Thèses de l'entre-deux-guerres

S. P. Liau

Sur les entiers algébriques du quatrième degré

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1932

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1932__135__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

PAR

S. P. LIAU

Licencié ès sciences mathématiques

1re THÈSE. — SUR LES ENTIERS ALGÉBRIQUES DU QUATRIÈME DEGRÉ.

2me THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le avril 1932, devant la Commission d'Examen

MM. GOSSE, *Président.*

COTTON, FAVARD, *Examinateurs.*

GRENOBLE

ALLIER PÈRE ET FILS, IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ

26, Cours Jean Jaurès, 26

1932

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE

MM.

Doyen	GOSSE.	
Doyen honoraire	GAU.	
Professeurs	GOSSE	Mathématiques générales.
	COTTON	Mécanique, Correspondant de l'Institut.
	GAU	Analyse infinitésimale.
	VAILLANT	Physique.
	RECOURA	Chimie, Correspondant de l'Institut.
	FLUSIN	Chimie.
	GIGNOUX	Géologie et Minéralogie, Correspondant de l'Institut.
	LÉGER	Zoologie, Correspondant de l'Institut.
	BARBILLION	Physique industrielle.
	FORTRAT	Physique.
	MORET	Géologie.
	DEJEAN	Physique industrielle.
	VIDAL	Micrographie.
	ANDRIEUX	Électrochimie et Électrométallurgie.
	DE LITARDIÈRE	Botanique.
Maîtres de conférences	FAVARD	Mathématiques.
	ROUTIN	Mécanique industrielle.
Secrétaire	GRENIER.	
Secrétaire honoraire	CHAVANIÉ.	

A la mémoire de mon PÈRE

et de ma MÈRE

À mes chers Maîtres

MM.

le Doyen R. GOSSE — le Professeur E. COTTON

et le Professeur J. FAVARD

Hommage de respectueuse reconnaissance

A mon cher ami

M. KION - SAN YEN

Témoignage de reconnaissance

SUR LES ENTIERS ALGÉBRIQUES DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par S.-P. LIAU.

INTRODUCTION

1. — La réduction des formes binaires à coefficients entiers a permis à M. J. Favard [1] de démontrer le théorème suivant :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots\ldots \xi_n$, n entiers algébriques conjugués, racines d'une même équation irréductible du $n^{ième}$ degré à coefficients entiers

$$(E_n)\quad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

parmi ces nombres, il y en a une paire au moins (ξ_i, ξ_j) telle que :

$$|\xi_i - \xi_j| \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Considérant alors pour une équation irréductible E_n donnée, le nombre $M(E_n) = \max(|\xi_i - \xi_j|)$ $(i, j = 1, 2, \ldots\ldots n)$ c'est à-dire le *diamètre* de l'ensemble des points du plan ayant pour affixes les nombres ξ ; puis, parmi toutes les équations irréductibles du $n^{ième}$ degré, choisissant celles pour lesquelles $M(E_n)$ est minimum et posant

[1] J. Favard, Sur les formes décomposables et les nombres algébriques (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 57, 1928).

$$M(n) = \min M(E_n),$$

on définit ainsi une fonction de l'entier n.

M. Favard a calculé cette fonction pour $n = 2$, et $n = 3$, et il a trouvé

$$M(2) = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots\ldots$$
$$M(3) = 1{,}794\ldots\ldots\ldots\ \ldots$$

et les équations correspondantes sont

$$x^2 + x + 1 = 0$$
et
$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

ainsi que celles qui s'en déduisent en remplaçant x par

$$\pm x + a \quad (a \text{ entier naturel}).$$

Restreignant le problème et considérant uniquement parmi les équations E_n qui ont r racines réelles et $2s$ racines imaginaires $(r+2s=n)$, on peut définir de même

$$M(n=r+2s).$$

Ainsi au moyen d'une inégalité de Minkowski, M. Favard a montré que

$$M(4 = 4 + 0) > \sqrt[12]{\frac{32.10^5}{9}} = 2{,}901\ \ldots\ldots$$

2. — Nous nous sommes proposé de calculer le nombre $M(4)$. Les équations de la division du cercle en cinq, huit ou douze parties égales fournissent des exemples d'équations du 4$^{\text{me}}$ degré telles que le nombre M correspondant ne dépasse pas 2; alors, d'après l'inégalité précédente, les recherches pourront être limitées aux équations qui ont au moins deux racines imaginaires.

Nous déterminerons donc les deux nombres $M(4=0+4)$ et $M(4=2+2)$. Les méthodes employées dans chacun de ces deux cas ne sont pas les mêmes; la plus puissante est celle employée dans la recherche de $M(4=2+2)$; on pourrait l'appliquer aussi pour rechercher $M(4=0+4)$ et $M(4=4+0)$, mais pour le cas de quatre racines imaginaires, nous avons préféré donner une méthode plus simple et, quant au cas de quatre racines réelles, le nombre des équations qui resteraient à examiner après l'application de notre méthode est beaucoup trop grand; nous avons laissé ce cas de côté.

Nous avons trouvé

$$M\,(4 = 0 + 4) = 2 \sin \frac{2\pi}{5} = 1{,}90213 \ldots.$$

$$M\,(4 = 2 + 2) = 2{,}06795 \ldots..$$

et les équations correspondantes sont:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$
$$x^4 + x - 1 = 0$$

à une substitution $(x, \pm x + a)$ près.

Nous montrons enfin que le *diamètre du cercle circonscrit* à l'ensemble formé par les quatre points qui ont pour affixes les racines d'une équation E_4 est au moins égal à 2.

CHAPITRE I

Rappel des formules et des résultats employés dans la suite.

3. — Soit l'équation

$$(1) \qquad x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$$

dont nous désignerons les racines par ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, et posons

$$t = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4.$$

Cette fonction des racines de (1) a six valeurs égales deux à deux, mais de signes contraires. Si l'on forme l'équation à laquelle satisfait $t^2 = \theta$, elle sera du troisième degré. C'est la résolvante que nous utiliserons dans la suite. Elle s'écrit :

$$(2) \quad \theta^3 - (3p_1^2 - 8p_2)\theta^2 + (3p_1^4 - 16p_1^2 p_2 + 16 p_2^2 + 16 p_1 p_3 - 64 p_4)\,\theta - (p_1^3 - 4p_1 p_2 + 8p_3)^2 = 0$$

Soient θ_1, θ_2, θ_3 les trois racines de l'équation (2), on aura :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{-p_1 + \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}}{4} \\ \xi_2 &= \frac{-p_1 - \sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}}{4} \\ \xi_3 &= \frac{-p_1 + \sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3}}{4} \\ \xi_4 &= \frac{-p_1 - \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3}}{4} \end{aligned} \right.$$

Lorsque les coefficients p_1, p_2, p_3, p_4 sont réels, on a les résultats suivants :

1° Si les trois racines de l'équation (2) sont toutes réelles, et qu'aucune d'elles ne soit négative, les quatre racines de (1) sont toutes réelles ;

2° Si la résolvante (2) a deux racines imaginaires, on peut supposer, dans les formules (3) que $\sqrt{\theta_1}$, $\sqrt{\theta_2}$ sont des imaginaires conjugués, et que $\sqrt{\theta_3}$ soit réel ; on voit ainsi que l'équation proposée a deux racines réelles et deux imaginaires ;

3° Si les trois racines de (2) sont réelles, et que deux d'entre elles soient négatives, (1) aura quatre racines toutes imaginaires.

4. — En second lieu, nous allons chercher les sommes des diverses puissances des carrés des différences des racines et le discriminant de l'équation (1). La substitution $\left(x,\, x - \frac{p_1}{4}\right)$ fait disparaître le second terme de (1), et cette équation devient :

$$x^4 + P\,x^2 + Q\,x + R = 0 \tag{4}$$

où
$$\left\{\begin{aligned} P &= p_2 - \frac{3}{8}\,p_1^2 \\ Q &= p_3 - \frac{1}{2}\,p_1 p_2 + \frac{1}{8}\,p_1^3 \\ R &= p_4 - \frac{1}{4}\,p_1 p_3 + \frac{1}{16}\,p_1^2 p_2 - \frac{3}{256}\,p_1^4 \end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$V_{i,j} = (\xi_i - \xi_j)^2 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4\,;\ i \neq j),$$

puis $$S_n = \Sigma\, V_{i,j}^n$$

on trouve :

$$S_1 = -\,8\,P,$$
$$S_2 = 20\,P^2 - 16\,R,$$
$$S_3 = -\,68\,P^3 + 144\,PR - 78\,Q^2,$$
$$S_4 = 260\,P^4 + 640\,PQ^2 - 928\,P^2 R + 576\,R^2,$$
$$S_5 = -\,1028\,P^5 - 3630\,P^2 Q^2 + 4960\,P^3 R - 5440\,PR^2 - 40\,Q^2 R,$$
$$S_6 = 4100\,P^6 + 18120\,P^3 Q^2 - 24336\,P^4 R + 37824\,P^2 R^2 - 5664\,PQ^2 R + 2190\,Q^4 - 7936\,R^3.$$

Nous utiliserons également la formule qui donne

$$\prod_{i,j=1}^{4} V_{i,j} = \Pi$$

$$\Pi = 16\,P^4\,R - 4\,P^3\,Q^2 - 128\,P^2\,R^2 + 144\,PQ^2\,R - 27\,Q^4 + 256\,R^3.$$

5\. — On appelle *diamètre d'une courbe convexe* la plus grande distance entre deux points de cette courbe.

Considérons deux courbes convexes C_1 et C_2, et supposons que C_2 n'ait aucun point à l'extérieur de C_1, alors on voit facilement que le diamètre de C_2 est plus petit que le diamètre de C_1.

D'autre part, d'après le théorème de Gauss, le polygone convexe formé par les points représentatifs des racines de la dérivée d'une équation algébrique n'a aucun point extérieur à celui formé par les points représentatifs des racines de l'équation proposée.

En particulier, considérons alors l'équation :

$$(1) \qquad x^4 + p_1\,x^3 + p_2\,x^2 + p_3\,x + p_4 = 0$$

et sa dérivée :

$$(5) \qquad x^3 + \frac{3}{4}\,p_1\,x^2 + \frac{1}{2}\,p_2\,x + \frac{1}{4}\,p_3 = 0.$$

Si cette dernière a trois racines réelles, on trouvera très facilement la plus grande distance respective entre ces racines. Si elle a une racine réelle et deux imaginaires, soient A, B, C, les points représentatifs de ces racines dans le plan complexe (A sur l'axe réel), nous avons ainsi AB=AC. En désignant par x_1 la racine réelle, nous trouverons facilement :

$$\overline{BC}^2 = 4\left(\frac{p_2}{2} - \frac{3\,p_1^2}{16}\right) + 3\left(x_1 + \frac{p_1}{4}\right)^2;$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = \left(\frac{p_2}{2} - \frac{3\,p_1^2}{16}\right) + 3\left(x_1 + \frac{p_1}{4}\right)^2;$$

d'où il vient :

$$\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = 3\left(\frac{p_2}{2} - \frac{3p_1^2}{16}\right).$$

Si nous voulons que la plus grande distance respective entre les quatre racines de l'équation (1) soit plus petite que n, il faudra qùe l'on ait pour la racine réelle de (5) :

$$\overline{BC}^2 < n^2 \quad \text{et} \quad \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 < n^2.$$

6. — Comme nous ne nous occuperons que des équations du 4me degré irréductibles à coefficients entiers rationnels, il est clair qu'en changeant x en $\pm x + a$ (a entier rationnel), on peut ramener les équations à être de l'une des trois formes :

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^{\text{er}} \text{ type : } & x^4 + px^2 + qx + r = 0 \\ 2^{\text{e}} \text{ type : } & x^4 + x^3 + px^2 + qx + r = 0 \\ 3^{\text{e}} \text{ type : } & x^4 + 2x^3 + px^2 + qx + r = 0 \end{array}\right.$$

CHAPITRE II

La recherche du nombre M (4=0+4).

7. — Nous nous occupons d'abord des équations irréductibles du 4^{me} degré à coefficients entiers rationnels qui ont quatre racines imaginaires. Avant d'aller plus loin, remarquons que, pour l'équation de la division en cinq parties égales,

$$(E) \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

appartient à cette catégorie; on a :

$$M\ (E) = 2 \sin \frac{2\pi}{5} = 1,90213\ldots\ldots$$

Nous pouvons donc nous borner à chercher seulement les équations E_4 telles que $M(E_4)$ soit inférieur à 2, puis parmi ces équations, nous choisirons celle pour laquelle $M(E_4)$ est le plus petit.

1^{er} type : $x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad \ldots\ \ldots\ldots \quad (6)$

8. — Dans le premier chapitre, nous avons trouvé

$$S_1 = -8\,p$$

qui doit, dans le cas actuel, ne pas dépasser $4 \times 6 = 24$ en valeur absolue, de sorte que p ne peut prendre que les sept valeurs

$$p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3.$$

Tout d'abord $p = \pm 3$, entraînerait que toutes les quantités $|\,\xi_i - \xi_j\,|$ sont égales à 2, mais cela est impossible, il faut donc supprimer $p = \pm 3$.

Montrons de plus que les valeurs $p = \pm 2$ ne conviennent pas.

Comme $\Sigma\,\xi_i = 0$, les racines de l'équation (6) sont

$$\begin{cases} \xi_1 = a + bi \\ \xi_2 = a - bi \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_3 = -a + b'i \\ \xi_4 = -a - b'i \end{cases}$$

pour que notre condition soit réalisée, il faut donc

$$|a| \leqq 1, \quad |b| \leqq 1 \quad \text{et} \quad |b'| \leqq 1.$$

Divisons l'équation (6) par $(x - \xi_1)(x - \xi_2)$, le quotient est l'équation quadratique

$$x^2 + (\xi_1 + \xi_2)\,x + (\xi_1^2 + \xi_1\,\xi_2 + \xi_2^2 + p) = 0$$

qui doit avoir aussi deux racines imaginaires, et la distance entre les deux points représentatifs doit être inférieure ou égale à 2, ce qui nous donne

$$4 \geqq 4\,(\xi_1^2 + \xi_1\,\xi_2 + \xi_2^2 + p) - (\xi_1 + \xi_2)^2 > 0.$$

En simplifiant et en passant aux variables réelles a et b, on a

$$(1 - p) + b^2 \geqq 2\,a^2 \geqq b^2 - p,$$

ce qui montre $p \geqq -1$, et $p < 2$, puisque nous devons supprimer les équations réductibles.

Nous avons par conséquent :

$$p = 0, \ \pm 1.$$

Pour déterminer q, considérons

$$\begin{aligned} |q| &= |\Sigma\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3| = |\xi_1\,\xi_2\,(\xi_3 + \xi_4) + \xi_3\,\xi_4\,(\xi_1 + \xi_2)| \\ &= |2\,a|\,.\,|b^2 - b'^2| \end{aligned}$$

donc $\quad |q| \leqq 2.$

Mais nous ne pouvons pas prendre le signe égal, car pour $|q| = 2$, il faut que b ou b' soit nul, les équations ainsi obtenues seront réductibles.

Nous pouvons nous borner à prendre seulement les valeurs positives de q, car, en changeant x en $-x$, q change de signe. On a finalement :

$$q = 0, 1.$$

r est le produit des quatre racines imaginaires conjuguées deux à deux, donc une quantité toujours positive :

$$r = (a^2 + b^2)\ (a^2 + b'^2) < 4.$$

Nous ne pouvons pas prendre $r=4$, car (a^2+b^2) et $(a^2+b'^2)$ seraient égaux à 2, et on aurait un carré dont le côté serait égal à 2, les deux diagonales seraient plus grandes que 2, donc

$$r=1,\ 2,\ 3.$$

Pour que l'équation (6) ait quatre racines imaginaires, il faut que sa résolvante en θ ait trois racines toutes réelles. Cette condition nécessaire s'écrit :

$$(2\,p^3 + 27\,q^2 - 72\,pr)^2 < 4\,(p^2 + 12\,r)^3,$$

Cela nous permet de supprimer la valeur $r=3$ pour toutes les valeurs de p et q déterminées précédemment.

Il nous reste seulement douze équations à envisager.

En supprimant les p, q, r, qui ne satisfont pas à l'inégalité

$$|\,S_6\,| < 6\ (4)^6 = 24576,$$

il existe quatre équations seulement :

$$\begin{array}{lll}
p = 0 \left\{ \begin{array}{l} (1)\ x^4 + x + 1 = 0 \\ (2)\ x^4 + 1 = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} |\,S_6\,| = 5746; \\ |\,S_6\,| = 7936; \end{array} \\
p = 1 \quad (3)\ x^4 + x^2 + x + 1 = 0\ * & |\,S_6\,| = 24298; \\
p = -1\ (4)\ x^4 - x^2 + 1 = 0 & |\,S_6\,| = 9652;
\end{array}$$

Au commencement, nous avons trouvé une équation E telle que M (E) $< 1{,}91$. Si donc l'on se borne à chercher les équations pour lesquelles

$$|\,S_6\,| < 6\ (1{,}91)^{12} < 14232$$

cette inégalité est vérifiée; nous pouvons donc supprimer encore l'équation (3).

De plus, on voit facilement que les équations (2) et (4) proviennent de la division du cercle en huit et douze parties égales, et ont toutes deux pour

$$M\,(E) = 2 > 1{,}90213\ldots\ldots$$

Nous pouvons donc les laisser de côté. La seule équation à comparer avec l'équation de la division du cercle en cinq parties est la première.

2me type : $x^4 + x^3 + px^2 + qx + r = 0\ldots\ldots\ldots$ (7)

9. — Dans les formules précédentes, remplaçons p, q, r par les quantités P, Q, R

$$\left\{\begin{aligned} P &= p - \frac{3}{8}, \\ Q &= q - \frac{p}{2} + \frac{1}{8}, \\ R &= r - \frac{q}{4} + \frac{p}{16} - \frac{3}{256}\,. \end{aligned}\right.$$

Soient $\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= a + bi \\ \xi_2 &= a - bi \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \xi_3 &= a' + b'i \\ \xi_4 &= a' - b'i \end{aligned}\right.$

les quatre racines de l'équation (7), on a alors

$$2a + 2a' = -1, \qquad a' = -\frac{1}{2} - a,$$

et $\quad \left| a - a' \right| = \left| 2a + \frac{1}{2} \right| < 2$, donc $\left| a + \frac{1}{4} \right| < 1.$

En opérant alors comme précédemment, nous trouvons

$$4p \geqq \frac{3}{2} - 4\left\{ 2\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 - b^2 \right\} \geqq \frac{3}{2} - 8, \text{ donc } p \geqq -1;$$

$$4p \leqq 4 + \frac{3}{2} - 4\left\{ 2\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 - b^2 \right\} \leqq 8 + \frac{3}{2}, \text{ donc } p \leqq 2.$$

On en conclut

$$p = -1,\ 0,\ 1,\ 2.$$

l'inégalité $$\left| q - \frac{p}{2} + \frac{1}{8} \right| < 2$$

donne immédiatement les valeurs de q connaissant p, ce qui donne le tableau suivant :

p	q				
2		-1	0	1	2
1		-1	0	1	2
0	-2	-1	0	1	
-1	-2	-1	0	1	

Les valeurs de r se déterminent par l'inégalité

$$(8) \qquad 0 \leqq r - \frac{q}{4} + \frac{p}{16} - \frac{3}{256} < 4$$

$p = -1$

$q \backslash r$	1	2	3	4
1	I	*	III	II
0	*	V	II	II
-1		IV	II	X
-2	*	IV	II	X

$p - 0$

$q \backslash r$	1	2	3	4
1	*		II	II
0		III	II	II
-1		III	II	X
-2	V	III	II	X

$p = 1$

$q \backslash r$	1	2	3	4
2	*	III	II	II
1		IV	II	II
0		III	II	X
-1	IV	III	II	X

$p = 2$

$q \backslash r$	1	2	3	4
2	IV	IV	III	II
1	*	IV	IV	II
0	IV	IV	II	X
-1	III	III	II	X

Au moment où nous déterminions les valeurs de r, connaissant p et q, par l'inégalité (8), nous n'avions rien précisé quant à la nature des racines de ces équations. Pour que la résolvante de l'équation (7) ait trois racines réelles, il faut :

$$\text{(I)} \quad (2p^3 + 27q^2 - 9pq - 72pr + 27r)^2 < 4(p^2 + 12r - 3q)^3.$$

Les valeurs de r, qui correspondent aux équations n'ayant pas quatre racines imaginaires, sont marquées par I.

On doit de plus avoir :

$$\text{(II)} \qquad |\,\Pi\,| < 2^{12}$$

Les équations qui ne satisfont pas à cette inégalité sont marquées par II.

Les équations marquées par III, IV, V sont celles qui ne satisfont pas respectivement aux inégalités

(III) $|S_4| < 6\,(4)^4,$

(IV) $|S_5| < 6\,(4)^5,$

(V) $|S_6| < 6\,(4)^6.$

Dans les quatre tableaux précédents se trouvent encore des étoiles; elles correspondent au cas des équations ayant pour racine un entier rationnel.

Le signe $\times$ marque qu'il n'y a pas de valeur correspondante r aux valeurs de p et q.

L'inspection des tableaux précédents donne les équations qui satisfont à toutes les inégalités précédentes; elles sont au nombre de six.

$p=0$	(1)	$x^4+x^3+x+2=0$ *	$\lvert S_6 \rvert = 19465;$
	(2)	$x^4+x^3+1=0$	$\lvert S_6 \rvert = 2911;$
	(3)	$x^4+x^3-x+1=0$	$\lvert S_6 \rvert = 5179;$
$p=1$	(4)	$x^4+x^3+x^2+x+1=0$	$\lvert S_6 \rvert = 3625;$
	(5)	$x^4+x^3+x^2+1=0$	$\lvert S_6 \rvert = 3632;$
$p=-1$	(6)	$x^4+x^3-x^2-x+1=0$	$\lvert S_6 \rvert = 6097;$

La première équation n'est pas valable, car elle a pour $|S_6| = 19465 > 14232$.

3me type : $x^4+2x^3+px^2+qx+r=0$.....(9).

10. — On a ici :

$$\begin{cases} P = p - \dfrac{3}{2} \\ Q = q - p + 1 \\ R = r - \dfrac{q}{2} + \dfrac{p}{4} - \dfrac{3}{16} \end{cases}$$

Tout d'abord l'inégalité

$$|8p-12| = |S_1| < 24$$

donne six valeurs de p

$$p = -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

Faisant le même raisonnement que pour le 2^{me} type, nous avons

$$\left| a + \frac{1}{2} \right| < 1, \qquad | b | \leqq 1,$$

et $$1 > 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{3}{2}\right) - b^2 > 0$$

ce qui montre $p \geqq 0$, $p \leqq 3$, donc :

$$p = 0, 1, 2, 3.$$

Pour ce type, nous avons

$$| Q | < | q - p + 1 | < 2$$

qui donne les valeurs de q connaissant p.

p	q					
0	-2	-1	0			
1		-1	0	1		
2			0	1	2	
3				1'	2'	3'

Considérons maintenant la dérivée de l'équation proposée

$$x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{p}{2} x + \frac{q}{4} = 0$$

Si cette équation a trois racines réelles pour les valeurs de p et q précédents, la plus grande distance respective entre les racines se trouvera facilement.

Si elle a deux racines imaginaires et une racine réelle, il faut qu'on ait :

$$\overline{BC}^2 < 4$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 < 4,$$

Cette considération permet de supprimer des valeurs de q; elles sont marquées par prime (′).

Ecrivons :

$$0 < r - \frac{q}{2} + \frac{p}{4} - \frac{3}{16} < 4,$$

Nous pouvons déterminer ainsi les valeurs correspondantes de r connaissant p et q :

$p = 0$

$q \backslash r$	1	2	3	4
0	*	III	IV	II
−1	III	III	II	X
−2	III	III	II	X

$p = 1$

$q \backslash r$	1	2	3	4
1	*		III	II
0		IV	II	X
−1		III	II	X

$p = 2$

$q \backslash r$	1	2	3	4
2	*		III	II
1		III	II	II
0		III	II	X

Les symboles ont les mêmes significations que ceux du 2[me] type. Nous avons alors six équations seulement :

$$p = 1 \begin{cases} (1) & x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2 = 0 & |S_6| = 9340; \\ (2) & x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 = 0 & |S_6| = 1396; \\ (3) & x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1 = 0 & |S_6| = 9340; \end{cases}$$

$$p = 2 \begin{cases} (4) & x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 0 & |S_6| = 2777; \\ (5) & x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0 & |S_6| = 814; \\ (6) & x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1 = 0 & |S_6| = 2777; \end{cases}$$

11. — En définitive, pour les trois types, nous avons en tout 14 équations qui ont échappé à toutes les inégalités imposées. Sans doute, ces équations ne sont pas toutes valables, parce que, pour chaque inégalité, nous avons pris une limite supérieure grossière. Deux équations du 1[er] type, comme nous avons vu, sont faciles à résoudre, et leurs M(E) sont égaux à 2. De plus, nous avons résolu l'équation

$$\text{(E)} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

et trouvé

$$\mathrm{M}(\mathrm{E}) = 2 \sin \frac{2\pi}{5} = 1{,}90213\ldots$$

Pour les autres équations, nous n'avons pu trouver d'autre moyen que de les résoudre l'une après l'autre, afin de comparer la grandeur de leur M (E) avec celle de l'équation ci-dessus.

En les résolvant, on voit que tous les M (E) sont plus grands que 2, par conséquent le M $(4=0+4)$ est fourni par l'équation :

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

ainsi que par celles qui s'en déduisent en remplaçant x par $\pm x+a$ où a est un entier rationnel.

Dans le prochain chapitre, nous verrons qu'il n'y a aucune équation à deux racines réelles et à deux imaginaires telle que le diamètre de l'ensemble correspondant soit plus petit que 2, et nous énonçons dès maintenant le résultat :

Le nombre M (E_4) *est au moins égal à* $2 \sin \frac{2\pi}{5}$, *et ce minimum n'est atteint que pour les équations qui se déduisent de l'équation de la division du cercle en cinq parties égales par les substitutions* $(x, \pm x + a)$.

CHAPITRE III

La recherche du nombre M (4=2+2).

12. — Nous allons nous occuper des équations du quatrième degré à deux racines réelles et deux imaginaires. La résolvante en θ a cette fois une racine réelle et deux racines imaginaires. Dans le chapitre II, r était toujours positif; dans le cas actuel, il peut être positif ou négatif, suivant que les deux racines réelles de l'équation en question sont de même signe ou de signes contraires.

De plus, il est facile de voir que la quantité

$$\Pi = \prod_{i,j=1}^{4} (\xi_i - \xi_j)^2 \quad i \pm j$$

est toujours négative.

Avec la même hypothèse que celle du chapitre II, c'est-à-dire en posant $M(E) < 2$, on trouve qu'il n'y a aucune équation à deux racines réelles et deux imaginaires qui réponde à la question, mais alors les calculs fournissent des équations telles que $M(E) \leqq 3$ et on trouve en particulier la suivante :

$$(\mathcal{E}) \quad x^4 + x - 1 = 0$$

et l'on trouve :

$$M(\mathcal{E}) = 2{,}06796\ldots\ldots$$

Les M (E) forment un ensemble dont nous voulons chercher la borne inférieure. Comme il y a au moins un M (E) plus petit que 2,1 (celui donné par l'équation ci-dessus par exemple), nous pouvons alors chercher le M (4=2+2) parmi les M (E) qui sont tous inférieurs à 2,1.

1^er type : $x^4 + px^2 + q\,x + r = 0$..........(10).

13. — L'inégalité

$$|S_1| = |-8\,p| < 6 \times 4{,}41$$

nous montre $\quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$

Soient $\xi_1 = a + bi$, $\xi_2 = a - bi$ les deux racines imaginaires conjuguées de (10), divisons-la par $(x - \xi_1)(x - \xi_2)$ le quotient

$$x^2 + (\xi_1 + \xi_2)\,x + (\xi_1^2 + \xi_1\,\xi_2 + \xi_2^2 + p) = 0$$

aura deux racines réelles, si bien que

$$4{,}41 > (\xi_1 + \xi_2)^2 - 4\,(\xi_1^2 + \xi_1\,\xi_2 + \xi_2^2 + p) > 0.$$

En passant aux variables réelles a et b, on obtient

$$4,\,41 > (2\,b)^2 - 2\,(2\,a)^2 - 4\,p > 0$$

d'où on tire

$$(2\,b)^2 - 4\,p > 2\,(2\,a)^2.$$

Cela montre $\quad p \neq 2,\ 3.$

En outre, considérons la dérivée de (10); si elle a deux racines imaginaires et une racine réelle, nous avons

$$\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \frac{3}{2}\,p,$$

p ne peut pas être égal à -3.

Pour $p = -3$, la dérivée de (10) s'écrit :

$$(11) \qquad 4\,x^3 - 6\,x + q = 0;$$

Au cas où $q = 0, 1, 2$, l'équation (11) aura trois racines réelles. Prenons $q = 0$, on voit que la plus grande distance est égale à $2\sqrt{\frac{3}{2}} > 2,\,1$. Pour $q = 1,\,2$, on trouvera facilement les plus grandes distances également $> 2,\,1$.

En définitive, nous avons

$$p = -2, -1, 0, 1.$$

Éliminons R entre

$$\begin{cases} S_2 = 20\,P^2 - 16\,R \\ S_3 = -68\,P^3 + 144\,PR - 78\,Q^2 \end{cases}$$

puis prenons la valeur absolue, nous obtiendrons l'inégalité :

$$(12) \quad |S_3| + 9\,|P S_2| > |112\,P^3 - 78\,Q^2|.$$

Ici, elle peut s'écrire :

$$6\,\{43 + 90\,|p|\} > |56\,p^3 - 39\,q^2|$$

qui détermine les valeurs correspondantes de q connaissant p.

p	q				
1	0	1	2	3	4
0	0	1	2		
-1	0	1	2	3	4
-2	0	1	2	3	4

Il s'agit maintenant de déterminer les valeurs de r pour chaque paire de p et q. Pour cela, écrivons :

$$|S_6| < 6\,(4,41)^6 < 6\,(86)^2 = 43376,$$

et $$(2\,p^3 + 27\,q^2 - 72\,pr)^2 > 4\,(p^2 + 12\,r)^3.$$

Cette dernière traduit simplement la condition nécessaire et suffisante pour que la résolvante en θ de l'équation proposée ait deux racines imaginaires.

Étant donnés p et q, il faut que r satisfasse simultanément aux deux inégalités precédentes.

Tous calculs faits, il ne nous reste que les quatre équations suivantes :

$p = 0$	(1)	$x^4 + x - 1 = 0$	$\mid S_6 \mid = 10126;$
	(2)	$x^4 + 2x - 1 = 0$ *	$\mid S_6 \mid = 42976;$
$p = -1$	(3)	$x^4 - x^2 + 2x + 1 = 0$	$\mid S_6 \mid = 5132;$
	(4)	$x^4 - x^2 + 3x - 1 = 0$ *	$\mid S_6 \mid = 37530;$

Si nous écrivons :

$$\mid S_6 \mid < 6\,(2,07)^{12} < 37136$$

pour mieux juger, il ne nous reste plus que deux équations.

2^me type : $x^4 + x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0 \ldots\ldots (13)$

14. — L'inégalité :

$$0 < \mid 8p - 3 \mid = \mid S_1 \mid < 26{,}46$$

montre $p = -2, -1, 0, 1, 2, 3.$

Mais nous pouvons supprimer les valeurs $p = 2, 3$.

En effet, faisons le même raisonnement que celui du 1er type, nous aurons :

$$4{,}41 > 1 - 4p + 4b^2 - 8a^2 - 4a > 0.$$

D'où l'on tire :

$$\frac{3}{2} + 4b^2 - 4p > 8\left(a + \frac{1}{4}\right)^2$$

Cela montre bien que $p \neq 2, 3$.

La substitution de p dans l'inégalité (12) donne

$$6\left\{43 + 90\left|p - \frac{3}{8}\right|\right\} > \left|56\left(p - \frac{3}{8}\right)^3 - 39\left(q - \frac{p}{2} + \frac{1}{8}\right)^2\right|,$$

donne les valeurs correspondantes de q immédiatement.

p	q									
1			-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0			-3	-2	-1	0	1	2	3	
-1	-5′	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-2	-5′	-4′	-3	-2	-1	0	1	2	3	

Considérons la dérivée de l'équation (13)

$$4\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,p\,x + q = 0$$

Pour $p = -1$, $q = -5$, et pour $p = -2$, $q = -5, -4$, elle aura deux racines imaginaires et une racine réelle pour laquelle le triangle A B C dans le plan complexe formé par ces trois racines aura un côté plus grand que 2,07. Il faut donc supprimer ces trois valeurs de q ; elles sont marquées par prime (′).

En remplaçant p et q dans l'inégalité

$$|\,S_2\,| < 6\,(4{,}41)^2 < 117$$

nous aurons les valeurs correspondantes de r.

r sera négatif si les deux racines réelles de (13) sont de signes contraires, donc $r \geqq -4$.

Formons alors les tableaux suivants :

$p = 1$

$q \backslash r$	-4	-3	2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	II	II	II	II	*	III	II	*	I	I	I	I	I
3	II	II	II	III	*	III	*	I	I	I	I	I	I
2	II	II	III	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I
1	*	II	III		*	I	I	I	I	I	I	I	I
0	II	*	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	X
-1	II	III	*		*	I	I	I	I	I	I	I	X
-2	II	*	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	X
-3	*	III	III	III	*	III	I	I	I	I	I	I	X

$p = 0$

$q \backslash r$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
3	II	II	*	V	*	V	V	*	I	I	I	I
2	*	II	III	V	*	V	*	I	I	I	I	I
1	II	*	III	*	*	*	I	I	I	I	I	I
0	II	III	*		*	I	I	I	I	I	I	I
1	II	III	V	*	*	I	I	I	I	I	I	I
-2	II	IV	*		*	I	I	I	I	I	I	I
-3	II	*		V	*	*	I	I	I	I	I	I

$p = -1$

q \ r	-4	3	2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	X	II	III	III	*	III	II	II	*	*	I	I	I	I	I
3	*	II	V	III	*	III	II	II	*	I	I	I	I	I	I
2	II	*	V	V	*	III	III	*	I	I	I	I	I	I	I
1	II	II	*	V	*	III	*	I	I	I	I	I	I	I	X
0	II	II	III	*	*	*	I	I	I	I	I	I	I	I	X
-1	II	II	III	III	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X
2	II	III	III	*	*	*	I	I	I	I	I	I	I	I	X
-3	II	III	*	III	*	III	*	I	I	I	I	I	I	X	X
-4	II	*	III	III	*	III	II	*	I	I	I	I	I	X	X

$p = -2$

q \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	III	III	II	II	*	*	I	I	I	I	I	I	I	I
2	III	III	II	*	II	I	I	I	I	I	I	I	I	I
1	V	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
0	V	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X
-1	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X
-2	V	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X
-3	III	III	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X	X

Dans ces quatre tableaux, nous devons supprimer tout d'abord les équations dont les trois coefficients p, q et r ne satisfont pas à l'inégalité :

$$\text{(I)} \qquad (2p^3 + 27q^2 - 9pq - 72pr + 27r)^2 > 4(p^2 + 12r - 3q)^3$$

afin que chacune d'elles ait deux racines réelles et deux racines imaginaires. Ces équations sont marquées par I.

Les équations dont les coefficients p, q et r ne satisfont pas aux inégalités

$$\text{(II)} \qquad |\Pi| < (4{,}41)^6,$$

$$\text{(III)} \qquad |S_4| < 6\,(4{,}41)^4,$$

$$\text{(IV)} \qquad |S_5| < 6\,(4{,}41)^5,$$

$$\text{(V)} \qquad |S_6| < 6\,(4{,}41)^6,$$

sont marquées respectivement par II, III, IV et V.

Les équations qui restent encore sont les cinq suivantes :

$p = 0$	(1) $x^4 + x^3 - 1 = 0$	$\lvert S_6 \rvert = 14113$;
	(2) $x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0$	$\lvert S_6 \rvert = 37013$;
	(3) $x^4 + x^3 - 3x - 2 = 0$ *	$\lvert S_6 \rvert = 39531$;
$p = 1$	(4) $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$	$\lvert S_6 \rvert = 33649$;
	(5) $x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ *	$\lvert S_6 \rvert = 43353$;

Nous avons trouvé une équation E telle que $M(E) < 2{,}07$. Si donc l'on se borne à chercher les équations pour lesquelles

$$|S_6| < 6\,(2{,}07)^{12} < 37135$$

cette inégalité est vérifiée, nous pouvons donc supprimer les équations (3) et (5). Il nous reste ainsi trois équations seulement.

3^e^ type : $x^4 + 2x^3 + px^2 + qx + r = 0 \ldots\ldots\ldots$ (14)

15. — En vertu de l'inégalité

$$|S_1| = |8p - 12| < 6 \times 4{,}41$$

p ne peut prendre que les six valeurs suivantes :

$$p = -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

En faisant la même opération que celle du 2^me^ type, on trouve :

$$2a^2 + 2a + (p - 1 - b^2) < 0$$

Pour que cette inéquation soit possible, il faudra :

$$1 + 2\,\{ b^2 - p + 1 \} > 0$$

$$2b^2 > 2p - 3,$$

ce qui montre $\quad p \neq 3, 4.$

Pour déterminer q, utilisons l'inégalité

$$6\,\{ 43 + 45\,|2p - 3| \} > |7\,(2p - 3)^3 - 39\,(q - p + 1)^2|.$$

p	q										
-1	-6'	5'	-4	-3	-2	-1	0	1	2		
0		-5'	-4	-3	2	-1	0	1	2	3	
1				-3	2	-1	0	1	2	3	
2					-2'	-1'	0	1	2	3	4'

Les valeurs de q marquées ($'$) ont la même signification que celle qui précède.

Connaissant p et q, l'inégalité

$$|S_2| = |5(2p-3)^2 - (16r - 8q + 4p - 3)| < 6(4{,}41)^2$$

fait le service de la détermination de r. Nous pouvons maintenant former les tableaux :

$p = 2$

$q \backslash r$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	II	II	II	III	*	V	*	I	I	I	I	I	I
2	II	II	III	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I
1	II	II	III		*	I	I	I	I	I	I	I	X
0	II	III	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	X

$p = 1$

$q \backslash r$	4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	9
3	II	II	II	V	*	III	*	*	I	I	I	I	I
2	II	II	III	V	*	V	*	I	I	I	I	I	I
1	II	II	III	V	*	*	I	I	I	I	I	I	X
0	*	III	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	X
-1	II	*		*	*	I	I	I	I	I	I	X	X
-2	III	V	*		*	I	I	I	I	I	I	X	X
-3	V	*	V	*	*	I	I	I	I	I	X	X	X

$p = 0$

$q \backslash r$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	X	X	II	III	*	V	II	II	*	II	I	I	I	I	I	I
2	X	II	III	III	*	V	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I
1	*	II	III	III	*	IV	*	III	I	I	I	I	I	I	I	X
0	II	*	III	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X
-1	II	III	*	III	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X	X
-2	II	III	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X	X
-3	III	III	*	III	*	III	I	I	I	I	I	I	I	X	X	X
-4	*	*	III	III	*	*	I	I	I	I	I	I	I	X	X	X

$p = -1$

$q \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	X	X	II	*	II	II	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
1	X	II	*	II	II	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X
0	X	*	III	III	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X
-1	*	IV	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X	X
-2	III	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X	X
-3	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X	X	X
-4	III	*	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	X	X	X

Dans ces quatre tableaux, les symboles ont les mêmes significations que celles du 2^{me} type; il reste trois équations :

$p = 1$	(1)	$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$	$\mid S_6 \mid = 26602$;
	(2)	$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 2 = 0$ *	$\mid S_6 \mid = 42391$;
$p = 2$	(3)	$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ *	$\mid S_6 \mid = 40319$.

Si nous posons $| S_6 | < 6\,(2,07)^{12} < 37135$, nous voyons que les équations (2) et (3) ne sont pas valables.

Il nous reste ainsi une seule équation.

16. — Pour les trois types, nous avons en tout six équations :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x^4 + x - 1 = 0 \\ (2) & x^4 - x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad 1^{er} \text{ type}$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
(3) & x^4 + x^3 - 1 = 0 \\
(4) & x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0 \\
(5) & x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0
\end{array}\right\} \quad 2^{me} \text{ type}
$$

$$
(6) \quad x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad 3^{me} \text{ type}
$$

Sans doute, ces six équations ne sont pas toutes valables, puisque dans toutes les inégalités plus haut, nous avons pris une limite supérieure grossière.

Chaque équation a deux racines imaginaires et deux racines réelles qui sont faciles à trouver.

Quand on aura obtenu les deux racines réelles, l'équation considérée s'abaissera à une équation quadratique dont les deux racines imaginaires s'obtiendront sans difficulté. On trouve que le M(E) fourni par l'équation (1) a la plus petite valeur.

On peut énoncer ainsi :

Le minimum du nombre $M(E_4)$, *lorsque l'équation* E_4 *a deux racines réelles et deux imaginaires, est égal à* 2,06796.....; *l'équation correspondante est*

$$x^4 + x - 1 = 0$$

ainsi que celles qui s'en déduisent en remplaçant x *par* $\pm x + a$ *où* a *est un entier naturel.*

CHAPITRE IV

Le diamètre du cercle circonscrit à l'ensemble des $M(E_4)$ fournis par les équations à quatre racines imaginaires.

---

17. — Un autre élément géométrique simple d'un ensemble de points est le *cercle circonscrit* à cet ensemble, c'est-à-dire le plus petit cercle tel qu'aucun point de l'ensemble ne lui soit extérieur [1].

Dans le cas des équations à quatre racines réelles, M. J. Favard a démontré, grâce à une inégalité de Minkowski, que le minimum des maximums de $|\xi_i - \xi_j|$ surpasse 2,9 .... Pour les équations à deux racines réelles et deux imaginaires, nous avons démontré que:

$$M\ (4 = 2 + 2) = 2{,}06796\ldots. > 2.$$

Comme nous voulons rechercher les équations pour lesquelles le diamètre du cercle circonscrit à l'ensemble des points formé par les racines ne dépasse pas 2, nous pouvons nous limiter aux équations qui ont quatre racines imaginaires.

Ces quatre points forment un trapèze dont la base est parallèle à l'axe imaginaire, et le centre du cercle circonscrit est situé sur l'axe réel, puisque les quatre points sont symétriques deux à deux par rapport à cet axe. Or, le diamètre du cercle circonscrit à un ensemble n'est jamais inférieur au diamètre

---

[1] M. J. Favard s'est également occupé de cette question pour les équations du 2e et du 3e degré. — J. Favard, Sur les nombres algébriques (*Mathematica*, vol. 4, 1930, p. 109-113).

de l'ensemble, et les calculs du chapitre II nous montrent non seulement que les deux équations

$$x^4 + 1 = 0$$
$$x^4 - x^2 + 1 = 0$$

ont pour $M(E) = 2$, et que l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

a pour $M(E) = 1{,}90213.....$, mais encore que ces trois équations ont quatre racines imaginaires, dont le cercle circonscrit des points représentatifs a pour diamètre 2. Il n'y a que ces trois équations (aux substitutions $x, \pm x + a$ près). Toutes les autres ont pour $M(E)$ un nombre supérieur à 2; leur diamètre du cercle circonscrit des points représentatifs des racines sera certainement plus grand que 2 [il y a deux équations marquées par une étoile dans le second chapitre qui sont supprimées à cause de leur $|S_6| > 6(1{,}91)^{12}$], cependant leur $M(E)$ est supérieur à 2; donc : *le diamètre du cercle circonscrit à l'ensemble des racines d'une équation irréductible* E_4 *est au moins égal à* 2, *et il n'est égal à* 2 *que pour les équations de la division du cercle en cinq, huit ou douze parties égales et pour celles qui se déduisent de l'une des précédentes par une substitution de la forme* $(x, \pm x + a)$.