it}}{1 - z e^{-it}}\, \lambda(t)\, dt.$$

Cette dernière expression peut être transformée en une intégrale de Stieltjès. Employons la formule d'intégration par parties du chapitre préliminaire, en posant $\lambda(-0) = \lambda(2\pi - 0) - 2\pi$ :

$$\psi(z) = \frac{1 + z}{1 - z} - \frac{1}{2\pi}\, \mathbf{A}\left[0 \leqq t < 2\pi : \lambda(t)\, \frac{1 + z e^{-it}}{1 - z e^{-it}}\right] + \frac{1}{2\pi}\int_{0 \leqq t < 2\pi} \frac{1 + z e^{-it}}{1 - z e^{-it}}\, d\lambda(t);$$

---

brable. Or cette expression s'écrit, d'après (II, 5),

$$\int_\alpha^{\alpha + t} \mathcal{R}\psi(re^{i\vartheta})\, d\vartheta.$$

Étant donnée une valeur quelconque de $\theta$, comprise entre 0 et $2\pi$, on peut donc trouver un nombre $t$ compris entre 0 et $2\pi - \theta$ tel que les intégrales de $\mathcal{R}\psi(re^{i\vartheta})$ prises de 0 à $\theta + t$ et de $\theta$ à $\theta + t$ convergent toutes deux. Il en est de même de leur différence

$$\int_0^\theta \mathcal{R}\psi(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

qui converge donc quel que soit $\theta$.

d'où

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0\leqq t<2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\lambda(t). \tag{II, 8}$$

Les intégrales des formules équivalentes (II, 6) et (II, 8) ne changent pas si l'on ajoute une constante à $\lambda$ ou si l'on modifie $\lambda$ en ses points de discontinuité.

*Réciproquement*, soit $\lambda(t)$ une fonction monotone définie pour toute valeur de $t$ telle que $0 \leqq t < 2\pi$. La formule (II, 6) lui fait correspondre une fonction $\psi(z)$ qui est à partie réelle positive dans le cercle unité avec $\psi(0) = 1$, car la fonction

$$\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}$$

a dans ce cercle une partie réelle positive pour toute valeur réelle de $t$.

Montrons maintenant que dans l'équation (II, 6), la fonction monotone $\lambda(t)$ est déterminée univoquement à une constante additive près en tous ses points de continuité par la donnée de $\psi(z)$. Pour cela, considérons le développement en série de Fourier de $\lambda(t)$ pour $0 < t < 2\pi$. On a, en tout point de cet intervalle :

$$\frac{\lambda(t+0)+\lambda(t-0)}{2} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \bar{a}_k \sin kt;$$

le développement est indépendant de la valeur de $\lambda$ en ses points de discontinuité. Posons

$$\alpha_k = a_k - i\bar{a}_k,$$

et considérons la fonction

$$\Phi(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

On constate, d'après l'égalité des coefficients, que cette dernière équation peut s'écrire

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\lambda(t)\,dt, \tag{II, 9}$$

d'où il résulte que $\Phi(z)$ est régulière pour $|z| < 1$. Si maintenant on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = -iz\frac{\partial}{\partial z}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}, \tag{II, 9 bis}$$

on peut, en utilisant (II, 9), remplacer (II, 6) par

$$\psi(z) = \frac{1+z}{1-z} + iz\Phi'(z). \tag{II, 9 ter}$$

On peut donc déterminer les coefficients $\alpha_k$ de $\Phi(z)$ au moyen du développement en série de puissances de $\psi(z)$, et il en résulte que les coefficients de Fourier de $\lambda(t)$, sauf $a_0$, sont univoquement déterminés. Ainsi la formule (II, 6), lorsqu'on donne $\psi(z)$, détermine $\lambda(t)$ en tous ses points de continuité à une constante additive près, et cette fonction $\lambda(t)$ doit par conséquent coïncider avec la fonction obtenue à partir de $f(z)$ au moyen des formules (II, 3) et (II, 4), tant que $t$ reste compris entre o et $2\pi$.

On en conclut le

Théorème III. — *En considérant comme équivalentes deux fonctions monotones définies pour* $0 < t < 2\pi$ *qui ne diffèrent que d'une constante en tous leurs points de continuité, on peut énoncer le résultat obtenu en disant :*

*Il existe une correspondance biunivoque entre, d'une part, les ensembles de fonctions monotones équivalentes satisfaisant à* $\lambda(2\pi - 0) - \lambda(+0) \leqq 2\pi$, *et, d'autre part, les fonctions* $\psi(z)$ *à partie réelle positive dans le cercle unité, avec* $\psi(0) = 1$. *Cette correspondance peut être obtenue de la façon suivante : étant donnée* $\lambda(t)$, *on en déduit la fonction* $\psi(z)$ *correspondante au moyen de la formule*

$$\text{(II, 6)} \qquad \psi(z) = \frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\,\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\lambda(t)\,dt;$$

*étant donnée* $\psi(z)$, $\lambda$ *peut être définie pour* $0 < t < 2\pi$ *par*

$$\text{(II, 10)} \qquad \lambda_0(t) = \lim_{r=1} \int_0^t \mathcal{R}\psi(re^{i\vartheta})\,d\vartheta;$$

*les autres fonctions* $\psi(t)$ *équivalentes s'obtiennent donc en ajoutant une constante à* $\lambda_0(t)$, *et en modifiant* $\lambda_0(t)$ *en ses points de discontinuité.*

Donnons encore l'énoncé de l'un des théorèmes du Mémoire cité :

Théorème III *bis*. — *Si une suite de fonctions* $\psi_n(z)$ *à partie réelle positive dans le cercle unité* C, *avec* $\psi_n(0) = 1$, *tend dans* C *vers une fonction* $\psi(z)$, *cette dernière est à partie réelle positive avec* $\psi(0) = 1$, *et les fonctions* $\lambda_n(t)$ *correspondant aux* $\psi_n(z)$ *tendent vers la fonction* $\lambda(t)$ *qui correspond à* $\psi(z)$, *à condition de choisir convenablement les constantes arbitraires qui figurent dans les* $\lambda_n$ *et dans* $\lambda$.

**4. Correspondance entre fonctions étoilées et fonctions monotones.** — *Désignons par* F *la famille des fonctions* $f(z)$ *étoilées dans le cercle* $|z| < 1$, *avec* $f(0) = 0$, *et satisfaisant de plus à la condition* $f'(0) = 1$.

Étant donnée une étoile dont la frontière a un point à distance finie, il suffit de la transformer par une homothétie convenable de centre origine pour qu'il lui corresponde une fonction de la famille F qui représente sur elle le cercle unité.

La condition nécessaire et suffisante du paragraphe 1 pour qu'une fonction soit étoilée conduit à une correspondance entre les fonctions de la famille F et les fonctions à partie réelle positive.

En effet, $f(z)$ étant une fonction étoilée, la fonction

$$\psi(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

est régulière dans le cercle unité et y possède une partie réelle positive; de plus

$$\psi(0) = 1. \tag{II, 11}$$

Réciproquement, soit $\psi(z)$ une fonction analytique vérifiant ces conditions; toute fonction $f(z)$ telle que $\psi = z\frac{f'}{f}$ est donnée par la formule

$$\operatorname{Log} f(z) = \int_0^z \frac{\psi - 1}{z}\,dz + \operatorname{Log} z + \text{const.} \tag{II, 12}$$

Or, au voisinage de l'origine, $\psi$ est de la forme $1 + bz + \ldots$, et

$$\operatorname{Log} f(z) = \text{const.} + \operatorname{Log} z + bz + \ldots.$$

Si $z$ tend vers zéro, $\operatorname{Log}\frac{f(z)}{z}$ tend vers la constante; on a donc $\operatorname{Log} f'(0) = \text{const.}$, et une seule des fonctions (II, 12) appartient à la famille F; c'est celle qui est définie par

$$\operatorname{Log} f(z) = \operatorname{Log} z + \int_0^z \frac{\psi - 1}{z}\,dz.$$

On en conclut le

Théorème IV. — *Il y a correspondance biunivoque entre les fonctions de la famille* F, *et les fonctions* $\psi(z)$ *régulières dans le cercle unité, à partie réelle positive, et telles que* $\psi(0) = 1$. *Cette correspondance est définie par les deux formules réciproques :*

$$\psi(z) = \frac{zf'}{f} \tag{II, 13}$$

et

$$\operatorname{Log} f(z) = \operatorname{Log} z + \int_0^z \frac{\psi - 1}{z}\,dz. \tag{II, 14}$$

A l'aide du théorème III, nous obtenons le

Théorème V. — *Il existe une correspondance biunivoque entre les fonctions*

*$f(z)$ de la famille F, et les ensembles de fonctions monotones $\lambda_f(t)$ équivalentes entre elles au sens du théorème III, définies pour $0 < t < 2\pi$, et vérifiant la condition*

$$\lambda_f(2\pi - 0) - \lambda_f(+0) \leqq 2\pi.$$

*Précisons cette correspondance :*

Étant donnée $\lambda_f(t)$, la fonction $f(z)$ correspondante est définie par les formules (II, 6) et (II, 14). Celles-ci donnent, en utilisant la relation (II, 9 *bis*) :

$$\frac{\psi - 1}{z} = \frac{2}{1-z} - \frac{1}{2\pi i}\int^{2\pi} \frac{d}{dz}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right)\lambda_f(t)\,dt,$$

d'où [1]

$$\text{(II, 15)} \qquad \operatorname{Log} f(z) = \operatorname{Log}\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\lambda_f(t)\,dt,$$

chacun des membres étant défini à $2k\pi i$ près ($k$ entier).

Inversement, étant donnée $f(z)$, on déduit de (II, 3) et de (II, 13) la valeur de $\lambda(r, t)$ :

$$\lambda(r, t) = \int_0^t \mathcal{R}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)dt,$$

d'où, d'après l'égalité (II, 1) :

$$\text{(II, 16)} \qquad \lambda(r, t) = \arg f(re^{it}) - \arg f(r).$$

Si l'on fait tendre $r$ vers un, le premier membre tend vers $\lambda(t)$, et en s'appuyant seulement sur l'existence d'une valeur de $t$ pour laquelle $\arg f(re^{it})$ et $\lambda(r, t)$ ont des limites, la formule ci-dessus montre que ces deux quantités ont une limite pour toute valeur de $t$. On retrouve donc le résultat démontré au paragraphe **3** qui dit que $\lambda(r, t)$ a une limite pour toute valeur de $t$. On généralise en même temps le théorème I : pour une fonction étoilée $f(z)$, $\arg f(re^{it})$ a une limite lorsque $r$ tend vers un, quelle que soit la valeur fixe de $t$ considérée, même dans le cas où $|f(re^{it})|$ a une limite infinie [2].

---

[1] On peut aussi mettre cette expression sous la forme d'une intégrale de Stieltjès :

$$\text{(II, 15 \textit{bis})} \qquad \operatorname{Log} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0 \leqq t < 2\pi} - \operatorname{Log}\left[\frac{(1 - e^{-it}z)^2}{z}\right] d\lambda_f(t).$$

[2] $\arg f(re^{it})$ tend alors vers $\dfrac{\arg f(e^{i(t+0)}) + \arg f(e^{i(t-0)})}{2}$. M. L. Ahlfors m'a indiqué une démonstration de ce fait basée sur la méthode générale qu'il a développée ($a$).

L'équation (II, 16) donne

$$\lambda(t) = \arg f(e^{it}) - \arg f(1).$$

Par conséquent, les fonctions $\lambda_f(t)$ correspondant à $f(z)$ sont données en tous leurs points de continuité par la formule

(II, 16 *bis*) $$\lambda_f(t) = \arg f(e^{it}) + \text{const.}$$

On retrouve ainsi le résultat énoncé à la fin du paragraphe **2** de ce chapitre : $\arg f(e^{it})$ est une fonction monotone de $t$.

Le théorème V peut prendre la forme suivante :

Théorème VI. — *Étant donnée une fonction monotone $\lambda(t)$ vérifiant les conditions du théorème V, il existe une fonction de la famille* F *et une seule dont l'argument prend en tout point du cercle unité d'argument t la valeur $\lambda(t)$ à une constante près, sauf peut-être aux points de discontinuité de $\lambda(t)$, et cette fonction est définie par la formule* (II, 15).

Par contre, il ne semble pas y avoir de condition simple caractérisant les fonctions $|f(e^{it})|$ qui correspondent aux fonctions de la famille F.

Donnons enfin, comme conséquence du théorème III *bis*, le

Théorème VII. — *Si une suite $f_n(z)$ de fonctions de la famille* F *converge vers une fonction $f(z)$ de* F, *la suite $\lambda_n(t)$ correspondant aux $f_n$ converge vers la fonction $\lambda(t)$ correspondant à $f$, à condition de choisir convenablement les constantes dont dépendent les $\lambda_n$ et $\lambda$.*

**5. Formule fondamentale donnant, sur la circonférence C du cercle unité, la valeur du module d'une fonction étoilée, en fonction des valeurs de l'argument sur C.** — $f(z)$ désignant toujours une fonction de la famille F, nous allons déduire de ce qui précède une formule donnant $\operatorname{Log}|f(e^{it})|$ sous forme d'une intégrale en fonction de $\lambda(t)$. Ce ne sera pas autre chose que la formule (II, 15) dans laquelle on aura fait tendre le module de $z$ vers l'unité. La formule (II, 15) donne, pour $z$ réel :

$$\operatorname{Log}|f(z)| = \operatorname{Log}\frac{|z|}{(1-z)^2} + \frac{z}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{1+z^2-2z\cos t}\lambda_f(t)\,dt.$$

Faisons tendre $z$ vers $-1$ ; la limite de l'intégrale du second membre est, d'après P. Fatou ($a$), page 359, égale à la valeur principale au sens de Cauchy de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{tang} \frac{t}{2} \lambda_f(t)\, dt$$

On a donc

(II, 19) $$\operatorname{Log}|f(-1)| = \operatorname{Log}\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon=+0} \left[\int_0^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \operatorname{tang}\frac{t}{2} \lambda_f(t)\, dt\right],$$

*les deux membres pouvant être infinis.*

Effectuons une rotation d'un angle $\theta - \pi$ dans le plan de la variable $z$ : le point $-1$ devient $e^{i\theta}$, $\lambda_f(t) = \arg f(e^{it})$ devient $\lambda_f(t + \theta - \pi)$ et la relation (II, 19) s'écrit (¹) :

$$\operatorname{Log}|f(e^{i\theta})| = \operatorname{Log}\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon=+0} \left[\int_0^{\pi-\varepsilon} + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \operatorname{tang}\frac{t}{2} \lambda_f(t+\theta-\pi)\, dt\right];$$

d'où, en posant

$$\varphi(t) = \lambda_f(\theta + t) - \lambda_f(\theta - t),$$

$$\operatorname{Log}|f(e^{i\theta})| = \operatorname{Log}\frac{1}{4} + \lim_{\varepsilon=+0} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{+\pi} \varphi(t) \cot\frac{t}{2}\, dt \text{ (²)},$$

les deux membres pouvant encore être infinis.

Intégrons par parties, d'après la formule du chapitre préliminaire, dans l'intervalle $\varepsilon < t < \pi$. D'après l'égalité

$$\mathbf{A}\left[\varepsilon < t < \pi;\ 2\varphi(t) \operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right] = -2\varphi(\varepsilon + 0) \operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

nous obtenons

(II, 20) $$\int_\varepsilon^{+\pi} \varphi(t) \cot\frac{t}{2}\, dt = 2\varphi(\varepsilon+0) \operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} + \int_{\varepsilon<t<\pi} 2 \operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\, d\varphi(t).$$

*Supposons d'abord* $\lambda_f(t)$ *continue au point* $\theta$. Alors $\varphi(t)$ tend vers zéro pour $t$ tendant vers zéro. Nous allons montrer que si la limite du premier membre de (II, 20) existe, elle est égale à la limite de l'intégrale de Stieltjès du second membre; si au contraire le premier membre n'a pas de limite, l'intégrale de Stieltjès tend en croissant vers $+\infty$. Dans les deux cas, *les limites de* $\operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|$ *et de l'intégrale de Stieltjès augmentée de* $\operatorname{Log}\frac{1}{4}$ *seront égales.*

---

(¹) Nous supposons ici que $\lambda_f(t)$ n'est plus seulement définie entre 0 et $2\pi$.

(²) Cette formule peut aussi être obtenue au moyen de la relation donnée par P. Fatou (*a*) appliquée aux parties réelle et imaginaire de $i \operatorname{Log}\frac{f(z)}{z}$.

Les deux termes du second membre de (II, 20) étant positifs, il suffit de montrer que si le premier terme ne tend pas vers zéro, l'intégrale de Stieltjès augmente indéfiniment. Si ce terme ne tend pas vers zéro, on peut trouver une suite de nombres positifs $\eta_i$ tendant vers zéro, telle que l'on ait, pour tout $i$ :

$$\text{(II, 21)} \qquad \varphi(\eta_i + 0) . \operatorname{Log} \frac{1}{\sin \frac{\eta_i}{2}} > \alpha,$$

$\alpha$ étant un nombre positif. D'autre part, la formule de la moyenne donne

$$\text{(II, 22)} \qquad \int_{a \leqq t \leqq b} 2 \operatorname{Log} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} d\varphi(t) \geqq \underset{a \leqq t \leqq b}{\mathfrak{M}} \, 2 \operatorname{Log} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} . \mathbf{A}[a \leqq t \leqq b;\, \varphi(t)]$$

$$= 2 \operatorname{Log} \frac{1}{\sin \frac{b}{2}} [\varphi(b+0) - \varphi(a-0)].$$

Prenons $b = \eta_i$ et $a$ égal à un nombre $\varepsilon_i$ assez petit pour que l'on ait

$$\text{(II, 23)} \qquad \varphi(\varepsilon_i - 0) < \frac{\varphi(\eta_i + 0)}{2},$$

ce qui est possible puisque $\varphi(t)$ tend vers zéro pour $t$ tendant vers zéro ; nous obtenons, d'après (II, 21), (II, 22) et (II, 23),

$$\int_{\varepsilon_i \leqq t \leqq \eta_i} 2 \operatorname{Log} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} d\varphi(t) > \operatorname{Log} \frac{1}{\sin \frac{\eta_i}{2}} . \varphi(\eta_i + 0) > \alpha.$$

Comme $\eta_i$ tend vers zéro, on en conclut que l'intégrale de Stieltjès de (II, 20) augmente indéfiniment.

Cette intégrale peut s'écrire autrement ; en effet

$$\int_{\varepsilon < t < \pi} 2 \operatorname{Log} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} d[\lambda_f(\theta + t) - \lambda_f(\theta - t)] = \int_{\theta - \pi < t < \theta - \varepsilon} 2 \operatorname{Log} \frac{1}{\left| \sin \frac{t - \theta}{2} \right|} d\lambda_f(t)$$

$$+ \int_{\theta + \varepsilon < t < \theta + \pi} 2 \operatorname{Log} \frac{1}{\left| \sin \frac{t - \theta}{2} \right|} d\lambda_f(t).$$

E étant un ensemble de la circonférence unité, et $\overline{\mathrm{E}}$ l'ensemble des arguments des points de E, pris avec la détermination qui satisfait à $0 \leqq t < 2\pi$, écrivons, d'une manière générale, $\int_{\mathrm{E}} \mathrm{F}(t) d\lambda(t)$ au lieu de $\int_{\overline{\mathrm{E}}} \mathrm{F}(t) d\lambda(t)$. Lorsque $t$ tend vers $\theta - \pi$ ou vers $\theta + \pi$, la fonction à intégrer du second membre tend vers zéro, et l'on peut ajouter le point correspondant de C sans rien modifier. La somme des deux intégrales du second membre est donc égale à

$$\int_{C-[\theta-\varepsilon\leq t\leq\theta+\varepsilon]} 2\,\mathrm{Log}\frac{1}{\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right|}\,d\lambda_f(t).$$

En vertu de la continuité de $\lambda_f(t)$ au point $\theta$, cette dernière intégrale a pour limite finie ou non, lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro,

(II, 21) $$\int_C 2\,\mathrm{Log}\frac{1}{\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right|}\,d\lambda_f(t).$$

*Examinons maintenant le cas où $\lambda_f(t)$ est discontinue au point* $\theta$. L'intégrale (II, 21) est infinie; d'autre part, dans (II, 20), le deuxième membre n'a pas de limite, et le premier n'en a par conséquent pas non plus; donc $\mathrm{Log}|f(e^{i\theta})|$ est infini.

Nous avons finalement, pour toute valeur de $\theta$,

$$\mathrm{Log}|f(e^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_C 2\,\mathrm{Log}\frac{1}{\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right|}\,d\lambda_f(t) + \mathrm{Log}\frac{1}{4} \quad (^1),$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathrm{Log}|f(e^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_C 2\,\mathrm{Log}\frac{1}{2\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right|}\,d\lambda_f(t).$$

Si l'on désigne par $r_{t\theta}$ la distance des points d'argument $t$ et $\theta$ de la circonférence unité C, on peut aussi écrire [2]

(II, 22) $$\mathrm{Log}|f(e^{i\theta})| = \frac{1}{\pi}\int_C \mathrm{Log}\frac{1}{r_{t\theta}}\,d\lambda_f(t).$$

---

[1] On retrouve ici un résultat connu : on a toujours $|f(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{4}$. L'égalité ne peut être atteinte que si $\varphi(t)$ est nul dans l'intervalle $0 < t < \pi$, ce qui exige que $\lambda_f(t)$ soit constant dans l'intervalle $\theta - \pi < t < \theta + \pi$. Par conséquent l'étoile se compose alors de tout le plan, moins une demi-droite d'argument $\theta + \pi$ et issue du point de module $\frac{1}{4}$. La formule (II, 15) montre que l'on a alors $f(z) = \frac{z}{(1+e^{-i\theta}z)^2}$, ce qui, par une rotation simultanée dans les plans de la variable et de la fonction, se réduit à $f_1(z_1) = \frac{z_1}{(1-z_1)^2}$.

[2] La fonction $\log\frac{1}{r_{t\theta}}$ est infinie pour $t = \theta$; si $\lambda(t)$ est discontinue pour $t = \theta$, il

L'intégrale du second membre est ici le potentiel logarithmique au point de C d'argument $\theta$, dû à des masses de somme $2\pi$, dont la répartition sur C est donnée par la fonction $\lambda_f(t)$ (1).

On peut conclure de ce qui précède que si une fonction $\lambda(t)$ conduit à une étoile bornée, on a, quel que soit $\theta$,

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\lambda(\theta+\varepsilon+0)-\lambda(\theta-\varepsilon-0)\right]\operatorname{Log}\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}=0,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\lambda(\theta+\varepsilon)-\lambda(\theta-\varepsilon)\right]\operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon}=0.$$

Enfin, on reconnaît aisément, d'après la formule (II, 22), que $|f(e^{i\theta})|$ est toujours égale à ses limites inférieures à droite et à gauche, conformément au résultat du théorème I.

**6. Formule relative à la représentation conforme de deux étoiles l'une sur l'autre, lorsque la dérivée à l'origine est égale à un.** — Considérons deux étoiles de centre origine, sur lesquelles se trouve représenté conformément le cercle unité au moyen de deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ de la famille F. Désignant comme précédemment par $\lambda_f(t)$ et $\lambda_g(t)$ les arguments des fonctions $f$ et $g$ aux points du cercle unité, nous allons démontrer la formule suivante (2)

$$\text{(II, 23)} \qquad \boxed{\int_C \operatorname{Log}|f(e^{it})|\,d\lambda_g(t)=\int_C \operatorname{Log}|g(e^{it})|\,d\lambda_f(t)}$$

dont les deux membres peuvent d'ailleurs être infinis.

---

importe de ne pas retrancher le point $\theta$ du cercle d'intégration C, sans quoi la formule ne serait plus vraie. En d'autres termes, on ne peut pas remplacer la fonction à intégrer par une autre qui lui est égale partout où elle est finie, et qui est nulle au point où elle est infinie.

(1) Dans le cas d'une fonction $f(z)$ régulière aux points $|z|\leqq 1$, la formule (II, 22) est une conséquence directe de la formule de Green, appliquée aux parties réelles et imaginaires de $i\operatorname{Log}\frac{f(z)}{z}$.

(2) Dans le cas où les fonctions $f$ et $g$ sont régulières pour $|z|\leqq 1$, cette formule est une conséquence de la formule de Green. Celle-ci, appliquée à deux couples de fonctions harmoniques conjuguées, $u$, $v$ et $u_1$, $v_1$, régulières à l'intérieur d'un contour $\Gamma$ et sur ce contour, donne $\int_\Gamma u_1 dv_2 - u_2 dv_1 = 0$. Posons $\chi_1(z)=\operatorname{Log}\frac{f(z)}{z}$, $\chi_2(z)=\operatorname{Log}\frac{g(z)}{z}$. Si l'on prend pour $u_1$, $v_1$ et pour $u_2$, $v_2$ les parties réelles et imaginaires de $\chi_1$ et $\chi_2$, et pour $\Gamma$ le cercle unité, on obtient la formule ci-dessus.

En utilisant la formule fondamentale (II, 22), nous sommes ramenés à démontrer la possibilité d'intervertir l'ordre des intégrations dans l'expression

$$\int_C \left[ \int_C \operatorname{Log} \frac{1}{r_{t\theta}} \, d\lambda_f(t) \right] d\lambda_g(\theta).$$

Cette interversion est possible, car nous sommes dans le cas examiné au chapitre préliminaire, I étant ici l'intervalle $0 \leq t < 2\pi$. Il suffisait que la fonction à intégrer fût bornée inférieurement et appartînt à une classe de Baire; elle pouvait prendre des valeurs infinies.

Dans le cas particulier où $g(z) = z$, on a $\lambda_g(t) = t$, et la formule (II, 23) se réduit à

$$\int_C \operatorname{Log} |f(e^{it})| \, dt = 0.$$

## CHAPITRE III.

### FAMILLES DE FONCTIONS ÉTOILÉES CORRESPONDANT A UN ENSEMBLE $\Delta$ SITUÉ SUR LA CIRCONFÉRENCE UNITÉ.

**1. Définition de différentes familles de fonctions étoilées.** — Soit $\Delta$ un ensemble situé sur la circonférence unité C dans le plan de la variable $z$. Pour pouvoir considérer des intégrales de Stieltjès étendues à $\Delta$, nous supposerons que $\Delta$ est un ensemble de Borel (II); ces intégrales conserveront un sens, quelle que soit la fonction déterminante (chapitre préliminaire).

F désigne toujours la famille des fonctions $f(z)$ étoilées pour $|z| < 1$, avec les conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. *Considérons d'abord les fonctions de* F *pour lesquelles* $|f(e^{it})|$ *atteint son maximum* R *fini ou non* (que nous avons appelé rayon de l'étoile) *en tout point de* $\Delta$. *Ces fonctions formeront la famille* $\Phi_\Delta^*$; celle-ci contient toujours la fonction $z$.

Faisons quelques remarques relatives à cette famille :

1° Considérons l'étoile sur laquelle une fonction $f(z)$ de $\Phi_\Delta^*$ représente le cercle $|z| < 1$. Soit C′ le cercle dont le centre est à l'origine, et dont le rayon est le rayon R de l'étoile; à un point de $\Delta$ d'argument $t$ correspond un bout premier de l'étoile réduit au point d'argument $\lambda_f(t)$ du cercle C′. Ainsi à $\Delta$ correspond un ensemble $\Delta'$ de C′.

2° Toutes les fois que $\Delta_1$ est contenu dans $\Delta$, il est évident que $\Phi^*_{\Delta_1}$ contient $\Phi^*_\Delta$.

3° Prenons une fonction $f(z)$ de la famille F différente de $z$; soient R le rayon de l'étoile correspondante, $\Delta_f$ l'ensemble des points de C pour lesquels $|f(e^{it})| = \mathrm{R}$ (*cf.* Chap. I, § 4) : si $\Delta$ est contenu dans $\Delta_f$, la famille $\Phi^*_\Delta$ contient $f$. Or $\Delta_f$, on l'a vu, satisfait aux deux conditions suivantes : il est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts, et s'il contient un intervalle, il contient aussi ses extrémités. On pourrait donc, sans restreindre la généralité, ne considérer les familles $\Phi^*_\Delta$ que pour ces ensembles.

Définition. — *Si, pour un ensemble $\Delta$, la famille $\Phi^*_\Delta$ ne contient que la fonction $z$, nous dirons que $\Delta$ est du* TYPE MAXIMUM : dans ce cas, tout ensemble contenant $\Delta$ est aussi du type maximum.

Ces ensembles sont définis indirectement; nous cherchons à les caractériser par des propriétés de structure. Tout d'abord, un intervalle $\Delta$ de longueur inférieure à $2\pi$ n'est pas du type maximum (*cf.* Introduction, et, ci-dessous, calcul d'une fonction de la famille $\Phi^*_\Delta$). Par conséquent un ensemble dont le complémentaire contient un intervalle n'est pas du type maximum.

Au contraire, un ensemble $\Delta$ dont le complémentaire est de mesure nulle est toujours du type maximum. En effet, soit $f(z)$ une fonction de $\Phi^*_\Delta$ de rayon R; considérons la fonction harmonique

$$\operatorname{Log}\left|\frac{f(z)}{\mathrm{R}z}\right| :$$

elle est régulière et bornée dans le cercle unité, et tend vers zéro quand $z$ tend vers un point de $\Delta$ le long d'un rayon. Si nous représentons cette fonction par une intégrale de Poisson prise le long d'un cercle de centre origine et de rayon $r < 1$, et que nous fassions tendre $r$ vers un, nous voyons qu'elle est identiquement nulle [1]. On a donc, pour $|z| < 1$,

$$\left|\frac{f(z)}{\mathrm{R}z}\right| = 1,$$

et $f(z)$ se réduit à $z$. Nous retrouverons d'ailleurs ce résultat au paragraphe suivant.

Il reste donc à examiner le cas où $\Delta$ est partout dense et possède un complémentaire de mesure non nulle. Un tel ensemble n'est pas toujours du type maxi-

(1) *Voir* Fatou (*a*).

mum, comme on le voit en représentant conformément sur un cercle l'étoile $E_2$ du Chapitre I.

On pourrait croire alors qu'un ensemble dont le complémentaire est de mesure non nulle n'est jamais du type maximum. Nous donnerons un exemple du contraire. Sans parvenir à caractériser les ensembles du type maximum, nous nous contenterons de conditions, les unes nécessaires, les autres suffisantes, pour qu'un ensemble soit de ce type. Nous nous occuperons plus spécialement du cas où $\Delta$ se compose d'intervalles en infinité dénombrable et partout denses. Il est équivalent pour le contenu de $\Phi_\Delta^\star$ de les supposer ouverts ou fermés.

*Définissons maintenant une autre famille de fonctions étoilées. En posant, comme au Chapitre II,*

$$\lambda_f(t) = \arg f(e^{it}),$$

*désignons par* $F_\Delta$ *la famille des fonctions appartenant à* F *pour laquelle la variation de* $\lambda_f$ *est concentrée sur l'ensemble* $\Delta$, autrement dit, pour lesquelles

$$\mathbf{A}(\Delta; \lambda_f) = 2\pi. \qquad \text{(III, 1)}$$

Cette expression a toujours un sens, puisque $\Delta$ est un ensemble de Borel (chapitre préliminaire). Si $F_\Delta$ contient la fonction $z$, le complémentaire de $\Delta$ est de mesure nulle.

*Enfin, nous désignerons par* $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$ *la famille des fonctions appartenant à* $F_\Delta$ *et à* $\Phi_\Delta^\star$. Considérons l'image $\Delta'$ de l'ensemble $\Delta$, donnée par une fonction $f$ de cette famille. La mesure de l'ensemble des arguments des points de $\Delta'$ est, d'après (III, 1), égale à $2\pi$. *La mesure du complémentaire de* $\Delta'$ *est donc nulle.*

Nous verrons à la fin du Chapitre VI que cette famille peut être vide, et nous citerons un cas assez étendu où elle ne l'est pas. Bornons-nous ici à calculer l'unique fonction de $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$, dans le cas où $\Delta$ est un intervalle AB de longueur $\alpha$.

Effectuons d'abord la transformation

$$\sigma = \operatorname{tang}\varphi \frac{z-1}{z+1} \qquad \left(\varphi = \frac{\alpha}{4}\right) \qquad \text{(III, 2)}$$

qui représente le cercle $|z| < 1$ sur le demi-plan $\mathcal{R}(\sigma) > 0$.

Ensuite la transformation

$$\sigma_1^2 - \sigma^2 = 1, \qquad \text{(III, 3)}$$

amènera le plan $\sigma$ coupé par le segment $(-i, +i)$ sur le plan $\sigma_1$ coupé par le segment $(-1, +1)$; nous prendrons pour $\sigma_1$ la détermination qui amène l'origine O du plan $z$ au point $-\frac{1}{\cos\varphi}$.

Effectuons enfin la transformation

$$\sigma_1 = \frac{1}{\cos\varphi} \times \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}, \tag{III, 4}$$

qui ramène le point O à l'origine du plan $w_1$. La fonction $w_1 = f(z)$ ainsi

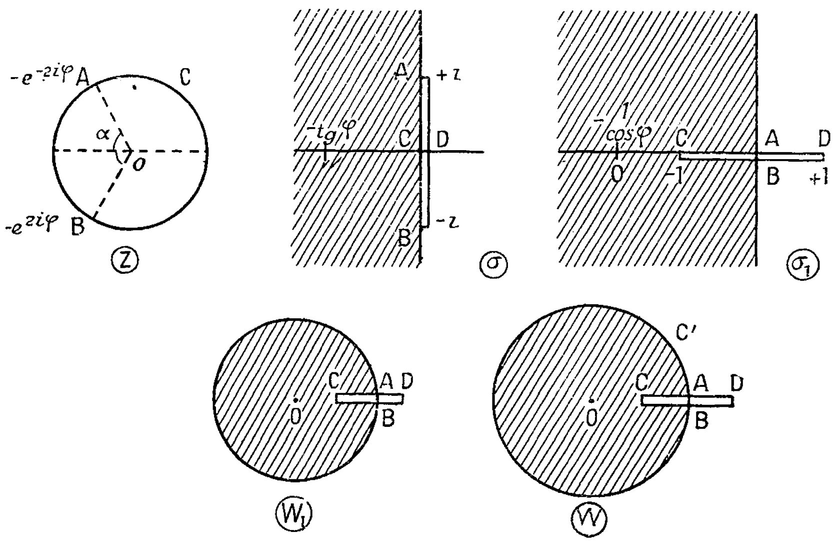



Fig. 11.

définie est étoilée; sa variation d'argument sur l'intervalle $\widehat{AMB}$ est égale à $2\pi$, mais sa dérivée à l'origine est inférieure à un, d'après le lemme de Schwarz. L'expression explicite de $f(z)$ est, d'après (III, 2), (III, 3) et (III, 4) :

$$w_1 = \frac{1}{4\sin^2\varphi} \times \frac{\left[1 + z - \sqrt{1 + 2z\cos 2\varphi + z^2}\right]^2}{z}.$$

Cherchons la dérivée à l'origine; nous avons

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)_0 = 2\operatorname{tang}\varphi, \qquad \left(\frac{d\sigma_1}{dw_1}\right)_0 = \frac{2}{\cos\varphi}, \qquad \left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_{z=0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)_{z=0} = \sin\varphi,$$

d'où

$$\left(\frac{dw_1}{dw}\right)_{z=0} = \sin^2\varphi.$$

La fonction $w = \frac{w_1}{\sin^2 \varphi}$ a une dérivée égale à un à l'origine ; elle appartient à la famille $[F_\Delta . \Phi^\star_\Delta]$ (¹). Le rayon de l'étoile sur laquelle elle représente le cercle unité est

$$R = \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}}.$$

Cette dernière valeur sera utilisée bientôt.

On peut considérer que la fonction $w = f(z)$ établit une correspondance conforme entre la surface de Riemann à deux feuillets du plan $z$ ramifiés en A et B, et la surface de Riemann du plan $w$ à deux feuillets ramifiés au point C et au symétrique de C par rapport à C′.

Terminons enfin par une remarque relative aux familles $\Phi^\star_\Delta$ et $[F_\Delta . \Phi^\star_\Delta]$. Si l'on connaît deux fonctions de l'une de ces familles, on en déduit une infinité d'autres, car la fonction

$$\varphi(z) = [f(z)]^\alpha . [g(z)]^{1-\alpha} \qquad (\alpha \text{ réel})$$

appartient encore à la même famille.

**2. Théorèmes sur les familles précédentes.** — Soit $f(z)$ une fonction de la famille F. Désignons par $m_f$ la borne inférieure des valeurs que prend son module sur l'ensemble $\Delta$.

Soit, d'autre part, $g(z)$ une fonction de la famille $F_\Delta$. Désignons par $M_g$ la borne supérieure des valeurs que prend son module sur la circonférence C du cercle unité ($M_g$ est aussi la borne supérieure de ce module sur $\Delta$, comme on l'a vu au Chapitre I, § **3**).

Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème I. — *On a toujours, avec les définitions ci-dessus :*

$$m_f \leqq M_g,$$

les deux membres pouvant d'ailleurs être infinis.

Écrivons pour $f$ et $g$ la formule (Chap. II, § **4**) relative à deux fonctions de

(¹) Un procédé simple montre que la correspondance entre les deux cercles C et C′ est définie par $\lambda(t) = 2 \arc\cos \left( \frac{\cos \frac{t}{2}}{\cos \varphi} \right)$, pour $2\varphi < t < 2\pi - 2\varphi$.

la famille F :

$$\text{(III, 5)} \qquad \int_C \operatorname{Log}|f(e^{it})|\, d\lambda_g(t) = \int_C \operatorname{Log}|g(e^{it})|\, d\lambda_f(t);$$

$g(z)$ appartenant à $F_\Delta$, la fonction $\lambda_g(t)$ a un accroissement $2\pi$ sur $\Delta$, et l'intégrale du premier membre se réduit à sa portion étendue à $\Delta$; l'égalité (III, 5) s'écrit donc :

$$\int_\Delta \operatorname{Log}|f(e^{it})|\, d\lambda_g(t) = \int_C \operatorname{Log}|g(e^{it})|\, d\lambda_f(t).$$

Minorons le premier membre et majorons le second à l'aide de la formule de la moyenne (chapitre préliminaire) :

$$\text{(III, 6)} \qquad \underline{\mathfrak{M}}_{t\subset\Delta}[\operatorname{Log}|f(e^{it})|].\mathbf{A}(\Delta;\lambda_g) \leqq \overline{\mathfrak{M}}_{t\subset C}[\operatorname{Log}|g(e^{it})|].\mathbf{A}(C;\lambda_f).$$

On déduit, des définitions des nombres $m_f$ et $M_g$, les égalités :

$$\underline{\mathfrak{M}}_{t\subset\Delta}[\operatorname{Log}|f(e^{it})|] = \operatorname{Log} m_f \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{t\subset C}[\operatorname{Log}|g(e^{it})|] = \operatorname{Log} M_g;$$

l'inégalité (III, 6) devient :

$$2\pi \operatorname{Log} m_f \leqq 2\pi \operatorname{Log} M_g,$$

d'où

$$m_f \leqq M_g.$$

Considérons maintenant la borne supérieure $\overline{m_\Delta}$ des nombres $m_f$ relatifs à toutes les fonctions $f(z)$ de la famille F, et la borne inférieure $\underline{M_\Delta}$ des nombres $M_g$ relatifs à toutes les fonctions $g(z)$ de la famille $F_\Delta$.

Supposons que l'on ait :

$$\underline{M_\Delta} < \overline{m_\Delta}.$$

D'après les définitions mêmes de $\underline{M_\Delta}$ et de $\overline{m_\Delta}$, il existerait des nombres $M_g$ et $m_f$ assez voisins de $\underline{M_\Delta}$ et de $\overline{m_\Delta}$ pour donner lieu aux inégalités :

$$\underline{M_\Delta} \leqq M_g < m_f \leqq \overline{m_\Delta},$$

ce qui est en contradiction avec le théorème précédent. On en déduit le

Théorème II. — *On a l'inégalité fondamentale :*

$$\text{(III, 7)} \qquad \overline{m_\Delta} \leqq \underline{M_\Delta};$$

les deux membres pouvant être infinis.

Nous pouvons dès maintenant assigner des limites pour ces deux nombres : en effet, nous connaissons une fonction de la famille F, c'est $f(z) = z$, pour laquelle $m_f = 1$. On a donc

$$1 \leqq \overline{m_\Delta} \leqq \underline{M_\Delta}. \tag{III, 8}$$

Dans le cas où $\Delta$ contient un intervalle de longueur $\alpha$, nous connaissons une fonction de la famille $F_\Delta$, c'est celle qui a été calculée au paragraphe **1**. Elle donne une limite supérieure pour $\underline{M_\Delta}$ ne dépendant que de $\alpha$, c'est $\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}}$. Donc, dans ce cas, les nombres $\overline{m_\Delta}$ et $\underline{M_\Delta}$ ne sont pas infinis.

Supposons maintenant que la famille $\Phi_\Delta^*$ contienne une fonction $f(z)$ différente de $z$. Cette fonction appartient à la famille F, et son module a sur $\Delta$ une valeur constante R qui est supérieure à 1 d'après le lemme de Schwarz. Ce nombre R étant la borne supérieure du module de $f(z)$ sur $\Delta$, on a :

$$1 < R \leqq \overline{m_\Delta},$$

et, d'après l'inégalité fondamentale (III, 7) :

$$1 < R \leqq \underline{M_\Delta}.$$

Or ceci est impossible si $\underline{M_\Delta} = 1$. On en conclut le

THÉORÈME III. — *Une condition suffisante pour que $\Delta$ soit du type maximum est $\underline{M_\Delta} = 1$.*

*Autrement dit, il suffira de trouver dans la famille $F_\Delta$ une fonction dont le module soit en tout point de C inférieur à $1 + \varepsilon$, $\varepsilon$ étant un nombre positif arbitrairement petit.*

Nous verrons au Chapitre VI que lorsque $\Delta$ est un ensemble d'intervalles, cette condition est également nécessaire, et de plus $\overline{m_\Delta} = \underline{M_\Delta}$. (D'ailleurs, ces deux conclusions sont peut-être vraies dans tous les cas.)

Au chapitre suivant, nous transformerons la condition ci-dessus en une autre portant sur la structure de $\Delta$.

Dans le cas particulier où le complémentaire de $\Delta$ est de mesure nulle, la fonction $f(z) = z$ appartient à $F_\Delta$. On en conclut $\underline{M_\Delta} = 1$, par conséquent $\Delta$ est du type maximum; nous retrouvons un résultat du paragraphe **1**.

# CHAPITRE IV.

## UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UN ENSEMBLE D'INTERVALLES SUR UNE CIRCONFÉRENCE SOIT DU TYPE MAXIMUM. — EXISTENCE DE TELS ENSEMBLES DONT LE COMPLÉMENTAIRE N'EST PAS DE MESURE NULLE.

**1. Recherche de la condition suffisante.** — Comme nous venons de le voir, pour qu'un ensemble $\Delta$ soit du type maximum, il suffit de trouver, quel que soit le nombre positif $\varepsilon$, une fonction de la famille $F_\Delta$ dont la borne supérieure du module dans le cercle unité soit inférieure à $1+\varepsilon$.

Rappelons que toute fonction $f(z)$ de la famille F se trouve définie par la donnée de la fonction monotone correspondante

$$\lambda_f(t) = \arg f(e^{it}) + \text{const.},$$

et que l'on a :

$$\text{(IV, 1)} \qquad \operatorname{Log} |f(e^{i\theta})| = \frac{1}{\pi} \int_C \operatorname{Log} \frac{1}{r_{t\theta}}\, d\lambda(t).$$

Transformons légèrement cette intégrale. Pour cela, remarquons que lorsque $f(z)$ se réduit à $z$, $\lambda(t)$ se réduit à $t$; la relation (IV, 1) donne alors, quel que soit $\theta$ :

$$\int_C \operatorname{Log} \frac{1}{r_{t\theta}}\, dt = 0.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} |f(e^{i\theta})| &= \frac{1}{\pi} \int_C \operatorname{Log} \frac{1}{r_{t\theta}}\, d\lambda(t) - \frac{1}{\pi} \int_C \operatorname{Log} \frac{1}{r_{t\theta}}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \operatorname{Log} \frac{1}{r_{t\theta}}\, d[\lambda(t) - t] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d[\lambda(t) - t].\end{aligned}$$

Cette dernière forme présente un avantage : la fonction à intégrer, $\operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}$, n'est jamais négative.

Nous sommes ainsi ramenés à la question suivante : *trouver une condition suffisante relative à l'ensemble $\Delta$ pour qu'il existe une fonction monotone $\lambda(t)$ présentant un accroissement $2\pi$ sur $\Delta$ et telle que l'intégrale*

$$\text{(IV, 2)} \qquad \operatorname{Log} |f(e^{i\theta})| = \frac{1}{\pi} \int_C \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d[\lambda(t) - t]$$

*soit pour toute valeur de $\theta$ inférieure à un nombre positif $\varepsilon$ arbitrairement choisi.*

Tout d'abord $\lambda(t)$ doit être continue, car l'intégrale (IV, 2) est infinie pour toute valeur de $\theta$ qui est point de discontinuité pour $\lambda(t)$.

Imposons une première condition à $\lambda(t)$ : recouvrons le *complémentaire* de $\Delta$ au moyen d'intervalles *fermés* $I_k$, sans points intérieurs communs; et en tout point qui n'est pas à l'intérieur d'un intervalle $I_k$, posons

$$\lambda(t) = t. \tag{IV, 3}$$

*L'intégrale* (IV, 2) *se réduira alors à la portion étendue aux intervalles* $I_k$.

Voyons à quelles conditions est alors assujettie $\lambda(t)$ à l'intérieur de l'intervalle $I_k$ allant du point d'argument $t'_k$ au point d'argument $t''_k$ dans le sens positif. On a, d'après (IV, 3),

$$\lambda(t''_k) = t''_k \qquad \text{et} \qquad \lambda(t'_k) = t'_k;$$

donc :

A. *La fonction continue $\lambda(t)$ doit présenter un accroissement égal à*

$$t''_k - t'_k = m(I_k)$$

*sur l'intervalle fermé* $I_k$.

De plus :

B. *Cet accroissement doit être concentré sur l'ensemble* $\Delta . I_k$.

Nous allons partager notre intégrale (IV, 2) en deux parties :

1° D'après le lemme suivant, sous la seule condition A, la portion $J_1$ de l'intégrale (IV, 2) étendue aux $I_k$ qui ne sont pas contenus dans un certain voisinage du point 0 sera arbitrairement petite, pourvu que le plus grand des $I_k$ soit assez petit.

Lemme I. — *Soit, sur le cercle unité C, un intervalle $\tau$ de centre 0 et de longueur $3l$, et des intervalles fermés $I_k$ en nombre fini ou en infinité dénombrable, chacun de longueur au plus $l$, les intervalles $\tau$ et $I_k$ n'ayant aucun point intérieur commun à deux d'entre eux. Soit $\mu(t)$ une fonction à variation bornée où $t$ désigne l'argument d'un point de C, et dont les variations positive et négative, $v_K^+$ et $v_K^-$, dans chacun des intervalles $I_k$ satisfont aux inégalités*

$$v_k^+ \leqq v_k^- \leqq l. \tag{IV, 4}$$

*Dans ces conditions, l'intégrale*

$$J_1 = \int_{\Sigma' I_k} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t0}}\, d\mu(t)$$

($\Sigma' I_k$ désignant l'ensemble des points du cercle qui appartiennent à l'un au moins des intervalles $I_k$) *est en valeur absolue inférieure à une fonction* $\varphi(l)$, *tendant vers zéro avec* $l$, *et indépendante de* $\theta$ *et des intervalles* $I_k$, *pourvu que leur longueur soit au plus* $l$.

La formule de la moyenne (chapitre préliminaire) donne pour la portion de $J_1$ étendue à $I_k$

$$\int_{I_k} \leqq \overline{\mathfrak{M}}_{t\subset I_k}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right).\varphi_k^+ - \underline{\mathfrak{M}}_{t\subset I_k}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right).\varphi_k^-,$$

et en vertu de la condition (IV, 4)

$$\int_{I_k} \leqq l\left[\overline{\mathfrak{M}}_{t\subset I_k}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right) - \underline{\mathfrak{M}}_{t\subset I_k}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right)\right].$$

En désignant par $d(I_k, \theta)$ et $D(I_k, \theta)$ le minimum et le maximum de la distance du point $\theta$ aux points de $I_k$, nous obtenons :

$$\overline{\mathfrak{M}}_{t\subset I_k}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right) = \operatorname{Log}\frac{2}{d(I_k, \theta)} \quad \text{et} \quad \underline{\mathfrak{M}}_{t\subset I_k}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right) = \operatorname{Log}\frac{2}{D(I_k, \theta)},$$

d'où :

$$\int_{I_k} \leqq l \operatorname{Log}\frac{D(I_k, \theta)}{d(I_k, \theta)} < l\left[\frac{D(I_k, \theta)}{d(I_k, \theta)} - 1\right],$$

$$\text{(IV, 5)} \qquad \int_{I_k} < l\,\frac{D(I_k, \theta) - d(I_k, \theta)}{d(I_k, \theta)}.$$

Nous allons limiter supérieurement la fraction du second membre. Pour cela, désignons par $\widehat{\theta t}$ l'arc allant du point d'argument $\theta$ au point d'argument $t$ dans le sens positif, et posons

$$x(t) = \frac{3l}{2} + m(\widehat{\theta t}.\Sigma' I_k).$$

Le numérateur est inférieur à la corde qui sous-tend $I_k$, donc à la longueur de $I_k$ qui est $x(t''_k) - x(t'_k)$.

Pour limiter inférieurement le dénominateur $d(I_k, \theta)$, ne considérons d'abord que les intervalles $I_k$ qui sont tout entiers sur la demi-circonférence fermée $D_\theta$ partant de $\theta$ dans le sens positif. On peut alors écrire :

$$\text{(IV, 6)} \qquad d(I_k, \theta) > \frac{1}{2}(\text{arc allant de } \theta \text{ à l'origine de } I_k) \geqq \frac{1}{2}x(t'_k).$$

On déduit alors de l'inégalité (IV, 5) :

$$\int_{I_k} < 2l\,\frac{x(t''_k) - x(t'_k)}{x(t'_k)};$$

chacun des $I_k$ ayant au plus $l$ pour longueur

$$\int_{I_k} < 2l\,\frac{x(t''_k)-x(t'_k)}{x(t''_k)-l} < 2l\int_{x(t'_k)}^{x(t''_k)}\frac{dx}{x-l}.$$

En remarquant que l'on a

$$\int_{\sum\limits_{I_k\subset D_0}' I_k} \leqq \sum_{I_k\subset D_0}\int_{I_k},$$

on en conclut

$$\text{(IV, 7)}\qquad \int_{\sum\limits_{I_k\subset D_0}' I_k} < 2l\sum_{I_k\subset D_0}\int_{x(t'_k)}^{x(t''_k)}\frac{dx}{x-l} \leqq 2l\int_{\frac{3l}{2}}^{\pi}\frac{dx}{x-l} = 2l\,\mathrm{Log}\,2\,\frac{\pi-l}{l},$$

$$\text{(IV, 8)}\qquad \int_{\sum\limits_{I_k\subset D_0}' I_k} < 2l\,\mathrm{Log}\,\frac{2\pi}{l}.$$

On obtiendrait la même limitation pour l'intégrale étendue aux intervalles $I_k$ situés sur l'autre demi-circonférence. Enfin, il peut y avoir un seul intervalle $I_{k_0}$ qui ait des points dans les deux demi-circonférences. L'inégalité (IV, 6) est remplacée pour lui par

$$d(I_{k_0}, \theta) > \frac{1}{2}(\pi - l),$$

d'où, d'après (IV, 5) :

$$\text{(IV, 9)}\qquad \int_{I_{k_0}} < \frac{2l^2}{\pi - l}.$$

On en déduit, d'après (IV, 8) et (IV, 9), pour l'intégrale $J_1$ étendue à tous les $I_k$, la limitation

$$J_1 < 4l\,\mathrm{Log}\,\frac{2\pi}{l} + \frac{2l^2V}{\pi-l};$$

le second membre est indépendant de $\theta$ et des $I_k$ et le lemme est démontré. C désignant une constante convenable, on peut écrire

$$J < Cl\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{l}.$$

Revenons à l'intégrale (IV, 2); les conditions du lemme sont remplies en prenant pour $\mu(t)$ la fonction $\lambda(t) - t$ où $\lambda(t)$ satisfait à la condition A. En effet, les variations positive et négative de $\lambda(t)$ seront alors égales entre elles, et au plus égales à $m(I_k)$.

*Désignant par $l$ la mesure du plus grand des $I_k$, la portion $J_1$ de l'intégrale* (IV, 2) *étendue aux intervalles $I_k$, qui n'ont aucun point intérieur à l'intervalle $\tau(\theta)$ de centre $\theta$ et de longueur $3l$, pourra donc être rendue, quel que soit $\theta$, plus petite que $\varepsilon$, pourvu que $l$ soit suffisamment petit.*

2° *$l$ étant ainsi choisi, étudions la portion $J_2$ de l'intégrale* (IV, 2) *étendue aux intervalles $I_k$ qui ont des points à l'intérieur de $\tau(\theta)$.*

Nous allons préciser dans un instant le choix de $\lambda(t)$, ce qui nous conduira à la condition cherchée relative à l'ensemble $\Delta$.

Pour cela, quelques préliminaires sont nécessaires. Soit E un ensemble mesurable sur C. Nous désignerons par $\nu_E(e)$ la fonction additive d'ensemble définie, pour tout ensemble mesurable $e$ de C, par l'égalité

$$\nu_E(e) = m(E.\,e).$$

Sa valeur sur la circonférence tout entière est égale à $m(E)$.

Ceci posé, nous aurons à utiliser la propriété suivante :

LEMME II. — *Avec la définition ci-dessus, on a l'inégalité*

$$\int_E \operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\,d\nu_E(e) \leqq m(E)\operatorname{Log}\frac{1}{m(E)} + m(E)(1+\operatorname{Log}8)$$

($t$ désigne la variable d'intégration dans l'intégrale du premier membre).

En effet, montrons d'abord que le maximum de l'intégrale du premier membre a lieu lorsque E est confondu avec l'intervalle I de centre $\theta$ et de longueur $m(E)$. La formule de la moyenne donne

$$\text{(IV, 11)} \qquad \int_{E-E.I} \operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\,d\nu_E(e) \leqq \overline{\mathfrak{M}}_{t\subset E-E.I}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right).m(E-E.I),$$

$$\text{(IV, 12)} \qquad \int_{I-E.I} \operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\,d\nu_I(e) \geqq \underline{\mathfrak{M}}_{t\subset I-E.I}\left(\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}\right).m(I-E.I).$$

Or, si $t_1$ est un point de I, et $t_2$ un point n'appartenant pas à I, on a toujours $r_{t_1\theta} < r_{t_2\theta}$ ; on en conclut

$$\overline{\mathfrak{M}}_{t\subset E-E.I}\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}} \leqq \underline{\mathfrak{M}}_{t\subset I-E.I}\operatorname{Log}\frac{2}{r_{t\theta}}.$$

En remarquant que puisque $m(I) = m(E)$, on a aussi

$$m(E-E.I) = m(I-E.I),$$

on déduit de (IV, 11) et (IV, 12) :

$$(\text{IV}, 13) \qquad \int_{\text{E}-\text{E.I}} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d\nu_{\text{E}}(e) \leqq \int_{\text{I}-\text{E.I}} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d\nu_{\text{I}}(e).$$

D'autre part, si l'on remarque que les fonctions $\nu_{\text{E}}(e)$ et $\nu_{\text{I}}(e)$ prennent toutes deux, d'après leur définition, la même valeur $m(\bar{e})$, pour un sous-ensemble quelconque $\bar{e}$ de E.I, on aperçoit l'égalité

$$(\text{IV}, 14) \qquad \int_{\text{E.I}} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d\nu_{\text{E}}(e) = \int_{\text{E.I}} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d\nu_{\text{I}}(e);$$

d'où, en ajoutant membre à membre (IV, 13) et (IV, 14) :

$$(\text{IV}, 15) \qquad \int_{\text{E}} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d\nu_{\text{E}}(e) \leqq \int_{\text{I}} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}}\, d\nu_{\text{I}}(e).$$

Ainsi, l'intégrale du premier membre de (IV, 10) est au plus égale à la valeur qu'elle prend lorsque E est confondu avec I.

Il nous suffit de limiter l'intégrale du second membre de (IV, 15). Elle se réduit à l'intégrale ordinaire :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{m(\text{E})}{2}}^{+\frac{m(\text{E})}{2}} \operatorname{Log} \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\, dt &= 2\int_0^{\frac{m(\text{E})}{2}} \operatorname{Log} \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\, dt \\
&< 2\int_0^{\frac{m(\text{E})}{2}} \operatorname{Log} \frac{4}{t}\, dt \\
&= 8\int_0^{\frac{m(\text{E})}{8}} \operatorname{Log} \frac{1}{u}\, du \\
&= 8\,\frac{m(\text{E})}{8}\left(1 + \operatorname{Log} \frac{8}{m(\text{E})}\right) \\
&= m(\text{E}) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\text{E})} + m(\text{E})\,(1 + \operatorname{Log} 8).
\end{aligned}$$

Revenons à la détermination de $\lambda(t)$. La fonction $\lambda(t)$ étant toujours supposée égale à $t$ en tout point non intérieur à l'un des $\text{I}_k$, nous remplirons les deux conditions voulues A et B en la définissant dans chacun des $\text{I}_k$ au moyen de la fonction additive d'ensemble

$$\frac{m(\text{I}_k)}{m(\Delta.\text{I}_k)} \cdot \nu_{\Delta.\text{I}_k}(e).$$

Sa variation sur $I_k$ est bien égale à $m(I_k)$, et elle est concentrée sur $\Delta . I_k$. La valeur de $\lambda(t)$ au point $t$ de l'intervalle $\widehat{t'_k t''_k}$ sera :

$$\lambda(t) = t'_k + \frac{m(I_k)}{m(\Delta . I_k)} \cdot m\left(\Delta . \widehat{t'_k t}\right).$$

Le lemme précédent nous permet alors de limiter supérieurement la deuxième portion $J_2$ de l'intégrale (IV, 2). Il conduit à l'inégalité

$$\int_{I_k} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}} \, d\lambda(t) \leqq m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_k)} + m(I_k)(1 + \operatorname{Log} 8);$$

d'où, en désignant par $\sum\limits_{\tau(\theta)}$ une sommation relative aux $I_k$ qui ont des points intérieurs à $\tau(\theta)$ :

$$J_2 < \sum_{\tau(\theta)} \int_{I_k} \operatorname{Log} \frac{2}{r_{t\theta}} \, d\lambda(t) \leqq \sum_{\tau(\theta)} m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_k)} + (1 + \operatorname{Log} 8) \sum_{\tau(\theta)} m(I_k).$$

Et, comme $\sum\limits_{\tau(\theta)} m(I_k) \leqq 5\,l$, on a

$$J_2 < \sum_{\tau(\theta)} m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_k)} + 5\,l(1 + \operatorname{Log} 8).$$

La condition relative à $\Delta$ est alors la suivante : *$l$ et $\eta$ étant deux nombres positifs arbitraires, il faut pouvoir trouver un système d'intervalles $I_k$, tous inférieurs à $l$, et tels que la somme*

(IV, 16) $$\sum_{I_k \subset T} m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_k)}$$

*étendue aux $I_k$ recouverts par un intervalle $T$ quelconque de longueur $l$ soit inférieure à $\eta$.*

En effet, dans ces conditions, la portion $J_1$ est inférieure à $\varepsilon$, et la portion $J_2$ est inférieure à $(1 + \operatorname{Log} 8) 5\,l + 5\eta$, donc aussi inférieure à $\varepsilon$, pourvu que $l$ et $\eta$ soient assez petits.

Dans cet énoncé, les $I_k$ doivent être inférieurs à $l$; on peut se débarrasser de cette condition. Il suffit de montrer que la convergence vers zéro de l'expression (IV, 16) entraîne celle du plus grand des $I_k$ ; c'est aisé : on a en effet, en désignant par $l'$ la longueur du plus grand des $I_k$ :

$$m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_k)} \geqq m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{l'};$$

d'où

$$\sum_{I_k \subset T} m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_k)} \geqq \operatorname{Log} \frac{1}{l'} \sum_{I_k \subset T} m(I_k) \geqq l' \operatorname{Log} \frac{1}{l'}.$$

D'après cette inégalité, étant donné un nombre $l'$, on peut déterminer un nombre $\eta_1$ tel que, si l'intégrale $J_1$ est inférieure à $\eta_1$, les $I_k$ soient tous inférieurs à $l'$.

Nous avons finalement le

Théorème I. — *Une condition suffisante pour qu'un ensemble $\Delta$ soit du type maximum est la suivante :*

*Recouvrons le complémentaire de $\Delta$ au moyen d'intervalles fermés $I_k$, en nombre fini ou en infinité dénombrable, sans points intérieurs communs. Soit T un intervalle quelconque de longueur égale au plus grand d'entre eux. Formons la somme*

$$\boxed{\sum_{I_k \subset T} m(I_k) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_k)}}$$

*étendue aux intervalles $I_k$ recouverts par T et prenons sa borne supérieure quand T varie sur le cercle. La condition est alors la suivante : on peut effectuer le recouvrement précédent de façon que cette borne supérieure soit inférieure à un nombre positif $\varepsilon$ arbitrairement petit.*

Étant donné un système d'intervalles $I_k$ *en nombre fini* recouvrant le complémentaire de $\Delta$, désignons par P le nombre maximum des $I_k$ recouverts par T, et par $\mathfrak{M}$ la plus grande des quantités $m(I_K) \operatorname{Log} \frac{1}{m(\Delta . I_K)}$. Du théorème I, on conclut alors le

Théorème II. — *Une condition suffisante pour qu'un ensemble $\Delta$ soit du type maximum est qu'il existe un nombre fixe N, et, quel que soit $\varepsilon$, un système d'intervalles $I_k$ pour lequel les nombres P et $\mathfrak{M}$ satisfassent aux conditions*

$$P < N, \quad \mathfrak{M} = \varepsilon.$$

**2. Cas où $\Delta$ se compose d'intervalles.** — Le seul cas intéressant est celui où les intervalles sont en infinité dénombrable et partout denses, mais ce qui suit s'applique à tous les cas. A tout ensemble $\overline{\Delta}$ formé d'intervalles de $\Delta$ en nombre fini, nous allons faire correspondre un système déterminé d'intervalles $I_k$, et appliquer le théorème II.

Soient $\delta_k$ un intervalle de $\overline{\Delta}$, $c_k$ celui desinter valles complémentaires de $\overline{\Delta}$ qui précède $\delta_k$ quand on décrit le cercle dans le sens positif, et $\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$ *la mesure du plus grand des* $c_k$. A chaque $\delta_k$, faisons correspondre un intervalle $I_k$ de la façon suivante :

*Premier cas :* si $m(c_k+\delta_k)\leqq 2\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$, prenons $I_k=c_k+\delta_k$;

*Deuxième cas :* si $m(c_k+\delta_k)>2\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$, prenons pour $I_k$ l'intervalle de longueur $2\mathcal{C}_\Delta$ qui comprend $c_k$ et une partie de $\delta_k$.


Fig. 12.

Le système des intervalles $I_k$ recouvre le complémentaire de $\Delta$. Évaluons une limite supérieure des quantités $m(I_k)\operatorname{Log}\dfrac{1}{m(\Delta.I_k)}$.

De l'inégalité

$$m(\Delta.I_k)\geqq m(\delta_k.I_k),$$

il résulte

$$\text{(IV, 16 bis)}\qquad m(I_k)\operatorname{Log}\frac{1}{m(\Delta.I_k)}\leqq m(I_k)\operatorname{Log}\frac{1}{m(\delta_k.I_k)}$$
$$=m(c_k)\operatorname{Log}\frac{1}{m(\delta_k.I_k)}+m(\delta_k.I_k)\operatorname{Log}\frac{1}{m(\delta_k.I_k)}.$$

De $m(I_k)\leqq 2\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$, on déduit $m(\delta_k.I_k)\leqq 2\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$; le deuxième terme du dernier membre de (IV, 16*bis*) est donc inférieur à $2\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}\operatorname{Log}\dfrac{1}{2\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}}$; quant au premier terme, dans le premier cas, on a $\delta_k.I_k=\delta_k$, et il est égal à

$$m(c_k)\operatorname{Log}\frac{1}{m(\delta_k)};$$

dans le deuxième cas, on a $m(\delta_k.I_k)>\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$, et ce premier terme est au plus égal à $\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}\operatorname{Log}\dfrac{1}{\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}}$. On a donc, dans les deux cas :

$$\text{(IV, 17)}\qquad m(I_k)\operatorname{Log}\frac{1}{m(\Delta.I_k)}<m(c_k)\operatorname{Log}\frac{1}{m(\delta_k)}+3\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}\operatorname{Log}\frac{1}{\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}}.$$

D'autre part, si $Q_{\overline{\Delta}}$ *désigne le nombre maximum des intervalles de* $\overline{\Delta}$ *recouverts par un intervalle quelconque de longueur* $\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$, on a évidemment (P ayant le même sens qu'au théorème II) :

(IV, 18) $$P < 2Q_{\overline{\Delta}} + 4.$$

*Désignant alors par* $\mathcal{N}_{\overline{\Delta}}$ *la plus grande des quantités* $m(c_k)\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{m(\delta_k)}$, les relations (IV, 17), (IV, 18) et le théorème II conduisent au

THÉORÈME III. — *Un ensemble d'intervalles* $\Delta$ *est du type maximum dans le cas où il existe un nombre fixe* N *et, quel que soit* $\varepsilon$, *un ensemble* $\overline{\Delta}$, *composé d'intervalles de* $\Delta$, *et pour lequel les nombres* $Q_{\overline{\Delta}}$, $\mathcal{N}_{\overline{\Delta}}$ et $\mathcal{C}_{\overline{\Delta}}$ *satisfont aux conditions*

$$Q_{\overline{\Delta}} < N, \quad \mathcal{N}_{\overline{\Delta}} < \varepsilon, \quad \mathcal{C}_{\overline{\Delta}} < \varepsilon,$$

### CONSTRUCTION D'UN ENSEMBLE $\Delta$, VÉRIFIANT LA CONDITION DU THÉORÈME III, ET DONT LE COMPLÉMENTAIRE N'EST PAS DE MESURE NULLE.

$\Delta$ sera défini comme somme d'ensembles d'intervalles $\Delta_n$ formant une suite monotone croissante. Prenons pour $\Delta_1$ la demi-circonférence. Admettons que $\Delta_{n-1}$ ait tous ses complémentaires égaux à un nombre $\mathcal{C}_{n-1}$. Pour obtenir $\Delta_n$, ajoutons à $\Delta_{n-1}$, dans chacun de ses complémentaires, un intervalle ayant même milieu que ce complémentaire et de longueur $\dfrac{\mathcal{C}_{n-1}}{2^n+1}$. Les complémentaires de $\Delta_n$ seront encore égaux et auront pour longueur

(IV, 19) $$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n-1}\,\frac{2^{n-1}}{2^n+1}.$$

De $\mathcal{C}_1 = \pi$ la relation (IV, 19) permet de conclure

$$\mathcal{C}_n = \pi\,\frac{2 \cdot 2^2 \ldots 2^{n-1}}{(2^2+1)\ldots(2^n+1)},$$

ce qui s'écrit :

(IV, 20) $$\frac{1}{\mathcal{C}_n} = \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)(1+2^n).$$

1° On voit que $\mathcal{C}_n$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

2° Deux intervalles quelconques de $\Delta_n$ étant séparés par une distance au moins égale à $\mathcal{C}_n$, le nombre $Q_{\Delta_n}$ du théorème III est égal à un.

3° Puisque $\mathcal{C}_n$ décroît lorsque $n$ augmente les intervalles de $\Delta_n$ les plus petits sont ceux que l'on ajoute en passant de $\Delta_{n-1}$ à $\Delta_n$; chacun d'eux a pour longueur $\dfrac{\mathcal{C}_{n-1}}{2^n+1}$, et l'on a

$$\mathcal{N}_{\Delta_n} = \mathcal{C}_n\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\dfrac{\mathcal{C}_{n-1}}{2^n+1}} = \mathcal{C}_n\,\mathrm{Log}\,\frac{2^{n-1}}{\mathcal{C}_n} = \mathcal{C}_n\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\mathcal{C}_n} + (n-1)\,\mathcal{C}_n\,\mathrm{Log}\,2.$$

Le premier terme tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment; quant au second, la relation (IV, 20) montre que $\frac{1}{(n-1)\mathcal{C}_n}$ augmente indéfiniment, donc que $(n-1)\mathcal{C}_n$ tend vers zéro.

Ainsi, les trois conditions du théorème III sont remplies si $n$ est assez grand; $\Delta$ est donc du type maximum.

D'autre part, en passant de $\Delta_{n-1}$ à $\Delta_n$, la mesure de l'ensemble complémentaire est multipliée par

$$\frac{2\mathcal{C}_n}{\mathcal{C}_{n-1}} = \frac{2^n}{2^n+1} = 1 - \frac{1}{2^n+1}.$$

Le produit infini $\prod\left(1 - \frac{1}{2^n+1}\right)$ étant convergent, la limite de la mesure du complémentaire de $\Delta_n$, qui est égale à la mesure de $C - \Delta$, n'est pas nulle.

## CHAPITRE V.

### DOMAINES A CONNEXION INFINIE. — ÉTUDE DE LA FAMILLE $\Phi^*_\Delta$ DU CHAPITRE III. — L'HYPOTHÈSE DE P. KŒBE.

**1. Une solution de la représentation conforme des domaines à connexion infinie.** — Rappelons d'abord quelques propriétés des fonctions univalentes.

Lemme. I. — *Soit $w = f(z)$ une fonction régulière et univalente pour $|z| < 1$, qui satisfait aux deux conditions*

$$f(0) = 0, \qquad |f'(0)| = 1.$$

*Il existe un nombre $d$, indépendant de la fonction $f(z)$, tel que tout point frontière du domaine décrit par $f(z)$ soit à une distance du point $w = 0$ au moins égale à $d$ (1). La plus grande valeur possible pour $d$ est $\frac{1}{4}$.*

Lemme II. — *Conservons les hypothèses ci-dessus et désignons par $r$ un nombre inférieur à $\frac{1}{16}$. En tout point $z$ du cercle $|z| \leq r$, on a l'inégalité $|f(z)| \leq 4r$.*

En effet, soit $z = \varphi(w)$ la fonction inverse de $f(z)$. D'après le lemme I, elle

(1) L'existence de la borne $d$ est connue depuis longtemps, mais la limite exacte $\frac{1}{4}$ a été donnée par L. Bieberbach. *Voir* L. Bieberbach ($a$), p. 82 ss., ou encore une démonstration rapide et récente de E. Schmidt, dans C. Carathéodory ($f$).

est régulière dans le cercle $\Gamma$ défini par $|w| \leqq 4r$. Appliquons de nouveau le lemme I à la fonction $\frac{\varphi(w)}{4r}$ de la variable $\frac{w}{4r}$ : nous en concluons que le cercle $\Gamma$ est représenté par la fonction $\varphi(w)$ sur un domaine du plan $z$ qui contient tout le cercle C défini par $|z| \leqq r$. Par conséquent, tout point $z$ intérieur à C est l'image d'un point intérieur à $\Gamma$, et l'on a $|f(z)| \leqq 4r$.

Lemme III. — *Soit* D *un domaine du plan $z$ contenant l'origine et pouvant contenir le point à l'infini. Si des fonctions méromorphes $f(z)$ sont univalentes dans* D, *satisfont aux conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, et n'ont pas de pôle dans le cercle fixe $|z| \leqq r$ contenu dans* D, *elles forment une famille normale* (¹) *dans* D, *et toute fonction limite $\bar{f}(z)$ d'une suite $f_n(z)$ de fonctions de cette famille est encore univalente.*

Soit $\overline{\mathrm{D}}$ la portion de D extérieure au cercle $|z| = r_1 < r$. Appliquons le lemme I à la fonction $\frac{f}{r_1}$ de la variable $\zeta = \frac{z}{r_1}$. Nous voyons que $f$ a dans $\overline{\mathrm{D}}$ un module supérieur à $\frac{r_1}{4}$; la famille est donc normale en tout point de D autre que l'origine. D'après le lemme II, les fonctions $f$ sont uniformément bornées dans un cercle de centre origine et de rayon assez petit. La famille est donc normale à l'origine et par conséquent *normale dans tout le domaine* D.

D'après un résultat connu, si une suite $f_n(z)$ converge *régulièrement* (XII) dans D vers la fonction $\bar{f}(z)$, cette dernière est univalente ou constante (²). La convergence des dérivées ayant lieu en tout point de D (¹), on a

$$\bar{f}'(0) = \lim_{n=\infty} f'_n(0) = 1,$$

et $\bar{f}(z)$ ne peut être constante, elle est donc univalente. Le théorème est démontré.

Pour poursuivre l'étude des questions posées au Chapitre III résolvons le problème suivant :

Problème $\mathfrak{T}$. — *Soit* D *un domaine du plan $z$, de connexion finie ou non, contenant l'origine et le point à l'infini. On demande de représenter conformément* D *sur un domaine* D* *du plan $w$, de sorte que les origines et les points à l'infini se*

---

(¹) Les définitions et propriétés des familles normales utilisées ici se trouvent dans C. Carathéodory (*e*).

(²) *Voir* par exemple C. Carathéodory (*d*).

*correspondent, que la dérivée à l'origine soit égale à un, et que tous les éléments de frontière* (VI) *de* $D^\star$ *soient ou des points, ou des segments portés par des droites issues de l'origine;* sur chaque droite peuvent se trouver plusieurs segments (¹).

Nous allons adapter au problème $\mathfrak{T}$ la méthode de calcul des variations utilisée pour représenter conformément un domaine simplement connexe sur un cercle [C. Carathéodory, (*d*) ou (*f*)]. Considérons la famille $\Phi$ des fonctions $w = f(z)$, qui font la représentation conforme du domaine D sur un domaine D′ du plan $w$, avec les trois conditions $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$, $f'(0) = 1$. Nous allons démontrer que parmi les solutions de $\mathfrak{T}$ sont les solutions du problème suivant V : *trouver une fonction de la famille* $\Phi$ *pour laquelle le module de la dérivée à l'infini* (XI), $|f'(\infty)|$, *soit maximum.*

*Commençons par montrer que* V *a une solution.* Tout d'abord la famille $\Phi$ n'est pas vide, car elle contient $w = z$. Soit $\mu$ la borne supérieure finie ou non des valeurs de $|f'(\infty)|$ pour toutes les fonctions de $\Phi$; il existe une suite $f_n(z)$ extraite de $\Phi$ et telle que

$$\lim_{n=\infty} |f_n'(\infty)| = \mu.$$

D'après le théorème I, la famille $\Phi$ est normale dans D et *compacte* (XIII). De la suite $f_n(z)$, nous pouvons donc extraire une suite $f_{n_p}(z)$ qui converge régulièrement vers une fonction $f^\star(z)$ de la famille $\Phi$; et l'on a, d'après le théorème sur la convergence des dérivées rappelé ci-dessus, $|f^{\star\prime}(\infty)| = \mu$. *Par conséquent* $f^\star(z)$ *est solution de* V. De plus, $\mu$ est fini.

Il nous reste à montrer que *si une fonction* $f^\star(z)$ *est une solution de* V, *elle est solution de* $\mathfrak{T}$, ou encore que tout élément de frontière I du domaine $D^\star$ sur lequel $f^\star$ représente D est vu de l'origine sous un angle nul. Pour cela, considérons le domaine simplement connexe *d* qui contient le point à l'infini et dont la frontière est I. Il existe une seule fonction $\varphi(w)$ qui représente *d* sur un domaine $\bar{d}$ dont la frontière est un segment porté par une droite issue de l'origine, et qui satisfait aux conditions $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(0) = 1$. Si I n'était pas vu de l'origine sous un angle nul, on aurait alors [d'après K. Löwner (*a*) th. II, p. 68)] $|\varphi'(\infty)| > 1$. La fonction $\varphi[f^\star(z)]$ appartiendrait

(¹) Le problème $\mathfrak{T}$ a été résolu par P. Kœbe ($a_1$), par une méthode différente. La méthode ci-dessus a été indiquée dans le cas d'un domaine à connexion finie par H. Grötzsch (*a*), p. 69, note 2. Ce problème est analogue à celui de la représentation sur un « Schlitzbereiche » dont les fentes sont des segments parallèles; *voir* au paragraphe 4 de ce chapitre.

à la famille $\Phi$, et aurait pour module de la dérivée à l'infini $\mu |\varphi'(\infty)|$, nombre supérieur à $\mu$. C'est impossible. D'où le

THÉORÈME I. — *Le problème* V *a au moins une solution et toute solution de* V *est solution de* $\mathfrak{T}$ (¹).

Dans le cas où D est à connexion finie, on démontre aisément que deux solutions du problème $\mathfrak{T}$, $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont identiques. Il suffit de considérer la fonction $\varphi(z) = \operatorname{Log}\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ qui est régulière dans tout le domaine D et dont le maximum du module ne peut être atteint en aucun point de la frontière de D, à moins que $\varphi$ ne soit constante [voir P. Kœbe (*c*)]. Si D est à connexion infinie, il n'en est plus ainsi. Par exemple, si D est formé de l'intérieur et de l'extérieur du cercle unité, réunis par un ensemble d'intervalles qui ne soit pas du type maximum, au sens du Chapitre III, la fonction $w = z$ est solution de $\mathfrak{T}$ sans être solution de V. Mais nous allons démontrer que V n'a jamais qu'une solution.

Introduisons encore une notion utile :

DÉFINITION : *Nous dirons qu'un domaine qui contient l'origine et le point à l'infini est* EXTRÉMAL *si, pour toute fonction $w = f(z)$ de la famille $\Phi$ correspondante, on a $|f'(\infty)| \leqq 1$.*

On voit immédiatement que :

1° *Pour un domaine extrémal, le problème* V *admet la solution $w = z$.*

2° *Une solution du problème* V *pour un domaine* D *quelconque représente* D *sur un domaine extrémal.*

3° *Si un domaine contient un domaine extrémal, il est lui-même extrémal.*

**1** *bis*. **Le problème précédent V n'a qu'une solution.** (²).

LEMME IV. — *Soit $w = f(z)$ une fonction régulière et univalente pour $|z| < 1$*

---

(¹) On aurait pu aussi chercher dans la famille $\Phi$ une fonction pour laquelle le module de la dérivée à l'infini soit minimum. Exactement de la même manière, on aurait montré que la solution de ce problème conduit à un domaine dont chaque élément de frontière est un arc de cercle de centre origine.

(²) L'idée de cette démonstration est tirée de H. GRÖTZSCH, *Leipz. Berichte*, 81, 1929, p. 51-86.

*qui satisfait aux deux conditions*

$$f(0) = 0, \qquad |f'(0)| = 1.$$

*En tout point du cercle* $|z| \leqq r < \frac{1}{32}$, *on a l'inégalité*

$$|f(z) - z| \leqq 2^7 r^2.$$

En effet, sur la circonférence $|z| = \frac{1}{16}$, le lemme II donne $|f(z)| \leqq \frac{1}{4}$. Si nous posons

$$f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n,$$

les inégalités de Cauchy donnent

$$|a_n| \leqq \frac{1}{4} 16^n.$$

On en conclut

$$|f(z) - z| \leqq \frac{1}{4} \sum_2^\infty (16r)^n = 2^6 \frac{r^2}{1 - 16r} < 2^7 r^2.$$

Lemme V. — *Soit* $w = f(z)$ *une fonction régulière pour* $|z| > 1$, *sauf au point à l'infini, univalente, jamais nulle, et qui admet un développement de la forme*

$$f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots.$$

*En supposant* $|z| \geqq \mathrm{R} > 4$, *on a l'inégalité*

$$|f(z) - z| \leqq 16.$$

En effet, la fonction $\frac{2}{f(z)}$ de la variable $\frac{2}{z}$ satisfait aux conditions du lemme I. On en conclut, sur le cercle $|z| = 2$, l'inégalité $|f(z)| < 8$. Les inégalités de Cauchy donnent alors

$$|\alpha_n| \leqq 8 . 2^n.$$

On en conclut :

$$|f(z) - z| \leqq \sum_0^\infty \frac{|\alpha_n|}{\mathrm{R}^n} \leqq 8 \sum_0^\infty \left(\frac{2}{\mathrm{R}}\right)^n = \frac{8}{1 - \frac{2}{\mathrm{R}}} \leqq 16.$$

Lemme VI. — *Soit* R *un domaine du plan* $\zeta = \xi + i\eta$ *formé de l'intérieur d'un rectangle de côtés* $b$ *et* $a$ *parallèles aux axes, dont on a enlevé un nombre fini de segments parallèles à l'axe réel et ne touchant pas le périmètre. Soit* $s(\zeta)$ *une fonction qui représente conformément* R *sur un domaine* $\mathcal{D}$ *du plan* $s = \sigma + i\tau$ *avec les conditions suivantes :*

1° $s(\zeta)$ *est encore régulière sur le périmètre du rectangle.*

2° $\mathcal{D}$ *est contenu dans une bande de largeur* $b + \alpha$ *parallèle à l'axe des* $\tau$.

3° *Les images* A′D′ *et* B′C′ *des côtés* AD *et* BC *parallèles à l'axe des* $\eta$ *sont extérieures à une bande de largeur* $b - \alpha$ *limitée par deux parallèles* $\Delta$ *et* $\Delta'$ *à l'axe des* $\tau$.

4° *Soient* M *un point de* AD *d'ordonnée* $\eta$, M′ *son image d'ordonnée* $\tau(\eta)$, *on a*

$$|\tau(\eta) - \eta| < \varkappa. \tag{V, 1}$$

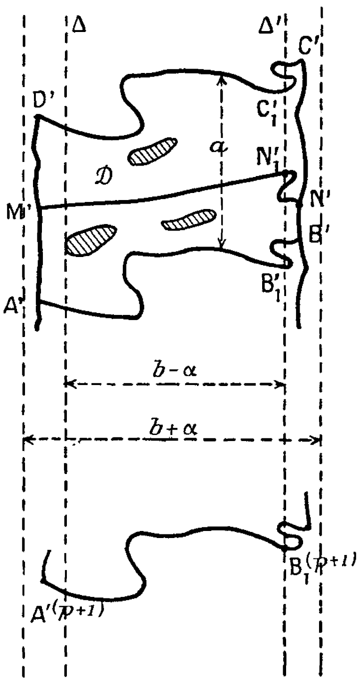
5° *Les lignes* A′B′ *et* D′C′ *se déduisent l'une de l'autre par une translation* $a$ *parallèle à l'axe des* $\tau$.

*Dans ces conditions, si* $B'_1$ *est le premier point de rencontre avec* $\Delta'$ *de l'image* A′B′ *de* AB, *et si* $10\delta$ *désigne la projection sur l'axe des* $\tau$ *de la ligne* $A'B'_1$, *l'une des deux inégalités*

$$\delta < \varkappa,$$
$$\delta^3 < 3ab\alpha$$

*est vérifiée en tout point de* D.

Désignons par MN le segment qui joint les points d'ordonnée $\eta$ des côtés AD et



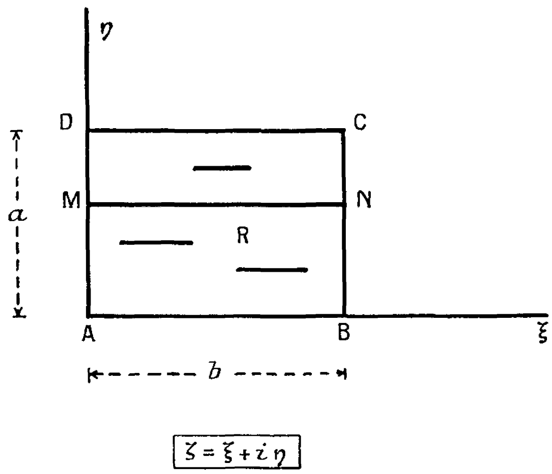




Fig. 13.

BC et par $L(\eta)$ la longueur de son image M′N′ dans le plan $s$. (On suppose que MN ne rencontre aucun des segments frontières de R.) On a alors, en supposant par exemple A à l'origine du plan $\zeta$,

$$\text{(V, 2)} \qquad \mathrm{L}(\eta) = \int_0^b \left| \frac{ds}{d\zeta} \right| d\xi;$$

l'inégalité de Schwarz appliquée à (V, 2) donne

$$\mathrm{L}(\eta)^2 \leqq b \int_0^b \left| \frac{ds}{d\zeta} \right|^2 d\xi,$$

d'où, en intégrant les deux membres par rapport à $\eta$ :

$$\int_0^a \mathrm{L}(\eta)^2 \, d\eta \leqq b \int_0^a \int_0^b \left| \frac{ds}{d\zeta} \right|^2 d\xi \, d\eta.$$

L'intégrale double du second membre représente la surface du domaine $\mathcal{D}$; cette surface est au plus égale à $a(b+\alpha)$. Nous avons donc

$$\text{(V, 3)} \qquad \int_0^a \mathrm{L}(\eta)^2 \, d\eta \leqq ab(b+\alpha).$$

*Supposons* $\delta \geqq \varkappa$.

Il existe un point de $A'B'_1$ qui a pour ordonnée $\tau(0) \pm 5\delta$. Supposons que nous ayons le signe $+$. Soient $\mu_1$ le maximum de l'ordonnée de $M'N'_1$ et $\mu_2$ le maximum de l'ordonnée de $A'B'_1$. Nous avons

$$\mu_2 \geqq \tau(0) + 5\delta > 4\delta.$$

Nous allons démontrer l'inégalité

$$\mu_1 > 3\delta.$$

Prolongeons l'arc $D'A'$ jusqu'en $A^{(p+1)}$ par une suite d'arcs déduits de $D'A'$ par les translations $-a, -2a, \ldots, -pa$ parallèles à l'axe imaginaire, et enfin jusqu'en $B_1^{(p+1)}$ en effectuant sur $A'B'_1$ la translation $-pa$. Prenons $p$ assez grand pour satisfaire à

$$\mu_2 - pa < \mu_1.$$

Soient J la courbe fermée $M'N'_1B_1^{(p+1)}A^{(p+1)}M'$ et $\mu$ le maximum de l'ordonnée de J. Sur l'arc $N'_1B_1^{(p+1)}A^{(p+1)}M'$, l'ordonnée ne dépasse pas $\mu_1 + \varkappa$; de plus, $A'B'_1$ est intérieur à J, on a donc

$$\mu_2 \leqq \mu \leqq \mu_1 + \varkappa.$$

On conclut des inégalités ci-dessus $\mu_1 > 3\delta$.

*Supposons* $0 < \eta < \delta$. L'arc $M'N'_1$ contient le point $M'$ d'ordonnée inférieure à $\eta + \varkappa$, donc inférieure à $2\delta$, et un point d'ordonnée $3\delta$. On en conclut que cet arc a des projections sur les axes supérieures à $\delta$ et à $b - \alpha$, et par conséquent

$$L(\eta)^2 > \delta^2 + (b - \alpha)^2.$$

On en déduit l'inégalité

$$\int_0^a L(\eta)^2 \, d\eta > \delta[\delta^2 + (b-\alpha)^2] + (a - \delta)(b - \alpha)^2$$
$$= \delta^3 + a(b - \alpha)^2.$$

L'inégalité (V, 3) donne alors

$$\delta^3 < 3\, ab\alpha.$$

Lemme VII. — *Considérons un domaine à connexion finie* D, *contenant l'origine et le point à l'infini, et dont la frontière est tout entière entre les cercles* $|z| = \frac{1}{M}$ *et* $|z| = M$. *Soit* $w = f(z)$ *une solution du problème* V *pour le domaine* D. *Nous avons alors, d'après l'énoncé même du problème* V, $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\infty} \geqq 1$. *Étant donné un nombre positif* $\varepsilon$, *on peut trouver un nombre* $\theta$ *tel que l'inégalité* $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{\infty} < 1 + \theta$ *entraîne, en tout point de* D, *et pour des déterminations convenables des arguments,*

$$|\arg w - \arg z| < \varepsilon,$$

*le nombre* $\theta$ *ne dépendant pas de* D, *mais seulement de* M *et* $\varepsilon$.

Soit $z = \varphi(w)$ la fonction inverse de $f(z)$. D'après le lemme I, elle est définie dans tout l'intérieur du cercle $|w| = \frac{1}{4M}$. Limitons d'abord la différence $|z - w|$ sur un cercle $\gamma$ du plan $w$ de centre origine et de rayon $r$ assez petit. Le lemme IV appliqué à la fonction $4M\varphi(w)$ de la variable $4Mw$ nous montre que la condition

$$|w| \leqq r < \frac{1}{2^7 M}$$

entraîne

$$4M|z - w| < 2^7(4Mr)^2,$$

d'où la limitation cherchée

$$|z - w| < 2^9 M r^2. \tag{V, 4}$$

A condition d'avoir $|z - w| < r$, ou $r < \frac{1}{2^9 M}$, on en conclut, sur $\gamma$ :

$$|\arg z - \arg w| < 2 \sin|\arg z - \arg w| \leqq 2\frac{|z - w|}{|w|} < 2^{10} M r. \tag{V, 5}$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$(\mathrm{V},\ 6) \qquad 1 \leq \left|\frac{dw}{dz}\right|_\infty < 1+\theta,$$

et limitons la différence $||z|-|w||$ sur un cercle $\Gamma$ de centre origine et de rayon R assez grand. Pour cela, posons

$$(\mathrm{V},\ 7) \qquad \varphi_1(w)=\varphi(w)\left(\frac{dw}{dz}\right)_\infty,$$

et appliquons le lemme V à la fonction $\frac{\varphi_1(w)}{4\mathrm{M}}$ de la variable $\frac{w}{4\mathrm{M}}$: nous voyons que la condition

$$|w| \geqq \mathrm{R} > 16\mathrm{M}$$

entraîne l'inégalité

$$(\mathrm{V},\ 8) \qquad |\varphi_1(w)-w| \leqq 2^6\mathrm{M}.$$

Les relations (V, 6), (V, 7) et (V, 8) donnent alors

$$(\mathrm{V},\ 9) \qquad ||\varphi_1(w)|-|\varphi(w)|| < |\varphi_1(w)|\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right) \leqq \theta(\mathrm{R}+2^6\mathrm{M}).$$

Puis (V, 8) et (V, 9) donnent

$$(\mathrm{V},\ 10) \qquad ||\varphi(w)|-|w|| \leqq ||\varphi_1(w)|-|\varphi(w)|| + |\varphi_1(w)-w| < \theta(\mathrm{R}+2^6\mathrm{M}) + 2^6\mathrm{M}.$$

Si nous prenons

$$\mathrm{R}=\frac{2^5\mathrm{M}}{\theta},$$

et si nous supposons $\theta < \frac{1}{2}$, nous avons sur $\Gamma$ la limitation suivante :

$$(\mathrm{V},\ 11) \qquad ||\varphi(w)|-|w|| < 2^7\mathrm{M}.$$

Posons $r=\frac{1}{\mathrm{R}}$, et appliquons les inégalités (V, 4) et (V, 5). Nous voyons qu'en supposant $\mathrm{R} < 2^9\mathrm{M}$, ou $\theta < \frac{1}{16}$, nous avons sur $\gamma$

$$|z-w| < \frac{2^9\mathrm{M}}{\mathrm{R}^2} = \frac{2^4\theta}{\mathrm{R}} \qquad \text{et} \qquad |\arg z - \arg w| < \frac{2^{10}\mathrm{M}}{\mathrm{R}} = 2^5\theta.$$

Si nous posons, pour simplifier,

$$\alpha = 2^5\theta,$$

nous pouvons dire que, *sous la condition* $\alpha < 2$, *l'image de* $\gamma$ *dans le plan* $z$ *est comprise entre les cercles de centre origine et de rayons* $\frac{1}{R}\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)$, *et que l'on a, sur* $\gamma$ :

(V, 12) $$|\arg z - \arg w| < \alpha.$$

*Supposant toujours* $\alpha < 2$, *l'inégalité* (V, 12 *bis*) *conduit à*

(V, 12 *bis*) $$\big|\,|\varphi(w)| - |w|\,\big| < \frac{R\alpha}{8};$$

*par conséquent, l'image de* $\Gamma$ *est comprise entre les cercles* $\Gamma'_1$ *et* $\Gamma'_2$ *de centre origine et de rayons* $R\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)$.

Considérons une demi-droite issue du point $w = 0$, et qui ne rencontre pas

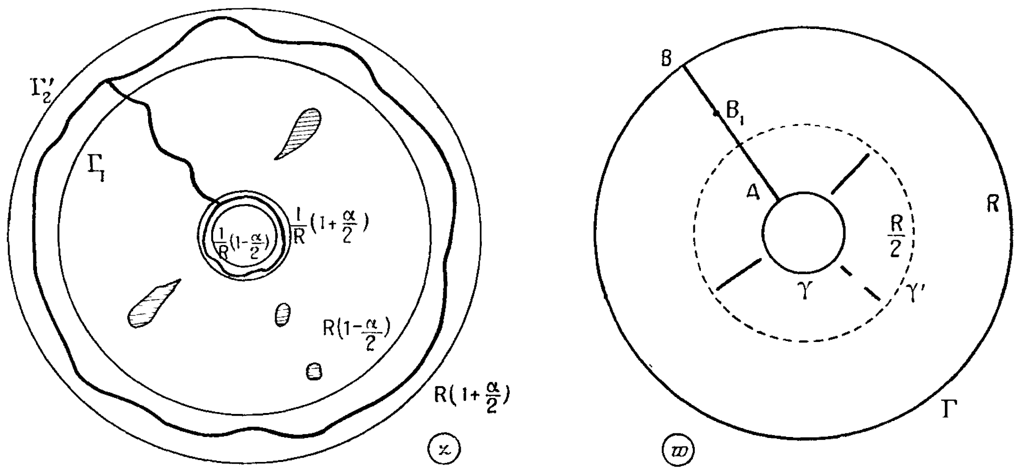



Fig. 14.

la frontière du domaine D′ image de D. Soient A et B les points où elle coupe $\gamma$ et $\Gamma$, et $B_1$ le premier point de AB rencontré en partant de A dont l'image est sur le cercle $\Gamma'_1$. Désignons par $8\delta$ l'oscillation de $\arg z$ sur $AB_1$ et par $8\bar{\delta}$ la borne supérieure de $8\delta$ sur tous les segments $AB_1$. D'après l'inégalité (V, 12 *bis*), le point $B_1$ est extérieur au cercle $\gamma'$ de centre origine et de rayon $\frac{R}{2}$; on en conclut, d'après (V, 12), qu'en tout point de D′ qui appartient à la couronne limitée par $\gamma$ et $\gamma'$, on a

(V, 13) $$|\arg z - \arg w| < 8\bar{\delta} + \alpha.$$

Puisque $\arg z - \arg w$ est une fonction harmonique qui est régulière à l'intérieur de $\gamma$ et à l'extérieur de $\gamma'$, cette inégalité est valable dans tout le domaine $D'$. Il nous suffit donc de montrer que $\delta$ ne peut dépasser une fonction de $\alpha$ et de M qui tend vers zéro avec $\alpha$. Pour cela, utilisons le lemme VI. Effectuons des transformations logarithmiques

$$\operatorname{Log} z = s = \sigma + i\tau \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Log} w = \zeta = \xi + i\eta.$$

Le domaine $D''$ formé de la portion de $D'$ comprise entre $\gamma$ et $\Gamma$ et coupée par AB a pour image dans le plan $\zeta$ un rectangle de côtés $2\log R$ et $2\pi$. Dans le plan $s$, l'image de $\gamma$ est entre les droites $\sigma = -\operatorname{Log} R\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)$ et à fortiori entre les droites

$$\sigma = -\operatorname{Log} R \pm \frac{\alpha}{2},$$

et celle de $\Gamma$ est entre les droites

$$\sigma = \operatorname{Log} R \pm \frac{\alpha}{2}.$$

D'après (V, 12), on a , pour les images d'un point de $\gamma$ dans les plans $s$ et $\zeta$:

$$|\tau(\eta) - \eta| < \alpha.$$

Le nombre $\delta$ satisfait à l'une des deux inégalités du lemme VI :

$$\delta < \alpha,$$
$$\delta^3 \leqq 12\pi\alpha \operatorname{Log} R = 12\pi\alpha \operatorname{Log} \frac{2^{10}M}{\alpha}.$$

Le deuxième membre tend vers zéro avec $\alpha$. Le lemme est démontré.

Théorème II. — *Soit* D *un domaine à connexion infinie du plan $\zeta$ contenant l'origine et le point à l'infini. Considérons une suite de domaines à connexion finie* $D_n$, *contenus dans* D, *et tels que :* 1° $D_n$ *est contenu dans* $D_{n+1}$ ; 2° *tout point de* D *appartient aux* $D_n$ *pour n assez grand. Désignons par $z = f(\zeta)$ une solution du problème* V *qui représente* D *sur un domaine* $D^*$ *du plan $z$, et par $w_n = f_n(\zeta)$ une solution du problème* V *pour le domaine* $D_n$ *qui représente* $D_n$ *sur un domaine* $D_n^*$ *du plan* $w_n$.

*Dans ces conditions, la suite $w_n(\zeta)$ converge vers $z(\zeta)$ en tout point de* D. *Par conséquent* V *n'a qu'une solution.*

*Démonstration.* — Soient $\zeta = f^{-1}(z)$, $\zeta = f_n^{-1}(w_n)$ les fonctions inverses de $f(\zeta)$ et de $f_n(\zeta)$. La fonction $z = f[f_n^{-1}(w_n)]$ est définie dans $D_n^*$ et en donne une image $\overline{D_n}$; de même, la fonction $w_{n+1} = f_{n+1}[f_n^{-1}(w_n)]$ est définie dans $D_n^\star$: ces deux fonctions appartiennent à la famille $\Phi$ relative au domaine *extrémal* $D_n^\star$. On a par conséquent

$$\left|\frac{dz}{dw_n}\right|_\infty \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{dw_{n+1}}{dw_n}\right|_\infty \leqq 1. \tag{V, 15}$$

Considérons maintenant les fonctions $w_n(z) = f_n[f^{-1}(z)]$. D'après (V, 15), leurs dérivées à l'infini satisfont aux inégalités

$$\left|\frac{dw_1}{dz}\right|_\infty \geqq \left|\frac{dw_2}{dz}\right|_\infty \geqq \ldots \geqq 1. \tag{V, 16}$$

La fonction $w_n(z)$ est définie dans $\overline{D_n}$ et appartient, pour $n \geqq k$, à la famille $\Phi$ relative au domaine $\overline{D_k}$. Ces fonctions forment donc une famille normale dans $\overline{D_k}$. *Montrons que $w_n(z)$ tend vers $z$.* Supposons le contraire. Il existe alors un point $z_0$ tel que $w_n(z_0)$ ne converge pas vers $z_0$. Nous pouvons extraire de $w_n(z)$ une suite $w_{n_p}(z)$ qui converge régulièrement dans $D_k$ vers une fonction limite $w(z)$ telle que $w(z_0) \neq z_0$. D'après le théorème de Stieltjès [*voir* par exemple P. Montel ($a$)], la convergence a lieu dans tout le domaine $D^\star$, et par conséquent la fonction $w(z)$ appartient à la famille $\Phi$ relative au domaine $D^\star$. Ce domaine étant extrémal, on a

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_\infty \leqq 1. \tag{V, 17}$$

De plus, d'après un théorème rappelé au paragraphe **1** :

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_\infty = \lim_{p=\infty} \left|\frac{dw_{n_p}}{dz}\right|_\infty. \tag{V, 18}$$

De (V, 16), (V, 17) et (V, 18) on conclut

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{dw_n}{dz}\right|_\infty = 1.$$

Par conséquent, d'après le lemme VII, il suffit que $n$ soit assez grand pour avoir, dans tout $\overline{D_n}$,

$$|\arg w_n - \arg z| < \varepsilon.$$

On en déduit, en tout point de D :

$$\lim_{p=\infty} \mathcal{I}\left(\operatorname{Log} \frac{w_{n_p}}{z}\right) = \mathcal{I} \operatorname{Log} \frac{w}{z} = 0.$$

Par conséquent, la fonction $\operatorname{Log}\frac{w}{z}$ est constante, et elle ne peut être nulle à l'origine et non nulle en $z_0$.

**2. Cas où le domaine D est symétrique par rapport au cercle unité C.** — Soit $w=f(z)$ la solution du problème V. Désignons par $C^*$ le cercle du plan $w$ de centre origine et de rayon

$$R_f=\sqrt{|f'(\infty)|}.$$

Soient $z$ un point de D, $z_1$ son symétrique par rapport à C, et $f_1(z_1)$ le symétrique du point $f(z)$ par rapport à $C^*$. On a

$$|z|.|z_1|=1 \qquad \text{et} \qquad |f(z)|.|f_1(z_1)|=R_f^2,$$

d'où

$$\frac{|f(z)|}{|z|}\cdot\frac{|f_1(z_1)|}{|z_1|}=R_f^2. \tag{V, 19}$$

La fonction $f_1(z)$ appartient à la famille $\Phi$ relative au domaine D. *Montrons qu'elle est identique à* $f(z)$. Si $z$ tend vers zéro, $z_1$ tend vers l'infini, et l'on obtient $|f_1'(\infty)|=|f'(\infty)|$. Si au contraire $z$ tend vers l'infini, $z_1$ tend vers zéro, et la relation (V, 19) donne $|f_1'(0)|=1$. Puisque V n'a qu'une solution, on conclut de ces résultats :

$$f_1(z)=e^{i\vartheta}f(z).$$

Pour déterminer la constante $\vartheta$, faisons $z=1$, il vient $z_1=1$, $f_1(1)=f(1)$, d'où $e^{i\vartheta}=1$ et $f_1(z)=f(z)$. *Nous en concluons qu'à deux points symétriques par rapport à* C, *la fonction* $f(z)$ *fait correspondre deux points symétriques par rapport à* $C^*$.

**3. Étude et extension de la famille $\Phi_\Delta^*$ du Chapitre III, dans le cas où $\Delta$ est un ensemble d'intervalles ouverts.** — Soit $\Delta$ un ensemble d'intervalles ouverts disjoints $\delta_i$ situés sur la circonférence unité C. Considérons le domaine D formé de l'intérieur et de l'extérieur de C, réunis par l'ensemble $\Delta$. Ses éléments de frontière étant situés sur C, la théorie du paragraphe précédent s'applique à D; désignons par $V_\Delta$ le problème V correspondant au domaine D.

D'autre part, appelons $\Phi_\Delta$ la famille des fonctions $f(z)$ qui satisfont aux conditions suivantes :

1° $f(0)=0$, $f'(0)=1$;

2° $f(z)$ *représente conformément l'intérieur de* C *sur un domaine* D' *intérieur à un cercle* C' *de centre origine, et fait correspondre aux* $\delta_i$ *des intervalles* $\delta_i'$ *situés* *sur* $C'$. *Ainsi* $\Phi_\Delta$ *est une extension de la famille* $\Phi_\Delta^\star$ *du Chapitre III, obtenue en supprimant pour* $D'$ *la condition d'être une étoile.*

En prolongeant les fonctions de $\Phi_\Delta$ par réflexion sur les cercles $C$ et $C'$, on voit que $\Phi_\Delta$ est contenue dans la famille $\Phi$ définie plus haut qui correspond au domaine $D$. D'après le paragraphe **2**, la solution de $V_\Delta$ appartient à $\Phi_\Delta$. Enfin l'égalité (V, 19) s'applique à une fonction quelconque de $\Phi_\Delta$ et montre que le rayon $R_f$ du cercle $C'$ correspondant est égal à $\sqrt{|f'(\infty)|}$. De ces trois propositions résulte le

THÉORÈME III. — *La solution du problème* $V_\Delta$, *que nous pouvons appeler l'*EXTRÉMALE-$\Delta$, *est celle des fonctions de* $\Phi_\Delta$ *pour laquelle le rayon* $R_f$ *atteint son maximum; nous désignerons ce maximum par* $R_\Delta$.

Cette fonction est étoilée dans le cercle unité, c'est une conséquence immédiate du théorème I; elle appartient donc à la famille $\Phi_\Delta^\star$.

Supposons maintenant qu'il existe dans la famille $\Phi_\Delta$ une fonction $f$ différente de la fonction $z$ : le lemme de Schwarz, joint à la condition $f'(0) = 1$, permet de conclure que le rayon $R_f$ de cette fonction est supérieur à un; à fortiori, d'après le théorème III, le rayon $R_\Delta$ de l'extrémale-$\Delta$ est supérieur à un; par conséquent cette dernière ne peut se réduire à $z$; on en conclut la propriété importante suivante :

THÉORÈME IV. — *Si* $\Phi_\Delta$ *contient une fonction autre que* $z$, *l'extrémale-*$\Delta$ *est une fonction de la famille* $\Phi_\Delta^\star$ *différente de* $z$, *et par conséquent* $\Delta$ *n'est pas du type maximum.*

Des théorèmes III et IV, nous concluons le

THÉORÈME IV *bis*. — PREMIER CAS : *Si* $\Delta$ *est du type maximum, autrement dit si* $\Phi_\Delta^\star$ *ne contient que* $z$, *la famille* $\Phi_\Delta$ *ne contient que* $z$.

C'est en particulier le cas si le complémentaire de $\Delta$ est de mesure nulle, ou bien si $\Delta$ satisfait à l'une des conditions du Chapitre IV.

DEUXIÈME CAS. — *Si* $\Delta$ *n'est pas du type maximum, toutes les fonctions de* $\Phi_\Delta$ *différentes de* $z$ *ont un rayon* $R$ *tel que* $1 < R \leqq R_\Delta$. *La seule dont le rayon est* $R_\Delta$ *est l'extrémale-*$\Delta$ *qui est la solution du problème* $V_\Delta$; elle est *étoilée et appartient par conséquent à* $\Phi_\Delta^\star$.

Ce cas se présente en particulier si le complémentaire de $\Delta$ contient un intervalle; il se présente toujours, comme nous le verrons au Chapitre VI, lorsque les deux conditions suivantes sont remplies : 1° le complémentaire de $\Delta$ n'est pas de mesure nulle; 2° en désignant par $\delta_j$ les intervalles de $\Delta$, la série $\sum \frac{1}{\operatorname{Log}\frac{1}{\delta_j}}$ converge.

On peut montrer que dans ce deuxième cas il y a des fonctions de $\Phi_\Delta^*$ de tous les rayons compris entre 1 et $R_\Delta$; en effet, $f(z)$ désignant l'extrémale-$\Delta$, la fonction

$$z^\alpha[f(z)]^{1-\alpha}$$

appartient à $\Phi_\Delta^*$ et a pour rayon $(R_\Delta)^{1-\alpha}$.

Démontrons encore le

Théorème V. — *Lorsque l'ensemble d'intervalles $\Delta$ n'est pas du type maximum, l'extérmale-$\Delta$, $w = f(z)$, le représente sur un ensemble d'intervalles $\Delta'$. Posons $w_1 = \frac{w}{R_\Delta}$: à $\Delta'$ correspond un ensemble semblable $\Delta_1$ sur le cercle unité du plan $w_1$. $\Delta_1$ est du type maximum.*

En effet, si $\Delta_1$ n'était pas du type maximum, l'extrémale-$\Delta_1$, $\psi(w_1)$, aurait un rayon $R_{\Delta_1} > 1$. La fonction

$$R_\Delta \psi\left(\frac{f(z)}{R_\Delta}\right)$$

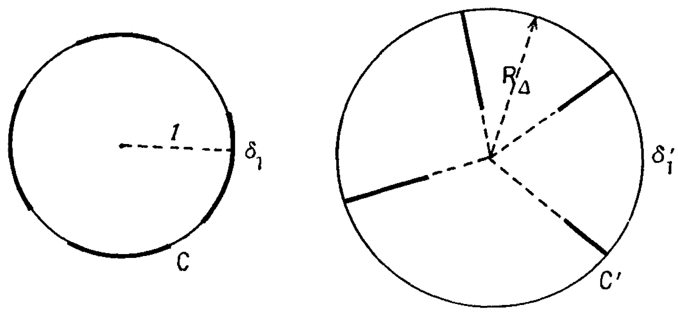



Fig. 15.

appartiendrait alors à la famille $\Phi_\Delta$, et aurait un rayon égal à $R_\Delta . R_{\Delta_1}$, donc plus grand que $R_\Delta$; c'est impossible.

Examinons le cas particulier où $\Delta$ se compose d'un nombre fini d'intervalles. Soit $f(z)$ l'extrémale-$\Delta$ (¹). Des intervalles complémentaires de $\Delta$, elle donne

(¹) La recherche de cette fonction peut ici se ramener au problème mixte de Dirichlet-des images vues de l'origine sous un angle nul; par conséquent elle représente l'intérieur de C sur une étoile E formée d'un cercle C′ de centre origine et de rayon $R_\Delta$, coupé par $n$ entailles dirigées suivant des rayons. On voit que l'argument de $f(z)$ présente un accroissement $2\pi$ sur $\Delta$. $f$ est donc l'unique fonction de la famille $[F_\Delta . \Phi_\Delta^*]$ définie au Chapitre III.

**4. L'hypothèse de P. Kœbe.** — Nommons *domaine du type* S un domaine du plan $\zeta$, contenant le point à l'infini, et dont tous les éléments de frontière sont des segments parallèles à l'axe réel, qui peuvent se réduire à des points (*Schlitzbereiche*). On sait [*voir* par exemple Hurwitz-Courant ($a$) ou encore une Note de l'auteur (*Gött. Nachr.*, 1931, p. 199)] que tout domaine plan [et même tout domaine *schlichtartig* (*voir* Introduction, § 5)] peut être représenté conformément sur un domaine du type S.

Deux domaines du type S à connexion finie ne peuvent être représentés l'un sur l'autre par une fonction développable à l'infini sous la forme

$$\zeta_1 = \zeta + \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta^2} + \ldots \tag{V, 20}$$

que s'ils sont identiques. P. Kœbe ($b$) a donné un exemple de deux domaines du type S, non identiques, et qui peuvent être représentés l'un sur l'autre par une fonction satisfaisant à la condition (V, 20).

Cependant, parmi les différentes fonctions $\zeta_1 = f(\zeta)$ qui satisfont à (V, 20) et qui représentent conformément un domaine donné D du plan $\zeta$, à connexion infinie, et contenant le point à l'infini, sur un domaine du type S du plan $\zeta_1$, il en est une qui se distingue par des propriétés remarquables : c'est la « fonction de courant » (Strömungsfunktion). Elle est l'unique solution de plusieurs problèmes de calcul des variations [1]. P. Kœbe ($b$) appelle le domaine obtenu au

---

Neumann qui consiste à trouver une fonction harmonique dans un cercle, sachant qu'elle est nulle sur certains arcs de la circonférence et que sa dérivée normale est nulle sur les arcs complémentaires. Ce problème se ramène lui même à une équation de Fredholm. *Voir* par exemple D. Hilbert ($a$), J. Hadamard ($a$).

[1] Celui qui consiste à rendre minimum l'intégrale de Dirichlet de la partie réelle de $f(z)$, étendue à la portion de D intérieure à un grand cercle, ou encore (Note de l'auteur citée ci-dessus), celui qui consiste à rendre maximum la partie réelle du coefficient de $\frac{1}{\zeta}$ dans le développement (V, 20).

moyen de cette fonction « minimale Schlitzberciche ». Nous dirons que c'est *un domaine du type* $S_m$. Deux domaines du type $S_m$ ne peuvent être représentés l'un sur l'autre, par une fonction satisfaisant à (V, 20), que s'ils sont identiques.

*P. Kœbe émet alors l'hypothèse suivante : pour tout domaine du type* $S_m$, *la projection de la frontière sur l'axe imaginaire est un ensemble de mesure nulle. Nous allons montrer que, même pour un domaine du type* $S_m$ *dont tous les éléments de frontière sont réduits à des points de l'axe imaginaire, la propriété n'est pas vraie* (1). Cela résulte du théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Prenons sur le cercle unité* C *du plan* $z$ *un ensemble* $\Delta$ *du type maximum, formé d'intervalles ouverts, et dont le complémentaire n'est pas de mesure nulle. Transformons le plan* $z$ *en un plan* $\zeta$ *au moyen d'une transformation linéaire fractionnaire* $\zeta = g(z)$ *qui amène l'intérieur de* C *sur le demi-plan* $\mathcal{R}(\zeta) > 0$, *et* $\Delta$ *sur un ensemble* $\Delta'$ *de l'axe imaginaire* I, *le point à l'infini étant le transformé d'un point de* $\Delta$. *Le domaine* D *du type* S *obtenu en retirant du plan* $\zeta$ *l'ensemble* $\mathrm{I} - \Delta'$ *est du type* $S_m$.

Considérons la fonction $\zeta_1 = f(\zeta)$ qui représente D sur un domaine $\overline{\mathrm{D}}$ du type $S_m$, et qui satisfait à (V, 20). *Nous devons montrer que c'est* $\zeta$. Puisqu'elle est unique, à deux points symétriques par rapport à I, elle fait correspondre deux points également symétriques par rapport à l'axe imaginaire $\mathrm{I}_1$ du plan $\zeta_1$, sinon on obtiendrait par symétrie une autre fonction jouissant des mêmes propriétés. A l'ensemble $\Delta'$ porté par I correspond donc un ensemble d'intervalles du domaine $\overline{\mathrm{D}}$ porté par $\mathrm{I}_1$. Transformons le plan $\zeta_1$ en un plan $z_1$ au moyen d'une nouvelle transformation linéaire fractionnaire, $z_1 = h(\zeta_1)$, qui amène le point $f[g(0)]$ à l'origine, le demi-plan $\mathcal{R}\zeta_1 > 0$ sur l'intérieur d'un cercle de centre origine, et telle que la fonction $h\{f[g(z)]\}$ ait pour $z = 0$ une dérivée égale à un. Cette dernière fonction appartient à la famille $\Phi_\Delta$, donc se réduit à $z$, puisque $\Delta$ est du type maximum (théorème IV *bis* de ce chapitre). Par conséquent le domaine $\overline{\mathrm{D}}$ n'a pas de point frontière en dehors de l'axe imaginaire; la fonction $\zeta_1 = f(\zeta)$ représente le demi-plan $\mathcal{R}(\zeta) > 0$ sur le demi-plan $\mathcal{R}(\zeta_1) > 0$, et satisfait à la condition (V, 20); c'est donc $\zeta$.

(1) J'apprends que ceci a été démontré par H. GRÖTZSCH, *Leipziger Berichte*, Bd **83**, 1931, p. 185-200.

## CHAPITRE VI.

### ÉTUDE DES FAMILLES DE FONCTIONS ÉTOILÉES $F_\Delta$, $\Phi^*_\Delta$ ET $[F_\Delta, \Phi^*_\Delta]$ DÉFINIES AU CHAPITRE III.

**1. La famille** $F_\Delta$. — Rappelons qu'elle est formée des fonctions étoilées dont la dérivée à l'origine est égale à un, et dont l'argument présente un accroissement $2\pi$ sur l'ensemble $\Delta$. Démontrons d'abord la propriété suivante, $\Delta$ *étant toujours formé d'intervalles ouverts.*

THÉORÈME I. — *Il existe une suite de fonctions $f_n$ de la famille $F_\Delta$ qui converge régulièrement dans le cercle unité C vers l'extrémale $-\Delta$. Le rayon $R_\Delta$ de cette dernière est la limite des rayons $R_n$ des fonctions $f_n$.*

Les intervalles $\delta_i$ de $\Delta$ étant numérotés dans un ordre arbitraire, considérons l'ensemble $\Delta_n = \delta_1 + \ldots + \delta_n$. Soit $f_n(z)$ l'extrémale $-\Delta_n$. Son argument présente un accroissement $2\pi$ sur $\Delta_n$, et aussi sur $\Delta$; elle appartient donc à la famille $F_\Delta$.

D'après le théorème II, Chapitre VI, les fonctions $f_n$ tendent vers l'extrémale $-\Delta$ $f(z)$. De plus, on a

$$R_n = \sqrt{|f_n(\infty)|} \qquad \text{et} \qquad R_f = \sqrt{|f(\infty)|};$$

il en résulte la propriété énoncée.

Revenons maintenant aux bornes $\overline{m_\Delta}$ et $\underline{M_\Delta}$ relatives aux familles F et $F_\Delta$, et définies au Chapitre III. Nous avons démontré l'inégalité

$$\overline{m_\Delta} \leq \underline{M_\Delta}. \tag{VI, 2}$$

A l'aide du théorème I ci-dessus, on peut compléter ce résultat de la façon suivante :

THÉORÈME II. — *Lorsque $\Delta$ est un ensemble d'intervalles ouverts, on a*

$$\overline{m_\Delta} = \underline{M_\Delta} = R_\Delta. \tag{VI, 3}$$

En effet, puisque $R_\Delta$ est la limite des rayons $R_{\Delta_n}$ des fonctions $f_n$ de la famille $F_\Delta$, il résulte de la définition de $\underline{M_\Delta}$

$$R_\Delta \geqq \underline{M_\Delta}. \tag{VI, 4}$$

D'autre part, $\overline{f}$ appartenant à la famille F, on a

$$\text{(VI, 5)} \qquad R_\Delta \leqq \overline{m_\Delta}.$$

Les égalités (VI, 3) sont une conséquence des inégalités (VI, 2), (VI, 4) et (VI, 5).

Nous avons vu au Chapitre III que si $\underline{M_\Delta} = 1$, $\Delta$ est du type maximum. Dans le cas présent, nous pouvons démontrer la réciproque. En effet, si $\Delta$ est du type maximum, nous avons (Chapitre V, § **3**) $R_\Delta = 1$, et par suite, d'après le théorème II ci-dessus, $\underline{M_\Delta} = 1$. D'où le

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble d'intervalles ouverts $\Delta$ soit du type maximum est $\underline{M_\Delta} = 1$.*

Nous avons construit au Chapitre IV un ensemble d'intervalles $\Delta$ du type maximum dont le complémentaire est de mesure non nulle; il fournit un exemple du cas où l'argument de $f$, fonction limite des $f_n$, présente sur $\Delta$ un accroissement inférieur à $2\pi$, alors que les arguments des $f_n$ présentent sur $\Delta$ des accroissements égaux à $2\pi$. On a ici $f = z$. Autrement dit, la famille $F_\Delta$ n'est pas compacte, ou si l'on veut, l'accroissement d'argument sur $\Delta$ n'est pas une fonctionnelle continue.

**2. La famille $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$.** — Une conséquence immédiate du théorème II est la suivante :

*L'extrémale-$\Delta$ est une solution du problème de calcul des variations qui consiste à trouver, dans la famille* F, *les fonctions pour lesquelles le minimum du module sur $\Delta$ atteint sa borne supérieure $\overline{m_\Delta}$* [1].

*Considérons le problème analogue qui consiste à trouver, dans la famille $F_\Delta$, une fonction pour laquelle le maximum du module sur la circonférence unité* C *atteint sa borne inférieure $\underline{M_\Delta}$. D'après le théorème II de ce chapitre, une telle fonction $f$ appartient à la famille $\Phi_\Delta$; d'après le théorème III, Chapitre V, $f$ est l'extrémale-$\Delta$. Elle appartient à la famille $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$. Inversement* [2], *considé-*

(1) On peut d'ailleurs montrer que pour toute solution $f(z)$ de ce dernier problème, le module de $f$ a la même valeur en tout point de $\Delta$. Il en résulte que l'unique solution de ce problème est l'extrémale-$\Delta$. Mais la démonstration ne saurait trouver place ici. Je compte revenir prochainement sur ces questions.

(2) Ce raisonnement ne suppose pas que $\Delta$ soit un ensemble d'intervalles. Dans le cas

*rons une fonction $f$ de la famille* $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$. *Appartenant à* $F_\Delta$, *son rayon est au moins égal à* $R_\Delta$; *appartenant à* $\Phi_\Delta^\star$, *il est au plus égal à* $R_\Delta$ : par conséquent il est égal à $R_\Delta$; $f$ est donc *l'extrémale-*$\Delta$ *et appartient à* $F_\Delta$. Nous avons ainsi le

THÉORÈME IV. — *La famille* $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$ *se réduit à l'extrémale-*$\Delta$ *si celle-ci appartient à* $F_\Delta$. *Dans le cas contraire, la famille* $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$ *est vide.*

Si, pour un certain ensemble $\Delta$, on peut affirmer que la limite d'une suite convergente et uniformément bornée de fonctions de la famille $F_\Delta$ appartient encore à $F_\Delta$, il en résulte, d'après le théorème I, que l'extrémale-$\Delta$ $f(z)$ appartient à $F_\Delta$. Si, de plus, le complémentaire de $\Delta$ n'est pas de mesure nulle, il est impossible que l'on ait $f(z) = z$; donc $\Delta$ n'est pas du type maximum, et, d'après le théorème IV, $f(z)$ est une fonction de $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$ différente de $z$.

Nous allons montrer qu'il en est ainsi, pourvu que $\Delta$ satisfasse à des conditions assez générales :

THÉORÈME V. — *Si la série* $\sum \dfrac{1}{\operatorname{Log} \dfrac{1}{\delta_j}}$ *converge, toute suite* $f_n$ *convergente et uniformément bornée de fonctions de* $F_\Delta$ *converge vers une fonction* $f$ *de* $F_\Delta$ ([1]).

Posons, comme au Chapitre III,

$$\lambda_n(t) = \arg f_n(e^{it}), \qquad \lambda(t) = \arg f(e^{it}).$$

La fonction monotone $\lambda(t)$ est continue, sinon, d'après la formule (IV, 1), $f(z)$ ne serait pas bornée. Il résulte alors du théorème VII, Chapitre II, que $\lambda_n(t)$ tend vers $\lambda(t)$ lorsque $n$ augmente indéfiniment. Pour l'intervalle $\delta_j$ allant du point d'argument $\alpha_j$ au point d'argument $\beta_j$ dans le sens positif, nous avons

$$\mathbf{A}(\delta_j;\lambda_n) = \lambda_n(\beta_j) - \lambda_n(\alpha_j),$$

expression qui tend vers

$$\mathbf{A}(\delta_j;\lambda) = \lambda(\beta_j) - \lambda(\alpha_j).$$

Nous devons montrer que si $|f_n|$ est borné supérieurement par un nombre K, la différence

$$(\text{VI}, 6) \qquad \mathbf{A}[\Delta, \lambda_n(t)] - \mathbf{A}[\Delta, \lambda(t)]$$

---

général, il conduit à la conclusion suivante : si une fonction $f(z)$ de rayon R appartient à $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$, on a $\overline{m}_\Delta = \underline{M}_\Delta = R$, et toute autre fonction de $[F_\Delta . \Phi_\Delta^\star]$ a alors le même rayon R.

([1]) C'est le cas pour un nombre fini d'intervalles.

tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment. En désignant par $\theta_j$ l'argument du milieu de $\delta_j$, la formule (IV, 1) donne

$$\text{Log}\,|f_n(e^{i\theta_j})| = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}} \text{Log}\,\frac{2}{r_{t\theta_j}}\,d\lambda_n(t) + \text{Log}\,\frac{1}{4}.$$

Or, la formule de la moyenne (chapitre préliminaire) permet d'écrire

$$\int_{\mathrm{C}} \text{Log}\,\frac{2}{r_{t\theta_j}}\,d\lambda_n(t) \geqq \int_{\delta_j} \text{Log}\,\frac{2}{r_{t\theta_j}}\,d\lambda_n(t) \geqq \text{Log}\,\frac{1}{\sin\frac{\delta_j}{2}}\,\mathbf{A}(\delta_j;\lambda_n) > \text{Log}\,\frac{2}{\delta_j}\,\mathbf{A}(\delta_j;\lambda_n);$$

d'où

$$\text{Log}\,|f_n(e^{i\theta_j})| > \frac{1}{\pi}\,\text{Log}\,\frac{2}{\delta_j}\,\mathbf{A}(\delta_j;\lambda_n) + \text{Log}\,\frac{1}{4}.$$

De $|f_n| < \mathrm{K}$, on conclut alors

$$\mathbf{A}(\delta_j;\lambda_n) < \frac{\mathrm{K}'}{\text{Log}\,\frac{1}{\delta_j}},$$

$\mathrm{K}'$ étant une constante. Puisque la série $\dfrac{1}{\text{Log}\,\frac{1}{\delta_j}}$ converge, nous pouvons prendre N assez grand pour que l'on ait, quel que soit $n$,

(VI, 7) $$\sum_{j=\mathrm{N}}^{\infty} \mathbf{A}(\delta_j;\lambda_n) < \frac{\varepsilon}{4},$$

ce qui entraîne, la série étant à termes positifs,

$$\sum_{j=\mathrm{N}}^{\mathrm{N}'} \mathbf{A}(\delta_j;\lambda) < \frac{\varepsilon}{4},$$

et par suite

(VI, 8) $$\sum_{j=\mathrm{N}}^{\infty} \mathbf{A}(\delta_j;\lambda) < \frac{\varepsilon}{4},$$

N étant ainsi déterminé, nous pouvons prendre $n$ assez grand pour que l'on ait, pour tout indice $j$ inférieur à N,

(VI, 9) $$|\mathbf{A}(\delta_j;\lambda_n) - \mathbf{A}(\delta_j;\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{N}}.$$

Il résulte alors de (VI, 7), (VI, 8) et (VI, 9) que la différence (VI, 6) est inférieure à $\varepsilon$.

De ce théorème, nous concluons le

THÉORÈME VI. — *Un ensemble $\Delta$ d'intervalles ouverts $\delta_j$ dont le complémentaire n'est pas de mesure nulle, et tel que la série $\dfrac{1}{\operatorname{Log}\frac{1}{\delta_j}}$ converge, n'est pas du type maximum, et l'extrémale-$\Delta$ correspondante appartient à $F_\Delta$.*

**3. Exemple d'un ensemble $\Delta$ qui n'est pas du type maximum et pour lequel la famille $[F_\Delta . \Phi^*_\Delta]$ est vide; autrement dit, pour lequel l'extrémale-$\Delta$ n'appartient pas à $F_\Delta$.**

Soit $t$ un diamètre du cercle unité C du plan $z$, le partageant en deux demi-cercles $d_1$ et $d_2$, limités par les arcs $C_1$ et $C_2$. Prenons deux ensembles d'intervalles ouverts dont l'un, $\Delta_1$, est du type maximum, et a un complémentaire *de*

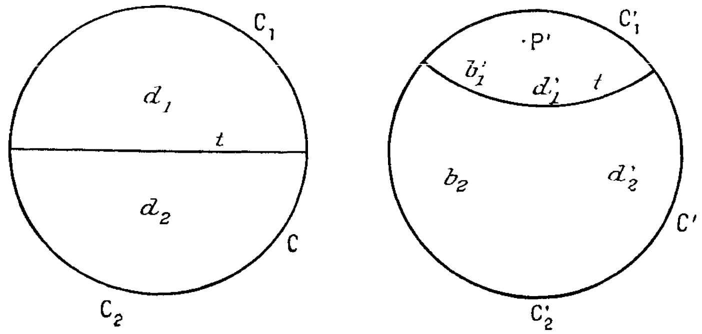



Fig. 16.

*mesure non nulle* situé sur $C_1$, et l'autre, $\Delta_2$, n'est pas du type maximum, et a un complémentaire situé sur $C_2$.

*Montrons que l'ensemble $\Delta = \Delta_1 . \Delta_2$ répond à la question.* Tout d'abord, la famille $\Phi^*_\Delta$ contient, entre autres fonctions, celles de $\Phi^*_{\Delta_1}$; $\Delta$ n'est donc pas du type maximum.

Il reste à montrer que si $f(z)$ est une fonction de $\Phi^*_\Delta$, elle ne peut appartenir à $F_\Delta$. En effet, si cela a lieu, elle transforme l'intérieur de C en un domaine intérieur à un cercle C′, de sorte qu'aux intervalles de $\Delta$ correspondent des intervalles d'*un ensemble $\Delta'$ de C′ dont le complémentaire est de mesure nulle.*

Le diamètre $t$ aboutissant en des points de $\Delta$, il en résulte que $t'$ partage C′ en deux arcs $C'_1$ et $C'_2$, et son intérieur en deux domaines correspondants $b'_1$ et $b'_2$. Le domaine $d'_1$, image de $d_1$, ne peut être identique à $b'_1$; s'il l'était, à $C_1$, $f(z)$ ferait correspondre l'arc $C'_1$, et *le complémentaire de $\Delta'$ ne serait pas de mesure nulle;* $d'_1$ a donc au moins un point frontière P′ intérieur à $b'_1$.

Représentons conformément le domaine $b'_1 + d'_2 + t'$ sur l'intérieur d'un cercle C'', au moyen d'une fonction $g(w)$, satisfaisant aux conditions $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. La fonction $g[f(z)]$ représente alors l'intérieur de C sur un domaine D'', intérieur à C'', et qui a un point frontière P'', image de P', à l'intérieur de C''; de plus, à tout intervalle de $\Delta_1$ correspond un intervalle situé sur C''; $g[f(z)]$ est donc une fonction de la famille $\Phi_{\Delta_1}$ différente de $z$. Mais c'est impossible, puisque $\Delta_1$ est du type maximum (th. IV *bis*, Chap. V).

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.


A. Ahlfors. — (*a*). Untersuchungen zur theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen (*Acta Fennicæ*, A, **1**, 1930).

S. Bochner. — (*a*). Fortsetzung Riemannscher Flachen (*Math. Ann.*, **98**, 1927).

C. Carathéodory. — (*a*). Ueber die gegenseitige Beziehung der Rander bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. Ueber die Begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete (*Math. Ann.*, **73**, 1913).

(*b*). Vorlesungen uber reelle Funktionen (Leipzig-Berlin, 1917, ou 2e édition 1927).

(*c*). Ueber die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen (*Sitzungsberichte Akad.*, Berlin, XXX, 1920).

(*d*). Bemerkungen zu den Existenz theoremen der konformen Abbildung (*Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, XX, 1928).

(*e*). Stetige konvergenz und normale Familien von Funktionen (*Math. Ann.*, **101**, 1929).

(*f*). Leçons sur la représentation conforme, en anglais, 1932.

R. Courant. — (*a*). Hurwitz-Courant. Funktionentheorie (Berlin, 1925).

A. Denjoy. — (*a*). Fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensemble parfait discontinu de singularités (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, **148**, 1909).

(*b*). Les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues (5 Notes) (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, **149**, 1909 et **150**, 1910).

P. Fatou. — (*a*). Séries trigonométriques et séries de Taylor (Thèse) (*Acta mathematica*, **30**, 1906).

M. Fréchet. — (*a*). Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait (*Bull. Soc. math. de France*, **43**, 1915).

(*b*). Les espaces abstraits (Paris, 1930).

H Grötzsch. — (*a*). Zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche (*Berichte*, Leipzig, **83**, 1931).

J. Hadamard. — (*a*). Leçons sur la propagation des ondes (Paris, 1903).

F. Hausdorff. — (*a*). Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig, 1914).

D. Hilbert. — (*a*). Grundzuge einer allgem. Theorie d. linearen Integralgleichungen (Leipzig, 1912).

A. Hurwitz. — (*a*). Hurwitz-Courant. Funktionentheorie (Berlin, 1925).

G. Julia. — (*a*). Principes géométriques d'analyse : 1<sup>re</sup> Partie (Fascicule VI des *Cahiers scientifiques*; Paris, 1930).

B. de Kerekjartó. — (*a*). Vorlesungen über Topologie (Berlin, 1923).

P. Kœbe. — (*a*). Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer kurven (III) (*Göttinger Nachrichten*, 1908),

(*a*₁). Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer kurven (IV) (*Göttinger Nachrichten*, 1909).

(*b*). Zur konformen Abbildung schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (*Göttinger Nachrichten*, 1918).

(*c*). Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (*Acta mathematica*, **41**, 1918).

H. Lebesgue. — (*a*). Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 2<sup>e</sup> édition (Paris, 1928).

K. Löwner. — (*a*). Ueber Extremumsätze bei der konformen Abbildung der Aüsseren des Einheitskreises (*Math. Zeitschrift*, **3**, 1919).

P. Montel. — (*a*). Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques (Paris, 1927).

R. de Possel (*a*). — Sur le prolongement des surfaces de Riemann (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, **187**, 1928).

(*b*). Sur les invariants caractéristiques des variétés à deux dimensions à connexion infinie (*C. R. Acad. Sc.*, **188**, 1929).

T. Radó. — (*a*). Ueber den Begriff der Riemannschen Fläche (*Acta Szeged*, II, 1925).

(*b*). Ueber eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit (*Math. Zeitschrift*, **20**, 1924).

W. Seidel. — (*a*) Ueber die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen (*Math. Annalen*, **104**, 1931).

H. Weyl. — (*a*). Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig-Berlin, 1913, ou 2<sup>e</sup> édition 1923).

*Vu et approuvé :*

Paris, le 2 décembre 1931.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. MAURAIN.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 2 décembre 1931.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

# TABLE DES MATIÈRES