

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

HENRI PONCIN

Sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1932

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1932__136__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

<i>Doyen</i>	C. MAURAIN, <i>Professeur</i> , Physique du Globe.	
<i>Doyen honoraire</i>	M. MOLLIARD.	
<i>Professeurs honoraires</i>	H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, Emile PICARD, Rémy PERRIER.	
	E. GOURSAT	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	P. JANET	Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT	Minéralogie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	H. ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	M ^{me} P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	G. URBAIN	Chimie générale.
	L. MARCHIS	Aviation.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
<i>Professeurs</i>	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	Léon BERTRAND	Géologie structurale et géologie appliquée.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	G. JULIA	Calcul différentiel et calcul intégral.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	V. AUGER	Chimie appliquée.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	Eugène BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	N.	Étude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie minérale.
	Léon BRILLOUIN	Théories physiques.
	E. ESCLANGON	Astronomie.
	H. BÉNARD	Mécanique expérimentale des fluides.
	MAUGUIN	Minéralogie.
	L. BLARINGHEM	Botanique.
	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
	A. DENJOY	Mathématiques générales.
	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
	H. BÉGHIN	Mécanique physique et expérimentale.
E. PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).	M ^{me} RAMART-LUCAS. Chimie organique.
A. GUILLET	Physique.	FOCH
M. GUICHARD	Chimie minérale.	Mécanique expérimentale des fluides.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.	PAUTHENIER
A. DEREIMS	Géologie.	Physique (P. C. N.).
H. MOUTON	Chimie physique.	VILLEY
L. DUNOYER	Optique appliquée.	Mécanique physique et expérimentale.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.	DE BROUWER
ROBERT-LÉVY	Zoologie.	Théories physiques.
A. DEBIERNE	Radioactivité.	LABROUSTE
E. DARMOIS	Physique.	Physique du Globe.
G. BRUHAT	Physique.	FREUNDLER
F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	Chimie (P. C. N.).
L. JOLEAUD	Paléontologie.	PRENANT
M. FRÉCHET	Calcul des Probabilités et Physiques mathématiques.	Zoologie.
		P. JOB
		Chimie générale.
		CHRÉTIEN
		Optique appliquée.
		BOHN
		Zoologie (P. C. N.).
		BOURGUEL
		Chimie (P. C. N.).
		COMBES
		Sciences naturelles (P. C. N.).
		GARNIER
		Mécanique rationnelle.

Secrétaire

A. PACAUD

A MES PARENTS

Ce travail a été fait en grande partie à la Fondation Thiers. Je remercie M. RÉBELLIAU, Directeur de la Fondation, et son conseil qui a bien voulu m'y admettre comme pensionnaire. Je remercie également Messieurs les membres du Conseil Supérieur des Recherches Scientifiques de l'Aéronautique, pour l'intérêt qu'ils ont pris au développement de ce travail.

J'adresse l'expression de ma gratitude à mes maîtres : MM. BOULIGAND, VESSIOT et VILLAT pour les encouragements que j'ai reçus d'eux et je suis heureux de pouvoir dire ici tout ce que je dois à M. VILLAT, mon maître direct, non seulement pour le parti que j'ai pu tirer de la fréquentation de ses cours et de l'étude de ses travaux, mais encore pour les conseils très précieux qu'il n'a cessé de me donner.

SUR LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE PESANT
DANS UN PLAN VERTICAL



ERRATA

<i>Pages</i>		<i>Lire :</i>
11	Formule (10)	$\theta(s) = f(1, s)$
23	Dernière ligne	$\delta_n h = \mu e^{-3g_{n-1}} \delta_{n-1} (\sin f) + \mu \sin f_{n-2} \delta_{n-1} (e^{-3g}).$
40	Formule 148	$dz = \frac{ia}{V} (1 + i\omega) \frac{dZ}{Z} .$
60	Formule 242	$F(M) = \theta(X)$
78	Formule 321	$V(N) = V(A) e^{\nu cv}.$
85	17 ^e ligne	au voisinage de D
87	Formule 348 (1)	$\theta = \theta(\varphi)$

DEUXIÈME PARTIE

CAS où le MOUVEMENT est UNIFORME à l'INFINI (ÉCOULEMENT CONTINU)

I. — Énoncé et équations du problème.	43
21	43
II. — Sur quelques propriétés des fonctions analytiques dans un demi cercle.	47
22. Fonctions réelles sur la demi circonférence dont la partie réelle est connue sur le diamètre	47
23. Fonctions imaginaires sur le diamètre dont la dérivée normale réelle est connue sur la demi circonférence	48
III. — Étude de la première approximation.	50
24	50
IV. — Détermination de la solution rigoureuse.	52
25	52
V. — Application hydrodynamique	57
26. Distance des mouvements. Cas des canaux descendants. Extension des résultats.	57
VI. — Étude de la pression dans le fluide	61
27. Conditions analytiques relatives au signe de la pression.	61
28. Interprétation géométrique.	65
VII. — Étude d'un cas particulier : Écoulement dans un canal présentant une brusque dénivellation	69
29. Étude de la première approximation.	70
30. Étude de la deuxième approximation (effet du premier ordre des forces de pesanteur).	75
31. Approximations successives.	81
32. Étude de la pression	84

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDE du CAS GÉNÉRAL

I. — Généralités.	87
33	87
II. — Écoulement d'un fluide pesant dans un canal partiellement recouvert en amont.	89
34	89
III. — Écoulement discontinu sur une paroi indéfinie.	92
35	92
36. Première approximation	94
37. Approximations successives.	95
38. Propriétés du mouvement.	101

INTRODUCTION

Lorsqu'on cherche à expliquer au moyen des équations des fluides parfaits les mouvements à deux dimensions que l'expérience nous fait connaître, on se trouve en présence de deux groupes de problèmes de nature très différente. Dans les uns, le mouvement du fluide se produit parallèlement au plan horizontal et les forces de pesanteur n'ont aucune influence. On sait que depuis les mémoires de M. LEVI CIVITA et de M. VILLAT, ils ont donné lieu à de nombreux et importants travaux.

Dans d'autres problèmes, au contraire (écoulement sur paroi courbe, écoulement en déversoir), le mouvement se produit parallèlement à un plan vertical et les forces de pesanteur jouent alors un rôle prépondérant. Or, si les équations indéfinies que doit vérifier le potentiel sont les mêmes dans les deux cas, les conditions aux limites prennent dans le second une forme beaucoup plus compliquée. En introduisant deux fonctions, dont l'une, F , caractérise la forme des parois solides et dont l'autre, G , caractérise la forme des profils libres, M. H. VILLAT a montré comment ces problèmes se ramènent en dernière analyse à la résolution d'équations intégrales-différentielles de formes assez compliquées. La fonction G étant supposée connue, ces équations peuvent être intégrées par rapport à la fonction F et le problème de la détermination du mouvement par la donnée du profil libre est par là même résolu. Dans ce travail, nous nous sommes proposés le problème inverse : c'est-à-dire l'étude du mouvement quand on connaît les parois solides.

Il importe, tout d'abord, de démontrer qu'il existe une solution pour toute fonction F donnée. Nous y parvenons en utilisant une méthode d'approximations successives qui permet, en outre, sinon le calcul exact de la solution, du moins un calcul approché, conduit de telle sorte que l'on connaisse à chaque étape une limite supérieure de l'erreur commise. On peut alors déterminer les arbitraires du problème, de manière à obtenir un mouvement pratiquement identique au mouvement réel.

Dans une première partie, la méthode est exposée dans un cas simple : celui où le mouvement présente une périodicité géométrique. L'étude de l'équation intégrale-différentielle (E) du problème est alors équivalente à celle d'un problème mixte (M) sur certaines fonctions analytiques, régulières à l'intérieur d'une demi-couronne circulaire. Après avoir étudié le problème d'analyse relatif à l'existence, à l'unicité des solutions et à leur détermination à un degré d'approximation donné, nous appliquons ces résultats à l'étude du problème

hydrodynamique. Nous obtenons ainsi une famille de mouvements à un paramètre pour lesquels les configurations hydrodynamiques tendent vers une configuration limite. En utilisant les formules obtenues dans l'étude analytique, nous pouvons déterminer le mouvement de façon telle que sa distance au mouvement réel soit arbitrairement petite ou de façon telle que les variations de pression théoriques soient inférieures, sur le profil libre, à celles que l'on constate expérimentalement sur les mouvements de ce genre. Dans certains cas, les solutions de l'équation (E) admettent comme dominantes les solutions d'une équation intégrale linéaire du type de Fredholm dont la résolution est équivalente à celle d'un problème mixte linéaire (M_1). Le problème (M_1) n'étant autre que le problème (M) « linéarisé », les solutions ainsi obtenues fournissent une bonne approximation du mouvement dans le cas de parois faiblement inclinées sur le plan horizontal. L'étude du problème linéaire (M_1) conduit ainsi à une généralisation au cas d'une paroi courbe des ondes sinusoidales d'Airy dans un canal à fond rectiligne.

Dans une deuxième partie, nous étudions le problème général de l'écoulement continu d'un fluide pesant sur une paroi courbe indéfinie et nous adaptons à ce cas la méthode précédemment exposée en insistant sur les différences qui sont introduites dans les raisonnements par la présence du point à l'infini à l'intérieur du domaine fluide considéré. Si les parois solides qui limitent inférieurement le domaine fluide appartiennent à une classe de surfaces parfaitement définies au point de vue géométrique, on peut affirmer que dans les mouvements ainsi obtenus, la pression est positive en tout point intérieur à la masse fluide. Ces mouvements sont donc physiquement possibles. Nous appliquons les résultats de cette étude à un cas concret : l'écoulement d'un liquide dans un canal qui présente une brusque dénivellation et nous complétons les résultats indiqués sur ce sujet par M. CISOTTI.

Dans la troisième partie, nous montrons rapidement comment les méthodes utilisées sont applicables à des problèmes plus généraux relatifs au mouvement des fluides pesants dans un plan vertical dans le cas où le domaine fluide est limité par deux lignes de courant le long desquelles il y a, soit glissement du fluide sur une paroi solide ou sur un fluide de même nature au repos, soit contact avec une atmosphère à pression constante. Nous étudions deux de ces problèmes qui complètent l'étude de l'écoulement d'un fluide dans un canal. Nous considérons d'abord le cas où le canal est partiellement recouvert, puis celui où les parois ne satisfont pas aux conditions géométriques trouvées dans l'étude de la pression. L'écoulement continu du fluide étant alors impossible, on peut concevoir l'existence de mouvements pour lesquels le fluide cesse de glisser tout le long des parois. Nous discutons la possibilité de ces mouvements et nous en déterminons éventuellement les éléments. Les problèmes d'analyse qui correspondent à ces mouvements se ramènent à la résolution d'un système d'équations intégrales linéaires à noyaux de Schmidt positifs.

L'étude de ces problèmes successifs montre comment la méthode peut être adaptée à la détermination du mouvement le plus général d'un fluide pesant dans un plan vertical et constitue ainsi un procédé rationnel de recherche.

BIBLIOGRAPHIE

Pour les travaux antérieurs à 1918, on consultera l'article de M. H. VILLAT : Quelques récents progrès des théories hydrodynamiques, *Bulletin des Sciences mathématiques*, deuxième série, T. XLII, 1918.

On trouvera la bibliographie relative au mouvement d'un fluide pesant dans la thèse de M. AIMOND (Paris, 1929).

Il faut y ajouter les récents travaux de M. T. LEVI-CIVITA et de M. STRUICK sur l'onde périodique (*Math. Annalen*, T. 93 et 95), de M. WEINSTEIN sur l'onde solitaire (*Rendi Conti dei Lincei*) (1926 et 1927). *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, T. 184, 1927) et de M. BOULIGAND sur la pression dans un liquide parfait (*Journal de Math. pures et appliquées*, T. VI, 1927).

Quelques résultats de ce mémoire ont été exposés dans diverses notes publiées aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (T. 190, p. 573 et 1.115 T. 191, p. 17 et 648, T. 192, p. 543).

Nous ferons un appel constant aux formules de la théorie des fonctions elliptiques et aux formules de la théorie des fonctions analytiques définies dans une aire annulaire ou circulaire. En ce qui concerne les fonctions elliptiques, nous adopterons les notations du traité de TANNERY et MOLKT (Gauthiers-Villars, 1896). En ce qui concerne les fonctions analytiques, nous adopterons les notations du mémoire fondamental sur ce sujet, publié par M. H. VILLAT dans les « *Acta mathematica* » (T. 40, 1916). Nous renverrons à ces deux ouvrages par l'indication (T. M.) ou (H. V.) suivie du numéro de la formule à utiliser.

ÉCOULEMENT d'un FLUIDE PESANT sur une PAROI COURBE INDÉFINIE

GÉNÉRALITÉS

1. Notations et énoncé du problème.

Nous considérons le mouvement dans un plan vertical d'un fluide parfait incompressible et pesant de densité un. Le domaine fluide est limité par une paroi solide S et par un profil libre L qui le sépare d'un fluide différent où règne une pression constante. Le mouvement supposé irrotationnel et parvenu à un régime permanent est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires oxy , l'axe oy étant dirigé suivant la verticale ascendante. Nous désignons par $p(M)$ ou $p(x, y)$ la valeur de la pression au point $M(x, y)$ par u, v les composantes de la vitesse en ce point, par V sa grandeur et par θ l'angle de sa direction avec ox . Nous posons $z = x + iy$ et $w = u - iv$, la quantité conjuguée de w représentant vectoriellement la vitesse dans le plan du mouvement (z).

Les équations classiques de l'hydrodynamique se réduisent à la relation de Bernoulli :

$$(1) \quad p + \frac{1}{2} V^2 + g y = C$$

à laquelle il faut joindre la relation :

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

qui exprime que le mouvement est irrotationnel et la relation :

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

qui exprime que le fluide est incompressible.

Si nous connaissons le mouvement, c'est-à-dire le champ de vecteurs \vec{V} , nous pouvons faire correspondre à chaque ligne de courant son hodographe. lieu des extrémités des vecteurs issus de O et équipollents aux vitesses des molécules qui suivent cette ligne de courant (1).

(1) Cette courbe qui caractérise le mouvement le long de la ligne de courant considérée serait l'hodographe, au sens ordinaire, du mouvement d'une des molécules qui suivent cette ligne de courant.

Nous obtenons ainsi deux familles de courbes à un paramètre : lignes de courant et hodographes se correspondant point par point et dont la seule vue permet d'avoir immédiatement une idée nette du mouvement. Si nous connaissons seulement les lignes de courant du champ \vec{V} , il nous est facile de construire l'hodographe correspondant au profil libre, puisque en chacun des points de ce profil la vitesse est dirigée suivant la tangente et que nous connaissons sa valeur d'après la relation I. Inversement, le profil libre se déduit de façon très simple de son hodographe (1). En partant de ces courbes limites, on conçoit que l'on puisse obtenir les autres lignes de courant en utilisant les relations 2 et 3 qui expriment, comme il est bien connu, que le domaine fluide (D) et le domaine hodographe se correspondent de façon conforme. Supposons, au contraire, que nous connaissions une ligne de courant autre que le profil libre, par exemple la paroi S, ce qui est le cas normal. En général, nous ne savons plus construire l'hodographe qui lui correspond et lorsque cette construction est possible (cas de certaines parois polygonales), nous ne savons pas établir à première vue la correspondance entre ces deux courbes. Il est cependant important d'obtenir certains résultats généraux sur la correspondance qui existe entre le mouvement et la paroi solide. A cet effet, nous passerons par l'intermédiaire analytique du potentiel complexe $f = \varphi + i\psi$, où φ désigne le potentiel des vitesses et ψ la fonction de courant, supposée nulle en tout point de la paroi. Comme w, f est une fonction analytique de z , mais le domaine D qui correspond dans le plan f au domaine fluide est particulièrement simple, puisqu'il se compose d'une bande de largeur ψ_0 parallèle à l'axe réel. ψ_0 représente, comme on sait, le débit de l'écoulement, c'est-à-dire la quantité de fluide qui passe par unité de temps à travers une section équipotentielle quelconque.

2. Équations générales.

Nous définirons arbitrairement la correspondance entre les points de l'axe réel f et les points de la paroi (S) du plan z en prenant, *a priori*, la fonction $\theta = \theta(\varphi)$. Comme nous savons comment varie la direction de la vitesse le long de (S) nous devons choisir cette fonction $\theta(\varphi)$ dans une classe de fonctions bien définies au point de vue analytique par la donnée de la paroi (cf. à ce sujet les mémoires de M. H. VILLAT, *Annales de l'École Normale Supérieure* 1911 et 1915, et *Leçons sur l'Hydrodynamique*, p. 62).

Enfin, pour établir la correspondance qui existe entre les points des courbes (L) des plans (z) et (f), nous utiliserons la relation de BERNOULLI. Les diverses grandeurs qui figurent dans cette relation sont, en effet, sur L, des fonctions de la variable qui définit la position du point considéré sur cette courbe : la variable φ par exemple. Comme la pression y est constante, par hypothèse, nous obtiendrons en dérivant la relation (1) sur (L) :

$$(4) \quad V dV + g dy = 0.$$

(1), Soit en effet $\operatorname{tg} \theta = f(v)$ l'équation en coordonnées polaires de l'hodographe : le profil libre est déterminé par l'équation différentielle $dy = f(\sqrt{2C - 2p_0 - 2gy}) dx$ où C désigne la constante de Bernoulli et p_0 la pression extérieure.

Comme on a d'autre part :

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{e^{i\theta(\varphi)}}{V(\varphi)}$$

on en déduit :

$$(6) \quad V^2 dV + g \sin \theta d\varphi = 0.$$

En résumé, pour établir la correspondance cherchée entre les plans (f), (z) et (w) nous savons :

1° Que $\frac{df}{dz} = w$ en tous les points de (D).

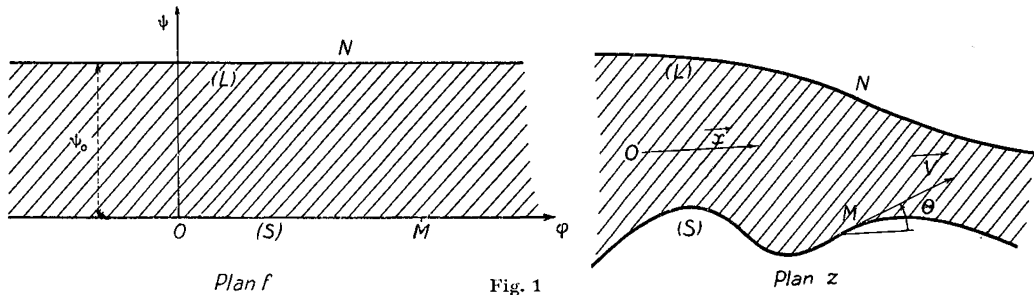
2° Qu'aux points qui se correspondent sur (L) dans les plans w ($Ve^{-i\theta}$) et f ($\varphi + i\psi$) on a :

$$V^2 dV + g \sin \theta d\varphi = 0.$$

3° Qu'aux points qui se correspondent sur (S), on a :

$$\theta = \theta(\varphi).$$

$\theta(\varphi)$ étant une fonction donnée (*fig. 1*).



De plus, pour que la question conserve un sens physique, il faut que la vitesse V et la pression p aient des valeurs finies en tous les points du domaine fluide. D'après la relation de BERNOULLI, il faut donc que la cote y ait une valeur finie dans tout le domaine. Deux hypothèses sont alors possibles :

A) Aux infinis en amont comme en aval la paroi qui limite inférieurement le fluide oscille entre deux plans horizontaux de cote déterminée ou comme cas particulier tend à devenir horizontale de façon oscillante.

B) Aux infinis amont et aval, la paroi tend de façon monotone vers deux plans horizontaux de cotes bien déterminées.

Nous allons étudier successivement chacun de ces deux problèmes.

PREMIÈRE PARTIE

CAS où le MOUVEMENT PRÉSENTE une PÉRIODICITÉ GÉOMÉTRIQUE (Ondes symétriques dans un canal à fond irrégulier)

CHAPITRE PREMIER

NOTATIONS et ÉQUATIONS GÉNÉRALES du PROBLÈME

3. Notations.

Nous étudierons dans cette première partie un mouvement du type A : l'écoulement d'un fluide pesant dans un canal de direction générale horizontale, dont les irrégularités se reproduisent périodiquement et sont symétriques par rapport à une verticale de crête. On peut, par exemple, imaginer que le mouvement est produit par la translation horizontale et uniforme dans le fluide d'une paroi solide qui présente une telle périodicité géométrique. La possibilité du mouvement permanent par rapport à des axes entraînés avec (S), sera une conséquence des résultats que nous allons obtenir dans les chapitres suivants.

Il suffit évidemment d'étudier le mouvement dans un intervalle de longueur finie entre AB et A'B', puisque le reste s'en déduit par des translations successives parallèles à la direction générale du courant. D'après les hypothèses faites, nous sommes conduits à prendre comme fonction $\theta(\varphi)$ une fonction périodique impaire. Soit $\varphi_0 = 2\pi a$ la période de cette fonction. Au domaine fluide (D) considéré correspond comme l'indique la *figure 2*, le rectangle du plan (f) dont les sommets ont pour affixes : $\pm \pi a$ et $\pm \pi a + ib$. Pour des commodités de calcul qui apparaîtront nettement dans la suite, nous lui ferons correspondre une couronne circulaire d'un plan auxiliaire (Z). Il suffit pour cela d'effectuer la transformation :

$$(7) \quad Z = r e^{is} = e^{-\frac{1}{a}(b+if)}$$

Les rayons des circonférences frontières sont respectivement égaux à I et à $\rho = e^{-\frac{b}{a}}$.

Pour des raisons analogues, nous déterminerons le champ des vecteurs \vec{V} par l'intermédiaire de la fonction :

$$(8) \quad \omega(Z) = f(r, s) + i g(r, s) = i \operatorname{Log} \frac{w(M)}{w(A)}.$$

On peut remarquer qu'au point du plan Z qui correspond au point $M(z)$, la partie réelle de cette fonction ω est égale à $\theta(M)$ et que sa partie imaginaire est égale à $\operatorname{Log} \left| \frac{V(M)}{V(A)} \right|$.

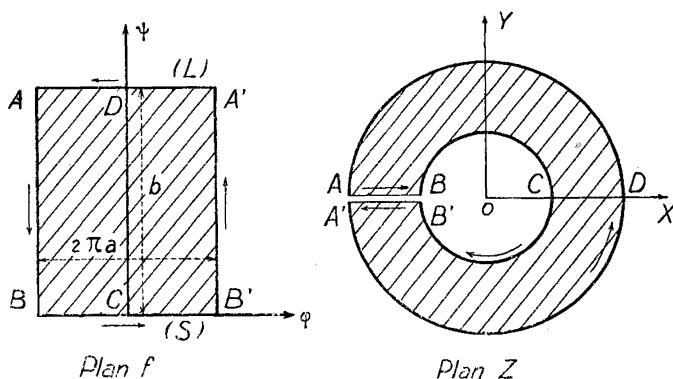
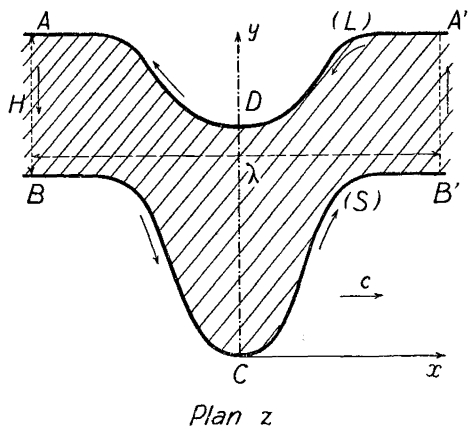


Fig. 2

4. L'équation intégral-différentielle (E) et le problème mixte (M).

Etant donnée dans le plan Z une fonction analytique de cette variable, $\omega_n(Z)$ régulière à l'intérieur de la couronne (D), nous désignerons respectivement par $f_n(r, s)$ et par $g_n(r, s)$ les parties réelles et imaginaires de cette fonction au point M dont l'affixe est re^{is} et nous désignerons par $h_n(r, s)$ la dérivée de la partie réelle prise dans la direction de la normale extérieure à la circonférence de rayon r .

La relation (7) fait correspondre à la fonction $\theta(\varphi)$ donnée une fonction impaire de la variable s qui admet la période 2π et qui est nulle aux extrémités de l'intervalle $(0, \pi)$.

Aux fonctions V et y qui sont sur (L) des fonctions de φ correspondent de même des fonctions de s qui sont liées à la fonction ω par les relations :

$$(9) \quad V(s) = V(A) e^{g(1,s)}$$

$$(10) \quad \theta(s) = f(1,s)$$

qui sont des conséquences immédiates de la formule (7-8).

D'après cela, on peut transposer la relation (6) dans le plan (Z) où elle prend la forme :

$$(11) \quad V^3(A) e^{3g(1,s)} h(1, s) ds - ag \sin f(1, s) ds = 0.$$

En intégrant cette relation et en tenant compte de la condition initiale $g(1, \pi) = 0$, nous obtenons :

$$(12) \quad g(1, s) = \frac{1}{3} \text{Log} \left[1 + 3 \mu \int_{\pi}^s \sin f(1, u) \cdot du \right]$$

en posant :

$$(13) \quad \mu = \frac{ag}{2V(A)^3}.$$

Dans la formule (13), g désigne l'accélération de la pesanteur, mais il n'y aura aucune confusion possible dans la suite entre cette constante et les fonctions que nous désignons par une notation analogue. Nous savons que les six fonctions $f(I, s)$, $g(I, s)$, $h(I, s)$, d'une part, $f(\rho, s)$, $g(\rho, s)$ et $h(\rho, s)$, d'autre part, sont parfaitement déterminées dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle et sont intégrables dans cet intervalle, ainsi que leur carré si deux quelconques d'entre elles appartenant à chacun des deux groupes, jouissent de ces propriétés. Nous pouvons écrire dans ces conditions (H. V. 20) :

$$(14) \quad g(1, s) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f(1, u) \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - u) \mid \omega_1, \omega_3 \right] du - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\rho, u) \zeta_3 \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - u) \mid \omega_1, \omega_3 \right] du$$

l'intégrale relative à la fonction ζ étant considérée comme égale à sa valeur principale au sens de Cauchy. Le rapport seul des périodes des fonctions elliptiques qui figurent dans cette formule est déterminé par la relation :

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{i}{\pi} \text{Log } \rho.$$

Nous pouvons donc supposer que la $1/2$ période ω_1 est égale à π , d'où il résulte que ω_3 est égale à $-i \log \rho = i \frac{b}{a}$. Si l'on remarque, en outre, que dans le

cas qui nous occupe, la fonction $f(\rho, s)$ est une fonction périodique impaire définie par :

$$\begin{cases} f(\rho, s) = \theta(s) \text{ pour } 0 < s < \pi \\ f(\rho, s) = -\theta(2\pi - s) \text{ pour } \pi < s < 2\pi \end{cases}$$

on voit que l'intégrale :

$$\begin{aligned} & -\frac{3\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \zeta_3 \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s-u) \mid \pi, \frac{ib}{a} \right] \cdot f(\rho, u) du \\ &= -\frac{3}{\pi} \int_0^\pi [2\tau_1 + \zeta_3(s-u) - \zeta_3(s+u)] \theta(u) du \end{aligned}$$

est une fonction de s que nous connaissons. Soit $A(s)$ cette fonction. D'après les deux conditions (12) et (14), la fonction $f(1, s)$ est solution de l'équation :

$$(15) \text{ (E)} \quad \text{Log} \left[1 + 3\mu \int_\pi^s \sin f(u) \cdot du \right] = A(s) + \frac{3}{\pi} \int_0^\pi N(u, s) f(u) du$$

où l'on a écrit $f(s)$ à la place de $f(1, s)$ et où le noyau $N(u, s)$ a pour expression :

$$N(u, s) = 2\tau_1 - \zeta(u+s) - \zeta(u-s) = 2\zeta_1(\pi-u) + \frac{p'u}{ps - p'u}.$$

A tout mouvement dans le plan z satisfaisant aux conditions précisées au début de ce chapitre correspond ainsi une solution de l'équation (E). Réciproquement à toute solution de cette équation correspond un mouvement du type étudié. La fonction $\omega(z)$ dont on connaît après l'intégration de l'équation (E) la partie réelle sur toutes les frontières de la couronne (D) est, en effet, déterminée à l'intérieur de cette couronne par la formule (H. V. 17) :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega(Z) = f(r, s) + ig(r, s) &= \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \frac{p'u \cdot f(u) \cdot du}{p(s - i \text{Log } r) - pu} \\ -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi \frac{p'(u) \cdot \theta(u) \cdot du}{p\left(s - i \text{Log } \frac{r}{\rho}\right) - pu} &+ \frac{2i}{\pi} \int_0^\pi [\tau_1 - \zeta u] [f(u) - \theta(u)] du \end{aligned} \right.$$

Rappelons que la constante τ_1 est définie en fonction de ρ par (T. M. CX) :

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{6} - \sum \frac{4\rho^{2n}}{(1-\rho^{2n})^2} \right]$$

de telle sorte que nous connaissons tous les éléments de la formule 16. La fonction $\omega(Z)$ étant ainsi déterminée, on en déduira le domaine occupé par le fluide en mouvement dans le plan (z) et le champ des vecteurs \vec{V} . Le champ \vec{V} détermine les lignes de courant et la répartition des pressions au sein de la

masse fluide. En conservant les variables r et s comme grandeurs auxiliaires, on aura :

$$(17) \quad dz = dx(r, s) + i dy(r, s) = \frac{a}{V(A)} \left[i \frac{dr}{r} - ds \right] e^{-g(r,s)} e^{if(r,s)}.$$

$$(18) \quad w = u(r, s) - i v(r, s) = V(r, s) e^{-i\theta(r,s)} = V(A) e^{g(r,s)} e^{-if(r,s)}.$$

$$(19) \quad p = C - \frac{2 V^3(A)}{a} \mu y(r, s) - \frac{V^2(A)}{2} e^{2g(r,s)}.$$

En résumé, le problème de l'écoulement du fluide se ramène à l'étude des solutions de l'équation (E). Au point de vue analytique, l'intégration de cette équation est équivalente à la résolution du problème mixte (M) qui consiste à déterminer une fonction analytique de Z , régulière à l'intérieur de la couronne (D) par les conditions aux limites suivantes :

$$(20) \text{ (M)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad Z = -1, \omega = 0 \\ (2) \quad f(\rho, s) = \theta(s) \\ (3) \quad h(1, s) = \mu e^{-3g(1,s)} \sin f(1, s). \end{array} \right.$$

Comme dans la suite des calculs, nous nous placerons successivement à chacun de ces deux points de vue, nous aurons à utiliser certaines propriétés des fonctions analytiques de Z régulières dans (D). Aussi, pour simplifier l'exposition, allons-nous rassembler dans le chapitre suivant tous les résultats qui nous seront utiles. Cela nous permettra d'obtenir, en passant, diverses formules importantes.

Sur CERTAINES PROPRIÉTÉS des FONCTIONS ANALYTIQUES
dans une COURONNE CIRCULAIRE

5. Équations intégrales correspondant aux problèmes mixtes linéaires.

On sait qu'à chaque couple de fonctions $f(\rho, s)$ et $h(1, s)$ données correspond une fonction analytique $K(Z)$ régulière à l'intérieur de la couronne (D) et définie à une constante imaginaire près. Cette constante est elle-même déterminée par la donnée de la fonction $K(Z)$ en un point de son domaine de régularité, le point A par exemple. Nous supposons naturellement que les données satisfont aux conditions précisées dans le chapitre précédent. Nous supposons de plus qu'elles vérifient les relations :

$$\begin{aligned} f(\rho, 2\pi - s) &= -f(\rho, s) \\ h(1, 2\pi - s) &= -h(1, s) \end{aligned}$$

La condition (H. V. 75) :

$$(21) \quad \int_0^{2\pi} h(1, u) du = 0$$

nécessaire à l'uniformité de $K(Z)$ est alors vérifiée d'elle-même. Les fonctions elliptiques qui figurent dans l'expression de $K(Z)$ sont construites à partir d'un groupe de périodes dont le rapport seul est déterminé par la relation :

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{b}{a}$$

de telle sorte qu'elles se déduisent par une transformation de Landen des fonctions que nous avons utilisées au chapitre I. Il nous est donc permis de supposer que la demi-période réelle est égale à π , la 1/2 période imaginaire étant dans ces conditions égale à $2i \frac{b}{a}$.

Si nous supposons, en outre, que la fonction $K(Z)$ est nulle au point A ($r=1, s=\pi$), nous pouvons écrire après quelques modifications très simples de la formule de M. H. VILLAT (H. V. 71) :

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} K(Z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(1, u) \cdot \text{Log} \frac{\xi_{30} [+i \text{Log } Z + u]}{\xi_{30} [+i \text{Log } Z - u]} du \\ &- \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \theta(u) d \text{Log} \left[\xi_{30} (-i \text{Log } \rho Z - u) \xi_{30} \left(u - i \text{Log} \frac{Z}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions $f(1, s)$, $g(1, s)$ et $g(\rho, s)$ sont alors définies au moyen des formules :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) f(1, s) = \int_0^\pi N_1(u, s) h(1, u) du + \int_0^\pi N_3(u, s) \theta(u) du. \\ (2) g(\rho, s) = \int_0^\pi N_2(u, s) h(1, u) du + \int_0^\pi N_4(u, s) \theta(u) du. \\ (3) g(1, s) = \int_\pi^s h(1, u) du. \end{array} \right.$$

où les noyaux $N_1(u, s)$, $N_2(u, s)$, $N_3(u, s)$ et $N_4(u, s)$ ont pour expression :

$$(24) \quad N_1(u, s) = \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{\xi_{30} |s - u|}{\xi_{30} |s + u|}.$$

$$(25) \quad N_2(u, s) = -\frac{i}{\pi} \text{Log} \frac{\xi_{30} (s - u - i \text{Log } \rho)}{\xi_{30} (s + u - i \text{Log } \rho)}.$$

$$(26) \quad N_3(u, s) = \frac{i}{\pi} \frac{d \text{Log}}{du} [\xi_{30} (s - u - i \text{Log } \rho) \cdot \xi_{30} (s + u - i \text{Log } \rho)].$$

$$(27) \quad N_4(u, s) = -\frac{1}{\pi} \frac{d \text{Log}}{du} [\xi_{30} (s - u) \cdot \xi_{30} (s + u)].$$

Si les données sont des fonctions sommables et de carrés sommables (au sens de Lebesgue), toutes les fonctions f et g jouissent de la même propriété.

A l'intérieur de la couronne (D), la fonction $K(Z)$ définie par la formule (22) admet un développement en série de Laurent de la forme :

$$(28) \quad K(Z) = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} b(n) Z^n$$

dont les coefficients sont déterminés par :

$$(29-1) \quad b(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u h(1, u) du.$$

$$(29-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} b(n) = \frac{2}{\pi} \frac{\rho^n}{1 + \rho^{2n}} \int_0^\pi \theta(u) \cdot \sin n u \cdot du \\ + \frac{2}{\pi n} \frac{1}{1 + \rho^{2n}} \int_0^\pi h(1, u) \cdot \sin n u \cdot du. \end{array} \right.$$

Il en résulte que les nombres $b(n)$ et $b(n) \rho^n$ sont les constantes de Fourier respectivement attachées aux fonctions $f(1, s)$ et $g(\rho, s)$ de telle sorte que l'on peut écrire en adoptant une notation de M. HURWITZ :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) f(1, s) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} b(n) \cdot \sin ns \\ (2) g(\rho, s) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} -b(n) \rho^n \cos ns. \end{array} \right.$$

Nous aurons à utiliser suivant les cas soit le groupe des formules (23), soit le groupe des formules (30). Nous allons maintenant établir quelques propriétés fondamentales des noyaux $N_k(u, s)$, ($k=1, 2, 3, 4$) et des fonctions $I_k(s) = \int_0^\pi N_k(u, s) du$, qui interviendront constamment dans les calculs.

6. Étude du noyau $N_1(u, s)$:

La fonction $\text{Log } \xi_{30}(v)$ définie par le développement en série trigonométrique (T. M. CVI) :

$$(31) \quad \text{Log } \xi_{30} v = \text{Log } \frac{\sigma_3(2\pi v)}{\sigma(2\pi v)} = -\text{Log } 2 \sin \frac{v}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{n(1+q^n)} \left[2 \sin \frac{nv}{2} \right]^2.$$

est une fonction de v univoque à l'intérieur du rectangle du plan v dont les sommets ont pour affixes : $-\pi, +2\pi, 2i \frac{b}{a} - \pi, 2i \frac{b}{a} + 2\pi$ si l'on convient de prendre pour $\text{Log } \sin \frac{v}{2}$ la détermination principale de ce logarithme. La fonction :

$$N_1(u, s) = \frac{1}{\pi} \text{Log } \frac{\xi_{30} |s-u|}{\xi_{30} |s+u|}$$

est une fonction réelle des deux variables u et s , bornée et continue dans le domaine $O \llcorner \begin{matrix} u \\ s \end{matrix} \llcorner \pi$ sauf pour $u=s$ où elle présente une singularité logarithmique. On a de plus :

$$N_1(u, s) = N_1(s, u) = N_1(\pi - u, \pi - s) = N_1(\pi - s, \pi - u).$$

Il suffit de construire la courbe qui représente les variations de la fonction $\xi_{30} u$ pour les valeurs réelles de u , pour voir que le noyau N_1 est positif dans tout le domaine où il est défini. Nous verrons au chapitre V que les valeurs singulières de ce noyau symétrique sont de la forme $n \frac{1+q^n}{1-q^n}$, n étant un entier positif quelconque. D'après (31), on peut écrire le développement suivant qui est valable à l'intérieur du domaine considéré (u, s) :

$$(32) \quad N_1(u, s) = \frac{1}{\pi} \text{Log } \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{n(1+q^n)} \sin nu \cdot \sin ns.$$

Considérons maintenant la fonction $I_1(s) = \int_0^\pi N_1(u, s) du$. La série qui figure au second membre de la formule (32) peut être intégrée et dérivée terme à terme. On a d'autre part :

$$\int_0^\pi \text{Log } \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \left| \frac{u-s}{2} \right|} \cdot du = 2 \int_s^{\pi-s} \text{Log } \sin \frac{u}{2} du + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log } \sin u du.$$

et, par suite :

$$(33) \left\{ \begin{aligned} \frac{dI_1}{ds} &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \operatorname{cotg} \frac{s}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)(1+q^{2n-1})} \cos(2n-1)s \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{\xi_{30} s}{\xi_{30}(s+\pi)}. \end{aligned} \right.$$

La fonction $I_1(s)$ est donc une fonction de s positive et croissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$. On a, d'autre part, $I_1(s) = I_1(\pi - s)$ et les valeurs limites de cette fonction sont :

$$(34) \left\{ \begin{aligned} I_1(0) &= I_1(\pi) = 0 \\ I_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= M_1 = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 - q^{2n-1}}{(2n-1)^2(1+q^{2n-1})}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque le nombre q croît de zéro à un, le maximum M_1 de I_1 décroît depuis une valeur A voisine de 1,16 jusqu'à zéro.

7. Étude du noyau $N_2(u, s)$:

Si l'on désigne suivant l'usage, par k le module des fonctions elliptiques correspondant aux périodes $2\omega_1 = 2\pi$ et $2\omega_3 = 4i\frac{b}{a}$ et par e_1, e_2, e_3 les constantes de Weierstrass attachées à ces fonctions, on sait (T. M. CXXX) que la fonction $\xi_{30}\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right) = \xi_{30}(u - i \operatorname{Log} \rho)$ a un module égal à $\sqrt{k(e_1 - e_3)}$ pour toutes les valeurs réelles de la variable u . La fonction :

$$N_2(u, s) = -\frac{i}{\pi} \operatorname{Log} \frac{\xi_{30}(s - u - i \operatorname{Log} \rho)}{\xi_{30}(s + u - i \operatorname{Log} \rho)}$$

définie pour toutes les valeurs réelles de u et de s comprises entre 0 et π est une fonction réelle de ces deux variables.

Comme la fonction :

$$-\frac{i}{\pi} \frac{d}{du} \operatorname{Log} \xi_{30}(u - i \operatorname{Log} \rho) = \frac{1}{\pi \sqrt{e_1 - e_3}} \xi_{40}(u - i \operatorname{Log} \rho) \xi_{30}(u + i \operatorname{Log} \rho)$$

est positive, la fonction $-\frac{i}{\pi} \operatorname{Log} \xi_{30}(u - i \operatorname{Log} \rho)$ définie par la formule (31) dans l'intervalle $-\pi < u < 2\pi$ est une fonction de u croissante dans cet intervalle. Il en résulte que le noyau $N_2(u, s)$ est négatif dans tout le domaine où il est défini.

L'intégrale $I_2(s) = \int_0^\pi N_2(u, s) du$ représente, au signe près, la fonction

$g(\rho, s)$ dans le cas où les fonctions $f(\rho, s)$ et $h(1, s)$ se réduisent respectivement à zéro et à un. On a donc :

$$(35) \quad I_2(s) = \frac{\pi}{2} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{(2n-1)^2} \frac{\cos(2n-1)s}{1+q^{2n-1}}.$$

La série qui figure au second membre de cette formule étant uniformément convergente ainsi que ses dérivées, on peut écrire l'expression de la dérivée d'ordre 2 sous la forme :

$$\frac{d^2 I_2}{ds^2} = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos(2n-1)s$$

ou encore (T. M. XXXIV et CVIII) :

$$(36) \quad \frac{d^2 I_2}{ds^2} = -\frac{4}{\pi} \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{13}(2s).$$

On en déduit sans peine que la fonction $I_2(s)$ est une fonction de s décroissante dans l'intervalle $0, \pi$, vérifiant la condition : $I_2(s) + I_2(\pi - s) = \pi$. Les valeurs extrêmes de cette fonction sont :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_2 = I_2(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{(2n-1)^2} \frac{1}{1+q^{2n-1}} \\ m_2 = I_2(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{(2n-1)^2} \frac{1}{1+q^{2n-1}} \end{array} \right.$$

Lorsque q varie de zéro à un, le maximum M_2 croit de $\frac{\pi}{2}$ à :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \pi$$

et le minimum m_2 décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

8. Étude du noyau $N_4(u, s)$:

Le noyau $N_4(u, s) = -\frac{1}{\pi} \frac{d \text{Log}}{du} [\xi_{30}(s-u) \cdot \xi_{30}(s+u)]$

peut être mis sous la forme (T. M. LXV) :

$$(38) \quad N_4(u, s) = -\frac{1}{\pi} \frac{d \text{Log}}{du} \cdot \left[\frac{\xi_{30}^2 s \cdot \xi_{30}^2 u - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\xi_{30}^2 u - \xi_{30}^2 s} \right]$$

ou encore, après quelques transformations simples :

$$(39) \quad N_4(u, s) = -\frac{2}{\pi} \frac{\xi_{30} u \cdot \xi'_{30} u}{\xi_{30}^2 u - \xi_{30}^2 s} \cdot \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3) - \xi_{30}^4 s}{\xi_{30}^2 s \cdot \xi_{30}^2 u - (e_1 - e_3)}.$$

La fonction $\xi_{30} u$ étant une fonction réelle positive et supérieure à $\sqrt{e_1 - e_3}$ pour toutes les valeurs réelles de l'argument comprises entre 0 et π , on voit immédiatement sous la forme (39) que le noyau $N_4(u, s)$ est réel et du signe de $u - s$. Il est infini pour $u = s$ et présente alors une singularité polaire. L'intégrale $I_4(s)$ relative à ce noyau doit être prise en valeur principale au sens de Cauchy à moins que l'on ne préfère l'écrire sous la forme :

$$\frac{2\theta(s)}{\pi} \text{Log} \frac{\xi_{30} s}{\xi_{30}(s + \pi)} + \int_0^\pi [\theta(u) - \theta(s)] N_4(u, s) du$$

où l'intégrale a, cette fois, son sens ordinaire.

9. Étude du noyau $N_3(u, s)$:

Les propriétés du noyau N_3 , dont nous aurons besoin dans la suite des calculs, se déduisent très simplement de celles du noyau N_4 . On a, en effet :

$$(40) \quad N_3(u, s) = -i N_4\left(u, s + \frac{\pi \tau}{2}\right).$$

Si nous désignons par α l'argument de la fonction $p(s - i \text{Log } \rho)$ de Weierstrass, nous avons :

$$\xi_{30}^2 (s - i \text{Log } \rho) = \sqrt{(e_2 - e_3)(e_1 - e_3)} e^{i\alpha}$$

et, par suite :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_3(u, s) = \frac{4}{\pi} \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} \cdot \\ \sin \alpha \frac{\xi_{30} u \cdot \xi'_{30} u}{\left[\xi_{30}^2 u - \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} e^{i\alpha} \right] \left[\xi_{30}^2 u - \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} e^{-i\alpha} \right]} \end{array} \right.$$

La fonction $\alpha(s)$ est une fonction de s définie dans l'intervalle $0, \pi$ où elle croît de $-\pi$ à 0 (T. M. CXXX). Le noyau $N_3(u, s)$ est donc réel et positif dans tout son domaine de régularité.

L'intégrale $I_3(s) = \int_0^\pi N_3(u, s) du$ peut être calculée directement, mais son étude est peut-être plus rapide si l'on remarque qu'elle représente la fonction $f(1, s)$ dans le cas où les fonctions $h(1, s)$ et $f(\rho, s)$ se réduisent respectivement à zéro et à un. En utilisant le développement (31) et quelques formules élémentaires de la théorie des fonctions elliptiques (T. M. CVIII, XXXIV, XXXVI), on peut écrire le développement de la fonction $I_3(s)$ en série trigonométrique valable dans l'intervalle $(0, \pi)$ sous la forme :

$$(42) \quad I_3(s) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \frac{\sin(2n-1)s}{2n-1}.$$

On a donc :

$$(43) \quad \frac{dI_3}{ds} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos (2n-1)s = \frac{2}{\pi} \theta_2^2(0) \xi_{13}(2s).$$

$$(44) \quad I_3(s) = \frac{\theta_2^2(0)}{\pi \sqrt{e_3 - e_2}} \text{Log} [\xi_{23}(2s) + \sqrt{e_3 - e_2} \cdot \xi_{03}(2s)].$$

et en vertu de la relation :

$$\sigma_3^2(2s) = \sigma_2^2(2s) + (e_2 - e_3) \sigma^2(2s).$$

on peut mettre la fonction $I_3(s)$ sous la forme :

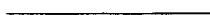
$$(45) \quad I_3(s) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tg.} [\sqrt{e_2 - e_3} \xi_{02}(2s)].$$

Cette fonction est donc une fonction de s positive dans l'intervalle $0, \pi$ symétrique par rapport à la valeur $\frac{\pi}{2}$ de la variable et croissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$. Ses valeurs extrêmes sont :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_3 = I_3(0) = 0. \\ M_3 = I_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tg.} \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{2}{\pi} \text{Arc tg} \frac{k}{k'}. \end{array} \right.$$

Le module k des fonctions elliptiques utilisées dans ce chapitre est donc égal $\sin \frac{\pi M_3}{2}$. Il en résulte que le maximum M_3 de la fonction $I_3(s)$ varie entre les limites 0 et 1 lorsque le nombre q croît de 0 à 1.

Nous retiendrons en particulier de l'étude que nous venons de faire que dans leur domaine de régularité les noyaux N_k conservent un signe constant et que les fonctions $I_k(s)$ sont des fonctions bornées de la variable s .



CHAPITRE III

ÉTUDE ANALYTIQUE du PROBLÈME MIXTE (M)

10. Approximations successives.

Nous considérerons dans ce chapitre une suite infinie de fonctions $\omega_n(Z)$ dont les différents termes sont des fonctions analytiques de la variable Z régulières dans la couronne (D) et nulles au point A ($r=1, s=\pi$). Ces fonctions seront déterminées de proche en proche par les conditions aux limites suivantes :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f_1(\rho, s) = \theta(s) \\ (1') \quad h_1(1, s) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (n) \quad f_n(\rho, s) = \theta(s) \\ (n') \quad h_n(1, s) = \mu e^{-3g_{n-1}(1,s)} \sin f_{n-1}(1, s) \\ \dots\dots\dots \quad \quad \quad n = 2, 3 \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Nous démontrerons d'abord que pour une fonction $\theta(s)$ donnée, ces fonctions ω_n admettent une limite unique et nous considérerons la fonction $\omega(Z)$ qui constitue l'inconnue du problème comme limite de la suite $\omega_n(Z)$ quand n augmente indéfiniment ou, si l'on veut, comme la somme de la série :

$$(48) \quad \omega_1(Z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [\omega_{n+1}(Z) - \omega_n(Z)]$$

dont nous démontrerons la convergence.

Pour trouver tout d'abord les conditions qui permettent d'affirmer que les fonctions successives $\omega_n(Z) - \omega_{n-1}(Z)$ sont bornées en module à l'intérieur de la couronne (D), nous utiliserons les formules établies au chapitre II. Ces formules permettent, en effet, d'obtenir de proche en proche l'expression explicite des fonctions $\omega_n(Z)$ sous la forme :

$$(49) \quad \omega_1(Z) = -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi \theta(u) d \text{Log} \cdot \left[\xi_{30}(i \text{Log} \frac{\rho}{Z} - u) \cdot \xi_{30}(i \text{Log} \rho Z + u) \right]$$

$$(50) \quad \omega_n(Z) = \omega_1(Z) + \frac{\mu}{\pi} \int_0^\pi e^{-g_{n-1}(1,u)} \sin f_{n-1}(1, u) \text{Log} \frac{\xi_{30}(i \text{Log} Z + u)}{\xi_{30}(i \text{Log} Z - u)} \cdot du$$

Les fonctions $f_n(1, s)$, $f_n(\rho, s)$, $g_n(1, s)$ et $g_n(\rho, s)$ sont de même définies de proche en proche par les formules :

$$(51) \quad f_n(\rho, s) = \theta(s).$$

$$(52) \quad g_n(1, s) = \int_{\pi}^s \mu e^{-3g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u) du.$$

$$(53) \quad f_n(1, s) = \int_0^{\pi} \theta(u) \cdot N_3(u, s) du + \mu \int_0^{\pi} e^{-3g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u) \cdot N_1(u, s) du.$$

$$(54) \quad g_n(\rho, s) = \int_0^{\pi} \theta(u) \cdot N_4(u, s) du + \mu \int_0^{\pi} e^{-3g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u) N_2(u, s) du.$$

Les fonctions $f_n(s)$ sont des fonctions de s impaires quelle que soit la valeur de n , et la condition d'uniformité est, par suite, réalisée pour toutes les fonctions $\omega_n(Z)$. D'après les propriétés des noyaux intégraux qui ont été étudiés dans le chapitre précédent, on voit que, si l'on désigne par $F_1(s)$ une fonction dominante pour $f_1(1, s)$ dans l'intervalle $0 < s < \pi$ et par H_n une limite supérieure du module de la fonction $h_n(1, s)$ dans cet intervalle, les fonctions :

$$F_1(s) + H_n I_1(s)$$

et $(\pi - s) H_n$

sont respectivement dominantes pour les fonctions $f_n(1, s)$ et $g_n(1, s)$ dans l'intervalle $0, \pi$. Dans chaque cas étudié, on pourra calculer explicitement la fonction $f_1(1, s)$ et obtenir ainsi la fonction $F_1(s)$, de manière aussi exacte que possible. D'ailleurs si nous désignons par Θ l'inclinaison maxima de la paroi (S) sur l'horizontal, nous pourrons, dans tous les cas, prendre la fonction $\Theta \cdot I_3(s)$ comme fonction dominante $F_1(s)$. Soit $\text{Sin } u$ le maximum de la fonction $|\sin u|$ dans l'intervalle $(0, u)$, c'est-à-dire la fonction continue de la variable u qui est définie par $\text{Sin } u = |\sin u|$ dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ et par $\text{Sin } u = 1$ pour $|u| > \frac{\pi}{2}$. Les fonctions dominantes que nous venons de définir admettent respectivement comme limites supérieures les quantités F_n et G_n qui sont déterminées de proche en proche par les formules :

$$(55) \quad \begin{cases} (1) & F_n = \Theta \cdot M_3 + M_1 H_n \\ (2) & G_n = \pi H_n \\ (3) & H_n = \mu e^{3G_{n-1}} \text{Sin } F_{n-1} \end{cases}$$

Nous définissons ainsi à partir de $H_1 = 0$ trois suites de quantités positives croissantes. Si ces suites ont des limites finies F , G et H , ces limites seront solutions du système :

$$(56) \quad \begin{cases} (1) & F = M_3 \Theta + M_1 H \\ (2) & G = \pi H \\ (3) & H = \mu e^{3G} \text{Sin } F \end{cases}$$

Réciproquement, si ce système admet une solution, cette solution définira des bornes supérieures pour les quantités H_n , G_n et F_n et, par suite, pour les fonctions $h_n(1, s)$, $f_n(1, s)$ et $g_n(1, s)$. Or, les équations (56) admettent une solution si le paramètre μ vérifie la condition (suffisante) :

$$(57) \quad \mu < \frac{1}{3\pi e}$$

Cette condition est nécessaire si $F_1 > \frac{\pi}{2}$. Quoi qu'il en soit, nous pouvons affirmer que si le paramètre μ est suffisamment petit, les fonctions $\omega_n(Z)$ ont leur module borné sur la circonférence de rayon un.

D'autre part, les fonctions $i[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ sont réelles sur la circonférence de rayon ρ et elles y admettent la fonction $HI_2(s)$ comme dominante.

Comme la fonction $I_2(s)$ est une fonction bornée, la condition (57) constitue une condition suffisante pour que les fonctions $[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ soient bornées en module sur la circonférence qui limite intérieurement le domaine (D). Toutes les fonctions $g_n(\rho, s)$ seront donc bornées si la fonction $g_1(\rho, s)$ jouit de cette propriété, par exemple dans le cas où la fonction θ est une fonction continue de la variable s dans tout l'intervalle $0, \pi$. L'inclinaison de la paroi (S) varie dans ce cas de façon continue, de B à B'; au contraire, si la fonction θ admet des discontinuités de première espèce correspondant à des points anguleux de (S), les fonctions $g_n(\rho, s)$ sont infinies pour les valeurs de s correspondantes (voir à ce sujet les considérations développées au chapitre VII de la deuxième partie).

En résumé, les fonctions $[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ sont des fonctions analytiques de la variable Z , définies et continues à l'intérieur de la couronne (D) et sur le contour qui limite ce domaine. Puisque leur module est borné sur le contour, ces fonctions sont également continues à l'intérieur de (D). Nous pouvons donc affirmer dès maintenant que les fonctions ω_n admettent au moins une fonction limite à l'intérieur de (D). (P. MONTEL — *Sur les suites infinies de fonctions*) mais, en vue d'un calcul pratique, nous allons chercher de façon précise une condition suffisante relative au paramètre μ , qui assure la convergence uniforme des fonctions $\omega_n(Z)$ vers une fonction analytique $\omega(Z)$, unique solution du problème.

11. Convergence uniforme des approximations.

Etant donnée une suite de fonctions $\varphi_n(s)$, nous désignerons dans ce paragraphe par la notation $\delta_n \varphi$ la fonction $[\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)]$ et par $\Delta_n \varphi$ une quantité quelconque supérieure au module de la fonction $\delta_n \varphi(s)$ dans l'intervalle où elle est définie (limites comprises). D'après la condition (47 — n'), on peut écrire :

$$\delta_n h(1, s) = \mu \delta_{n-1} [e^{-3g(1, s)} \sin f(1, s)]$$

et cette égalité peut être mise sous la forme :

$$\delta_n h = \mu e^{-3g_{n-1}} \delta_{n-1} (\sin f) + \mu \sin f_{n-2} \delta_{n-2} (e^{-3g}).$$

Si donc le paramètre μ vérifie la condition (57), on a :

$$\Delta_n h = \mu e^{3G} [\Delta_{n-1} f + 3 \text{Sin } F \cdot \Delta_{n-1} (g)]$$

et, par suite, les fonctions :

$$(58) \quad \left. \begin{array}{l} \mu a_n I_1 (s) \\ \mu a_n (\pi - s) \end{array} \right\} \text{ où } a_n = e^{3G} [\Delta_{n-1} f + 3 \text{Sin } F \Delta_{n-1} g]$$

et où F. G. H. sont les solutions du système (56) sont respectivement des fonctions dominantes dans l'intervalle $0, \pi$ pour les fonctions $\delta_n f (1, s)$ et $\delta_n g (1, s)$. On a d'autre part :

$$(59) \quad \delta_2 h = \mu \sin f_1 (1, s)$$

et on peut prendre comme valeurs de $\Delta_2 f$ et de $\Delta_2 h$ les quantités :

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 f = \mu M_1 \text{Sin } F_1 \\ \Delta_2 g = \mu \pi \text{Sin } F_1. \end{array} \right.$$

Ceci posé, considérons les séries dont les termes, $\Delta_n f$ et $\Delta_n g$, constants et positifs, sont déterminés de proche en proche par les égalités :

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 f = \mu M_1 \text{Sin } F_1 \\ \Delta_2 g = \mu \pi \text{Sin } F_1 \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots \\ (n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{n+1} f = \mu M_1 e^{3G} [\Delta_n f + 3 \text{Sin } F \cdot \Delta_n g] \\ \Delta_{n+1} g = \mu \pi e^{3G} [\Delta_n f + 3 \text{Sin } F \cdot \Delta_n g] \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Ces séries sont convergentes moyennant la condition (nécessaire et suffisante) :

$$(62) \quad \mu e^{3G} [M_1 + 3 \pi \text{Sin } F] < 1$$

et on peut dans ce cas affirmer que les séries : $\sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n [f (1, s)]$ et $\sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n [g (1, s)]$ sont uniformément convergentes dans l'intervalle $0 < s < 2\pi$. Dans le cas où l'inclinaison maxima de la paroi est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, le paramètre μ est défini en fonction de G par l'équation :

$$(63) \quad G = \mu \pi e^{3G}$$

qui est une conséquence du système (56).

Les deux conditions (57) et (62) devant être compatibles, on a :

$$G (M_1 + 3 \pi) < \pi$$

et, par suite :

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu < M \\ M = \frac{e^{-\frac{3\pi}{M_1+3\pi}}}{M_1+3\pi} \end{array} \right.$$

Cette dernière condition constitue donc une condition suffisante et valable dans les cas les plus généraux, pour la convergence uniforme de la série $\sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n[\omega(Z)]$ sur la circonférence de rayon un. Dans le cas où l'inclinaison maxima Θ est inférieure à $\frac{\pi}{2}$, on peut remplacer l'équation (63) par l'équation :

$$(65) \quad G = \mu \pi e^{3G} \text{Sin} \left(F_1 + \frac{M_1}{\pi} G \right)$$

et en prenant comme valeur de G la plus petite racine positive de cette équation on obtient une condition relative au paramètre μ moins restrictive que la condition (64). Dans le chapitre V, nous montrerons comment dans les cas qui sont pratiquement les plus importants, on peut encore étendre de façon très notable, le domaine de validité des raisonnements qui précèdent, tout en conservant des formules très maniables.

Dans les diverses expressions que nous venons d'obtenir comme limitation de μ , on doit remplacer I_1 et M_1 par leur expression obtenue au chapitre II. Ces limites dépendront donc de la valeur du rayon ρ de la circonférence intérieure, mais le calcul effectué dans les cas limites montre que les expressions de M varient peu lorsque ρ croît de zéro à un. La valeur obtenue dans le cas limite où ρ est égal à un et où M_1 est par suite égal à 1,16, constitue d'ailleurs une limite qui reste valable dans tous les cas.

Considérons maintenant la série $\sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n[\omega(Z)]$ sur la circonférence de rayon ρ . La fonction $\mu I_2(s) \Delta_n[h(1, s)]$ étant dominante pour la fonction (réelle) $i \delta_n[\omega(\rho e^{is})]$, la fonction $\mu I_2(s) e^{3G} [\sum \Delta_n f + 3 \text{Sin } F \sum \Delta_n g]$ est dominante pour la fonction :

$$- i \sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n[\omega(\rho e^{is})]$$

et si le paramètre μ satisfait à la condition (suffisante) (64) la série $\sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n[\omega(z)]$ est une série uniformément convergente sur toute la frontière du domaine (D). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME I. — *Il existe un nombre M (défini par les inégalités précédentes) tel que si $|\mu| < M$ les fonctions $[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ forment une suite de fonctions analytiques dans (D), bornées et continues à l'intérieur de ce domaine, suite uniformément convergente sur le contour.*

Elles convergent donc à l'intérieur de (D) vers une fonction limite $[\omega(Z) - \omega_1(Z)]$ et les suites formées par les dérivées successives des fonctions $[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ convergent de façon uniforme vers les dérivées de la fonction $[\omega(Z) - \omega_1(Z)]$.

12. Théorèmes d'existence et d'unicité.

Dans ces conditions, on pourra déterminer la fonction $\omega(Z)$ comme somme de la série :

$$(66) \quad \omega(Z) = \omega_1(Z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \delta_n [\omega(Z)].$$

Toutes les fonctions ω_n étant nulles au point A ($r=1, s=\pi$) la fonction $\omega(Z)$ est évidemment nulle en ce point.

Sur la circonférence de rayon ρ les fonctions $\delta_n[\omega(Z)]$ sont imaginaires pures. La partie réelle de la fonction ω au point ρe^{is} se réduit donc à celle de la fonction $\omega_1(Z)$ soit $\theta(s)$.

D'autre part, les termes de la série :

$$(67) \quad \frac{dg_1}{ds} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n \left[\frac{dg(1,s)}{ds} \right] = \sum_{n=2}^{n=\infty} \delta_n h$$

sont (form. 61) respectivement inférieurs en module à ceux de la série :

$$(68) \quad \mu e^{3G} \left[\sum \Delta_n f + 3 \text{Sin } F \sum \Delta_n g \right].$$

La série (67) est donc uniformément convergente pour toutes les valeurs de s . Par suite, elle représente, d'après un théorème d'ABEL, la limite vers laquelle tendent les fonctions $\frac{df(r,s)}{dr}$ lorsque la variable r tend vers un.

La dérivée normale $h(1,s)$ est donc parfaitement déterminée en tout point de la circonférence de rayon un, et si l'on suppose que dans l'égalité :

$$h_n = \mu e^{-3g_{n-1}} \sin f_{n-1}$$

le nombre n augmente indéfiniment, les fonctions h_n, f_n et g_n tendant respectivement vers leurs limites $h(1,s), f(1,s)$ et $g(1,s)$, on peut sans difficulté passer à la limite, puisque la convergence est uniforme, et écrire :

$$h(1,s) = \mu e^{-3g(1,s)} \sin f(1,s).$$

Par suite :

THÉORÈME II. — *La fonction $\omega(Z)$ satisfait à toutes les conditions du problème mixte (M).*

Supposons maintenant qu'il existe dans les conditions où nous nous sommes placés une fonction $\omega'(Z)$ autre que la fonction $\omega(Z)$ que nous venons de définir, dont le module est borné à l'intérieur de (D) et qui satisfait aux

conditions aux limites du problème (M). Désignons par F et par G deux quantités positives respectivement supérieures aux modules des fonctions $f_n(1, s)$ et $f_n(\rho, s)$ d'une part, $g_n(\rho, s)$ et $g_n(1, s)$ d'autre part. Des identités :

$$h_n = \mu e^{-3g_{n-1}} \sin f_{n-1}$$

$$h' = \mu e^{-3g'} \sin f'$$

on déduit :

$$(69) \quad |h_n - h'| < \mu e^{3G} \{ |f' - f_{n-1}| + 3 \sin F \cdot |g' - g_{n-1}| \}$$

et, par suite :

$$(70) \quad (1) \left\{ |f_n(1, s) - f'(1, s)| < \mu I_1(s) e^{3G} \cdot \text{Maxim. de } \{ |f' - f_{n-1}| + 3 \sin F \cdot |g' - g_{n-1}| \} \right.$$

$$(2) \left\{ |g_n(1, s) - g'(1, s)| < \mu (\pi - s) e^{3G} \cdot \text{Maxim. de } \{ |f' - f_{n-1}| + 3 \sin F \cdot |g' - g_{n-1}| \} \right.$$

Lorsque le nombre n augmente indéfiniment, les fonctions $[f_n(1, s) - f'(1, s)]$ et $[g_n(1, s) - g'(1, s)]$ tendent uniformément vers zéro, tout au moins si le paramètre μ est suffisamment petit. Il en est de même des fonctions $[g_n(\rho, s) - g'(\rho, s)]$ qui admettent comme dominantes les fonctions :

$$\mu I_2(s) e^{3G} \cdot \text{Maxim. de } \{ |f' - f_{n-1}| + 3 \sin F |g' - g_{n-1}| \}$$

La fonction $[\omega_n(Z) - \omega'(Z)]$ tend donc vers zéro en tout point du contour limite de (D). Comme c'est une fonction analytique de Z à l'intérieur de ce domaine, elle tend vers zéro en tout point intérieur et la fonction $\omega'(Z)$ coïncide avec la fonction $\omega(Z)$ qui a été déterminée dans les précédents paragraphes. Par suite :

THÉORÈME III. — *Pour une fonction θ donnée, la fonction $\omega(Z)$ est la seule fonction à module borné qui satisfasse à toutes les conditions du problème (M).*

Tous les termes de la série (66) qui détermine la fonction $\omega(Z)$ sont des fonctions analytiques du paramètre μ dans l'intervalle $|\mu| < M$, la fonction $\omega(Z|\mu)$ est donc une fonction analytique du paramètre μ dans cet intervalle.

13. Expression du reste. Valeur de l'approximation de rang donné.

Comme, dans un calcul pratique, on ne peut calculer qu'un nombre fini de termes, il est très important en vue des applications de connaître une limite supérieure de l'erreur que l'on commet dans la détermination des diverses fonctions $f(r, s)$ et $g(r, s)$ lorsqu'on arrête le calcul à celui de l'approximation d'ordre n . C'est précisément dans ce but que nous avons établi la condition (64) et les formules (61).

Les fonctions $[f(X, Y) - f_n(X, Y)]$ et $[g(X, Y) - g_n(X, Y)]$ étant harmoniques dans D prennent leurs valeurs extrêmes sur le contour. Or, dans l'hypothèse faite relativement au paramètre μ les séries qui déterminent les fonctions $f(1, s)$ et $g(1, s)$ dans l'intervalle $0, \pi$ sont uniformément convergentes et leurs

termes sont respectivement inférieurs en valeur absolue à ceux des séries (61). On peut donc écrire les formules suivantes qui permettent de répondre immédiatement à la question posée :

$$(71) \quad |f(1, s) - f_n(1, s)| < \mu M_1 R_n.$$

$$(72) \quad |g(1, s) - g_n(1, s)| < \mu \pi R_n. \quad R_n = e^{3G} M \frac{\Delta_n f + 3 \operatorname{Sin} F \Delta_n g}{M - \mu}$$

$$(73) \quad |g(\rho, s) - g_n(\rho, s)| < \mu M_2 R_n.$$

et, *a fortiori*, les formules suivantes qui correspondent au cas où $F_1 > \frac{\pi}{2}$:

$$(74) \quad |f(1, s) - f_n(1, s)| < \frac{M_1 G}{\pi - (M_1 + 3\pi) G} [\Delta_n f + 3 \Delta_n g]$$

$$(75) \quad |g(1, s) - g_n(1, s)| < \frac{\pi G}{\pi - (M_1 + 3\pi) G} [\Delta_n f + 3 \Delta_n g]$$

$$(76) \quad |g(\rho, s) - g_n(\rho, s)| < \frac{M_2 G}{\pi - (M_1 + 3\pi) G} [\Delta_n f + 3 \Delta_n g]$$

Dans ces diverses expressions, le nombre G représente la plus petite racine positive de l'équation :

$$G e^{-3G} = \pi \mu.$$

CHAPITRE IV

APPLICATION AU PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE

14. Configurations hydrodynamiques successives.

Distance des mouvements.

A chacune des fonctions $\omega_n(Z)$ précédemment définies, nous ferons correspondre le mouvement M_n du plan z qui est déterminé par les formules :

$$(77) \quad dz_n = \frac{i a}{V(A)} \cdot e^{i\omega_n(Z)} \cdot \frac{dZ}{Z}$$

$$(78) \quad V_n(Z) = V(A) e^{g_n(Z)}.$$

Tous les mouvements M_n présentent une périodicité géométrique et sont symétriques par rapport aux verticales CD (hémi-symétrie) et lorsque n augmente indéfiniment, les configurations obtenues tendent vers une configuration limite qui fournit la solution exacte du problème hydrodynamique.

Étant donnés deux de ces mouvements M_i et M_k , nous appellerons *points homologues*, les points des domaines D_i et D_k qui correspondent à un même point de $D(Z)$, et la *distance des deux mouvements* sera par définition égale à la distance maxima des points homologues.

Ceci posé, considérons les mouvements M_n et M_{n-1} . Si nous supposons que les crêtes A_n et A_{n-1} coïncident, les points homologues du profil libre sont tels que :

$$(79) \quad \delta_n x = \frac{a}{V(A)} \int_{\pi}^s \delta_n [e^{-g} \cos f] \cdot ds$$

$$(80) \quad \delta_n y = \frac{a}{V(A)} \int_{\pi}^s \delta_n [e^{-g} \sin f] \cdot ds$$

Comme :

$$(81) \quad \delta_n [e^{-g} \cos f] = e^{-g_n} \delta_n [\cos f] + \cos f_{n-1} \delta_n [e^{-g}].$$

$$(82) \quad \delta_n [e^{-g} \sin f] = e^{-g_n} \delta_n [\sin f] + \sin f_{n-1} \delta_n [e^{-g}].$$

on a sur le profil libre :

$$(83) \quad \Delta_n x_l = \frac{\varphi_0}{2 V(A)} e^G [\Delta_n g + \sin F \cdot \Delta_n f]$$

$$(84) \quad \Delta_n y_l = \frac{\varphi_0}{2 V(A)} e^G [\Delta_n f + \sin F \cdot \Delta_n g]$$

de telle sorte que la distance de deux points homologues du profil libre est inférieure à :

$$(86) \quad \frac{\varphi_0}{\sqrt{2} V(A)} [\Delta_n f + \Delta_n g].$$

La distance des points homologues situés sur la verticale de crête AB est de même :

$$(87) \quad \delta_n y = \frac{\varphi_0}{2 \pi V} \int_1^\rho \delta_n e^{-g(X,\pi)} \cdot \frac{dX}{X}$$

et est par suite inférieure à :

$$(88) \quad \frac{\varphi_0}{2 \pi V} e^G \Delta_n g \cdot \log \rho = \frac{\psi_0}{V} e^G \Delta_n g.$$

On aura des formules analogues pour toutes les lignes de courant autres que L et les formules (61) déterminent la distance des deux mouvements considérés. Les formules (71)-(76) déterminent de même la distance du mouvement M_n au mouvement réel M. On pourra donc déterminer aisément un nombre N tel que pour $n > N$ la distance des mouvements M_n et M ait une valeur donnée arbitrairement petite. On peut également se placer, pour la détermination de l'approximation à adopter, à un point de vue différent et plus près de la réalité physique, en considérant les variations de pression sur le profil L_n (voir à ce sujet les considérations développées au chapitre 7 de la deuxième partie).

15. Interprétation des conditions trouvées.

Pour construire le mouvement, nous disposons de quatre arbitraires : la fonction $\theta(s)$ et les constantes φ_0 , Ψ_0 et $V(A)$. Les autres grandeurs qui ont été introduites dans les calculs se ramènent à celles-ci par les formules :

$$(89) \quad \rho = e^{-\frac{2\pi\varphi_0}{\varphi_0}} = e^{-\frac{b}{a}}$$

$$(90) \quad \mu = \frac{g \varphi_0}{2 \pi V^3} = \frac{ag}{V^3}$$

$$(91) \quad \lambda = \frac{2a}{V} \int_0^\pi e^{-g(e,u)} \cos \theta(u) du \quad \text{et} \quad H_{(A)} = \frac{a}{V} \int_\rho^1 e^{-g(X,\pi)} \frac{dX}{X}.$$

La fonction $\theta(s)$ est liée directement à la forme de la paroi solide et la connaissance de cette paroi permet de définir — au moins qualitativement — la variation de $\theta(s)$ dans l'intervalle $0, \pi$. La constante $\Psi_0 = b$ représente le débit de l'écoulement et la constante $V(A) = V$ caractérise la vitesse du courant. Si le mouvement est produit par la translation uniforme (de vitesse c) de la paroi (S) dans le fluide, il existe une relation entre les constantes a et c . On sait en effet (cf. Levi-Civita, Math. Annalen 93) que dans les mouvements de

propagation par ondes, le débit réel de la masse liquide à travers une verticale fixe reste fini, malgré l'apparence de translation et qu'il en est de même pour le flux à travers un élément quelconque immergé pour tout intervalle de temps fini ou infini. Avec les notations actuelles, le débit réel à travers une verticale fixe a pour expression :

$$\int_{AM} (u - c) dy = \left[\Psi(x, y) - cy \right]_A^M$$

et le flux à travers l'élément dy pour l'intervalle de temps Δt a pour expression :

$$(92) \quad dy \int_t^{t+\Delta t} (u - c) dt.$$

Comme la fonction u dépend de t par l'intermédiaire de x , on peut en désignant par x et par $x + \Delta x$ l'abscisse de la verticale fixe considérée aux temps t et $t + \Delta t$ et par rapport à des axes entraînés dans le mouvement de (S), remplacer l'intégrale (92) par l'intégrale :

$$\frac{dy}{c} \int_x^{x+\Delta x} (u - c) dx = \frac{dy}{c} \left\{ \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y) - c \Delta x \right\}.$$

Comme nous venons de voir que la fonction $\Psi(x, y) - cy$ est finie dans tout le domaine fluide qui se déduit de (D) par des translations successives parallèles à Ox et que la condition de flux montre que la fonction $\varphi(x, y) - cx$ est également finie, il en résulte que la fonction $f(z) - cz$ est une fonction analytique de z qui possède une valeur finie en tout point du domaine fluide (y compris le point à l'infini). Or, la dérivée de cette fonction $\frac{df}{dz} - c = w(z) - c$ admet la période λ . On en déduit :

$$(93) \quad [f(z + \lambda) - c(z + \lambda)] - [f(z) - cz] = \text{Cte}$$

et la fonction n'est bornée à l'intérieur du domaine fluide que si la constante qui figure au deuxième membre de (93) est nulle. Dans ces conditions, on aura :

$$f(z + \lambda) - f(z) = c\lambda$$

et les constantes a et c seront liées par la relation :

$$(94) \quad \varphi_0 = 2\pi a = \lambda c.$$

Quant au paramètre μ , c'est une grandeur sans dimension et en utilisant les relations (91-94), on peut mettre la condition (90) qui le définit, sous la forme :

$$(95) \quad \mu = \frac{4\pi^2 g H^3}{\lambda^2 c^2} \frac{1}{\left[\int_0^1 e^{-g \frac{dX}{X^2}} \right]^3}.$$

Dans les conditions où nous nous plaçons, les divers facteurs qui interviennent dans cette expression de μ , sont déterminés de façon très approchée par la donnée de la paroi à l'exception du paramètre c .

Les conditions trouvées expriment donc que les courants étudiés sont des courants rapides relativement à leur profondeur et les formules écrites précédemment permettent de préciser ce que nous entendons par là.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la paroi solide (S), qui peut avoir une forme aussi tourmentée que l'on veut, entre les verticales AB et CD. La fonction $\theta(s)$ ne satisfait qu'à la condition (imposée par la nature physique du problème) d'être une fonction bornée. Dans ces conditions et si l'on ne précise pas davantage l'allure de cette fonction, la vitesse des molécules fluides qui se déplacent sur (L) peut varier dans de grandes proportions. Or, la fonction $e^{3.G}$ qui intervient dans tous les calculs développés précédemment est une fonction très rapidement croissante pour les valeurs positives de la variable. Il en résulte que les limitations trouvées sont, en général, beaucoup trop restrictives. Pour étendre le domaine de la validité des formules établies, on profitera donc, dans chaque cas étudié, de la forme particulière de la paroi et des propriétés de la fonction θ qui en résultent. Nous allons donner un exemple, applicable à un grand nombre de problèmes dont l'étude nous permettra de trouver certaines propriétés du noyau N_1 et des équations intégrales (E) qui dominent toute cette théorie.

16. Étude de l'équation intégrale (E).

Supposons que la paroi S ait une forme régulièrement ondulée analogue à celle de la *figure 2* et que la cote de ses différents points n'aille jamais en croissant quand on se déplace de B à C dans le sens du courant. La fonction θ est dans ce cas une fonction bornée ($< \ominus$) et non positive dans l'intervalle $0, \pi$. En première approximation, on a :

$$(96) \quad \begin{cases} (1) & f_1(1, s) = \int_0^\pi N_3(u, s) \theta(u) du \\ (2) & g_1(1, s) = 0. \end{cases}$$

La noyau N_3 étant positif dans tout son domaine d'existence (chapitre II, § 9), la fonction f_1 est une fonction négative dans l'intervalle $0, \pi$. Elle admet comme dominante dans cet intervalle, la fonction $\ominus I_3(s)$ dont le maximum a pour valeur $M_3 \ominus$. La surface libre obtenue en première approximation présente donc une allure générale analogue à celle de la paroi. Mais puisque M_3 est une constante comprise entre 0 et un, l'inclinaison du profil libre est inférieure à celle de la paroi. θ étant par hypothèse compris entre 0 et $-\pi$, la fonction $f(1, s)$ reste également comprise entre ces deux limites et $\sin f(1, s)$ est négatif ou nul dans tout l'intervalle. A ce degré d'approximation la vitesse est constante sur L_1 .

En deuxième approximation :

$$(97) \quad \begin{cases} (1) \left\{ f_2(1, s) = \int_0^\pi N_3(u, s) \theta(u) du + \mu \int_0^\pi N_1(u, s) \sin f_1(u) du \right. \\ (2) \left\{ g_2(1, s) = \mu \int_\pi^s \sin f_1(1, u) du. \right. \end{cases}$$

Le noyau N_1 est positif et intégrable, $\sin f_1$ est négatif ou nul, la première intégrale a une valeur négative. Il en résulte que la fonction f_2 est négative et la fonction g_2 positive dans tout l'intervalle $0, \pi$. Ces fonctions admettent respectivement comme dominantes les fonctions :

$$(98) \quad F_2(s) = F_1(s) + \mu \text{Sin} [\ominus M_3], I_1(s)$$

$$(99) \quad G_2(s) = \mu \int_\pi^s F_1(u) \cdot du.$$

La fonction $F_2(s)$, nulle aux points $s=0$ et $s=\pi$, atteint son maximum pour $s = \frac{\pi}{2}$ et ce maximum a pour valeur :

$$\ominus M_3 + \mu M_1 \text{Sin} (\ominus M_3).$$

Le profil libre obtenu en deuxième approximation présente donc une allure générale analogue à celle du profil libre L_1 , mais la vitesse des molécules, qui le suivent, va progressivement en croissant quand on se déplace dans le sens du courant de A à D. La troisième approximation conduit aux fonctions :

$$(100) \quad f_3(1, s) = f_1(1, s) + \mu \int_0^\pi e^{-3g_2(1, u)} \sin f_2(1, u) N_1(u, s) du$$

$$(101) \quad g_3(1, s) = \mu \int_\pi^s \sin f_2(1, u) \cdot e^{-3g_2(1, u)} du.$$

et si $|f_2| < \pi$, ces fonctions jouissent de propriétés analogues à celles qui viennent d'être énoncées relativement aux fonctions du premier et du deuxième ordre. Elles admettent respectivement comme dominantes les fonctions :

$$(102) \quad F_3(s) = F_1(s) + \mu \int_0^\pi F_2(u) \cdot N_1(u, s) du$$

$$(103) \quad G_3(s) = \mu \int_s^\pi F_2(u) \cdot du.$$

Le raisonnement est évidemment général et conduit relativement à l'approximation d'ordre n à des résultats analogues si le maximum de $|f_{n-1}(u)|$ est inférieur à π . Dans ces conditions, les fonctions :

$$(104) \quad F_n(s) = F_1(s) + \mu \int_0^\pi F_{n-1}(u) \cdot N_1(u, s) du$$

$$(105) \quad G_n(s) = \mu \int_s^\pi F_{n-1}(u) du$$

sont respectivement des dominantes pour les fonctions $f_n(1, s)$ et $g_n(1, s)$.

On déduit de là, sans aucun calcul, certaines circonstances qualitatives du mouvement. Dans un tel mouvement, le profil libre va en décroissant quand on se déplace dans le sens du courant de A à D (*fig. 2*). La vitesse sur ce profil va en croissant et atteint sa valeur maxima au point D qui correspond à $s=0$. Le maximum des fonctions e^{-3gn} est donc atteint pour la valeur π de l'argument. Il est égal à un. On pourra donc remplacer e^{3G} par un dans toutes les formules des paragraphes précédents et étendre de façon notable les résultats obtenus.

Dans ces conditions, la formule (53) donne :

$$(106) \quad F = M_3 \Theta + \mu M_1 \sin F.$$

et la condition (62) s'écrit :

$$(107) \quad \mu (M_1 + 3 \pi \sin F) < 1.$$

On obtiendra la valeur de M en construisant comme l'indique la *fig. 3* les courbes :

$$(108) \quad \mu = \frac{F - \Theta M_3}{M_1 \sin F} \quad (C_1)$$

et :

$$(109) \quad \mu = \frac{1}{M_1 + 3 \pi \sin F} \quad (C_2)$$

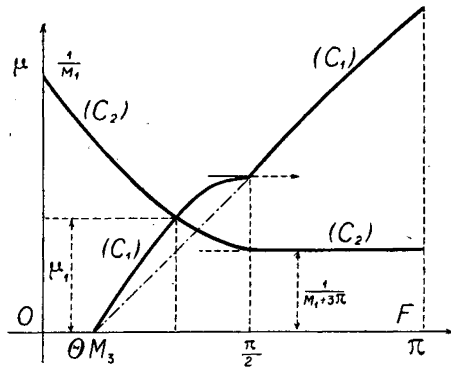


Fig. 3

pour les valeurs de F comprises entre 0 et π . La valeur ainsi obtenue est comprise entre $\frac{1}{M_1}$ et $\frac{1}{M_1 + 3\pi}$.

L'équation intégrale (E) dont les solutions déterminent l'inclinaison du profil libre admet dans ces conditions une solution unique $f(s)$. Cette fonction est une fonction de s négative ou nulle dans l'intervalle $0, \pi$, puisqu'il en est ainsi de toutes les fonctions $f_n(1, s)$. D'autre part, d'après la formule (104), on a :

$$(110) \quad \delta_n F(s) = \mu \int_0^\pi \delta_{n-1} F(u) \cdot N_1(u, s) du.$$

Les calculs qui déterminent les fonctions F_n de proche en proche sont donc ceux qu'il faudrait effectuer pour résoudre par approximations successives l'équation intégrale linéaire :

$$(111) (E_1) \quad F(s) = F_1(s) + \mu \int_0^\pi F(u) \cdot N_1(u, s) du.$$

On en conclut que la solution de cette équation de Fredholm est dans l'intervalle $0, \pi$ une fonction dominante pour la solution de l'équation intégrale fondamentale. Nous avons étudié le noyau $N_1(u, s)$ au chapitre II et nous avons vu que ce noyau est un noyau symétrique qui présente une singularité logarithmique pour $u=s$. Tous les noyaux itérés successifs sont donc bornés et on peut appliquer à l'équation linéaire (E₁) les procédés de calcul de Fredholm.

ÉTUDE DU PROBLÈME LINÉARISÉ

17. Énoncé du problème mixte (M_1).

D'après la façon même dont on a déterminé les fonctions $F_n(s)$, l'intégrale de l'équation de Fredholm (E_1) représente la partie réelle au point e^{is} d'une fonction analytique de Z :

$$(112) \quad A(Z) = A(re^{is}) = F(r, s) + i G(r, s).$$

régulière dans la couronne D et satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} (113) \\ (114) \end{array} \right\} (M_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\rho, s) = \theta(s) \\ H(1, s) = \mu F(1, s). \end{array} \right.$$

Ces conditions sont celles que l'on obtient en réduisant à leurs premiers termes les conditions aux limites relatives à la fonction $\infty(Z)$. La résolution de l'équation de Fredholm est donc équivalente à celle d'un problème mixte ⁽¹⁾ linéaire qui n'est autre que le problème initial « linéarisé ».

Indépendamment des considérations développées à la fin du chapitre IV, l'étude de ce problème linéaire est intéressante au point de vue hydrodynamique parce qu'il fournit la solution du problème de l'écoulement sur une paroi dont la pente est assez faible pour qu'on puisse confondre l'angle θ avec son sinus.

Dans le cas actuel, la fonction $\theta(s)$ est une fonction impaire, mais comme cette circonstance n'introduit aucune simplification dans les calculs, nous nous en dispenserons, sauf indication contraire. Nous supposerons toutefois vérifiée la condition $\int_0^\pi \theta(u) du = 0$, nécessaire à l'uniformité de $A(Z)$.

(1) Le problème mixte auquel nous sommes ainsi conduits constitue un cas particulier d'un problème que j'ai étudié dans une note à l'Académie des Sciences : *Sur un problème mixte dans une couronne circulaire* (C. R. T. 190, page 573). J'avais alors envisagé le cas où la condition à satisfaire sur la circonférence extérieure était de la forme : $H - \mu F = \psi(s)$, $\psi(s)$ étant une fonction donnée de l'argument. Les résultats obtenus dans cette note m'avaient permis de définir la solution du problème hydrodynamique par une méthode d'approximations analogue à celle qui vient d'être exposée où la première approximation était la solution du problème linéarisé. Voir à ce sujet : *Sur l'écoulement des fluides pesants* (C. R. T. 190 p. 1.115).

18. Cas où les données sont développables en séries trigonométriques uniformément convergentes.

Supposons d'abord la fonction $\theta(s)$ développable en série de Fourier *uniformément convergente* entre 0 et π de la forme :

$$(115) \quad \theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos ns + b_n \sin ns]$$

avec :

$$(116) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta(u) \cos nu \, du. \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta(u) \cdot \sin nu \, du.$$

La fonction $F(1, s)$, partie réelle de $A(Z)$, est une fonction harmonique dans (D) $0 < s < 2\pi$, $\rho < r < 1$, qui vérifie les conditions aux limites :

$$(117) \quad F(\rho, s) = \theta(s)$$

$$(118) \quad \lim_{r=1} \frac{\partial F}{\partial r} = \mu F(1, s)$$

et comme c'est une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(119) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$$

elle a pour expression :

$$(120) \quad \frac{(n + \mu) r^n + (n - \mu) r^{-n}}{D(n, \mu)} \begin{cases} \sin ns \\ \cos ns \end{cases}$$

dans le cas où $\theta(s)$ se réduit soit à $\sin ns$, soit à $\cos ns$ et où :

$$(121) \quad D(n, \mu) = (n + \mu) \rho^n + (n - \mu) \rho^{-n}$$

est différent de zéro. Or, dans l'hypothèse faite relativement à la convergence uniforme de la série (115) les fonctions :

$$(122) \quad [a_n \cos ns + b_n \sin ns] \cdot \frac{(n + \mu) r^n + (n - \mu) r^{-n}}{D(n, \mu)}$$

forment une suite de fonctions harmoniques dans D, dont la somme est uniformément convergente sur les circonférences limites. La série :

$$(123) \quad F(r, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + \mu) r^n + (n - \mu) r^{-n}}{D(n)} [a_n \cos ns + b_n \sin ns]$$

représente donc une fonction harmonique dans D et on vérifie sans peine qu'elle satisfait aux conditions du problème. En posant :

$$(124) \quad R(r, u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(n + \mu) r^n}{D(n)} \cos nu$$

on peut écrire la fonction $F(r, s)$ sous la forme :

$$(125) \quad F(r, s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(r, s - u) \theta(u) du.$$

Il en résulte que si l'on pose :

$$(126) \quad N(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{n + \mu}{D(n)} Z^n$$

la fonction cherchée $A(Z)$ a pour expression (à une constante près) :

$$(128) \quad A(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N(Z e^{-iu}) \theta(u) du.$$

Son développement en série de Laurent à l'intérieur de la couronne est de la forme :

$$(129) \quad A(Z) = \sum_1^{\infty} (\alpha_n - i \beta_n) Z^n + \sum_1^{\infty} (\gamma_n + i \delta_n) Z^{-n}$$

avec :

$$(130) \quad \alpha_n = \frac{(n + \mu) a_n}{D(n)} \qquad \gamma_n = \frac{(n - \mu) a_n}{D(n)}$$

$$(131) \quad \beta_n = \frac{(n + \mu) b_n}{D(n)} \qquad \delta_n = \frac{(n - \mu) b_n}{D(n)}$$

Le noyau $N(Z)$ est une fonction de Z holomorphe dans D et sur les frontières, sauf au point $Z = \rho$ où il présente une singularité polaire. La fonction :

$$(132) \quad N(Z) - \frac{\rho}{Z - \rho} = \sum_1^{\infty} \frac{n + \mu}{D(n)} [Z^n - \rho^{2n} Z^{-n}].$$

est holomorphe dans tout le domaine, limites comprises, et même en tout point du plan Z compris à l'intérieur de la couronne dont les rayons extrêmes sont ρ^3 et $\frac{1}{\rho}$. On peut par suite étudier directement la fonction $A(Z)$ en un

point quelconque du domaine ou au voisinage des frontières en transposant la méthode utilisée par M. H. VILLAT pour l'étude du problème de Dirichlet dans une aire annulaire. *Circolo matematico di Palermo*, 1912, t. 33, p. 159.

19. Cas général.

L'hypothèse faite au paragraphe 18 sur la fonction $\theta(u)$ a été faite dans le seul but d'obtenir de façon simple la forme des fonctions $F(r, s)$ et $A(Z)$, mais les résultats subsistent dans des hypothèses plus générales. Supposons seulement que la fonction $\theta(u)$ est une fonction sommable et de carré sommable

(au sens de Lebesgue) et considérons la fonction $A(Z)$ définie à l'intérieur de la couronne par le développement (129). Les coefficients de Fourier :

$$\left. \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos nu}{\sin nu} \right\} \theta(u) du$$

de la fonction $\theta(u)$ sont déterminés à partir des coefficients de ce développement à l'aide des formules :

$$(133) \quad a_n = \rho^n \alpha_n + \rho^{-n} \gamma_n.$$

$$(134) \quad b_n = \rho^n \beta_n + \rho^{-n} \delta_n.$$

La fonction θ étant une fonction sommable et de carré sommable, on a d'après un théorème de M. P. FATOU (séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta mathematica*, 30, p. 379) :

$$(135) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta^2(u) du = \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2).$$

La série $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ étant convergente, il en est de même des séries à termes positifs :

$$(136) \quad \sum [(\alpha_n + \gamma_n)^2 + (\beta_n + \delta_n)^2] = \sum \frac{4n^2}{D^2} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$(137) \quad \sum [(\alpha_n - \gamma_n)^2 + (\beta_n - \delta_n)^2] = \sum \frac{4\mu^2}{D^2} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$(138) \quad \sum [(\alpha_n \rho^n - \gamma_n \rho^{-n})^2 + (\beta_n \rho^n - \delta_n \rho^{-n})^2] = \sum \left[\frac{[(n+\mu)\rho^n - (n-\mu)\rho^{-n}]^2}{D^2} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

$$(139) \quad \sum [n^2 (\alpha_n - \gamma_n)^2 + n^2 (\beta_n - \delta_n)^2] = 4 \sum \frac{n^2 \mu^2}{D^2} (a_n^2 + b_n^2)$$

puisque D est comparable pour n infiniment grand à $n\rho^{-n}$. D'après le théorème de RIESZ-FISCHER, il existe donc quatre fonctions $F(1, s)$, $G(1, s)$, $G(\rho, s)$ et $H(1, s)$ sommables et de carrés sommables, qui sont définies par des formules telles que la suivante où nous adoptons la notation de M. HURWITZ :

$$(140) \quad F(1, s) \sim \sum (\alpha_n + \gamma_n) \cos ns + (\beta_n + \delta_n) \sin ns.$$

Il existe, d'autre part, une fonction $A_0(Z)$ analytique dans D dont la partie réelle prend sur la circonférence de rayon ρ la succession de valeurs définies par la fonction $\theta(s)$ donnée et sur la circonférence de rayon 1 la succession de valeurs définies par la fonction $F(1, s)$, dont nous venons d'établir l'existence. On constate immédiatement que les fonctions $G(1, s)$, $G(\rho, s)$ et $H(1, s)$ définies précédemment coïncident respectivement avec la partie imaginaire de $A(Z)$ aux points d'affixes e^{is} et ρe^{is} et avec la dérivée normale réelle au point e^{is} . On peut donc appliquer à ces fonctions les résultats classiques

relatifs à la fonction $A_0(Z)$ et on vérifie immédiatement que cette fonction satisfait à toutes les conditions du problème. De plus, la dérivée normale réelle au point ρe^{is} existe si la fonction $\theta(s)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable et de carré sommable (non nécessairement bornée) et la fonction $A(Z)$ est la seule solution du problème, à module borné, si l'équation :

$$(141) \quad (n + \mu) q^n + (n - \mu) = 0$$

n'admet pas de racine entière.

Si, au contraire, $\mu = m \frac{1+q^m}{1-q^m}$, m ayant une valeur positive entière, le problème mixte étudié n'admet pas de solution si les coefficients de FOURIER d'ordre m de la fonction θ ne sont pas nuls. Dans le cas où ces coefficients sont nuls, il existe une infinité de solutions dépendant de deux constantes réelles arbitraires et définies par :

$$(142) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega(Z) = & \sum_1^{\infty} (\alpha_n - i \beta_n) Z^n + \sum_1^{\infty} (\gamma_n + i \delta_n) Z^{-n} + (C_1 + i C_2) (m + \mu) Z^m \\ & + (C_1 - i C_2) (m - \mu) Z^{-m} \end{aligned} \right.$$

C_1 et C_2 sont des constantes réelles et l'accent du signe Σ indique que les sommations sont effectuées pour toutes les valeurs entières de n sauf pour la valeur m . Les valeurs μ ainsi définies sont donc les valeurs singulières du noyau N_1 de l'équation de FREDHOLM étudiée et les fonctions fondamentales correspondantes sont les fonctions $\sin ns$. Dans le cas du problème initial, la fonction θ est une fonction impaire et les coefficients α_n et γ_n sont nuls. D'autre part :

$$(143) \quad \beta_n = \frac{(n + \mu)}{D(n)} b_n \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \theta(u) \sin nu \cdot du .$$

$$(144) \quad \delta_n = \frac{n - \mu}{D(n)} b_n$$

La solution de l'équation de FREDHOLM est donc définie par la formule :

$$(145) \quad F(1, s) = \int_0^{\pi} \gamma(u, s; \mu) \cdot \theta(u) du .$$

La fonction :

$$(146) \quad \gamma(u, s | \mu) = \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n}{D(n)} \sin nu \cdot \sin ns$$

est une fonction méromorphe de μ qui est liée simplement avec la résolvante.

L'expression de cette résolvante est de la forme :

$$(147) \quad \Gamma(u, s | \mu) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \left[\frac{\rho^{-n} - \rho^n}{D(n)} - \frac{1}{n} \right] \sin nu \cdot \sin ns .$$

On peut remarquer que le noyau :

$$K_j = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right|$$

qui sera étudié dans la deuxième partie intervient dans la résolution du problème de Neumann symétrique, pour une circonférence. L'expression de la résolvante est valable dans tout le plan de la variable μ en dehors des points singuliers réels définis par la condition 141.

20. Application hydrodynamique.

Au degré d'approximation indiqué au début du chapitre (faible inclinaison de la paroi) le mouvement est défini dans le plan z par les formules :

$$(148) \quad dz = \frac{i a_a}{V} [1 + i \omega] \frac{dZ}{Z} .$$

$$(149) \quad V(z) = V \cdot [1 + g(r, s)].$$

La constante V correspond à la constante imaginaire pure qui est restée indéterminée dans les expressions successives de ω . En plaçant l'origine du plan z au point C qui correspond à $s=0$ (point le plus bas dans le cas étudié à la fin du chapitre IV), on trouve les équations paramétriques de S sous la forme :

$$(150) \quad x_s = -\frac{a}{V} \left[s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\mu)\rho^n - (n-\mu)\rho^{-n}}{n D(n)} b_n \sin ns \right].$$

$$(151) \quad y_s = -\frac{a}{V} \int_0^s \theta(u) du .$$

La longueur de la période λ et la dénivellation h du fond sont définies par :

$$(152) \quad \lambda = \frac{2\pi a}{V} .$$

$$(153) \quad h = -\frac{a}{V} \int_0^s \theta(u) du .$$

La profondeur de la couche liquide comptée suivant les verticales AB et CD a pour valeur :

$$(154) \quad |AB| = \frac{\lambda}{2\pi} \left[-\operatorname{Log} \rho + \sum_1^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2}{D(n)} - \frac{1}{n} \right] b_n \right] .$$

$$(155) \quad |CD| = \frac{\lambda}{2\pi} \left[-\operatorname{Log} \rho + \sum_1^{\infty} \left[\frac{2}{D(n)} - \frac{1}{n} \right] b_n \right]$$

et les équations paramétriques du profil libre sont de la forme :

$$(156) \quad x_l = -\frac{\lambda}{2\pi} \left[s + \sum \frac{2\mu b_n}{n D(n)} \sin ns \right].$$

$$(157) \quad y_l = \left| CD \right| + \frac{2\lambda}{\pi} \sum \frac{b_n}{D(n)} \cos^2 \frac{ns}{2}$$

V est la vitesse moyenne du courant $V = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau V(r, s) ds$ et représente dans le cas de la translation de S dans les conditions du chapitre IV la vitesse horizontale c de S. Soit H la profondeur moyenne définie par la condition :

$$(158) \quad H = \frac{D}{c} = \frac{D\lambda}{\varphi_0}$$

où D désigne le débit (relatif). Les paramètres ρ et μ sont déterminés par :

$$(159) \quad \text{Log } \rho = -2\pi \frac{H}{\lambda}.$$

$$(160) \quad \mu = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}.$$

La fonction θ étant déterminée ainsi que λ par la donnée de la paroi et les éléments caractéristiques du mouvement H et c étant connus, les formules (148) et suivantes déterminent complètement le mouvement à condition toutefois que le paramètre μ ne soit pas une des valeurs singulières du noyau N_1 . Si les paramètres c , H et λ , qui ont tous des interprétations physiques simples satisfont à la relation :

$$(161) \quad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi m} \text{th} \frac{2m\pi H}{\lambda}$$

qui résulte de la condition (141), le coefficient de FOURIER d'ordre m de la fonction θ doit être nul et la fonction ω dépend alors d'une constante arbitraire :

$$(162) \quad \omega(Z) = \sum_1^\infty [-i\beta_n Z^n + i\delta_n Z^{-n}] + iC_2 [(m+\mu)Z^m - (m-\mu)Z^{-m}].$$

Dans ces conditions, la paroi solide a pour équations paramétriques :

$$(163) \quad \left\{ \begin{aligned} x_s &= -\frac{\lambda}{2\pi} \left[s + \sum' \frac{(n+\mu)\rho^n - (n-\mu)\rho^{-n}}{n D(n)} b_n \sin ns \right. \\ &\quad \left. - 4 C_2 \frac{\rho^m}{1-\rho^{2m}} \sin ms \right]. \end{aligned} \right.$$

$$(164) \quad y_s = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^s \theta(u) du.$$

et la profondeur le long de la verticale de crête a pour valeur :

$$(165) \quad |CD| = H + \frac{\lambda}{2\pi} \sum' b_n \left(\frac{2}{D(n)} - \frac{1}{n} \right) + \frac{\lambda}{\pi} C_2.$$

Si l'on définit le niveau moyen de la paroi par la condition :

$$(166) \quad y_{m,s} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda y_s dx_s$$

on constate que ce niveau moyen dépend uniquement de la fonction θ et non de la constante C . Il en est de même du niveau moyen du profil libre, de la

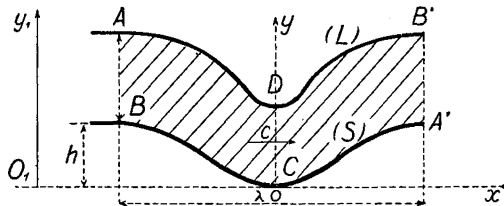


Fig. 4

vitesse relative moyenne c , et de la dénivellation h . On obtient donc une infinité de mouvements qui correspondent tous à une même vitesse de propagation, à un même débit relatif et à des parois de même forme générale présentant une même dénivellation et un même intervalle de périodicité. Cette singularité correspond au cas où la vitesse de translation de S est égale à la vitesse de propagation des ondes sinusoïdales d'Airy dans un canal à fond rectiligne dont la profondeur moyenne est H , la longueur d'onde étant précisément égale à la valeur de la translation qui superpose le profil S à lui-même.

DEUXIÈME PARTIE

CAS ou le MOUVEMENT est UNIFORME à l'INFINI (Écoulement continu)

CHAPITRE PREMIER

ÉNONCÉ et ÉQUATIONS du PROBLÈME

21. Nous étudierons dans cette deuxième partie le mouvement B (§ 2), c'est-à-dire l'écoulement du fluide dans un canal enserré entre deux quais verticaux parallèles, le fond étant constitué par une surface cylindrique dont les génératrices sont perpendiculaires aux quais et dont la méridienne est asymptote en amont et en aval à deux horizontales de cotes bien déterminées. Le mouvement est alors uniforme à l'infini. Nous désignerons par S la paroi solide sur laquelle glisse le fluide, par L le profil libre qui le sépare de l'atmosphère extérieure et nous adopterons les notations suivantes :

Profondeur limite en amont : $H(A)$.

Profondeur limite en aval : $H(B)$.

Vitesse limite en amont : $V(A)$.

Vitesse limite en aval : $V(B)$.

Dénivellation de S : h .

(comptée positivement dans le sens oy).

Débit de l'écoulement : q .

Les six quantités ainsi introduites ne sont pas indépendantes. Il faut, en effet, écrire qu'aux grandes distances en aval le débit et la pression sur le profil libre ont les mêmes valeurs qu'en amont. On obtient ainsi les trois relations :

$$(167) \quad q = H(A) V(A) = H(B) V(B)$$

$$(168) \quad V(A)^2 + 2g[h + H(A)] = V(B)^2 + 2gH(B)$$

et si l'on connaît les éléments caractéristiques du mouvement en amont (vitesse et profondeur), on pourra déterminer la profondeur limite en aval comme racine de l'équation du troisième degré :

$$(169) \quad 2gH(B)^3 - [V(A)^2 + 2gh + 2gH(A)]H(B)^2 + H(A)^2V(A)^2 = 0.$$

La vitesse limite en aval s'en déduira par la relation :

$$(170) \quad V(B) = \frac{H(A) V(A)}{H(B)} .$$

Dans le cas où h est positif, l'équation 169 admet deux racines positives, l'une supérieure et l'autre inférieure à $H(A)$.

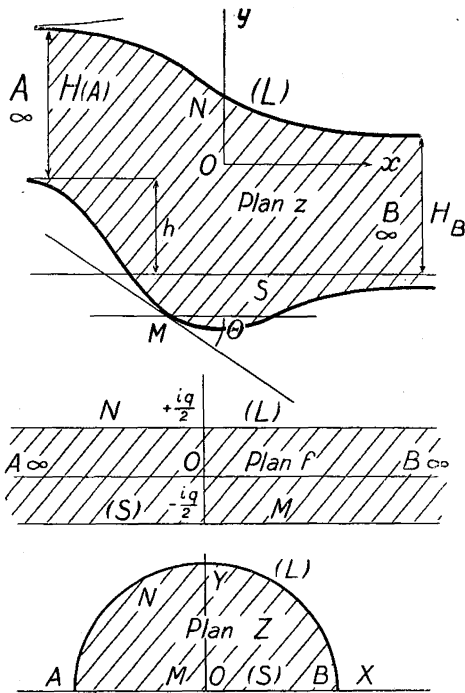


Fig. 5

Nous déterminerons la constante arbitraire dont dépend la fonction de courant en supposant que cette fonction est égale à $-q/2$ sur S. Elle est alors égale à $+q/2$ sur L et par la relation $w = \frac{df}{dz}$, le domaine fluide (z) correspond de façon biunivoque au domaine du plan potentiel compris entre les parallèles à l'axe réel d'ordonnées $\pm q/2$. La transformation :

$$(171) \quad f = -\frac{iq}{2} + \frac{2q}{\pi} \text{Log} \frac{1+Z}{1-Z}$$

où le logarithme a sa détermination principale permet de faire correspondre aux domaines D des plans z et f l'intérieur (D) d'un demi-cercle du plan auxiliaire Z comme l'indique la figure 5.

Le mouvement sera déterminé quand nous connaîtrons la correspondance qui permet de passer du plan Z au plan z ou encore la fonction $w(Z)$. Nous

déterminerons cette fonction par l'intermédiaire de la fonction :

$$\omega = i \text{Log} \frac{w}{V(A)} .$$

Sur S la correspondance entre les deux plans z et Z est définie par la relation :

$$(172) \quad f(M) = \theta(X).$$

Cette fonction θ que nous supposons connue est définie comme on sait (au moins qualitativement) par la donnée de la paroi S. D'après son interprétation physique c'est une fonction de X définie dans l'intervalle ± 1 et continue dans cette intervalle, sauf peut-être en un nombre limité de points (correspondant aux points anguleux de la paroi) où elle présente des discontinuités de première espèce. De plus, la fonction θ est bornée et tend vers zéro de façon monotone

à partir d'une valeur de X suffisamment voisine des extrémités de l'intervalle (± 1) . Sur L la correspondance $(f)(Z)$ est définie par la formule :

$$(173) \quad \varphi = \frac{2g}{\pi} \text{Log cotg } \frac{s}{2}$$

d'après laquelle on peut écrire la condition à laquelle doit satisfaire ω (condition 6 sous la forme ⁽¹⁾) :

$$(174) \quad h(s) \sin s = \mu e^{-3g(s)} \sin f(s).$$

Le nombre μ est une constante définie en fonction des éléments du mouvement par la formule :

$$(175) \quad \mu = \frac{2g}{\pi} \frac{H(A)}{V(A)^2}.$$

L'étude de l'écoulement se trouve ainsi ramenée à la résolution d'un problème mixte : détermination d'une fonction analytique de Z dans le demi-cercle D par les conditions aux limites suivantes :

$$(176) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \omega(A) = 0; \\ (b) f(M) = \theta(X); \\ (c) \sin s \cdot h(N) = \mu \sin f(N) \cdot e^{-3g(N)}. \end{array} \right.$$

Si l'on connaissait la fonction $f(s)$, on pourrait en utilisant les conditions (a) et (c) déterminer la fonction $g(s)$ sous la forme :

$$(177) \quad g(s) = \text{Log} \left[1 + 3 \mu \int_{\pi}^s \frac{\sin f(u)}{\sin u} du \right].$$

D'autre part, la transformation :

$$(178) \quad \left[\frac{Z+1}{Z-1} \right]^2 = -i \left[\frac{Z'-1}{Z'+1} \right]$$

fait correspondre au domaine D l'intérieur du cercle de rayon un du plan Z' et la correspondance entre les frontières est déterminée par les relations :

$$(179) \quad \text{tg } \frac{s'}{2} = -\text{cotg}^2 \frac{s}{2} \quad (\text{sur } L).$$

$$(180) \quad \text{tg } \frac{s'}{2} = \left[\frac{1+X}{1-X} \right]^2 \quad (\text{sur } S).$$

Par l'intermédiaire de ces relations les fonctions $\theta(X)$ et $f(s)$ deviennent des fonctions de s' et la fonction ω une fonction de Z' définie dans D et dont la partie réelle sur le cercle de rayon un est $\theta(s')$ pour $0 < s' < \pi$ et $f(s')$ pour

(1) Je rappelle que les notations $f(r, s)$ ou $f(M)$, g et h désignent respectivement la partie réelle, la partie imaginaire de la fonction ω et la dérivée normale de la partie réelle au point M (prise dans le sens OM). Dans ce qui suit nous écrirons souvent $f(s)$ et $g(s)$ au lieu de $f(1, s)$ et $g(1, s)$.

$\pi < s' < 2\pi$. Il en résulte que la partie imaginaire de cette fonction au point e^{is} est égale à :

$$(181) \quad g(s') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\theta(u')}{\operatorname{tg} \frac{s'-u'}{2}} du' + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{f(u')}{\operatorname{tg} \frac{s'-u'}{2}} du'.$$

la deuxième intégrale étant prise en valeur principale. En revenant au plan Z, on obtient ainsi la fonction $g(s)$ sous la forme :

$$(182) \quad g(s) = \Phi(s) + \int_0^\pi B(u, s) f(u) du.$$

La fonction Φ est une fonction de s définie par la donnée de la fonction $\theta(X)$:

$$(183) \quad \Phi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{4(x^2 - 1)[1 + x^2 - 2x \cos s]}{[1 + 6x^2 + x^4][x^2 \cos s - 2x + \cos s]} \theta(x) dx$$

et le noyau $B(u, s)$ a pour expression :

$$(184) \quad B(u, s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{cotg} \frac{s-u}{2} \operatorname{cotg} \frac{s+u}{2} \cdot \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u}.$$

Si l'on compare les relations (177) et (182), on voit que la fonction $f(s)$ est solution de l'équation intégrale :

$$(185) \quad \operatorname{Log} \left[1 - 3\mu \int_0^\pi A(u, s) \sin f(u) du \right] = \Phi(s) + \int_0^\pi B(u, s) f(u) du.$$

avec :

$$(186) \quad A(u, s) = \begin{cases} 0 & u \leq s \\ \frac{1}{\sin u} & u \geq s \end{cases}.$$

Cette équation joue ici le rôle des équations de M. H. VILLAT. A chacune de ses solutions correspondra un mouvement dans le plan z . Nous déterminerons la fonction ω par une méthode d'approximation successives, analogue à celle qui a été exposée dans la première partie. Ceci revient à résoudre l'équation (185) en la remplaçant par une suite d'équations intégrales linéaires dont les solutions tendent vers la solution de l'équation considérée.

CHAPITRE II

Sur QUELQUES PROPRIÉTÉS des FONCTIONS ANALYTIQUES dans un DEMI-CERCLE

22. *Détermination d'une fonction $A(Z)$ réelle sur la demi-circonférence frontière par la donnée de sa partie réelle sur le diamètre réel.*

Soit $\theta(X)$ la fonction donnée. Cette fonction est une fonction définie dans l'intervalle $-1+1$ où elle est supposée sommable ainsi que son carré.

La transformation :

$$(187) \quad ZZ' + i[Z + Z'] + 1 = 0$$

réalise la transformation conforme du domaine $D(Z)$ sur un domaine analogue $D(Z')$ de façon telle que le diamètre réel OX corresponde à la demi-circonférence L' et réciproquement. La correspondance entre les points des frontières est définie par les formules :

$$(188) \quad X = \operatorname{tg} \left(\frac{s'}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad X' = \operatorname{tg} \left(\frac{s}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Par l'intermédiaire des relations 187 et 188, la fonction $\theta(X)$ devient une fonction de s' : $\theta(s')$ définie dans l'intervalle $0, \pi$ et la fonction $A(Z)$ une fonction de Z' définie dans D et réelle sur l'axe réel. La fonction $A(Z')$ est donc prolongeable analytiquement au delà de l'axe réel par un processus bien connu et se trouve ainsi définie à l'intérieur du cercle de rayon un par les valeurs que prend sa partie réelle sur la circonférence frontière. En revenant au plan Z , on trouve ainsi l'expression explicite de $A(Z)$ sous la forme :

$$(189) \quad A(Z) = \frac{i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \theta(X) \frac{Z^2 - 1}{(X - Z)(1 - ZX)} dX$$

et les fonctions $f(N)$ et $g(M)$ sont alors définies par les relations :

$$(190) \quad f(N) = \frac{2 \sin s}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\theta(u) du}{u^2 - 2u \cos s + 1}$$

$$(191) \quad g(M) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \theta(u) \frac{X^2 - 1}{(X - u)(1 - uX)} du$$

la deuxième intégrale est prise égale à sa valeur principale au sens de CAUCHY. Dans le cas où la fonction $\theta(u)$ est constante et égale à l'unité, la partie réelle de $A(Z')$ est constante sur le contour et, par suite, en tout point du domaine. Il

en résulte que l'intégrale (190) est, dans ce cas, égale à 1, ce que montrerait d'ailleurs un calcul direct bien facile.

23. Détermination d'une fonction $B(Z)$ nulle au point B et imaginaire pure sur l'axe réel par la donnée de sa dérivée normale réelle sur la demi-circonférence.

La fonction $B(Z)$ est prolongeable analytiquement dans le demi-cercle symétrique de D par rapport à l'axe réel et est alors définie en utilisant la formule 7 d'un mémoire de M. H. VILLAT déjà cité (*Acta* 40) :

$$(192) \quad B(Z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(u) \cdot \text{Log} \frac{e^{iu} - Z}{e^{-iu} - Z} du + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi u h(u) du.$$

Les fonctions $f(N)$ et $g(M)$ qui correspondent à la fonction B sont alors définies par les relations :

$$(193) \quad f(N) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(u) \cdot \text{Log} \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| du.$$

$$(194) \quad g(N) = \int_0^s h(u) du.$$

$$(195) \quad g(M) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(u) \cdot \text{Arc tg} \left[\frac{1+X}{1-X} \text{tg} \frac{u}{2} \right] du.$$

Le noyau $K_1(u, s) = \text{Log} \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right|$ est un noyau symétrique fermé dont

les valeurs singulières s'obtiennent en cherchant les valeurs de μ pour lesquelles il existe des fonctions $\omega(Z)$, telles que $h(N) = \mu f(N)$. On trouve sans peine que ces valeurs singulières sont constituées par les nombres entiers successifs et que les fonctions fondamentales correspondantes sont les fonctions $\sin ns$. Le noyau K_1 est continu pour toutes les valeurs des variables comprises dans l'intervalle $0, \pi$ sauf pour $u=s$, auquel cas il présente une singularité logarithmique. Les noyaux itérés successifs restent donc bornés. D'autre part, le noyau K_1 est *positif* pour toutes les valeurs des variables considérées.

Nous aurons besoin dans la suite d'utiliser certaines propriétés du noyau $K_2(u, s) = \frac{K_1}{\sin u}$ qui est un noyau de Schmidt correspondant au noyau K_1 . Le multiplicateur étant constamment positif dans l'intervalle $0, \pi$ le noyau est *positif* pour toutes les valeurs des variables. Il présente les mêmes singularités que le noyau K_1 (singularité logarithmique pour $u=s$) et peut être les droites singulières $u=0$ et $u=\pi$, pour lesquelles le multiplicateur est infini. D'après la condition $K_2(u, s) = K_2(\pi-u, \pi-s)$, il suffit d'étudier la fonction $K_2(u, s)$ dans le domaine $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ $0 \leq s \leq \pi$.

Si s est infiniment petit, u étant différent de zéro K_2 est un infiniment petit comparable à $\frac{s}{1 - \cos u}$. K_2 tend donc vers zéro quand le point (u, s) tend vers un point de *ou* différent de l'origine. Il tend vers une valeur finie égale à $\cotg \frac{s}{2}$ quand le point (u, s) tend vers le point $(0, s)$ de l'axe O_s . Si enfin le point (u, s) tend vers un des points singuliers $(0, 0)$ et $(0, \pi)$ en suivant un chemin tangent aux droites $s = mu$ ou $S = \pi + mu$, le noyau K_2 augmente indéfiniment et sa partie principale est égale à $\frac{1}{u} \text{Log} \frac{1+m}{1-m}$.

La fonction $K_2(u, s)$ est une fonction de u intégrable dans l'intervalle $0, \pi$, quelle que soit la valeur (constante) donnée à s . L'intégrale :

$$(196) \quad I(s) = \int_0^\pi K_2(u, s) du$$

représente en effet la fonction $f(M)$ dans le cas où la fonction $h(M)$ est égale à $\frac{1}{\sin s}$. La fonction $g(M) = \int_0^s h(s) ds$ est alors égale à $\text{Log} \text{tg} \frac{s}{2}$ et on trouve immédiatement la fonction $B(Z)$ correspondante sous la forme :

$$(197) \quad B = i \text{Log} \frac{1+Z}{1-Z}$$

Il en résulte que pour toutes les valeurs de s comprises entre 0 et π on peut écrire :

$$(198) \quad I(s) = + \frac{\pi}{2}$$

Cette dernière relation montre que pour toute fonction $f(s)$ telle que dans l'intégrale $\int_0^\pi \frac{du}{\sin u} \int_0^\pi f(s) K_1(u, s) ds$, on puisse intervenir l'ordre des intégrations, on a :

$$(199) \quad \int_0^\pi \frac{du}{\sin u} \int_0^\pi f(s) K_1(u, s) ds = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(s) ds.$$

ÉTUDE de la PREMIÈRE APPROXIMATION

24. Si le courant considéré est un courant suffisamment rapide ou si la profondeur de la couche liquide est suffisamment faible, le coefficient μ est très petit, il semble donc que l'on peut en première approximation négliger les termes qui contiennent ce coefficient en facteur, ce qui revient à supposer que l'effet des forces de pesanteur est sans influence sensible sur le mouvement. Les conditions aux limites qui déterminent la fonction inconnue ω deviennent alors :

$$(200) \quad \begin{aligned} (a) \quad \omega(A) &= 0; \\ (b) \quad f(M) &= \theta(X); \\ (c) \quad h(N) &= 0. \end{aligned}$$

Soit ω_1 la fonction ainsi définie. Sa partie imaginaire est constante sur la demi-circonférence de rayon un. Comme elle est nulle au point A, elle est nulle en tout point de la demi-circonférence. Son expression explicite est donc donnée par la formule (189). La fonction $f(N)$ définit l'inclinaison du profil $L_1(z)$. Elle est définie par la formule 190 pour toutes les valeurs de s comprises dans l'intervalle $0, \pi$. Il convient cependant d'étudier comment cette fonction se comporte aux extrémités de l'intervalle où elle est définie. En effet, le facteur $\sin s$ s'annule aux extrémités de l'intervalle, mais par contre la fonction $\frac{1}{X^2 - 2X \cos s + 1}$ devient infinie pour $X=1$ si s est nul (point B) et pour $X=-1$ si s est égal à π (point A). Dans le problème qui nous occupe, la fonction $\theta(X)$ est nulle pour $X=\pm 1$. Supposons pour fixer les idées qu'elle soit de la forme :

$$\theta(X) = (1 - X^2) \Phi_0(X)$$

$\Phi_0(X)$ étant une fonction bornée dans l'intervalle $-1, +1$ et inférieure en valeur absolue à $M\pi$. On a dans ce cas :

$$(201) \quad f_1(s) = \frac{2}{\pi} \Phi_0(X_0) \int_{-1}^{+1} \frac{\sin s [1 - x^2] dx}{x^2 - 2x \cos s + 1} \quad |X_0| \leq 1$$

et après une intégration élémentaire :

$$(202) \quad f_1(s) = \frac{2}{\pi} \Phi_0(X_0) \left[-\sin 2s \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{s}{2} - 2 \sin s + \pi \sin^2 s \right].$$

La fonction $f_1(s)$ est donc infiniment petite avec s et l'ordre d'infinitude est au moins égal à celui de la fonction $s \text{Log} s$. On étudierait de même la façon dont se comporte la fonction $f_1(s)$ dans les diverses hypothèses que l'on peut faire sur la fonction arbitraire $\theta(X)$. On remarque en particulier que la fonction $\frac{f_1(s)}{\sin s}$ reste bornée dans tout l'intervalle, limites comprises si la fonction $\theta(X)$ admet les racines $X=1$ et $X=-1$ avec un ordre de multiplicité supérieur à un. Quoiqu'il en soit, la fonction $\frac{f_1}{\sin s}$ est une fonction intégrable dans l'intervalle $0, \pi$ et on a :

$$(203) \quad \int_0^\pi f_1(s) \frac{ds}{\sin s} = \int_0^\pi ds \int_{-1}^{+1} \frac{\theta(X) dX}{1 + X^2 - 2X \cos S} .$$

Les seuls points singuliers possibles pour la fonction qui figure sous le signe \int sont les points $X=1, s=0$ et $X=-1, s=\pi$, mais au voisinage du point $1,0$ par exemple la fonction est comparable à la fonction :

$$\frac{1}{s^2 + (1-X)^2} \theta(X)$$

et dans les hypothèses que nous avons faites sur la fonction θ , hypothèses qui nous étaient imposées par la nature physique du problème, l'intégrale double de cette fonction étendue à un quart de cercle de centre $(0,0)$ et de rayon infiniment petit tend vers zéro avec le rayon du cercle. On peut donc écrire :

$$(204) \quad \int_0^\pi \frac{f_1(s)}{\sin s} ds = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{\theta(u) du}{1-u^2} .$$

Si la fonction θ est de la forme $(1-X^2) \varphi_0(X)$ cette intégrale est inférieure en valeur absolue à $4M\pi$, $M\pi$ désignant le maximum de $\varphi_0(X)$ dans l'intervalle ± 1 .

CHAPITRE IV

DÉTERMINATION de la SOLUTION RIGoureuse

25. Nous pouvons définir à partir de la fonction ω_1 une suite infinie de fonctions analytiques dans le demi-cercle D par les conditions aux limites suivantes :

$$(205) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \omega_n(A) = 0; \\ (b) \quad f_n(M) = \theta(X); \\ (c) \quad h_n(N) = \mu e^{-3g_{n-1}(N)} \frac{\sin f_{n-1}(N)}{\sin s} \end{array} \right.$$

La fonction $[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ est imaginaire pure sur l'axe réel, elle est nulle au point A et la dérivée normale de sa partie réelle au point e^{is} a pour expression :

$$(206) \quad [h_n - h_1]_{(s)} = \mu e^{-3g_{n-1}(s)} \frac{\sin f_{n-1}}{\sin s}.$$

On obtiendra donc son expression explicite en utilisant la formule 192 dès que l'on connaîtra la fonction ω_{n-1} . Si nous considérons par exemple la fonction ω_2 , on a :

$$(207) \quad h_2 = \mu \frac{\sin f_1(s)}{\sin s}$$

$f_1(s)$ étant déterminée comme il a été dit dans le chapitre précédent. Nous avons vu que dans les conditions du problème la fonction $\frac{f_1}{\sin s}$ était une fonction de s intégrable dans l'intervalle $0, \pi$. Posons $J_1 = \int_0^\pi \frac{|f_1|}{\sin s} ds$ et d'une manière générale :

$$(208) \quad J_n = \int_0^\pi \frac{|f_n|}{\sin s} ds$$

et désignons par F_n et par G_n des quantités quelconques respectivement supérieures aux fonctions $|f_n(s)|$ et $|g_n(s)|$ dans l'intervalle $0, \pi$. La fonction g_2 reste bornée dans tout l'intervalle $0, \pi$, limites comprises, et l'expression (207) montre que l'on peut prendre comme valeur de G_2 :

$$(209) \quad G_2 = \mu J_1.$$

La fonction $f_2(s)$ est de même définie (d'après 193) par la relation :

$$(210) \quad f_2(s) = f_1(s) + \mu \int_0^\pi K_2(u, s) \sin f_1(u) du.$$

et en utilisant la formule $\int_0^\pi K_2(u, s) = \frac{\pi}{2}$ démontrée au chapitre II, on peut prendre comme valeur de F_2 :

$$(211) \quad F_2 = F_1 + \mu \frac{\pi}{2} \sin F_1.$$

D'autre part :

$$(212) \quad \frac{f_2(s)}{\sin s} = \frac{f_1(s)}{\sin s} + \mu \int_0^\pi K_2(s, u) \frac{\sin f_1(u)}{\sin u} du$$

et il résulte des propriétés de la fonction $f_1(s)$ établies au chapitre précédent que la fonction $\frac{f_2}{\sin s}$ est une fonction intégrable dans l'intervallé $0, \pi$, et que l'on peut écrire :

$$(213) \quad J_2 = J_1 \left[1 + \mu \frac{\pi}{2} \right].$$

La fonction $|g_3|$ sera donc bornée pour toutes les valeurs de s considérées et on pourra déterminer de proche en proche des quantités F_n et G_n par les relations :

$$(214) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad F_n = F_1 + \mu \frac{\pi}{2} e^{3G_{n-1}} \sin F_{n-1} \\ (b) \quad G_n = \mu e^{3G_{n-1}} J_{n-1} \\ (c) \quad J_n = J_1 + \mu \frac{\pi}{2} e^{3G_{n-1}} J_{n-1}. \end{array} \right.$$

Ces formules définissent trois suites de quantités positives croissantes et si ces quantités sont bornées, leurs limites sont des solutions du système :

$$(215) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad F = F_1 + \mu \frac{\pi}{2} e^{3G} \sin F. \\ (b) \quad G = \mu e^{3G} J \\ (c) \quad J = J_1 + \mu \frac{\pi}{2} e^{3G} J. \end{array} \right.$$

Réciproquement, si les équations 215 sont compatibles pour un système de valeurs positives F , G et J , les quantités F_n , G_n , J_n , et, *a fortiori*, les fonctions $|f_n(s)|$ et $|g_n(s)|$ seront certainement bornées. Une discussion élémentaire donne la condition de compatibilité cherchée sous la forme :

$$(216) \quad \mu < \frac{2}{\pi} e^{-(m+3Gm)}$$

où l'on a posé :

$$(217) \quad 3 G_m = 1 - e^{-m}$$

et

$$(218) \quad m = 2 \operatorname{arg} sh \sqrt{\frac{3 J_1}{2\pi}} .$$

Le maximum de g_n est alors inférieur à la plus petite racine positive de l'équation :

$$(219) \quad Ge^{-3G} - \mu \left(J_1 + \frac{\pi}{2} G \right) = 0 .$$

soit :

$$(220) \quad G = \mu J_1 + \mu^2 \left(3 J_1^2 + \frac{\pi}{2} J_1 \right) + \dots$$

Les fonctions $|\omega_n - \omega_1|$ sont donc, dans ces conditions, bornées sur la demi-circonférence L. Comme elles sont imaginaires pures sur le diamètre réel, elles sont prolongeables analytiquement dans le demi-cercle symétrique de D par rapport à cet axe et sont ainsi définies à l'intérieur du cercle de rayon un tout entier. Comme ce sont des fonctions analytiques de Z dans ce domaine (conditions 2 et 3), elles sont bornées à l'intérieur du cercle puisqu'elles le sont sur le contour. Il en résulte que les fonctions $|g_n(M) - g_1(M)|$ sont bornées quel que soit n . Pour que les fonctions $g_n(M)$ soient elles-mêmes bornées, il suffit donc que la fonction $g_1(M)$ soit bornée. Cette condition sera, en particulier, remplie si la fonction $\theta(X)$ est une fonction continue de X.

Quoi qu'il en soit, les fonctions $(\omega_n - \omega_1)$ ont leur module borné sur le contour du domaine D (Z). Elles sont donc également continues à l'intérieur de D et il existe au moins une fonction limite pour ces fonctions. Analysons de plus près comment se comporte la suite de ces fonctions.

La relation (205-c) permet d'écrire (pour les notations se reporter au § 11) :

$$(221) \quad \delta_n [h \sin u] = \mu \delta_{n-1} (e^{-3g} \sin f)$$

c'est-à-dire :

$$(222) \quad \delta_n [h \sin u] = \mu [e^{-3g_{n-1}} \delta_{n-1} (\sin f) + \sin f_{n-2} \delta_{n-1} (e^{-3g})]$$

mais pour une valeur de u quelconque, on a :

$$(223) \quad |\delta_{n-1} (\sin f)| < |\delta_{n-1} f(u)| .$$

$$(224) \quad |\delta_{n-1} (e^{-3g})| < 3 e^{3G} |\delta_{n-1} g(u)|$$

et ceci nous permet d'écrire :

$$(225) \quad |\delta_n (h \sin u)| < \mu e^{3G} \left[|\delta_{n-1} f(u)| + 3 |\sin f_{n-2}(u)| |\delta_{n-1} g(u)| \right] .$$

Si nous nous reportons maintenant à l'expression de f_n en fonction de h_n (formule 193), nous voyons que :

$$(226) \quad \delta_n f(s) = \int_0^\pi K_1(u, s) \delta_n h(u) du = \int_0^\pi K_2(u, s) \delta_n (h \sin u) du.$$

mais le noyau K_2 est positif et sommable et $\int_0^\pi K_2 du = \frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$(227) \quad \Delta_n f = \frac{\pi}{2} \Delta_n (h \sin u)$$

et, par suite (d'après 225) :

$$(228) \quad \Delta_n f = \mu \frac{\pi}{2} e^{3G} \left[\Delta_{n-1} f + 3 \text{Sin F} \cdot \Delta_{n-1} g \right].$$

Considérons maintenant la fonction $\delta_n g$. Cette fonction est définie par l'égalité :

$$(229) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_n g(s) &= \int_\pi^s \delta_n h(u) du = \mu \int_\pi^s e^{-gn-1} \delta_{n-1} \left(\frac{\sin f}{\sin u} \right) du \\ &+ \mu \int_\pi^s \frac{\sin f_{n-2}(u)}{\sin u} \delta_{n-1} (e^{-3g}) du. \end{aligned} \right.$$

Dans les conditions du problème, les fonctions g sont bornées et inférieures à G et les intégrales J sont également bornées. On a donc :

$$(230) \quad \Delta_n G = \mu e^{3G} \Delta_{n-1} J + 3 \mu e^{3G} \Delta_{n-1} G \cdot J_{n-2}$$

la fonction $\delta_n J$ est de même définie par la formule :

$$(231) \quad \delta_n J = \int_0^\pi \delta_n \frac{f(s)}{\sin s} ds = \int_0^\pi \frac{ds}{\sin s} \int_0^\pi K_1(u, s) \delta_n h(u) du.$$

et, par suite :

$$| \delta_n J | < \int_0^\pi ds \int_0^\pi K_2(s, u) \mu e^{3G} \left\{ \delta_{n-1} \left| \frac{f(u)}{\sin u} \right| + 3 \left| \frac{f_{n-2}(u)}{\sin u} \right| \Delta_{n-1} G \right\} du.$$

Nous avons vu que dans les conditions du problème on a le droit d'invertir l'ordre des intégrations, dans l'intégrale du deuxième terme de l'expression ci-dessus. On obtient ainsi :

$$(232) \quad \Delta_n J = \mu \frac{\pi}{2} e^{3G} [\Delta_{n-1} J + 3 J_{n-2} \Delta_{n-1} G] = \frac{\pi}{2} \Delta_n G.$$

Nous définissons ainsi de proche en proche les quantités $\Delta_n f$ et $\Delta_n g$ par les formules :

$$(233) \quad \Delta_n f = \mu \frac{\pi}{2} e^{3G} \Delta_{n-1} f + 3 \mu \frac{\pi}{2} e^{3G} \text{Sin F} \cdot \Delta_{n-1} g.$$

$$\Delta_n g = \mu e^{3G} \left[\frac{\pi}{2} + 3 J \right] \Delta_{n-1} g.$$

Il en résulte que les séries $\Sigma \Delta_n g$ et $\Sigma \Delta_n f$ seront convergentes moyennant la condition (nécessaire et suffisante) :

$$(234) \quad \mu < \frac{e^{-3G}}{\frac{\pi}{2} + 3J}$$

D'après les résultats obtenus au paragraphe précédent G est inférieur à la plus petite racine de l'équation (219) et J est défini par la condition 215 (b ou c). Il suffit de construire les deux courbes $C_1(\mu, G)$ et $C_2(\mu, G)$ définies par les équations :

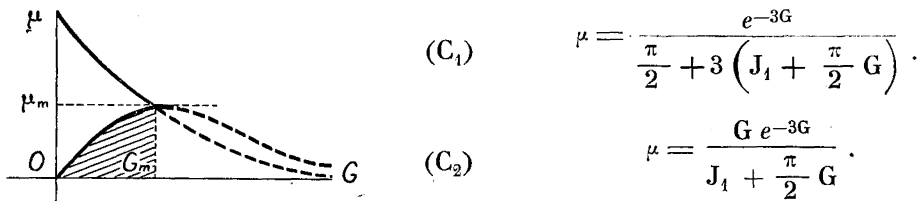


Fig. 6

pour voir que la condition obtenue pour la convergence des séries $\Sigma \Delta_n f$ et $\Sigma \Delta_n g$ est une conséquence de la condition (216) qui nous a permis d'obtenir les valeurs de F et de G .

En résumé, si le paramètre μ satisfait à la condition (suffisante) (216) les séries :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \delta_n f(s) \text{ et } \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n g(s)$$

sont *absolument* et *uniformément* convergentes sur la demi-circonférence L .

Ce résultat acquis, la démonstration s'achève comme dans le cas du mouvement périodique. La suite $[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ définie par prolongement analytique à l'intérieur du cercle de rayon un tout entier, converge uniformément sur le contour de D et converge uniformément à l'intérieur de ce domaine vers une fonction analytique unique qui satisfait à toutes les conditions du problème.

Les formules (233) montrent que l'on a :

$$(235) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_n \left| \delta_n f \right| < \frac{\pi}{2} \mu e^{3G} \frac{\Delta_{n-1} f + 3 \text{Sin } F \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n g}{1 - \mu \frac{\pi}{2} e^{3G}} \\ \sum_n \left| \delta_n g \right| < \frac{\Delta_n g}{1 - \mu e^{3G} \left(3J + \frac{\pi}{2} \right)} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi une limite supérieure de l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace sur L la solution rigoureuse par l'approximation de rang n .

APPLICATION HYDRODYNAMIQUE

26. Le mouvement M_n qui correspond à la fonction ω_n est définie par :

$$(236) \quad \left\{ \begin{array}{l} dz_n = \frac{4 H(A)}{\pi} e^{i\omega_n(Z)} \frac{dZ}{1-Z^2} \\ V_n = V(A) \cdot e^{g_n(Z)} \end{array} \right.$$

et les configurations ainsi obtenues tendent dans les conditions où nous nous sommes placés vers une configuration limite qui fournit la solution exacte du problème hydrodynamique. Les formules établies dans le chapitre précédent permettent d'obtenir dans tout domaine intérieur à D la distance du mouvement approché M_n au mouvement réel M . Ces formules sont applicables si le paramètre μ est assez petit. D'après l'interprétation physique de μ , on voit que cela revient à dire que les courants étudiés sont des courants rapides ou des courants correspondant à une faible profondeur de fluide.

Toutefois, la solution précédente donne lieu à des remarques analogues à celles qui ont été faites dans le cas de la périodicité et qui ont permis d'étendre de façon notable le domaine de validité des formules en donnant en même temps des renseignements précis sur l'allure du mouvement réel.

Les canaux que l'on rencontre en général dans la pratique sont tels que la cote des différents points de S décroît constamment d'amont en aval. Pour de tels canaux, la fonction θ est une fonction de X négative dans tout l'intervalle où elle est définie. Soit $k \frac{\pi}{2}$ le maximum de sa valeur absolue. Cette quantité représente l'inclinaison maxima de la paroi sur l'horizontale et est, en général, inférieure à $\frac{\pi}{2}$ de telle sorte que l'on peut supposer $k < 1$.

La fonction $f_1(s)$ qui correspond à la première approximation est définie par la formule 190, mais la fonction $[1 + u^2 - 2u \cos s]$ est une fonction de u et de s positive ou nulle dans le domaine $|u| \leq 1, 0 \leq s \leq \pi$ et dans le cas actuel la fonction $\theta(u)$ est négative. Il en résulte que la fonction $f_1(s)$ est négative et d'après une remarque faite, le maximum de cette valeur absolue est inférieur à $k \frac{\pi}{2}$. Au point de vue hydrodynamique, cela revient à dire que dans le mouvement M_1 la cote des différents points du profil libre décroît constamment d'amont en aval et que l'inclinaison maxima de ce profil est inférieure à celle

de la paroi. A ce degré d'approximation la vitesse des molécules fluides qui se déplacent sur ce profil est constante et les profondeurs limites en amont et en aval sont égales.

Considérons maintenant la deuxième approximation. Les fonctions $f_2(s)$ et $g_2(s)$ sont définies en tout point de $L(Z)$ par :

$$(237) \quad \begin{aligned} f_2(s) &= f_1(s) + \mu \int_0^\pi K_2(u, s) \cdot \sin f_1(u) du \\ g_2(s) &= \mu \int_\pi^s \frac{\sin f_1(u)}{\sin u} du. \end{aligned}$$

$f_1(u)$ étant négatif et compris entre 0 et π , le noyau K_2 étant d'autre part positif, il en résulte immédiatement que la fonction $g_2(s)$ est une fonction de s positive (le maximum de e^{-3g_2} est donc égal à 1) et que la fonction $f_2(s)$ est une fonction négative. On verra de proche en proche que ces propriétés s'appliquent aux fonctions $f_n(s)$ et $g_n(s)$ à condition toutefois que l'on puisse affirmer que le maximum de $|f_{n-1}(s)|$ est inférieur à π . Le maximum de e^{-3g_n} étant dans ces conditions égal à un, on pourra dans toutes les formules précédemment écrites remplacer e^{3G} par l'unité. En particulier, le maximum de $|f(s)|$ sera défini par l'équation :

$$F = \frac{\pi}{2} [k + \mu \sin F]$$

qui admet effectivement une solution inférieure à π si $\mu < 2 - k$.

Les équations 215-c et (233) sont de même remplacées par les équations :

$$(238) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= J_1 + \mu \frac{\pi}{2} J. \\ \Delta_n f &= \mu \frac{\pi}{2} \Delta_{n-1} f + 3 \mu \frac{\pi}{2} \sin F \cdot \Delta_{n-1} g. \\ \Delta_n g &= \mu \left[\frac{\pi}{2} + 3 J \right] \Delta_{n-1} g. \end{aligned} \right.$$

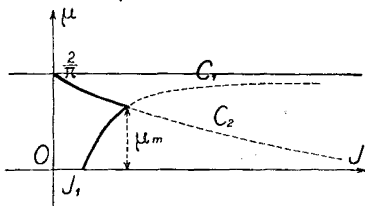


Fig. 7

Les courbes C_1 et C_2 sont des hyperboles :

$$(C_1) \quad \mu = \frac{2}{\pi} \frac{J - J_1}{J}$$

$$(C_2) \quad \mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 3J}$$

dont le point d'intersection définit la valeur de μ_m . On obtient ainsi la condition :

$$(239) \quad \mu < \frac{2}{\pi} e^{-m} \quad \text{avec} \quad m = 2 \operatorname{arg} sh \sqrt{\frac{3J_1}{2\pi}}$$

moyennant laquelle les formules sont effectivement applicables pour le calcul de la distance des mouvements M_n et M dans tout domaine intérieur à D . Si la

valeur de J_1 est faible, ce qui a lieu en général, la valeur de μ ainsi obtenue sera de l'ordre de grandeur de $\frac{2}{\pi}$. La valeur de V qui correspond par la formule 239 à une profondeur de 5 cm. est donc de l'ordre de 0,7 m. On obtient de même des vitesses de l'ordre de 1 m., 2 m. et 3 m. pour des profondeurs de l'ordre de 10 cm., de 40 cm. et de 1 m. Ce sont bien là des mouvements que l'on peut réaliser expérimentalement.

Dans les conditions ainsi précisées, les fonctions $f_n(s)$ successives sont des fonctions de s négatives dans tout l'intervalle $0, \pi$. Il en est donc ainsi de la fonction limite $f(s)$ et la fonction $f(X, Y)$ est une fonction harmonique dans D , négative en tout point du contour $S + L$ et par suite en tout point du domaine, puisqu'elle atteint son maximum sur la frontière. Si l'on considère maintenant la configuration obtenue dans le plan z , on voit que toutes les lignes de courant (et en particulier le profil libre) vont en décroissant d'amont en aval. Sur L la vitesse croît d'amont en aval. La profondeur de la couche liquide est donc plus faible en aval qu'en amont. Cette profondeur est définie, comme nous l'avons vu, par l'équation du troisième degré :

$$\pi \mu H(B)^3 - [H(A) + \pi \mu H(A) + \pi \mu h] H(B)^2 + H(A)^3 = 0$$

et la solution qui convient doit être positive et inférieure à $H(A)$. Elle est donc maintenant définie sans ambiguïté. En supposant le paramètre μ petit, on peut écrire :

$$H(B) = H(A) - gh \frac{H(A)}{V(A)^2} - g^2 \frac{H(A)^2 h}{V(A)^4} \frac{1}{2} \left(2 - \frac{3h}{H} \right) + \dots$$

de telle sorte que si l'on se limite aux effets du premier ordre, la contraction d'amont en aval est définie par :

$$(240) \quad \frac{H(A) - H(B)}{H(A)} = \frac{gh}{V^2}$$

En résumé, les formules précédemment établies nous ont permis d'obtenir sans calcul l'allure générale du mouvement, tout en déterminant celui-ci de manière explicite avec une approximation aussi grande que l'on veut.

Remarquons en passant que si la décroissance de la paroi solide S entraîne celle du profil libre L , la réciproque n'est pas vraie. On voit, en effet, que les remarques faites dans ce chapitre continueront à s'appliquer sans modification à partir de la deuxième approximation si la fonction $f_1(s)$ est négative dans l'intervalle $0 < s < \pi$. Or, il n'est pas nécessaire pour cela que la fonction $\theta(X)$ soit négative dans tout l'intervalle ± 1 .

Si nous considérons par exemple la fonction $(X^2 - a^2)(X^2 - 1)^2$ cette condition sera satisfaite dès que a sera supérieure à 0,6; la configuration correspondante sera celle de la *figure 8*. La constante a étant liée à la valeur du rapport $\frac{H}{l}$, on voit ainsi que pour une profondeur suffisante de liquide, les

irrégularités de la paroi seront sans influence sur l'allure générale du profil libre.

On verrait, comme dans la première partie, que dans le cas où S est décroissant la solution $f(s)$ de l'équation intégrale (185) admet comme dominante la solution de l'équation linéaire :

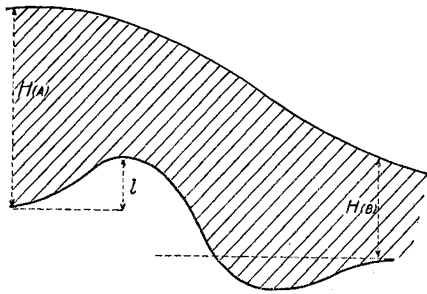


Fig. 8

$$(241) \quad F(s) = f_1(s) + \mu \int_0^\pi K_2(u, s) f(u) du.$$

à laquelle s'appliquent les procédés de calcul de FREDHOLM. Cette équation linéaire à noyau de SCHMIDT positif, correspond au problème mixte linéaire défini par les conditions :

$$(242) \quad \begin{cases} (a) & F(M) = \Theta(X) \\ (b) & \sin s \cdot H(N) = \mu F(N). \end{cases}$$

L'équation homogène correspondant au cas où la fonction θ est identiquement nulle est celle que l'on rencontre dans l'étude de la propagation d'une onde solitaire dans un canal à fond rectiligne.

Le problème mixte correspondant a fait, à ce titre, l'objet de travaux récents (WEINSTEIN, *Rendi Conti dei Lincei*, 1927, 1 p. 259 et C. R. 184, 1927).

ÉTUDE de la PRESSION dans le FLUIDE

27. Conditions analytiques relatives au signe de la pression.

Dans cette étude, nous considérerons pour fixer les idées les mouvements étudiés dans le chapitre précédent pour lesquels le profil de S est décroissant d'amont en aval, mais les résultats seront transposables aux mouvements plus généraux étudiés soit dans la première, soit dans la seconde partie de ce travail. Nous désignerons par :

$$(243) \quad z(F) = x(F) + i y(F)$$

la fonction qui définit la correspondance entre le domaine fluide et la bande $-1 < \psi < 0$ du plan $F = \frac{f}{q} - \frac{i}{2}$ et par $z_n(F)$ celle qui définit la correspondance entre cette bande et le domaine D_n du plan z qui correspond au mouvement M_n . La fonction $z(F)$ existe dans les conditions qui viennent d'être précisées. Elle est holomorphe en tout point de D; $x(F)$ et $y(F)$ sont des fonctions réelles sur l'axe réel du plan F. Nous avons déterminé ces différentes fonctions en supposant qu'il ne se produit aucune cavitation au sein du fluide. Il est nécessaire de s'assurer maintenant que la solution ainsi obtenue ne se heurte à aucune impossibilité physique (BRILLOUIN, *Journal de physique*, 1911) et en particulier que la pression est positive en tout point du fluide. Cette pression est déterminée par la relation de BERNOULLI :

$$(244) \quad \frac{p}{\varpi} = C - y - \frac{V^2}{2g} \quad (\varpi \text{ étant le poids spécifique du fluide}).$$

Dans un article récent (*Journal de Math. pures et appliquées*, T. VI, 1927, p. 427), M. G. BOULIGAND a montré que dans un fluide pesant en mouvement irrotationnel la pression au point (x, y) est une fonction surharmonique des coordonnées de ce point. Cette propriété subsiste évidemment si l'on considère p comme une fonction de X et de Y définie dans le domaine D du plan Z. On a en effet en désignant par Δp le symbole de Laplace :

$$\Delta p(x, y) = \left| \frac{dZ}{dz} \right|^2 \Delta p(X, Y).$$

Une telle fonction atteint sa borne inférieure en un point du contour. La pression sera donc positive dans tout le domaine si elle est positive sur le contour L + S qui le limite.

Etude de la pression sur L. — Le profil L est la ligne de courant qui correspond à $\Psi = 0$. Ses équations paramétriques sont donc :

$$x = x(\Phi)$$

$$y = y(\Phi).$$

La vitesse y est définie par :

$$V(N) = V(A) e^{g(s)} = g \frac{d\Phi}{ds(N)}$$

et la pression par :

$$(245) \quad \frac{p(N)}{\sigma} = [C - y(\Phi)] - \frac{V^2}{2g}.$$

Si nous considérons maintenant le mouvement M_n comme un mouvement qui se produit réellement sous l'action des forces de pesanteur, la pression sur le profil L_n sera définie par la relation :

$$(246) \quad g \frac{dp_n}{\sigma} = -V_n dV_n - g dy_n$$

On a donc :

$$g \frac{dp_n}{\sigma ds} = \mu V(N)^2 \delta_n \frac{e^{-3g} \sin f}{\sin s} = V(N)^2 \delta_{n+1} h$$

et, par suite :

$$\left| \frac{g dp_n}{\sigma ds} \right| < V(B)^2 \cdot \delta_{n+1} h$$

d'où il résulte que :

$$(247) \quad g \left| \frac{p_n(A) - p_n(N)}{\sigma} \right| < V(B)^2 \int_s^\pi |\delta_{n+1} h| dS < V(B)^2 \cdot \Delta_{n+1} G.$$

L'oscillation de la fonction $p(s)$ dans l'intervalle $0, \pi$ est donc inférieure à :

$$(248) \quad \frac{\sigma}{g} \mu^n V(B)^2 J_1 \left[\frac{\pi}{2} + 3J \right]^{n-1}$$

quantité qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Dans les chapitres précédents, nous nous étions placés à un point de vue différent. Nous considérons le mouvement M_n comme une approximation du mouvement réel M et nous cherchions à déterminer n de façon telle que dans une région déterminée la distance des deux mouvements ait une valeur donnée arbitrairement petite. Nous considérons maintenant le mouvement M_n comme un mouvement réel pour lequel la pression sur le profil libre n'est pas rigoureusement constante et nous déterminons n de façon telle que l'oscillation de cette fonction d'amont en aval ait une valeur arbitrairement petite. Comme l'expérience montre effectivement de telles variations de pression (F. AIMOND, Thèse, p. 72), il n'y aura pas lieu de poursuivre les calculs au delà de l'approximation pour laquelle la variation de pression définie par exemple par l'expression 248 est

inférieure aux variations de pression constatées expérimentalement, et ceci nous donne un moyen intimement lié à la réalité physique de déterminer l'ordre de l'approximation que nous devons adopter.

Etude de la pression sur S. — Le plan z étant orienté comme il a été dit (chapitre I) le vecteur vitesse définit un sens positif sur les courbes L et S, la demi-normale positive au point N de L est dirigée vers l'atmosphère extérieure, elle est dirigée vers l'intérieur du fluide au point M de S. Si l'on dérive au point M la relation (244) dans la direction de la normale, on a :

$$\frac{dp}{\omega \, dn} = - \frac{dy}{dn} - \frac{2H}{\pi \mu} e^{2g} \frac{dg}{dn}.$$

Ceci posé, désignons par M le point du profil S où la pression atteint sa valeur minima, et supposons qu'en ce point la courbe S soit concave vers le fluide en mouvement, $f + iy$ est une fonction analytique de z . On a donc en supposant θ continue :

$$\frac{dg}{dn} = \frac{df}{ds(M)} = \frac{d\theta}{ds(M)}.$$

Les deux quantités $-\frac{dg}{dn}$ et $-\frac{dy}{dn} = -\cos \theta$, sont donc négatives et il en est de même de $\frac{dp}{dn}$ au point M. Il existe donc au sein du fluide un point où la pression a une valeur inférieure à celle qu'elle prend au point M. Ce résultat étant en contradiction avec les hypothèses faites, on voit que la pression atteint sa limite inférieure en un point de la paroi où celle-ci est convexe vers le fluide en mouvement. Cette remarque permet de limiter l'intervalle dans lequel il faut étudier la fonction p (tout au moins pour la validité de la solution). Pour obtenir à ce sujet des renseignements précis, on profitera dans chaque cas étudié de la forme particulière de la fonction $\theta(X)$. On peut toutefois énoncer quelques résultats généraux qui permettent de voir, *a priori*, si la solution est acceptable. En effet, la vitesse au point X est définie dans le mouvement M_n par :

(249)

$$V = V(A) e^{gn(X)}$$

$$g_n(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\theta(u)(X^2 - 1) du}{(X - u)(1 - uX)} - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \alpha(X, u) h_n(u) du$$

avec :

$$\alpha(X, u) = \text{Arctg} \left[\frac{1 + X}{1 - X} \text{tg} \frac{u}{2} \right]$$

h_n étant une fonction négative et bornée, le deuxième terme est une fonction de X bornée et positive. En intégrant par parties, on peut écrire :

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \alpha(X, u) h_n(u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_n(u) d\alpha.$$

En effet, $g_n(\pi)$ et $\alpha(0)$ sont nuls et $g_n(0)$ a une valeur finie. Cette

intégrale est inférieure au maximum de g_n sur le profil libre L soit $\log \frac{V(B)}{V(A)}$, la pression sera donc certainement positive si l'inégalité :

$$\frac{g}{\sigma} p_0 > \frac{1}{2} V(A)^2 \left[e^{2g_n(X)} - 1 + \frac{\pi \mu}{H(A)} (y - y_s(A)) - \pi \mu \right]$$

est vérifiée pour toutes les valeurs de X pour lesquelles $\frac{d\theta}{dX}$ est positif. Pour que la solution soit applicable quelle que soit la valeur de la pression (positive) extérieure, il suffit que :

$$(250) \quad \frac{\pi \mu}{H(A)} [y_s(A) - y(M)] + \pi \mu + 1 - e^{2g_n(M)} > 0$$

$y_s(A) - y(M)$ étant positif, nous pouvons remplacer cette dernière condition par les conditions moins précises :

$$(251) \quad \begin{aligned} e^{2g_n} &< 1 + \pi \mu \\ e^{2g_n(X)} &< \frac{V(A)}{V(B)} [1 + \pi \mu]. \end{aligned}$$

En définitive, toute revient à l'étude de la fonction :

$$g_1(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\theta(u)(X^2 - 1)}{(X - u)(1 - uX)} du.$$

Par le changement de variables utilisé au chapitre II (§ 22), la fonction $g_1(X)$ se ramène aux fonctions étudiées par M. H. VILLAT dans son mémoire sur la validité des solutions des problèmes hydrodynamiques (*Journal de math.*, 1914, p. 143). En se reportant à ce mémoire, on obtiendra ainsi des conditions d'une application pratique très aisée permettant de trouver des formes de fonctions θ pour lesquelles on sait, *a priori*, que la solution est acceptable au point de vue de l'hydrodynamique rationnelle, et ceci pour toutes les valeurs de la pression extérieure. Dans les autres cas, la solution obtenue pourra n'être valable que si la pression extérieure a une certaine valeur. Pour cela, il est cependant nécessaire que la fonction $g_1(X)$ reste bornée pour toutes les valeurs de X considérées. Supposons par exemple que la fonction $\theta(X)$, tout en restant bornée, présente des discontinuités de première espèce. Un calcul bien connu montre que dans ce cas la fonction $g_1(X)$ est infinie pour les valeurs de X correspondantes et que son signe est celui de l'expression : $\theta(X - 0) - \theta(X + 0)$. Il en résulte que, quelle que soit la valeur de la pression extérieure, la solution ne sera pas applicable aux parois qui présentent des angles saillants vers le fluide. Au point de vue physique, ce fait se traduira soit par la naissance d'un mouvement tourbillonnaire, soit par la naissance d'un mouvement où le fluide quitte la paroi sur une certaine longueur (cf. Troisième partie, chapitre III). Au contraire, la fonction $g_1(X)$ est bornée si la fonction $\theta(X)$ est une fonction continue ainsi que ses dérivées dans tout l'intervalle où elle est définie.

28. Interprétation géométrique.

Dans ce cas, la fonction $z(F)$ est holomorphe dans D et sur le contour. Si donc, nous désignons par M et par N deux points situés sur une même ligne équipotentielle l'un N sur le profil libre L , l'autre M sur la paroi, on aura ⁽¹⁾ d'après (243) :

$$(252) \quad \left\{ \begin{array}{l} z(M) = e^{-iD} x(N) + i e^{-iD} y(N) \\ z(N) = e^{+iD} x(M) + i e^{+iD} y(M) \end{array} \right.$$

et en séparant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$(253) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad x(M) = \cos D \cdot x(N) + \sin D \cdot y(N) \\ (b) \quad y(M) = -\sin D \cdot x(N) + \cos D \cdot y(N) \end{array} \right.$$

et inversement :

$$(254) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad x(N) = \cos D \cdot x(M) - \sin D \cdot y(M) \\ (b) \quad y(N) = \sin D \cdot x(M) + \cos D \cdot y(M) \end{array} \right.$$

La pression extérieure étant supposée nulle, on aura :

$$(255) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p(M)}{\sigma} = C - [C - y(N)]. \\ \left[\frac{x^2 + y^2}{(D \cos D \cdot x + D \sin D \cdot y)^2 + (D \sin D \cdot x - D \cos D \cdot y)^2} + \sin D \cdot x - \cos D \cdot y \right] \end{array} \right.$$

d'après les formules (253). Or, la condition $V(N) dV(N) = -g dy(N)$ nous permet d'obtenir l'expression des dérivées successives $\frac{d^n x}{d\varphi^n}$, $\frac{d^n y}{d\varphi^n}$ et, par suite, l'expression $p(M)$ en fonction des éléments géométriques du profil libre. La condition $p(M) > 0$ se traduira donc par une certaine relation entre ces éléments. Désignons par R le rayon de courbure de L au point N et par R_1, R_2, \dots les rayons de courbure des développées successives aux points correspondants. On a :

$$(256) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{(1)} = \frac{q}{V(N)} \cdot \cos \theta(N) \\ y^{(1)} = \frac{q}{V(N)} \sin \theta(N) \\ x^{(2)} = \frac{q^2}{V(N)^2} \left[-\frac{\sin \theta(N)}{R(N)} + \frac{g}{V(N)^2} \sin \theta(N) \cos \theta(N) \right] \\ y^{(2)} = \frac{q^2}{V(N)^2} \left[\frac{\cos \theta(N)}{R(N)} + \frac{g}{V(N)^2} \sin^2 \theta(N) \right] \\ x^{(3)} = \frac{q^3}{V(N)^3} \left[\frac{R_1 \sin \theta}{R^3} - \frac{\cos \theta}{R^2} + \frac{g}{RV^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{4g^2}{V^4} \sin^2 \theta \cos \theta \right] \\ y^{(3)} = \frac{q^3}{V^3} \left[-\frac{R_1 \cos \theta}{R^3} - \frac{\sin \theta}{R^2} + \frac{4g}{RV^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{4g^2}{V^4} \sin^3 \theta \right]. \end{array} \right.$$

(1) Nous employons dans ce qui suit une notation classique du calcul fonctionnel : étant données une fonction $F(\varphi)$ et une série entière $P(D) = \sum C_n D^n$ on désigne par $P(D)$ la fonction de φ obtenue en remplaçant dans le développement précédent le terme D_n par la dérivée $\frac{dnf}{d\varphi^n}$ (à condition, bien entendu, que le développement ainsi obtenu soit convergent).

Les dérivées d'ordre n contiennent le facteur $\frac{q^n}{V^n}$. Par suite, si la profondeur de la couche liquide en amont est suffisamment petite, elles tendent rapidement vers zéro et on pourra se borner pour le calcul effectif de la pression par la formule (255) à un petit nombre de termes. Considérons H comme une quantité de premier ordre et négligeons les puissances d'ordre supérieur à 4. On a à ce degré d'approximation :

$$(257) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin D = D - \frac{D^3}{6} \\ \cos D = 1 - \frac{D^2}{2} \end{array} \right.$$

et, par suite :

$$(258) \quad \frac{ds(M)^2}{d\varphi^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

où le coefficient a_n est d'ordre n et où les premiers termes sont définis par :

$$(259) \quad \begin{aligned} a_2 &= x'^2 + y'^2 = \frac{q^2}{V(N)^2} \\ a_3 &= 2(x' y'' - y' x'') = 2 \frac{q^3}{R(N) V(N)^3} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_4 = x''^2 + y''^2 - x^{(4)} x^{(3)} - y^{(4)} y^{(3)} = 2(x''^2 + y''^2) - \frac{a_2'}{2} \\ \quad = \frac{q^4}{V^4} \left[\frac{2}{R^2} - \frac{g \cos \theta}{RV^2} - \frac{3g^2 \sin^2 \theta}{V^4} \right] \\ a_5 = x^{(2)} y^{(3)} - y^{(2)} x^{(3)} - \frac{x^{(4)} y^{(3)}}{3} + \frac{y^{(4)} x^{(3)}}{3} \\ \quad = \frac{q^5}{V^5} \left[\frac{R_2}{R^4} - \frac{3R_1^2}{R^3} + \frac{4}{R^3} - \frac{7g \cos \theta}{R^2 V^2} + \frac{3g R_1 \sin \theta}{R^3 V^2} - \frac{22g^2 \sin^2 \theta}{RV^4} \right] \end{array} \right. \end{aligned}$$

d'où résulte pour $p(M)$ l'expression :

$$(260) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p(M)}{\sigma} = [c - y(N)] \left[\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_2} - \frac{a_3^2}{a_2^2} + \frac{a_5}{a_2} - \frac{2a_3 a_4}{a_2^2} + \frac{a_3^3}{a_2^3} \right] \\ \quad + \left[x^{(4)} + \frac{y^{(2)'}}{2} - \frac{x^{(3)'}}{6} \right]. \end{array} \right.$$

On obtient ainsi $p(M)$ en fonction des éléments géométriques de L sous la forme :

$$(261) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p(M)}{\sigma} = \frac{q \cos \theta(N)}{R(N) V(N)} \left[\frac{2(c-y)}{\cos \theta} + R \right] \\ \quad - \frac{q^2}{V(N)^2} \left[\frac{2}{R^2} (c-y) + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{c-y} \right] + \frac{q^3}{V^3} \left[(c-y) \left(\frac{R_2}{3R^4} - \frac{R_1^2}{R^3} + \frac{4}{3R^3} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{\cos \theta}{R^2} + \frac{R_1 \sin \theta}{3R^3} + \frac{18 \sin^2 \theta - 1}{12R(c-y)} - \frac{1}{6} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{(c-y)^2} \right]. \end{array} \right.$$

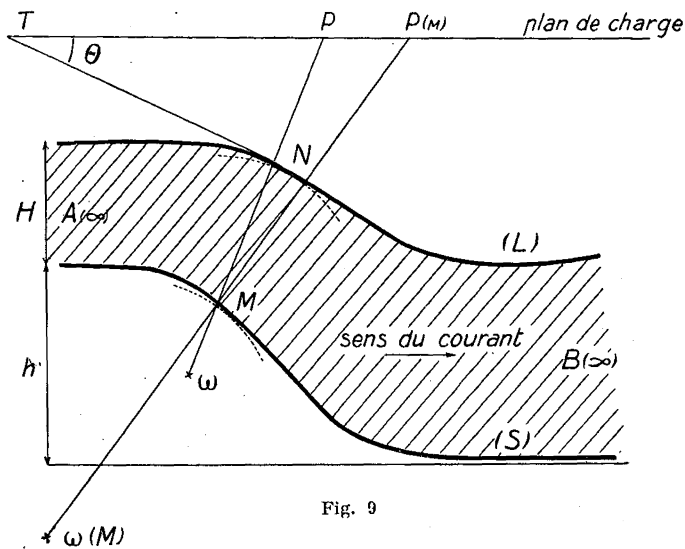
Il est facile d'étudier les différents termes de la formule et de voir par suite dans quel cas l'approximation faite est légitime.

Désignons par ω le centre de courbure de L au point N par P et par T les points où la normale et la tangente rencontrent le plan de charge $y=c$.

La normale étant orientée, comme il a été dit, le premier terme s'écrit :

$$(262) \quad \frac{q \cos \theta}{RV} \left[2 \vec{NP} + \vec{N\omega} \right].$$

On voit donc que le minimum de p sera atteint en un point de S, tel que la ligne équipotentielle passant par ce point rencontre le profil libre sur sa partie concave vers le fluide. Le deuxième terme étant toujours négatif, il est



nécessaire que le premier terme soit positif. Nous trouvons ainsi au degré d'approximation indiqué une propriété géométrique remarquable du profil libre : *En tous les points de ce profil où la convexité est tournée vers l'atmosphère extérieure, le rayon de courbure est supérieur au double du segment de normale compris entre le point d'impact et le plan de charge.*

Si le débit est tel que l'on puisse négliger les puissances de H supérieures à la première, cette condition doit être vérifiée par la paroi solide (S) pour que le mouvement se produise sans que le fluide quitte cette paroi. En se limitant par exemple aux deux premiers termes du développement, on obtient :

$$(263) \quad \sqrt{C - y(N)} = \sqrt{C - y(M)} - \frac{\sqrt{2g}}{2V^2} q \cos \theta$$

$$(264) \quad \cos \theta(N) = \cos \theta(M) - \frac{g}{V^3} q \sin^2 \theta$$

$$(265) \quad \frac{1}{R(N)} = \frac{1}{R(M)} + \frac{q}{V} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{g \cos \theta}{RV^2} + \frac{3g^2 \sin^2 \theta}{V^4} \right]$$

et, tous calculs faits, il vient :

$$(266) \quad \frac{p(M)}{\sigma} = \frac{\cos \theta(M)}{R(M) \cdot \sqrt{2g[C - y(M)]}} \left| 2 \vec{MP}_M + \vec{M\omega}_M \right| + \frac{q^2}{4g \overline{MT}^2}.$$

Cette formule donne au degré d'approximation indiqué la valeur de la pression aux différents points du profil solide (S) qui limite inférieurement le domaine fluide.

CHAPITRE VII

ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER : ÉCOULEMENT DANS UN CANAL PRÉSENTANT UNE BRUSQUE DÉNIVELLATION

Afin de donner une application des considérations qui précèdent, nous allons étudier le mouvement du fluide dans un canal dont le fond est horizontal

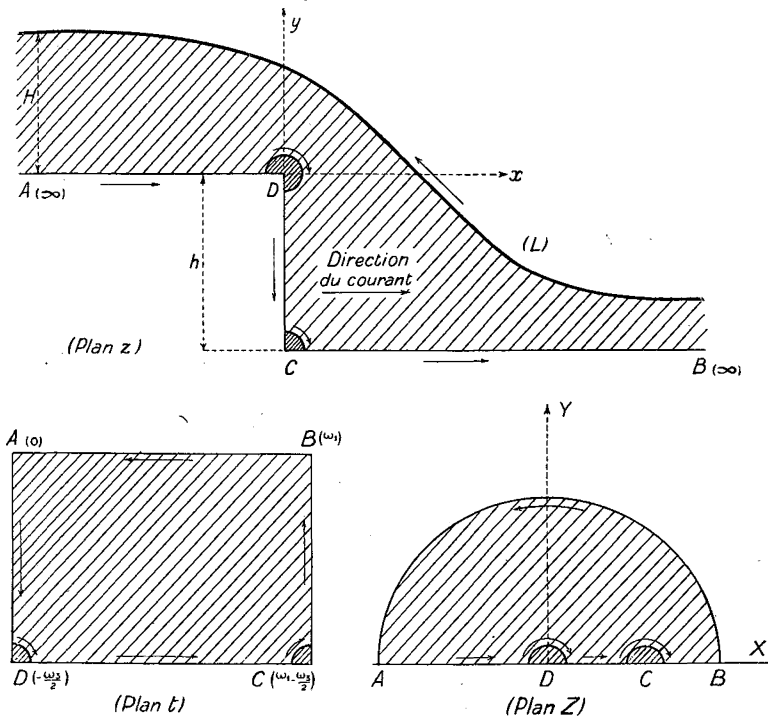


Fig. 10

en amont et en aval, mais présente en un certain point D une brusque dénivellation h . La fonction $\theta(X)$ est alors une fonction discontinue de X , définie par :

$$(267) \quad \theta(X) = \begin{cases} 0 & -1 < X < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & 0 < X < c \\ 0 & c < X < +1. \end{cases}$$

Les domaines D des plans z et Z se correspondent comme l'indique la figure 10. La constante c est l'arbitraire du problème.

29. Étude de la première approximation.

On voit sans peine que dans ces conditions la fonction $\omega_1(Z)$ définie par les conditions aux limites (200) a pour expression :

$$(268) \quad \omega_1 = \frac{i}{2} \log \frac{Z - c}{Z(1 - cZ)}$$

où le logarithme a sa détermination principale. Le mouvement M_1 est alors défini par la relation :

$$(269) \quad dz_1 = \frac{4H}{\pi} e^{i\omega_1(Z)} \frac{dZ}{1 - Z^2}.$$

La fonction $\omega_1(Z)$ est une fonction de Z , holomorphe dans le domaine (D) dont on a isolé les points D et C qui correspondent aux points anguleux de la paroi. D'après la formule (269), la dénivellation h du fond est définie en fonction de c par l'intégrale :

$$(270) \quad h_1 = 4 \frac{Hc}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{u(1 - c^2u)}{1 - u}} \cdot \frac{du}{1 - c^2u^2}.$$

Cette intégrale a une valeur finie pour toutes les valeurs de c comprises entre 0 et un. Pour $c = 0$ l'intégrale est nulle. Elle est infinie pour $c = 1$, car la fonction sous le signe \int présente dans ce cas limite une discontinuité polaire.

D'autre part, la fonction $\frac{c\sqrt{1 - c^2u}}{1 - c^2u^2}$ est une fonction croissante de c pour toutes les valeurs (constantes) de u . Il en résulte qu'il existe une valeur de c et une seule pour laquelle le rapport $\left(\frac{h}{H}\right)_1$ a une valeur donnée. Nous préciserons la correspondance qui existe entre c et la valeur de $\left(\frac{h}{H}\right)$ en intégrant la relation (269) qui détermine le mouvement. A cet effet, nous poserons :

$$(271) \quad e_1 = \frac{2 - c^2}{3c^2}$$

$$(272) \quad e_2 = \frac{2c^2 - 1}{3c^2}$$

$$(273) \quad e_3 = -\frac{c^2 + 1}{3c^2}$$

et nous considérerons les fonctions elliptiques qui correspondent aux invariants :

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$$

$$g_3 = 4e_1e_2e_3.$$

Le module de ces fonctions étant défini par la relation $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ est précisément égal au nombre c ; les constantes e_2 et e_3 satisfont, d'autre part, à la relation :

$$(274) \quad e_2 - e_3 = 1.$$

Il résulte de là que la donnée du paramètre c est équivalente à la donnée de rapport τ des périodes. Si l'on choisit arbitrairement le nombre τ , les périodes sont définies par les relations :

$$(275) \quad q = e^{-\pi i}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \theta_2^2(0) = 2\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}$$

et le module c par :

$$(276) \quad \omega_3 = \tau \omega_1$$

$$c = \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)} = 4q^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n})}{\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1})} \right]^4.$$

On sait que le module de la fonction $p\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right) - e_3$ est constant pour les valeurs réelles de u et qu'il est égal à : $k(e_1 - e_3)$ soit $\frac{1}{c}$; la relation :

$$(277) \quad Z = c [pu - e_3]$$

établit donc une correspondance biunivoque entre le domaine D et le rectangle du plan auxiliaire u dont les sommets ont pour affixes :

$$(A) : a = 0 - \frac{\omega_3}{2} \quad (B) : b = \omega_1 - \frac{\omega_3}{2} \quad (C) : c = \omega_1 - \omega_3 \quad (D) : d = -\omega_3$$

z_1 est une fonction de u holomorphe dans le domaine ainsi défini où elle se trouve déterminée par la relation différentielle (1) :

$$(278) \quad dz_1 = -\frac{8iH}{\pi} \left[\frac{pu - e_3}{pu - pa} \cdot \frac{pu - e_1}{pu - pb} \right] du.$$

En décomposant la fonction à intégrer en éléments simples et en tenant compte des égalités :

$$(279) \quad pa = e_3 - \frac{1}{c}$$

$$(280) \quad p'a = 2i \frac{c+1}{c^2}$$

$$(281) \quad pb = e_3 + \frac{1}{c}$$

$$(282) \quad p'b = 2i \frac{c-1}{c^2}$$

(1) Comme nous l'avons déjà remarqué, cette étude correspond au cas où l'effet des forces de pesanteur est sans influence sensible sur le mouvement. Dans une note des *Rendiconti dei Lincei* (t. 22, 9, p. 580). M. Cisotti a étudié le cas où le rapport $\frac{h}{H}$ est infiniment petit. Cf. *Correnti rapida con brusco salto al fundo*.

on peut écrire dz_1 sous la forme :

$$(283) \quad dz_1 = -\frac{8iH}{\pi} \left[1 + \frac{i}{4} \frac{p'a}{pu - pa} - \frac{i}{4} \frac{p'b}{pu - pb} \right].$$

L'intégration est alors immédiate. Si l'on remarque que $\zeta b - \zeta a = \eta_1 - i$ et si l'on adopte relativement aux log les conventions classiques (T. M., chapitre VI), on obtient finalement :

$$(284) \quad \begin{aligned} & \left[t = u + \frac{\omega_3}{2} \right] \\ z &= z_0 - \frac{4iH}{\pi} t - \frac{2H}{\pi} \log \xi_{10} t \cdot \xi_{32} (t) \end{aligned}$$

L'origine du plan z étant placée au point D, la constante z_0 a pour valeur :

$$(285) \quad z_0 = -\frac{2iH}{\pi} \omega_3 - \frac{2H}{\pi} \log c + iH.$$

Ces formules permettent de faire l'étude complète du mouvement qui se trouve ainsi déterminé par la donnée des nombres c ou τ . En particulier, le profil L est déterminé par les équations paramétriques :

$$(286) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{H}{\pi} \left[\log \frac{1 - cn u}{1 + cn u} - 2i \omega_3 \right] \\ y &= H \left[1 - \frac{2}{\pi} cu \right]. \end{aligned} \right.$$

Soit K la quantité de Jacobi $K = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}$.

Le paramètre u variant de 0 à $2K$, x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et y décroît de H à $H - h$. L'inclinaison maxima du profil libre est égale à $\gamma = \arcsin c$ et ce profil a bien l'allure générale indiquée au chapitre IV. Il admet un centre de symétrie (correspondant à la valeur K du paramètre), dont les coordonnées sont :

$$(287) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2iH}{\pi} \omega_3 \\ & H - \frac{h}{2}. \end{aligned} \right.$$

Sur S la formule (284) établit une relation entre la profondeur en amont la dénivellation h et la constante c . Cette relation prend la forme très simple :

$$(288) \quad h = \frac{4H}{\pi} \omega_1.$$

mais on a :

$$2 \omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}} = 2c K(c) = \pi c \lambda (c^2)$$

et, par suite, en posant :

$$(289) \quad \frac{h}{2H} = m$$

on obtient la condition :

$$(290) \quad c \lambda (c^2) = m.$$

La fonction $\lambda (c^2)$ est une fonction classique dans la théorie de l'inversion des fonctions elliptiques. Son développement en série entière en c valable pour $|c| < 1$ est de la forme :

$$\lambda (c^2) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 c^{2n}.$$

Rappelons à ce sujet une formule qui nous sera utile dans un instant à savoir la formule (T. M. CXX. 3) :

$$\lambda (c^2) = 1 - \frac{1}{\pi} \text{Log} (1 - c^2) - \varepsilon (c^2)$$

où $\varepsilon (c^2)$ représente une série entière en c^2 dont les coefficients sont tous positifs et dont la somme est inférieure à $\frac{c^2}{5}$.

Pratiquement, on connaît la paroi (S) et, par suite, la valeur de m . On calculera donc la valeur de c au moyen de l'équation (290) qui admet une solution et une seule. c étant ainsi déterminé, on calculera le nombre q au moyen des développements classiques tels que le suivant :

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt[4]{1 - c^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - c^2}} + 2 \left[\frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt[4]{1 - c^2}}{1 + \sqrt[4]{1 + c^2}} \right]^5 + \dots$$

Les formules (271) à (275) déterminent alors les périodes et les invariants et nous avons ainsi tous les éléments nécessaires au calcul des diverses fonctions trouvées.

Le mouvement M_1 est ainsi défini par la donnée de la paroi. Considérons par exemple le cas de M. CISOTTI où le nombre m est petit. c est alors également petit, et on a au quatrième ordre près (T. M. CXXII) :

$$(292) \quad c = m - \frac{m^3}{4}$$

$$(293) \quad \log q = \log \frac{m^2}{16} + \frac{m^2}{2}$$

$$(294) \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} m$$

$$(295) \quad i\omega_3 = \frac{m}{2} \left[\log \frac{m^2}{16} + \frac{m^2}{2} \right]$$

Les coordonnées du centre de symétrie du profil libre sont alors :

$$(296) \quad \left\{ \begin{array}{l} -m \frac{H}{\pi} \left[\log \frac{m^2}{16} + \frac{m^2}{2} \right] \\ H [1 - m] \end{array} \right.$$

et les équations paramétriques de ce profil supposé rapporté à deux axes passant par ce point deviennent au degré d'approximation indiqué :

$$(297) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2H}{\pi} \left[\text{Log tg } u + \frac{m^2}{4} \cos 2u \right] \\ y = \frac{4H}{\pi} mu. \end{array} \right.$$

En se limitant au premier terme, on retrouve les formules données par M. CISORTI dans le mémoire déjà cité.

Supposons, au contraire, que la dénivellation h soit très grande par rapport à la profondeur de la couche liquide, c est alors voisin de un. Si l'on pose $c_0^2 = 1 - c^2$ et si l'on néglige les puissances de c_0 supérieures à la quatrième on a :

$$(298) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{2} \log \frac{16}{c_0^2} - \frac{c_0^2}{8} \text{Log} \frac{16}{c_0^2} - \frac{c_0^2}{4} \\ \omega_3 = \frac{i\pi}{2} \left(1 - \frac{c_0^2}{4} \right) \end{array} \right.$$

Les coordonnées du centre de symétrie de L sont dans ce cas :

$$(299) \quad \left\{ \begin{array}{l} H \left[1 - \frac{c_0^2}{4} \right] \\ H [1 - m] = H \left[1 - \frac{2}{\pi} \omega_1 \right] \end{array} \right.$$

et les équations du profil libre deviennent :

$$(300) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = H \left[1 - \frac{c_0^2}{4} + \frac{2}{\pi} \log \text{th } u + \frac{1}{\pi} \log \frac{1 + \frac{c_0^2}{2} ch^2 u}{1 - \frac{c_0^2}{2} sh^2 u} \right] \\ y = H \left[1 - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{c_0^2}{4} \right) u \right]. \end{array} \right.$$

Cas limites. 1° $c=0$. Dans le cas où c est nul m est nul ainsi que ω_1 et le fond du canal est rectiligne. Le profil libre est également rectiligne et le mouvement obtenu est un mouvement de translation uniforme de l'ensemble de la masse fluide.

2° $c=1$. Si l'on fait $c=1$ dans les formules 300 ($c_0=0$), on trouve les équations paramétriques du profil limite L_1 sous la forme :

$$(301) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = H \left[1 + \frac{2}{\pi} \text{Log th } u \right] \\ y = H \left[1 - \frac{4}{\pi} u \right]. \end{array} \right.$$

Le profil ainsi obtenu est symétrique par rapport à la première bissectrice et est asymptote en aval à la verticale d'abscisse H . Le mouvement correspondant ne fait pas partie des mouvements que nous étudions dans ce travail parce que dans ce cas limite la partie horizontale qui constituait le fond du canal en aval a disparu. Dans le mouvement théorique M , la vitesse du fluide deviendra donc infiniment grande aux grandes distances en aval et au point de vue physique cela se traduira par l'apparition d'un mouvement discontinu complexe auquel les équations du mouvement permanent irrotationnel ne sont plus applicables. Quoiqu'il en soit, il n'y a aucune difficulté analytique dans l'étude du mouvement M_1 correspondant à la valeur limite $c=1$.

30. Étude de la deuxième approximation.

Effet des forces de pesanteur.

La deuxième approximation correspond au cas où l'on néglige les puissances de $\mu = \frac{2g}{\pi} \frac{H}{V^2}$ supérieures à la première. Elle permet de se rendre compte de l'influence des forces de pesanteur, dans ses effets du premier ordre.

Introduisons les fonctions elliptiques de module $\lambda = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$. Ces fonctions se déduisent par la transformation de GAUSS, des fonctions que nous avons considérées jusqu'à présent de telle sorte qu'elles peuvent être considérées comme construites à partir des périodes $2\omega_1$ et ω_3 . Adoptons les notations de JACOBI en posant : $amu = \int_0^u dnu \, du$ (T. M. CII-6) et effectuons le changement de variables défini par la relation :

$$(302) \quad s = \pi - 2am \left[\frac{1+c}{2} v | \lambda \right].$$

Quand s croît de zéro à π , v décroît de $2K$ à 0 et :

$$\sin s = 2 \operatorname{sn} \left(\frac{1+c}{2} v | \lambda \right) \operatorname{cn} \left(\frac{1+c}{2} v | \lambda \right).$$

de telle sorte que l'on a :

$$(303) \quad \frac{ds}{\sin s} = - \frac{1+c}{2} \frac{dn \left(\frac{1+c}{2} v | \lambda \right) dv}{2 \operatorname{sn} \left(\frac{1+c}{2} v | \lambda \right) \operatorname{cn} \left(\frac{1+c}{2} v | \lambda \right)} = - \frac{dv}{\operatorname{sn}(v|c)}.$$

La fonction $f_1(s)$ étant définie par :

$$(304) \quad \sin f_1 = - \frac{c \sin s}{\sqrt{1 + c^2 - 2c \cos s}}$$

on a :

$$(305) \quad \sin f_1 = -c \operatorname{sn}(v|c)$$

et enfin : $\cos f_1 = dn v$ et $306 g_2(v) = \mu cv$.

Quand le point N décrit le profil L d'amont en aval, la vitesse croît depuis la valeur $V(A)$ jusqu'à $V(B) = V(A) e^{2\mu cK} = V(A) e^{2\mu a}$. Si l'on fait dans les formules (210) le même changement de variables sur u et sur s , on obtient l'expression de $f_2(v)$ sous la forme :

$$(307) \quad f_2(v) = f_1(v) + \frac{\mu c}{\pi} \int_0^{2K} \operatorname{Log} \left| \frac{\operatorname{sn} \left(\frac{u-v}{2} | c \right)}{\operatorname{sn} \left(\frac{u+v}{2} | c \right)} \right| du$$

$$(308) \quad f_2(v) = f_1(v) + \frac{\mu c}{\pi} \int_0^v \operatorname{Log} \left| \frac{1 - cn u}{1 + cn u} \right| du = f_1(v) + \frac{\mu c}{\pi} \varphi_1(v).$$

La fonction $\varphi_1(v) = \int_0^v \operatorname{Log} \left| \frac{1 - cn u}{1 + cn u} \right| du$ est une fonction de v définie et continue dans l'intervalle $0, 2K$. Elle est nulle pour $v=0$ décroissante dans l'intervalle $0, K$ et croissante dans l'intervalle $K, 2K$. Elle satisfait d'ailleurs à la condition $\varphi_1(v) = \varphi_1(2K - v)$ et le minimum $\varphi_2(K)$ peut être facilement calculé en utilisant les développements classiques des fonctions $\operatorname{Log} \operatorname{sn} u$, $\operatorname{Log} cn u$ et $\operatorname{Log} dn u$ en séries trigonométriques (T. M. CV).

Calcul de c . Posons : $\alpha(X, t) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1+X}{1-X} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right]$. Au point M de S la fonction g_2 a pour valeur :

$$(309) \quad g_2(X) = g_1(X) - \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin f_1(t)}{\sin t} \alpha(X, t) dt.$$

Il en résulte que la dénivellation h correspondant à une valeur donnée de c est définie par :

$$(310) \quad h_2(c) = \int_0^1 e^{M(u,c)} dh_1$$

où la notation $M(u, c)$ désigne l'intégrale :

$$(311) \quad M(u, c) = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin f_1(t)}{\sin t} \alpha(cu, t) dt$$

mais, $g_2(\pi)$ et $\alpha(0)$ sont nuls. En intégrant par parties, on obtient donc :

$$(312) \quad M(u, c) = - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_2 \cdot d\alpha$$

et après un calcul simple, il vient :

$$(313) \quad M(u, c) = -\frac{4\mu c}{\pi} \cdot \frac{1 - c^2 u^2}{1 + c} \int_0^{\lambda} t \frac{dn(t|\lambda) dt}{(1 + cu)^2 - 4cu \operatorname{sn}^2(t|\lambda)}$$

Cette dernière expression permet de faire simplement l'étude de la fonction pour les différentes valeurs de u et de c . Nous remarquerons, en particulier, que contrairement à ce qui se passait dans le cas de la première approximation, la fonction $\left(\frac{h}{H}\right)_2$ a une valeur *finie* pour toutes les valeurs de c comprises dans l'intervalle $0,1$ *limites comprises*. En effet, dans le cas limite $c=1$, la fonction $\frac{dh_1}{du}$ est infinie pour $u=1$ comme $\frac{1}{1-u}$ mais, par contre, l'exponentielle est nulle et le produit des deux fonctions est intégrable. Il en résulte que pour cette deuxième approximation la détermination de c par la donnée du rapport $\left(\frac{h}{H}\right)$ ne sera plus possible si ce dernier rapport dépasse une certaine limite. Pour évaluer rapidement l'ordre de grandeur de cette limite nous remarquerons que dans le cas limite où c est égal à un, la fonction $M(u, c)$ se réduit à :

$$(314) \quad M(u, 1) = -\frac{2\mu}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}}$$

avec :

$$(315) \quad m^2 = \frac{4u}{(1+u)^2}$$

$\frac{t}{\sin t}$ étant borné dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$ $\left[1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$(316) \quad -\mu X(m^2) < M(u, 1) < -\frac{2\mu}{\pi} X(m^2)$$

où $X(m^2)$ désigne l'intégrale de LEGENDRE :

$$X(m^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}}$$

mais on sait que :

$$X(m^2) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Log}(1 - m^2) - \varepsilon(m^2)\right]$$

$\varepsilon(m^2)$ étant une série entière en m^2 à coefficients positifs dont la somme est inférieure à $\frac{m^2}{5}$ On a donc :

$$(317) \quad -\mu \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Log} \frac{1-u}{1+u}\right] < M(u, 1) < -\mu \left[1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1-u}{1+u} - \frac{4}{5} \frac{u}{(1+u)^2}\right].$$

D'où résulte pour h_2 les deux limites :

$$(318) \quad 2 H \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}} B\left(\mu, \frac{3}{2}\right)$$

$$(319) \quad \frac{4 H}{\pi} e^{-\frac{4\mu}{5}} B\left(\frac{2\mu}{\pi}, \frac{3}{2}\right)$$

où la notation $B(p, q)$ désigne selon l'usage l'intégrale Eulérienne de première espèce. Dans le cas où μ est petit, $B\left(\mu, \frac{3}{2}\right)$ a pour expression asymptotique $\frac{1}{\mu}$ et $\left(\frac{h}{H}\right)_2$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\mu}$.

c étant déterminé, comme il a été dit, dans le cas où le rapport $\frac{h}{H}$ satisfait aux conditions voulues, le mouvement sera déterminé par les formules générales du chapitre IV. En particulier, les équations paramétriques du profil libre L_2 seront définies par :

$$(320) \quad \begin{cases} dx = \frac{2 H}{\pi} e^{-\mu cv} \cos \left[f_1 + \frac{\mu c}{\pi} \varphi_1(v) \right] \frac{dv}{sn v} \\ dy = \frac{2 H}{\pi} e^{-\mu cv} \sin \left[f_1 + \frac{\mu c}{\pi} \varphi_1(v) \right] \frac{dv}{sn v} \end{cases}$$

et la vitesse au point $N(v)$ de ce profil sera :

$$(321) \quad V(N) = V(A) e^{\mu cv}.$$

Les équations (320) permettent de faire l'étude complète de L_2 et de se

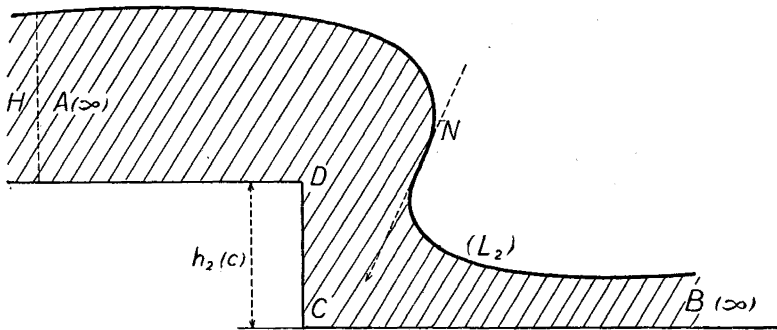


Fig. 11

rendre compte de l'effet des forces de pesanteur sur les mouvements de ce genre. L'inclinaison du profil libre sur l'horizontale croît d'abord (en valeur absolue) jusqu'à la valeur : $\gamma + \frac{\mu c}{\pi} |\varphi(K)|$ pour décroître ensuite jusqu'à zéro (infini aval). Le maximum peut donc être pour certaines valeurs de c et de μ , supérieur à $\frac{\pi}{2}$. La symétrie constatée dans le cas de la première approximation

ne subsiste plus et le point d'inflexion du profil libre est plus rapproché du niveau limite amont que du niveau limite aval. En négligeant dans les formules (320) les termes en μ^2 , on obtient :

$$(322) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{H}{\pi} \left[\varphi_1''(v) - \mu \left(cv \varphi_1'' + \frac{2c^2}{\pi} \varphi_1 \right) \right] dv \\ dy = \frac{H}{\pi} \left[-2c + \mu \left(2c^2 v + \frac{c}{\pi} \varphi_1 \varphi_1'' \right) \right] dv. \end{array} \right.$$

Les équations du profil libre L_2 qui correspond au mouvement M_2 sont donc :

$$(323) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{H}{\pi} \left[\varphi_1'(v) - \mu \left(cv \varphi_1' - c \varphi_1 + \frac{2c^2}{\pi} \int_K^v \varphi dv \right) - \mu c \varphi(K) \right] \\ y = \frac{H}{\pi} \left[2c(K - v) + \mu \left(c^2(v^2 - K^2) + \frac{c}{\pi} \varphi_1 \varphi_1' - \frac{c}{\pi} \int_K^v \varphi^2(v) dv \right) \right] \end{array} \right.$$

l'origine des axes étant au point d'inflexion de ce profil.

Cas de M. CISOTTI : c est petit. μ ayant une valeur quelconque, bornons-nous aux termes du premier degré en c . Le rapport $\frac{h}{2H} = m$ est défini par $m = c$ comme dans le cas de la première approximation. K est égal à $\frac{\pi}{2}$. v varie de 0 à π et la fonction $\varphi_1(v)$ se réduit à : $2 \int_0^v \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} dv$. Le profil libre est alors déterminé par les équations paramétriques :

$$(324) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2H}{\pi} \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{2ghH}{\pi^2 V^2} \left[v \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^v \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} dv \right] \\ y = \frac{h}{2\pi} (\pi - 2v) + \frac{4ghH}{\pi^3 V^2} \left[\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \int_0^v \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} dv - \int_{\frac{\pi}{2}}^v \left(\log \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^2 dv \right]. \end{array} \right.$$

En particulier, la dénivellation de ce profil d'amont en aval est :

$$(325) \quad y(\pi) - y(0) = \frac{H}{\pi} \left[-2c\pi - \frac{4\mu c}{\pi} \int_0^\pi \left(\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^2 dv \right].$$

Si l'on pose $\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} = x$, on est conduit au calcul de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \left(\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^2 dv = \int_{-\infty}^0 \frac{4x^2 e^x dx}{1 + e^{2x}} = 4 \int_{-\infty}^0 \Sigma (-1)^{n+1} x^2 e^{(2n-1)x} dx.$$

Il est permis d'intégrer terme à terme. On trouve ainsi :

$$(326) \quad \int_0^\pi \left(\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^2 dv = 8 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

Si l'on considère, d'autre part, le développement de la fonction $s^2 - \frac{\pi^2}{2}$ en série trigonométrique dans l'intervalle $0, \pi$, on a :

$$\begin{aligned} s^2 - \frac{\pi^2}{2} &= \sum_1^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(u^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) \sin nu \sin ns \, du \\ &= \frac{8}{\pi} \sin s + \frac{\pi}{2} \sin 2s + \frac{8}{\pi \cdot 3^3} \sin 3s + \frac{\pi}{4} \sin 4s + \dots \end{aligned}$$

Pour $s = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\frac{8}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^2}{4}$$

et, par suite :

$$\int_0^{\pi} \left(\text{Log tg } \frac{v}{2}\right)^2 \, dv = \frac{\pi^3}{4}.$$

De là résulte l'expression de $y(0) - y(\pi)$ sous la forme :

$$(327) \quad y(0) - y(\pi) = h + H(A) - H(B) = 2cH \left[1 + \frac{gH}{V^2}\right].$$

On retrouve ainsi le résultat (240) :

$$\frac{H(B) - H(A)}{H(A)} = -\frac{gh}{V^2}.$$

Cas où c est voisin de un. — On a, dans ce cas, en posant comme précédemment $c_0^2 = 1 - c^2$ et au degré d'approximation indiqué :

$$(328) \quad K = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{16}{c_0^2} + \frac{c_0^2}{8} \text{Log } \frac{16}{c_0^2} - \frac{c_0^2}{4}$$

et la fonction φ_1 se réduit à :

$$(329) \quad \varphi_1(v) = 2 \left(1 + \frac{c_0^2}{4}\right) \int_0^{\left(1 - \frac{c_0^2}{4}\right)v} \text{Log} \left[\frac{1 + \frac{c_0^2}{2} ch^2 v}{1 - \frac{c_0^2}{2} sh^2 v} \right] \, dv.$$

Cas limites. — Pour $c = 0$, on retrouve comme pour la première approximation le mouvement de translation uniforme du fluide dans un canal à fond rectiligne. Pour $c = 1$ ($c_0 = 0$), la fonction φ_1 prend la forme :

$$(330) \quad \varphi_1(v) = 2 \int_0^{\frac{v}{2}} \text{Log th } u \, du$$

le maximum de $f_2(v)$ a pour valeur :

$$(331) \quad \frac{\pi}{2} + \frac{2\mu}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Log } \frac{1 - e^{-2u}}{1 + e^{-2u}} \, du = \frac{\pi}{2} (1 - \mu)$$

et le profil L_2 ainsi obtenu est défini par :

$$(332) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{2H}{\pi} e^{-\mu v} \left[\cos \frac{\mu}{\pi} \varphi_1(v) + sh v \cdot \sin \frac{\mu}{\pi} \varphi_1(v) \right] \frac{dv}{sh v} \\ dy = \frac{2H}{\pi} e^{-\mu v} \left[\sin \frac{\mu}{\pi} \varphi_1(v) - sh v \cos \frac{\mu}{\pi} \varphi_1(v) \right] \frac{dv}{sh v}. \end{array} \right.$$

La configuration correspondante est donc dans le plan z celle de la figure 12. Nous avons vu que ce cas limite ne correspond à aucune réalité physique, mais la singularité analytique obtenue explique les résultats trouvés relativement à la détermination de la constante c par la donnée de la paroi.

31. Approximations successives.

Condition de convergence uniforme. Le maximum de la fonction $f_1(s)$ est égal à $\gamma = \arcsin c$. On a donc $|f_1| < \frac{\gamma}{c} |\sin f_1|$ et l'on peut prendre comme valeur de l'intégrale J_1 :

$$(333) \quad J_1 = \gamma \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{1+c^2-2c \cos s}} = \frac{2\gamma}{c} \omega_1.$$

La convergence uniforme des approximations successives sera assurée et les formules générales du chapitre IV seront applicables si μ satisfait à la condition suivante :

$$\mu < \frac{2}{\pi} e^{-m}$$

où m est défini par :

$$ch m = 1 + \frac{3}{\pi} J_1 = 1 + \frac{6\gamma}{c\pi} \omega_1.$$

L'intégrale J_1 étant définie en fonction de c par :

$$J_1 = \pi \gamma \left[1 - \frac{1}{\pi} \text{Log}(1-c^2) - \varepsilon(c^2) \right]$$

où $\varepsilon(c^2)$ est une série à coefficients positifs dont la somme est inférieure à $\frac{c^2}{5}$ on peut remplacer la condition précédente par la condition simple :

$$(334) \quad \mu < \frac{2}{\pi} (1 - \sqrt{6c} + 6c)$$

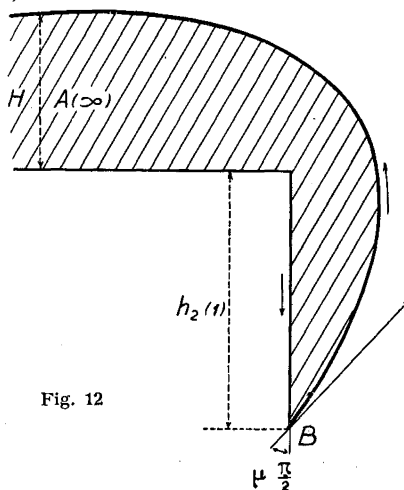


Fig. 12

ou par la condition (335) :

$$(335) \quad 6c < \left(1 - \frac{gH}{V^2}\right)^2.$$

Ces conditions correspondent, comme nous l'avons vu à propos de la fonction ω_2 , à certaines relations d'inégalité entre la vitesse moyenne du courant en amont sa profondeur et la grandeur de la dénivellation du fond.

Les fonctions $|\delta_2 f|$ et $|\delta_2 g|$ sont respectivement inférieures à $\frac{\mu c}{\pi} \varphi_1(K)$ et $2\mu c K$. On pourra donc en utilisant les formules (235) et les résultats des chapitres IV et V déterminer, comme il a été dit, la valeur que l'on doit adopter pour n . Si la valeur ainsi trouvée est supérieure à 2, on pourra étudier comme nous l'avons fait pour les deux premières approximations les différents mouvements obtenus, au double point de vue de la détermination de c par la connaissance de la paroi et de la détermination du profil libre L. Pour effectuer le calcul du rapport $\left(\frac{h}{H}\right)_n$ qui correspond à l'approximation de rang n , il suffira de remplacer la fonction M définie par la formule (311) par l'intégrale :

$$(336) \quad \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\pi e^{-3gn-1} \frac{\sin f_{n-1}(u)}{\sin u} \cdot \alpha du = - \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\pi g_n d\alpha.$$

Pour une valeur donnée de c , la valeur du rapport $\left(\frac{h}{H}\right)_n$ sera inférieure à la valeur correspondante du rapport $\left(\frac{h}{H}\right)_1$ relatif à la première approximation. Il en résulte que les diverses conditions obtenues au début de ce paragraphe entraînent la condition (337) qui montre leur rapport avec les constantes physiques du mouvement :

$$(337) \quad \frac{3h}{H} < \left(1 - \frac{gH}{V^2}\right)^2.$$

Comme dans le cas où $n=1$ et 2, le cas limite $c=0$ correspond au mouvement de translation uniforme dans un canal à fond rectiligne. Etudions, au point de vue purement analytique, les configurations obtenues dans le cas limite où c est égal à 1. Pour une détermination convenable des logarithmes dans le domaine D (Z), la fonction :

$$(338) \quad \Omega_2(Z) = \omega_2(Z) + i\mu \text{Log}(1-Z) + \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \text{Log} Z - i\mu \text{Log} 2$$

est une fonction de Z définie dans D, imaginaire pure sur l'axe réel et la partie imaginaire de cette fonction sur la demi-circonférence L a pour expression :

$$g(s) = 2\mu \text{Log} \cos \frac{s}{4}.$$

La fonction $g(s)$ varie de façon continue quand le point N se déplace sur L de B en A. On peut donc dans le demi-cercle (D) représenter la fonction $\Omega_2(Z)$ par l'intégrale :

$$(339) \quad \frac{2\mu i}{\pi} (1-Z^2) \int_0^\pi \frac{\text{Log} \cos \frac{s}{4}}{1-2Z \cos s + Z^2} ds.$$

Cette intégrale a une valeur parfaitement déterminée si l'on y fait $Z = 1$. La fonction considérée est donc régulière au voisinage de cette valeur de Z et on peut écrire :

$$(340) \quad \omega_2(Z) = -i\mu \operatorname{Log}(1-Z) + \frac{\pi}{2} - i\mu \log 2 + E(Z).$$

$E(Z)$ étant une fonction de Z régulière au voisinage du point B et nulle en ce point. Si l'on considère maintenant le plan z on voit que l'on a au voisinage de B :

$$(341) \quad \frac{dz}{dZ} = -\frac{iH}{\pi} 2^{1-2\mu} [1-Z]^{\mu-1} [1+\dots]$$

et la configuration obtenue est celle de la *figure* (13) (2).

La troisième approximation étant définie par la condition aux limites :

$$(342) \quad \frac{dg_3}{ds} = \mu e^{-3g_3} \frac{\sin f_2}{\sin s} = \mu \left(\operatorname{tg} \frac{s}{4}\right)^{3\mu} \frac{\sin f_2}{\sin s}$$

$g_3(s)$ reste finie dans tout l'intervalle $0, \pi$, *extrémités comprises*. La configuration limite obtenue dans le plan z sera donc analogue à celle qui a été obtenue dans

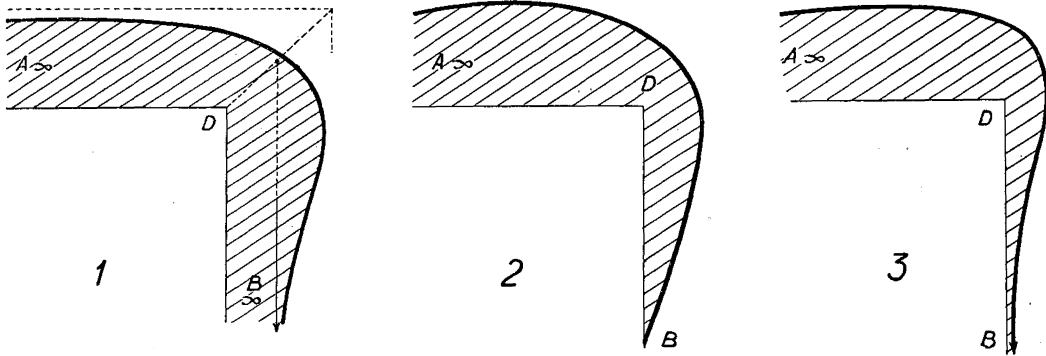


Fig. 13

le cas de $n = 1$, mais la largeur asymptotique en aval est inférieure à H . Pour l'approximation d'ordre 4, on aura de même :

$$(343) \quad \frac{dg_4}{ds} = \mu e^{-3g_3} \frac{\sin f_3}{\sin s}.$$

et comme $e^{-3g_3} \sin f_3$ reste fini pour $s = 0$, $g_4(0)$ est infinie. On obtient donc pour cette approximation des résultats analogues à ceux qui ont été obtenus dans le cas où $n = 2$, mais l'angle en B est inférieur à $\mu \frac{\pi}{2}$. Les raisonnements sont applicables aux approximations successives de rang pair et de rang impair. Au point de vue analytique, le problème limite conduirait à la configuration (3) de la *figure* (13). Les formules précédemment établies ne sont plus applicables parce que la singularité relative au point B empêche la convergence uniforme des séries dans tout l'intervalle $0, \pi$.

32. Étude de la pression.

Comme la paroi solide présente en D un point anguleux saillant vers le fluide, nous sommes dans le cas d'exception signalé au chapitre IV et le mouvement théorique étudié semble, *a priori*, physiquement impossible par suite de la présence dans le fluide d'une région comprenant le point D où la pression est négative (et même infiniment grande en valeur absolue). Il convient donc d'étudier la singularité correspondante et il suffit, comme nous l'avons vu, de faire cette étude pour le mouvement M_1 . Pour ce mouvement, la vitesse au point M (Z) a pour valeur :

$$(344) \quad V(M) = V(A) \sqrt{\left| \frac{Z - c}{Z(1 - cZ)} \right|}$$

et la pression est définie par :

$$(345) \quad p(M) = p(A) + g(H - y) + \frac{1}{2} V(A)^2 - \frac{1}{2} V(A)^2 \left| \frac{Z - c}{Z(1 - cZ)} \right|.$$

Cette fonction sera donc positive en tous les points du domaine D (Z) pour lesquels :

$$(346) \quad \left| \frac{Z - c}{Z(1 - cZ)} \right| < 2 \frac{p(A) + gH}{V(A)^2} + 1.$$

Considérons pour fixer les idées un courant animé d'une vitesse de 1 m./s. subissant d'amont en aval une dénivellation égale au dixième de sa profondeur. de telle sorte que le nombre c a pour valeur $c = \frac{1}{20}$. Prenons d'autre part :

$$H = 10 \quad g = 981 \quad p(A) = 1.033 \text{ g.}$$

Avec ces données numériques, le deuxième membre de la formule (346) a pour valeur 205 soit $\frac{c + 2}{4c^2}$. Les points Z qui satisfont à la condition 346 sont donc intérieurs à la courbe du quatrième degré :

$$c [c + 2]^2 [X^2 + Y^2]^2 - 2c [c + 2]^2 X [X^2 + Y^2] + (c + 2)^2 [X^2 + Y^2] - 16c^4 (X^2 + Y^2) + 32c^5 X - 16c^6 = 0$$

que l'on peut au huitième ordre près confondre avec le cercle :

$$(c + 2)^2 [X^2 + Y^2] + 32c^5 X - 16c^6 = 0.$$

Or, pour tous les points de ce cercle, on a : $|Z| < 2c^3$. Il en résulte que dans le plan Z la région correspondant aux points à pression négative est constituée par un domaine infiniment petit intérieur au cercle de centre D et de rayon $2c^3$. De ce domaine, nous déduirons les domaines du plan u et du plan z

au moyen des formules du mouvement. Dans le plan u , nous aurons un domaine infiniment petit intérieur à un $1/4$ de cercle de centre D et de rayon : $\frac{2c}{\sqrt{p''(-\omega_3)}}$ soit $\sqrt{2} c^2$; et dans le plan z (plan du mouvement) un domaine intérieur au cercle de rayon :

$$(347) \left\{ \begin{aligned} & 2\sqrt{2} \frac{H}{\pi} c^3 \left\{ \frac{p''' \left(-\frac{\omega_3}{2}\right)}{6} \left(\frac{1}{p \left(-\frac{\omega_3}{2}\right) - e_1} - \frac{1}{p - e_2} + \frac{1}{p - e_3} \right) \right. \\ & \quad - \frac{p' p''}{2} \left[\frac{1}{(p - e_1)^2} - \frac{1}{(p - e_2)^2} + \frac{1}{(p - e_3)^2} \right] \\ & \quad \left. + \frac{p'^3}{3} \left[\frac{1}{(p - e_1)^3} - \frac{1}{(p - e_2)^3} + \frac{1}{(p - e_3)^3} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

dont la valeur numérique est égale à :

$$\frac{\sqrt{2}}{3\pi} 10^{-3} = 1,5 \times 10^{-4} \text{ cm.}$$

On voit ainsi que si théoriquement la pression est infinie et négative au point D, elle est positive en tout point du domaine fluide distant de ce point de plus de $1,5 \times 10^{-4}$ cm. Dans le problème actuel, cette distance est tout à fait négligeable quelle que puisse être la précision des mesures (1). Une fois que nous aurons construit les lignes de courant du mouvement théorique, nous pourrons considérer l'une quelconques d'entre elles S_1 comme une paroi solide en faisant abstraction du fluide situé entre S et S_1 .

Le mouvement au-dessus de S_1 ne sera pas changé. Au voisinage de B la paroi S_1 sera pratiquement identique à la paroi S d'autant plus qu'il n'existe pas d'arête vive, et il n'y aura plus de difficulté relative à la pression.

Pour préciser la forme de la ligne de courant limite passant à $1,5 \cdot 10^{-4}$ cm. de D, nous remarquerons qu'un contour infiniment petit du plan Z de centre C et dont le module est inférieur à $2c^3$ a pour image dans le plan u un contour de module inférieur à $\frac{2c}{\sqrt{p''(-\omega_2)}}$ soit $\frac{\sqrt{2} c^2}{\sqrt{1-c^2}}$ et dans le plan du mouvement z un contour infiniment petit assimilable à un quart de cercle de centre C et de rayon

$$\frac{8H}{\pi} \frac{\sqrt{2} c^2}{\sqrt{1-c^2}} = 9 \cdot 10^{-2}.$$

(1) Cet exemple n'est pas isolé en physique mathématique. Il est à rapprocher des circonstances dans lesquelles s'établit un régime permanent à partir d'un état de repos initial. Théoriquement le temps d'établissement du régime est infini alors que le calcul effectué dans les cas normaux montre souvent qu'il se réduit en pratique à peu de chose.

D'autre part, les lignes de courant ont pour images dans le plan Z les arcs de cercles intérieurs à D et passant par les points A et B . Celle qui est tangente au cercle de centre D (Z) et de rayon $2c^3$ est inclinée sur OX en A et en B d'un angle égal à $\frac{4c^3}{1-4c^6}$. Il en résulte qu'à l'infini en amont comme en aval la ligne S_1 est distante de S d'une quantité égale à $\frac{4c^2}{\pi} = 3 \cdot 10^{-3}$ cm. Ces renseignements permettent de construire sans difficulté la ligne S_1 . L'écoulement obtenu correspond à une profondeur en amont égale à H (avec une erreur relative $< 10^{-4}$) à une dénivellation totale $h = \frac{H}{10}$ et à un brusque changement de niveau de la paroi en D . Il est donc topologiquement identique au mouvement étudié dans ce chapitre, tout en étant physiquement possible.

TROISIEME PARTIE

ÉTUDE du CAS GÉNÉRAL

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

33. Nous étudierons maintenant le problème général du mouvement d'un fluide parfait dans un plan vertical. Comme précédemment, le mouvement est irrotationnel et parvenu à un régime permanent, et le champ gravifique est supposé constant en grandeur et direction. Nous adoptons les notations de la première partie. Dans le plan z , le domaine fluide est intérieur à une bande horizontale de largeur finie et il est limité par deux lignes de courant C_1 et C_2 . Le long de ces lignes de courant, le fluide glisse sur des parois solides (S) ou bien glisse sur un fluide de même nature au repos (G), ou bien est en contact avec une atmosphère où règne une pression constante (L). Sur les parois solides nous savons comment varie l'inclinaison de la vitesse. Nous savons, d'autre part, que sur les lignes de glissement la grandeur de vitesse reste constante et que sur les lignes libres l'expression $V^2 + 2gy$ est constante.

Le domaine potentiel est constitué par une bande parallèle à l'axe réel et de largeur q et la fonction $\frac{df}{dz} = V e^{-i\theta}$ est une fonction de f (ou de z) analytique dans le domaine $D(f)$ ou $D(z)$ et que l'on doit déterminer par les conditions aux limites suivantes :

$$(348) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1) & f = \theta(\varphi) \quad \text{sur S.} \\ (2) & dV = 0 \quad \text{sur G.} \\ (3) & V^2 dV + g \sin \theta = 0 \quad \text{sur L.} \end{array} \right.$$

Si l'ensemble des parois solides, d'une part, et l'ensemble des lignes libres ou des lignes de glissement, d'autre part, divise le contour du domaine D en deux ou en quatre arcs distincts, on pourra par des transformations conformes appropriées établir une correspondance entre les domaines $D(z)$, $D(f)$ et l'intérieur d'un demi-cercle ou d'une demi-couronne circulaire d'un plan auxiliaire Z . On fera en sorte que les parois S aient leurs images sur l'axe réel du plan Z .

Les formules (348) définissent alors les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire la fonction w sur les frontières circulaires du domaine $D(Z)$. On pourra donc appliquer au problème étudier le procédé d'étude qui a été exposé dans la première ou dans la seconde partie de ce travail suivant qu'il s'agit de la représentation sur un demi-cercle ou de la représentation sur une demi-couronne circulaire. Les noyaux K (ou N) qui jouaient un rôle essentiel dans cette étude seront simplement remplacé par des noyaux de Schmidt correspondant aux noyaux symétriques étudiés. Le multiplicateur dépend des transformations utilisées et il faudra vérifier que les noyaux obtenus satisfont bien aux conditions voulues. Remarquons d'ailleurs que l'on pourrait étudier le cas général où la frontière du domaine est divisée en n arcs distincts correspondant à des conditions aux limites différentes. Il suffirait pour cela d'utiliser des formules analogues à celles qui ont été données par M. SIGNORINI (*Annali di matematica*, troisième série (25), p. 253), et par M. DEMTCHENKO (C. R. t. 190, 1930, p. 415) pour la détermination des fonctions analytiques à l'intérieur d'un cercle par diverses conditions aux limites.

On conçoit que l'on puisse ainsi étudier, comme nous l'avons fait, à quelques modifications de calcul près, un grand nombre de problèmes relatifs au mouvement permanent d'un fluide pesant dans un plan vertical. Tels sont, par exemple, l'étude du mouvement d'un solide cylindrique horizontal dans un fluide limité supérieurement par une surface libre ou encore l'étude de l'écoulement du fluide dans diverses conditions : jets fluides parallèles à un plan vertical, etc. Nous reviendrons ailleurs sur ces questions et nous nous bornerons ici à l'étude très sommaire de deux problèmes qui appartiennent à chacun des groupes signalés, problèmes dont l'étude complètera celle que nous avons faite précédemment sur l'écoulement d'un fluide dans un canal enserré entre deux quais verticaux parallèles.

CHAPITRE II

ETUDE de l'ÉCOULEMENT dans un CANAL PARTIELLEMENT RECOUVERT en AMONT

34. Supposons que l'écoulement du fluide ait lieu dans un canal partiellement recouvert en amont. Dans ce cas, la ligne de courant supérieure C_1 est divisée en deux arcs distincts : le profil libre L qui correspond à la condition 3 et la paroi solide qui recouvre le canal et qui correspond à la condition 1 (348). Sur la ligne de courant inférieure C_2 le fluide glisse sur le fond du canal qui correspond également à la condition 1. Le contour du domaine D est donc divisé en deux arcs correspondant à des conditions différentes et l'on pourra établir de la façon voulue la correspondance entre ce domaine et un demi-cercle $D(Z)$. On vérifiera sans peine qu'il suffit pour cela d'utiliser la transformation :

$$(349) \quad 1 + e^{\frac{\pi}{q}f} = \left[\frac{1 + Z}{1 - Z} \right]^2$$

Sur (L) , on a $e^{-\frac{\pi}{q}f} = \sin^2 \frac{s}{2}$. Il en résulte que la fonction

$$\omega = i \operatorname{Log} \frac{w}{V(A)}$$

est déterminée par les conditions aux limites suivantes :

$$(350) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \omega(A) = 0 \\ (b) \quad f(X, 0) = \theta(X) \\ (c) \quad 2 \operatorname{tg} \frac{s}{2} h(s) - \mu e^{-3g} \sin f(s) = 0 \end{array} \right.$$

où :

$$\mu = \frac{2g}{\pi} \frac{H}{V^2}$$

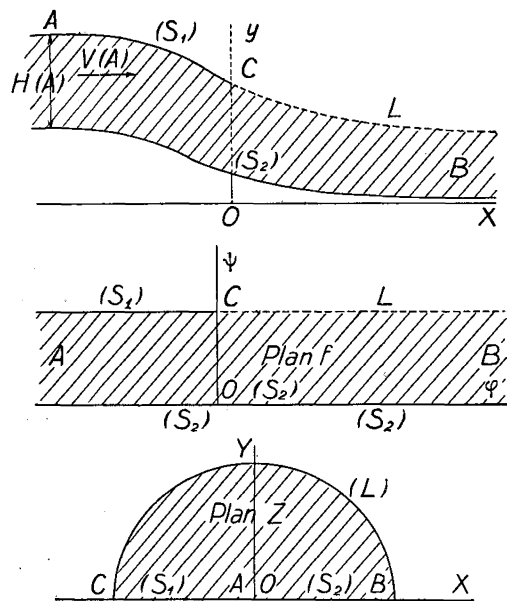


Fig. 14

D'après son interprétation physique la fonction donnée $\theta(X)$ est nulle aux points A et B ($X = \pm 1$). Le noyau K_2 qui a été étudié dans la deuxième partie est remplacé par le noyau :

$$(351) \quad K_3 = \frac{K_1(u, s)}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}.$$

Le seul point singulier du multiplicateur est le point $u = 0$ et au voisinage de ce point, il est comparable au multiplicateur $\frac{1}{\sin u}$ qui correspond au noyau $K_2(u, s)$. Il en résulte que le noyau K_3 possède bien les propriétés du noyau K_2 qui nous ont été utiles au cours des calculs. Il est positif dans tout l'intervalle $0, \pi$ et sommable dans cet intervalle. L'intégrale :

$$I_3(s) = \int_0^\pi K_3(u, s) \cdot du$$

représente la partie réelle au point e^{is} d'une fonction analytique dans D (Z) imaginaire pure sur OX et dont la dérivée normale réelle sur la demi-circonférence L est : $\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}}$. La fonction $i \operatorname{Log} \frac{1-Z}{2}$, où la détermination prise pour

le log est la détermination principale a pour partie imaginaire au point e^{is} : $\operatorname{Log} \left| \sin \frac{s}{2} \right|$. C'est donc la fonction cherchée. Il en résulte que $I_3(s) = \frac{\pi - s}{2}$ et que le maximum de l'intégrale I_3 est $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $I_2(s)$ (198).

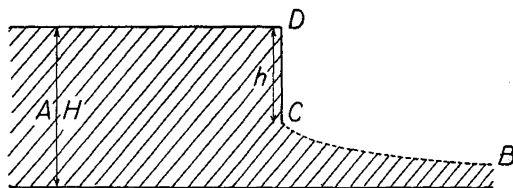


Fig. 15

On pourra donc appliquer les formules précédemment établies pour le cas de l'écoulement sur une paroi indéfinie (cas limite où S_1 se réduit à 0).

Dans certains cas particuliers où l'on connaît la forme exacte de la fonction θ , on peut obtenir l'expression explicite des approximations successives jusqu'à un rang élevé. Citons le cas simple représenté sur la figure 15, pour lequel la fonction θ est nulle en dehors d'un intervalle $-1, -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ où elle est égale à $-\frac{\pi}{2}$. La fonction ω_1 qui définit le mouvement M_1 a pour expression :

$$(352) \quad \frac{i}{2} \operatorname{Log} \frac{(1+Z) - \cos \alpha (1-Z)}{(1+Z) + \cos \alpha (1-Z)}.$$

de telle sorte que la constante arbitraire α est liée à la longueur h_1 de CD, obtenue en première approximation, par la formule :

$$(353) \quad h_1 = \frac{H}{\pi} \left[\pi \left(\cotg \frac{\alpha}{2} - 1 \right) - 2 \alpha \cotg \alpha \right]$$

ainsi qu'il résulte d'un calcul très simple. Une intégration élémentaire nous fournira également la valeur de l'intégrale J_1 qui joue un rôle fondamental dans les formules générales relatives à la convergence uniforme des approximations et à la détermination de la distance du mouvement M_n au mouvement réel; on a, en effet :

$$(354) \quad \sin f_1 = \frac{\sin \frac{s}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \frac{s}{2}}}$$

et, par suite :

$$(355) \quad J_1 = \int_0^\pi \frac{\sin f_1}{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}} ds = \alpha \cotg \alpha.$$

Dans cet exemple, la pression reste positive en tout point du fluide.

ÉCOULEMENT DISCONTINU sur une PAROI INDÉFINIE

35. Nous avons vu que lorsque la pression extérieure avait une valeur trop faible relativement au rayon de courbure minimum de la paroi, l'écoulement permanent irrotationnel sans cavitation était impossible. On peut alors concevoir l'existence de mouvements pour lesquels le fluide cesse de glisser tout le long de la paroi solide. A partir des points où le fluide quitte la paroi, on pourra avoir au contact de celle-ci soit une cavitation à pression constante, soit une plage de fluide qui ne participe pas au mouvement. Cela dépend de la façon physique dont a été amorcé le mouvement dont nous n'étudions ici que les aspects permanents possibles. Dans le problème ainsi posé le contour du domaine fluide est divisé en quatre arcs distincts : un seul pour la ligne de courant supérieure qui est une ligne (L) (condition 3) et trois pour la ligne de courant inférieure à savoir : les portions de la paroi en amont et en aval (condition 1) et la ligne λ qui peut être suivant les cas soit une ligne de glissement (condition 2), soit une ligne L (condition 3). On établira donc une correspondance entre le domaine D et l'intérieur d'une demi-couronne circulaire.

Les transformations qu'il faut utiliser pour réaliser la correspondance comme nous voulons le faire sont :

$$(356) \quad f = \frac{q}{\pi} \operatorname{Log} 4 [p v - e_3]$$

$$(357) \quad v = -\frac{\omega_3}{i\pi} \operatorname{Log} Z$$

où le logarithme a sa détermination principale et où p est la fonction classique de Weierstrass. Le potentiel complexe dépend d'une constante imaginaire. Nous déterminerons la valeur de cette constante en supposant que l'origine du plan potentiel est au milieu du segment CD qui correspond à la ligne λ . Dans ces conditions, le rapport des périodes des fonctions elliptiques qui interviennent dans les formules (356) est seul arbitraire et les périodes s'en déduisent au moyen des relations :

$$(358) \quad \omega_1 = \pi \partial_3(o). \partial_2(o) \quad \omega_3 = \tau \omega_1$$

La fonction $\omega = i \operatorname{Log} \frac{w}{V(A)}$ est une fonction de Z analytique dans la

couronne de rayons extrêmes un et $\rho = e^{-\frac{\pi i}{\tau}}$ et elle satisfait aux conditions aux limites suivantes :

$$(359) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \omega(A) = 0 \\ (b) \quad f(r, 0) = \theta(X) \\ (c) \quad f(r, \pi) = \theta(X) \\ (d) \quad h(1, s) = \mu \varphi_1(s) e^{-3g(1,s)} \sin f(1, s) \\ (e) \quad h(\rho, s) = \frac{\mu}{\rho} \varphi_2(s) e^{-3g(\rho,s)} \sin f(\rho, s) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \rho < X < 1 \\ -1 < X < -\rho \end{array} \right. \\ r = |X| \end{array}$$

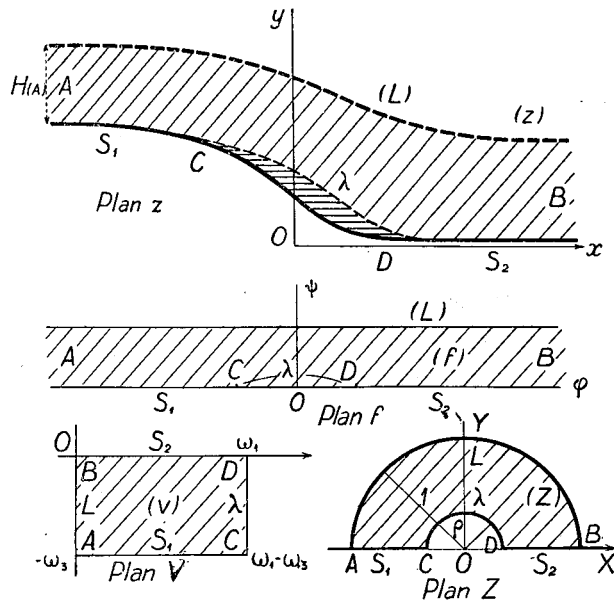


Fig. 16

La constante μ a pour valeur :

$$(360) \quad \mu = \frac{2g}{\pi} \frac{H(A)}{V(A)^2}$$

et les fonctions $\varphi_1(s)$ et $\varphi_2(s)$ sont définies par les formules :

$$(361) \quad \varphi_1(s) = \frac{\omega_3}{\pi} \left[\zeta_1 \frac{\omega_3}{\pi} s - \zeta_3 \frac{\omega_3}{\pi} s \right].$$

$$(362) \quad \varphi_2(s) = \frac{\omega_3}{\pi} \left[\zeta_1 \frac{\omega_3}{\pi} s - \zeta_2 \frac{\omega_3}{\pi} s \right].$$

La fonction $\varphi_1(s)$ est une fonction de s réelle pour les valeurs réelles de la variable comprises entre 0 et π . Elle est définie et continue dans cet intervalle, sauf aux extrémités où elle devient infinie comme $\frac{1}{\sin s}$.

On voit sans peine qu'elle est décroissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$ et croissante dans l'intervalle $\frac{\pi}{2}, \pi$ où l'on a $\varphi_1(s) = \varphi_1(\pi - s)$, le minimum de φ_1 , atteint pour $s = \frac{\pi}{2}$, a pour valeur :

$$(363) \quad \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tau}{2i} \left[\partial_2^2(o) + \partial_3^2(o) \right] = \frac{\omega_3}{\pi i} \left[\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3} \right].$$

Il en résulte que la fonction φ_1 est *positive* pour toutes les valeurs de s considéré.

En étudiant de la même façon la fonction $\varphi_2(s)$, on voit que cette fonction est une fonction de s réelle et bornée pour les valeurs réelles de s comprises entre 0 et π . Cette fonction nulle pour $s=0$ est croissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$ atteint son maximum pour $s = \frac{\pi}{2}$ et décroît dans l'intervalle $\frac{\pi}{2}, \pi$ où l'on a $\varphi_2(s) = \varphi_2(\pi - s)$. Comme φ_1 , elle est positive pour toutes les valeurs de s considérées. Son maximum a pour valeur :

$$(364) \quad \Phi_2 = \varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tau}{2i} \left[\partial_3^2(o) - \partial_2^2(o) \right] = \frac{\omega_3}{i\pi} \left[\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_2 - e_3} \right].$$

En utilisant les développements classiques des fonctions ζ_n en séries trigonométriques, on peut écrire les formules :

$$(365) \quad \varphi_1(s) = \frac{1}{\sin s} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{\rho^{2(2n-1)}}{1 - \rho^{2(2n-1)}} \sin(2n-1)s.$$

$$(366) \quad \varphi_2(s) = 4 \sum_1^{\infty} \frac{\rho^{2n-1}}{1 - \rho^{2(2n-1)}} \sin(2n-1)s$$

qui nous seront utiles dans la suite.

Dans le cas où la ligne λ est une ligne de glissement, la condition (359) (e) est remplacée par la condition $h(\rho, s) = 0$ de telle sorte que les formules obtenues dans le premier cas seront valables dans le deuxième cas à condition de supposer que la fonction φ_2 devient identiquement nulle.

36. Première approximation.

La fonction ω_1 est définie par les conditions :

$$(367) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \ (b) \ (c) \text{ identiques à (359) (a) (b) (c).} \\ (d) \quad h_1(1, s) = 0 \\ (e) \quad h_1(\rho, s) = 0. \end{array} \right.$$

La transformation :

$$(368) \quad \omega_3 \text{ Log } Z + \omega_1 \text{ Log } Z' = i \pi \omega_3$$

fait correspondre à la couronne D (Z) une couronne analogue du plan Z' avec interversion des segments rectilignes du contour et des segments circulaires. Le rayon de la circonférence intérieure du plan Z' est ρ' et :

$$(369) \quad \text{Log } \rho. \text{Log } \rho' = \pi^2.$$

Dans le domaine D (Z'), on pourra utiliser la formule de M. H. VILLAT (1) qui résout le problème de DIRICHLET dans un domaine annulaire. Après quoi, on reviendra au domaine D (Z) par la transformation (368). On obtient ainsi l'expression de ω_1 sous la forme :

$$(370) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 (Z) &= \frac{\omega_3}{\pi^2} \int_{\rho}^1 f(r, \pi) \left[\zeta_3 \frac{\omega_3}{i\pi} \text{Log } \frac{r}{Z} - \zeta_3 \frac{\omega_3}{i\pi} \text{Log } r Z \right] \frac{dr}{r} \\ &- \frac{\omega_3}{\pi^2} \int_{\rho}^1 f(r, 0) \left[\zeta \frac{\omega_3}{i\pi} \text{Log } \frac{r}{Z} - \zeta \frac{\omega_3}{i\pi} \text{Log } r Z \right] \frac{dr}{r}. \end{aligned} \right.$$

La condition d'uniformité s'écrit :

$$\int_{\rho}^1 f(r, \pi) \frac{dr}{r} = \int_{\rho}^1 f(r, 0) \frac{dr}{r}$$

et la partie réelle $f_1(r, s)$ de ω_1 aux points e^{is} et ρe^{is} des frontières a pour expression :

$$(371) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1(1, s) &= \frac{\omega_3}{\pi^2} \int_{\rho}^1 f(r, \pi) \left[\zeta_3 \left(\frac{\omega_3}{i\pi} \log r - \frac{\omega_3}{\pi} s \right) - \zeta_3 \left(\frac{\omega_3}{i\pi} \log r + \frac{\omega_3}{\pi} s \right) \right] \frac{dr}{r} \\ &- \frac{\omega_3}{\pi^2} \int_{\rho}^1 f(r, 0) \left[\zeta \left(\frac{\omega_3}{i\pi} \log r - \frac{\omega_3}{\pi} s \right) - \zeta \left(\frac{\omega_3}{i\pi} \log r + \frac{\omega_3}{\pi} s \right) \right] \frac{dr}{r}. \end{aligned} \right.$$

$$(372) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1(\rho, s) &= \frac{\omega_3}{\pi^2} \int_{\rho}^1 f(r, \pi) [\zeta_2() - \zeta_2()] \frac{dr}{r} \\ &- \frac{\omega_3}{\pi^2} \int_{\rho}^1 f(r, 0) [\zeta_1() - \zeta_1()] \frac{dr}{r}. \end{aligned} \right.$$

On étudiera comme dans la deuxième partie la manière dont se comporte la fonction $f_1(1, s)$ aux extrémités de l'intervalle dans lequel elle est définie, dans les diverses hypothèses que l'on peut faire sur la forme de la fonction $\theta(X)$. On voit alors que les conclusions obtenues restent applicables au cas actuel.

37. Approximations successives.

A partir de la fonction $\omega_1(Z)$, nous définissons une suite infinie $\omega_2(Z)$,... $\omega_n(Z)$... de fonctions de Z analytiques dans le domaine D, par les conditions aux limites suivantes :

$$(373) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a) (b) (c) \text{ identiques aux conditions (359) (a) (b) (c)} \\ (d) & \quad h_n(1, s) = \mu \varphi_1(s) e^{-3gn-1(1,s)} \sin f_{n-1}(1, s) \\ (e) & \quad \rho h_n(\rho, s) = \mu \varphi_2(s) e^{-3gn-1(\rho,s)} \sin f_{n-1}(\rho, s) \end{aligned} \right.$$

(1) H. VILLAT. *Rendi conti del circolo mat. di Palermo*. 1912, p. 134.

la dernière condition étant remplacée par la condition $h_n(\rho, s) = 0$ dans le cas où la ligne λ est une ligne de glissement.

Les fonctions $[\omega_n(Z) - \omega_1(Z)]$ étant imaginaires pures sur l'axe réel (condition a, b, c) sont prolongeables analytiquement dans la demi-couronne symétrique de D par rapport à cet axe et se trouvent ainsi définies dans la couronne de rayons extrêmes 1 et ρ , par la donnée de la dérivée normale de leur partie réelle sur le contour de cette couronne. La condition d'uniformité est toujours vérifiée, puisque $h(2\pi - s) = -h(s)$, ce qui entraîne :

$$\int_0^{2\pi} h(1, s) ds = \int_0^{2\pi} h(\rho, s) ds = 0.$$

On sait, d'autre part, que si l'on considère les fonctions elliptiques correspondant à $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ la fonction :

$$(374) \left\{ \begin{aligned} & a \operatorname{Log} Z + b - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(1, u) \operatorname{Log} \frac{\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \operatorname{Log} Z - \frac{\omega'_1}{\pi} u \mid \omega'_1, \omega'_3\right)}{\sigma\left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \operatorname{Log} Z + \frac{\omega'_1}{\pi} u \mid \omega'_1, \omega'_3\right)} du \\ & + \frac{\rho}{\pi} \int_0^\pi h(\rho, u) \operatorname{Log} \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \operatorname{Log} Z - \frac{\omega'_1}{\pi} u \mid \omega'_1, \omega'_3\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega'_1}{i\pi} \operatorname{Log} Z + \frac{\omega'_1}{\pi} u \mid \omega'_1, \omega'_3\right)} du \end{aligned} \right.$$

est une fonction de Z imaginaire pure sur l'axe réel et telle que la dérivée normale de sa partie réelle en M prise dans le sens OM prend les valeurs $h(1, s)$ et $h(\rho, s)$ aux points e^{is} et ρe^{is} des frontières. Le rapport des périodes des fonctions elliptiques définies dans ce chapitre étant seul déterminé, on pourra supposer que $\omega'_1 = -i\omega_3$ et $\omega'_3 = +i\omega_1$.

Il en résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} \sigma(u \mid \omega'_1, \omega'_3) &= \sigma(u \mid -i\omega_3, i\omega_1) = \sigma(u \mid -i\omega_1, -i\omega_3) = -i\sigma(iu \mid \omega_1, \omega_3) \\ \sigma_3(u \mid \omega'_1, \omega'_3) &= \sigma_1(iu \mid \omega_1, \omega_3). \end{aligned}$$

Ceci posé, on détermine la constante a qui figure dans la formule (374) par la condition d'uniformité de la fonction ω_n et la constante b par la condition $\omega_n(A) = 0$. On obtient finalement :

$$(375) \left\{ \begin{aligned} & \omega_n(Z) = \omega_1(Z) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_n(1, u) \operatorname{Log} \frac{\sigma\left(i \frac{\omega_3}{\pi} \operatorname{Log} Z + \frac{\omega_3}{\pi} u\right)}{\sigma\left(i \frac{\omega_3}{\pi} \operatorname{Log} Z - \frac{\omega_3}{\pi} u\right)} du \\ & + \frac{\rho}{\pi} \int_0^\pi h_n(\rho, u) \operatorname{Log} \frac{\sigma_1\left(i \frac{\omega_3}{\pi} \operatorname{Log} Z + \frac{\omega_3}{\pi} u\right)}{\sigma_1\left(i \frac{\omega_3}{\pi} \operatorname{Log} Z - \frac{\omega_3}{\pi} u\right)} du \\ & + 2i \frac{\gamma_3 \omega_3}{\pi^3} \log Z \int_0^\pi u [h_n(1, u) - \rho h_n(\rho, u)] du. \end{aligned} \right.$$

et en posant :

$$(376) \quad M_1(u, s) = -\frac{1}{\pi} \left[\text{Log} \frac{\sigma \frac{\omega_3}{\pi} |u-s|}{\sigma \frac{\omega_3}{\pi} (u+s)} + \frac{2 \tau_3 \omega_3}{\pi^2} us \right].$$

$$(377) \quad M_2(u, s) = -\frac{1}{\pi} \left[\text{Log} \frac{\sigma_1 \frac{\omega_3}{\pi} (u-s)}{\sigma_1 \frac{\omega_3}{\pi} (u+s)} + \frac{2 \tau_3 \omega_3}{\pi^2} us \right]$$

on obtient l'expression explicite des fonctions $f_n(1, s)$ et $f_n(\rho, s)$ sous la forme :

$$(378) \quad \left\{ \begin{aligned} f_n(1, s) &= f_1(1, s) + \mu \int_0^\pi e^{-3gn-1(1,u)} \sin f_{n-1}(u) \cdot \varphi_1(u) M_1(u, s) du \\ &\quad - \mu \int_0^\pi e^{-gn-1(\rho,u)} \sin f_{n-1}(\rho, u) \varphi_2(u) M_2(u, s) du. \end{aligned} \right.$$

$$(379) \quad \left\{ \begin{aligned} f_n(\rho, s) &= f_1(1, s) + \mu \int_0^\pi e^{-3gn-1(1,u)} \sin f_{n-1}(u) \cdot \varphi_1(u) M_2(u, s) du \\ &\quad - \mu \int_0^\pi e^{-3gn-1(\rho,u)} \sin f_{n-1}(\rho, u) \varphi_2(u) M_2(u, s) du. \end{aligned} \right.$$

et l'expression des fonctions $g_n(1, s)$ et $g_n(\rho, s)$ sous la forme :

$$(380) \quad g_n(1, s) = \mu \int_\pi^s \varphi_1(s) e^{-3gn-1(1,s)} \sin f_{n-1}(1, s) ds.$$

$$(381) \quad \left\{ \begin{aligned} g_n(\rho, s) &= \mu \int_\pi^{s_1} \varphi_2(s) e^{-3gn-1(\rho,s)} \sin f_{n-1}(\rho, s) ds \\ &\quad + \frac{\mu}{\pi^2} \int_0^\pi [\varphi_2(s) e^{-3gn-1(\rho,s)} \sin f_{n-1}(\rho, s) - \varphi_1(s) e^{-3gn-1(1,s)} \sin f_{n-1}(1, s)] s ds. \end{aligned} \right.$$

Nous avons étudié au début de ce chapitre les fonctions φ_1 et φ_2 . Pour pouvoir appliquer au problème la méthode générale indiquée, il nous faut encore étudier les noyaux symétriques : $M_1(u, s)$ et $M_2(u, s)$.

En vertu de la symétrie, il suffit de faire cette étude dans le domaine $0 \leq u \leq \pi, u \geq s$. Dans ce domaine la fonction :

$$(382) \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial u^2} = \frac{\omega_3^2}{\pi^3} \frac{p' \frac{\omega_3}{\pi} s \cdot p' \frac{\omega_3}{\pi} u}{\left[p \frac{\omega_3}{\pi} u - p \frac{\omega_3}{\pi} s \right]^2}$$

est positive. Pour une valeur constante de s , la fonction $\frac{\partial M_1}{\partial u}$ croît par suite depuis des valeurs infiniment grandes en valeur absolue et négatives jusqu'à la valeur :

$$-\frac{\omega_3}{\pi^2} \left[\frac{2 \tau_3}{\pi} s - \zeta_3 \frac{\omega_3}{\pi} s \right].$$

Si l'on construit la courbe qui représente les variations de la fonction réelle $i\gamma_3 \frac{\omega_3}{\pi} s$ dans l'intervalle $0 < s < \pi$, on voit immédiatement en tenant compte du sens de la concavité de la courbe que le maximum de $\frac{\partial M_1}{\partial u}$ est négatif quelle que soit la valeur de s considérée. Il résulte de là que lorsque le point (u, s) se déplace parallèlement à l'axe Ou , la fonction M_1 décroît depuis $+\infty$ jusqu'à 0 en restant, par conséquent, constamment positive. En mettant en évidence la singularité logarithmique $u = s$, on peut écrire :

$$(383) \quad M_1(u, s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{n(1-\rho^{2n})} \sin nu \cdot \sin ns.$$

La série qui figure au deuxième membre de cette formule est absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de u et de s et le noyau symétrique $M_1(u, s)$ possède dans le domaine considéré les mêmes singularités que le noyau symétrique $K_1(u, s)$ auquel il se réduit d'ailleurs dans le cas limite où $\rho = 0$.

Le noyau symétrique :

$$M_2(u, s) = -\frac{1}{\pi} \left[\operatorname{Log} \frac{\sigma_1 \frac{\omega_3}{\pi} (u-s)}{\sigma_1 \frac{\omega_3}{\pi} (u+s)} + \frac{2\gamma_3 \omega_3}{\pi^2} us \right]$$

est défini et borné dans tout le domaine considéré. Il satisfait aux relations :

$$M_2(u, s) = M_2(s, u) = M_2(\pi - u, \pi - s) = M_2(\pi - s, \pi - u).$$

On étudie très facilement ses variations quand le point (u, s) se déplace parallèlement aux droites $u = \pm s$ et l'on constate que le noyau est positif dans tout le domaine. Lorsque le point (u, s) se déplace parallèlement à l'axe Os , $M_2(u, s)$ croît depuis la valeur 0 jusqu'à un maximum, pour décroître ensuite jusqu'à 0. Dans le domaine considéré, le maximum absolu de $M_2(u, s)$ est égal à :

$$(384) \quad M_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \frac{\partial_3(o)}{\partial_2(o)} = -\frac{\operatorname{Log} k}{2\pi}.$$

On peut écrire d'autre part :

$$(385) \quad M_2(u, s) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n(1-\rho^{2n})} \sin nu \cdot \sin ns$$

et le développement ainsi obtenu est absolument et uniformément convergent dans le domaine (u, s) considéré.

Les intégrales :

$$I_1(s) = \int_0^\pi \varphi_1(u) \cdot M_1(u, s) du.$$

$$I_2(s) = \int_0^\pi \varphi_2(u) \cdot M_2(u, s) du.$$

$$I_3(s) = \int_0^\pi \varphi_1(u) \cdot M_2(u, s) du.$$

$$I_4(s) = \int_0^\pi \varphi_2(u) \cdot M_1(u, s) du.$$

sont des fonctions de s positives dans l'intervalle $0, \pi$ et les fonctions $I_1(s) - I_2(s)$ et $I_3(s) - I_4(s)$ représentent respectivement la valeur aux points e^{is} et ρe^{is} d'une fonction harmonique dans D , nulle sur les segments AC et BD , dont la dérivée normale sur les frontières circulaires de D a pour expression $\varphi_1(s)$ et $\varphi_2(s)$. On vérifie aisément que la fonction ainsi définie est la fonction :

$$\arg. \xi_{30} \left(\frac{\omega_3}{i\pi} \text{Log } Z \right).$$

Cette fonction est parfaitement définie sur les frontières de D . Elle est nulle sur la demi-circonférence de rayon ρ et égale à $\frac{\pi}{2}$ sur la demi-circonférence de rayon un. On a donc :

$$(386) \quad I_1(s) - I_2(s) = \frac{\pi}{2}.$$

$$(387) \quad I_3(s) - I_4(s) = 0.$$

On pourrait d'ailleurs obtenir ces formules à l'aide d'un calcul direct utilisant les développements des fonctions φ_1 , φ_2 , M_1 et M_2 en séries trigonométriques, et en remarquant que pour les valeurs entières et positives de n , on a :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{Log} \left| \frac{\sin \frac{u+s}{2}}{\sin \frac{u-s}{2}} \right| \sin nu du = \frac{\sin ns}{n}.$$

D'après cela le calcul des quatre fonctions $I(s)$ se ramène au calcul de deux d'entre elles. Comme on connaît une limite supérieure de la valeur absolue des fonctions φ_2 et M_2 qui sont toutes deux bornées, on obtient facilement une limite supérieure de $I_2(s)$ sous la forme :

$$(388) \quad \frac{\tau}{2i} \left[\theta_3^2(o) - \theta_2^2(o) \right] \text{Log} \frac{\theta_3(o)}{\theta_2(o)} = \frac{\omega_3}{4i\pi} \text{Log} \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3} \left[\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_2 - e_3} \right]$$

mais on peut obtenir le maximum de $I_2(s)$ de façon plus précise. s étant supposé constant, les fonctions $\varphi_2(u)$ et $M_2(u, s)$ sont en effet des fonctions

de u périodiques impaires et sommables ainsi que leurs carrés. En désignant respectivement par b_n et par d_n les constantes d'EULER-FOURIER qui sont attachées à ces fonctions, on peut donc écrire (1) :

$$(389) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_2(u) M_2(u, s) du = \sum_1^{\infty} b_n d_n(s)$$

et, par suite :

$$(390) \quad I_2(s) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2(2n-1)}}{(2n-1) [1 - \rho^{2(2n-1)}]^2} \sin(2n-1)s.$$

On voit ainsi que la fonction $I_2(s)$ est une fonction nulle pour $s=0$ qui atteint son maximum pour $s = \frac{\pi}{2}$. Ce maximum A_2 a pour valeur :

$$(391) \quad A_2 = 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\rho^{2(2n-1)}}{(2n-1) [1 - \rho^{2(2n-1)}]^2}.$$

la série (391) est une série alternée dont le terme général décroît constamment en valeur absolue et tend très rapidement vers 0 si peu que ρ soit petit. Elle est donc rapidement convergente. On peut également écrire en vue d'un calcul commode ses différents termes sous la forme :

$$(392) \quad A_2 = 4 \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{2p}{2n-1} \rho^{2p(2n-1)} = 4 \sum_1^{\infty} (2p) \text{Arctg } \rho^{2p}.$$

On peut effectuer un calcul analogue relativement à la fonction :

$$\int_0^{\pi} M_2(u, s) \left[\varphi_1(u) - \frac{1}{\sin u} \right] du$$

et comme on a d'autre part :

$$\left| \frac{M_2(us)}{\sin u} \right| < \frac{4}{\pi} \left[\sum \frac{\rho^n}{1 - \rho^{2n}} \right]$$

on trouve finalement :

$$(393) \quad I_3(s) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n-1} [1 + \rho^{2(2n-1)}]}{[1 - \rho^{2(2n-1)}]^2} \frac{\sin(2n-1)s}{2n-1}$$

et :

$$(394) \quad \left\{ \begin{aligned} A_3 = I_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\rho^{2n-1} [1 + \rho^{2(2n-1)}]}{[1 - \rho^{2(2n-1)}]^2} \\ &= 4 \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) \text{Arctg } \rho^{2p-1}. \end{aligned} \right.$$

(1) cf. P. FATOU. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta mathematica* 30, p. 379.

On a enfin :

$$(395) \quad A_1 = A_2 + \frac{\pi}{2}.$$

$$(396) \quad A_4 = A_3.$$

Lorsque le rayon de la circonférence qui limite intérieurement le domaine D tend vers zéro, le rapport τ des périodes augmente indéfiniment. La longueur de la ligne λ tend vers 0 et les constantes A_2 , A_3 et A_4 tendent vers zéro, tandis que A_1 tend vers $\frac{\pi}{2}$. Les fonctions $I_2(s)$, $I_3(s)$ et $I_4(s)$ deviennent donc identiquement nulles et à la limite on retrouve bien les résultats de la seconde partie.

38. Propriétés géométriques du mouvement.

Ces résultats acquis, on démontrera comme précédemment que si le courant est suffisamment rapide, les approximations successives convergent bien vers une fonction limite qui fournit la solution du problème dans le cas général. On obtiendra de même la distance du mouvement M_n au mouvement réel M dans une région donnée et la variation de pression sur le profil L du mouvement M considéré comme un mouvement qui se produit sous l'action des forces de pesanteur. Comme la transposition au cas actuel des démonstrations faites dans la deuxième partie, ne présente aucune difficulté, nous nous bornerons à énoncer quelques résultats relatifs au cas où la paroi S est décroissante d'amont en aval. La fonction $\theta(x)$ est alors une fonction négative dans chacun des intervalles où elle est définie. Si donc, nous considérons la fonction $f_1(X', Y')$ qui est déterminée comme il a été dit dans la couronne D (Z') nous voyons que c'est sur une fonction harmonique dans D (Z') et négative sur le contour de ce domaine. Elle est donc négative en tout point du domaine et, en particulier, sur les segments de l'axe réel qui correspondent aux lignes L et λ . Les fonctions $f_1(1, s)$ et $f_1(\rho, s)$ sont donc négatives quel que soit s . Ceci posé, si nous supposons, pour fixer les idées que la ligne λ est une ligne de glissement, les fonctions f_n et g_n sont définies de proche en proche par les formules :

$$(397) \quad f_n(1, s) = f_1(1, s) + \mu \int_0^\pi e^{-3g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u) \varphi_1(u) M_1(u, s) du.$$

$$(398) \quad f_n(\rho, s) = f_1(\rho, s) + \mu \int_0^\pi e^{-3g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u) \varphi_1(u) M_2(u, s) du.$$

$$(399) \quad g_n(1, s) = \mu \int_\pi^s \varphi_1(u) e^{-3g_{n-1}(1, u)} \sin f_{n-1}(1, u) du.$$

$$(400) \quad g_n(\rho, s) = -\frac{\mu}{\pi^2} \int_0^\pi u \varphi_1(u) e^{-3g_{n-1}(u)} \sin f_{n-1}(1, u) du.$$

On voit en utilisant les propriétés des noyaux $\varphi(u)$ et $M(u, s)$ que les fonctions $f_n(1, s)$ et $f_n(\rho, s)$ seront certainement négatives dans tout l'intervalle

$0, \pi$ si le maximum de $|f_{n-1}(1, s)|$ est inférieur à π . Dans ces conditions, les fonctions $g_n(1, s)$ et $g_n(\rho, s)$ seront des fonctions de s positives et bornées et les fonctions $f_n(\rho, s)$ et $f_n(1, s)$ admettront comme dominantes les fonctions :

$$(401) \quad F_n(1, s) = F_1(1, s) + \mu A_1 \text{Sin } F_{n-1}(1, s).$$

$$(402) \quad F_n(\rho, s) = F_1(\rho, s) + \mu A_3 \text{Sin } F_{n-1}(1, s).$$

$F_n(1, s)$ est effectivement inférieur à π si : $\mu < \frac{\pi - F_1}{A_1}$.

Dans ces conditions, les fonctions limites $f(1, s)$ et $f(\rho, s)$ seront négatives et les fonctions $g(1, s)$ et $g(\rho, s)$ seront positives pour toutes les valeurs de s . Si nous supposons connues les constantes qui caractérisent le mouvement aux grandes distances en amont, nous ne disposons que de deux arbitraires le rapport des périodes des fonctions elliptiques introduites dans ce chapitre, τ , et la fonction $\theta(X)$. Cette fonction est déterminée par la donnée de la paroi et sera connue dans certains cas analogues à celui qui a été étudié dans la deuxième partie. Quant au paramètre τ , il est lié à la grandeur de la ligne λ . On obtient ainsi toute une famille de mouvements correspondant à une paroi de forme donnée.

Aux grandes distances en amont, la pression sur la paroi S est positive et égale à $p_0 + gH(A)$. Sur S_1 , cette pression varie de façon continue, puisque l'inclinaison de S_1 varie de façon continue. Supposons qu'elle soit positive au point C . Sur la ligne de glissement λ la vitesse reste constante et d'après les résultats obtenus la cote décroît de C à D . Par suite, la pression augmente et reste positive. Si le point D est situé sur la partie de S dont la concavité dirigée dans le sens de la verticale ascendante, la pression sera positive en tout point de la ligne de courant C_2 et elle sera positive dans tout le fluide. Les mouvements permanents irrotationnels ainsi obtenus sont donc physiquement possibles. Dans tous ces mouvements, une ligne de courant quelconque et, en particulier, le profil libre va en décroissant d'amont en aval.