

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

HENRY MURRAY

**Recherches sur des mécanismes paradoxaux**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1933

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1933\\_\\_144\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1933__144__1_0)

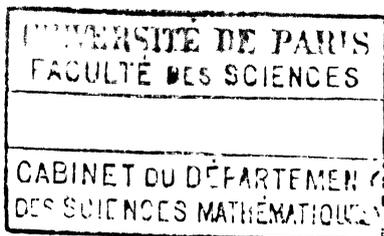
L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

No. D'ORDRE 2234,  
Série A, No. de Série 1369.

INSTITUT HENRI POINCARÉ



# THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES  
MATHÉMATIQUES

Par M. HENRY MURRAY,  
A.B., A.M., Université de Princeton.

1<sup>ère</sup> THÈSE—Recherches sur des Mécanismes paradoxaux,

2<sup>ème</sup> THÈSE—Propositions données par la Faculté.

Soutenues le

devant la Commission d'examen :

MM. E. CARTAN, *Président*,

E. VESSIOT }  
G. JULIA } *Examineurs.*



LONDRES :

C. F. HODGSON & SON, LTD., Éditeurs,  
2 NEWTON STREET, KINGSWAY, W.C.2,  
1933.

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.		
<i>Doyen</i> ... ..	C. MAURAIN, <i>Professeur</i> ,	Physique du globe.	
<i>Doyen honoraire</i> ...	M. MOLLIARD.		
<i>Professeurs honoraires</i>	H. LE CHATELIER.		
	H. LEBESGUE.		
	A. FERNBACH.		
	A. LEDUC.		
	E. HÉROUARD.		
	Émile PICARD.		
	Rémy PERRIER.		
	Léon BRILLOUIN.		
	A. DEREIMS		
<i>Professeurs</i> ... ..	E. GOURSAT ... ..	Analyse supérieure et algèbre supérieure	
	P. JANET ... ..	Électrotechnique générale.	
	F. WALLERANT ... ..	Minéralogie.	
	P. PAINLEVÉ ... ..	Mécanique analytique et mécanique céleste.	
	M. CAULLERY ... ..	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	
	Émile BOREL ... ..	Calcul des probabilités et Physique mathém.	
	H. ABRAHAM ... ..	Physique.	
	M. MOLLIARD ... ..	Physiologie végétale.	
	E. CARTAN ... ..	Géométrie supérieure.	
	Gabriel BERTRAND ...	Chimie biologique.	
	Jean PERRIN ... ..	Chimie physique.	
	L. LAPICQUE ... ..	Physiologie générale.	
	Mme P. CURIE ... ..	Physique générale et radioactivité.	
	G. URBAIN ... ..	Chimie générale.	
	L. MARCHIS ... ..	Aviation.	
	E. VESSIOT ... ..	Théorie des fonctions et théorie des transformations.	
	A. COTTON ... ..	Physique générale.	
	J. DRACH ... ..	Application de l'analyse à la géométrie.	
	Charles FABRY ... ..	Physique.	
	R. LESPIEAU ... ..	Théories chimiques.	
	P. PORTIER ... ..	Physiologie comparée.	
	Charles PÉREZ ... ..	Zoologie.	
	É. BLAISE ... ..	Chimie organique.	
	P.-A. DANGEARD ...	Botanique.	
	Léon BERTRAND ... ..	Géologie structurale et géologie appliquée.	
	E. RABAUD ... ..	Biologie expérimentale.	
	G. JULIA ... ..	Calcul différentiel et calcul intégral.	
	Paul MONTEL ... ..	Mécanique rationnelle.	
	V. AUGER ... ..	Chimie appliquée.	
	P. WINTREBERT ... ..	Anatomie et histologie comparées.	
	O. DUBOSCQ ... ..	Biologie maritime.	
	Eugène BLOCH ... ..	Physique théorique et physique céleste.	
	N ... ..	Étude des combustibles.	
	L. LUTAUD ... ..	Géographie physique et géologie dynamique.	
	Henri VILLAT ... ..	Mécanique des fluides et applications.	
	Ch. JACOB ... ..	Géologie.	
	P. PASCAL ... ..	Chimie minérale.	
	E. ESCLANGON ... ..	Astronomie.	
	H. BENARD ... ..	Mécanique expérimentale des fluides.	
	C. MAUGUIN ... ..	Minéralogie.	
	L. BLARINGHEM ...	Botanique.	
	A. GUILLIERMOND ...	Botanique (P. C. N.).	
A. DENJOY ... ..	Mathématiques générales.		
A. DUFOUR ... ..	Physique (P. C. N.).		
H. BÉGHIN ... ..	Mécanique physique et expérimentale.		
De BROGLIE ... ..	Théories physiques.		
E. PÉCHARD ... ..	Chimie (Enseigt. P. C. N.).	FOCH ... ..	Mécanique expérimentale des fluides.
A. GUILLET ... ..	Physique.	PAUTHENIER ... ..	Physique (P. C. N.).
M. GUICHARD ... ..	Chimie minérale.	VILLEY ... ..	Mécanique physique et expérimentale.
A. MICHEL-LÉVY ...	Pétrographie.	LABROUSTE ... ..	Physique du Globe.
H. MOUTON ... ..	Chimie physique.	FREUNDLER ... ..	Chimie (P. C. N.).
L. DUNOYER ... ..	Optique appliquée.	PRENANT ... ..	Zoologie.
M. JAVILLIER ... ..	Chimie biologique.	P JOB ... ..	Chimie générale.
ROBERT-LÉVY ... ..	Zoologie.	CHRÉTIEN ... ..	Optique appliquée.
A. DEBIERNE ... ..	Radioactivité.	BOHN ... ..	Zoologie (P. C. N.).
E. DARMOIS ... ..	Physique.	COMBES ... ..	Sciences naturelles (P.C.N.).
G. BRUHAT ... ..	Physique.	GARNIER ... ..	Mécanique rationnelle.
F. PICARD ... ..	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	PÈRES ... ..	Mécanique des fluides.
L. JOLEAUD ... ..	Paléontologie.	LAUGIER ... ..	Physiologie générale.
M. FRÉCHET ... ..	Calcul des Probabilités et Physiques mathématiques.	TOUSSAINT ... ..	Technique aéronautique,
Mme RAMART-LUCAS	Chimie organique.	HACKSPILL ... ..	Chimie (P. C. N.).
	<i>Secrétaire</i> ... ..	A. PACAUD.	
	<i>Secrétaire honoraire</i> ... ..	D. TOMBECK.	

À

Monsieur ÉLIE CARTAN,

Professeur à la Sorbonne,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

et

À

Monsieur RAOUL BRICARD,

Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers,

*En témoignage de mon profond respect et de ma sincère reconnaissance.*



# RECHERCHES SUR DES MÉCANISMES PARADOXAUX

## Chapitre I.

### INTRODUCTION.

**1. Énoncé du problème.** On voit à la figure (1, 1) le schéma du mécanisme qui va faire l'objet de ce travail. Il est composé de huit corps, numérotés de 1 à 8, et liés de manière à former en tout douze couples rotoïdes. Les traits pleins de la figure représentent les axes des couples rotoïdes ;

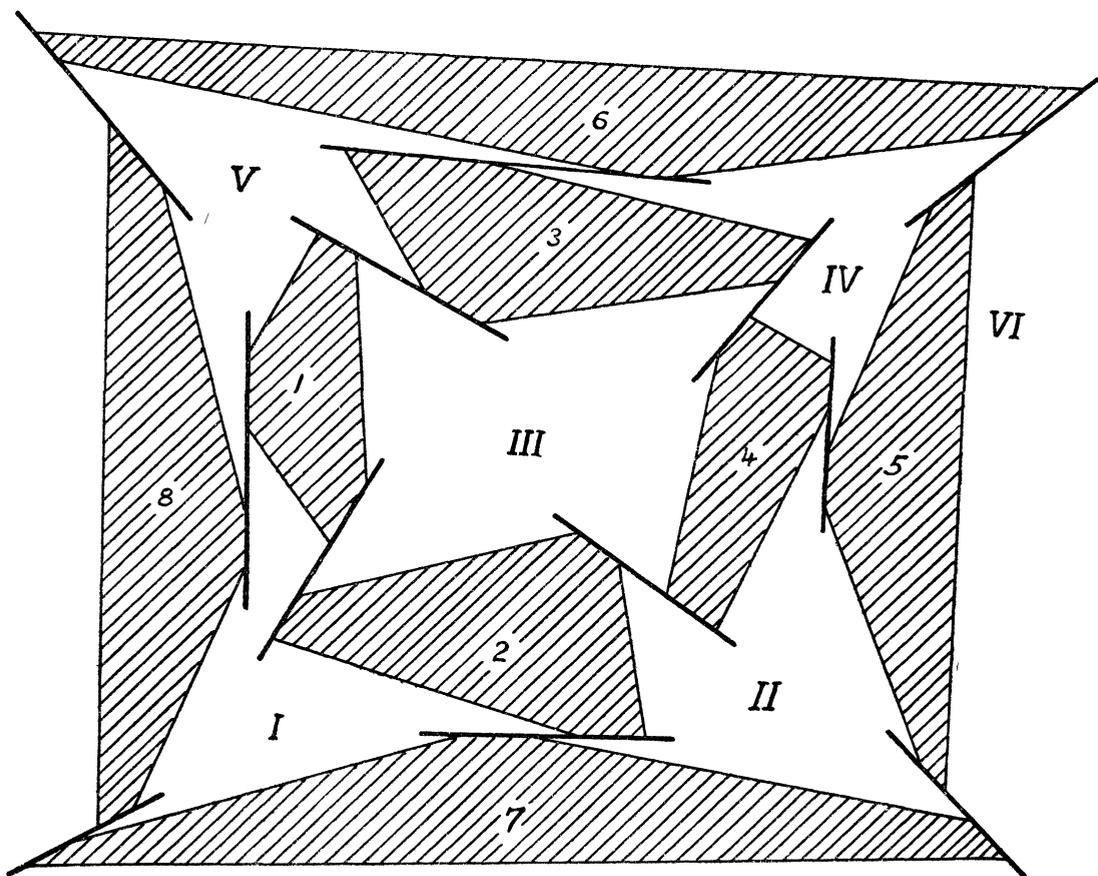


Fig. 1, 1.

les traits fins représentent les perpendiculaires communes aux axes appartenant à un même corps. Ce mécanisme a normalement un degré de liberté égal à  $-18$ . Je me propose de trouver dans quelles circonstances paradoxales il est déformable.

On voit dans ce mécanisme six chaînes fermées de quatre couples rotoïdes, que j'ai numérotées de I à VI. Il est facile de démontrer\* que quand une telle chaîne est déformable, elle doit appartenir à l'une des trois catégories suivantes :

1. Angle tétraèdre,
2. Quadrilatère plan,
3. Chaîne isogrammatique.

Ce mécanisme comporte également des chaînes fermées de six couples rotoïdes telles que celle qui est formée par les corps 1 2 7 5 6 3. Tout mécanisme déformable de cette classe est lui-même paradoxal, comme on le sait.

Lorsque toutes les six chaînes de quatre corps sont des angles tétraèdres, les trois axes liés à chaque corps doivent se rencontrer, deux à deux. Pour que ceci ait lieu, il faut ou bien que les trois axes de chaque corps concourent en un point, ou bien qu'ils soient situés dans un plan. Si, toujours dans l'hypothèse que toutes les chaînes de quatre corps sont des angles tétraèdres, les trois axes liés à un corps sont situés dans un plan sans concourir en un point, il faut qu'il en soit de même pour les trois corps couplés au premier, et, par extension du raisonnement, pour tous les corps du mécanisme. En effet, les deux axes libres de chaque corps couplé au premier doivent rencontrer l'axe qui fait le couple en des points différents, tout en se rencontrant. Les deux axes libres et celui qui fait le couple doivent donc être situés dans un plan.

D'autre part, si les trois axes d'un corps concourent en un point, qu'ils soient ou qu'ils ne soient pas situés dans un plan, il est évident, tant que toutes les chaînes de quatre corps sont des angles tétraèdres, que tous les douze axes du mécanisme doivent concourir en ce même point.

*Cela fait que le mécanisme composé uniquement d'angles tétraèdres ne peut se présenter que sous deux formes. Premièrement, les trois axes de chacun des huit corps sont situés dans un plan ; le mécanisme devient alors un octaèdre articulé. Deuxièmement, tous les douze axes concourent en un point ; c'est le mécanisme de Kempe sur la sphère.*

Lorsque toutes les six chaînes de quatre corps sont des quadrilatères plans, ce mécanisme n'est autre que le *système plan de Kempe*.

**2. Historique.** C'est probablement le *système plan de Kempe* qui a été étudié le premier de tous les cas connus du mécanisme de la figure (1, 1). Les recherches de Kempe† ont été complétées par Darboux‡.

---

\* Voir *Note sur les Chaînes fermées de quatre Couples rotoïdes*, à la page 210.

† *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1878, t. 9, p. 133.

‡ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1879, p. 151.

Viennent ensuite les recherches de M. Bricard sur l'*octaèdre articulé*\*. M. Bricard a complètement résolu ce cas.

M. Bennett a fait connaître† trois cas de déformabilité du *mécanisme de Kempe sur la sphère*. Comme il les a déduits des solutions du problème de la déformabilité de l'octaèdre, les trois axes de chaque corps sont, dans les trois cas, situés dans un plan.

Dans une étude ultérieure que M. Bennett a faite des mécanismes composés uniquement d'*isogrammes*, il a trouvé encore un cas de déformabilité du mécanisme de la figure (1, 1)‡.

Je ne sache pas qu'on connaisse d'autres cas de déformabilité du mécanisme en question que ceux que je viens de citer.

En étudiant ce mécanisme, je crois répondre en quelque sorte à la question suivante, posée par G. Fontené: "*Pourrait-on, avec des tétraèdres, obtenir un système articulé comparable au système plan de Kempe?*" §

Sans être exactement celui envisagé par G. Fontené, le mécanisme que je me propose d'étudier est bien un système à trois dimensions comparable au système plan de Kempe.

**3. Aperçu général de la méthode.** L'étude de ce mécanisme donne lieu à une analyse qui se divise en deux parties. Ce sont le calcul des angles que font entre elles les droites du mécanisme, et le calcul des longueurs portées sur ces droites. Comme la valeur de l'angle que font deux droites entre elles ne dépend nullement de la distance qui les sépare, il est évident que la première partie de l'analyse est indépendante de la seconde. Aussi, peut-on assujettir les douze axes du mécanisme à passer par un point, sans imposer la moindre nouvelle condition ni aux angles qu'ils font entre eux, ni à ceux que font entre elles leurs normales communes, deux à deux. C'est ainsi que dans tout cas de déformabilité du mécanisme, les angles doivent obéir premièrement aux lois établies au cours de l'étude du mécanisme de Kempe sur la sphère. J'étudierai donc ce cas-là en premier lieu.

Ensuite, je passerai à l'étude des mécanismes composés d'angles tétraèdres et de quadrilatères plans mélangés. Je terminerai par l'étude des mécanismes contenant des isogrammes. Je laisserai de côté les cas, déjà connus, de l'octaèdre articulé et du système plan de Kempe.

\* *Journal de Math. pures et appliquées*, 1897, p. 113.

† *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1912, pp. 322, 330 et 331. M. Bennett dit à ce sujet: "The spherical mechanisms of pp. 322, 330, and 331 belong presumably to a class of such mechanisms as yet unexplored". (*Loc. cit.*, p. 343.)

‡ *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1914, p. 166.

§ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1901, p. 108.

## Chapitre II.

## L'ANGLE TETRAEDRE.

**4. Conventions préliminaires.** Avant de commencer l'étude des mécanismes eux-mêmes, il est essentiel que je refasse une partie de la théorie classique de l'angle tétraèdre.

En se reportant à la figure (4, 1), soient  $l_i, m_i, n_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), les cosinus directeurs des quatre axes, soient  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), ceux des vecteurs normaux aux plans faciaux; soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  les angles faciaux constants; et soient  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  les dièdres variables.

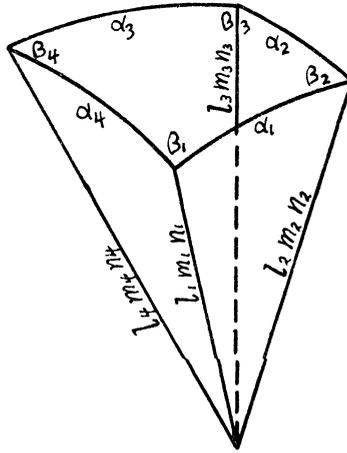


Fig. 4, 1.

L'orientation des angles sera alors déterminée par les règles suivantes :

$$(4, 1) \quad \begin{cases} l_1 \sin \beta_1 = b_4 c_1 - b_1 c_4, & a_1 \sin \alpha_1 = m_1 n_2 - m_2 n_1, \\ m_1 \sin \beta_1 = c_4 a_1 - c_1 a_4, & b_1 \sin \alpha_1 = n_1 l_2 - n_2 l_1, \\ n_1 \sin \beta_1 = a_4 b_1 - a_1 b_4, & c_1 \sin \alpha_1 = l_1 m_2 - l_2 m_1, \\ \cos \beta_1 = a_1 a_4 + b_1 b_4 + c_1 c_4, & \cos \alpha_1 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2, \end{cases}$$

et par d'autres formules qui se déduisent de celles-ci en permutant circulairement les indices.

Si l'on résout les formules (4, 1) par rapport à  $l_2, m_2, n_2, a_4, b_4, c_4$ , on trouve

$$(4, 2) \quad \begin{cases} l_2 = (b_1 n_1 - c_1 m_1) \sin \alpha_1 + l_1 \cos \alpha_1, \\ m_2 = (c_1 l_1 - a_1 n_1) \sin \alpha_1 + m_1 \cos \alpha_1, \\ n_2 = (a_1 m_1 - b_1 l_1) \sin \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_1, \\ a_4 = (b_1 n_1 - c_1 m_1) \sin \beta_1 + a_1 \cos \beta_1, \\ b_4 = (c_1 l_1 - a_1 n_1) \sin \beta_1 + b_1 \cos \beta_1, \\ c_4 = (a_1 m_1 - b_1 l_1) \sin \beta_1 + c_1 \cos \beta_1. \end{cases}$$

On n'a qu'à continuer à appliquer ce procédé pour avoir tous les cosinus directeurs du mécanisme en fonction de  $l_1, m_1, n_1, a_1, b_1, c_1$ .

**5. Identités fondamentales.** Les identités suivantes se vérifient aisément à l'aide des calculs indiqués à la fin du paragraphe précédent.

$$(5, 1) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma a_2 a_4 = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ \quad = \cos \beta_3 \cos \beta_4 - \cos \alpha_3 \sin \beta_3 \sin \beta_4, \\ \Sigma a_1 a_3 = \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \\ \quad = \cos \beta_4 \cos \beta_1 - \cos \alpha_4 \sin \beta_4 \sin \beta_1; \end{array} \right.$$

$$(5, 2) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma l_1 l_3 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \beta_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \quad = \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 - \cos \beta_4 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4, \\ \Sigma l_2 l_4 = \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - \cos \beta_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ \quad = \cos \alpha_4 \cos \alpha_1 - \cos \beta_1 \sin \alpha_4 \sin \alpha_1; \end{array} \right.$$

$$(5, 3) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma l_1 l_2 = \cos \alpha_1 = \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \alpha_2 \\ \quad + \sin \alpha_4 \sin \alpha_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_4 \cos \beta_3 \\ \quad - \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 \cos \alpha_2 \cos \beta_4 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \cos \beta_4, \\ \Sigma l_2 l_3 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha_4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \\ \quad + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \sin \beta_4 \sin \beta_1 - \sin \alpha_4 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_4 \\ \quad - \sin \alpha_4 \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 \cos \beta_1 - \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_4 \cos \beta_4 \cos \beta_1, \\ \Sigma l_3 l_4 = \cos \alpha_3 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_4 \\ \quad + \sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_4 \cos \alpha_2 \cos \beta_1 \\ \quad - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_4 \cos \beta_2 - \sin \alpha_4 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \beta_2, \\ \Sigma l_4 l_1 = \cos \alpha_4 = \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 \\ \quad + \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 \cos \beta_2 \\ \quad - \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \cos \beta_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \beta_3; \end{array} \right.$$

$$(5, 4) \quad \Sigma (m_1 n_3 - m_3 n_1)(m_2 n_4 - m_4 n_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_4.$$

Ces formules-là servent de base à tous les calculs qu'on fera dans la suite.

**6. Angle tétraèdre à plans diagonaux perpendiculaires.** La condition nécessaire et suffisante pour que les plans diagonaux soient

perpendiculaires est évidemment

$$\Sigma (m_1 n_3 - m_3 n_1) (m_2 n_4 - m_4 n_2) = 0.$$

En vertu de l'identité (5, 4) cette relation peut s'écrire

$$(6, 1) \quad \cos a_1 \cos a_3 - \cos a_2 \cos a_4 = 0.$$

**7. Etude de la variation des dièdres.** Soient

$$(7, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \sin \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \quad \lambda = \sin \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4), \\ p_2 = \sin \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 + a_4), \quad \mu = \sin \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 + a_3 + a_4), \\ p_3 = \sin \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3 + a_4), \quad \nu = \sin \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4), \\ p_4 = \sin \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 - a_4), \quad \sigma = \sin \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4); \\ m = \frac{2 - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2 - \cos^2 a_3 - \cos^2 a_4 + 2 \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 \cos a_4}{2 \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \sin a_4}, \\ \pi = \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \sin a_4. \end{array} \right.$$

Il en résulte que

$$(7, 2) \quad 2\lambda\mu\nu\sigma = \pi(1-m), \quad 2p_1 p_2 p_3 p_4 = \pi(1+m).$$

Soient en outre

$$(7, 3) \quad t_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_1, \quad t_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_2, \quad t_3 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_3, \quad t_4 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_4.$$

Au moyen de ces nouveaux symboles les identités (5, 2) et (5, 3) s'écriront

$$(7, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda p_1 t_1^2 t_2^2 + \mu p_4 t_1^2 + \nu p_2 t_2^2 + 2 \sin a_2 \sin a_4 t_1 t_2 - \sigma p_3 = 0, \\ -\lambda p_2 t_2^2 t_3^2 - \nu p_1 t_2^2 + \mu p_3 t_3^2 + 2 \sin a_3 \sin a_1 t_2 t_3 - \sigma p_4 = 0, \\ \lambda p_3 t_3^2 t_4^2 - \mu p_2 t_3^2 - \nu p_4 t_4^2 + 2 \sin a_4 \sin a_2 t_3 t_4 - \sigma p_1 = 0, \\ -\lambda p_4 t_4^2 t_1^2 + \nu p_3 t_4^2 - \mu p_1 t_1^2 + 2 \sin a_1 \sin a_3 t_4 t_1 - \sigma p_2 = 0, \\ \lambda \mu t_1^2 t_3^2 + p_1 p_4 t_1^2 - p_2 p_3 t_3^2 + \nu \sigma = 0, \\ \lambda \nu t_2^2 t_4^2 + p_2 p_1 t_2^2 - p_3 p_4 t_4^2 + \mu \sigma = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (7, 4) définissent complètement la variation des dièdres de l'angle tétraèdre, supposé à angles faciaux constants.

**8. Angle tétraèdre circonscriptible.** Tant que le sommet de l'angle tétraèdre ne s'éloignera pas à l'infini, on pourra écrire les équations

des plans des quatre faces sous la forme

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0, \quad (i = 1, \dots, 4).$$

La condition pour que ces plans soient tangents à une sphère ou à un cône circulaire est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \pm 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \pm 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \pm 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & \pm 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant donne

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \pm \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \pm \sin \alpha_4 \sin \beta_1 \sin \beta_4 \\ \pm \sin \alpha_3 \sin \beta_3 \sin \beta_4 = 0. \end{aligned}$$

Si l'on fait disparaître de cette expression les signes doubles, en l'élevant trois fois au carré, elle se réduit, en vertu de (5, 1) à

$$(8, 1) \quad m^2 - 1 = 0,$$

ce qui se réduit, en vertu de (7, 2), à

$$(8, 2) \quad \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \pm \alpha_4 = 0.$$

Telle est la condition définitive pour que l'angle tétraèdre soit circonscriptible.

**9. Angle tétraèdre inscriptible.** Si les quatre axes de l'angle tétraèdre sont des éléments d'un cône circulaire, leurs cosinus directeurs doivent satisfaire, tant que le sommet de l'angle tétraèdre ne s'éloignera pas à l'infini, à des équations de la forme

$$Al_i + Bm_i + Cn_i = \pm D, \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Pour que cela ait lieu, il faut que

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \pm 1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & \pm 1 \\ l_3 & m_3 & n_3 & \pm 1 \\ l_4 & m_4 & n_4 & \pm 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sans faire de calcul, on peut écrire le développement de ce déterminant, parce qu'on sait qu'il se rapporte aux  $\beta$  de la même façon que le

déterminant de tout à l'heure se rapportait aux  $\alpha$ . La condition définitive pour que l'angle tétraèdre soit inscriptible est donc

$$(9, 1) \quad \beta_1 \pm \beta_2 \pm \beta_3 \pm \beta_4 \equiv 0.$$

**10. Angle tétraèdre à déformation décomposée.** Le discriminant de celle des équations (7, 4) qui lie  $t_1$  à  $t_2$  pris par rapport à  $t_2$  est

$$-\lambda\mu p_1 p_4 t_1^4 + m\pi t_1^2 + \nu\sigma p_2 p_3.$$

Pour que  $t_2$  soit une fonction rationnelle de  $t_1$ , il faut et il suffit que cette expression soit un carré parfait pour toute valeur de  $t_1$ . Son discriminant pris par rapport à  $t_1^2$  se réduit à  $\pi^2$ , quantité qui ne peut s'annuler tant que les axes de l'angle tétraèdre resteront distincts. Il faut donc qu'on ait en même temps

$$(10, 1) \quad \lambda\mu p_1 p_4 = 0, \quad \nu\sigma p_2 p_3 = 0.$$

Afin d'éviter des longueurs inutiles, je me borne à n'étudier que les cas limités par l'hypothèse suivante

$$(10, 2) \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 < \pi.$$

Dans l'hypothèse (10, 2) les équations (10, 1) ne peuvent être satisfaites que des quatre manières suivantes :

1.  $\mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_3, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_4;$
2.  $\lambda = 0, \quad \sigma = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_3 \equiv \pi, \quad \alpha_2 + \alpha_4 \equiv \pi;$
3.  $\lambda = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_2, \quad \alpha_3 \equiv \alpha_4;$
4.  $\mu = 0, \quad \sigma = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \pi, \quad \alpha_3 + \alpha_4 \equiv \pi.$

De même,  $t_1$  ne peut être une fonction rationnelle de  $t_2$  que lorsque

1.  $\mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_3, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_4;$
2.  $\lambda = 0, \quad \sigma = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_3 \equiv \pi, \quad \alpha_2 + \alpha_4 \equiv \pi;$
3.  $\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_3, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_4;$
4.  $\nu = 0, \quad \sigma = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 \equiv \pi, \quad \alpha_1 + \alpha_4 \equiv \pi.$

Cela laisse six cas différents à étudier. Puisqu'on n'obtient aucun nouveau cas en permutant les indices dans ceux déjà trouvés, il est inutile d'en chercher dans les autres équations du système (7, 4).

#### *Cas 1.*

$$\mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_3, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_4.$$

Les équations (7, 4) se mettent sous la forme

$$(10, 3) \quad \begin{cases} t_1 t_2 = \frac{\sin \alpha_2 - \epsilon \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \epsilon \alpha_1) \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \epsilon \alpha_1)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \epsilon^2 = 1, \quad t_3 = \epsilon t_1, \quad t_4 = \epsilon t_2. \end{cases}$$

Si l'on fait tendre  $\alpha_2$  vers  $\alpha_1$ , le produit  $t_1 t_2$  tend vers  $\cos \alpha_1$  lorsque  $\epsilon = 1$ , et vers  $\infty$  lorsque  $\epsilon = -1$ . On pourrait donc dire que le cas où  $\epsilon = 1$  est *parallélogrammatique*, et que celui où  $\epsilon = -1$  est *contre-parallélogrammatique*.

*Cas 2.*

$$\lambda = 0, \quad \sigma = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_3 \equiv \pi, \quad \alpha_2 + \alpha_4 \equiv \pi.$$

Les équations (7, 4) se mettent sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(10, 4) \quad \begin{cases} \frac{t_1}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_1)} = \frac{-t_2}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{t_3}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{-t_4}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4)}, \\ \frac{t_1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_1)} = \frac{-t_2}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{t_3}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{-t_4}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4)}. \end{cases}$$

*Cas 3.*

$$\lambda = 0, \quad \nu = 0, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_2, \quad \alpha_3 \equiv \alpha_4.$$

Les équations (7, 4) se mettent sous la forme

$$(10, 5) \quad \begin{cases} \sin(\alpha_3 - \alpha_1) t_1^2 + 2 \sin \alpha_3 t_1 t_2 - \sin(\alpha_1 + \alpha_3) = 0, \\ \sin(\alpha_3 - \alpha_1) t_1^2 - 2 \sin \alpha_1 t_1 t_4 + \sin(\alpha_1 + \alpha_3) = 0, \\ \sin^2 \alpha_3 (t_2^2 + 1) - \sin^2 \alpha_1 (t_4^2 + 1) = 0, \\ t_3 = t_1. \end{cases}$$

Ce cas n'est que partiellement rationnel.  $t_4$  et  $t_2$  sont les fonctions rationnelles de  $t_1$  ou de  $t_3$ , mais la réciproque n'est pas vraie. On pourrait l'appeler cas *bi-isogone*.

*Cas 4.*

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_3, \quad \alpha_4 \equiv \alpha_1.$$

Ce cas s'obtient en permutant les indices dans le cas précédent.

*Cas 5.*

$$\mu = 0, \quad \sigma = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \pi, \quad \alpha_3 + \alpha_4 \equiv \pi.$$

Les équations (7, 4) se mettent sous la forme

$$(10, 6) \quad \begin{cases} \sin(\alpha_1 + \alpha_3) t_1^2 t_2 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3) t_2 - 2 \sin \alpha_3 t_1 = 0, \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_3) t_1^2 t_4 + \sin(\alpha_3 - \alpha_1) t_4 + 2 \sin \alpha_1 t_1 = 0, \\ \sin^2 \alpha_1 t_2^2 (t_4^2 + 1) - \sin^2 \alpha_3 t_4^2 (t_2^2 + 1) = 0, \\ t_1 + t_3 = 0. \end{cases}$$

Ici, comme au *Cas 3*,  $t_4$  et  $t_2$  sont des fonctions rationnelles de  $t_1$  ou de  $t_3$ , sans que la réciproque soit vraie.

*Cas 6.*

$$\nu = 0, \quad \sigma = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 \equiv \pi, \quad \alpha_1 + \alpha_4 \equiv \pi.$$

Ce cas s'obtient en permutant les indices dans le cas précédent.

**11. Digression sur l'hexaèdre à faces quadrilatérales planes.** On pourrait se demander s'il est possible de trouver quatre points, un sur chaque axe de l'angle tétraèdre, et tous à distance invariable du sommet, qui demeurent constamment dans un plan. S'il en est ainsi, le volume compris entre deux sections de ce genre constituera un hexaèdre à faces quadrilatérales planes déformable.

Les quatre points auront pour coordonnées

$$x_i = l_i \rho_i, \quad y_i = m_i \rho_i, \quad z_i = n_i \rho_i, \quad (i = 1, \dots, 4).$$

La condition pour que ces points soient dans un plan est

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 1/\rho_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 1/\rho_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 1/\rho_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 & 1/\rho_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant se développe comme suit :

$$(11, 1) \quad \frac{1}{\rho_1} \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \beta_3 - \frac{1}{\rho_2} \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 \sin \beta_4 \\ + \frac{1}{\rho_3} \sin \alpha_4 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 - \frac{1}{\rho_4} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \beta_2 = 0,$$

En vertu de (5, 2), (5, 3), (7, 3) l'équation (11, 1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$(11, 2) \quad (\lambda p_1 t_1^2 t_2^2 - \mu p_4 t_1^2 + \nu p_2 t_2^2 + \sigma p_3) \frac{t_1(1+t_2^2)}{\rho_1} \\ - (\lambda p_1 t_1^2 t_2^2 + \mu p_4 t_1^2 - \nu p_2 t_2^2 + \sigma p_3) \frac{t_2(1+t_1^2)}{\rho_2} \\ + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_4 \frac{t_1^2 t_2(1+t_2^2)}{\rho_3} - 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{t_1 t_2^2(1+t_1^2)}{\rho_4} = 0.$$

Pour que la section en question soit plane, il faut et il suffit que les deux courbes représentées par la première des équations (7, 4) et par (11, 2) aient au moins une branche en commun. Un calcul direct, quoique long, démontre que ceci ne peut avoir lieu que lorsque

$$(11, 3) \quad \begin{cases} \alpha_1 \equiv \alpha_3, & \alpha_2 \equiv \alpha_4, & \rho_1 = \rho_3, & \rho_2 = \rho_4; \\ t_1 t_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)}, & t_3 = -t, & t_4 = -t_2. \end{cases}$$

Ainsi l'angle tétraèdre doit être contre-parallélogrammatique, dans le sens du No. 10, et les points où la section plane coupe les axes alternatifs doivent être à la même distance du sommet.

**12. Quadrilatère plan. Cas limite de l'angle tétraèdre.** Si l'on pose

$$(12, 1) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \zeta_1 \left[ \frac{r_1}{\rho} - \frac{\pi}{2} (1 - \zeta_1) \right], & \alpha_3 = \zeta_3 \left[ \frac{r_3}{\rho} - \frac{\pi}{2} (1 - \zeta_3) \right], \\ \alpha_2 = \zeta_2 \left[ \frac{r_2}{\rho} - \frac{\pi}{2} (1 - \zeta_2) \right], & \alpha_4 = \zeta_4 \left[ \frac{r_4}{\rho} - \frac{\pi}{2} (1 - \zeta_4) \right], \end{cases}$$

où  $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = \zeta_3^2 = \zeta_4^2 = 1$ , et qu'on fasse tendre  $\rho$  vers  $\infty$  pendant que  $r_1, r_2, r_3, r_4$  restent constants et finis, chaque  $\alpha$  tendra soit vers 0 soit vers  $\pi$ , et l'on aura

$$(12, 2) \quad \begin{cases} \rho \sin \alpha_1 \rightarrow r_1, & \rho \sin \alpha_2 \rightarrow r_2, & \rho \sin \alpha_3 \rightarrow r_3, & \rho \sin \alpha_4 \rightarrow r_4, \\ \cos \alpha_1 \rightarrow \zeta_1, & \cos \alpha_2 \rightarrow \zeta_2, & \cos \alpha_3 \rightarrow \zeta_3, & \cos \alpha_4 \rightarrow \zeta_4. \end{cases}$$

Les formules (4, 2) donnent à la limite

$$l_1 = \zeta_4 l_4 = \zeta_3 \zeta_4 l_3 = \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 l_2 = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 l_1,$$

ce qui montre qu'on doit prendre

$$(12, 3) \quad \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 = 1,$$

L'angle tétraèdre devient ainsi un quadrilatère plan. Sans la relation (12, 3) les  $\zeta$  auraient 16 déterminations. La relation (12, 3) réduit ce nombre à 8, *qui est le nombre de manières différentes dont l'angle tétraèdre peut tendre vers un quadrilatère plan.*

Les quantités introduites au No. 7 se comportent à la limite comme suit :

$$(12, 4) \left\{ \begin{array}{l} 2\rho p_1 \rightarrow (-\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4) \sin(-\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4) \frac{1}{4}\pi, \\ 2\rho p_2 \rightarrow (\zeta_1 r_1 - \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4) \sin(\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4) \frac{1}{4}\pi, \\ 2\rho p_3 \rightarrow (\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 - \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4) \sin(\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4) \frac{1}{4}\pi, \\ 2\rho p_4 \rightarrow (\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 - \zeta_4 r_4) \sin(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4) \frac{1}{4}\pi, \\ 2\rho\lambda \rightarrow (\zeta_1 r_1 - \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 - \zeta_4 r_4) \cos(\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4) \frac{1}{4}\pi, \\ 2\rho\mu \rightarrow (-\zeta_1 r_1 - \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4) \cos(-\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4) \frac{1}{4}\pi, \\ 2\rho\nu \rightarrow (-\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 - \zeta_4 r_4) \cos(-\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4) \frac{1}{4}\pi, \\ 2\rho\sigma \rightarrow -(\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4) \cos(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4) \frac{1}{4}\pi. \end{array} \right.$$

Si l'on pose

$$(12, 5) \left\{ \begin{array}{ll} p_1' = \frac{1}{2}(-\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4), & \lambda' = \frac{1}{2}(\zeta_1 r_1 - \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 - \zeta_4 r_4), \\ p_2' = \frac{1}{2}(\zeta_1 r_1 - \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4), & \mu' = \frac{1}{2}(-\zeta_1 r_1 - \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4), \\ p_3' = \frac{1}{2}(\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 - \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4), & \nu' = \frac{1}{2}(-\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 - \zeta_4 r_4), \\ p_4' = \frac{1}{2}(\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 - \zeta_4 r_4), & \sigma' = \frac{1}{2}(\zeta_1 r_1 + \zeta_2 r_2 + \zeta_3 r_3 + \zeta_4 r_4), \end{array} \right.$$

les équations (7, 4) se mettront sous la forme limite suivante\* :

$$(12, 6) \left\{ \begin{array}{l} \lambda' p_1' t_1^2 t_2^2 + \mu' p_4' t_1^2 + \nu' p_2' t_2^2 + 2\zeta_3 r_2 r_4 t_1 t_2 - \sigma' p_3' = 0, \\ -\lambda' p_2' t_2^2 t_3^2 - \nu' p_1' t_2^2 + \mu' p_3' t_3^2 + 2\zeta_4 r_3 r_1 t_2 t_3 - \sigma' p_4' = 0, \\ \lambda' p_3' t_3^2 t_4^2 - \mu' p_2' t_3^2 - \nu' p_4' t_4^2 + 2\zeta_1 r_4 r_2 t_3 t_4 - \sigma' p_1' = 0, \\ -\lambda' p_4' t_4^2 t_1^2 + \nu' p_3' t_4^2 - \mu' p_1' t_1^2 + 2\zeta_2 r_1 r_3 t_4 t_1 - \sigma' p_2' = 0, \\ \lambda' \mu' t_1^2 t_3^2 + p_1' p_4' t_1^2 - p_2' p_3' t_3^2 + \nu' \sigma' = 0, \\ \lambda' \nu' t_2^2 t_4^2 + p_2' p_1' t_2^2 - p_3' p_4' t_4^2 + \mu' \sigma' = 0. \end{array} \right.$$

\* La forme de ces équations rappelle celle des équations données par M. Koenigs dans ses *Leçons de Cinématique*, 1897, p. 254.

La forme limite de l'expression (6, 1), qui exprime que les plans diagonaux sont perpendiculaires s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (12, 7) \quad & \rho^2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_4) \\
 &= \frac{\zeta_1 \zeta_3 \cos(r_1/\rho) \cos(r_3/\rho) - \zeta_2 \zeta_4 \cos(r_2/\rho) \cos(r_4/\rho)}{1/\rho^2} \\
 &\rightarrow \frac{\zeta_1 \zeta_3}{2} \left( r_2 \rho \sin \frac{r_2}{\rho} \cos \frac{r_4}{\rho} + r_4 \rho \sin \frac{r_4}{\rho} \cos \frac{r_2}{\rho} \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. - r_1 \rho \sin \frac{r_1}{\rho} \cos \frac{r_3}{\rho} - r_3 \rho \sin \frac{r_3}{\rho} \cos \frac{r_1}{\rho} \right) \\
 &\rightarrow \frac{\zeta_1 \zeta_3}{2} (r_2^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_3^2).
 \end{aligned}$$

On retrouve là une formule bien connue de la théorie du quadrilatère plan\*.

Les équations (8, 2) et (9, 1) qui expriment que l'angle tétraèdre est ou bien circonscriptible ou bien inscriptible reposent sur l'hypothèse que le sommet reste à distance finie. Elles ne sont donc pas susceptibles d'être interprétées dans le sens de ce paragraphe.

Toutefois la condition

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \pm \alpha_4 \equiv 0$$

devient, lorsque le sommet de l'angle tétraèdre s'éloigne à l'infini

$$(12, 8) \quad r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = 0.$$

Darboux a démontré† que la condition (12, 8) exprime que le quadrilatère plan est circonscriptible à un cercle.

En somme, lorsque l'angle tétraèdre tend vers un quadrilatère plan, ses angles faciaux tendant soit vers 0 soit vers  $\pi$ , la plupart de ses propriétés subsistent. La relation (12, 3) démontre qu'il faut qu'un nombre pair des angles faciaux tendent vers la même limite.

Il est évident, d'une part, que l'angle tétraèdre, dont les angles faciaux sont égaux deux à deux, ne tendra vers un quadrilatère plan à déformation décomposée que si les angles égaux tendent vers la même limite. D'autre part, il est évident que l'angle tétraèdre, dont les angles faciaux sont supplémentaires deux à deux, ne tendra vers un quadrilatère plan à déformation décomposée que si les angles supplémentaires tendent vers des limites différentes.

\* Cf. *Leçons de Cinématique* de M. Bricard, 1927, t. 2, p. 157.

† *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1879, p. 64.

**13. Quadrilatère plan. Etude directe.** Il sera utile d'identifier les formules obtenues dans l'étude du quadrilatère comme cas limite de l'angle tétraèdre avec celles qu'on obtient directement en partant d'un quadrilatère plan.

Soient  $r_1, r_2, r_3, r_4$  les côtés du quadrilatère, et soient  $(\epsilon_1 a_1, \epsilon_1 b_1, \epsilon_1 c_1), (\epsilon_2 a_2, \epsilon_2 b_2, \epsilon_2 c_2), (\epsilon_3 a_3, \epsilon_3 b_3, \epsilon_3 c_3), (\epsilon_4 a_4, \epsilon_4 b_4, \epsilon_4 c_4)$ , où

$$\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = \epsilon_4^2 = 1,$$

les cosinus directeurs des côtés, orientés dans un sens circulaire, comme l'indique la figure (13, 1).

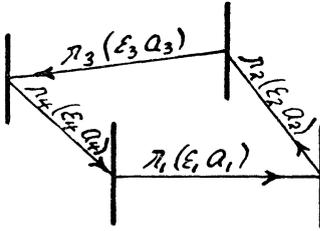


Fig. 13, 1.

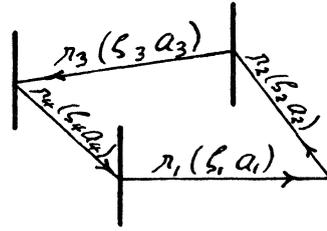


Fig. 13, 2.

Sur la figure le premier cosinus directeur est représenté entre parenthèses. Les vecteurs  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) peuvent s'identifier avec ceux des mêmes noms dans mon exposé de la théorie de l'angle tétraèdre, parce qu'ils sont perpendiculaires aux axes deux à deux.

On aura

$$(13, 1) \quad \begin{cases} r_1 \epsilon_1 a_1 + r_2 \epsilon_2 a_2 + r_3 \epsilon_3 a_3 = -r_4 \epsilon_4 a_4, \\ r_1 \epsilon_1 b_1 + r_2 \epsilon_2 b_2 + r_3 \epsilon_3 b_3 = -r_4 \epsilon_4 b_4, \\ r_1 \epsilon_1 c_1 + r_2 \epsilon_2 c_2 + r_3 \epsilon_3 c_3 = -r_4 \epsilon_4 c_4. \end{cases}$$

Si l'on élève au carré les équations (13, 1) et qu'on les ajoute, on obtiendra, en se servant de (4, 1), (5, 1), (7, 3), et de (12, 2),

$$(13, 2) \quad (\epsilon_1 r_1 - \epsilon_2 r_2 + \epsilon_3 r_3 + \epsilon_4 r_4)(\epsilon_1 r_1 - \epsilon_2 r_2 + \epsilon_3 r_3 - \epsilon_4 r_4) t_2^2 t_3^2 \\ + (\epsilon_1 r_1 - \epsilon_2 r_2 - \epsilon_3 r_3 - \epsilon_4 r_4)(\epsilon_1 r_1 - \epsilon_2 r_2 - \epsilon_3 r_3 + \epsilon_4 r_4) t_2^2 \\ + (\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 - \epsilon_3 r_3 + \epsilon_4 r_4)(\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 - \epsilon_3 r_3 - \epsilon_4 r_4) t_3^2 \\ + (\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 + \epsilon_3 r_3 - \epsilon_4 r_4)(\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 + \epsilon_3 r_3 + \epsilon_4 r_4) \\ - 8 \epsilon_1 \epsilon_3 \zeta_2 r_1 r_3 t_2 t_3 = 0.$$

Cette équation sera identique à la deuxième du système (12, 6), si l'on pose

$$(13, 3) \quad \frac{\epsilon_1}{\zeta_1} = \frac{\epsilon_2}{\zeta_2} = \frac{\epsilon_3}{\zeta_3} = \frac{\epsilon_4}{\zeta_4}.$$

Comme les équations (12, 6) se déduisent les unes des autres par une permutation des indices, et que les relations (13, 3) sont symétriques par rapport aux indices, il est inutile d'examiner les autres équations. On sait définitivement, maintenant, que le quadrilatère plan considéré comme cas limite de l'angle tétraèdre au No. précédent est identique à celui qui se déduit de l'orientation donnée par la figure (13, 2).

**14. Isogramme.** Lorsque les axes de l'angle tétraèdre totalement décomposé ne se rencontrent pas, même à l'infini, la chaîne de quatre corps ainsi constituée peut encore se mettre sous une forme déformable. Soit  $ABCD$  l'ordre dans lequel les quatre corps se succèdent, et soient  $r_1, r_2, r_1, r_2$  les longueurs des segments de droites perpendiculaires aux deux axes appartenant respectivement aux corps  $A, B, C$ , et  $D$ . Supposons en outre coïncidents les deux points de chaque axe où les deux segments de droites qui lui sont perpendiculaires aboutissent. On voit le schéma du mécanisme à la figure (14, 1).

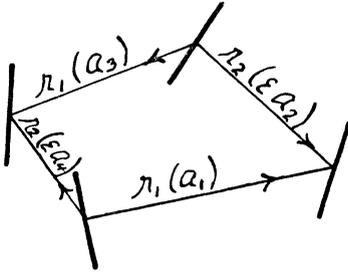


Fig. 14, 1.

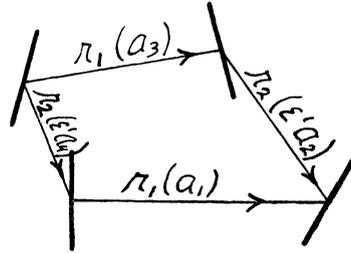


Fig. 14, 2.

Les flèches que portent les segments de droites perpendiculaires aux axes dans la figure indiquent le sens d'orientation du segment par rapport aux cosinus directeurs, dont le premier figure entre parenthèses sur le segment. La notation étant celle du No. 10, on a

$$(14, 1) \quad \begin{cases} \alpha_1 \equiv \alpha_3, & \alpha_2 \equiv \alpha_4, \\ \delta = \frac{\sin \alpha_2 - \epsilon \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, & t_1 t_2 = \delta, \quad t_3 = \epsilon t_1, \quad t_4 = \epsilon t_2. \end{cases}$$

$$(14, 2) \quad \begin{cases} r_1(a_1 + a_3) - \epsilon r_2(a_2 + a_4) = 0, \\ r_1(b_1 + b_3) - \epsilon r_2(b_2 + b_4) = 0, \\ r_1(c_1 + c_3) - \epsilon r_2(c_2 + c_4) = 0. \end{cases}$$

En projetant les équations (14, 2) sur n'importe lequel des quatre axes ou sur n'importe lequel des quatre segments perpendiculaires, on trouve toujours l'unique condition suivante, qui exprime que le mécanisme

est déformable :

$$(14, 3) \quad \frac{r_1}{\sin \alpha_1} = \frac{r_2}{\sin \alpha_2}.$$

M. Bennett\* a nommé ce mécanisme l'*isogramme*.

On peut également construire un isogramme en partant de l'angle tétraèdre totalement décomposé aux angles supplémentaires. En effet, si l'on adopte l'orientation des cosinus directeurs donnée par la figure (14, 2), on aura

$$(14, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_3 \equiv \pi, \quad a_2 + a_4 \equiv \pi, \\ \frac{t_1 = \epsilon' t_3}{1 + \epsilon' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1)^{\epsilon'}} = \frac{t_4 = -\epsilon' t_2}{1 - \epsilon' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1)^{\epsilon'}} \quad (\epsilon'^2 = 1). \end{array} \right.$$

$$(14, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1(a_1 - a_3) - \epsilon' r_2(a_2 - a_4) = 0, \\ r_1(b_1 - b_3) - \epsilon' r_2(b_2 - b_4) = 0, \\ r_1(c_1 - c_3) - \epsilon' r_2(c_2 - c_4) = 0. \end{array} \right.$$

En projetant les équations (14, 5) sur n'importe lequel des quatre axes ou sur n'importe lequel des quatre segments perpendiculaires, on retombe toujours sur l'unique condition (14, 3), qui exprime que ce mécanisme aussi est déformable.

---

\* *Engineering*, 1903, p. 777. Ce même mécanisme a été retrouvé par M. Borel, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, tome 33, 1908, p. 60.

Chapitre III.

APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE WEIERSTRASS.

**15. Formules préliminaires.** Je me servirai des fonctions elliptiques de Weierstrass pour établir l'existence des mécanismes, et des fonctions Eta et Théta de Jacobi pour les calculs numériques.

Soient

$$(15, 1) \quad fu = \frac{1}{2} \frac{\wp' u}{\wp u - e_1} = \frac{d \log \sqrt{(\wp u - e_1)}}{du},$$

où  $e_1 = \wp \omega_1, \quad e_2 = \wp \omega_2, \quad e_3 = \wp \omega_3, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \equiv 0.$

On aura

$$(15, 2) \quad \begin{cases} f' u = \frac{(\wp u - \wp \frac{1}{2} \omega_1) \{ \wp u - \wp (\frac{1}{2} \omega_1 + \omega_2) \}}{\wp u - e_1}, \\ f'^2 u = f^4 u - 6e_1 f^2 u + e_1^2 - 4e_2 e_3. \end{cases}$$

La structure de ces fonctions se fait voir dans les formules, aisément déduites :

$$(15, 3) \quad \begin{cases} fu = - \frac{\wp \omega_1 \wp(u - \omega_2) \wp(u - \omega_3)}{\wp \omega_2 \wp \omega_3 \wp u \wp(u + \omega_1)}, \\ f' u = - \frac{\wp^2 \omega_1 \wp(u - \frac{1}{2} \omega_1) \wp(u + \frac{1}{2} \omega_1) \times \wp(u - \frac{1}{2} \omega_1 - \omega_2) \wp(u + \frac{1}{2} \omega_1 + \omega_2)}{\wp^2(\frac{1}{2} \omega_1 + \omega_2) \wp^2 \frac{1}{2} \omega_1 \wp^2 u \wp(u - \omega_1) \wp(u + \omega_1)}. \end{cases}$$

On trouvera également que

$$(15, 4) \quad [ufu]_0 = -1, \quad [u^2 f' u]_0 = 1.$$

Pour avoir la *formule d'addition d'arguments* je constate qu'en vertu de

$$fu - fv = \frac{\wp \omega_1 \wp(u - v) \wp(u + v + \omega_1)}{\wp u \wp v \wp(u + \omega_1) \wp(v + \omega_1)},$$

les deux fonctions

$$[f(u+v) + f(u-v)] \quad \text{et} \quad \frac{fu f' v}{f^2 u - f^2 v}$$

ont les mêmes périodes, les mêmes zéros, et les mêmes pôles.

En faisant tendre  $v$  vers zéro, on trouve que

$$f(u+v) + f(u-v) = 2 \frac{fu f' v}{f^2 v - f^2 u},$$

d'où il s'ensuit que

$$(15, 5) \quad f(u+v) = \frac{fu f' v - fv f' u}{f^2 v - f^2 u} = \frac{f^2 u f^2 v - f^2 \frac{1}{2} \omega_1 f^2(\frac{1}{2} \omega_1 + \omega_2)}{fu f' v + fv f' u}.$$

Si l'on pose  $u+v \equiv a$ ,

les fonctions  $fu$  et  $fv$  devront satisfaire à une équation doublement quadratique, parce qu'elles ont chacune deux pôles. Cette équation s'obtient en faisant disparaître  $f'u$  et  $f'v$  de (15, 5) au moyen de (15, 2). C'est

$$(15, 6) \quad f^2 u f^2 v - f^2 a (f^2 u + f^2 v) - 2f' a f u f v + e_1^2 - 4e_2 e_3 = 0.$$

C'est en identifiant celle-ci avec les équations du système (7, 4) qu'on fera l'application des fonctions de Weierstrass.

Quelques formules qui seront utiles, et qui se déduisent facilement, sont les suivantes

$$(15, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u+\omega_1) = -fu, \quad f'(u+\omega_1) = -f'u, \quad f(u+\omega_2) = \frac{f \frac{1}{2} \omega_1 f(\frac{1}{2} \omega_1 + \omega_2)}{fu}, \\ f'(u+\omega_2) = -\frac{f \frac{1}{2} \omega_1 f(\frac{1}{2} \omega_1 + \omega_2) f' u}{f^2 u}, \quad f 2u = \frac{f^4 u - (e_1^2 - 4e_2 e_3)}{2fu f' u}. \end{array} \right.$$

**16. Introduction de constantes elliptiques.** Avant de m'occuper des équations (7, 4), il est nécessaire que j'introduise un certain nombre de constantes elliptiques.

Soient

$$(16, 1) \quad e_1 = -\frac{1}{3}m,$$

$$(16, 2) \quad \nu \frac{1}{2} \omega_1 - e_1 = -\frac{1}{2}.$$

Il en résulte que

$$(16, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m^2 - 1 = e_1^2 - 4e_2 e_3 = g_2^3 - 27g_3^2, \quad 1+m = -f^2 \frac{1}{2} \omega_1, \\ 1-m = f^2(\frac{1}{2} \omega_1 + \omega_2), \\ f'^2 u = f^4 u + 2mf^2 u + m^2 - 1, \quad 4m^2 - 3 = 3g_2, \quad m(8m^2 - 9) = 27g_3, \end{array} \right.$$

où la quantité  $m$  est celle introduite au No. 7.

Soient en outre

$$(16, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^2 \alpha = \frac{2\lambda \nu p_1 p_2}{\pi}, \quad f^2 \beta = \frac{2\lambda \mu p_2 p_3}{-\pi}, \quad f^2 \gamma = \frac{2\mu \nu p_2 p_4}{\pi}, \\ f^2(\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha) = \frac{2\lambda \nu p_3 p_4}{-\pi}, \quad f^2(\frac{1}{2} \omega_1 - \beta) = \frac{2\lambda \mu p_1 p_4}{\pi}, \\ f^2(\frac{1}{2} \omega_1 - \gamma) = \frac{2\mu \nu p_1 p_3}{-\pi}. \end{array} \right.$$

Les fonctions de la seconde ligne de (16, 4) se déduisent de celles de la première au moyen de la formule

$$f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - u) = f^2 \frac{1}{2}\omega_1 \frac{f^2 u - f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)}{f^2 u - f^2 \frac{1}{2}\omega_1}.$$

Je détermine davantage les constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  en posant

$$(16, 5) \left\{ \begin{array}{l} f' \alpha = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 f \beta f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma)}{\mu p_3} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 f \gamma f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta)}{\mu p_4}, \\ f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha) = \frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_4 f \beta f \gamma}{\mu p_2} = \frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_4 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta) f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma)}{-\mu p_1}, \\ f' \beta = \frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_2 f \gamma f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha)}{-\nu p_4} = \frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_2 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma) f \alpha}{-\nu p_1}, \\ f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta) = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_4 f \alpha f \gamma}{-\nu p_2} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_4 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha) f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma)}{\nu p_3}, \\ f' \gamma = \frac{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 f \alpha f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta)}{\lambda p_1} = \frac{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha) f \beta}{\lambda p_3}, \\ f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma) = \frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_1 f \beta f \alpha}{\lambda p_2} = \frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_1 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta) f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha)}{-\lambda p_4}. \end{array} \right.$$

Ces équations se déduisent au signe près de (16, 4) à l'aide de l'équation différentielle de la fonction  $fu$ . J'ai choisi les signes de telle façon que toutes les fonctions qui figurent dans ce système puissent s'éliminer linéairement en ne laissant que des identités. Les arguments  $\alpha, \beta, \gamma$  restent donc indépendants.

On a vu que

$$m^2 - 1 = e_1^2 - 4e_2 e_3 = g_2^3 - 27g_3^2,$$

et l'on se rappelle que  $m^2 - 1 = 0$  est la condition pour que l'angle tétraèdre soit circonscriptible. On voit donc que l'angle tétraèdre circonscriptible est toujours unicursal et réciproquement. A plus forte raison, tout angle tétraèdre capable de s'aplatir sous une forme réelle est unicursal.

### 17. Représentation paramétrique des dièdres. Je pose

$$(17, 1) \quad t_1 = \frac{if u_1}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta)}, \quad t_2 = \frac{if u_2}{f \alpha}, \quad t_3 = \frac{if u_3}{f \beta}, \quad t_4 = \frac{if u_4}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha)},$$

les  $t$  ayant les valeurs définies au No. 7.

Les équations (7, 4) se mettront sous la forme

$$(17, 2) \left\{ \begin{array}{l} f^2 u_1 f^2 u_2 - f^2 (\gamma - \omega_1) (f^2 u_1 + f^2 u_2) + 2f' (\gamma - \omega_1) f u_1 f u_2 + m^2 - 1 = 0, \\ f^2 u_2 f^2 u_3 - f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \gamma) (f^2 u_2 + f^2 u_3) \\ \qquad \qquad \qquad + 2f' (\frac{1}{2} \omega_1 - \gamma) f u_2 f u_3 + m^2 - 1 = 0, \\ f^2 u_3 f^2 u_4 - f^2 (\gamma - \omega_1) (f^2 u_3 + f^2 u_4) + 2f' (\gamma - \omega_1) f u_3 f u_4 + m^2 - 1 = 0, \\ f^2 u_4 f^2 u_1 - f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 + \gamma) (f^2 u_4 + f^2 u_1) \\ \qquad \qquad \qquad + 2f' (\frac{1}{2} \omega_1 + \gamma) f u_4 f u_1 + m^2 - 1 = 0, \\ f^2 u_1 f^2 u_3 - f^2 \frac{1}{2} \omega_1 (f^2 u_1 + f^2 u_3) + m^2 - 1 = 0, \\ f^2 u_2 f^2 u_4 - f^2 \frac{1}{2} \omega_1 (f^2 u_2 + f^2 u_4) + m^2 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Chacune de ces équations est de la forme (15, 6). La première admet les solutions elliptiques suivantes :

$$u_1 - u_2 \equiv \gamma + \omega_1, \quad u_1 + u_2 \equiv \gamma, \quad u_1 - u_2 \equiv -\gamma + \omega_1, \quad u_1 + u_2 \equiv -\gamma.$$

On peut donc remplacer le système (17, 2) par un système d'équations linéaires par rapport aux arguments. Il s'agit de le faire par un système qui soit poristique par rapport aux  $u$ . Le système suivant répond à tout besoin :

$$(17, 3) \left\{ \begin{array}{l} u_1 - u_2 \equiv \omega_1 + \gamma, \quad u_2 - u_3 \equiv \frac{1}{2} \omega_1 - \gamma, \quad u_3 - u_4 \equiv \omega_1 + \gamma, \\ u_4 - u_1 \equiv -(\frac{1}{2} \omega_1 + \gamma), \quad u_3 - u_1 \equiv u_4 - u_2 \equiv \frac{1}{2} \omega_1. \end{array} \right.$$

La représentation paramétrique des dièdres est ainsi donnée par les formules (17, 1) et (17, 3).

**18. Représentation elliptique des angles faciaux.** Je me propose, maintenant, de résoudre les équations (16, 4) et (16, 5) par rapport à  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Pour y parvenir il sera utile d'introduire de nouvelles quantités, qui joueront, du reste, des rôles importants dans la suite. Soient

$$(18, 1) \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\sin a_3 \sin a_4}{\sin a_1 \sin a_2}, \quad b = \frac{\sin a_1 \sin a_4}{\sin a_2 \sin a_3}, \quad c = \frac{\sin a_1 \sin a_3}{\sin a_2 \sin a_4}, \\ a' = \frac{\cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3 \cos a_4}{\sin a_1 \sin a_2}, \quad b' = \frac{\cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1 \cos a_4}{\sin a_2 \sin a_3}, \\ c' = \frac{\cos a_2 \cos a_4 - \cos a_3 \cos a_1}{\sin a_2 \sin a_4}. \end{array} \right.$$

On aura

$$(18, 2) \quad a'^2 = a^2 - 2am + 1, \quad b'^2 = b^2 - 2bm + 1, \quad c'^2 = c^2 - 2cm + 1;$$

$$(18, 3) \quad \begin{cases} f^2 \alpha = \frac{a'}{a} - m + \frac{1}{a}, & f^2 \beta = \frac{b'}{b} - m + \frac{1}{b}, & f^2 \gamma = \frac{c'}{c} - m + \frac{1}{c}, \\ f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha) = a - m - a', & f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta) = b - m - b', \\ & & f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma) = c - m - c'. \end{cases}$$

Quand on résout (18, 1) par rapport à  $a_4$ , on trouve, en se servant de (18, 2), que

$$(18, 4) \quad 2(m^2 - 1) \sin^2 \alpha_4 = (a + b) \left( m - \frac{1}{c} \right) + (1 + ab) \left( \frac{m}{c} - 1 \right) - \frac{a' b' c'}{c}.$$

Quand on résout (18, 2) et (18, 3) par rapport à  $a, b, c, a', b', c'$ , on trouve, que

$$(18, 5) \quad \begin{cases} a = 2 \frac{f^2 \alpha}{f'^2 \alpha} = \frac{1}{2} \frac{f'^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha)}{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha)}, & b = 2 \frac{f^2 \beta}{f'^2 \beta} = \frac{1}{2} \frac{f'^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta)}{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta)}, \\ & c = 2 \frac{f^2 \gamma}{f'^2 \gamma} = \frac{1}{2} \frac{f'^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma)}{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma)}, \\ a' = \frac{f^4 \alpha - (m^2 - 1)}{f'^2 \alpha} = \frac{-f^4(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha) + (m^2 - 1)}{2f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha)} = 2 \frac{f \alpha f^2 \alpha}{f' \alpha}, \\ b' = \frac{f^4 \beta - (m^2 - 1)}{f'^2 \beta} = \frac{-f^4(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta) + (m^2 - 1)}{2f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta)} = 2 \frac{f \beta f^2 \beta}{f' \beta}, \\ c' = \frac{f^4 \gamma - (m^2 - 1)}{f'^2 \gamma} = \frac{-f^4(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma) + (m^2 - 1)}{2f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma)} = 2 \frac{f \gamma f^2 \gamma}{f' \gamma}. \end{cases}$$

Pour avoir la représentation elliptique de  $\sin^2 \alpha_4$ , on n'a qu'à substituer dans (18, 4) les valeurs de  $a, b, c, a', b', c'$  fournies par (18, 5). Les carrés des sinus des trois autres angles faciaux s'en déduisent au moyen de (18, 1). On uniformise le radical qui reste dans les expressions des quatre sinus, ainsi trouvées, en posant

$$(18, 6) \quad \begin{aligned} P^2 &= 16f^2 \frac{1}{2}\omega_1 f^2 \alpha f^2 \beta f^2 \gamma \\ &\quad - \{ f^2 \alpha f^2 \beta f^2 \gamma - f^2 \frac{1}{2}\omega_1 \sum_{\alpha\beta\gamma} f^2 \alpha f^2 \beta \\ &\quad \quad + f^2 \frac{1}{2}\omega_1 f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2) \sum_{\alpha\beta\gamma} f^2 \alpha - f^4(\frac{1}{2}\omega_1) f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2) \}^2 \\ &= - \frac{\sigma^{12} \omega_1 \prod_s \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma)}{\sigma^8 \frac{1}{2}\omega_1 \prod_{\alpha\beta\gamma} \sigma^4 \alpha \sigma^2(\alpha + \omega_1) \sigma^2(\alpha - \omega_1)} \end{aligned}$$

Les valeurs qu'on trouve pour les carrés des cosinus en partant des carrés des sinus sont déjà des carrés parfaits. Il reste à contrôler les signes des huit fonctions ainsi trouvées. Ceci se fait de façon unique à l'aide

de (16, 5). On aboutit aux formules suivantes :

$$(18, 7) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_1 = \frac{P}{2f \frac{1}{2}\omega_1 f \alpha f' \beta f' \gamma}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{P}{4f \frac{1}{2}\omega_1 f \alpha f \beta f \gamma}, \\ \sin \alpha_3 = \frac{P}{2f \frac{1}{2}\omega_1 f' \alpha f \beta f' \gamma}, \quad \sin \alpha_4 = \frac{P}{2f \frac{1}{2}\omega_1 f' \alpha f' \beta f \gamma}, \\ \cos \alpha_1 = \frac{f^2 \alpha f^2 \beta f^2 \gamma - f^2(\frac{1}{2}\omega_1)[f^2 \alpha f^2 \beta + f^2 \alpha f^2 \gamma - f^2 \beta f^2 \gamma] + f^2(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)[f^2 \alpha - f^2 \beta - f^2 \gamma] + f^4(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)}{2f \frac{1}{2}\omega_1 f \alpha f' \beta f' \gamma}, \\ \cos \alpha_2 = \frac{f^2 \alpha f^2 \beta f^2 \gamma - f^2(\frac{1}{2}\omega_1)[f^2 \alpha f^2 \beta + f^2 \alpha f^2 \gamma + f^2 \beta f^2 \gamma] + f^2(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)[f^2 \alpha + f^2 \beta + f^2 \gamma] - f^4(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)}{-4f \frac{1}{2}\omega_1 f \alpha f \beta f \gamma}, \\ \cos \alpha_3 = \frac{f^2 \alpha f^2 \beta f^2 \gamma - f^2(\frac{1}{2}\omega_1)[f^2 \alpha f^2 \beta + f^2 \beta f^2 \gamma - f^2 \alpha f^2 \gamma] + f^2(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)[f^2 \beta - f^2 \alpha - f^2 \gamma] + f^4(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)}{2f \frac{1}{2}\omega_1 f' \alpha f \beta f' \gamma}, \\ \cos \alpha_4 = \frac{f^2 \alpha f^2 \beta f^2 \gamma - f^2(\frac{1}{2}\omega_1)[f^2 \alpha f^2 \gamma + f^2 \beta f^2 \gamma - f^2 \alpha f^2 \beta] + f^2(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)[f^2 \gamma - f^2 \alpha - f^2 \beta] + f^4(\frac{1}{2}\omega_1)f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2)}{2f \frac{1}{2}\omega_1 f' \alpha f' \beta f \gamma}. \end{array} \right.$$

Quand l'angle tétraèdre devient un *quadrilatère plan*, les sinus des  $\alpha$  s'annulent, alors que leurs rapports conservent des valeurs finies et non nulles. C'est donc la quantité  $P$  de l'équation (18, 6) qui s'annule, c'est-à-dire que

$$\Pi \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma) = 0.$$

Cette expression a huit facteurs qui correspondent aux huit manières, déjà mentionnées, dont l'angle tétraèdre peut tendre vers un quadrilatère plan. Pour les identifier on n'a qu'à consulter le tableau suivant, qui se déduit des formules (18, 7) :

$$(18, 8) \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \cos \alpha_1 & \text{s'annule avec } \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha \pm \beta \pm \gamma), \\ 1 + \cos \alpha_1 & \text{,, ,, } \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 + \alpha \pm \beta \pm \gamma), \\ 1 - \cos \alpha_2 & \text{,, ,, } \sigma\{\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha \pm (\beta + \gamma)\} \sigma\{\frac{1}{2}\omega_1 + \alpha \pm (\beta - \gamma)\}, \\ 1 + \cos \alpha_2 & \text{,, ,, } \sigma\{\frac{1}{2}\omega_1 + \alpha \pm (\beta + \gamma)\} \sigma\{\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha \pm (\beta - \gamma)\}, \\ 1 - \cos \alpha_3 & \text{,, ,, } \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 \pm \alpha - \beta \pm \gamma), \\ 1 + \cos \alpha_3 & \text{,, ,, } \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 \pm \alpha + \beta \pm \gamma), \\ 1 - \cos \alpha_4 & \text{,, ,, } \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 \pm \alpha \pm \beta - \gamma), \\ 1 + \cos \alpha_4 & \text{,, ,, } \sigma(\frac{1}{2}\omega_1 \pm \alpha \pm \beta + \gamma). \end{array} \right.$$

Quelle que soit la manière du passage à la limite, les expressions elliptiques des côtés du quadrilatère seront les suivantes :

$$(18, 9) \quad \frac{r_1}{2f'a f\beta f\gamma} = \frac{r_2}{f'a f'\beta f'\gamma} = \frac{r_3}{2f'a f'\beta f\gamma} = \frac{r_4}{2f'a f\beta f'\gamma} = \rho,$$

le facteur de proportionnalité  $\rho$  étant nécessaire pour déterminer elliptiquement les quatre côtés.

**19. Nécessité que  $m > -1$ .** Si l'on adopte l'hypothèse

$$(19, 1) \quad 0 < a_1, a_2, a_3, a_4 < \pi,$$

l'angle tétraèdre n'a plus de déformation réelle, lorsque  $m \leq -1$ . En effet les formules (18, 3) exigent que  $fa$  soit ou bien réelle ou bien purement imaginaire, et les formules (18, 5) exigent que  $f'a$  ait le même caractère à cet égard que  $fa$ , puisque  $a > 0$ . Si ces deux fonctions étaient purement imaginaires, on aurait

$$-|f'a|^2 = |fa|^4 - 2m|fa|^2 + m^2 - 1,$$

ce qui est impossible tant que  $m \leq -1$ .

Il faudrait donc que  $fa$  et  $f'a$  fussent toutes les deux réelles. La fonction  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - a)$ , donnée par

$$f(\frac{1}{2}\omega_1 - a) = \frac{\sqrt{\{-(m+1)\} f'a}}{f^2 a + m + 1},$$

serait également réelle, et les fonctions  $fu_2$  et  $fu_4$ , données par (cf. 17, 1)

$$fu_2 = -it_2 fa, \quad fu_4 = -it_4 f(\frac{1}{2}\omega_1 - a),$$

seraient toutes les deux purement imaginaires.

Mais la fonction  $f'u_2$ , donnée par (cf. 17, 3)

$$f'u_2 = \frac{fu_4 [f^2 u_2 + m + 1]}{\sqrt{\{-(m+1)\}}},$$

serait alors purement imaginaire aussi. Cela donnerait

$$-|f'u_2|^2 = |fu_2|^4 - 2m|fu_2|^2 + m^2 - 1,$$

ce qui est impossible, tant que  $m \leq -1$ . Il faut donc que  $m > -1$ .

**20. Etude des valeurs prises par la fonction  $fu$  lorsque  $-1 < m < 1$ .**

La fonction  $fu$  peut être définie par son équation différentielle et par la condition  $[ufu]_0 = -1$ . Cela revient à poser

$$(20, 1) \quad u = - \int_{fu}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2mz^2 + m^2 - 1)}} = - \int_{fu}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\{(z^2 + m - 1)(z^2 + m + 1)\}}},$$

où il est convenu que le chemin d'intégration ne passe pas par une singularité de la fonction à intégrer, et que la détermination du radical soit celle qui s'approche de

$$u = - \int_{fu}^{\infty} \frac{dz}{z^2},$$

lorsque  $z$  est infiniment grand.

Puisque  $-1 < m < 1$  par hypothèse, le point  $z = \sqrt{1-m}$  est situé sur l'axe des  $x$ . Soit  $A$  un chemin allant de  $z = \sqrt{1-m}$  à  $\infty$  de telle façon que le contour formé par  $A$  et par l'axe des  $x$  depuis  $z = \sqrt{1-m}$  jusqu'à  $\infty$  n'enferme pas de singularité de la fonction à intégrer (Fig. 20, 1).

Je définirai la quantité  $\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2$  de la manière suivante :

$$(20, 2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 &= - \int_A \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2mz^2 + m^2 - 1)}} \\ &= - \int_{\sqrt{1-m}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 + 2mx^2 + m^2 - 1)}}. \end{aligned}$$

Le quart de période  $\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2$  sera ainsi réel et négatif. On aura, du reste,

$$f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2) = 1 - m,$$

de même que précédemment.

Soit  $B$  un chemin allant de 0 à  $\infty$  de telle façon que le contour formé par  $B$ , par  $A$ , et par l'axe des  $x$  depuis 0 jusqu'à  $x = \sqrt{1-m}$  n'enferme

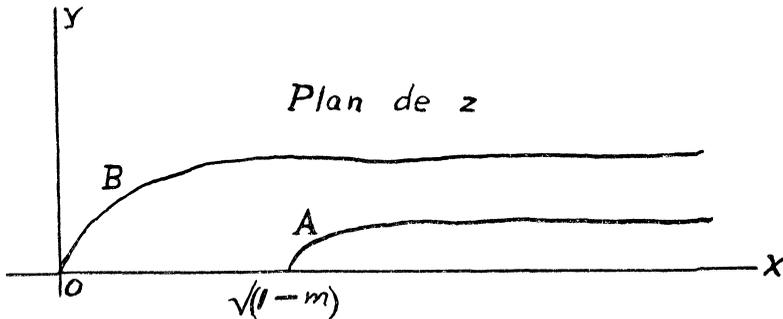


Fig. 20, 1.

pas de singularité de la fonction à intégrer. Je définirai la quantité  $\omega_2$  de la manière suivante :

$$(20, 3) \quad \omega_2 = - \int_B \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2mz^2 + m^2 - 1)}}.$$

Cette définition coïncide avec la notion de  $\omega_2$  qu'on a eue précédemment, parce qu'on a

$$f\omega_2 = 0.$$

En combinant (20, 2) avec (20, 3), on a

$$(20, 4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_1 &= -\int_{A-B} \frac{dz}{\sqrt{(z^4+2mz^2+m^2-1)}} \\ &= -i \int_0^{\sqrt{1-m}} \frac{dx}{\sqrt{\{(x^2+m+1)(1-m-x^2)\}}} \end{aligned}$$

Le quart de période  $\frac{1}{2}\omega_1$  est ainsi purement imaginaire d'amplitude égale à  $\frac{1}{2}(3\pi)$ .

La fonction  $fu$ , comme elle est définie par la formule (20, 1), est réelle et plus grande que  $\sqrt{1-m}$ , lorsque  $u$  varie de  $\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2$  (qui est réel et négatif) à 0. Lorsque  $u$  varie de 0 à  $-(\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2)$  (qui est réel et positif), la fonction  $fu$  est réelle et plus petite que  $-\sqrt{1-m}$ . Puisque

$$f(\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2-u) = f(\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2+u), \quad fu = -f(-u),$$

les valeurs que prend cette fonction quand  $u$  varie de  $\omega_1+2\omega_2$  à  $\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2$  et de  $-(\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2)$  à  $-(\omega_1+2\omega_2)$  sont symétriques à celles qu'elle prend quand  $u$  varie de  $(\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2)$  à 0 et de 0 à  $-(\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2)$ . Comme l'intervalle compris entre  $(\omega_1+2\omega_2)$  et  $-(\omega_1+2\omega_2)$  est une période, tout autre point de l'axe des  $x$  est congru à un point de cet intervalle. On sait donc que lorsque  $u$  est réel, la fonction  $fu$  est réelle, et  $f^2u \geq 1-m$ .

La fonction  $f'u$  peut être définie comme suit :

$$f'u = \sqrt{\{(f^2u+m-1)(f^2u+m+1)\}}.$$

Lorsque  $u$  est réel, il est évident, d'après ce que je viens de dire de  $fu$ , que  $f'u$  sera réelle également.

Puisque  $fu$  est impaire et  $f'u$  paire, il est évident que lorsque  $u$  est purement imaginaire,  $fu$  est purement imaginaire et  $f'u$  réelle.

Pour avoir les valeurs que prend  $fu$  lorsque  $u$  est complexe, on n'a qu'à faire appel à la formule d'addition (15, 5). Je pose

$$u = \sigma + i\tau,$$

où  $\sigma$  et  $\tau$  sont réels.

$$\text{On aura} \quad fu = \frac{f\sigma f' i\tau - f i\tau f' \sigma}{f^2 i\tau - f^2 \sigma}.$$

Pour que  $fu$  soit réelle il faut et il suffit que

$$\frac{f i\tau f' \sigma}{f^2 i\tau - f^2 \sigma} = 0.$$

Puisque  $\sigma$  et  $\tau$  sont réels, ceci ne peut avoir lieu que des quatre manières suivantes :

$$(20, 5) \quad \sigma \equiv \pm(\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2), \quad \tau \equiv 0, \quad i\tau \equiv \omega_1,$$

où il est entendu que le signe  $\equiv$  n'oblige jamais  $\sigma$  et  $\tau$  à prendre des valeurs imaginaires.

Pour que  $fu$  soit purement imaginaire il faut et il suffit que

$$\frac{f\sigma f'i\tau}{f^2i\tau - f^2\sigma} = 0.$$

Dans les mêmes conditions que tout à l'heure, ceci ne peut avoir lieu que des trois manières suivantes :

$$(20, 6) \quad i\tau \equiv \pm \frac{1}{2}\omega_1, \quad \sigma \equiv 0.$$

Pour avoir les valeurs que prend la fonction  $f'u$  je passe par l'intermédiaire de la fonction  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$ . En effet,  $f'u$  peut être donnée par

$$(20, 7) \quad f'u = \frac{-2\sqrt{\{-m+1\}}f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)}{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - u) + m + 1},$$

et sera purement imaginaire toutes les fois que  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  sera réelle, et réelle toutes les fois que  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  sera purement imaginaire.\* Grâce aux formules (20, 5) et (20, 6) on sait donc que  $f'(\sigma + i\tau)$  sera réelle et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - \sigma - i\tau)$  purement imaginaire toutes les fois que

$$(20, 8) \quad i\tau \equiv \omega_1, \quad i\tau \equiv 0, \quad \sigma \equiv 0.$$

De même,  $f'(\sigma + i\tau)$  sera purement imaginaire et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - \sigma - i\tau)$  réelle toutes les fois que

$$(20, 9) \quad \sigma \equiv \pm(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2), \quad i\tau \equiv \pm\frac{1}{2}\omega_1,$$

avec les mêmes restrictions sur le signe  $\equiv$  que tout à l'heure.

*En résumé,  $m$  étant compris entre  $-1$  et  $1$ , et  $t$  étant réel,  $fu$  sera réelle et  $f'(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  purement imaginaire toutes les fois que  $u$  se met sous l'une des formes*

$$u \equiv t, \quad u \equiv t + \omega_1, \quad u \equiv \pm(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2) + it.$$

*Dans les mêmes conditions  $fu$  sera purement imaginaire et  $f'(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  réelle quand*

$$u \equiv it, \quad u \equiv t \pm \frac{1}{2}\omega_1.$$

*Toujours dans les mêmes conditions,  $f'u$  sera réelle et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  purement imaginaire toutes les fois que*

$$u \equiv t, \quad u \equiv it, \quad u \equiv t + \omega_1.$$

*De la même façon  $f'u$  sera purement imaginaire et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  réelle lorsque*

$$u \equiv t \pm \frac{1}{2}\omega_1, \quad u \equiv it \pm (\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2).$$

\* Pour avoir tous les cas où  $f'u$  est ou bien réelle ou bien purement imaginaire, il faudrait recourir à sa formule d'addition. Comme seuls les cas où  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  est réelle ou purement imaginaire peuvent intervenir dans l'étude de la déformation réelle de l'angle tétraèdre, la formule (20, 7) donnera tous les renseignements dont on a besoin ici.

Aux figures (20, 2) et (20, 3) j'ai indiqué les chemins sur lesquels les fonctions en question prennent des valeurs réelles et purement imaginaires à l'intérieur d'un parallélogramme élémentaire.

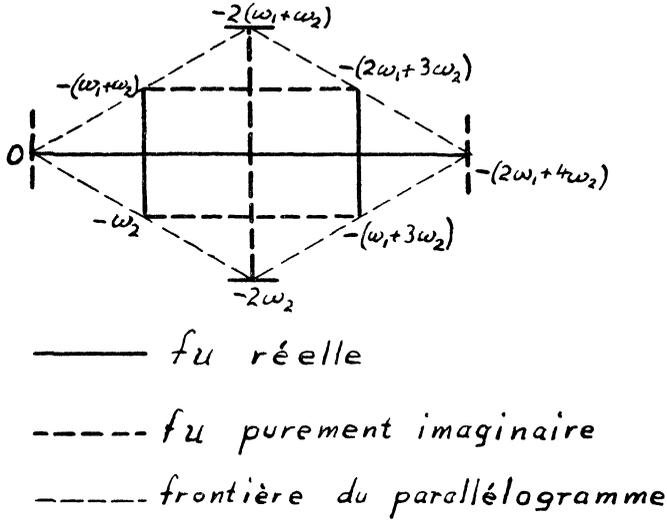


Fig. 20, 2.

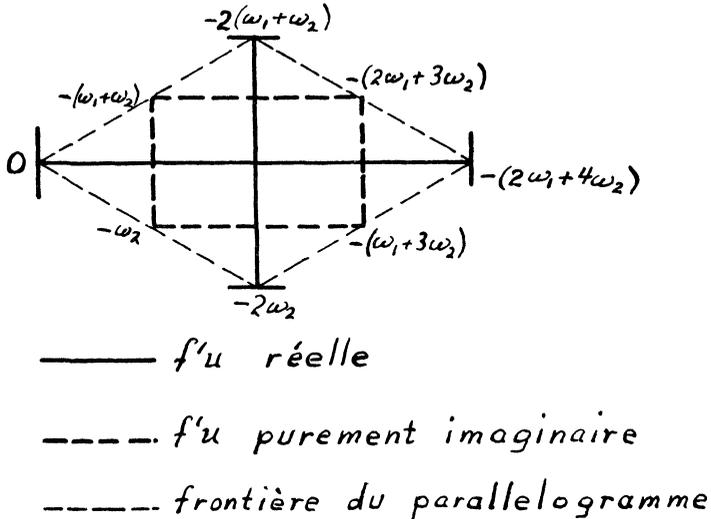


Fig. 20, 3.

21. Valeurs des arguments constants qui donnent un angle tétraèdre réel lorsque  $-1 < m < 1$ . Il arrivera dans la suite qu'on ait

à calculer les angles faciaux de l'angle tétraèdre à l'aide des formules (18, 7) en se donnant arbitrairement l'invariant  $m$  et les trois arguments  $\alpha, \beta, \gamma$ . Il importe donc de savoir quelles valeurs de ces constantes donnent lieu à un angle tétraèdre réel.

On a vu au No. 19 que  $f\alpha$  et  $f'a$  doivent être toutes les deux ou bien réelles ou bien purement imaginaires. Le même raisonnement s'applique aux fonctions  $f\beta, f'\beta, f\gamma, f'\gamma$ . Les formules (18, 5) montrent en outre que  $f2\alpha, f2\beta, f2\gamma$  doivent être réelles, pour que  $a', b', c'$  soient réels. Cela n'a pourtant aucun inconvénient, parce que, d'après les conclusions du No. 20,  $f2u$  est toujours réelle, quand  $fu$  et  $f'u$  sont toutes les deux ou bien réelles ou bien purement imaginaires.

Dans les formules (18, 7) les numérateurs des expressions qui donnent les cosinus des  $\alpha$  sont déjà réels, grâce aux conditions qu'on vient d'imposer. Les dénominateurs de ces expressions contiennent le facteur purement imaginaire  $f\frac{1}{2}\omega_1$  et un produit de fonctions qui sera réel ou purement imaginaire suivant le caractère du produit  $f\alpha f\beta f\gamma$ . Il faut donc que ce produit soit purement imaginaire. Ceci peut avoir lieu de quatre manières différentes, ainsi qu'on le voit au tableau (21, 1).

TABLEAU (21, 1).

Cas	réelles	purement imaginaires	du même signe	de l'autre signe	Conséquences
I	$f\beta$ $f\gamma$	$f\alpha$	$\mu, \nu$	$\lambda$	$\cos(\alpha_3 - \alpha_4) > \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ $\cos(\alpha_2 - \alpha_3) > \cos(\alpha_1 - \alpha_4)$ $\cos(\alpha_2 - \alpha_4) > \cos(\alpha_1 - \alpha_3)$
II	$f\alpha$ $f\gamma$	$f\beta$	$\lambda, \mu, \nu$		$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) > \cos(\alpha_3 - \alpha_4)$ $\cos(\alpha_1 - \alpha_4) > \cos(\alpha_2 - \alpha_3)$ $\cos(\alpha_2 - \alpha_4) > \cos(\alpha_1 - \alpha_3)$
III	$f\alpha$ $f\beta$	$f\gamma$	$\lambda, \nu$	$\mu$	$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) > \cos(\alpha_3 - \alpha_4)$ $\cos(\alpha_2 - \alpha_3) > \cos(\alpha_1 - \alpha_4)$ $\cos(\alpha_1 - \alpha_3) > \cos(\alpha_2 - \alpha_4)$
IV		$f\alpha$ $f\beta$ $f\gamma$	$\lambda, \mu$	$\nu$	$\cos(\alpha_3 - \alpha_4) > \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ $\cos(\alpha_1 - \alpha_4) > \cos(\alpha_2 - \alpha_3)$ $\cos(\alpha_1 - \alpha_3) > \cos(\alpha_2 - \alpha_4)$
tous cas			$p_1, p_2, p_3, p_4$		$\cos(\alpha_k - \alpha_i) > \cos(\alpha_j + \alpha_k)$

J'explique ce tableau. Si, par exemple,  $f\alpha$  est réelle, et  $f\beta$  et  $f\gamma$  purement imaginaires, les formules (18, 3) donnent, puisque  $m > -1$ ,

$$a+1-a' > 0, \quad b+1+b' > 0, \quad c+1+c' > 0,$$

ce qui s'écrit également, moyennant (18, 1), sous la forme

$$\begin{aligned} \cos(a_2 - a_3) > \cos(a_1 + a_4), \quad \cos(a_2 - a_4) > \cos(a_1 + a_3), \\ \cos(a_3 - a_4) > \cos(a_1 + a_2), \end{aligned}$$

ou encore, moyennant (7, 1), sous la forme

$$p_2 p_3 > 0, \quad p_2 p_4 > 0, \quad p_3 p_4 > 0.$$

D'autre part, on a  $p_1 p_2 p_3 p_4 = \frac{1}{2}\pi(1+m) > 0$ , ce qui fait que tous les  $p$  ont le même signe.

Cela étant, les formules (16, 4) donnent dans les hypothèses actuelles

$$\lambda\mu < 0, \quad \lambda\nu < 0, \quad \mu\nu > 0,$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \cos(a_3 - a_4) > \cos(a_1 - a_2), \quad \cos(a_2 - a_3) > \cos(a_1 - a_4), \\ \cos(a_2 - a_4) > \cos(a_1 - a_3). \end{aligned}$$

Ce sont les résultats qui figurent au tableau (21, 1) sous le titre *Cas I*. Les trois autres cas se déduisent de la même façon.

Puisqu'il est impossible de donner aux trois quantités  $\lambda, \mu, \nu$  d'autres dispositions que celles indiquées au tableau (21, 1), ce tableau est complet en ce sens que tout l'angle tétraèdre appartient à un de ses quatre cas. Le signe de  $\sigma$  dépend de celui du discriminant  $m^2 - 1$ .

Pour que l'angle tétraèdre soit réel il faut encore s'assurer que  $P^2$  des formules (18, 6) et (18, 7) est positif. Cela se fera plus facilement dans la notation du chapitre suivant. Je laisse donc cette considération temporairement de côté.

Dans les calculs futurs je me bornerai à n'étudier qu'un seul des quatre cas du tableau (21, 1). Comme la plupart des formules qui établissent l'existence des mécanismes dont je vais exposer la théorie sont les mêmes dans tous les quatre cas, cette convention ne diminuera guère la généralité de ces mécanismes. Ce n'est qu'au point de vue du calcul numérique que les différences entre les quatre cas exigent quatre systèmes de formules distincts. Je ne me borne donc, en somme, qu'à prendre tous mes exemples numériques dans le même cas. J'adopte pour cela le *Cas IV*. Il sera donc convenu que les fonctions

$$(21, 2) \quad f\alpha, \quad f\beta, \quad f\gamma, \quad f'\alpha, \quad f'\beta, \quad f'\gamma$$

soient purement imaginaires, et que les fonctions

$$f(\tfrac{1}{2}\omega_1 - \alpha), \quad f(\tfrac{1}{2}\omega_1 - \beta), \quad f(\tfrac{1}{2}\omega_1 - \gamma), \quad f'(\tfrac{1}{2}\omega_1 - \alpha), \quad f'(\tfrac{1}{2}\omega_1 - \beta), \quad f'(\tfrac{1}{2}\omega_1 - \gamma)$$

soient réelles.

D'après les conclusions du No. 20, ces conditions ne peuvent se réaliser que lorsque  $\alpha, \beta, \gamma$  sont de la forme  $r \pm \frac{1}{2}\omega_1$  où  $r$  est réel. Comme  $r + \frac{1}{2}\omega_1$  est congru à un point  $r' - \frac{1}{2}\omega_1$ , où  $r'$  est réel, on peut poser sans perdre de généralité

$$(21, 3) \quad \alpha = r_1 + \frac{1}{2}\omega_1, \quad \beta = r_2 + \frac{1}{2}\omega_1, \quad \gamma = r_3 + \frac{1}{2}\omega_1,$$

où  $r_1, r_2, r_3$  sont réels.

**22. Etude de la déformation réelle de l'angle tétraèdre lorsque  $-1 < m < 1$ .** Puisque  $f'a, f'\beta, f'\gamma$  sont purement imaginaires,  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha), f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta), f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma)$  seront réelles. On voit donc, en se rapportant aux formules (17, 1), qu'il faudra que  $fu_1$  et  $fu_4$  soient purement imaginaires, et que  $fu_2$  et  $fu_3$  soient réelles, pour que les quatre  $t$  soient réels. Mais en vertu de (17, 3) et de (21, 1)

$$fu_2 = f[\frac{1}{2}\omega_1 - (r_3 - u_1)], \quad fu_3 = f(\frac{1}{2}\omega_1 - u_1), \quad fu_4 = f(r_3 - u_1)$$

où  $r_3$  est réel. Ainsi les deux fonctions

$$fu_1, \quad f(r_3 - u_1)$$

doivent être purement imaginaires, et les deux fonctions

$$f[\frac{1}{2}\omega_1 - (r_3 - u_1)], \quad f(\frac{1}{2}\omega_1 - u_1)$$

sont réelles. D'après les conclusions du No. 20, ceci ne peut avoir lieu que si  $u_1$  est de la forme  $s \pm \frac{1}{2}\omega_1$ , où  $s$  est réel. Comme  $s + \frac{1}{2}\omega_1$  est congru à  $s' - \frac{1}{2}\omega_1$  où  $s'$  est réel, on peut poser définitivement

$$(22, 1) \quad u_1 \equiv s + \frac{1}{2}\omega_1, \quad u_2 \equiv s - r_3 + \omega_1, \quad u_3 \equiv s + \omega_1, \quad u_4 \equiv s - r_3 - \frac{1}{2}\omega_1.$$

Comme on passe d'un des cas du tableau (21, 1) à chaque autre par une permutation des indices des  $a$ , on est sûr que les trois premiers cas donneraient des déformations de même nature que celle définie par les équations (22, 1) pour le quatrième cas.

On sait donc que l'angle tétraèdre n'a qu'une seule déformation réelle lorsque  $-1 < m < 1$ , et que celle-ci est continue et simplement périodique.

**23. Etude des valeurs prises par la fonction  $fu$  lorsque  $m > 1$ .** Comme avant, cette fonction peut être définie par l'intégrale

$$(23, 1) \quad u = - \int_{fu}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2mz^2 + m^2 - 1)}} = - \int_{fu}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\{(z^2 + m - 1)(z^2 + m + 1)\}}}.$$

Maintenant toutes les singularités de la fonction à intégrer sont situées sur l'axe des  $y$ , les points  $y = \pm \sqrt{m+1}$  étant plus éloignés de l'origine

que les points  $y = \pm\sqrt{m-1}$ . Soit  $A$  un chemin allant de  $z = \sqrt{-(m+1)}$  à  $\infty$  de telle façon que le contour formé par  $A$  et par l'axe des  $y$  depuis  $y = \sqrt{m+1}$  jusqu'à  $\infty$  n'enferme pas de singularité de la fonction à intégrer. (Fig. 23, 1.)

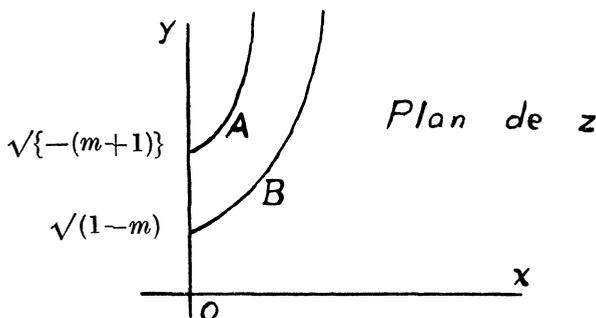


Fig. 23, 1.

Je définirai la quantité  $\frac{1}{2}\omega_1$  par

$$(23, 2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_1 &= -\int_A \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2mz^2 + m^2 - 1)}} \\ &= -i \int_{\sqrt{m+1}}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{\{(y^2 - m + 1)(y^2 - m - 1)\}}} \end{aligned}$$

Le quart de période  $\frac{1}{2}\omega_1$  est ainsi purement imaginaire, d'amplitude égale à  $\frac{1}{2}(3\pi)$ , et l'on aura, comme précédemment,  $f^2 \frac{1}{2}\omega_1 = -(m+1)$ .

Soit  $B$  un chemin allant de  $z = \sqrt{1-m}$  à  $\infty$  de telle façon que le contour formé par  $A$ , par  $B$ , et par l'axe des  $y$  depuis  $y = \sqrt{m-1}$  jusqu'à  $y = \sqrt{m+1}$  n'enferme pas de singularités de la fonction à intégrer. Je définirai la quantité  $\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2$  comme suit :

$$\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 = -\int_B \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2mz^2 + m^2 - 1)}}.$$

Cette définition coïncide bien avec la notion précédente :

$$f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2) = 1 - m.$$

On aura par soustraction d'intégrales

$$(23, 3) \quad \begin{aligned} \omega_2 &= -\int_{B-A} \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2mz^2 + m^2 - 1)}} \\ &= -\int_{\sqrt{m-1}}^{\sqrt{m+1}} \frac{dy}{\sqrt{\{(y^2 - m + 1)(m + 1 - y^2)\}}} \end{aligned}$$

Le demi-période  $\omega_2$  est ainsi réelle et négative.

La fonction  $fu$ , comme elle est définie par la formule (23, 1) est réelle quand  $u$  est réel. Lorsque  $u$  croît de 0 à  $-\omega_2$ ,  $fu$  est négative; elle est positive lorsque  $u$  croît de  $-\omega_2$  à  $-2\omega_2$ . Puisque  $fu$  est une fonction impaire, elle sera purement imaginaire lorsque  $u$  est purement imaginaire.

La fonction  $f'u$ , peut être définie comme suit :

$$f'u = \sqrt{\{(f^2u+m-1)(f^2u+m+1)\}}$$

ce qui montre que  $f'u$  est réelle lorsque  $u$  est réel. Comme elle est paire,  $f'u$  sera encore réelle lorsque  $u$  est purement imaginaire.

Comme avant, je fais appel à la formule d'addition (15, 5) pour repérer les valeurs prises par  $fu$  et par  $f'u$  lorsque  $u$  est complexe. Soient  $\sigma$  et  $\tau$  réels.

$$f(\sigma+i\tau) = \frac{f\sigma f' i\tau - f i\tau f' \sigma}{f^2 i\tau - f^2 \sigma}.$$

Pour que  $f(\sigma+i\tau)$  soit réelle, il faut et il suffit que

$$\frac{f i\tau f' \sigma}{f^2 i\tau - f^2 \sigma} = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que des deux manières suivantes :

$$(23, 4) \quad \tau \equiv 0, \quad i\tau \equiv \omega_1,$$

où il est entendu que le signe  $\equiv$  n'impose pas de valeur imaginaire à la quantité  $\tau$ .

Pour que  $f(\sigma+i\tau)$  soit purement imaginaire, il faut et il suffit que

$$\frac{f\sigma f' i\tau}{f^2 i\tau - f^2 \sigma} = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que des quatre manières suivantes :

$$(23, 5) \quad \sigma \equiv \omega_2, \quad i\tau \equiv \pm \frac{1}{2}\omega_1, \quad \sigma \equiv 0,$$

$\sigma$  et  $\tau$  étant toujours réels.

En utilisant, comme avant, la formule (20, 7), on arrive aux conclusions définitives suivantes :

$fu$  est réelle et  $f'(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  purement imaginaire toutes les fois que,  $t$  étant réel,

$$u \equiv t, \quad u \equiv t + \omega_1.$$

De même,  $fu$  est purement imaginaire, et  $f'(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  réelle, quand

$$u \equiv it, \quad u \equiv it + \omega_2, \quad u \equiv t \pm \frac{1}{2}\omega_1.$$

$f'u$  est réelle et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  purement imaginaire, quand

$$u \equiv it, \quad u \equiv it + \omega_2, \quad u \equiv t, \quad u \equiv t + \omega_1.$$

$f'u$  est purement imaginaire et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  réelle, quand

$$u \equiv t \pm \frac{1}{2}\omega_1.$$

Aux figures (23, 2) et (23, 3) j'ai indiqué les chemins sur lesquels  $fu$  et  $f'u$  prennent des valeurs réelles et purement imaginaires à l'intérieur d'un parallélogramme élémentaire.

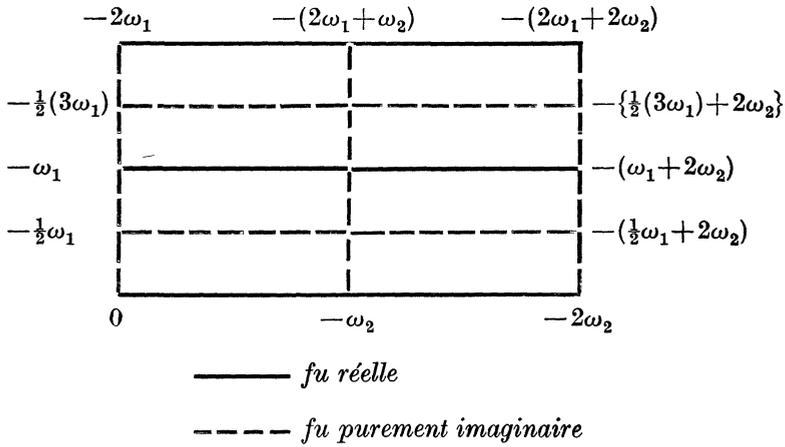


Fig. 23, 2.

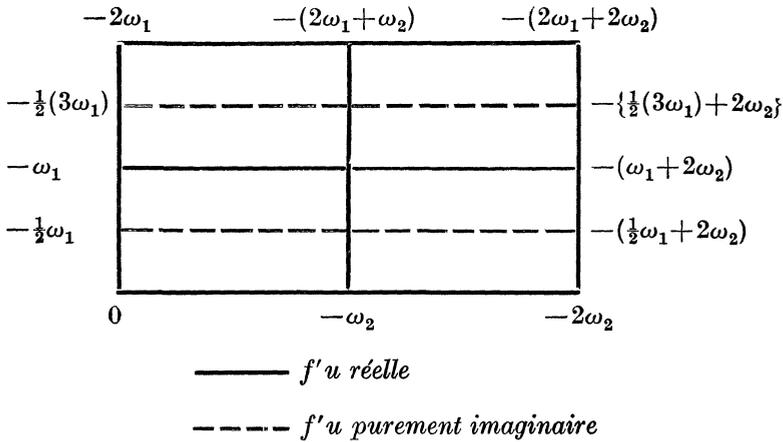


Fig. 23, 3.

**24. Valeurs des arguments constants qui donnent un angle tétraèdre réel lorsque  $m > 1$ .** Le tableau (21, 1) résulte d'une discussion qui est encore valable lorsque  $m > 1$ . Comme avant, j'adopte pour les calculs futurs le *Cas IV*, c'est-à-dire l'hypothèse (21, 2). Les conclusions du No. 23 font voir que  $\alpha, \beta, \gamma$  doivent encore être de la forme  $r \pm \frac{1}{2}\omega_1$ , ou  $r$  est réel.

Cependant, il n'existe plus de  $r'$  réel, tel que  $r + \frac{1}{2}\omega_1$  soit congru à  $r' - \frac{1}{2}\omega_1$ . Le mieux qu'on puisse faire consiste donc à poser

$$(24, 1) \quad \alpha = r_1 + \epsilon_1 \frac{1}{2}\omega_1, \quad \beta = r_2 + \epsilon_2 \frac{1}{2}\omega_1, \quad \gamma = r_3 + \epsilon_3 \frac{1}{2}\omega_1,$$

où  $r_1, r_2, r_3$  sont réels, et où  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = 1$ .

Comme avant, je remettrai au chapitre suivant la discussion du signe de  $P^2$ .

**25. Etude des déformations réelles de l'angle tétraèdre lorsque  $m > 1$ .** Comme au No. 22 il faut que  $fu_1$  et  $fu_4$  soient purement imaginaires et que  $fu_2$  et  $fu_3$  soient réelles.

En vertu de (17, 3) et de (21, 1) on a, cette fois

$$fu_2 = \epsilon_3 f[\frac{1}{2}\omega_1 - (r_3 - u_1)], \quad fu_3 = f(\frac{1}{2}\omega_1 - u_1), \quad fu_4 = \epsilon_3 f(r_3 - u_1),$$

où  $r_3$  est réel, et où  $\epsilon_3^2 = 1$ .

Cela veut dire que les deux fonctions

$$fu_1, \quad f(r_3 - u_1)$$

doivent être purement imaginaires, et les deux fonctions

$$f[\frac{1}{2}\omega_1 - (r_3 - u_1)], \quad f(\frac{1}{2}\omega_1 - u_1)$$

réelles. D'après les conclusions du No. 23, ceci ne peut avoir lieu que si  $u_1$  est de la forme  $s \pm \frac{1}{2}\omega_1$ . Comme il n'existe pas de  $s'$  réel tel que  $s' - \frac{1}{2}\omega_1$  soit congru à  $s + \frac{1}{2}\omega_1$ , ce sont deux déformations distinctes, toutes les deux réelles, de l'angle tétraèdre. Elles sont données, d'une part par

$$(25, 1) \quad \begin{cases} u_1 \equiv s + \frac{1}{2}\omega_1, & u_2 \equiv s - r_3 + (\epsilon_3 + 1) \frac{1}{2}\omega_1, & u_3 \equiv s + \omega_1, \\ & u_4 \equiv s - r_3 - \epsilon_3 \frac{1}{2}\omega_1, \end{cases}$$

et d'autre part par

$$(25, 2) \quad \begin{cases} u_1 \equiv s - \frac{1}{2}\omega_1, & u_2 \equiv s - r_3 + (1 - \epsilon_3) \frac{1}{2}\omega_1, & u_3 \equiv s, \\ & u_4 \equiv s - r_3 + \epsilon_3 \frac{1}{2}\omega_1. \end{cases}$$

Ainsi l'angle tétraèdre a deux déformations réelles, distinctes, continues, simplement périodiques, et sans forme commune, lorsque  $m > 1$ .

**26. Dégénérescence de la fonction  $fu$  lorsque  $m = 1$ .** L'inversion de l'intégrale

$$(26, 1) \quad u = - \int_{fu}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2z^2)}} = p \int_{\sqrt{(fu-p)|(fu+p)}}^1 \frac{dt}{(1+t^2)},$$

où  $p^2 = -2$ , donne

$$(26, 2) \quad fu = \frac{-\sqrt{2}}{\text{sh}(\sqrt{2}u)}, \quad f'u = \frac{2}{\text{sh}(\sqrt{2}u) \text{th}(\sqrt{2}u)}.$$

La définition suivante de  $\frac{1}{2}\omega_1$  est compatible avec toutes les notions précédentes :

$$(26, 3) \quad \frac{1}{2}\omega_1 = - \int_p^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^4 + 2z^2)}} = p \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}.$$

La demi période  $\omega_2$  est infinie.

Les formules (26, 2) font voir que  $fu$  et  $f'u$  sont toutes les deux réelles lorsque  $u$  est réel, et que  $fu$  est purement imaginaire et  $f'u$  réelle, lorsque  $u$  est purement imaginaire.

Comme avant, je pose  $u = \sigma + i\tau$ , où  $\sigma$  et  $\tau$  sont réels. La formule d'addition donne

$$(26, 4) \quad f(\sigma + i\tau) = \frac{-\sqrt{2} \{ \text{sh}(\sqrt{2}\sigma) \cos(\sqrt{2}\tau) - i \text{ch}(\sqrt{2}\sigma) \sin(\sqrt{2}\tau) \}}{\text{sh}^2(\sqrt{2}\sigma) \cos^2(\sqrt{2}\tau) + \text{ch}^2(\sqrt{2}\sigma) \sin^2(\sqrt{2}\tau)}.$$

On en conclut, comme dans les cas précédents que,  $t$  étant réel,

*$fu$  est réelle et  $f'(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  purement imaginaire, quand*

$$u \equiv t, \quad u \equiv t + \frac{\pi i \sqrt{2}}{2}, \quad (\text{mod } \pi i \sqrt{2});$$

*$fu$  est purement imaginaire et  $f'(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  réelle, quand*

$$u \equiv it, \quad u \equiv t \pm \frac{i\pi \sqrt{2}}{4}, \quad (\text{mod } \pi i \sqrt{2});$$

*$f'u$  est réelle et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  purement imaginaire, quand*

$$u \equiv it, \quad u \equiv t, \quad u \equiv t + \frac{\pi i \sqrt{2}}{2}, \quad (\text{mod } \pi i \sqrt{2});$$

*$f'u$  est purement imaginaire et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - u)$  réelle, quand*

$$u \equiv t \pm \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}, \quad (\text{mod } \pi i \sqrt{2}).$$

Les chemins sur lesquels  $fu$  et  $f'u$  prennent des valeurs réelles et purement imaginaires sont indiqués sur les figures (26, 1) et (26, 2)

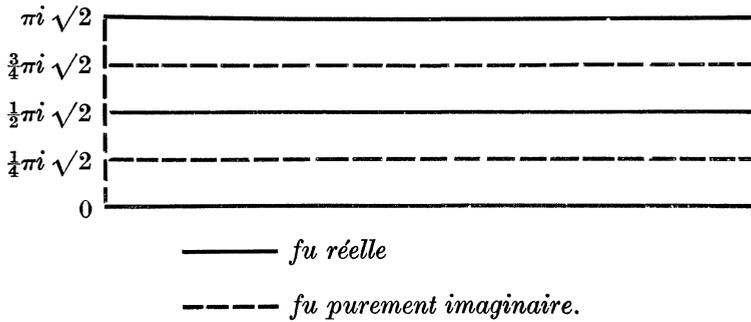


Fig. 26, 1.

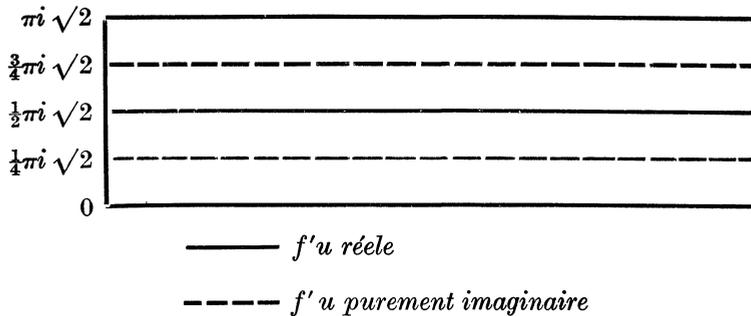


Fig. 26, 2.

**27. Valeurs des arguments constants qui donnent un angle tétraèdre réel lorsque  $m = 1$ .** Le tableau (21, 1) résulte d'une discussion qui est encore valable lorsque

$$\sigma = \sin \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0,$$

et par conséquent  $m = 1$ . Comme avant, j'adopte pour les calculs futurs le *Cas IV*, c'est-à-dire l'hypothèse (21, 2). D'après les conclusions du No. 26, on voit donc que  $a, \beta, \gamma$  doivent être de la forme  $r \pm \frac{1}{4}(\pi i \sqrt{2})$ , où  $r$  est réel. Comme il n'existe pas de  $r'$  réel, tel que  $r' - \frac{1}{4}(\pi i \sqrt{2})$  soit congru à  $r + \frac{1}{4}(\pi i \sqrt{2})$ , on n'a qu'à poser

$$(27, 1) \quad a = \frac{r_1}{\sqrt{2}} + \epsilon_1 \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}, \quad \beta = \frac{r_2}{\sqrt{2}} + \epsilon_2 \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}, \quad \gamma = \frac{r_3}{\sqrt{2}} + \epsilon_3 \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}.$$

On aura

$$(27, 2) \quad \begin{cases} f\alpha = \frac{\epsilon_1 i \sqrt{2}}{\operatorname{ch} r_1}, & f\beta = \frac{\epsilon_2 i \sqrt{2}}{\operatorname{ch} r_2}, & f\gamma = \frac{\epsilon_3 i \sqrt{2}}{\operatorname{ch} r_3}, \\ f'\alpha = -2\epsilon_1 i \frac{\operatorname{th} r_1}{\operatorname{ch} r_1}, & f'\beta = -2\epsilon_2 i \frac{\operatorname{th} r_2}{\operatorname{ch} r_2}, & f'\gamma = -2\epsilon_3 i \frac{\operatorname{th} r_3}{\operatorname{ch} r_3}. \end{cases}$$

Pour que les rapports des sinus des angles faciaux soient positifs, il est évident, d'après les formules (18, 7), que les trois fonctions

$$\frac{f'\alpha}{f\alpha}, \quad \frac{f'\beta}{f\beta}, \quad \frac{f'\gamma}{f\gamma},$$

doivent avoir le même signe. Les formules (27, 2) font voir alors que  $r_1, r_2, r_3$  doivent se trouver tous du même côté de 0 sur l'axe réel.

La quantité  $P^2$  des formules (18, 6) et (18, 7) s'écrit maintenant sous la forme suivante :

$$(27, 3) \quad P^2 = 64 \frac{\{4 \operatorname{ch}^2 r_1 \operatorname{ch}^2 r_2 \operatorname{ch}^2 r_3 - [1 - \operatorname{ch}^2 r_1 - \operatorname{ch}^2 r_2 - \operatorname{ch}^2 r_3]^2\}}{\operatorname{ch}^4 r_1 \operatorname{ch}^4 r_2 \operatorname{ch}^4 r_3}$$

$$= 64 \frac{\operatorname{sh}(-r_1 + r_2 + r_3) \operatorname{sh}(r_1 - r_2 + r_3) \operatorname{sh}(r_1 + r_2 - r_3) \operatorname{sh}(r_1 + r_2 + r_3)}{\operatorname{ch}^4 r_1 \operatorname{ch}^4 r_2 \operatorname{ch}^4 r_3}.$$

Il faut que cette quantité soit positive pour que les sinus des angles faciaux soient réels. La formule (27, 3) fait voir que pour cela *il faut et il suffit, si les trois  $r$  sont négatifs, que le plus petit d'entre eux soit plus grand que la somme des deux autres, et s'ils sont positifs, que le plus grand d'entre eux soit moindre que la somme des deux autres.*

Les formules (27, 2) permettent de calculer  $f\alpha, f\beta, f\gamma, f'\alpha, f'\beta, f'\gamma$  lorsque  $r_1, r_2, r_3$  sont donnés arbitrairement. On peut ensuite calculer les angles faciaux de l'angle tétraèdre au moyen des formules (18, 7). Les trois  $\epsilon$  dont les carrés sont égaux à  $un$  sont de détermination complètement arbitraire.

**28. Remarque relative au No. précédent.** On se rappelle que (cf. 7, 2)

$$1 - m = \frac{2\lambda\mu\nu\sigma}{\pi}.$$

La discussion du No. 27 ne s'applique intégralement que lorsque  $\sigma = 0$ . Quand c'est  $\lambda$  qui s'annule, par exemple, les deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont

infinies, ainsi que le fait voir les formules (16, 4) et (26, 2). Cependant, on a toujours

$$(28, 1) \left\{ \begin{array}{l} f^2(\alpha - \omega_2) = \frac{2\mu\sigma p_3 p_4}{-\pi} = -\frac{a'}{a} - m + \frac{1}{a}, \\ f^2(\beta - \omega_2) = \frac{2\nu\sigma p_1 p_4}{\pi} = -\frac{b'}{b} - m + \frac{1}{b}, \\ f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 - \beta) = \frac{2\nu\sigma p_2 p_3}{-\pi} = b - m + b', \\ f^2(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 - \alpha) = \frac{2\mu\sigma p_1 p_2}{\pi} = a - m + a', \\ a = 2 \frac{f^2(\alpha - \omega_2)}{f'^2(\alpha - \omega_2)}, \quad b = 2 \frac{f^2(\beta - \omega_2)}{f'^2(\beta - \omega_2)}, \\ a' = -2 \frac{f(\alpha - \omega_2) f^2(\alpha - \omega_2)}{f'(\alpha - \omega_2)}, \quad b' = -2 \frac{f(\beta - \omega_2) f^2(\beta - \omega_2)}{f'(\beta - \omega_2)}. \end{array} \right.$$

Il suffit donc, dans ce cas, de remplacer (27, 1) par

$$(28, 2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \omega_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}} + \epsilon_1 \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}, \quad \beta - \omega_2 = \frac{r_2}{\sqrt{2}} + \epsilon_2 \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}, \\ \gamma = \frac{r_3}{\sqrt{2}} + \epsilon_3 \frac{\pi i \sqrt{2}}{4}, \end{array} \right.$$

et le raisonnement s'achève comme auparavant.

Les formules (18, 7) s'écrivent avec  $f(\alpha - \omega_2)$  et  $f(\beta - \omega_2)$  aussi facilement qu'avec  $f\alpha$  et  $f\beta$ .

Je n'insiste pas davantage sur ces détails, parce que je n'aurai pas l'occasion de m'en servir dans la suite.

**29. Etude des déformations réelles de l'angle tétraèdre lorsque  $m = 1$ .** Je commence par le cas étudié au No. 27, c'est-à-dire celui où

$$\sigma = \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0.$$

De même qu'au No. 25, il faut que les deux fonctions

$$fu_1, \quad f\left(\frac{r_3}{\sqrt{2}} - u_1\right)$$

soient purement imaginaires, et que les deux fonctions

$$f\left[\frac{1}{2}\omega_1 - \left(\frac{r_3}{\sqrt{2}} - u_1\right)\right], \quad f\left(\frac{1}{2}\omega_1 - u_1\right)$$

soient réelles. D'après les conclusions du No. 26, ceci ne peut avoir lieu que si  $u_1$  est de la forme  $(s/\sqrt{2}) \pm \frac{1}{4}(\pi i/\sqrt{2})$ , où  $s$  est réel. Comme avant, ce sont deux cas distincts, qui donnent lieu aux deux déformations suivantes :

$$(29, 1) \quad \begin{cases} u_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(s + \frac{\pi i}{2}\right), & u_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (s + \pi i), \\ u_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[s - r_3 + (1 + \epsilon_3) \frac{\pi i}{2}\right], & u_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(s - r_3 - \epsilon_3 \frac{\pi i}{2}\right), \end{cases} \quad (\text{mod } \pi i \sqrt{2});$$

$$(29, 2) \quad \begin{cases} u_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(s - \frac{\pi i}{2}\right), & u_3 \equiv \frac{s}{\sqrt{2}}, \\ u_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[s - r_3 + (1 - \epsilon_3) \frac{\pi i}{2}\right], & u_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(s - r_3 + \epsilon_3 \frac{\pi i}{2}\right), \end{cases} \quad (\text{mod } \pi i \sqrt{2}).$$

*Ainsi l'angle tétraèdre a deux déformations réelles, distinctes, et continues, lorsque  $m = 1$ . Puisque les fonctions auxquelles on a affaire n'ont plus de période réelle,  $s$  peut prendre la valeur  $\infty$ , ce qui fait que les quatre dièdres sont alors de mesure nulle. Cette forme de l'angle tétraèdre est commune aux deux déformations. C'est la forme où l'angle tétraèdre s'aplatit de telle façon que ses quatre faces couvrent entièrement une fois un plan. Ceci n'est possible que lorsque  $\sigma = 0$ .*

Quand c'est  $\lambda$  qui s'annule, on doit considérer les formules (17, 1) sous la forme suivante, qui n'est qu'une autre façon d'écrire la même chose :

$$(29, 3) \quad \begin{cases} t_1 = \frac{if(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 - \beta)}{f(u_1 - \omega_2)}, & t_2 = \frac{if(a - \omega_2)}{f(u_2 - \omega_2)}, & t_3 = \frac{if(\beta - \omega_2)}{f(u_3 - \omega_2)}, \\ t_4 = \frac{if(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 - a)}{f(u_4 - \omega_2)}. \end{cases}$$

Les fonctions qui doivent être purement imaginaires sont maintenant, moyennant (17, 3) et (28, 2),

$$f(u_1 - \omega_2), \quad f\left[\frac{r_3}{\sqrt{2}} - (u_1 - \omega_2)\right],$$

et celles qui doivent être réelles sont

$$f[\frac{1}{2}\omega_1 - (u_1 - \omega_2)], \quad f\left\{\frac{1}{2}\omega_1 - \left[\frac{r_3}{\sqrt{2}} - (u_1 - \omega_2)\right]\right\}.$$

On voit que les choses se passent de la même façon que tout à l'heure, à condition de remplacer dans les formules (29, 1) et (29, 2)  $u_1, u_2, u_3, u_4$  par  $u_1 - \omega_2, u_2 - \omega_2, u_3 - \omega_2, u_4 - \omega_2$ . La forme  $s = \infty$ , qui est commune aux deux déformations sera celle pour laquelle les quatre dièdres de l'angle tétraèdre sont tous égaux à  $\pi$ . C'est encore une forme aplatie. Cette fois, pourtant, les faces de l'angle tétraèdre s'entrecroisent, et le tout ne couvre qu'une partie du plan dans lequel il s'est aplati.

Les cas où  $\mu = 0$  et où  $\nu = 0$  donnent des résultats analogues. Je les laisse de côté.

Chapitre IV.

APPLICATION DES FONCTIONS ETA ET THETA DE JACOBI.

**30. Formules empruntées aux *Fundamenta Nova*.** Dans ses *Fundamenta Nova* Jacobi a introduit deux fonctions entières, dont les séries convergent rapidement pour les valeurs de l'argument auxquelles on aura affaire, et qui permettent d'évaluer numériquement les fonctions elliptiques qui se sont introduites au chapitre précédent. Ce sont les fonctions  $H(v, k)$  et  $\Theta(v, k)$  définies de la manière suivante.

Soient

$$(30, 1) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)}}, & K' &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k'^2 \sin^2 \phi)}}, & k'^2 &= 1-k^2, \\ q &= e^{-\pi K'/K}, & r &= \frac{\pi v}{2K}. \end{aligned} \right.$$

Les sus-dites fonctions seront définies comme suit :\*

$$(30, 2) \quad \left\{ \begin{aligned} H(v, k) &= 2q^{\frac{1}{2}} \sin r - 2q^{\frac{3}{2}} \sin 3r + 2q^{\frac{5}{2}} \sin 5r - 2q^{\frac{7}{2}} \sin 7r + \dots, \\ \Theta(v, k) &= 1 - 2q \cos 2r + 2q^4 \cos 4r - 2q^9 \cos 6r + \dots \end{aligned} \right.$$

On en déduit

$$(30, 3) \quad \left\{ \begin{aligned} H(K-v) &= 2q^{\frac{1}{2}} \cos r + 2q^{\frac{3}{2}} \cos 3r + 2q^{\frac{5}{2}} \cos 5r + 2q^{\frac{7}{2}} \cos 7r + \dots, \\ \Theta(K-v) &= 1 + 2q \cos 2r + 2q^4 \cos 4r + 2q^9 \cos 6r + \dots \end{aligned} \right.$$

Ces fonctions jouissent des propriétés suivantes : †

$$(30, 4) \quad \left\{ \begin{aligned} H(v+2K) &= -Hv, & \Theta(v+2K) &= \Theta v, \\ H(v+2iK') &= -q^{-1} e^{-\pi v/K} Hv, & H(v+iK') &= iq^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi v/2K} \Theta v, \\ \Theta(v+iK') &= iq^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi v/2K} Hv, & \Theta(v+2iK') &= -q^{-1} e^{-\pi v/K} \Theta v, \\ H(2mK+2niK') &= 0, & \Theta[2mK+(2n+1)iK'] &= 0, \\ & & & (m, n) \text{ des entiers,} \\ H(-v) &= -Hv, & \Theta(-v) &= \Theta v, & \left[ \frac{1}{v} Hv \right]_{v=0} &= \frac{HK \Theta 0}{\Theta K}, \\ HK &= \sqrt{\left( \frac{2kK}{\pi} \right)}, & \Theta 0 &= \sqrt{\left( \frac{2k'K}{\pi} \right)}, & \Theta K &= \sqrt{\left( \frac{2K}{\pi} \right)}, \\ k^{\frac{1}{2}} &= \frac{HK}{\Theta K}, & k'^{\frac{1}{2}} &= \frac{\Theta 0}{\Theta K}, & \Theta^4 K &= \Theta^4 0 + H^4 K, \\ H^2(K-v)\Theta^2 0 &= \Theta^2 v H^2 K - H^2 v \Theta^2 K, \\ \Theta^2(K-v)\Theta^2 0 &= \Theta^2 v \Theta^2 K - H^2 v H^2 K. \end{aligned} \right.$$

\* *Fundamenta Nova*, p. 180.

† *Fundamenta Nova*, pp. 173-175.

**31. Expressions des fonctions  $fu, f'u$  lorsque  $-1 < m < 1$ .** Je reprends les définitions des périodes données au chapitre précédent. On a en effet (cf. 20, 2 et 20, 4) :

$$(31, 1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 &= - \int_{\sqrt{1-m}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 + 2mx^2 + m^2 - 1)}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\{1 - \frac{1}{2}(1+m) \sin^2 \theta\}}}, \end{aligned}$$

en posant 
$$x^2 = \frac{2}{\sin^2 \theta} - (1+m) = \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \theta} + 1 - m,$$

et

$$(31, 2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_1 &= -i \int_0^{\sqrt{1-m}} \frac{dx}{\sqrt{(-x^4 - 2mx^2 - m^2 + 1)}} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\{1 - \frac{1}{2}(1-m) \sin^2 \theta\}}}, \end{aligned}$$

en posant 
$$x^2 = \frac{1}{2} \frac{(1-m^2) \sin^2 \theta}{1 - (1-m) \sin^2 \theta}.$$

Je pose donc

$$(31, 3) \quad \begin{cases} k^2 = \frac{1}{2}(1+m), & k'^2 = \frac{1}{2}(1-m), & K = -\sqrt{2}(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2), \\ & & iK' = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1. \end{cases}$$

Si je pose

$$(31, 4) \quad v = -\sqrt{2} u,$$

une fonction dont les périodes en  $u$  étaient  $2\omega_1, 2\omega_2$  aura  $2K + 2iK'$  et  $2K - 2iK'$  pour périodes en  $v$ .

Ainsi la fonction 
$$\frac{\Theta(K-v)}{Hv}$$

a les mêmes périodes, les mêmes zéros, et les mêmes pôles que la fonction  $fu$ . En faisant tendre  $v$  vers zéro, on trouve

$$(31, 5) \quad fu = \sqrt{2} \frac{HK \Theta 0 \Theta(K-v)}{\Theta^2 K H v}.$$

De même, la fonction

$$\frac{\Theta v H(K-v)}{H^2 v}$$

a les mêmes périodes, les mêmes pôles, et les mêmes zéros que  $f'u$ . En faisant tendre  $v$  vers zéro, on trouve

$$(31, 6) \quad f'u = 2 \frac{HK \Theta 0 \Theta v H(K-v)}{\Theta^2 K H^2 v}.$$

On se rappelle que les arguments  $\alpha, \beta, \gamma$  doivent être de la forme  $r + \frac{1}{2}\omega_1$ , où  $r$  est réel (cf. No. 21). Je pose donc

$$(31, 7) \quad \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}(a - iK'), \quad \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}(b - iK'), \quad \gamma = \frac{-1}{\sqrt{2}}(c - iK'),$$

où  $a, b, c$  sont réels, compris entre 0 et  $4K$ .

On aura

$$(31, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f\alpha = i\sqrt{2} \frac{HK \Theta 0 H(K-a)}{\Theta^2 K \Theta a}, \quad f'a = 2i \frac{HK \Theta 0 Ha \Theta(K-a)}{\Theta^2 K \Theta^2 a}, \\ f(\frac{1}{2}\omega_1 - a) = -\sqrt{2} \frac{HK \Theta 0 \Theta(K-a)}{\Theta^2 K Ha}, \\ f'(\frac{1}{2}\omega_1 - a) = -2 \frac{HK \Theta 0 \Theta a H(K-a)}{\Theta^2 K H^2 a}; \end{array} \right.$$

et d'autres expressions semblables en  $b, c$  pour les mêmes fonctions de  $\beta, \gamma$ .

La quantité  $P^2$  des formules (18, 6) et (18, 7) a des périodes  $\omega_1$  et  $2\omega_2$  par rapport à  $a, \beta$ , ou  $\gamma$ . Puisqu'on connaît ses zéros et ses pôles, on peut l'écrire sous forme d'un quotient de fonctions *Eta* et *Thêta*, qui aura les périodes  $2K$  et  $2iK'$  par rapport à  $a, b$ , ou  $c$ . En effet, on trouve

$$(31, 9) \quad P^2 = \frac{64H^{12}K \Theta^8 0 H(-a+b+c) H(a-b+c) H(a+b-c) H(a+b+c)}{\Theta^{12} K \Theta^4 a \Theta^4 b \Theta^4 c}$$

Il faut que cette quantité soit positive. Les seules facteurs douteux sont les quatre fonctions *Eta* qui figurent au premier degré au numérateur. On peut donc reconnaître facilement si un certain choix d'arguments constants donnent un angle tétraèdre réel ou imaginaire, en regardant ces quatre fonctions-là. Il suffit de se rappeler que  $Hv$  est positive lorsque  $v$  varie depuis 0 jusqu'à  $2K$ , et négative lorsque  $v$  varie depuis  $2K$  jusqu'à  $4K$ .

Pour que les rapports des sinus des angles faciaux de l'angle tétraèdre soient positifs il faut que les trois fonctions

$$\frac{f'a}{fa}, \quad \frac{f'\beta}{f\beta}, \quad \frac{f'\gamma}{f\gamma}$$

aient le même signe. La formule

$$\frac{f'a}{fa} = \sqrt{2} \frac{Ha \Theta(K-a)}{\Theta a H(K-a)}$$

fait voir que lorsque  $a$  varie depuis 0 jusqu'à la  $4K$ , la fonction  $f'a/fa$  change de signe trois fois, une fois à chacun des trois points  $K, 2K, 3K$ . Il faut donc que les trois quantités  $a, b, c$  soient ou bien toutes dans les

intervalles  $(0, K)$ ,  $(2K, 3K)$ , ou bien toutes dans les intervalles  $(K, 2K)$ ,  $(3K, 4K)$ .

**32. Expressions des fonctions  $fu, f'u$  lorsque  $m > 1$ .** Je reprends les définitions des périodes données au chapitre précédent. On a, en effet (cf. 23, 2 et 23, 3),

$$(32, 1) \quad \frac{1}{2}\omega_1 = -i \int_{\sqrt{m+1}}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(y^4 - 2my^2 + m^2 - 1)}} \\ = \frac{-i}{\sqrt{m+1}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\{1 - (m-1) \sin^2 \theta / (m+1)\}}},$$

en posant  $y = \frac{\sqrt{m+1}}{\sin \theta}$  ;

et

$$(32, 2) \quad \omega_2 = - \int_{\sqrt{m-1}}^{\sqrt{m+1}} \frac{dy}{\sqrt{(-y^4 + 2my^2 - m^2 + 1)}} \\ = \frac{-1}{\sqrt{m+1}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\{1 - 2 \sin^2 \theta / (m+1)\}}},$$

en posant  $y^2 = \frac{m-1}{1 - \{2 \sin^2 \theta / (m+1)\}}$ .

Je pose donc

$$(32, 3) \quad \begin{cases} k^2 = \frac{2}{m+1}, & k'^2 = \frac{m-1}{m+1}, & K = -\sqrt{m+1} \omega_2, \\ & iK' = -\sqrt{m+1} \frac{1}{2}\omega_1. \end{cases}$$

Si je pose  $v = -\sqrt{m+1} u = -\frac{\sqrt{2}}{k} u$ ,

une fonction dont les périodes en  $u$  étaient  $2\omega_1, 2\omega_2$  aura les périodes  $2K$  et  $4iK'$  en  $v$ .

Ainsi la fonction  $\frac{H(K-v)}{Hv}$

a les mêmes périodes, les mêmes zéros, et les mêmes pôles que la fonction  $fu$ . En faisant tendre  $v$  vers zéro, on trouve

$$(32, 4) \quad fu = \sqrt{2} \frac{\Theta K \Theta \Theta H(K-v)}{H^2 K H v}.$$

De même, la fonction

$$\frac{\Theta v \Theta(K-v)}{H^2 v}$$

a les mêmes périodes, les mêmes zéros, et les mêmes pôles que la fonction  $f'u$ .

En faisant tendre  $v$  vers zéro, on trouve

$$(32, 5) \quad f'u = 2 \frac{\Theta 0 \Theta K \Theta v \Theta (K-v)}{H^2 K H^2 v}.$$

On se rappelle que les arguments  $a, \beta, \gamma$  doivent être de la forme  $r \pm \frac{1}{2}\omega_1$ , où  $r$  est réel (cf. No. 24). Je pose donc

$$(32, 6) \quad a = \frac{-k}{\sqrt{2}}(a - \epsilon_1 i K'), \quad \beta = \frac{-k}{\sqrt{2}}(b - \epsilon_2 i K'), \quad \gamma = \frac{-k}{\sqrt{2}}(c - \epsilon_3 i K'),$$

où  $a, b, c$  sont réels, compris entre 0 et  $2K$ .

On aura

$$(32, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} fa = \epsilon_1 i \sqrt{2} \frac{\Theta K \Theta 0 \Theta (K-a)}{H^2 K \Theta a}, \quad f'a = 2\epsilon_1 i \frac{\Theta 0 \Theta K H a H (K-a)}{H^2 K \Theta^2 a}, \\ f(\frac{1}{2}\omega_1 - a) = \epsilon_1 \sqrt{2} \frac{\Theta K \Theta 0 H (K-a)}{H^2 K H a}, \end{array} \right.$$

et d'autres expressions semblables en  $b, c$  pour les mêmes fonctions de  $\beta, \gamma$ .

La quantité  $P^2$  des formules (18, 6) et (18, 7) a des périodes  $\omega_1$  et  $2\omega_2$  par rapport à  $a, \beta$ , ou  $\gamma$ . Puisqu'on connaît ses zéros et ses pôles, on peut l'écrire sous forme d'un quotient de fonctions *Eta* et *Thêta*, qui aura les périodes  $2K$  et  $2iK'$  par rapport à  $a, b$ , ou  $c$ . En effet, on trouve

$$(32, 8) \quad P^2 = 64 \frac{\Theta^8 0 \Theta^{12} K H(-a+b+c) H(a-b+c) H(a+b-c) H(a+b+c)}{H^{12} K \Theta^4 a \Theta^4 b \Theta^4 c}.$$

Cette formule reproduit à peu de chose près, la formule (31, 9). Les remarques que j'ai faites à cette place sont encore valables. Pour que l'angle tétraèdre soit réel, il faut que le produit

$$H(-a+b+c) H(a-b+c) H(a+b-c) H(a+b+c)$$

soit positif.

Comme avant, les trois fonctions  $f'a/fa, f'\beta/f\beta, f'\gamma/f\gamma$  doivent avoir le même signe, pour que les rapports des sinus des angles faciaux de l'angle tétraèdre soient positifs. On a maintenant

$$\frac{f'a}{fa} = \sqrt{2} \frac{H a H (K-a)}{\Theta a \Theta (K-a)}.$$

Quand  $a$  varie depuis 0 jusqu'à  $2K$ , cette fonction change de signe une seule fois au point  $K$ . Les trois quantités  $a, b, c$  doivent donc se trouver toutes du même côté du point  $K$ .

La réalité de l'angle tétraèdre ne dépend nullement des déterminations des trois nombres  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  dont les carrés sont égaux à  $un$ .

**33. Formules donnant les angles faciaux de l'angle tétraèdre en fonction de  $a, b, c$ .** Pour avoir de telles formules, on n'a qu'à substituer dans (18, 7) les valeurs de  $f_a, f'_a$ , etc., données par (31, 8) et (32, 7). On trouve ainsi les résultats suivants. Si ces formules ont l'air d'avoir perdu leur symétrie primitive, c'est parce que j'ai voulu leur donner une forme qui facilite le calcul numérique.

Cas 1.  $-1 < m < 1$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \alpha_1}{\text{Ha} \Theta(K-a) \Theta b \text{H}(K-b) \Theta c \text{H}(K-c)} \\
 &= \frac{\sin \alpha_2}{\text{Ha} \Theta(K-a) \text{Hb} \Theta(K-b) \text{Hc} \Theta(K-c)} \\
 &= \frac{\sin \alpha_3}{\Theta a \text{H}(K-a) \text{Hb} \Theta(K-b) \Theta c \text{H}(K-c)} \\
 &= \frac{\sin \alpha_4}{\Theta a \text{H}(K-a) \Theta b \text{H}(K-b) \text{Hc} \Theta(K-c)} \\
 &= \frac{\text{HK} \Theta 0 \Theta^2 K Q}{2 \prod_{a,b,c} \text{Ha} \Theta a \text{H}(K-a) \Theta(K-a)}, \\
 \text{où } & Q^2 = \text{H}(-a+b+c) \text{H}(a-b+c) \text{H}(a+b-c) \text{H}(a+b+c); \\
 \cos \alpha_1 &= \frac{1}{2} \text{HK} \Theta 0 \left\{ \frac{\text{H}(a+b) \text{H}(a-b) \Theta(K-c)}{\Theta a \text{H}(K-a) \text{Hb} \Theta(K-b) \text{Hc}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Theta(K-a-b) \Theta(K-a+b) \text{Hc}}{\Theta a \text{H}(K-a) \text{Hb} \Theta(K-b) \Theta(K-c)} \right\}, \\
 \cos \alpha_2 &= \frac{1}{2} \text{HK} \Theta 0 \left\{ \frac{\Theta(a+b) \Theta(a-b) \text{H}(K-c)}{\Theta a \text{H}(K-a) \Theta b \text{H}(K-b) \Theta c} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\text{H}(K-a+b) \text{H}(K-a-b) \Theta c}{\Theta a \text{H}(K-a) \Theta b \text{H}(K-b) \text{H}(K-c)} \right\}, \\
 \cos \alpha_3 &= \frac{1}{2} \text{HK} \Theta 0 \left\{ \frac{\text{H}(a+b) \text{H}(b-a) \Theta(K-c)}{\text{Ha} \Theta(K-a) \Theta b \text{H}(K-b) \text{Hc}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Theta(K-a-b) \Theta(K-a+b) \text{Hc}}{\text{Ha} \Theta(K-a) \Theta b \text{H}(K-b) \Theta(K-c)} \right\}, \\
 \cos \alpha_4 &= \frac{1}{2} \text{HK} \Theta 0 \left\{ \frac{\text{H}(a+c) \text{H}(c-a) \Theta(K-b)}{\text{Ha} \Theta(K-a) \Theta c \text{H}(K-c) \text{Hb}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Theta(K-a-c) \Theta(K-a+c) \text{Hb}}{\text{Ha} \Theta(K-a) \Theta c \text{H}(K-c) \Theta(K-b)} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{33, 1}$$

Cas 2.  $m > 1$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \alpha_1}{\overline{H a H(K-a) \Theta b \Theta(K-b) \Theta c \Theta(K-c)}} \\
 &= \frac{\sin \alpha_2}{\overline{H a H(K-a) H b H(K-b) H c H(K-c)}} \\
 &= \frac{\sin \alpha_3}{\overline{\Theta a \Theta(K-a) H b H(K-b) \Theta c \Theta(K-c)}} \\
 &= \frac{\sin \alpha_4}{\overline{\Theta a \Theta(K-a) \Theta b \Theta(K-b) H c H(K-c)}} \\
 &= \frac{H^2 K \Theta \Theta K Q}{2 \prod_{a,b,c} \overline{H a \Theta a H(K-a) \Theta(K-a)}}, \\
 \text{ou } Q^2 &= \overline{H}(-a+b+c) H(a-b+c) H(a+b-c) H(a+b+c); \\
 \cos \alpha_1 &= \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \Theta \Theta K \left\{ \frac{H(a+b) H(a-b) H(K-c)}{\Theta a \Theta(K-a) H b H(K-b) H c} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{H(K-a-b) H(K-a+b) H c}{\Theta a \Theta(K-a) H b H(K-b) H(K-c)} \right\}, \\
 \cos \alpha_2 &= \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \Theta \Theta K \left\{ \frac{\Theta(a+b) \Theta(a-b) \Theta(K-c)}{\Theta a \Theta(K-a) \Theta b \Theta(K-b) \Theta c} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\Theta(K-a-b) \Theta(K-a+b) \Theta c}{\Theta a \Theta(K-a) \Theta b \Theta(K-b) \Theta(K-c)} \right\}, \\
 \cos \alpha_3 &= \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \Theta \Theta K \left\{ \frac{H(a+b) H(b-a) H(K-c)}{H a H(K-a) \Theta b \Theta(K-b) H c} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{H(K-a-b) H(K-b+a) H c}{H a H(K-a) \Theta b \Theta(K-b) H(K-c)} \right\}, \\
 \cos \alpha_4 &= \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \Theta \Theta K \left\{ \frac{H(a+c) H(c-a) H(K-b)}{H a H(K-a) \Theta c \Theta(K-c) H b} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{H(K-a-c) H(K-c+a) H b}{H a H(K-a) \Theta c \Theta(K-c) H(K-b)} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{33, 2}$$

34. Calcul de  $q$ . Comme je l'ai fait remarquer au No. 21, le problème qui va se poser quand on s'occupera de la construction de mécanismes paradoxaux, est celui où il s'agit de calculer les angles faciaux lorsque l'invariant  $m$  et les trois arguments  $a, \beta, \gamma$  sont donnés. Pour se servir

des séries (30, 2) et (30, 3), pourtant, ce n'est pas  $m$  mais  $q$  qu'il faut connaître.

On commence par calculer  $k$  au moyen des formules (31, 3) ou (32, 3), suivant l'intervalle dans lequel  $m$  se trouve. On pourrait alors calculer  $q$  par la voie de sa définition (30, 1), mais ce procédé est peu pratique. Weierstrass a donné une formule\* qui permet de faire ce calcul rapidement. C'est la suivante :

$$(34, 1) \quad q = \frac{1}{2}l + 2\left(\frac{1}{2}l\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}l\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}l\right)^{13} + \dots,$$

où  $l = (1 - \sqrt{k'}) / (1 + \sqrt{k'})$ , le radical  $\sqrt{k'}$  étant pris positivement.

Il semblerait qu'on ait également besoin de calculer les nombres  $K$  et  $K'$ , afin de former les produits

$$\frac{\pi a}{2K}, \quad \frac{\pi b}{2K}, \quad \frac{\pi c}{2K},$$

qui figurent dans les séries (30, 2) et (30, 3).

Cependant, ce calcul est superflu. On verra, en effet, qu'on pourra toujours considérer ces produits comme donnés à la place des arguments  $a, \beta, \gamma$ .

**35. Exemple du calcul numérique.** Je donne ici un exemple du calcul dont on fera un large usage dans la suite. Soient

$$(35, 1) \quad m = \cos 50^\circ, \quad a \equiv \frac{65}{90}K, \quad b \equiv \frac{59}{90}K, \quad c = \frac{47}{90}K.$$

Les formules (31, 3) donnent alors

$$(35, 2) \quad k = \sin 65^\circ, \quad k' = \cos 65^\circ.$$

Maintenant, la formule (34, 1) permet de calculer  $q$ , après quoi les séries (30, 2) et (30, 3) permettent de calculer toute fonction elliptique de  $a, b, c$  dont on aura besoin.

Tous ces calculs sont pourtant inutiles, grâce aux tables dressées par M. Hippisley†.

\* *Werke*, II (1895), p. 276; *Formules et Propositions*, H. A. Schwartz (1894), p. 56.

† *Smithsonian Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions*, Smithsonian Institution, Washington (1922), édité par E. P. Adams. *Bibliothèque de l'Université*, S. J. ce 166, vol. 74, no. 1, 8°; *Bibliothèque Nationale*, R. 16054. Ces tables, dressées par le Colonel R. L. Hippisley, C.B., donnent les valeurs des fonctions  $Hu/HK$ ,  $\Theta u/\Theta 0$ ,  $H(K-u)/HK$ ,  $\Theta(K-u)/\Theta 0$ , avec dix décimales, pour vingt-cinq valeurs de  $k$  et quarante-cinq valeurs de  $u$ .

Je prends les valeurs suivantes dans les tables de M. Hippisley,  $a, b, c$ , et  $k$  ayant les valeurs données par les formules (35, 1) et (35, 2):

(35, 3) {

$q = 0,106054$	$\frac{Hc}{HK} = 0,716217+$	$\frac{H(a+c)}{HK} = 0,921393+$
$\frac{\Theta K}{\Theta 0} = 1,538246+$	$\frac{\Theta c}{\Theta 0} = 1,287257+$	$\frac{\Theta(a+c)}{\Theta 0} = 1,462404+$
$\Theta 0 = 0,788145$	$\frac{H(K-c)}{HK} = 0,665767+$	$\frac{H(K-a-c)}{HK} = -0,360280$
$HK = 1,154170$	$\frac{\Theta(K-c)}{\Theta 0} = 1,249711$	$\frac{\Theta(K-a-c)}{\Theta 0} = 1,075222+$
$\frac{Ha}{HK} = 0,899104$	$\frac{H(a+b)}{HK} = 0,847049$	$\frac{H(a-c)}{HK} = 0,296583$
$\frac{\Theta a}{\Theta 0} = 1,441735+$	$\frac{\Theta(a+b)}{\Theta 0} = 1,394968+$	$\frac{\Theta(a-c)}{\Theta 0} = 1,051176$
$\frac{H(K-a)}{HK} = 0,407175$	$\frac{H(K-a-b)}{HK} = -0,498202+$	$\frac{H(K-a+c)}{HK} = 0,947015$
$\frac{\Theta(K-a)}{\Theta 0} = 1,095757+$	$\frac{\Theta(K-a-b)}{\Theta 0} = 1,142277$	$\frac{\Theta(K-a+c)}{\Theta 0} = 1,486626+$
$\frac{Hb}{HK} = 0,817501+$	$\frac{H(a-b)}{HK} = 0,149646$	$\frac{H(-a+b+c)}{HK} = 0,598652$
$\frac{\Theta b}{\Theta 0} = 1,369386+$	$\frac{\Theta(a-b)}{\Theta 0} = 1,013110+$	$\frac{H(a-b+c)}{HK} = 0,817501+$
$\frac{H(K-b)}{HK} = 0,542093+$	$\frac{H(K-a+b)}{HK} = 0,986612+$	$\frac{H(a+b-c)}{HK} = 0,958011+$
$\frac{\Theta(K-b)}{\Theta 0} = 1,167756$	$\frac{\Theta(K-a+b)}{\Theta 0} = 1,525013$	$\frac{H(a+b+c)}{HK} = 0,199062+$

Quand on introduit ces valeurs dans les formules (33, 1), on obtient

(35, 4) {

$\sin \alpha_1 = 0,720562$	$\cos \alpha_1 = -0,693390+$
$\sin \alpha_2 = 0,967784+$	$\cos \alpha_2 = -0,251780$
$\sin \alpha_3 = 0,552146+$	$\cos \alpha_3 = -0,833747$
$\sin \alpha_4 = 0,448415+$	$\cos \alpha_4 = -0,893825+$

Tel est l'angle tétraèdre qui correspond aux constantes elliptiques données par (35, 1)\*.

---

\* A l'exemple de M. Andoyer je me sers du signe + pour indiquer que la partie non écrite d'un nombre décimal est comprise entre 250... et 749... Quand elle est supérieure à 750... je force le dernier chiffre écrit.

## Chapitre V.

## ETUDE DES SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS DOUBLEMENT QUADRATIQUES.

**36. Considérations générales.** Le problème qui consiste à trouver les cas de déformabilité du mécanisme de la figure (1, 1) repose sur celui qui consiste à trouver les cas où un système de trois équations, dont chacune renferme deux des trois variables du système, et qui sont toutes les trois doublement quadratiques, est poristique. En ce qui concerne des systèmes de trois équations toutes irréductibles, M. Bricard a fait une étude très détaillée du problème.\*

Dans ce chapitre je ne m'occuperai que de conditions nécessaires.

LEMME. *Etant donné deux équations quadratiques en  $x$  :*

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$a'x^2 + 2b'x + c' = 0 \quad (p^2 = b^2 - ac);$$

*trouver dans quelles conditions le radical  $p$  ne paraît pas dans la seconde équation, lorsqu'on y substitue une racine de la première.*

Le résultat de la dite substitution se met sous la forme

$$a(ac' - a'c) + 2(ab' - a'b)(p - b) = 0,$$

et l'on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'énoncé ait lieu sont

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

c'est-à-dire que *les deux équations doivent avoir constamment deux racines communes par rapport à  $x$ .*

Soient trois équations doublement quadratiques par rapport à  $x, y, z$ ; je les représenterai symboliquement par

$$(36, 1) \quad \begin{cases} (y^2, y, z^2, z) = 0, \\ (z^2, z, x^2, x) = 0, \\ (x^2, x, y^2, y) = 0. \end{cases}$$

---

\* *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome XXV (1897), p. 212.

Soit  $Y_1$  le discriminant de la première équation qui renferme la variable  $y$  (celui pris par rapport à  $z$ ); soit  $Z_1$  le discriminant de la même équation qui renferme la variable  $z$  et ainsi de suite. Il y aura six discriminants, désignés par

$$X_2, X_3, Y_3, Y_1, Z_1, Z_2.$$

Je suppose en premier lieu qu'aucune paire d'équations n'ait constamment deux racines communes par rapport à sa variable commune et que les trois équations soient irréductibles. Dans ces conditions-là, si l'on substitue dans la première des équations (36, 1) une racine de la deuxième prise par rapport à  $z$ , et une racine de la troisième prise par rapport à  $y$ , on aura une relation en  $x$  qui pourra se mettre sous la forme

$$\sqrt{(X_2 X_3)} = \text{fonction rationnelle de } x.$$

Cette relation doit avoir lieu pour toute valeur de  $x$ , parce qu'on veut que le système (36, 1) soit poristique. Il faut donc que  $X_2$  et  $X_3$  aient les mêmes racines. De la même façon on trouve que  $Y_1$  et  $Y_3$ , et que  $Z_1$  et  $Z_2$  doivent avoir les mêmes racines.

Je passe au cas où une équation se décompose partiellement. On aura

$$(36, 2) \quad \begin{cases} (y^2, y, z) = 0, \\ (z^2, z, x^2, x) = 0, \\ (x^2, x, y^2, y) = 0. \end{cases}$$

Si la deuxième et la troisième des équations (36, 2) n'ont pas deux racines communes par rapport à  $x$ , il faudra que la troisième se décompose par rapport à  $x$ . En effet, si l'on substitue dans la deuxième une valeur de  $x$  tirée de la troisième, et la valeur de  $z$  tirée de la première, on aura

$$\sqrt{Y_3} = \text{fonction rationnelle de } y.$$

Ce cas n'a donc pas de solution, à moins que les deux dernières n'aient constamment deux racines communes par rapport à  $x$ .

Je considère ensuite le cas où deux équations se décomposent par rapport à la même variable. On aura

$$(36, 3) \quad \begin{cases} (y^2, y, z) = 0, \\ (x^2, x, z) = 0, \\ (x^2, x, y^2, y) = 0. \end{cases}$$

Il n'y a pas de simplification dans ce cas. On n'a qu'à éliminer  $z$  des deux premières équations et à identifier celle qui en résulte avec la troisième qui est supposée irréductible.

Vient ensuite le cas où *deux équations se décomposent par rapport à des variables différentes, en gardant la même variable au second degré*. On aura

$$(36, 4) \quad \begin{cases} (z^2, z, y) = 0, \\ (z^2, z, x) = 0, \\ (x^2, x, y^2, y) = 0. \end{cases}$$

La première et la deuxième de ces équations ne peuvent pas avoir deux racines communes par rapport à  $z$ , parce que s'il en était ainsi,  $x$  et  $y$  satisferaient à deux équations doublement linéaires, qui devraient être identiques à la troisième équation, que je suppose irréductible. La première et la troisième équation ne peuvent pas avoir deux racines communes par rapport à  $y$ , parce que la première n'en a qu'une. Il faut donc que

$$\sqrt{(X_2 X_3)} = \text{fonction rationnelle de } x.$$

Cependant  $X_3$  a quatre racines, alors que  $X_2$  n'en a que deux. *Il faut donc que deux des racines de  $X_3$  soient identiques entre elles, et que les deux autres soient identiques à celles de  $X_2$* . Il en est de même du produit  $Y_1 Y_3$ . Par conséquent *la troisième équation doit être unicursale*.

Le prochain cas à considérer est celui où *deux équations se décomposent par rapport à des variables différentes, sans garder la même variable au second degré*. On aura

$$(36, 5) \quad \begin{cases} (y^2, y, z) = 0, \\ (z^2, z, x) = 0, \\ (x^2, x, y^2, y) = 0. \end{cases}$$

Ce cas n'a pas de solution. En effet, la première et la troisième équations ne peuvent pas avoir deux racines communes par rapport à  $y$ , parce que s'il en était ainsi,  $x$  et  $z$  satisferaient à deux équations linéaires en  $z$  et quadratiques en  $x$ , qui devraient être identiques à la deuxième équation, que je suppose irréductible par rapport à  $z$ . Si l'on substitue dans la troisième équation une valeur de  $y$  tirée de la première, et la valeur de  $x$  donnée par la deuxième, on aura une relation en  $z$  qui pourra se mettre sous la forme

$$\sqrt{Z_1} = \text{fonction rationnelle de } z,$$

et il faudrait que la première équation se décomposât totalement.

Le cas où toutes les trois équations se décomposent par rapport à des variables différentes n'a pas de solution. En effet, on aurait

$$(36, 6) \quad \begin{cases} (y^2, y, z) = 0, \\ (z^2, z, x) = 0, \\ (x^2, x, y) = 0. \end{cases}$$

Aucune paire de ces équations ne peut avoir deux solutions communes par rapport à sa variable commune, parce que celle-ci est linéaire dans une équation de chaque paire. Si l'on substitue dans la première une valeur de  $z$  tirée de la deuxième, et la valeur de  $y$  donnée par la troisième, on aura

$$\sqrt{X_2} = \text{fonction rationnelle de } x,$$

ce qui n'est pas possible, tant que la deuxième équation reste irréductible par rapport à  $z$ .

Je passe au cas où les trois équations se décomposent, deux par rapport à la même variable. On aura

$$(36, 7) \quad \begin{cases} (y^2, y, z) = 0, \\ (x^2, x, z) = 0, \\ (x^2, x, y) = 0. \end{cases}$$

Si la deuxième et la troisième équations avaient deux racines communes par rapport à  $x$ , les variables  $y$  et  $z$  satisferaient à deux équations doublement linéaires qui devraient être identiques à la première, que je suppose irréductible par rapport à  $y$ . Dans les deux autres paires d'équations la variable commune intervient une fois linéairement. Le raisonnement s'achève comme au cas précédent. Ce cas n'admet pas de solution non plus.

Je passe maintenant au cas où l'une des trois équations se décompose totalement. On aura

$$(36, 8) \quad \begin{cases} (y, z) = 0, \\ (z^2, z, x^2, x) = 0, \\ (x^2, x, y^2, y) = 0. \end{cases}$$

Ici on n'a qu'à substituer dans la deuxième équation la valeur de  $z$  donnée par la première, et à identifier l'équation résultante avec la troisième équation qui est supposée irréductible. On remarquera toutefois que  $X_2$  doit avoir les mêmes racines que  $X_3$ . En effet,  $y$  est lié homo-

graphiquement à  $z$ , ce qui fait que le discriminant de la deuxième équation, pris par rapport à  $z$ , aura les mêmes racines que celui pris par rapport à  $y$  après la substitution. Comme cette nouvelle équation doit être identique à la troisième, leurs discriminants pris par rapport à  $y$  auront les mêmes racines.

Aucun cas où l'une des trois équations se décomposerait totalement, une deuxième partiellement, et la troisième pas du tout, n'a de solution. En effet, si l'on éliminait entre la première et la deuxième leur variable commune, on obtiendrait une équation partiellement décomposée, renfermant les mêmes variables que la troisième équation. Il faudrait donc qu'elle fût identique à celle-ci qui est supposée irréductible.

Je considère maintenant le cas où deux équations se décomposent totalement. On aura

$$(36, 9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (y, z) = 0, \\ (z, x) = 0, \\ (x^2, x, y^2, y) = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de  $z$  entre la première et la deuxième équations donne une relation doublement linéaire entre  $x$  et  $y$ , qui doit être identique à la troisième équation, qui est supposée irréductible. Ce cas n'a donc pas de solution. Il en serait encore de même, si la troisième équation était partiellement décomposée.

Je ne m'arrête pas ici sur le cas où les trois équations se décomposent toutes totalement. Il ne s'agit que d'éliminer les variables. Ce sera le cas (36, 10).

Je passe au cas où deux équations se décomposent par rapport à la même variable, et la troisième totalement. On aura

$$(36, 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (y^2, y, z) = 0, \\ (x^2, x, z) = 0, \\ (x, y) = 0. \end{array} \right.$$

On reconnaît aisément que  $Z_1$  et  $Z_2$  doivent avoir les mêmes racines.

Je considère ensuite le cas où deux équations se décomposent par rapport à des variables différentes, en gardant au second degré la même variable, et

la troisième totalement. On aura

$$(36, 12) \quad \begin{cases} (z^2, z, y) = 0, \\ (z^2, z, x) = 0, \\ (x, y) = 0. \end{cases}$$

Ici, il n'y a guère de simplification possible. On n'a qu'à éliminer  $x$  et  $y$ , et à rendre nuls les coefficients de l'équation résultante.

En dernier lieu je considère le cas où deux équations se décomposent par rapport à des variables différentes, sans garder la même variable au second degré, et la troisième totalement. On aura

$$(36, 13) \quad \begin{cases} (z^2, z, y) = 0, \\ (x^2, x, z) = 0, \\ (x, y) = 0. \end{cases}$$

Ce cas n'a évidemment pas de solution. On peut remplacer ce système par les deux équations

$$(z^2, z, x) = 0,$$

$$(x^2, x, z) = 0,$$

qui ne peuvent pas être identiques sans se décomposer.

Je résume les résultats acquis au cours du No. présent de la manière suivante: *Pour qu'un système de trois équations doublement quadratiques, chacune par rapport à deux des trois variables du système, soit poristique, il faut qu'il soit de l'une des formes (36, 1), (36, 3), (36, 4), (36, 8), (36, 10), (36, 11), (36, 12). Les cas où deux équations ayant deux racines communes par rapport à leur variable commune demandent une étude spéciale sont les (36, 1) et (36, 2).*

**37. Mécanisme préliminaire.** Ce mécanisme, dont la trace sphérique est indiquée schématiquement à la figure (37, 1), est composé de trois angles tétraèdres à sommet commun, qui ont deux à deux un axe commun. Seuls les dièdres des angles tétraèdres sont considérés comme variables. Les angles tétraèdres sont numérotés I, II, et III. Les angles faciaux et les dièdres des angles tétraèdres sont désignés par les mêmes symboles qu'au chapitre II, sauf qu'il y a un second indice qui se reporte au numéro de l'angle tétraèdre. Les dièdres marques  $\gamma_i$ , sont constants. *Ce mécanisme, qui fait partie du mécanisme de Kempe sur la sphère, doit être déformable toutes les fois que ce dernier l'est. Il est normalement bloqué.*

Soient  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  les cosinus directeurs du vecteur normal au plan dans lequel l'angle  $\alpha_{ij}$  est mesuré, et soient  $l_{ij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $n_{ij}$  ceux de l'axe commun aux angles tétraèdres  $i$  et  $j$ . Dans ce dernier cas l'ordre des indices est évidemment indifférent. Je définirai le sens des  $\alpha$ , des  $\beta$ , et des  $\gamma$ , par les règles suivantes :

$$(37, 1) \left\{ \begin{array}{l} a_{21} \sin \alpha_{21} = m_{12} n_{13} - m_{13} n_{12}, \quad l_{12} \sin \beta_{31} = b_{31} c_{21} - b_{21} c_{31}, \\ b_{21} \sin \alpha_{21} = n_{12} l_{13} - n_{13} l_{12}, \quad m_{12} \sin \beta_{31} = c_{31} a_{21} - c_{21} a_{31}, \\ c_{21} \sin \alpha_{21} = l_{12} m_{13} - l_{13} m_{12}, \quad n_{12} \sin \beta_{31} = a_{31} b_{21} - a_{21} b_{31}, \\ \cos \alpha_{21} = l_{12} l_{13} + m_{12} m_{13} + n_{12} n_{13}, \quad \cos \beta_{31} = a_{21} a_{31} + b_{21} b_{31} + c_{21} c_{31}, \\ \qquad \qquad \qquad l_{12} \sin \gamma_{36} = b_{31} c_{32} - b_{32} c_{31}, \\ \qquad \qquad \qquad m_{12} \sin \gamma_{36} = c_{31} a_{32} - c_{32} a_{31}, \\ \qquad \qquad \qquad n_{12} \sin \gamma_{36} = a_{31} b_{32} - a_{32} b_{31}, \\ \qquad \qquad \qquad \cos \gamma_{36} = a_{31} a_{32} + b_{31} b_{32} + c_{31} c_{32}, \end{array} \right.$$

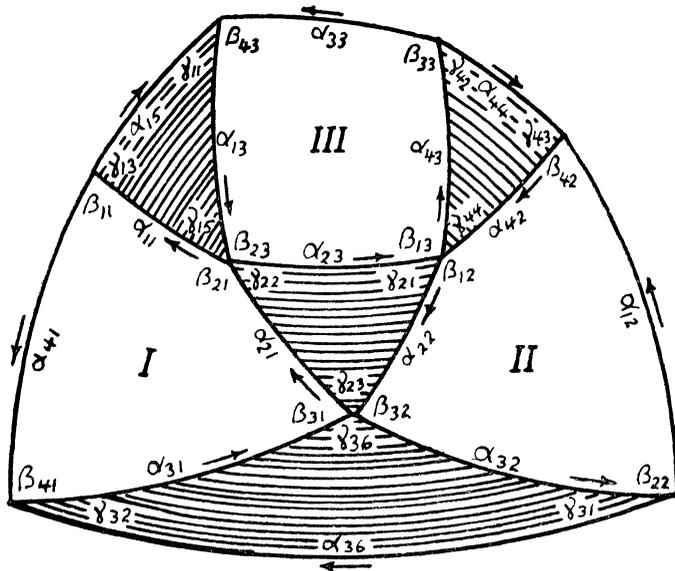


Fig. 37, 1

et par d'autres règles qui se déduisent de la figure de la même façon que celles-ci. Les flèches indiquent le sens circulaire à adopter dans chaque cas.

Les liaisons intérieures des trois angles tétraèdres ont fait l'objet des Chapitres II, III, et IV. Elles subsisteront ici à condition d'ajouter un

second indice à chaque symbole qui en avait un aux chapitres précédents et un premier indice à chaque symbole qui n'en avait pas. Ce nouvel indice, qui prendra les valeurs 1, 2, et 3, indiquera le numéro de l'angle tétraèdre dont il s'agit.

Je fais remarquer que les  $\alpha$  et les  $\beta$ , qui sont numérotés depuis 1 jusqu'à 4 dans chaque angle tétraèdre ne se succèdent pas toujours dans le même ordre. Il y aura par là certaines légères modifications à porter aux équations des chapitres précédents; elles sont telles qu'on puisse les faire à vue, sans entamer de calcul auxiliaire.

**38. Egalités fondamentales.** On déduit des formules (37, 1) les relations suivantes, qui lient les  $\gamma$  aux  $\beta$ :

$$(38, 1) \quad \beta_{32} + \beta_{31} \equiv \gamma_{23} + \gamma_{36}, \quad \beta_{21} + \beta_{23} \equiv \gamma_{22} + \gamma_{15}, \quad \beta_{13} + \beta_{12} \equiv \gamma_{21} + \gamma_{44},$$

et les suivantes qui lient les  $\gamma$  aux  $\alpha$ :

$$(38, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha_{21}}{\sin \gamma_{21}} = \frac{\sin \alpha_{22}}{\sin \gamma_{22}} = \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \gamma_{23}}, \\ \cos \alpha_{22} = \frac{\cos \gamma_{21} \cos \gamma_{23} - \cos \gamma_{22}}{\sin \gamma_{21} \sin \gamma_{23}}, \quad \cos \alpha_{23} = \frac{\cos \gamma_{22} \cos \gamma_{21} - \cos \gamma_{23}}{\sin \gamma_{22} \sin \gamma_{21}}, \\ \cos \gamma_{22} = \frac{\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22}}{\sin \alpha_{21} \sin \alpha_{23}}, \quad \cos \gamma_{23} = \frac{\cos \alpha_{22} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{23}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{21}}, \\ \cos \alpha_{21} = \frac{\cos \gamma_{23} \cos \gamma_{22} - \cos \gamma_{21}}{\sin \gamma_{23} \sin \gamma_{22}}, \\ \cos \gamma_{21} = \frac{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{21}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{22}}. \end{array} \right.$$

En ajoutant le second indice, introduit au No. 37, aux  $t$  du Chapitre II, on peut écrire les formules (38, 1) de la manière suivant :

$$(38, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{t_{32} + t_{31}}{1 - t_{32} t_{31}} = \operatorname{tg} \frac{\gamma_{36} + \gamma_{23}}{2} = \frac{f}{f'}, \\ \frac{t_{13} + t_{12}}{1 - t_{13} t_{12}} = \operatorname{tg} \frac{\gamma_{21} + \gamma_{44}}{2} = \frac{g}{g'}, \\ \frac{t_{23} + t_{21}}{1 - t_{23} t_{21}} = \operatorname{tg} \frac{\gamma_{22} + \gamma_{15}}{2} = \frac{h}{h'}, \end{array} \right.$$

les trois constantes  $f/f'$ ,  $g/g'$ ,  $h/h'$  étant ainsi définies.

Les relations intérieures des trois angles tétraèdres I, II, et III, auxquelles satisfont les six  $t$  des formules (38, 3) sont les suivantes; elles

se déduisent à vue des équations (7, 4) :

$$(38, 4) \begin{cases} \lambda_1 p_{21} t_{21}^2 t_{31}^2 + \nu_1 p_{11} t_{21}^2 - \mu_1 p_{31} t_{31}^2 - 2 \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{11} t_{21} t_{31} + \sigma_1 p_{41} = 0, \\ \mu_2 p_{22} t_{12}^2 t_{32}^2 - \lambda_2 p_{32} t_{32}^2 + \nu_2 p_{42} t_{12}^2 - 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} t_{32} t_{12} + \sigma_2 p_{12} = 0, \\ \nu_3 p_{23} t_{23}^2 t_{13}^2 + \mu_3 p_{43} t_{13}^2 + \lambda_3 p_{13} t_{23}^2 + 2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} t_{23} t_{13} - \sigma_3 p_{33} = 0. \end{cases}$$

**39. Système fondamental de trois équations doublement quadratiques.** En éliminant  $t_{32}$ ,  $t_{13}$ ,  $t_{21}$  entre (38, 3) et (38, 4), on obtient

$$(39, 1) \begin{cases} \lambda_1 p_{21} (h - h' t_{23})^2 t_{31}^2 + \nu_1 p_{11} (h - h' t_{23})^2 - \mu_1 p_{31} (ht_{23} + h')^2 t_{31}^2 \\ \quad + \sigma_1 p_{41} (ht_{23} + h')^2 - 2 \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{11} (h - h' t_{23}) (ht_{23} + h') t_{31} = 0, \\ \mu_2 p_{22} (f - f' t_{31})^2 t_{12}^2 - \lambda_2 p_{32} (f - f' t_{31})^2 + \nu_2 p_{42} (ft_{31} + f')^2 t_{12}^2 \\ \quad + \sigma_2 p_{12} (ft_{31} + f')^2 - 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} (f - f' t_{31}) (ft_{31} + f') t_{12} = 0, \\ \nu_3 p_{23} (g - g' t_{12})^2 t_{23}^2 + \mu_3 p_{43} (g - g' t_{12})^2 + \lambda_3 p_{13} (gt_{12} + g')^2 t_{23}^2 \\ \quad - \sigma_3 p_{33} (gt_{12} + g')^2 + 2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} (g - g' t_{12}) (gt_{12} + g') t_{23} = 0. \end{cases}$$

C'est un système du type étudié au No. 36. Pour que le mécanisme préliminaire du No. 37 soit déformable, il faut visiblement que le système (39, 1) soit poristique. Je passe maintenant à son étude analytique, en me basant sur les résultats obtenus aux Nos. 10 et 36. Puisque ces équations sont liées homographiquement aux équations (38, 4), il est évident que leurs cas de décomposition correspondent à ceux des angles tétraèdres eux-mêmes.

**40. Premier cas. Trois équations irréductibles dont deux ont constamment deux racines communes par rapport à leur variable commune.** Soient

$$L = (\mu_2 p_{22} f'^2 + \nu_2 p_{42} f^2) t_{12}^2 + 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} f f' t_{12} + (\sigma_2 p_{12} f^2 - \lambda_2 p_{32} f'^2),$$

$$M = (\nu_2 p_{42} - \mu_2 p_{22}) f f' t_{12}^2 + \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} (f'^2 - f^2) t_{12} + (\lambda_2 p_{32} + \sigma_2 p_{12}) f f',$$

$$N = (\mu_2 p_{22} f^2 + \nu_2 p_{42} f'^2) t_{12}^2 - 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} f f' t_{12} + (\sigma_2 p_{12} f'^2 - \lambda_2 p_{32} f^2);$$

de sorte que la deuxième des équations (39, 1) peut s'écrire

$$L t_{31}^2 + 2 M t_{31} + N = 0.$$

Je suppose que ce soient les deux premières de (39, 1) qui aient constamment deux racines communes par rapport à leur variable

commune  $t_{31}$ . On aura

$$(40, 1) \quad \begin{cases} \{\lambda_1 p_{21}(h-h' t_{23})^2 - \mu_1 p_{31}(ht_{23}+h')^2\} M \\ \qquad \qquad \qquad - \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{11} (h' t_{23} - h)(ht_{23}+h') L = 0, \\ \{\nu_1 p_{11}(h-h' t_{23})^2 + \sigma_1 p_{41}(ht_{23}+h')^2\} M \\ \qquad \qquad \qquad - \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{11} (h' t_{23} - h)(ht_{23}+h') N = 0. \end{cases}$$

Les deux équations (40, 1) doivent être identiques sans se décomposer, parce qu'on doit les identifier éventuellement avec la troisième des équations (39, 1) qui est supposée irréductible. Tant que  $ff' \neq 0$ , on trouve par un calcul direct qu'il faut et qu'il suffit pour cela que

$$(40, 2) \quad \begin{cases} \lambda_1 p_{21} + \nu_1 p_{11} = 0, & \mu_1 p_{31} - \sigma_1 p_{41} = 0, & \mu_2 p_{22} + \nu_2 p_{42} = 0, \\ \sigma_2 p_{12} - \lambda_2 p_{32} = 0. \end{cases}$$

En vertu de l'hypothèse (19, 1), les quatre conditions (40, 2) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(40, 3) \quad \alpha_{41} \equiv \alpha_{31} \equiv \alpha_{12} \equiv \alpha_{32} \equiv \frac{1}{2}\pi.$$

Je désignerai par  $\{t_{12}^2 t_{23}^2\}$ ,  $\{t_{12}^2 t_{23}\}$ ,  $\{t_{12} t_{23}^2\}$ , ... les coefficients de la forme sous laquelle se mettent les deux équations qu'on vient d'identifier, et par  $[t_{12}^2 t_{23}^2]$ ,  $[t_{12}^2 t_{23}]$ ,  $[t_{12} t_{23}^2]$ , ... ceux de la troisième des équations (39, 1). On aura

$$\{t_{12}^2 t_{23}\} = \sin(\alpha_{22} - \alpha_{42}) \{4ff' hh' \sin \alpha_{21} \cos \alpha_{11} + (f^2 - f'^2)(h^2 - h'^2) \sin \alpha_{11}\},$$

$$\{t_{23}\} = \sin(\alpha_{22} + \alpha_{42}) \{4ff' hh' \sin \alpha_{21} \cos \alpha_{11} + (f^2 - f'^2)(h^2 - h'^2) \sin \alpha_{11}\},$$

$$[t_{12}^2 t_{23}] = -2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} gg',$$

$$[t_{23}] = 2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} gg'.$$

Puisque  $[t_{12}^2 t_{23}] + [t_{23}] = 0$ , il faut que  $\{t_{12}^2 t_{23}\} + \{t_{23}\} = 0$ , et comme j'écarte toute solution dans laquelle un angle tétraèdre aurait trois de ses angles faciaux égaux à  $\frac{1}{2}\pi$ , il faut en outre que les quatre coefficients  $\{t_{12}^2 t_{23}\}$ ,  $\{t_{23}\}$ ,  $[t_{12}^2 t_{23}]$ ,  $[t_{23}]$  soient nuls. Cela entraîne

$$(40, 4) \quad gg' = 0, \quad 4ff' hh' \sin \alpha_{21} \cos \alpha_{11} + (f^2 - f'^2)(h^2 - h'^2) \sin \alpha_{11} = 0,$$

de sorte que les coefficients

$$[t_{12} t_{23}^2] = 2(\lambda_3 p_{13} - \nu_3 p_{23}) gg', \quad [t_{12}] = -2(\mu_3 p_{43} + \sigma_3 p_{33}) gg'$$

sont tous les deux nuls. Il faut alors qu'il en soit de même des coefficients

$$\{t_{12}^2 t_{23}^2\} = \sin \alpha_{42} \{ [h'^2 \sin(\alpha_{11} - \alpha_{21}) - h^2 \sin(\alpha_{11} + \alpha_{21})] (f'^2 - f^2) - 4ff' hh' \sin \alpha_{11} \},$$

$$\{t_{12}\} = \sin \alpha_{42} \{ [h^2 \sin(\alpha_{11} - \alpha_{21}) - h'^2 \sin(\alpha_{11} + \alpha_{21})] (f'^2 - f^2) + 4ff' hh' \sin \alpha_{11} \},$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$(40, 5) \quad hh' = 0, \quad f^2 - f'^2 = 0.$$

Il ne reste que les coefficients de degré pair. Moyennant les conditions trouvées jusqu'ici, ils peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\{t_{12}^2 t_{23}^2\} + \{1\} + \{t_{12}^2\} + \{t_{23}^2\} = -4ff'(h^2 + h'^2) \sin \alpha_{22} \sin \alpha_{21} \cos \alpha_{42} \cos \alpha_{11},$$

$$\{t_{12}^2 t_{23}^2\} - \{1\} + \{t_{12}^2\} - \{t_{23}^2\} = 4ff'(h^2 + h'^2) \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{21} \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{11},$$

$$\{t_{12}^2 t_{23}^2\} + \{1\} - \{t_{12}^2\} - \{t_{23}^2\} = 4ff'(h^2 - h'^2) \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{11} \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{21},$$

$$\{t_{12}^2 t_{23}^2\} - \{1\} - \{t_{12}^2\} + \{t_{23}^2\} = 4ff'(h'^2 - h^2) \sin \alpha_{22} \sin \alpha_{11} \cos \alpha_{42} \cos \alpha_{21},$$

$$\{2t_{12} t_{23}\} = 2ff'(h^2 - h'^2) \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{11};$$

$$[t_{12}^2 t_{23}^2] + [1] + [t_{12}^2] + [t_{23}^2] = 2(g^2 + g'^2) (\cos \alpha_{13} \cos \alpha_{23} \cos \alpha_{43} - \cos \alpha_{33}),$$

$$[t_{12}^2 t_{23}^2] - [1] + [t_{12}^2] - [t_{23}^2] = 2(g'^2 - g^2) \sin \alpha_{23} \sin \alpha_{43} \cos \alpha_{13},$$

$$[t_{12}^2 t_{23}^2] + [1] - [t_{12}^2] - [t_{23}^2] = 2(g^2 - g'^2) \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} \cos \alpha_{23},$$

$$[t_{12}^2 t_{23}^2] - [1] - [t_{12}^2] + [t_{23}^2] = 2(g^2 + g'^2) \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{43},$$

$$[2t_{12} t_{23}] = (g^2 - g'^2) \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}.$$

Il s'agit de rendre proportionnelles les expressions correspondantes de ces deux groupes. On trouve facilement les quatre conditions suivantes :

$$(40, 6) \quad \begin{cases} \cos \alpha_{13} \cos \alpha_{43} - \cos \alpha_{23} \cos \alpha_{33} = 0, & \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{23} = 0, \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{42}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{43}} \frac{g'^2 + g^2}{g'^2 - g^2}, & \frac{\operatorname{tg} \alpha_{21}}{\operatorname{tg} \alpha_{11}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{13}} \frac{h'^2 - h^2}{h'^2 + h^2}. \end{cases}$$

On voit ainsi que l'angle tétraèdre III a ses plans diagonaux perpendiculaires et que le dièdre  $\gamma_{23}$  est droit. [cf. (6, 1) et (38, 2).]

Les équations  $gg' = 0$  et  $hh' = 0$  peuvent être satisfaites de quatre manières différentes. Pour fixer les idées je pose définitivement  $g = 0, h = 0$ .

On a donc démontré que *les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (39, 1) soit poristique dans les hypothèses actuelles sont*

$$(40, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} g = 0, \quad h = 0, \quad f^2 - f'^2 = 0, \quad a_{41} \equiv a_{31} \equiv a_{12} \equiv a_{32} \equiv \frac{1}{2}\pi, \\ \cos a_{13} \cos a_{43} - \cos a_{23} \cos a_{33} = 0, \quad \cos a_{22} \cos a_{21} - \cos a_{23} = 0, \\ \frac{\operatorname{tg} a_{22}}{\operatorname{tg} a_{42}} = \frac{\operatorname{tg} a_{23}}{\operatorname{tg} a_{43}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{21}}{\operatorname{tg} a_{11}} = \frac{\operatorname{tg} a_{23}}{\operatorname{tg} a_{13}}. \end{array} \right.$$

Je considère maintenant le cas où  $ff' = 0$ . On aura à la place des conditions (40, 2),

$$\frac{\lambda_1 p_{21}}{\nu_1 p_{11}} = -\frac{\mu_1 p_{31}}{\sigma_1 p_{41}} = \frac{\mu_2 p_{22} f'^2 + \nu_2 p_{42} f^2}{\mu_2 p_{22} f^2 + \nu_2 p_{42} f'^2} = \frac{\sigma_2 p_{12} f^2 - \lambda_2 p_{32} f'^2}{\sigma_2 p_{12} f'^2 - \lambda_2 p_{32} f^2}.$$

Ces trois conditions peuvent aussi s'écrire comme suit :

$$\cos a_{21} \cos a_{41} - \cos a_{11} \cos a_{31} = 0, \quad \cos a_{12} \cos a_{22} - \cos a_{32} \cos a_{42} = 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg} a_{22} f'^2 + f^2}{\operatorname{tg} a_{32} f'^2 - f^2} = \frac{\operatorname{tg} a_{21}}{\operatorname{tg} a_{31}},$$

ce qui donne

$$\{t_{12}^2 t_{23}\} = \sin a_{31} \sin a_{11} (h^2 - h'^2) (\mu_2 p_{22} f'^2 + \nu_2 p_{42} f^2),$$

$$\{t_{23}\} = \sin a_{31} \sin a_{11} (h^2 - h'^2) (\sigma_2 p_{12} f^2 - \lambda_2 p_{32} f'^2).$$

Comme avant, la somme de ces deux expressions doit être nulle. Cela exige, tant que  $h^2 - h'^2 \neq 0$ ,

$$[\cos a_{12} - \cos a_{42} \cos(a_{22} + a_{32})] f^2 + [\cos a_{12} - \cos a_{42} \cos(a_{22} - a_{32})] f'^2 = 0.$$

Puisque  $ff' = 0$ , l'un des termes de cette équation doit s'annuler. Mais cela exige que l'angle tétraèdre II se décompose, contrairement à l'hypothèse. Le cas  $ff' = 0$  n'a donc pas de solution, à moins que  $h^2 - h'^2 = 0$ .

Lorsque  $ff' = 0$  et  $h^2 - h'^2 = 0$ , les coefficients  $\{t_{12}^2 t_{23}\}$  et  $\{t_{23}\}$  sont tous les deux nuls. Il faut donc qu'il en soit de même de  $\{t_{12}^2 t_{23}\}$  et de  $\{t_{23}\}$ . Cela exige  $gg' = 0$ , et par conséquent les deux coefficients

$$\{t_{23}^2 t_{12}\} = \sin a_{42} \sin a_{32} (\lambda_1 p_{21} - \mu_1 p_{31}) (f'^2 - f^2) h^2,$$

$$\{t_{12}\} = \sin a_{42} \sin a_{32} (\lambda_1 p_{21} - \mu_1 p_{31}) (f'^2 - f^2) h^2$$

doivent s'annuler, vu que  $\{t_{23}^2 t_{12}\}$  et  $\{t_{12}\}$  s'annulent quand  $gg' = 0$ . Il faut donc que  $\lambda_1 p_{21} - \mu_1 p_{31} = 0$ , ce qui entraîne la décomposition de l'angle tétraèdre I. *Le cas  $ff' = 0$  n'amène donc pas de solution.*

En permutant les rôles des angles tétraèdres I, II, et III dans les formules (40, 7), on obtient les conditions relatives aux cas où chaque autre paire des équations (39, 1) aurait constamment deux racines communes par rapport à sa variable commune.

**41. Deuxième cas. Trois équations irréductibles dont aucune paire n'a constamment deux racines communes par rapport à sa variable commune.** On a vu au No. 36 que dans les conditions de cet énoncé les discriminants qui renferment la même variable doivent avoir les mêmes racines.

Les coefficients de  $t_{23}^2$  et de  $t_{23}$  dans le discriminant pris par rapport à  $t_{12}$  de la troisième des équations (39, 1) sont tous les deux nuls. Il faut donc qu'il en soit de même de ces mêmes coefficients dans le discriminant pris par rapport à  $t_{31}$  de la première équation. Ceux-ci sont

$$(41, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2hh' \{ (2\lambda_1 \nu_1 p_{21} p_{11} + \pi_1 m_1) h'^2 + (2\mu_1 \sigma_1 p_{31} p_{41} - \pi_1 m_1) h^2 \}, \\ \text{et} \\ 2hh' \{ (2\lambda_1 \nu_1 p_{21} p_{11} + \pi_1 m_1) h^2 + (2\mu_1 \sigma_1 p_{31} p_{41} - \pi_1 m_1) h'^2 \}. \end{array} \right.$$

Soit d'abord  $h = 0$ . Les deux discriminants en question se mettront sous la forme

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 \nu_1 p_{21} p_{11} t_{23}^4 + \pi_1 m_1 t_{23}^2 + \mu_1 \sigma_1 p_{31} p_{41}, \\ & -\lambda_3 \nu_3 p_{23} p_{13} t_{23}^4 + \pi_3 m_3 t_{23}^2 + \mu_3 \sigma_3 p_{43} p_{33}. \end{aligned}$$

Pour qu'ils aient les mêmes racines, il faut et il suffit que [j'écarte toute solution qui dépasse les bornes de l'hypothèse (19, 1)]

$$(41, 2) \quad a_1 = a_3, \quad a_1' = a_3', \quad m_1 = m_3.$$

Soit ensuite  $h' = 0$ . Les deux discriminants en question se mettront sous la forme

$$\begin{aligned} & \mu_1 \sigma_1 p_{31} p_{41} t_{23}^4 + \pi_1 m_1 t_{23}^2 - \lambda_1 \nu_1 p_{21} p_{11}, \\ & -\lambda_3 \nu_3 p_{23} p_{13} t_{23}^4 + \pi_3 m_3 t_{23}^2 + \mu_3 \sigma_3 p_{43} p_{33}. \end{aligned}$$

Pour qu'ils aient les mêmes racines (dans la même hypothèse que tout à l'heure), il faut et il suffit que

$$(41, 3) \quad a_1 = a_3, \quad a_1' = -a_3', \quad m_1 \equiv m_3.$$

Si les deux coefficients (41, 1) s'annulent sans que  $hh' = 0$ , il faut que

$$(41, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2\lambda_1 \nu_1 p_{21} p_{11} + \pi_1 m_1)^2 - (2\mu_1 \sigma_1 p_{31} p_{41} - \pi_1 m_1)^2 = 4 \frac{\pi_1^2 a_1'}{a_1^2} = 0, \\ h^2 - h'^2 = 0. \end{array} \right.$$

Quand ces relations sont satisfaites, les deux discriminants en question se mettent sous la forme

$$\left(2m_1 - \frac{1}{a_1}\right)(t_{23}^4 + 1) + 2\left(2m_1 - \frac{3}{a_1}\right)t_{23}^2, \\ -\lambda_3 \nu_3 p_{23} p_{13} t_{23}^4 + m_3 \pi_3 t_{23}^2 + \mu_3 \sigma_3 p_{43} p_{33}.$$

Pour qu'ils aient les mêmes racines, il faut et il suffit que

$$(41, 5) \quad a_3' = 0, \quad a_1^2 + a_3^2 = 1.$$

Je récapitule les trois solutions qu'on vient d'étudier, sous les titres *Couple A*, *Couple B*, et *Couple C*.

$$(41, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Couple A.} \\ h = 0, \quad a_1' = a_3', \quad a_1 = a_3, \quad m_1 = m_3, \\ \text{Couple B.} \\ h' = 0, \quad a_1 = a_3, \quad a_1' = -a_3', \quad m_1 = m_3, \\ \text{Couple C.} \\ h^2 - h'^2 = 0, \quad a_1' = a_3' = 0, \quad a_1^2 + a_3^2 = 1. \end{array} \right.$$

Le couple à l'axe I, III doit appartenir à l'une de des trois catégories.

L'étude des deux autres paires de discriminants des équations (39, 1) donne relativement aux couples I, II et II, III des résultats analogues à ceux qu'on vient de trouver pour le couple I, III.

Il est clair que le *couple C* ne peut pas se rencontrer plus d'une fois dans le même mécanisme. En effet, s'il se rencontrait aux couples I, III et III, II, on aurait  $a_3' = 0, c_3' = 0$ , et la troisième des équations (39, 1) se décomposerait, contrairement à l'hypothèse. Je vais démontrer qu'il ne peut pas se rencontrer du tout.

Je suppose que les couples I, II et II, III soient de la catégorie *A*. On aura donc

$$(41, 7) \quad g = 0, \quad f = 0, \quad c_3' = c_2', \quad c_3 = c_2, \quad b_2' = b_1', \quad b_2 = b_1, \quad m_1 = m_2 = m_3.$$

Alors, si le couple I, III est de la catégorie *C*, on aura

$$a_1^2 - 2m_1 a_1 + 1 = 0, \quad a_3^2 - 2m_1 a_3 + 1 = 0, \quad a_1^2 + a_3^2 = 1, \quad h^2 - h'^2 = 0.$$

Puisqu'il faut que les  $a$  soient réels et positifs, ce système peut être remplacé par

$$(41, 8) \quad a_1 = a_3 = \frac{3}{4m_1}, \quad m_1^2 = \frac{9}{8}, \quad h^2 - h'^2 = 0.$$

Dans les conditions (41, 8) les équations d'Euler qui se déduisent du système (39, 1) se mettent sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{dt_{31}}{\sqrt[\{m_1 - (1/b_1) - (b_1'/b_1)\}t_{31}^4 + 2m_1 t_{31}^2 + \{m_1 - (1/b_1) + (b_1'/b_1)\}]} \\ & = \frac{\pm dt_{23}}{\sqrt[\{m_1(t_{23}^4 - 6t_{23}^2 + 1)\}]} \\ & \frac{dt_{31}}{\sqrt[\{m_1 - (1/b_1) - (b_1'/b_1)\}t_{31}^4 + 2m_1 t_{31}^2 + \{m_1 - (1/b_1) + (b_1'/b_1)\}]} \\ & = \frac{\pm dt_{12}}{\sqrt[\{m_1 - (1/c_2) - (c_2'/c_2)\}t_{12}^4 + 2m_1 t_{12}^2 + \{m_1 - (1/c_2) + (c_2'/c_2)\}]} \\ & \frac{dt_{12}}{\sqrt[\{m_1 - (1/c_2) - (c_2'/c_2)\}t_{12}^4 + 2m_1 t_{12}^2 + \{m_1 - (1/c_2) + (c_2'/c_2)\}]} \\ & = \frac{\pm i dt_{23}}{\sqrt[\{m_1(t_{23}^4 - 6t_{23}^2 + 1)\}]} \end{aligned}$$

La présence de l'imaginaire dans la dernière de celles-ci empêche que le système ait d'autre solution que

$$dt_{31} = 0, \quad dt_{23} = 0, \quad dt_{12} = 0.$$

On peut donc rejeter ce cas.

On trouve un résultat analogue lorsque les deux couples I, II et II, III sont l'un de la catégorie *A* et l'autre de la catégorie *B*, ou tous les deux de la catégorie *B*.

Les conditions qu'on vient de trouver sont nécessaires mais non pas suffisantes à la déformation des mécanismes préliminaires du No. 36. Je m'occuperai de conditions suffisantes au chapitre suivant.

**42. Impossibilité qu'un système composé de deux équations irréductibles, ayant constamment deux racines communes par rapport à leur variable commune, et d'une équation partiellement décomposée, ait une solution.** Ce phénomène se produirait lorsque la troisième des équations (39, 1) aussi bien que les deux équations (40, 1) se décomposeraient *partiellement*. Je vais démontrer que la première des équations (40, 1) ne peut pas se décomposer autrement que *totalemment*.

Je suppose que la troisième des équations (39, 1) et les deux équations (40, 1) se décomposent par rapport à  $t_{23}$ .

Si la deuxième et la troisième des équations (39, 1) avaient constamment deux racines communes par rapport à  $t_{12}$ , les variables  $t_{23}$  et  $t_{31}$  satisferaient à deux équations quadratiques par rapport à  $t_{31}$  et linéaires par rapport

à  $t_{23}$ , qui devraient être identiques à la première qui est supposée irréductible. D'autre part, la première et la troisième des équations (39, 1) ne peuvent pas avoir constamment deux racines communes par rapport à  $t_{23}$ , parce que la troisième n'en a qu'une. Il faut donc que le discriminant pris par rapport à  $t_{23}$  de la première équation et celui pris par rapport à  $t_{12}$  de la deuxième équation aient les mêmes racines. Cela veut dire que le couple I, II doit appartenir à l'une des trois catégories du No. 41.

Je considère d'abord le *couple A*. On aura

$$(42, 1) \quad f = 0, \quad b_1 = b_2, \quad b_1' = b_2', \quad m_1 = m_2.$$

Le discriminant pris par rapport à  $(h't_{23} - h)/(ht_{23} + h')$  de la première des équations (40, 1) se mettra sous la forme (à un facteur qui ne peut pas s'annuler près)

$$(42, 2) \quad \frac{\mu_2^2 p_{32}^2 t_{12}^4}{\sin^2 \alpha_{42} \sin^2 \alpha_{32}} + 2 \left( m_1 - \frac{1}{b_1} - \frac{b_1'}{b_1} \right) \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{2a_2} \right) t_{12}^2 + \frac{\lambda_2^2 p_{32}^2}{\sin^2 \alpha_{42} \sin^2 \alpha_{32}}.$$

Pour que l'équation en question se décompose par rapport à  $t_{23}$ , il faut que cette forme soit un carré parfait. Son discriminant pris par rapport à  $t_{12}^2$  est

$$\left( m_1 - \frac{1}{b_1} - \frac{b_1'}{b_1} \right)^2 \frac{a_2 - c_1}{a_2 c_1^2}.$$

Si

$$(42, 3) \quad m_1 - \frac{1}{b_1} - \frac{b_1'}{b_1} = \frac{2\lambda_1 \mu_1 p_{21} p_{31}}{\pi_1} = \frac{2\lambda_2 \mu_2 p_{22} p_{32}}{\pi_2} = 0,$$

la première des équations (40, 1) se décomposerait par rapport à  $t_{12}$ , contrairement à l'hypothèse. En effet  $t_{12}^2$  et  $t_{12}^4$  n'interviennent dans l'équation que par l'expression

$$\mu_2 p_{22} t_{12}^2 - \lambda_2 p_{32},$$

et l'on voit que l'un de ces deux termes s'annulera quelle que soit la manière dont la relation (42, 3) aurait lieu.

Si

$$(42, 4) \quad a_2 - c_1 = 0,$$

la première des équations (40, 1) se mettrait sous l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{h't_{23} - h}{ht_{23} + h'} = \frac{\sin \alpha_{31} \sin \alpha_{11}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}} \cdot \frac{\mu_2 p_{22} t_{12}^2 \text{ ou } \lambda_2 p_{32}}{\lambda_1 p_{21} t_{12}}.$$

Là encore l'équation en question se décompose par rapport à  $t_{12}$ , contrairement à l'hypothèse.

Le cas du *couple B* est analogue à celui du *couple A*. Je n'insiste pas la dessus.

Je considère ensuite le cas du *couple C*. On aura

$$(42, 5) \quad f' = \epsilon f \text{ (où } \epsilon^2 = 1), \quad b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad b_1' = b_2' = 0.$$

Le discriminant pris par rapport à  $(h' t_{23} - h)/(h t_{23} + h')$  de la première des équations (40, 1) se mettra sous la forme

$$(42, 6) \quad \sin^2 \alpha_{31} \sin^2 \alpha_{11} \{(\mu_2 p_{22} + \nu_2 p_{42}) t_{12}^2 \\ + 2\epsilon \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} t_{12} + (\sigma_2 p_{12} - \lambda_2 p_{32})\}^2 \\ + 4\lambda_1 \mu_1 p_{21} p_{31} \{(\nu_2 p_{42} - \mu_2 p_{22}) t_{12}^2 + (\lambda_2 p_{32} + \sigma_2 p_{12})\}^2.$$

Pour que l'équation en question se décompose par rapport à  $t_{23}$ , il faut que cette forme soit un carré parfait. Son discriminant pris par rapport à

$$\left\{ \sqrt{\left( \frac{\sin(\alpha_{42} - \alpha_{22})}{\sin(\alpha_{42} + \alpha_{22})} \right) t_{12}} + \sqrt{\left( \frac{\sin(\alpha_{42} + \alpha_{22})}{\sin(\alpha_{42} - \alpha_{22})} \right) \frac{1}{t_{12}}} \right\} \cos \alpha_{32}$$

est

$$8t_{12}^4 \pi_1^2 (\sin^2 \alpha_{42} - \sin^2 \alpha_{22})^2 \sin^2 \alpha_{32} \operatorname{tg}^2 \alpha_{32} (m_1 - b_1) \left[ \frac{b_2^2 c_1}{a_2 b_2 - 1} + 2(m_1 - b_1) \right].$$

Si  $b_2^2 c_1 + 2(m_1 - b_1)(a_2 b_2 - 1) = 0$ , la première des équations (40, 1) se mettrait sous l'une des deux formes suivantes

$$(42, 7) \quad \frac{h - h' t_{23}}{h' + h t_{23}} = K \frac{\sqrt{\{\sin(\alpha_{42} - \alpha_{22})\} t_{12} \pm \epsilon \sqrt{\{\sin(\alpha_{42} + \alpha_{22})\}}}}{\sqrt{\{\sin(\alpha_{42} - \alpha_{22})\} t_{12} \mp \epsilon \sqrt{\{\sin(\alpha_{42} + \alpha_{22})\}}}},$$

$$\text{où} \quad K = \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{11} \left( \cos \alpha_{32} \operatorname{tg} \alpha_{42} \pm \frac{\sin \alpha_{32} \sin \alpha_{42}}{\sqrt{(\sin^2 \alpha_{42} - \sin^2 \alpha_{22})}} \right),$$

et l'on voit que l'équation en question se décomposerait par rapport à  $t_{12}$ , contrairement à l'hypothèse.

Si  $m_1 - b_1 = 0$ , on aurait, en vertu de (42, 5),

$$b_1^2 = 1, \quad b_2 = 0,$$

ce qui n'est pas admissible tant que les angles faciaux de l'angle tétraèdre II restent différents de 0 ou de  $\pi$ .

Si  $\sin^2 \alpha_{42} - \sin^2 \alpha_{22} = 0$ , l'angle tétraèdre II, et par conséquent la deuxième des équations (39, 1), se décomposerait, parce qu'on a déjà  $\cos \alpha_{12} \cos \alpha_{42} - \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{32} = 0$ .

L'énoncé est donc démontré.

Je me suis ainsi débarrassé pour le moment des systèmes des formes (36, 1) et (36, 2). Je passe à l'étude de ceux de la forme (36, 3).

**43. Troisième cas. Deux équations décomposées par rapport à la même variable.** Il sera plus commode ici, au lieu de se rapporter aux équations (39, 1), de se rapporter aux équations (38, 3) et (38, 4) qui leur sont équivalentes. Soient

$$(43, 1) \quad \begin{cases} \alpha_{11} \equiv \alpha_{21}, & \alpha_{31} \equiv \alpha_{41}, & \alpha_{13} \equiv \alpha_{23}, & \alpha_{33} \equiv \alpha_{43}, \\ t_{21} = \frac{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{31}) t_{31}^2 + \sin(\alpha_{21} + \alpha_{31})}{2 \sin \alpha_{31} t_{31}}, \\ t_{23} = \frac{\sin(\alpha_{23} - \alpha_{43}) t_{13}^2 + \sin(\alpha_{23} + \alpha_{43})}{2 \sin \alpha_{43} t_{13}}. \end{cases}$$

Si l'on substitue dans la troisième des équations (38, 3) les valeurs de  $t_{21}$  et de  $t_{23}$  données par (43, 1), on obtiendra

$$(43, 2) \quad \begin{aligned} & h \sin(\alpha_{21} - \alpha_{31}) \sin(\alpha_{23} - \alpha_{43}) t_{31}^2 t_{13}^2 + 2h' \sin \alpha_{43} \sin(\alpha_{21} - \alpha_{31}) t_{31}^2 t_{13} \\ & + 2h' \sin \alpha_{31} \sin(\alpha_{23} - \alpha_{43}) t_{13}^2 t_{31} + h \sin(\alpha_{21} - \alpha_{31}) \sin(\alpha_{23} + \alpha_{43}) t_{31}^2 \\ & + 4h \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{43} t_{31} t_{13} + h \sin(\alpha_{21} + \alpha_{31}) \sin(\alpha_{23} - \alpha_{43}) t_{13}^2 \\ & + 2h' \sin \alpha_{31} \sin(\alpha_{23} + \alpha_{43}) t_{31} + 2h' \sin \alpha_{43} \sin(\alpha_{21} + \alpha_{31}) t_{13} \\ & + h \sin(\alpha_{21} + \alpha_{31}) \sin(\alpha_{23} + \alpha_{43}) = 0. \end{aligned}$$

On obtiendra une autre équation à laquelle  $t_{31}$  et  $t_{13}$  doivent satisfaire, si l'on substitue dans la deuxième des équations (38, 4) les valeurs de  $t_{32}$  et de  $t_{12}$  données par les deux premières de (38, 3). Ce sera .

$$(43, 3) \quad \begin{aligned} & \mu_2 p_{22} (f - f' t_{31})^2 (g - g' t_{13})^2 - \lambda_2 p_{32} (f - f' t_{31})^2 (g' + g t_{13})^2 \\ & + \nu_2 p_{42} (f t_{31} + f')^2 (g - g' t_{13})^2 + \sigma_2 p_{12} (f t_{31} + f')^2 (g' + g t_{13})^2 \\ & - 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} (f - f' t_{31}) (f t_{31} + f') (g - g' t_{13}) (g' + g t_{13}) = 0. \end{aligned}$$

Le problème qui consiste à rendre identiques les deux équations (43, 2) et (43, 3) est le même que celui qui consiste à résoudre le système (39, 1) dans les conditions énoncées.

Je désignerai par  $\{t_{31}^2 t_{13}^2\}$ ,  $\{t_{31}^2 t_{13}\}$ ,  $\{t_{31} t_{13}^2\}$ , ... les coefficients de l'équation (43, 2), et par  $[t_{31}^2 t_{13}^2]$ ,  $[t_{31}^2 t_{13}]$ ,  $[t_{31} t_{13}^2]$ , ... ceux de l'équation (43, 3). On

aura

$$\frac{([t_{13}^2 t_{31}^2] + [1] - [t_{13}^2] - [t_{31}^2]) \cos \alpha_{22} + 2[2t_{13} t_{31}]}{[t_{13}^2 t_{31}^2] + [1] - [t_{13}^2] - [t_{31}^2] + 2[2t_{13} t_{31}] \cos \alpha_{22}} = \frac{1}{4} \left( \frac{f}{f'} - \frac{f'}{f} \right) \left( \frac{g}{g'} - \frac{g'}{g} \right),$$

$$\frac{(\{t_{13}^2 t_{31}^2\} + \{1\} - \{t_{13}^2\} - \{t_{31}^2\}) \cos \alpha_{22} + 2\{2t_{13} t_{31}\}}{\{t_{13}^2 t_{31}^2\} + \{1\} - \{t_{13}^2\} - \{t_{31}^2\} + 2\{2t_{13} t_{31}\} \cos \alpha_{22}} = \frac{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - 1}{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22}};$$

donc

$$(43, 4) \quad \left( \frac{f}{f'} - \frac{f'}{f} \right) \left( \frac{g}{g'} - \frac{g'}{g} \right) = 4 \frac{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - 1}{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22}}.$$

D'autre part

$$\frac{-[t_{13}^2 t_{31}^2] + [1] + [t_{13}^2] - [t_{31}^2]}{[t_{13}^2 t_{31}^2] + [1] - [t_{13}^2] - [t_{31}^2] + 2[2t_{13} t_{31}] \cos \alpha_{22}} = \frac{(f/f' - f'/f)(g/g' + g'/g)}{4 \sin \alpha_{22} \operatorname{tg} \alpha_{42}},$$

$$\frac{-\{t_{13}^2 t_{31}^2\} + \{1\} + \{t_{13}^2\} - \{t_{31}^2\}}{\{t_{13}^2 t_{31}^2\} + \{1\} - \{t_{13}^2\} - \{t_{31}^2\} + 2\{2t_{13} t_{31}\} \cos \alpha_{22}} = \frac{\sin \alpha_{23} \cot \alpha_{43} \cos \alpha_{21}}{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22}};$$

donc

$$(43, 5) \quad \left( \frac{f}{f'} - \frac{f'}{f} \right) \left( \frac{g}{g'} + \frac{g'}{g} \right) = 4 \frac{\sin \alpha_{22} \operatorname{tg} \alpha_{42} \cos \alpha_{21} \sin \alpha_{23} \cot \alpha_{43}}{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22}}.$$

Soient

$$A = ([2t_{13}] - [2t_{13} t_{31}^2]) \cos \alpha_{22} - ([2t_{31}] - [2t_{13}^2 t_{31}]),$$

$$A' = (\{2t_{13}\} - \{2t_{13} t_{31}^2\}) \cos \alpha_{22} - (\{2t_{31}\} - \{2t_{13}^2 t_{31}\}),$$

$$B = ([2t_{13}] - [2t_{13} t_{31}^2]) - ([2t_{31}] - [2t_{13}^2 t_{31}]) \cos \alpha_{22},$$

$$B' = (\{2t_{13}\} - \{2t_{13} t_{31}^2\}) - (\{2t_{31}\} - \{2t_{13}^2 t_{31}\}) \cos \alpha_{22}.$$

On aura

$$\frac{AB}{([t_{13}^2 t_{31}^2] + [1] - [t_{13}^2] - [t_{31}^2] + 2[2t_{13} t_{31}] \cos \alpha_{22})^2} = -\frac{1}{16} \left( \frac{f}{f'} - \frac{f'}{f} \right) \left( \frac{g}{g'} - \frac{g'}{g} \right),$$

$$\frac{A'B'}{(\{t_{13}^2 t_{31}^2\} + \{1\} - \{t_{13}^2\} - \{t_{31}^2\} + 2\{2t_{13} t_{31}\} \cos \alpha_{22})^2}$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{h'^2}{h^2} \frac{(\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23})(\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{21})}{(\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})^2};$$

donc

$$(43, 6) \quad \left( \frac{f}{f'} - \frac{f'}{f} \right) \left( \frac{g}{g'} - \frac{g'}{g} \right)$$

$$= 4 \frac{h'^2}{h^2} \frac{(\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23})(\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{21})}{(\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})^2}.$$

De même

$$\frac{A([2t_{13}^2 t_{31}] + [2t_{31}])}{([t_{13}^2 t_{31}^2] + [1] - [t_{13}^2] - [t_{31}^2] + 2[2t_{13} t_{31}] \cos \alpha_{22})^2} = \frac{(f/f' - f'/f)(g/g' + g'/g)}{16 \sin \alpha_{22} \operatorname{tg} \alpha_{42}},$$

$$\frac{A'(\{2t_{13}^2 t_{31}\} + \{2t_{31}\})}{(\{t_{13}^2 t_{31}^2\} + \{1\} - \{t_{13}^2\} - \{t_{31}^2\} + 2\{2t_{13} t_{31}\} \cos \alpha_{22})^2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{h'^2 \sin \alpha_{23} (\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23})}{h^2 \operatorname{tg} \alpha_{43} (\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})^2};$$

donc

$$(43, 7) \quad \left(\frac{f}{f'} - \frac{f'}{f}\right) \left(\frac{g}{g'} + \frac{g'}{g}\right) = 4 \frac{h'^2 \sin \alpha_{23} \sin \alpha_{22} (\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23})}{h^2 \operatorname{tg} \alpha_{43} \cot \alpha_{42} (\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})^2}.$$

L'élimination de  $f$  et de  $g$  entre les équations (43, 4), (43, 5), (43, 6), et (43, 7) donne

$$(43, 8) \quad \begin{cases} \frac{h'^2}{h^2} = \frac{(\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{23} - 1)(\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})}{(\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23})(\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{21})}, \\ \frac{h'^2}{h^2} = \frac{\cos \alpha_{21} (\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})}{\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23}}. \end{cases}$$

On établit de la même façon, en cherchant les valeurs les produits  $(f/f' + f'/f)(g/g' - g'/g)$  et  $(f/f' + f'/f)(g/g' + g'/g)$ , deux nouvelles valeurs de  $h'/h^2$ . Ce sont

$$(43, 9) \quad \begin{cases} \frac{h'^2}{h^2} = \frac{\cos \alpha_{23} (\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})}{(\cos \alpha_{22} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{21})}, \\ \frac{h'^2}{h^2} = \frac{\cos \alpha_{32} \cos \alpha_{42} (\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22})}{(\cos \alpha_{12} - \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{32} \cos \alpha_{42})}. \end{cases}$$

Les quatre équations (43, 8) et (43, 9) ne peuvent être toutes vérifiées que lorsque

$$h' = 0, \quad \cos \alpha_{21} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{22} = 0;$$

mais la condition  $h' = 0$  exprime que les quatre coefficients

$$\{t_{13}^2 t_{31}\}, \quad \{t_{13} t_{31}^2\}, \quad \{t_{13}\}, \quad \{t_{31}\}$$

sont nuls. Il faut alors qu'il en soit de même des quantités

$$[2t_{13}^2 t_{31}] + [2t_{31}] = 2 \sin \alpha_{32} \sin \alpha_{22} \cos \alpha_{42} f f' (g^2 + g'^2),$$

$$[2t_{13} t_{31}^2] + [2t_{13}] = 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{22} \cos \alpha_{32} g g' (f^2 + f'^2).$$

Donc  $f f' = 0$  et  $g g' = 0$ , toute autre solution étant banale.

Dans les conditions

$$(43, 10) \quad h' = 0, \quad f = 0, \quad g = 0,$$

les équations (43, 2) et (43, 3) se mettent sous la forme

$$(43, 11) \quad \begin{cases} [\sin(\alpha_{21}-\alpha_{31})t_{31}^2+\sin(\alpha_{21}+\alpha_{31})][\sin(\alpha_{23}-\alpha_{43})t_{13}^2+\sin(\alpha_{23}+\alpha_{43})] \\ \quad - 4 \sin \alpha_{31} \sin \alpha_{43} t_{31} t_{13} = 0, \\ \mu_2 p_{22} t_{13}^2 t_{31}^2 - \lambda_2 p_{32} t_{31}^2 + \nu_2 p_{42} t_{13}^2 - 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} t_{31} t_{13} + \sigma_2 p_{12} = 0. \end{cases}$$

C'est le cas que je vais étudier, les cas où  $f' = 0$  ou  $g' = 0$  étant de caractère peu différent.

On trouve aisément que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (43, 11) soient identiques sans se décomposer sont

$$(43, 12) \quad \begin{cases} \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{32} \cos \alpha_{42} = 0, & \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} = 0, \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{32}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{21}}{\operatorname{tg} \alpha_{31}}, & \frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{42}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{43}}. \end{cases}$$

La première condition exprime que *les plans diagonaux de l'angle tétraèdre II sont perpendiculaires*. La seconde exprime que *le dièdre  $\gamma_{22}$  est droit*.

Ce cas possède deux variantes dignes d'étude. Soient d'abord

$$(43, 13) \quad \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} \equiv \pi, & \alpha_{31} + \alpha_{41} \equiv \pi, & \alpha_{13} + \alpha_{23} \equiv \pi, & \alpha_{33} + \alpha_{43} \equiv \pi, \\ \frac{-1}{t_{21}} = \frac{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{31})t_{13}^2 + \sin(\alpha_{21}+\alpha_{31})}{2 \sin \alpha_{31} t_{31}}, \\ \frac{-1}{t_{23}} = \frac{\sin(\alpha_{23}-\alpha_{43})t_{31}^2 + \sin(\alpha_{23}+\alpha_{43})}{2 \sin \alpha_{43} t_{13}}. \end{cases}$$

Les angles tétraèdres I et III sont ainsi *bi-isogones supplémentaires* tous les deux.

L'élimination de  $-1/t_{21}$  et de  $-1/t_{23}$  à l'aide de la troisième des équations (38, 3) donne de nouveau l'équation (43, 2), de sorte qu'on est de nouveau amené aux conditions (43, 10) et (43, 12).

On rencontre une seconde variante du cas, lorsqu'un angle tétraèdre est *simplement bi-isogone*, et un autre *supplémentairement*. Soient

$$(43, 14) \quad \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} \equiv \pi, & \alpha_{31} + \alpha_{41} \equiv \pi, & \alpha_{23} \equiv \alpha_{13}, & \alpha_{43} \equiv \alpha_{33}, \\ \frac{-1}{t_{21}} = \frac{\sin(\alpha_{21}-\alpha_{31})t_{31}^2 + \sin(\alpha_{21}+\alpha_{31})}{2 \sin \alpha_{31} t_{31}}, \\ t_{23} = \frac{\sin(\alpha_{23}-\alpha_{43})t_{13}^2 + \sin(\alpha_{23}+\alpha_{43})}{2 \sin \alpha_{43} t_{13}}. \end{cases}$$

L'élimination de  $-1/t_{21}$  et de  $t_{23}$  à l'aide de la troisième des équations (38, 3) donne une équation qui ne diffère de (43, 2) que par le fait que les rôles de  $h$  et de  $-h'$  sont échangés entre eux. Les conditions (43, 10) seront remplacées par

$$(43, 15) \quad h = 0, \quad f = 0, \quad g = 0,$$

et les conditions (43, 12) subsisteront.

Afin de me débarrasser dès maintenant des systèmes du type (36, 11), je vais démontrer que l'équation (43, 2) ne peut pas se décomposer. En effet son discriminant pris par rapport à  $t_{13}$  peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \{h^2(\sin^2 \alpha_{43} - \sin^2 \alpha_{23}) + h'^2 \sin^2 \alpha_{43}\} \\ & \times \left\{ \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{31})}{\sin(\alpha_{21} + \alpha_{31})}\right) t_{31}} + \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha_{21} + \alpha_{31})}{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{31})}\right) \frac{1}{t_{31}}} \right\}^2 \\ & - \frac{4hh' \sin^2 \alpha_{23} \sin \alpha_{31}}{\sqrt{(\sin^2 \alpha_{21} - \sin^2 \alpha_{31})}} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{31})}{\sin(\alpha_{21} + \alpha_{31})}\right) t_{31}} + \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha_{21} + \alpha_{31})}{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{31})}\right) \frac{1}{t_{31}}} \right\} \\ & + \frac{4 \sin^2 \alpha_{31} \{h'^2(\sin^2 \alpha_{43} - \sin^2 \alpha_{23}) + h^2 \sin^2 \alpha_{43}\}}{(\sin^2 \alpha_{21} - \sin^2 \alpha_{31})}. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette forme, pris par rapport à

$$2 \sin \alpha_{31} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{31})}{\sin(\alpha_{21} + \alpha_{31})}\right) t_{31}} + \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha_{21} + \alpha_{31})}{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{31})}\right) \frac{1}{t_{31}}} \right\} \sqrt{(\sin^2 \alpha_{21} - \sin^2 \alpha_{31})}$$

est  $\sin^2 \alpha_{43} (\sin^2 \alpha_{23} - \sin^2 \alpha_{43}) (h^2 + h'^2)^2,$

ce qui ne peut pas s'annuler, sans que l'angle tétraèdre III se décompose davantage.

On ne saurait donc admettre de système du type (36, 11).

**44. Quatrième cas. Deux équations décomposées par rapport à des variables différentes en gardant la même variable au second degré.** C'est le cas du système (36, 4). On se rappelle que l'équation qui ne se décompose pas doit être unicursale. Soient donc

$$(44, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{21} \equiv \alpha_{31}, \quad \alpha_{11} \equiv \alpha_{41}, \quad \alpha_{23} \equiv \alpha_{43}, \quad \alpha_{13} \equiv \alpha_{33}, \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} - \alpha_{32} - \alpha_{42} \equiv 0, \\ t_{13} = \frac{\sin(\alpha_{23} - \alpha_{13})t_{23}^2 + \sin(\alpha_{23} + \alpha_{13})}{2 \sin \alpha_{13} t_{23}}, \\ t_{31} = \frac{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{11})t_{21}^2 + \sin(\alpha_{21} + \alpha_{11})}{2 \sin \alpha_{11} t_{21}}. \end{array} \right.$$

Les équations (39, 1) se mettront sous la forme

$$(44, 2) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha_{21} - \alpha_{11})(h - h' t_{23})^2 + \sin(\alpha_{21} + \alpha_{11})(h' + h t_{23})^2 \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sin \alpha_{11}(h - h' t_{23})(h' + h t_{23}) t_{31} = 0, \\ \sin \alpha_{42} \sin(\alpha_{22} - \alpha_{32})(f - f' t_{31})^2 + \sin \alpha_{32} \sin(\alpha_{22} - \alpha_{42})(f t_{31} - f')^2 t_{12}^2 \\ \qquad \qquad \qquad + \sin \alpha_{22} \sin(\alpha_{32} + \alpha_{42})(f t_{31} + f')^2 \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}(f - f' t_{31})(f t_{31} + f') t_{12} = 0, \\ \sin(\alpha_{23} - \alpha_{13})(g' + g t_{12}) t_{23}^2 + \sin(\alpha_{23} + \alpha_{13})(g' + g t_{12}) \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sin \alpha_{13}(g - g' t_{12}) t_{23} = 0. \end{array} \right.$$

Le coefficient de  $t_{31}$  dans le discriminant pris par rapport à  $t_{12}$  de la deuxième équation est

$$-2ff' \sin \alpha_{22} \sin \alpha_{32}.$$

Cette quantité doit être nulle, parce que le même coefficient dans le discriminant pris par rapport à  $t_{23}$  de la première équation est nul. Il faut donc que le produit  $ff'$  soit nul. On trouve de la même façon que le produit  $gg'$  doit également s'annuler. J'adopte la solution

$$(44, 3) \qquad f = 0, \quad g = 0.$$

Les équations (44, 2) se mettront maintenant sous la forme

$$(44, 4) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha_{21} - \alpha_{11})(h - h' t_{23})^2 + \sin(\alpha_{21} + \alpha_{11})(h' + h t_{23})^2 \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sin \alpha_{11}(h - h' t_{23})(h' + h t_{23}) t_{31} = 0, \\ \sin \alpha_{42} \sin(\alpha_{22} - \alpha_{32}) t_{31}^2 + \sin \alpha_{32} \sin(\alpha_{22} - \alpha_{42}) t_{12}^2 \\ \qquad \qquad \qquad + \sin \alpha_{22} \sin(\alpha_{32} + \alpha_{42}) + 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} t_{31} t_{12} = 0, \\ \sin(\alpha_{23} - \alpha_{13}) t_{23}^2 + \sin(\alpha_{23} + \alpha_{13}) + 2 \sin \alpha_{13} t_{12} t_{23} = 0. \end{array} \right.$$

Les deux discriminants qui renferment  $t_{31}$  sont

$$\begin{aligned} & \sin^2 \alpha_{11} t_{31}^2 + (\sin^2 \alpha_{11} - \sin^2 \alpha_{21}), \\ & \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{12} t_{31}^2 + \sin(\alpha_{42} - \alpha_{22}) \sin(\alpha_{32} + \alpha_{42}). \end{aligned}$$

Pour qu'ils aient les mêmes racines, il faut et il suffit que

$$\frac{\sin^2 \alpha_{11}}{\sin^2 \alpha_{21}} = \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{32}}.$$

En étudiant de même les deux discriminants qui renferment  $t_{12}$ , on trouve que

$$\frac{\sin^2 \alpha_{13}}{\sin^2 \alpha_{23}} = \frac{\sin \alpha_{32} \sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{42}}.$$

Toutes les conditions trouvées jusqu'à présent peuvent s'écrire sous la forme suivante [en tenant compte de l'hypothèse (19, 1)]:

$$(44, 5) \quad \begin{aligned} f = 0, \quad g = 0, \quad a_{12} + a_{22} - a_{32} - a_{42} &\equiv 0, \\ \frac{\sin a_{11} \sin a_{13}}{\sin a_{21} \sin a_{23}} &= \frac{\sin a_{12}}{\sin a_{22}}, \quad \frac{\sin a_{11} \sin a_{23}}{\sin a_{21} \sin a_{13}} = \frac{\sin a_{42}}{\sin a_{32}}. \end{aligned}$$

Pour compléter ce système il faut substituer dans la deuxième des équations (44, 4) les valeurs de  $t_{31}$  et de  $t_{12}$  données par la première et la troisième de ces équations, et égaliser à zéro les neuf coefficients de l'équation résultante. Les seules nouvelles conditions que donne cette opération sont

$$(44, 6) \quad \begin{aligned} hh' &= 0, \\ \frac{\cos a_{11} \cos a_{13} - \cos a_{12}}{\sin a_{11} \sin a_{13}} &= \frac{h'^2 - h^2}{h'^2 + h^2} \frac{\cos a_{23} \cos a_{21} - \cos a_{22}}{\sin a_{23} \sin a_{21}}. \end{aligned}$$

Le cas qu'on vient d'étudier admet deux variantes. Soient d'abord

$$(44, 7) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{21} + a_{31} &\equiv \pi, \quad a_{11} + a_{41} \equiv \pi, \quad a_{23} + a_{43} \equiv \pi, \quad a_{13} + a_{33} \equiv \pi, \\ \frac{-1}{t_{31}} &= \frac{\sin(a_{21} - a_{11})t_{21}^2 + \sin(a_{21} + a_{11})}{2 \sin a_{11} t_{21}}, \\ \frac{-1}{t_{13}} &= \frac{\sin(a_{23} - a_{13})t_{23}^2 + \sin(a_{23} + a_{13})}{2 \sin a_{13} t_{23}}. \end{aligned} \right.$$

Les angles tétraèdres I et III sont ainsi *bi-isogones supplémentairement* tous les deux.

Ce sous-cas se ramène au cas des formules (44, 1), à condition de remplacer  $f = 0, g = 0$  par  $f' = 0, g' = 0$ . En effet, on retombe sur le système (44, 4) avec  $-1/t_{31}$  à la place de  $t_{31}$  dans les deux premières équations. Les conditions (44, 5) ne seront modifiées qu'en ce qui concerne  $f$  et  $g$ .

La seconde variante de ce cas est donnée par les formules suivantes:

$$(44, 8) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{21} + a_{31} &\equiv \pi, \quad a_{11} + a_{41} \equiv \pi, \quad a_{23} \equiv a_{43}, \quad a_{13} \equiv a_{33}, \\ \frac{-1}{t_{31}} &= \frac{\sin(a_{21} - a_{11})t_{21}^2 + \sin(a_{21} + a_{11})}{2 \sin a_{11} t_{21}}, \\ t_{13} &= \frac{\sin(a_{23} - a_{13})t_{23}^2 + \sin(a_{23} + a_{13})}{2 \sin a_{13} t_{23}}. \end{aligned} \right.$$

Les angles tétraèdres I et III sont *bi-isogones*, l'un *simplement*, et l'autre *supplémentairement*.

Ce sous-cas se ramène au cas des formules (44, 1), à condition cette fois de remplacer  $f = 0$  par  $f' = 0$ . En effet, on retombe sur le système (44, 4) avec  $-1/t_{31}$  à la place de  $t_{31}$  dans les deux premières équations. Les conditions (44, 5) ne seront modifiées qu'en ce qui concerne  $f$ .

Afin de me débarrasser dès maintenant des systèmes du type (36, 12), je vais démontrer que le système (44, 2) n'apporte aucun résultat utile lorsque la deuxième équation, au lieu d'être unicursale, se décompose totalement. Soient

$$(44, 9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha_{21} - \alpha_{11})(h - h' t_{23})^2 + \sin(\alpha_{21} + \alpha_{11})(h' + h t_{23})^2 \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sin \alpha_{11}(h - h' t_{23})(h' + h t_{23}) t_{31} = 0, \\ f' t_{31} t_{12} + f \delta_2 t_{31} - f t_{12} + f' \delta_2 = 0, \\ \text{où} \quad \delta_2 = \frac{\sin \alpha_{32} - \epsilon_2 \sin \alpha_{12}}{\sin(\alpha_{32} - \alpha_{12})}, \quad \epsilon_2^2 = 1, \\ \sin(\alpha_{23} - \alpha_{13})(g' + g t_{12}) t_{23}^2 + \sin(\alpha_{23} + \alpha_{13})(g' + g t_{12}) \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sin \alpha_{13}(g - g' t_{12}) t_{23} = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de  $t_{31}$  et de  $t_{12}$  donne une quartique en  $t_{23}$ . Ainsi  
 coef. ( $t_{23}^4$ ) =  $\sin(\alpha_{23} - \alpha_{13})\{[h'^2 \sin(\alpha_{21} - \alpha_{11}) + h^2 \sin(\alpha_{21} + \alpha_{11})](f'g' - \delta_2 fg) + 2hh' \sin \alpha_{11}(fg' + \delta_2 f'g)\}$ ,  
 coef. (1) =  $\sin(\alpha_{23} + \alpha_{13})\{[h^2 \sin(\alpha_{21} - \alpha_{11}) + h'^2 \sin(\alpha_{21} + \alpha_{11})](f'g' - \delta_2 fg) - 2hh' \sin \alpha_{11}(fg' + \delta_2 f'g)\}$ .

Pour que ces deux quantités s'annulent, il faut que

$$f'g' - \delta_2 fg = 0, \quad hh' = 0.$$

Mais

$$\text{coef. } (t_{23}^2) = 8 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{11}(h'^2 - h^2)(fg - \delta_2 f'g'),$$

donc

$$fg - f'g'\delta_2 = 0.$$

Il s'ensuit que  $\delta_2^2 = 1$ , ce qui est impossible.

**45. Cinquième cas. Deux équations irréductibles et la troisième totalement décomposée.** C'est le cas du système (36, 8). Je pose

$$(45, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} \equiv \alpha_{31}, \quad \alpha_{21} \equiv \alpha_{41}, \\ \delta_1 = \frac{\sin \alpha_{11} - \epsilon_1 \sin \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{11} - \alpha_{21})}, \quad \epsilon_1^2 = 1, \quad t_{21} t_{31} = \delta_1. \end{array} \right.$$

La première des équations (39, 1) sera remplacée par

$$(45, 2) \quad h' t_{31} t_{23} + h(\delta_1 t_{23} - t_{31}) + h' \delta_1 = 0.$$

Les deux autres ne subiront aucun changement.

Les discriminants, qui renferment la variable  $t_{12}$ , de la deuxième et de la troisième des équations (39, 1) doivent avoir les mêmes racines. Cela fait que le couple II, III doit appartenir à l'une des trois catégories du No. 41. Pour fixer les idées, j'adopte le *couple A*. Soient

$$(45, 3) \quad g = 0, \quad c_2 = c_3, \quad c_2' = c_3', \quad m_2 = m_3.$$

Si l'on substitue dans la troisième des équations (39, 1) la valeur de  $t_{23}$  donnée par (45, 2), on obtient une équation doublement quadratique par rapport à  $t_{12}$  et à  $t_{31}$ . On doit alors identifier cette équation avec la deuxième des équations (39, 1); ses coefficients de  $t_{12} t_{31}^2$  et de  $t_{12}$  sont respectivement

$$(45, 4) \quad -2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} h h', \quad 2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} h h' \delta_1^2.$$

Les mêmes coefficients dans la deuxième des équations (39, 1) sont

$$(45, 5) \quad 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} f f', \quad -2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} f f'.$$

Puisque  $\delta_1^2 = 1$  est inadmissible, les coefficients (45, 4) et (45, 5) ne peuvent être proportionnels autrement que quand

$$(45, 6) \quad f f' = 0, \quad h h' = 0.$$

Je pose donc définitivement

$$(45, 7) \quad f = 0, \quad g = 0, \quad h' = 0, \quad c_2 = c_3, \quad c_2' = c_3', \quad m_2 = m_3.$$

Dans ces conditions, les deux équations qu'on a à identifier sont

$$(45, 8) \quad \begin{cases} \nu_3 p_{23} t_{12}^2 t_{31}^2 - \sigma_3 p_{33} \delta_1^2 + \mu_3 p_{43} \delta_1^2 t_{12}^2 + \lambda_3 p_{13} t_{31}^2 \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} \delta_1 t_{12} t_{31} = 0, \\ \mu_2 p_{22} t_{12}^2 t_{31}^2 + \sigma_2 p_{12} + \nu_2 p_{42} t_{12}^2 - \lambda_2 p_{32} t_{31}^2 \\ \qquad \qquad \qquad + 2 \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32} t_{12} t_{31} = 0. \end{cases}$$

Pour qu'elles soient identiques sans se décomposer, il faut et il suffit que

$$(45, 9) \quad \begin{cases} \frac{\nu_3 p_{23}}{\delta_1 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} = \frac{-\mu_2 p_{22}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}, & \frac{-\mu_3 p_{43} \delta_1}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} = \frac{\nu_2 p_{42}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}, \\ \frac{\sigma_3 p_{33} \delta_1}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} = \frac{\sigma_2 p_{12}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}, & \frac{\lambda_3 p_{13}}{\delta_1 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} = \frac{\lambda_2 p_{32}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}. \end{cases}$$

En vertu de (45, 7), les quatre conditions (45, 9), dont trois seulement sont indépendantes, peuvent être remplacées par

$$(45, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = b_3, \quad a_2' = b_3', \\ \delta_1 = \frac{\nu_3 p_{23}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} \cdot \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}{-\mu_2 p_{22}}. \end{array} \right.$$

On rencontre une variante de ce cas lorsque l'angle tétraèdre I se décompose *supplémentairement*. Soient

$$(45, 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} + \alpha_{31} \equiv \pi, \quad \alpha_{21} + \alpha_{41} \equiv \pi, \quad \delta_1' = \frac{\sin \alpha_{11} + \epsilon_1' \sin \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{11})}, \\ t_{21} = \delta_1' t_{31} = \epsilon_1' t_{41} = -\epsilon_1' \delta_1' t_{11}, \quad \epsilon_1'^2 = 1. \end{array} \right.$$

La méthode à suivre ici est la même que celle de tout à l'heure. On aboutit à un système de conditions tel que le suivant :

$$(45, 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = g = h' = 0, \quad c_2 = c_3, \quad c_2' = c_3', \quad a_2 = b_3, \quad a_2' = b_3', \quad m_2 = m_3, \\ \delta_1' = \frac{\nu_3 p_{23}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} \cdot \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}{\mu_2 p_{22}}. \end{array} \right.$$

**46. Sixième cas. Trois équations toutes totalement décomposées.** Il ne reste qu'un cas à étudier; c'est celui du système (36, 10). Soient d'abord

$$(46, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{31} \equiv \alpha_{11}, \quad \alpha_{41} \equiv \alpha_{21}, \quad \alpha_{42} \equiv \alpha_{32}, \quad \alpha_{22} \equiv \alpha_{12}, \\ \delta_1 = \frac{\sin \alpha_{11} - \epsilon_1 \sin \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{11} - \alpha_{21})}, \quad \delta_2 = \frac{\sin \alpha_{32} - \epsilon_2 \sin \alpha_{12}}{\sin(\alpha_{32} - \alpha_{12})}, \\ \epsilon_1^2 = 1, \quad t_{21} t_{31} = \delta_1; \quad \epsilon_2^2 = 1, \quad t_{32} t_{12} = \delta_2; \\ \alpha_{33} \equiv \alpha_{23}, \quad \alpha_{43} \equiv \alpha_{13}, \\ \delta_3 = \frac{\sin \alpha_{13} - \epsilon_3 \sin \alpha_{23}}{\sin(\alpha_{13} - \alpha_{23})}, \\ \epsilon_3^2 = 1, \quad t_{23} t_{13} = \delta_3. \end{array} \right.$$

Si l'on pose (*cf.* 38, 3)

$$(46, 2) \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{g}{g'}, \quad \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{h}{h'}, \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{f}{f'},$$

les  $t$  devront satisfaire à

$$(46, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{t_{13} + t_{12}}{1 - t_{13} t_{12}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad \frac{t_{23} + t_{21}}{1 - t_{23} t_{21}} = \operatorname{tg} \frac{b}{2}, \quad \frac{t_{31} + t_{32}}{1 - t_{31} t_{32}} = \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \\ t_{21} t_{31} = \delta_1, \quad t_{12} t_{32} = \delta_2, \quad t_{13} t_{23} = \delta_3. \end{array} \right.$$

Par une simple élimination des  $t$  on trouve qu'un système de conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (46, 3) soient poristiques est

$$(46, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\delta_1 - \delta_2 \delta_3}{1 - \delta_1 \delta_2 \delta_3}, \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\delta_2 - \delta_1 \delta_3}{1 - \delta_1 \delta_2 \delta_3}, \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{\delta_3 - \delta_1 \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2 \delta_3}, \end{array} \right.$$

et si l'on résout ces équations-là par rapport aux  $\delta$ , on trouve que

$$(46, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 - \delta_1)/(1 + \delta_1)}{\cos \frac{1}{2}(-a + b + c)} = \frac{(1 - \delta_2)/(1 + \delta_2)}{\cos \frac{1}{2}(a - b + c)} = \frac{(1 - \delta_3)/(1 + \delta_3)}{\cos \frac{1}{2}(a + b - c)} = D, \\ D^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b + c)}{\cos \frac{1}{2}(-a + b + c) \cos \frac{1}{2}(a - b + c) \cos \frac{1}{2}(a + b - c)}. \end{array} \right.$$

Les variantes de ce cas sont au nombre de trois. Elles se calculent de la même façon que le cas que je viens d'étudier.

*Première Variante.*

$$(46, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} + \alpha_{31} \equiv \pi, \quad \alpha_{12} + \alpha_{22} \equiv \pi, \quad \alpha_{33} + \alpha_{23} \equiv \pi, \quad \delta_1' = \frac{\sin \alpha_{11} + \epsilon_1' \sin \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{11})}, \\ \alpha_{21} + \alpha_{41} \equiv \pi, \quad \alpha_{32} + \alpha_{42} \equiv \pi, \quad \alpha_{13} + \alpha_{43} \equiv \pi, \quad \delta_2' = \frac{\sin \alpha_{32} + \epsilon_2' \sin \alpha_{22}}{\sin(\alpha_{22} - \alpha_{32})}, \\ t_{21} = \delta_1' t_{31}, \quad t_{32} = \delta_2' t_{12}, \quad t_{13} = \delta_3' t_{23}, \quad \delta_3' = \frac{\sin \alpha_{43} + \epsilon_3' \sin \alpha_{23}}{\sin(\alpha_{23} - \alpha_{43})}, \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = -\frac{1 + \delta_1' \delta_2' \delta_3'}{\delta_1' + \delta_2' \delta_3'}, \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} = -\frac{1 + \delta_1' \delta_2' \delta_3'}{\delta_2' + \delta_3' \delta_1'}, \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} = -\frac{1 + \delta_1' \delta_2' \delta_3'}{\delta_3' + \delta_1' \delta_2'}, \\ \epsilon_1'^2 = \epsilon_2'^2 = \epsilon_3'^2 = 1, \\ \frac{(1 + \delta_1')/(1 - \delta_1')}{\sin \frac{1}{2}(-a + b + c)} = \frac{(1 + \delta_2')/(1 - \delta_2')}{\sin \frac{1}{2}(a - b + c)} = \frac{(1 + \delta_3')/(1 - \delta_3')}{\sin \frac{1}{2}(a + b - c)} = D', \\ D'^2 = \frac{-\sin \frac{1}{2}(a + b + c)}{\sin \frac{1}{2}(-a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}. \end{array} \right. \quad \text{G}$$

*Deuxième Variante.*

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{11} \equiv \alpha_{31}, \quad \alpha_{12} + \alpha_{22} \equiv \pi, \quad \alpha_{13} + \alpha_{43} \equiv \pi, \\
 & \alpha_{21} \equiv \alpha_{41}, \quad \alpha_{32} + \alpha_{42} \equiv \pi, \quad \alpha_{23} + \alpha_{33} \equiv \pi, \\
 & t_{21} t_{31} = \delta_1, \quad t_{32} = \delta_2' t_{12}, \quad t_{13} = \delta_3' t_{23}, \\
 & \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b} = -\frac{\delta_1 - \delta_2' \delta_3'}{1 - \delta_1 \delta_2' \delta_3'}, \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\delta_2' - \delta_1 \delta_3'}{1 - \delta_1 \delta_2' \delta_3'}, \\
 & \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b} = -\frac{\delta_3' - \delta_1 \delta_2'}{1 - \delta_1 \delta_2' \delta_3'}, \\
 & \frac{(1 - \delta_1)/(1 + \delta_1)}{\cos \frac{1}{2}(a + b + c)} = \frac{(1 - \delta_2')/(1 + \delta_2')}{\cos \frac{1}{2}(a + b - c)} = \frac{(1 - \delta_3')/(1 + \delta_3')}{-\cos \frac{1}{2}(a - b + c)} = D'', \\
 & D''^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(-a + b + c)}{\cos \frac{1}{2}(a + b + c) \cos \frac{1}{2}(a + b - c) \cos \frac{1}{2}(a - b + c)}.
 \end{aligned}
 \tag{46, 7}$$

*Troisième Variante.*

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{11} + \alpha_{31} \equiv \pi, \quad \alpha_{12} \equiv \alpha_{22}, \quad \alpha_{13} \equiv \alpha_{43}, \\
 & \alpha_{21} + \alpha_{41} \equiv \pi, \quad \alpha_{32} \equiv \alpha_{42}, \quad \alpha_{23} \equiv \alpha_{33}, \\
 & t_{21} = \delta_1' t_{31}, \quad t_{32} t_{12} = \delta_2, \quad t_{23} t_{13} = \delta_3, \\
 & \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b} = \frac{1 + \delta_1' \delta_2 \delta_3}{\delta_1' + \delta_2 \delta_3}, \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = -\frac{1 + \delta_1' \delta_2 \delta_3}{\delta_2 + \delta_3 \delta_1'}, \\
 & \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b} = \frac{1 + \delta_1' \delta_2 \delta_3}{\delta_3 + \delta_1' \delta_2}, \\
 & \frac{(1 + \delta_1')/(1 - \delta_1')}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c)} = \frac{(1 + \delta_2)/(1 - \delta_2)}{-\sin \frac{1}{2}(a + b - c)} = \frac{(1 + \delta_3)/(1 - \delta_3)}{\sin \frac{1}{2}(a - b + c)} = D''', \\
 & D'''^2 = \frac{-\sin \frac{1}{2}(-a + b + c)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}.
 \end{aligned}
 \tag{46, 8}$$

Chapitre VI.

LE MECANISME DE KEMPE SUR LA SPHERE.

47. Conventions préliminaires. J'ai fait remarquer au No. 3 que le *mécanisme de Kempe sur la sphère* est à la base de tous les mécanismes qui sont représentés par la figure (1, 1). C'est donc celui-là que j'aborde

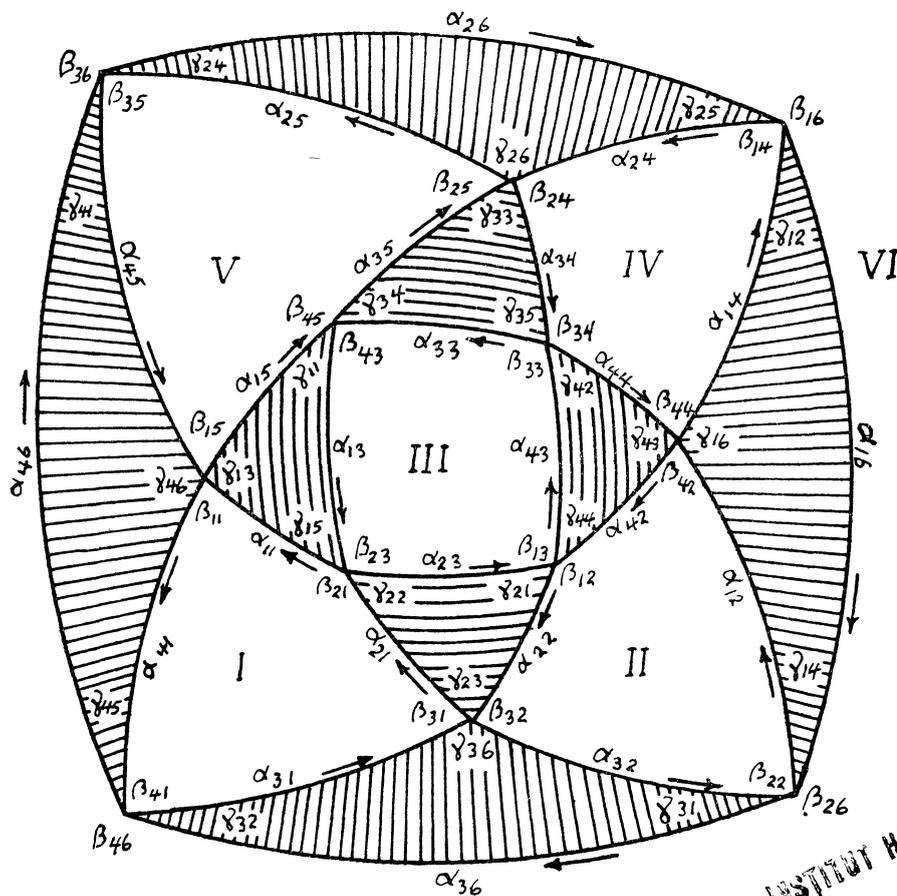


Fig. 47, 1.

en premier lieu. A la figure (47, 1) on voit sa trace sphérique. Il est composé de six angles tétraèdres à sommet commun, ayant deux à deux un axe en commun. La notation est celle que j'ai décrite en détail au No. 37, quand j'ai introduit un mécanisme préliminaire à trois angles

INSTITUT HENRI PUNICHAUD

tétraèdres. Le nouvel indice dont j'ai parlé à cette place variera maintenant depuis 1 jusqu'à 6.

Il est évident que chaque groupe de trois angles tétraèdres qui se touchent forme un mécanisme préliminaire du No. 37. Il faudra donc que tous les angles et tous les dièdres du mécanisme satisfassent à des conditions analogues à celles qui ont été établies au chapitre dernier.

**48. Premier mécanisme. Mécanisme réduit à cinq angles tétraèdres.** Je suppose que les constantes des angles tétraèdres I, II, et III satisfassent aux conditions (40, 7), c'est-à-dire à

$$(48, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{41} \equiv \alpha_{31} \equiv \alpha_{12} \equiv \alpha_{32} \equiv \frac{1}{2}\pi, \quad \cos \alpha_{13} \cos \alpha_{43} - \cos \alpha_{23} \cos \alpha_{33} = 0, \\ g = 0, \quad h = 0, \quad f + f' = 0, \quad \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{23} = 0, \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{42}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{43}}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_{21}}{\operatorname{tg} \alpha_{11}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{13}}. \end{array} \right.$$

Les dièdres  $\gamma$  obéiront à

$$\gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv 0, \quad \gamma_{22} + \gamma_{15} \equiv 0, \quad \gamma_{23} \equiv \frac{1}{2}\pi, \quad \gamma_{36} \equiv \pi,$$

ce qui fait que  $\alpha_{36} \equiv 0$ . C'est exceptionnellement que je conserve une solution qui oblige un angle facial à s'annuler.

Si l'on substitue dans

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{42}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{43}}$$

les valeurs des  $\gamma$  données par (38, 2), on trouve

$$\cos \gamma_{43} \sin^2 \gamma_{44} = 0.$$

J'adopte la solution  $\gamma_{43} \equiv \frac{1}{2}(3\pi)$ . De la même façon on aura  $\gamma_{13} \equiv \frac{1}{2}(3\pi)$ .

De tous les cas de déformabilité admissibles du mécanisme préliminaire II, III, IV, celui qui impose le plus petit nombre de conditions au mécanisme entier est certainement celui qui n'impose aucune nouvelle condition aux angles tétraèdres II et III, c'est-à-dire celui du type (40, 7). Cela se constate d'autant mieux que la condition  $\gamma_{43} \equiv \frac{1}{2}(3\pi)$ , qu'on a déjà trouvée, fait partie de ce cas de déformabilité. Il en est de même de tous les autres mécanismes préliminaires. Je pose donc

$$(48, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{31} \equiv \alpha_{41} \equiv \alpha_{45} \equiv \alpha_{25} \equiv \alpha_{24} \equiv \alpha_{14} \equiv \alpha_{12} \equiv \alpha_{32} \equiv \frac{1}{2}\pi, \\ \alpha_{16} \equiv \alpha_{26} \equiv \alpha_{36} \equiv \alpha_{46} \equiv 0, \\ \gamma_{13} \equiv \gamma_{43} \equiv \frac{1}{2}(3\pi), \quad \gamma_{23} \equiv \gamma_{33} \equiv \frac{1}{2}\pi, \quad \gamma_{36} \equiv \gamma_{26} \equiv \pi, \quad \gamma_{46} \equiv \gamma_{16} \equiv 0, \\ \gamma_{15} + \gamma_{22} \equiv 0, \quad \gamma_{34} + \gamma_{11} \equiv 0, \quad \gamma_{42} + \gamma_{35} \equiv 0, \quad \gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv 0, \end{array} \right.$$

On peut uniformiser toutes les constantes du mécanisme en prenant pour paramètres les quatre dièdres  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{44}$ ,  $\gamma_{35}$ ,  $\gamma_{11}$ . En effet les formules (38, 2) donnent

$$(48, 3) \left\{ \begin{array}{l} \sin a_{23} = \frac{\sin a_{22}}{\sin \gamma_{22}} = -\frac{\sin a_{21}}{\sin \gamma_{44}}, \quad \cos a_{23} = -\cot \gamma_{22} \cot \gamma_{44}, \\ \cos a_{22} = \frac{\cos \gamma_{22}}{\sin \gamma_{44}}, \quad \cos a_{21} = -\frac{\cos \gamma_{44}}{\sin \gamma_{22}}; \\ \sin a_{43} = -\frac{\sin a_{44}}{\sin \gamma_{44}} = \frac{\sin a_{42}}{\sin \gamma_{35}}, \quad \cos a_{43} = -\cot \gamma_{44} \cot \gamma_{35}, \\ \cos a_{42} = \frac{\cos \gamma_{35}}{\sin \gamma_{44}}, \quad \cos a_{44} = -\frac{\cos \gamma_{44}}{\sin \gamma_{35}}; \\ \sin a_{13} = \frac{\sin a_{15}}{\sin \gamma_{22}} = -\frac{\sin a_{11}}{\sin \gamma_{11}}, \quad \cos a_{13} = -\cot \gamma_{22} \cot \gamma_{11}, \\ \cos a_{15} = \frac{\cos \gamma_{22}}{\sin \gamma_{11}}, \quad \cos a_{11} = -\frac{\cos \gamma_{11}}{\sin \gamma_{22}}; \\ \sin a_{33} = \frac{\sin a_{35}}{\sin \gamma_{35}} = -\frac{\sin a_{34}}{\sin \gamma_{11}}, \quad \cos a_{33} = -\cot \gamma_{35} \cot \gamma_{11}, \\ \cos a_{35} = \frac{\cos \gamma_{35}}{\sin \gamma_{11}}, \quad \cos a_{34} = -\frac{\cos \gamma_{11}}{\sin \gamma_{35}}. \end{array} \right.$$

Les valeurs des  $a$  données par (48, 3) satisfont identiquement aux cinq relations

$$(48, 4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\operatorname{tg} a_{21}}{\operatorname{tg} a_{23}} = \frac{\operatorname{tg} a_{11}}{\operatorname{tg} a_{13}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{15}}{\operatorname{tg} a_{13}} = \frac{\operatorname{tg} a_{35}}{\operatorname{tg} a_{33}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{34}}{\operatorname{tg} a_{33}} = \frac{\operatorname{tg} a_{44}}{\operatorname{tg} a_{43}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{42}}{\operatorname{tg} a_{43}} = \frac{\operatorname{tg} a_{22}}{\operatorname{tg} a_{23}}, \\ \cos a_{23} \cos a_{33} = \cos a_{13} \cos a_{43}, \end{array} \right.$$

qui sont les seules dont on n'a pas tenu compte en écrivant (48, 3).

On sait maintenant que chaque sous-mécanisme composé de trois angles tétraèdres qui se touchent est déformable. Je vais démontrer qu'il en est de même du mécanisme entier.

Les variables  $t_{23}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{31}$ , qui déterminent la forme du sous-mécanisme composé des angles tétraèdres I, II, et III ne satisfont qu'aux deux équations

$$(48, 5) \quad \frac{2t_{31}}{t_{31}^2 - 1} = \frac{\sin(a_{21} - a_{11})t_{23}^2 + \sin(a_{11} + a_{21})}{2 \sin a_{11} t_{23}} \\ = \frac{-2 \sin a_{42} t_{12}}{\sin(a_{22} - a_{42})t_{12}^2 + \sin(a_{22} + a_{42})},$$

parce que l'équation

$$\nu_3 p_{23} t_{12}^2 t_{23}^2 + \mu_3 p_{43} t_{12}^2 + \lambda_3 p_{13} t_{23}^2 - 2 \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43} t_{12} t_{23} - \sigma_3 p_{33} = 0$$

est identique à celle qui est formée du deuxième et du troisième membres de (48, 5).

Si l'on se donne arbitrairement une forme de l'angle tétraèdre III, l'angle tétraèdre II aura deux déterminations qui seront données par (48, 5). Si l'on se décide à prendre l'une de ces deux déterminations, la forme de l'angle tétraèdre I sera uniquement déterminée, ainsi que celle de l'angle tétraèdre IV, par deux de leurs dièdres. D'une part et d'autre la forme de l'angle tétraèdre V sera uniquement déterminée. Il s'agit de savoir si ses deux déterminations coïncident.

On aura d'une part

$$\begin{aligned} (48, 6) \quad \cos \beta_{15} = -\sin \beta_{11} &= -\frac{\cos \beta_{31}}{\sin \beta_{21}} \{ \sin \alpha_{21} \cot \alpha_{11} \cos \beta_{21} + \cos \alpha_{21} \} \\ &= -\frac{\sin \beta_{32}}{\sin \beta_{23}} \{ \sin \alpha_{21} \cot \alpha_{11} \cos \beta_{23} + \cos \alpha_{21} \}, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (48, 7) \quad \cos \beta_{25} = -\sin \beta_{24} &= -\frac{\cos \beta_{44}}{\sin \beta_{34}} \{ \sin \alpha_{44} \cot \alpha_{34} \cos \beta_{34} + \cos \alpha_{44} \} \\ &= -\frac{\sin \beta_{42}}{\sin \beta_{33}} \{ \sin \alpha_{44} \cot \alpha_{34} \cos \beta_{33} + \cos \alpha_{44} \}, \end{aligned}$$

la valeur de  $\beta_{45}$  étant la même dans les deux cas.

Si les deux formes de l'angle tétraèdre V ainsi trouvées coïncident, il faudra que les valeurs de  $\cos \beta_{15}$  et de  $\cos \beta_{25}$  données par (48, 6) et (48, 7) satisfassent à

$$(48, 8) \quad \sin \alpha_{15} \cos \beta_{15} - \sin \alpha_{35} \cos \beta_{25} = 0.$$

La condition est également suffisante, parce que si ces deux formes de l'angle tétraèdre ne coïncidaient pas, il faudrait que les valeurs trouvées de  $\cos \beta_{15}$  et de  $\cos \beta_{25}$  satisfissent à

$$\sin \alpha_{15} \cos \beta_{15} + \sin \alpha_{35} \cos \beta_{25} = 0.$$

Si l'on substitue dans (48, 8) les valeurs de  $\cos \beta_{15}$  et de  $\cos \beta_{25}$  données par (48, 6) et (48, 7), on obtient, moyennant (48, 4),

$$\begin{aligned} (48, 9) \quad \sin \alpha_{15} \cos \alpha_{21} \sin^2 \alpha_{33} \sin \beta_{32} \sin \beta_{33} \\ - \sin \alpha_{35} \cos \alpha_{44} \sin^2 \alpha_{13} \sin \beta_{42} \sin \beta_{23} = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{33} \sin \beta_{13} \sin \beta_{33} &= \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{13} \{1 + \operatorname{tg} \alpha_{23} \cot \alpha_{43} \cos \beta_{13}\} \\ &\quad \{1 + \operatorname{tg} \alpha_{13} \cot \alpha_{23} \cos \beta_{23}\}, \\ \sin \beta_{42} &= -\cos \alpha_{22} \frac{\sin \beta_{31}}{\sin \beta_{12}} \{1 + \operatorname{tg} \alpha_{23} \cot \alpha_{43} \cos \beta_{12}\}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue dans (48, 9) ces valeurs de  $\sin \beta_{33}$  et de  $\sin \beta_{42}$ , on obtient

$$-\operatorname{tg} \beta_{31} = \frac{\sin \alpha_{15} \cos \alpha_{21} \sin \alpha_{33} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{13} \{1 + \operatorname{tg} \alpha_{11} \cot \alpha_{21} \cos \beta_{23}\}}{\sin \alpha_{35} \cos \alpha_{22} \cos \alpha_{44} \sin^2 \alpha_{13} \sin \beta_{23}}.$$

La substitution dans cette formule-ci de la valeur de  $\operatorname{tg} \beta_{31}$  donnée par (48, 5) donne

$$\frac{\sin \alpha_{15} \sin \alpha_{11} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{21} \sin \alpha_{33} \cos \alpha_{13}}{\sin^2 \alpha_{13} \cos \alpha_{11} \sin \alpha_{21} \cos \alpha_{22} \sin \alpha_{35} \cos \alpha_{44}} = 1.$$

Enfin, la substitution dans celle-ci des valeurs des  $\alpha$  données par (48, 3) montre qu'elle est satisfaite identiquement.

On sait donc qu'à une forme arbitraire de l'angle tétraèdre III correspondent toujours deux formes du mécanisme à cinq angles tétraèdres, et que si les angles tétraèdres III et II sont de forme donnée, compatible avec les équations (48, 5), la forme du mécanisme à cinq angles tétraèdres est uniquement déterminée.

L'angle tétraèdre VI s'évanouit d'après les hypothèses (48, 2). Comme son évanouissement est assuré, quelles que soient les formes des angles tétraèdres I, II, IV, et V, il ne saurait y avoir là de gêne à la déformation du mécanisme.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on n'a qu'à se donner arbitrairement quatre constantes  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{44}$ ,  $\gamma_{35}$ ,  $\gamma_{11}$ . Les valeurs de toutes les autres constantes seront données par les formules (48, 3). Les rapports des sinus des angles faciaux seront positifs, si l'on prend  $\sin \gamma_{22}$  et  $\sin \gamma_{35}$  positifs et  $\sin \gamma_{44}$  et  $\sin \gamma_{11}$  négatifs. Pour que les angles faciaux soient réels, il faut en outre que le carré du cosinus de chacun des deux angles  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{35}$  soit inférieur au carré du sinus de chacun des deux angles  $\gamma_{44}$ ,  $\gamma_{11}$ .

Je me suis posé le problème qui consiste à trouver le *genre* de ce mécanisme. On sait que sa forme est uniquement déterminée par les valeurs de  $t_{23}$ ,  $t_{31}$ ,  $t_{12}$ , qui ne sont astreints qu'à satisfaire aux équations (48, 5).

Je pose

$$f^2 = \frac{\sin^2 a_{21} \sin^2 a_{22} - \sin^2 a_{11} \sin^2 a_{22} - \sin^2 a_{21} \sin^2 a_{42}}{\sin^2 a_{42} - \sin^2 a_{22}},$$

$$g^2 = \frac{\sin^2 a_{21} \sin^2 a_{22} - \sin^2 a_{11} \sin^2 a_{22} - \sin^2 a_{21} \sin^2 a_{42}}{\sin^2 a_{11}},$$

$$\frac{x}{z} = \frac{g}{f} \frac{\{\sin(a_{21} - a_{11})t_{23}^2 - 2ft_{23} - \sin(a_{21} + a_{11})\} \times \{\sin(a_{22} - a_{42})t_{12}^2 + \sin(a_{22} + a_{42})\}}{2t_{23} \sin a_{42} \{\sin(a_{42} - a_{22})t_{12}^2 + \sin(a_{42} + a_{22})\}},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{1}{t_{31}}.$$

En résolvant par rapport aux  $t$ , et en tenant compte de (48, 5), on trouve

$$t_{23} = \frac{f(z^2 + x^2)(z^2 - y^2) + 2 \sin a_{11} yz(z^2 - x^2)}{\sin(a_{21} - a_{11})(z^2 - y^2)(z^2 - x^2)},$$

$$t_{12} = \frac{\{2gxz - \sin a_{42}(z^2 - x^2)\}(z^2 - y^2)}{2 \sin(a_{22} - a_{42})yz(z^2 - x^2)}, \quad t_{31} = \frac{z}{y},$$

et

$$(48, 10) \quad ax^2 z^2 (z^2 - y^2)^2 + by^2 z^2 (z^2 - x^2)^2 + c(z^2 - x^2)^2 (z^2 - y^2)^2 = 0,$$

$$\text{où} \quad a = g^2, \quad b = \sin^2 a_{22} - \sin^2 a_{42}, \quad c = -\frac{1}{4} \sin^2 a_{42}.$$

J'ai ainsi établi une correspondance uniforme dans les deux sens entre les points de la courbe gauche (48, 5) et ceux de la courbe plane (48, 10). Elles auront, par conséquent le même genre, qui sera celui du mécanisme en question.

La courbe (48, 10) a deux points quadruples aux points (0, 1, 0) et (1, 0, 0). Les tangentes en ces points sont

$$ax^2 z^2 + c(z^2 - x^2)^2 = 0, \quad by^2 z^2 + c(z^2 - y^2)^2 = 0.$$

Au point (1, 1, 1) la courbe (48, 10) a un point double auquel les tangentes sont

$$a(y - z)^2 + b(x - z)^2 = 0,$$

et il y a des points doubles de même nature aux points (-1, -1, 1), (-1, 1, 1), et (1, -1, 1).

Cette courbe n'a pas d'autres points multiples, à moins que son discriminant

$$abc(4c - a)(4c - b)(4c - a - b)$$

ne s'annule.

Cela donne à la courbe un nombre effectif de points doubles égal à 16. Comme une courbe du huitième ordre est capable d'en avoir 21, sans se décomposer, cette courbe est de *genre cinq*.

En fonction des paramètres  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{44}$ ,  $\gamma_{35}$ ,  $\gamma_{11}$ , le discriminant de tout à l'heure se met sous la forme

$$(\sin^2 \gamma_{44} - \cos^2 \gamma_{22})(\cos^2 \gamma_{11} - \sin^2 \gamma_{35})(\sin^2 \gamma_{44} - \sin^2 \gamma_{11})(\sin^2 \gamma_{35} - \sin^2 \gamma_{22}).$$

Tous les mécanismes qu'on étudiera dans la suite seront soit de genre *un* soit de genre *zéro*.

**49. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Le mécanisme que je viens de décrire est composé de cinq angles tétraèdres à sommet commun, disposés comme l'indique la figure (49, 1), qui

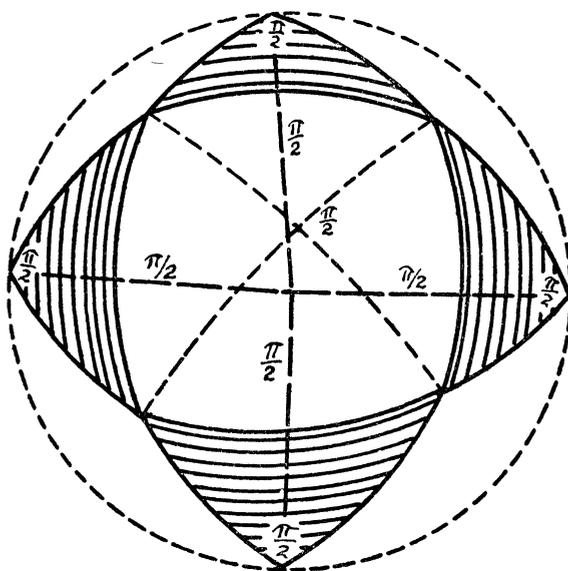


Fig. 49, 1.

représente schématiquement sa trace sphérique.

La trace sphérique est composée des éléments suivants. Il y a d'abord un quadrilatère irréductible dont les diagonales sont perpendiculaires. Sur chaque côté de ce quadrilatère est bâti un triangle dont l'angle opposé au côté du quadrilatère est droit. Enfin les quatre sommets où se trouvent ces angles droits se déplacent sur un grand cercle.

Ce mécanisme dépend de *quatre constantes arbitraires*. Toutes les constantes du mécanisme s'expriment en fonction des quatre dièdres  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{44}$ ,  $\gamma_{35}$ ,  $\gamma_{11}$  (cf. Fig. 47, 1). Les formules (48, 3) donnent les expressions voulues. Le mécanisme étant de *genre cinq*, on ne peut pas uniformiser ses dièdres variables.

Je prends, par exemple

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{22} &= \frac{4}{5}, & \sin \gamma_{35} &= \frac{1}{13}, & \sin \gamma_{44} &= -\frac{1}{17}, & \sin \gamma_{11} &= -\frac{2}{25}, \\ \cos \gamma_{22} &= \frac{3}{5}, & \cos \gamma_{35} &= \frac{5}{13}, & \cos \gamma_{44} &= \frac{8}{17}, & \cos \gamma_{11} &= \frac{7}{25}. \end{aligned}$$

Les formules (48, 3) donnent alors

$$\begin{array}{lll} \sin \alpha_{11} = 0,936749 + & \sin \alpha_{34} = 0,952884 + & \cos \alpha_{13} = 0,218750 \\ \sin \alpha_{21} = 0,808690 & \sin \alpha_{44} = 0,860290 + & \cos \alpha_{23} = 0,400000 \\ \sin \alpha_{22} = 0,733212 & \sin \alpha_{15} = 0,780624 + & \cos \alpha_{33} = 0,121528 \\ \sin \alpha_{42} = 0,899996 + & \sin \alpha_{35} = 0,916235 & \cos \alpha_{43} = 0,222222 \\ \sin \alpha_{13} = 0,975781 & \cos \alpha_{11} = -0,350000 & \cos \alpha_{34} = -0,303333 + \\ \sin \alpha_{23} = 0,916515 & \cos \alpha_{21} = -0,588235 + & \cos \alpha_{44} = -0,509804 \\ \sin \alpha_{33} = 0,992588 & \cos \alpha_{22} = -0,680000 & \cos \alpha_{15} = -0,625000 \\ \sin \alpha_{43} = 0,974996 & \cos \alpha_{42} = -0,435897 + & \cos \alpha_{35} = -0,400641 \end{array}$$

### 50. Deuxième mécanisme. Six angles tétraèdres tous irréductibles.

Si le mécanisme préliminaire du No. 37 composé des angles tétraèdres I, II, et III appartient au deuxième cas de déformabilité (No. 41), il est évident que les angles tétraèdres IV, V, et VI doivent être ou bien tous irréductibles comme les trois premiers, ou bien deux irréductibles et le troisième totalement décomposé. Je remettrai à une place ultérieure la seconde hypothèse, et m'occuperai ici de la première.

D'après les conclusions du No. 41, les douze couples du mécanisme doivent appartenir à l'une ou à l'autre des catégories *A* et *B*. Il est préférable, du reste, que le même couple se rencontre un nombre pair de fois sur chacune des trois diagonales du mécanisme; sans quoi certains angles tétraèdres perdraient inutilement leur généralité.

Toutes les formules des chapitres II, III, et IV dans lesquelles ne figurent que des symboles qui se rapportent aux angles faciaux de l'angle tétraèdre sont indépendantes de l'ordre dans lequel les angles faciaux se succèdent. Elles peuvent donc s'appliquer indifféremment à chacun des six angles tétraèdres du mécanisme actuel, à condition qu'un indice, qui indique le numéro de l'angle tétraèdre dont il s'agit, soit ajouté à chaque symbole.

Il n'en est plus de même des formules dans lesquelles figurent des symboles qui se rapportent aux dièdres variables. Il faudra donc récrire celles-ci pour chacun des six angles tétraèdres dont on s'occupe actuellement. Ainsi que j'ai eu l'occasion de le faire remarquer au No. 37, ceci peut se faire à vue, sans exiger de calcul auxiliaire.

Soient donc, à la manière de (17, 1),

$$(50, 1) \left\{ \begin{array}{lll} t_{11} = \frac{ifu_{11}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_1)}, & t_{12} = \frac{ifu_{12}}{f\gamma_2}, & t_{13} = \frac{ifu_{13}}{f\gamma_3}, \\ t_{21} = \frac{ifu_{21}}{fa_1}, & t_{22} = \frac{ifu_{22}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_2)}, & t_{23} = \frac{ifu_{23}}{fa_3}, \\ t_{31} = \frac{ifu_{31}}{f\beta_1}, & t_{32} = \frac{ifu_{32}}{f\beta_2}, & t_{33} = \frac{ifu_{33}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)}, \\ t_{41} = \frac{ifu_{41}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_1)}, & t_{42} = \frac{ifu_{42}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}, & t_{43} = \frac{ifu_{43}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_3)}, \\ t_{14} = \frac{ifu_{14}}{fa_4}, & t_{15} = \frac{ifu_{15}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5)}, & t_{16} = \frac{ifu_{16}}{fa_6}, \\ t_{24} = \frac{ifu_{24}}{f\beta_4}, & t_{25} = \frac{ifu_{25}}{f\beta_5}, & t_{26} = \frac{ifu_{26}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_6)}, \\ t_{34} = \frac{ifu_{34}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_4)}, & t_{35} = \frac{ifu_{35}}{f\gamma_5}, & t_{36} = \frac{ifu_{36}}{f\gamma_6}, \\ t_{44} = \frac{ifu_{44}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_4)}, & t_{45} = \frac{ifu_{45}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_5)}, & t_{46} = \frac{ifu_{46}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_6)}, \end{array} \right.$$

et à la manière de (17, 3),

$$(50, 2) \left\{ \begin{array}{lll} u_{11} - u_{21} \equiv \omega_1 + \gamma_1 & u_{12} - u_{32} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - a_2 & u_{13} - u_{23} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \beta_3 \\ u_{21} - u_{31} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_1 & u_{32} - u_{22} \equiv \omega_1 + a_2 & u_{23} - u_{43} \equiv \omega_1 + \beta_3 \\ u_{31} - u_{41} \equiv \omega_1 + \gamma_1 & u_{22} - u_{42} & u_{43} - u_{33} \\ u_{41} - u_{11} & \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + a_2) & \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \beta_3) \\ & \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \gamma_1) & u_{42} - u_{12} \equiv \omega_1 + a_2 & u_{33} - u_{13} \equiv \omega_1 + \beta_3 \\ u_{31} - u_{11} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{32} - u_{42} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{43} - u_{13} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 \\ u_{41} - u_{21} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{22} - u_{12} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{23} - u_{33} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 \\ u_{14} - u_{24} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_4 & u_{15} - u_{35} \equiv \omega_1 + a_5 & u_{16} - u_{26} \equiv \omega_1 + \beta_6 \\ u_{24} - u_{34} \equiv \omega_1 + \gamma_4 & u_{35} - u_{25} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - a_5 & u_{26} - u_{46} \\ u_{34} - u_{44} & u_{25} - u_{45} \equiv \omega_1 - a_5 & \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \beta_6) \\ & \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \gamma_4) & u_{45} - u_{15} & u_{46} - u_{36} \equiv \omega_1 + \beta_6 \\ u_{44} - u_{14} \equiv \omega_1 + \gamma_4 & & \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + a_5) & u_{36} - u_{16} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \beta_6 \\ u_{34} - u_{14} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{25} - u_{15} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{16} - u_{46} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 \\ u_{24} - u_{44} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{45} - u_{35} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 & u_{26} - u_{36} \equiv \frac{1}{2}\omega_1. \end{array} \right.$$

Puisque tous les couples sont soit de la catégorie  $A$ , soit de la catégorie  $B$  (41, 6), les six  $m$  sont égaux, et toutes les fonctions elliptiques des formules (50, 1) ont les mêmes périodes.

Je considère maintenant les *couples*  $A$  et  $B$  dans le but de démontrer que les paramètres elliptiques de deux angles tétraèdres unis par un de ces couples satisfont à une formule d'addition.

Premièrement, si le couple I, III est de la catégorie  $A$ , les formules (18, 5) et (41, 6) donneront

$$\frac{f^2 a_1}{f'^2 a_1} = \frac{f^2 a_3}{f'^2 a_3}, \quad \frac{f^4 a_1 - (m^2 - 1)}{f'^2 a_1} = \frac{f^4 a_3 - (m^2 - 1)}{f'^2 a_3}.$$

Toutes les solutions communes à ces deux équations sont comprises dans

$$(50, 3) \quad f^2 a_1 = f^2 a_3.$$

D'autre part, la relation  $t_{23} + t_{21} = 0$  donne

$$(50, 4) \quad \frac{f u_{23}}{f a_3} + \frac{f u_{21}}{f a_1} = 0.$$

Les équations (50, 3) et (50, 4) peuvent être satisfaites de huit manières différentes par des formules d'addition d'arguments. La solution la plus simple est la suivante :

$$(50, 5) \quad a_1 \equiv a_3, \quad u_{21} \equiv u_{23} + \omega_1.$$

Si l'on avait eu affaire au couple III, IV, on aurait eu à la place des équations (50, 3) et (50, 4)

$$f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) = f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_4), \quad \frac{f u_{33}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)} + \frac{f u_{34}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_4)} = 0.$$

Ces deux équations ont aussi une solution de la forme (50, 5).

Deuxièmement, si le couple I, III est de la catégorie  $B$ , les formules (18, 5) et (41, 6) donneront

$$\frac{f^2 a_1}{f'^2 a_1} = \frac{f^2 a_3}{f'^2 a_3}, \quad \frac{f^4 a_1 - (m^2 - 1)}{f'^2 a_1} + \frac{f^4 a_3 - (m^2 - 1)}{f'^2 a_3} = 0.$$

Toutes les solutions communes à ces deux équations sont comprises dans

$$(50, 6) \quad f^2 a_1 f^2 a_3 = m^2 - 1.$$

L'hypothèse (21, 2) exclut ce cas lorsque  $-1 < m < 1$ . En effet, elle oblige  $f a_1$  et  $f a_3$  à être toutes les deux purement imaginaires.

La relation  $t_{23} t_{21} = 1$  donne

$$(50, 7) \quad f u_{21} f u_{23} + f a_1 f a_3 = 0.$$





Lorsque  $m > 1$ , ces mêmes formules s'écrivent de la manière suivante (cf. No. 32):

$$(50, 15) \left\{ \begin{array}{l} a_1 \equiv a_3 + (1 - \epsilon_{11} \epsilon_{13}) iK' \equiv a_4 + (1 - \epsilon_{11} \epsilon_{14}) iK' \equiv a_6 + (1 - \epsilon_{11} \epsilon_{16}) iK', \\ b_1 \equiv b_2 + (1 - \epsilon_{21} \epsilon_{22}) iK' \equiv b_4 + (1 - \epsilon_{21} \epsilon_{24}) iK' \equiv b_5 + (1 - \epsilon_{21} \epsilon_{25}) iK', \\ c_2 \equiv c_3 + (1 - \epsilon_{32} \epsilon_{33}) iK' \equiv c_5 + (1 - \epsilon_{32} \epsilon_{35}) iK' \equiv c_6 + (1 - \epsilon_{32} \epsilon_{36}) iK', \\ \\ c_1 - a_2 + b_3 + (1 - \epsilon_{31} \epsilon_{12} \epsilon_{23}) iK' \equiv 0, \\ c_4 \equiv c_1 + (1 + \epsilon_{34} \epsilon_{31}) iK', \\ a_5 \equiv a_2 + (1 - \epsilon_{15} \epsilon_{12}) iK', \\ b_6 \equiv b_3 + (1 + \epsilon_{26} \epsilon_{23}) iK', \end{array} \right. \quad [\text{mod } (2K, 4iK')],$$

tous les  $\epsilon$  étant de signe complètement arbitraire.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on commence par se donner  $m$ . On calcule ensuite la valeur de  $k$  au moyen de la formule (31, 3) ou (32, 3). On se donne ensuite  $a_1, b_1, c_1, a_2, c_2$ . Les arguments  $b_2, a_3, b_3, c_3$  sont donnés en fonction de ceux-ci par (50, 14) ou (50, 15). On peut alors calculer les angles faciaux des angles tétraèdres I, II, et III au moyen des formules (33, 1) ou (33, 2); ceux des angles tétraèdres IV, V, et VI seront donnés par (50, 13). En se donnant les arguments arbitraires on doit toutefois tenir compte des domaines de réalité que j'ai décrits en détail au chapitre IV.

Lorsque  $m > 1$ , les imaginaires des formules (50, 15) exigent un calcul préliminaire, avant qu'on puisse appliquer les formules (33, 2) intégralement. On y rencontre des fonctions du type

$$H[v + (1 - \epsilon) iK'], \quad \Theta[v + (1 - \epsilon) iK'], \quad \epsilon^2 = 1.$$

Cependant ces fonctions ne seront plus gênantes, si l'on se rappelle que

$$(50, 16) \quad \left\{ \begin{array}{l} H[v + (1 - \epsilon) iK'] = \epsilon q^{\frac{1}{2}(\epsilon-1)} e^{\pi i v(\epsilon-1)/2K} H v, \\ \Theta[v + (1 - \epsilon) iK'] = \epsilon q^{\frac{1}{2}(\epsilon-1)} e^{\pi i v(\epsilon-1)/2K} \Theta v. \end{array} \right.$$

On verra disparaître des formules définitives tous les facteurs exponentiels, de sorte qu'il ne restera que des fonctions aux arguments réels,

Pour être sûr que les dièdres  $\gamma$  sont réels, il faudrait étudier l'expression  $D^2$  donnée par

$$(50, 17) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \gamma_{21}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{\sin \gamma_{22}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{\sin \gamma_{23}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{D}{\sin \alpha_{21} \sin \alpha_{22} \sin \alpha_{23}}, \\ \text{où} \quad D^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{22} \\ \cos \alpha_{23} & 1 & \cos \alpha_{21} \\ \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{21} & 1 \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Puisque les deux dièdres  $\gamma$  à chaque axe du mécanisme sont conjugués, il est évident que si un seul  $\gamma$  est réel, ils le sont tous.

L'expression elliptique de  $D^2$  est trop compliquée pour être utile. Le procédé dont je me suis servi pour résoudre l'exemple numérique du No. prochain consiste à faire les calculs rapidement d'abord à l'aide d'une règle à calcul, en ne gardant que deux chiffres. Cela suffit pour déterminer le signe de  $D^2$ . Si  $D^2$  est positif, tous les dièdres  $\gamma$  du mécanisme seront réels. C'est ainsi qu'on trouve dans ledit exemple que  $D^2 = 0,08\dots$

**51. Résumé et exemple numérique du précédent.** Ce mécanisme représente le seul cas de déformabilité du mécanisme de Kempe sur la sphère, lorsque tous les six angles tétraèdres sont irréductibles. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. La somme de deux dièdres constants ayant un axe en commun est égale soit à  $\pi$ , soit à  $2\pi$ .
2. Tous les six angles tétraèdres ont le même invariant.
3. La déformation est de *genre un*.
4. Deux angles tétraèdres conjugués ont leurs angles faciaux correspondants soit égaux soit supplémentaires, les angles faciaux correspondants étant ceux qui ont le même premier indice sur la figure (47, 1).
5. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *six*.
6. Aucune relation ne lie les constantes du même angle tétraèdre.

Pour avoir un *exemple numérique* je prends pour l'angle tétraèdre I celui que j'ai calculé au No. 35. On aura donc

$$(51, 1) \left\{ \begin{array}{l} m = \cos 50^\circ, \quad k = \sin 65^\circ, \quad k' = \cos 65^\circ, \\ a_3 = a_1 = \frac{6}{9}K, \quad b_2 = b_1 = \frac{5}{9}K, \quad c_1 = \frac{4}{9}K, \end{array} \right.$$

Soient en outre

$$(51, 2) \quad a_2 \equiv \frac{7,3}{90}K, \quad c_3 \equiv c_2 \equiv \frac{4,1}{90}K, \quad b_3 \equiv a_2 - c_1 \equiv \frac{2,6}{90}K.$$

Les formules (35, 3) donnent les valeurs des fonctions Eta et Thêta des arguments  $a_1, b_1, c_1, b_2, a_3$ . Je prends dans les tables de M. Hippisley les valeurs suivantes des mêmes fonctions de  $a_2, c_2, b_3, c_3$  :

$\frac{H a_2}{HK} = 0,952666 +$	$\frac{\Theta(K - a_2 - b_2)}{\Theta 0} = 1,212555$	$\frac{\Theta(a_3 + b_3)}{\Theta 0} = 1,538081 +$
$\frac{H c_2}{HK} = 0,639432 +$	$\frac{H(K - a_2 + b_2)}{HK} = 0,952666 +$	$\frac{\Theta(K - a_3 - b_3)}{\Theta 0} = 1,000163$
$\frac{\Theta a_2}{\Theta 0} = 1,492035 +$	$\frac{\Theta(K - a_2 + b_2)}{\Theta 0} = 1,492035 +$	$\frac{H(a_3 - b_3)}{HK} = 0,612409 +$
$\frac{\Theta c_2}{\Theta 0} = 1,231039$	$\frac{\Theta(K - a_2 + c_2)}{\Theta 0} = 1,386580 +$	$\frac{H(K - a_3 + b_3)}{HK} = 0,763450 +$
$\frac{H(a_2 + b_2)}{HK} = 0,763450 +$	$\frac{\Theta(K - a_2 - c_2)}{\Theta 0} = 1,088690$	$\frac{\Theta(a_3 - b_3)}{\Theta 0} = 1,212555$
$\frac{\Theta(a_2 + b_2)}{\Theta 0} = 1,324462 +$	$\frac{H(-a_2 + b_2 + c_2)}{HK} = 0,391635 +$	$\frac{\Theta(K - a_3 + b_3)}{\Theta 0} = 1,324462 +$
$\frac{H(a_2 - b_2)}{HK} = 0,280477$	$\frac{H(a_2 - b_2 + c_2)}{HK} = 0,837450 +$	$\frac{H(a_3 + c_3)}{HK} = 0,958011 +$
$\frac{\Theta(a_2 - b_2)}{\Theta 0} = 1,045809$	$\frac{H(a_2 + b_2 - c_2)}{HK} = 0,999336 +$	$\frac{\Theta(K - a_3 - c_3)}{\Theta 0} = 1,040713 +$
$\frac{H(a_2 - c_2)}{HK} = 0,512963 +$	$\frac{H(a_2 + b_2 + c_2)}{HK} = 0,166156 +$	$\frac{H(a_3 - c_3)}{HK} = 0,391635 +$
$\frac{H(a_2 + c_2)}{HK} = 0,906819 +$	$\frac{H b_3}{HK} = 0,422616 +$	$\frac{\Theta(K - a_3 + c_3)}{\Theta 0} = 1,448847$
$\frac{H(K - a_2)}{HK} = 0,280477$	$\frac{H(K - b_3)}{HK} = 0,891107 +$	$\frac{H(-a_3 + b_3 + c_3)}{HK} = 0,033349$
$\frac{H(K - c_2)}{HK} = 0,740255 +$	$\frac{\Theta(b_3)}{\Theta 0} = 1,103035 +$	$\frac{H(a_3 - b_3 + c_3)}{HK} = 0,983486$
$\frac{\Theta(K - a_2)}{\Theta 0} = 1,045809$	$\frac{\Theta(K - b_3)}{\Theta 0} = 1,434413$	$\frac{H(a_3 + b_3 - c_3)}{HK} = 0,751960 +$
$\frac{\Theta(K - c_2)}{\Theta 0} = 1,305948$	$\frac{H(a_3 + b_3)}{HK} = 0,999834$	$\frac{H(a_3 + b_3 + c_3)}{HK} = 0,728339 +$
$\frac{H(K - a_2 - b_2)}{HK} = -0,612409 +$	$\frac{H(K - a_3 - b_3)}{HK} = -0,016676 +$	

(51, 3)

Quand on introduit ces valeurs dans les formules (33, 1), on obtient, moyennant (50, 13),

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha_{14} &= \sin \alpha_{11} = 0,720562 & \cos \alpha_{14} &= -\cos \alpha_{11} = 0,693390 + \\
 \sin \alpha_{24} &= \sin \alpha_{21} = 0,967784 + & \cos \alpha_{24} &= -\cos \alpha_{21} = 0,251780 \\
 \sin \alpha_{34} &= \sin \alpha_{31} = 0,552146 + & \cos \alpha_{34} &= -\cos \alpha_{31} = 0,833747 \\
 \sin \alpha_{44} &= \sin \alpha_{41} = 0,448415 + & \cos \alpha_{44} &= -\cos \alpha_{41} = 0,893825 + \\
 \sin \alpha_{15} &= \sin \alpha_{12} = 0,827596 + & \cos \alpha_{15} &= \cos \alpha_{12} = -0,561323 \\
 \sin \alpha_{25} &= \sin \alpha_{22} = 0,975274 & \cos \alpha_{25} &= \cos \alpha_{22} = -0,220999 + \\
 \sin \alpha_{35} &= \sin \alpha_{32} = 0,447036 & \cos \alpha_{35} &= \cos \alpha_{32} = -0,894516 \\
 \sin \alpha_{45} &= \sin \alpha_{42} = 0,318544 & \cos \alpha_{45} &= \cos \alpha_{42} = -0,947908 \\
 \sin \alpha_{16} &= \sin \alpha_{13} = 0,533584 + & \cos \alpha_{16} &= -\cos \alpha_{13} = -0,845747 \\
 \sin \alpha_{26} &= \sin \alpha_{23} = 0,301558 + & \cos \alpha_{26} &= -\cos \alpha_{23} = -0,953447 + \\
 \sin \alpha_{36} &= \sin \alpha_{33} = 0,196086 & \cos \alpha_{36} &= -\cos \alpha_{33} = 0,980586 + \\
 \sin \alpha_{46} &= \sin \alpha_{43} = 0,291348 + & \cos \alpha_{46} &= -\cos \alpha_{43} = 0,956617
 \end{aligned}$$

Tel est le mécanisme qui correspond aux constantes arbitraires données par les formules (51, 1) et (51, 2).

**52. Troisième mécanisme. Quatre angles tétraèdres bi-isogones et deux à plans diagonaux perpendiculaires.** Si le groupe d'angles tétraèdres I, II, III est de la forme donnée par (43, 1), (43, 10), et (43, 12), tous les autres groupes de trois angles tétraèdres du mécanisme doivent être de même nature. En effet, le groupe II, III, IV, qui est déjà caractérisé par les conditions

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{43}} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{42}}, & \alpha_{23} &\equiv \alpha_{43}, & \alpha_{13} &\equiv \alpha_{23}, & \gamma_{21} + \gamma_{44} &\equiv 0, \\
 & & \cos \alpha_{42} \cos \alpha_{32} - \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{22} &= 0,
 \end{aligned}$$

ne peut appartenir à d'autres cas de déformabilité que celui qui est complété par

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{tg} \alpha_{44}}{\operatorname{tg} \alpha_{14}} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_{42}}{\operatorname{tg} \alpha_{12}}, & \alpha_{44} &\equiv \alpha_{34}, & \alpha_{24} &\equiv \alpha_{14}, & \gamma_{43} + \gamma_{16} &\equiv 0, & \gamma_{42} + \gamma_{35} &\equiv \pi, \\
 & & \cos \alpha_{43} \cos \alpha_{44} - \cos \alpha_{42} &= 0.
 \end{aligned}$$

(Je laisse de côté le cas où l'angle tétraèdre IV serait *bi-isogone supplémentairement*.) On n'a qu'à étendre ce raisonnement au mécanisme entier pour voir que les angles tétraèdres I, III, IV, et VI sont forcément



ceux des  $\alpha$  qui ne figurent pas dans ces formules étant égaux à ceux qui y figurent. Les valeurs des  $\alpha$  données par les formules (50, 3) satisfont identiquement aux conditions qui expriment que les plans diagonaux des angles tétraèdres II et V sont perpendiculaires, ainsi qu'aux relations entre tangentes qui ont lieu à chaque axe de ces deux angles tétraèdres.

Non seulement les constantes de l'angle tétraèdre V sont-elles égales à celles de l'angle tétraèdre II, mais aussi les dièdres de ces deux angles tétraèdres sont-ils constamment égaux. En effet, on a

$$t_{15} = -t_{11} = -t_{31} = t_{32}, \text{ etc.}$$

On sait qu'à chaque forme de l'angle tétraèdre II correspond une seule forme de l'angle tétraèdre III, que ce dernier soit considéré comme appartenant au groupe I, II, III, ou qu'il soit considéré comme appartenant au groupe II, III, IV. D'ailleurs, cette forme doit être la même dans les deux cas, parce qu'elle est toujours déterminée par la connaissance du dièdre  $\beta_{13}$ . Ainsi à chaque forme de l'angle tétraèdre II correspond une seule forme des angles tétraèdres I, III, IV, et VI, lesquelles formes sont compatibles entre elles. D'autre part, la forme de l'angle tétraèdre V donnée par

$$t_{15} = t_{32}, \quad t_{45} = t_{12}, \quad t_{25} = t_{32}, \quad t_{35} = t_{22}$$

est compatible avec celles des angles tétraèdres I, III, IV, et VI, lorsque l'angle tétraèdre II a une forme donnée à l'avance.

Il est à remarquer que les axes de la diagonale I, III, IV, VI sont dans un plan, et que la figure est parfaitement symétrique par rapport à ce plan. Si j'avais pris certains des angles tétraèdres I, III, IV, VI *bi-isogones supplémentaires*, il n'y aurait pas eu cette symétrie parfaite. Il n'y aurait eu qu'une sorte de symétrie algébrique.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on n'a qu'à se donner arbitrairement quatre constantes  $\gamma_{21}, \gamma_{43}, \gamma_{14}, \gamma_{36}$ . Tous les angles faciaux seront alors donnés par les formules (52, 3). Pour avoir les rapports des sinus des  $\alpha$  positifs, on doit prendre ces quatre constantes telles que  $\sin \gamma_{21}$  et  $\sin \gamma_{14}$  soient positifs, et que  $\sin \gamma_{43}$  et  $\sin \gamma_{36}$  soient négatifs. Pour avoir un mécanisme réel il faut que les carrés des cosinus des deux angles  $\gamma_{21}, \gamma_{14}$  soient inférieurs aux carrés des sinus des deux angles  $\gamma_{43}, \gamma_{36}$ .

**53. Résumé et exemple numérique du précédent.** Ce cas de déformabilité du mécanisme de Kempe sur la sphère est composé de deux angles tétraèdres irréductibles, à plans diagonaux perpendiculaires,

n'ayant aucun axe en commun, et de quatre angles tétraèdres *bi-isogones*. Les angles tétraèdres *bi-isogones* sont disposés de telle manière que le plan de symétrie (du moins algébrique) de l'un prolonge ceux de ses deux voisins. Les propriétés principales de ce mécanisme sont les suivantes :

1. Aux axes des deux angles tétraèdres irréductibles la somme des deux dièdres constants est égale à  $2\pi$ .
2. Dans des circonstances favorables le mécanisme est parfaitement symétrique par rapport au plan des quatre axes qui ne sont pas ceux des deux angles tétraèdres irréductibles. Dans toutes autres circonstances cette symétrie est simplement algébrique.
3. Tous les dièdres constants dont les axes sont ceux du plan de symétrie sont droits.
4. La déformation est de *genre un*.
5. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *quatre*.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne arbitrairement les quatre dièdres constants qui sont marqués  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{43}$ ,  $\gamma_{14}$ ,  $\gamma_{36}$  sur la figure (47, 1). Soient

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{21} &= \frac{4}{5}, & \sin \gamma_{14} &= \frac{1}{3}, & \sin \gamma_{43} &= -\frac{1}{7}, & \sin \gamma_{36} &= -\frac{2}{5}, \\ \cos \gamma_{21} &= \frac{3}{5}, & \cos \gamma_{14} &= \frac{2}{3}, & \cos \gamma_{43} &= \frac{6}{7}, & \cos \gamma_{36} &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Les formules (52, 3) donnent alors

$\sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{21} = 0,780624 +$	$\cos \alpha_{11} = \cos \alpha_{21} = -0,625000$
$\sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{41} = 0,916235$	$\cos \alpha_{31} = \cos \alpha_{41} = -0,400641$
$\sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{22} = 0,975781$	$\cos \alpha_{15} = \cos \alpha_{22} = 0,218750$
$\sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{12} = 0,974996$	$\cos \alpha_{25} = \cos \alpha_{12} = 0,222222$
$\sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{42} = 0,916515$	$\cos \alpha_{35} = \cos \alpha_{42} = 0,400000$
$\sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{32} = 0,992588$	$\cos \alpha_{45} = \cos \alpha_{32} = 0,121528$
$\sin \alpha_{13} = \sin \alpha_{23} = 0,936749 +$	$\cos \alpha_{13} = \cos \alpha_{23} = -0,350000$
$\sin \alpha_{33} = \sin \alpha_{43} = 0,808690$	$\cos \alpha_{33} = \cos \alpha_{43} = -0,588235 +$
$\sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{24} = 0,899996 +$	$\cos \alpha_{14} = \cos \alpha_{24} = -0,435897 +$
$\sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{44} = 0,733212$	$\cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{44} = -0,680000$
$\sin \alpha_{16} = \sin \alpha_{26} = 0,860290 +$	$\cos \alpha_{16} = \cos \alpha_{26} = -0,509804$
$\sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{46} = 0,952884 +$	$\cos \alpha_{36} = \cos \alpha_{46} = -0,303333 +$

**54. Quatrième mécanisme. Quatre angles tétraèdres bi-isogones et deux circonscriptibles.** Si le groupe d'angles tétraèdres I, II, III est de la forme donnée par (44, 1), (44, 5), et (44, 6), tous les autres groupes de trois angles tétraèdres du mécanisme doivent être de même nature. En effet, le groupe II, III, IV, qui est déjà caractérisé par les conditions

$$(54, 1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{42}} = \frac{\sin^2 \alpha_{13}}{\sin^2 \alpha_{23}}, \quad \alpha_{23} \equiv \alpha_{43}, \quad \alpha_{33} \equiv \alpha_{13}, \quad \gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv 0, \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} - \alpha_{32} - \alpha_{42} \equiv 0 \end{array} \right.$$

ne peut appartenir à d'autre cas de déformabilité que celui qui est complété par les conditions suivantes :

$$(54, 2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{34} \equiv \alpha_{24}, \quad \alpha_{14} \equiv \alpha_{44}, \quad \gamma_{43} + \gamma_{16} \equiv 0, \quad \gamma_{42} + \gamma_{35} \equiv \pi, \\ \frac{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{12}} = \frac{\sin^2 \alpha_{24}}{\sin^2 \alpha_{14}}, \\ \frac{\cos \alpha_{13} \cos \alpha_{24} - \cos \alpha_{32}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{24}} + \frac{\cos \alpha_{14} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{42}}{\sin \alpha_{14} \sin \alpha_{23}} = 0, \end{array} \right.$$

(Je laisse de côté le cas où l'angle tétraèdre serait *bi-isogone supplémentairement*.)

Les conditions de déformabilité du groupe I, II, III que je n'ai pas encore réécrites sont

$$(54, 3) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} \equiv \alpha_{41}, \quad \alpha_{21} \equiv \alpha_{31}, \quad \gamma_{22} + \gamma_{15} \equiv \pi, \quad \gamma_{23} + \gamma_{36} \equiv 0, \\ \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{32}} = \frac{\sin^2 \alpha_{11}}{\sin^2 \alpha_{21}}, \\ \frac{\cos \alpha_{13} \cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{11}} + \frac{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{21}} = 0. \end{array} \right.$$

Les choix que j'ai faits en écrivant  $\gamma_{42} + \gamma_{35} \equiv \pi$  et  $\gamma_{22} + \gamma_{15} \equiv \pi$  sont, bien entendu, arbitraires. J'aurais pu écrire  $\gamma_{42} + \gamma_{35} \equiv 0$  et  $\gamma_{22} + \gamma_{15} \equiv 0$ .

Quand les formules (54, 1), (54, 2), et (54, 3) ont lieu, les deux groupes I, II, III, et II, III, IV sont déformables séparément. Il s'agit de les rendre déformables ensemble.

Quand on donne une forme à l'angle tétraèdre III, celles des angles tétraèdres I et IV sont uniquement déterminées. D'une part et d'autre celle de l'angle tétraèdre II l'est aussi. Il faut que les deux déterminations de l'angle tétraèdre II ainsi obtenues coïncident. La valeur du dièdre  $\beta_{12}$  étant la même dans les deux cas, il suffit pour cela que les valeurs de  $t_{32}$  et

de  $t_{42}$  données par

$$(54, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -t_{32} = t_{31} = \frac{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{11}) l/t_{23}^2 + \sin(\alpha_{21} + \alpha_{11})}{2 \sin \alpha_{11} l/t_{23}}, \\ -t_{42} = t_{44} = \frac{\sin(\alpha_{14} - \alpha_{24}) l/t_{33}^2 + \sin(\alpha_{14} + \alpha_{24})}{2 \sin \alpha_{24} l/t_{33}}, \end{array} \right. \quad (t_{23} = t_{33}),$$

satisfassent à

$$(54, 5) \quad t_{42}^2 - b_2 t_{32}^2 - b_2' = 0, \quad \text{où} \quad b_2' = b_2 - 1.$$

On sait déjà que

$$\frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{32}} = \frac{\sin^2 \alpha_{11}}{\sin^2 \alpha_{21}} = \frac{\sin^2 \alpha_{14}}{\sin^2 \alpha_{24}} = b_2,$$

moyennant quoi, les conditions pour que (54, 4) et (54, 5) aient lieu identiquement sont

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{11}}{\operatorname{tg} \alpha_{21}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{14}}{\operatorname{tg} \alpha_{24}}, \quad \cos^2 \alpha_{14} = \cos^2 \alpha_{11}, \quad \cos^2 \alpha_{24} = \cos^2 \alpha_{21}.$$

J'adopte la solution donnée par

$$(54, 6) \quad \alpha_{14} + \alpha_{11} \equiv \pi, \quad \alpha_{21} + \alpha_{24} \equiv \pi.$$

Maintenant l'ensemble des deux groupes I, II, III, et II, III, IV est déformable. On n'a qu'à procéder de même dans les groupes IV, II, VI, et VI, II, I pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour que le sous-mécanisme composé des angles tétraèdres I, II, III, IV, et VI soit déformable. On trouve ainsi les conditions suivantes :

$$(54, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{44} \equiv \alpha_{14} \equiv \pi - \alpha_{41} - \pi - \alpha_{11}, \quad \alpha_{34} - \alpha_{24} - \pi - \alpha_{31} \equiv \pi - \alpha_{21}, \\ \alpha_{26} \equiv \alpha_{46} \equiv \pi - \alpha_{43} \equiv \pi - \alpha_{23}, \quad \alpha_{16} \equiv \alpha_{36} \equiv \pi - \alpha_{33} \equiv \pi - \alpha_{13}, \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} - \alpha_{32} - \alpha_{42} \equiv 0, \\ \frac{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{42}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{32}} = \frac{\sin^2 \alpha_{11}}{\sin^2 \alpha_{21}}, \quad \frac{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{42}} = \frac{\sin^2 \alpha_{13}}{\sin^2 \alpha_{23}}, \\ \frac{\cos \alpha_{11} \cos \alpha_{13} - \cos \alpha_{12}}{\sin \alpha_{11} \sin \alpha_{13}} + \frac{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{21}} = 0, \\ \frac{\cos \alpha_{13} \cos \alpha_{21} + \cos \alpha_{32}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{21}} + \frac{\cos \alpha_{11} \cos \alpha_{23} + \cos \alpha_{42}}{\sin \alpha_{11} \sin \alpha_{23}} = 0. \end{array} \right.$$

Les  $\gamma$  satisfont à

$$(54, 8) \quad \begin{cases} \gamma_{22} + \gamma_{15} \equiv \pi, & \gamma_{23} + \gamma_{36} \equiv 0, & \gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv 0, \\ \gamma_{42} + \gamma_{35} \equiv \pi, & \gamma_{16} + \gamma_{43} \equiv 0, & \gamma_{11} + \gamma_{34} \equiv 0, \\ \gamma_{12} + \gamma_{25} \equiv \pi, & \gamma_{26} + \gamma_{33} \equiv 0, & \gamma_{41} + \gamma_{24} \equiv 0, \\ \gamma_{32} + \gamma_{45} \equiv \pi, & \gamma_{46} + \gamma_{13} \equiv 0, & \gamma_{31} + \gamma_{14} \equiv 0. \end{cases}$$

Les relations de la première colonne de (54, 8) et les deux dernières de (54, 7) donnent

$$(54, 9) \quad \alpha_{15} \equiv \alpha_{12}, \quad \alpha_{25} \equiv \alpha_{22}, \quad \alpha_{35} \equiv \alpha_{32}, \quad \alpha_{45} \equiv \alpha_{42}.$$

Les relations des deux dernières colonnes de (54, 8) sont identiquement satisfaites par les valeurs des  $\gamma$  données en fonction des  $\alpha$ .

Grâce à (54, 9) la considération des groupes de trois angles tétraèdres contenant l'angle tétraèdre V n'apporte rien de nouveau. On sait donc qu'à une forme donnée de l'angle tétraèdre III correspond une seule forme du mécanisme entier, lequel est déformable.

Si l'on résout les deux dernières de (54, 7) par rapport à  $\cos \alpha_{13}$  et à  $\cos \alpha_{23}$ , on trouve

$$(54, 10) \quad \begin{cases} \cos \alpha_{23} = \frac{\cos \alpha_{11} \sin \alpha_{22} + \cos \alpha_{21} \sin \alpha_{42}}{\sin(\alpha_{42} - \alpha_{22})}, \\ \cos \alpha_{13} = \frac{\cos \alpha_{11} \sin \alpha_{32} + \cos \alpha_{21} \sin \alpha_{12}}{\sin(\alpha_{32} - \alpha_{12})}. \end{cases}$$

Pour uniformiser rigoureusement les constantes de ce mécanisme il faudrait avoir recours aux paramètres hyperboliques du No. 27. Comme on ne reverra plus ce mécanisme, je ne trouve pas qu'il mérite une étude aussi approfondie. Pratiquement, on peut trouver des solutions numériques des équations qui donnent les conditions de déformabilité, sans que l'uniformisation des constantes soit complète. Seule la définition précise des domaines de réalité reste à peu près impossible à faire sans l'uniformisation. On y parviendra par des procédés de tâtonnement.

Je commence donc par me donner arbitrairement quatre constantes  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{32}$ ,  $\alpha_{11}$  comprises entre 0 et  $\pi$ , et telles que

$$\alpha_{42} \equiv \alpha_{12} + \alpha_{22} - \alpha_{32}$$

soit compris entre les mêmes limites. Je prends  $\alpha_{11}$  de telle façon que  $\sin \alpha_{21}$ , défini par

$$(54, 11) \quad \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{11} \sqrt{\left( \frac{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{42}} \right)},$$

soit inférieur à 1 en valeur absolue. J'adopte alors l'une des deux déterminations de  $\alpha_{21}$  ainsi obtenues. Les angles  $\alpha_{23}$  et  $\alpha_{13}$  seront donnés par (54, 10). C'est là où les considérations de réalité deviennent douteuses. On voit pourtant qu'il convient de prendre les constantes originales de telle façon que  $\sin(\alpha_{42}-\alpha_{22})$  et  $\sin(\alpha_{32}-\alpha_{12})$  soient relativement grands et  $\cos \alpha_{11}$  et  $\cos \alpha_{21}$  relativement petits en valeur absolue, afin que les expressions de  $\cos \alpha_{23}$  et de  $\cos \alpha_{13}$  soient inférieures à l'unité. Dans ce même but on peut de plus disposer convenablement des signes de  $\cos \alpha_{11}$  et de  $\cos \alpha_{21}$ . Les autres angles faciaux seront alors donnés par (54, 7) et (54, 9).

En se donnant  $\alpha_{11}$  on doit également faire attention à ce que la valeur de  $\cos \gamma_{22}$  donnée par (38, 2) soit inférieure à *un* en valeur absolue. En vertu de (54, 8) tous les dièdres  $\gamma$  sont réels quand  $\gamma_{22}$  l'est.

Les deux équations

$$\frac{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{42}} = \frac{\sin^2 \alpha_{13}}{\sin^2 \alpha_{23}}, \quad \frac{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{21}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{22}} = \frac{\cos \alpha_{42} \cos \alpha_{43} - \cos \alpha_{44}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{43}}$$

qui sont les seules dont je n'ai pas tenu compte, sont satisfaites identiquement par les valeurs des  $\alpha$  dont je viens d'exposer le calcul.

**55. Résumé et exemple numérique du précédent.** Ce cas de déformabilité du mécanisme de Kempe sur la sphère est composé de deux angles tétraèdres *unicursaux* n'ayant aucun axe en commun, et de quatre angles tétraèdres *bi-isogones*. Ces derniers sont disposés de manière que leurs plans de symétrie (du moins algébrique) aillent de l'un à l'autre des deux angles tétraèdres unicursaux. Les propriétés principales de ce mécanisme sont les suivantes :

1. A chaque axe la somme des deux dièdres constants est égale soit à  $\pi$  soit à  $2\pi$ .
2. Deux angles tétraèdres conjugués ont leurs angles faciaux correspondants soit égaux soit supplémentaires, les angles faciaux correspondants étant ceux qui ont le même premier indice sur la figure (47, 1).
3. La déformation du mécanisme est de *genre zéro*.
4. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *quatre*.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne arbitrairement les quatre angles  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{32}$ ,  $\alpha_{11}$ . Soient

$$(55, 1) \quad \alpha_{12} \equiv 115^\circ, \quad \alpha_{22} \equiv 40^\circ, \quad \alpha_{32} \equiv 25^\circ, \quad \alpha_{11} \equiv 80^\circ; \quad \text{d'où} \quad \alpha_{42} \equiv 130^\circ.$$

Je prends dans les tables de M. Andoyer les valeurs suivantes [cf. (54, 9) et (54, 7)]:

$$(55, 2) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{12} = 0,906308 \quad \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{32} = 0,422618+ \\ \cos \alpha_{15} = \cos \alpha_{12} = -0,422618+ \quad \cos \alpha_{35} = \cos \alpha_{32} = 0,906308 \\ \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{22} = 0,642787+ \quad \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{42} = 0,766044+ \\ \cos \alpha_{25} = \cos \alpha_{22} = 0,766044+ \quad \cos \alpha_{45} = \cos \alpha_{42} = -0,642787+ \\ \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{11} = 0,984808 \\ \cos \alpha_{44} = \cos \alpha_{14} = -\cos \alpha_{41} = -\cos \alpha_{11} = -0,173648 \end{array} \right.$$

La formule (54, 11) donne alors [cf. (54, 7)]

$$(55, 3) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{31} = 0,616019+ \\ \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{24} = -\cos \alpha_{21} = -\cos \alpha_{31} = -0,787731 \end{array} \right.$$

le signe de  $\cos \alpha_{21}$  étant choisi arbitrairement.

Ensuite les formules (54, 10) donnent [cf. (54, 7)]

$$(55, 4) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{16} = \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{13} = \sin \alpha_{33} = 0,616553 \\ \cos \alpha_{16} = \cos \alpha_{36} = -\cos \alpha_{13} = -\cos \alpha_{33} = 0,787313+ \\ \sin \alpha_{26} = \sin \alpha_{46} = \sin \alpha_{23} = \sin \alpha_{43} = 0,699067+ \\ \cos \alpha_{26} = \cos \alpha_{46} = -\cos \alpha_{23} = -\cos \alpha_{43} = -0,715055+ \end{array} \right.$$

Les valeurs des sinus et celles des cosinus de tous les angles faciaux du mécanisme, dont les constantes arbitraires sont données par (55, 1), sont ainsi données par les formules (55, 2), (55, 3), et (55, 4).

**56. Cinquième mécanisme. Deux angles tétraèdres totalement décomposés et quatre irréductibles.** Si le groupe d'angles tétraèdres I, II, III appartient au cas de déformabilité exposé au No. 45, il faudra évidemment que tous les groupes de trois angles tétraèdres comprenant l'angle tétraèdre I appartiennent à ce même cas. En effet, les angles tétraèdres II et III sont irréductibles et aucun groupe ne peut avoir deux angles tétraèdres totalement décomposés sans que le troisième le soit aussi.

Comme l'hypothèse (21, 2), qui jusqu'à présent n'a pas été gênante, apporte maintenant des obstacles au point de vue de réalité, quand les

angles faciaux des angles tétraèdres V et VI sont numérotés de la façon indiquée sur la figure (47, 1), j'ai cru utile de numéroté à nouveau ces angles. La figure (56, 1) donne le nouveau numérotage. Comme le mécanisme préliminaire composé des angles tétraèdres I, II, et III n'y subit aucun changement, l'analyse du No. 45 est encore valable.

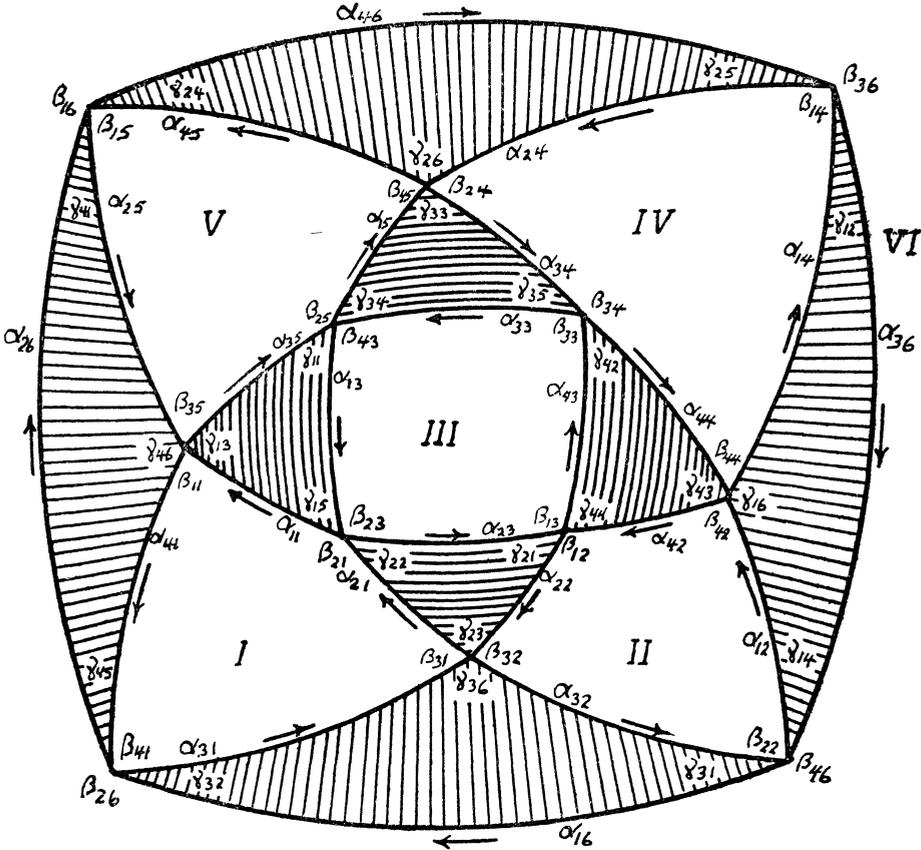


Fig. 56, 1.

Je suppose que l'angle tétraèdre I se décompose de la manière suivante :

$$(56, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} \equiv \alpha_{31}, \quad \alpha_{21} \equiv \alpha_{41}, \quad \delta_1 = \frac{\sin a_{11} - \epsilon_1 \sin a_{21}}{\sin(a_{11} - a_{21})}, \quad \epsilon_1^2 = 1, \\ t_{21} t_{31} = \delta_1, \quad t_{41} = \epsilon_1 t_{21}, \quad t_{11} = \epsilon_1 t_{31}. \end{array} \right.$$

Les conditions (45, 7) et (45, 10), et celles qui s'en déduisent à vue, quand on compare le groupe I, II, III avec tous les autres groupes qui

comprennent l'angle tétraèdre I sont

$$(56, 2) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv \gamma_{11} + \gamma_{34} \equiv \gamma_{41} + \gamma_{24} \equiv \gamma_{31} + \gamma_{14} \equiv 0, \\ \gamma_{23} + \gamma_{36} \equiv \gamma_{13} + \gamma_{46} \equiv 0, \quad \gamma_{22} + \gamma_{15} \equiv \gamma_{32} + \gamma_{45} \equiv \pi; \\ m_2 = m_3 = m_5 = m_6, \\ c_2 = c_3 = c_5 = c_6, \quad a_2 = b_3 = a_5 = b_6, \\ c'_2 = c'_3 = c'_5 = c'_6, \quad a'_2 = b'_3 = a'_5 = b'_6; \\ \delta_1 = \frac{\nu_3 p_{23}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}{-\mu_2 p_{22}} = \frac{\nu_6 p_{26}}{\sin \alpha_{16} \sin \alpha_{46}} \frac{\sin \alpha_{35} \sin \alpha_{45}}{-\mu_5 p_{25}}, \\ \epsilon_1 \delta_1 = \frac{-\nu_3 p_{13}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{33}} \frac{\sin \alpha_{25} \sin \alpha_{15}}{\mu_5 p_{35}} = \frac{-\nu_6 p_{16}}{\sin \alpha_{36} \sin \alpha_{26}} \frac{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{12}}{\mu_2 p_{32}}. \end{array} \right.$$

Moyennant (18, 5) et (16, 5), ces formules ont la solution elliptique suivante :

$$(56, 3) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_2 \equiv \gamma_3 \equiv \gamma_5 \equiv \gamma_6, \quad a_2 \equiv \beta_3 \equiv a_5 \equiv \beta_6, \\ \delta_1 = \frac{fa_3}{f\beta_2} = \frac{fa_6}{f\beta_5} = \epsilon_1 \frac{fa_3}{f\beta_5} = \epsilon_1 \frac{fa_6}{f\beta_2}, \end{array} \right.$$

d'où

$$(56, 4) \left\{ \begin{array}{l} f\beta_5 = \epsilon_1 f\beta_2, \quad fa_6 = \epsilon_1 fa_3, \\ f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5) = \epsilon_1 f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2), \quad f'(\frac{1}{2}\omega_1 - a_6) = \epsilon_1 f'(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3). \end{array} \right.$$

Soient, à la manière de (50, 1),

$$(56, 5) \left\{ \begin{array}{l} t_{12} = \frac{ifu_{12}}{f\gamma_2}, \quad t_{13} = \frac{ifu_{13}}{f\gamma_3}, \quad t_{15} = \frac{ifu_{15}}{f\gamma_5}, \\ t_{22} = \frac{ifu_{22}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_2)}, \quad t_{23} = \frac{ifu_{23}}{fa_3}, \quad t_{25} = \frac{ifu_{25}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_5)}, \\ t_{32} = \frac{ifu_{32}}{f\beta_2}, \quad t_{33} = \frac{ifu_{33}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)}, \quad t_{35} = \frac{ifu_{35}}{f\beta_5}, \\ t_{42} = \frac{ifu_{42}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}, \quad t_{43} = \frac{ifu_{43}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_3)}, \quad t_{45} = \frac{ifu_{45}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5)}, \\ t_{16} = \frac{ifu_{16}}{f\gamma_6}, \quad t_{36} = \frac{ifu_{36}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_6)}, \\ t_{26} = \frac{ifu_{26}}{fa_6}, \quad t_{46} = \frac{ifu_{46}}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \gamma_6)}; \end{array} \right.$$

et à la manière de (50, 2),

$$(56, 6) \left\{ \begin{array}{ll} u_{12} - u_{32} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_2, & u_{15} - u_{35} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_5 \\ u_{32} - u_{22} \equiv \omega_1 + \alpha_2, & u_{35} - u_{25} \equiv \omega_1 + \alpha_5, \\ u_{22} - u_{42} \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \alpha_2), & u_{25} - u_{45} \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \alpha_5), \\ u_{42} - u_{12} \equiv \omega_1 + \alpha_2, & u_{45} - u_{15} \equiv \omega_1 + \alpha_5, \\ u_{32} - u_{42} \equiv \frac{1}{2}\omega_1, & u_{35} - u_{45} \equiv \frac{1}{2}\omega_1, \\ u_{22} - u_{12} \equiv \frac{1}{2}\omega_1, & u_{25} - u_{15} \equiv \frac{1}{2}\omega_1, \\ u_{13} - u_{23} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \beta_3, & u_{16} - u_{26} \equiv \frac{1}{2}\omega_1 - \beta_6, \\ u_{23} - u_{43} \equiv \omega_1 + \beta_3, & u_{26} - u_{46} \equiv \omega_1 + \beta_6, \\ u_{43} - u_{33} \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \beta_3), & u_{46} - u_{36} \equiv -(\frac{1}{2}\omega_1 + \beta_6), \\ u_{33} - u_{13} \equiv \omega_1 + \beta_3, & u_{36} - u_{16} \equiv \omega_1 + \beta_6, \\ u_{43} - u_{13} \equiv \frac{1}{2}\omega_1, & u_{46} - u_{16} \equiv \frac{1}{2}\omega_1, \\ u_{23} - u_{33} \equiv \frac{1}{2}\omega_1, & u_{26} - u_{36} \equiv \frac{1}{2}\omega_1. \end{array} \right.$$

Les couples II III, III V, V VI, et VI II sont tous de la catégorie  $A$  ; je puis donc poser, [cf. (50, 5)],

$$(56, 7) \quad u_{13} \equiv u_{12} + \omega_1, \quad u_{25} \equiv u_{43} + \omega_1, \quad u_{16} \equiv u_{15} + \omega_1, \quad u_{22} \equiv u_{46} + \omega_1.$$

Les équations (56, 1) et (56, 2) donnent

$$t_{23} = -\frac{t_{32}}{\delta_1} = \epsilon_1 t_{26} = -\epsilon_1 \frac{t_{35}}{\delta_1},$$

ce qui peut également s'écrire, moyennant (56, 3) et (56, 5), sous la forme suivante :

$$(56, 8) \quad fu_{23} = -fu_{32} = fu_{26} = -fu_{35}.$$

D'autre part les équations (56, 6) et (56, 7) donnent, en vertu de (56, 3),

$$u_{23} \equiv u_{32} + \omega_1 \equiv u_{26} \equiv u_{35} + \omega_1.$$

Comme ceci est compatible avec (56, 8), le mécanisme est déformable jusqu'à présent. Il reste à voir ce que devient l'angle tétraèdre IV,

Les relations

$$\gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv 0, \quad \gamma_{11} + \gamma_{34} \equiv 0, \quad \gamma_{41} + \gamma_{24} \equiv 0, \quad \gamma_{31} + \gamma_{14} \equiv 0$$

donnent

$$(56, 9) \left\{ \begin{array}{l} \{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2\epsilon_1 f \alpha_3 f \beta_2 \cos \alpha_{11}\} f'^2 \alpha_2 \\ - 2\{f^3 \alpha_3 f^2 \beta_2 + m(f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2) + m^2 - 1 - f' \alpha_3 f' \beta_5 \cos \alpha_{34}\} f'^2 \alpha_2 = 0, \\ \{f^2 \alpha_3 f^2 \beta_2 + m(f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2) + m^2 - 1 - f' \alpha_3 f' \beta_2 \cos \alpha_{44}\} f'^2 \alpha_2 \\ - 2\{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2f \alpha_3 f \beta_2 \cos \alpha_{21}\} f'^2 \alpha_2 = 0, \\ \cos \alpha_{14} = \frac{f' \alpha_3 f' \beta_5}{f' \alpha_6 f' \beta_2} \cos \alpha_{34}, \quad \cos \alpha_{24} = \frac{f' \beta_2 f' \alpha_3}{f' \beta_5 f' \alpha_6} \cos \alpha_{44}, \end{array} \right.$$

ce qui montre, en vertu de (56, 4), que *l'angle tétraèdre IV est forcément totalement décomposé*. Ceci répond à la question laissée en suspens au début du No. 50, quand j'ai remis à une place ultérieure la considération d'un mécanisme composé de cinq angles tétraèdres irréductibles et d'un angle tétraèdre totalement décomposé.

Je suppose que l'angle tétraèdre IV se décompose à angles égaux. Soient donc

$$(56, 10) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{24} \equiv \alpha_{44}, \quad \alpha_{34} \equiv \alpha_{14}, \quad \epsilon_4^2 = 1, \quad \delta_4 = \frac{\sin \alpha_{14} - \epsilon_4 \sin \alpha_{24}}{\sin(\alpha_{14} - \alpha_{24})}; \\ t_{14} t_{24} = \delta_4, \quad t_{34} = \epsilon_4 t_{14}, \quad t_{44} = \epsilon_4 t_{24}, \\ \gamma_{33} + \gamma_{26} \equiv \gamma_{16} + \gamma_{43} \equiv 0, \quad \gamma_{42} + \gamma_{35} \equiv \gamma_{25} + \gamma_{12} \equiv \pi; \\ \delta_4 = \frac{-\nu_3 p_{43}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{33}} \frac{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{12}}{\mu_2 p_{42}} = \frac{-\nu_6 p_{46}}{\sin \alpha_{36} \sin \alpha_{26}} \frac{\sin \alpha_{25} \sin \alpha_{15}}{\mu_5 p_{45}}, \\ \epsilon_4 \delta_4 = \frac{\nu_3 p_{33}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} \frac{\sin \alpha_{35} \sin \alpha_{45}}{-\mu_5 p_{15}} = \frac{\nu_6 p_{36}}{\sin \alpha_{16} \sin \alpha_{46}} \frac{\sin \alpha_{32} \sin \alpha_{42}}{-\mu_2 p_{12}} \end{array} \right.$$

En vertu de (16, 5) et de (56, 3), les relations précédentes donnent

$$(56, 11) \quad \delta_4 = \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)} = \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_6)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5)} = \epsilon_4 \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5)} = \epsilon_4 \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_6)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)},$$

d'où

$$(56, 12) \left\{ \begin{array}{l} f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_6) = \epsilon_4 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3), \quad f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5) = \epsilon_4 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2), \\ f' \alpha_6 = \epsilon_4 f' \alpha_3, \quad f' \beta_5 = \epsilon_4 f' \beta_2. \end{array} \right.$$

Les relations qu'on a établies entre les dièdres  $\gamma_{ij}$  donnent de plus

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_{24} \sin \alpha_{11}}{\sin \alpha_{14} \sin \alpha_{21}} &= \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{35}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{15}} = \frac{\sin \alpha_{32} \sin \alpha_{45}}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{25}} = \frac{\sin \alpha_{16} \sin \alpha_{43}}{\sin \alpha_{36} \sin \alpha_{23}}, \\ &= \frac{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{46}}{\sin \alpha_{33} \sin \alpha_{26}} = 2\epsilon_1 \epsilon_4 \frac{f^2 a_2}{f'^2 a_2} = \epsilon_1 \epsilon_4 a_2, \end{aligned}$$

ce qui fait que  $\epsilon_1 = \epsilon_4$ , parce qu'on veut que tous les  $a$  soient compris entre 0 et  $\pi$ . Les deux angles tétraèdres I et IV sont donc ou bien tous les deux parallélogrammatiques ou bien tous les deux contre-parallélogrammatiques.

Toutes les solutions communes à (56, 4) et à (56, 12) quand  $\epsilon_1 = \epsilon_4$  sont comprises dans

$$(56, 13) \quad \begin{cases} \beta_5 \equiv \beta_2 + (1 - \epsilon_1) \frac{1}{2} \omega_1, \\ \alpha_6 \equiv \alpha_3 + (1 - \epsilon_1) \frac{1}{2} \omega_1. \end{cases}$$

Les deux équations

$$\delta_1 = \frac{\sin \alpha_{11} - \epsilon_1 \sin \alpha_{21}}{\sin (\alpha_{11} - \alpha_{21})} = \frac{f a_3}{f \beta_2}, \quad \delta_4 = \frac{\sin \alpha_{14} - \epsilon_1 \sin \alpha_{24}}{\sin (\alpha_{14} - \alpha_{24})} = \frac{f(\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3)}{f(\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2)}$$

peuvent s'écrire des façons suivantes :

$$(56, 14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin \alpha_{21}}{\sin \alpha_{11}} &= \frac{\epsilon_1 (f^2 \beta_2 - f^2 \alpha_3)}{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2\epsilon_1 f a_3 f \beta_2 \cos \alpha_{11}} \\ &= \frac{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2f a_3 f \beta_2 \cos \alpha_{21}}{\epsilon_1 (f^2 \beta_2 - f^2 \alpha_3)}, \\ \frac{\sin \alpha_{24}}{\sin \alpha_{14}} &= \frac{\epsilon_1 [f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2) - f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3)]}{f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2) + f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3) - 2\epsilon_1 f (\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2) f (\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3) \cos \alpha_{14}}, \\ &= \frac{f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2) + f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3) - 2f (\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2) f (\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3) \cos \alpha_{24}}{\epsilon_1 [f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2) - f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3)]}. \end{aligned} \right.$$

Puisque  $f\beta_2$  et  $fa_3$  sont purement imaginaires par hypothèse, on doit donc avoir

$$(56, 15) \quad \epsilon_1 [f^2 \alpha_3 - f^2 \beta_2] > 0, \quad \epsilon_1 [f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \alpha_3) - f^2 (\frac{1}{2} \omega_1 - \beta_2)] < 0$$

pour que les rapports des sinus soient positifs.

Les équations (56, 9) et (56, 14) étant compatibles par rapport aux cosinus des angles faciaux des angles tétraèdres I et IV, on ne peut pas les

résoudre par rapport à ces fonctions. On peut pourtant exprimer tous ces cosinus en fonction de  $\cos \alpha_{11}$ . On obtient ainsi

$$(56, 16) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_{31} = \cos \alpha_{11}, \\ \cos \alpha_{41} = \cos \alpha_{21} = \frac{2f\alpha_3 f\beta_2 - \epsilon_1 (f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2) \cos \alpha_{11}}{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2\epsilon_1 f\alpha_3 f\beta_2 \cos \alpha_{11}}, \\ \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{14} = \frac{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) + f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}{2\epsilon_1 f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)} \\ \quad - \frac{(f'^2 \alpha_2) (f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2\epsilon_1 f\alpha_3 f\beta_2 \cos \alpha_{11})}{2f^2 \alpha_2 \epsilon_1 f' \alpha_3 f' \beta_2}, \\ \cos \alpha_{44} = \cos \alpha_{24} = \frac{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) + f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}{2f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)} \\ \quad - \frac{(2f^2 \alpha_2)}{f'^2 \alpha_2} \frac{(f^2 \beta_2 - f^2 \alpha_3)^2}{f' \alpha_3 f' \beta_2 \{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2\epsilon_1 f\alpha_3 f\beta_2 \cos \alpha_{11}\}}; \\ \frac{\sin \alpha_{24}}{\sin \alpha_{14}} = \frac{2f^2 \alpha_2 \sin \alpha_{21}}{f'^2 \alpha_2 \sin \alpha_{11}} = \frac{\epsilon_1 (f^2 \beta_2 - f^2 \alpha_3)}{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2\epsilon_1 f\alpha_3 f\beta_2 \cos \alpha_{11}} \left( \frac{2f^2 \alpha_2}{f'^2 \alpha_2} \right). \end{array} \right.$$

Les liaisons intérieures de l'angle tétraèdre IV donnent

$$t_{42} = -\delta_4 t_{33} = \epsilon_1 t_{45} = -\epsilon_1 \delta_4 t_{36},$$

ce qui fait, en vertu de (56, 5) et de (56, 11), que

$$(56, 17) \quad fu_{42} = -fu_{33} = fu_{45} = -fu_{36}.$$

Or, les équations (56, 6) et (56, 7) donnent

$$u_{42} \equiv u_{33} + \omega_1 \equiv u_{45} \equiv u_{36} + \omega_1,$$

ce qui est bien compatible avec (56, 17). Le mécanisme est donc déformable.

Ce mécanisme dépend des six constantes  $\alpha_{11}$ ,  $m$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $\alpha_3$ . En effet, tous les arguments constants du mécanisme sont donnés en fonction de  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $\alpha_3$  par (56, 3) et (56, 13). Les formules (18, 7) permettent alors de calculer les angles faciaux des quatre angles tétraèdres irréductibles. Ensuite les angles faciaux des deux angles tétraèdres totalement décomposés se calculent au moyen de (56, 16) en fonction de  $\alpha_{11}$  et des données déjà introduites.

On pourrait craindre que les formules (56, 16) ne donnent parfois des valeurs imaginaires aux angles  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{24}$ . Il n'en est pourtant rien. L'expression qui donne la valeur de  $\cos \alpha_{21}$ , est toujours inférieure à l'unité

en valeur absolue, ainsi qu'on peut le voir en écrivant l'expression sous la forme

$$1 - \cos^2 \alpha_{21} = \frac{(f^2 \alpha_3 - f^2 \beta_2)^2 \sin^2 \alpha_{11}}{\{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2\epsilon_1 f \alpha_3 f \beta_2 \cos \alpha_{11}\}^2} > 0.$$

D'autre part, le calcul de  $\alpha_{14}$  et de  $\alpha_{24}$  au moyen des formules (56, 16) repose sur celui du troisième angle d'un trièdre, lorsqu'on connaît ses deux autres angles et le dièdre fait par leurs plans. On sait que ce problème n'admet pas de solution imaginaire quand les données sont réelles.

Les angles faciaux des angles tétraèdres irréductibles et conjugués satisfont aux relations suivantes :

$$(56, 18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha_{15}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\sin \alpha_{25}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{\sin \alpha_{35}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{\sin \alpha_{45}}{\sin \alpha_{42}}, \\ \frac{\sin \alpha_{16}}{\sin \alpha_{13}} = \frac{\sin \alpha_{26}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{\sin \alpha_{36}}{\sin \alpha_{33}} = \frac{\sin \alpha_{46}}{\sin \alpha_{43}}, \\ \cos \alpha_{15} = \epsilon_1 \cos \alpha_{12} \quad \cos \alpha_{16} = \epsilon_1 \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{25} = \epsilon_1 \cos \alpha_{22} \quad \cos \alpha_{26} = \epsilon_1 \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{35} = \epsilon_1 \cos \alpha_{32} \quad \cos \alpha_{36} = \epsilon_1 \cos \alpha_{33} \\ \cos \alpha_{45} = \epsilon_1 \cos \alpha_{42}, \quad \cos \alpha_{46} = \epsilon_1 \cos \alpha_{43}. \end{array} \right.$$

Lorsque  $-1 < m < 1$  les formules d'addition (56, 3) s'écrivent dans la notation du chapitre IV de la manière suivante :

$$(56, 19) \quad c_2 \equiv c_3 \equiv c_5 \equiv c_6, \quad a_2 \equiv b_3 \equiv a_5 \equiv b_6, \\ [\text{mod } (2K + 2iK', \quad 2K - 2iK')].$$

On vérifie aisément que

$$f^2 \alpha_3 - f^2 \beta_2 = 2 \frac{H^2 K \Theta^2 0 H(a_3 - b_2) H(a_3 + b_2)}{\Theta^2 K \Theta^2 a_3 \Theta^2 b_2}, \\ f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) - f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) = 2 \frac{H^2 K \Theta^2 0 H(b_2 - a_3) H(b_2 + a_3)}{\Theta^2 K H^2 a_3 H^2 b_2},$$

moyennant quoi les conditions (56, 15) peuvent s'écrire

$$(56, 20) \quad \epsilon_1 H(a_3 - b_2) H(a_3 + b_2) > 0.$$

On n'a qu'à se rappeler que la fonction  $Hv$  est positive lorsque  $v$  est compris entre 0 et  $2K$ , et négative lorsque  $v$  est compris entre  $2K$  et  $4K$ , pour choisir  $\alpha_3$  et  $b_2$  de façon que la condition (56, 20) soit remplie.



En vertu de ces relations-ci les conditions (56, 15) peuvent s'écrire comme suit :

$$(56, 23) \quad \epsilon_1 H(a_3 - b_2) H(a_3 + b_2) > 0.$$

Comme tout à l'heure les arguments  $a_3, b_2$  doivent être choisis de manière que la condition (56, 23) soit satisfaite.

Les formules (56, 16) se traduisent comme suit :

$$(56, 24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos a_{31} = \cos a_{11}, \\ \cos a_{41} = \cos a_{21} \\ \quad 2\epsilon_{13} \epsilon_{22} \Theta(K - a_3) \Theta(K - b_2) \Theta a_3 \Theta b_2 \\ \quad - \epsilon_1 \{ \Theta^2(K - a_3) \Theta^2 b_2 + \Theta^2(K - b_2) \Theta^2 a_3 \} \cos a_{11}, \\ = \frac{\Theta^2(K - a_3) \Theta^2 b_2 + \Theta^2(K - b_2) \Theta^2 a_3}{\Theta^2(K - a_3) \Theta^2 b_2 + \Theta^2(K - b_2) \Theta^2 a_3} \\ \quad - 2\epsilon_1 \epsilon_{13} \epsilon_{22} \Theta(K - a_3) \Theta(K - b_2) \Theta a_3 \Theta b_2 \cos a_{11} \\ 2\epsilon_1 \epsilon_{13} \epsilon_{22} \cos a_{34} = 2\epsilon_1 \epsilon_{13} \epsilon_{22} \cos a_{14} \\ \quad = \frac{H(K - a_3) H b_2}{H a_3 H(K - b_2)} + \frac{H a_3 H(K - b_2)}{H(K - a_3) H b_2} \\ \quad \Theta^2(K - a_3) \Theta^2 b_2 + \Theta^2(K - b_2) \Theta^2 a_3 \\ \quad - 2\epsilon_1 \epsilon_{13} \epsilon_{22} \Theta(K - a_3) \Theta(K - b_2) \Theta a_3 \Theta b_2 \cos a_{11} \\ \quad \frac{H a_3 H(K - a_3) H b_2 H(K - b_2)}{\Theta^2(K - a_2) \Theta^2 a_2}, \\ \times \frac{H^2 a_2 H^2(K - a_2)}{\Theta^2(K - a_2) \Theta^2 a_2}, \\ 2\epsilon_{13} \epsilon_{22} \cos a_{24} = 2\epsilon_{13} \epsilon_{22} \cos a_{44} \\ \quad = \frac{H(K - a_3) H b_2}{H a_3 H(K - b_2)} + \frac{H a_3 H(K - b_2)}{H(K - a_3) H b_2} \\ \quad \frac{H^4 K H^2(a_3 - b_2) H^2(a_3 + b_2)}{H a_3 H(K - a_3) H b_2 H(K - b_2)} \\ \quad \times \{ \Theta^2(K - a_3) \Theta^2 b_2 + \Theta^2(K - b_2) \Theta^2 a_3 \\ \quad - 2\epsilon_1 \epsilon_{13} \epsilon_{22} \Theta(K - a_3) \Theta(K - b_2) \Theta a_3 \Theta b_2 \cos a_{11} \} \\ \quad \times \frac{\Theta^2(K - a_2) \Theta^2 a_2}{H^2 a_2 H^2(K - a_2)}, \\ \frac{\sin a_{21}}{\sin a_{11}} = \frac{H^2 a_2 H^2(K - a_2)}{\Theta^2 a_2 \Theta^2(K - a_2)} \frac{\sin a_{21}}{\sin a_{11}} \\ \quad = \frac{\epsilon_1 [\Theta^2(K - b_2) \Theta^2 a_3 - \Theta^2(K - a_3) \Theta^2 b_2]}{\Theta^2(K - b_2) \Theta^2 a_3 + \Theta^2(K - a_3) \Theta^2 b_2} \\ \quad - 2\epsilon_1 \epsilon_{13} \epsilon_{22} \Theta a_3 \Theta b_2 \Theta(K - a_3) \Theta(K - b_2) \cos a_{11} \end{array} \right.$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on commence par se donner  $m > -1$ . On calcule  $k$  alors, soit au moyen de (31, 3) soit au moyen de (32, 3), suivant l'intervalle dans lequel  $m$  se trouve. On se donne ensuite les arguments  $a_2, b_2, c_2, a_3$ , assujettis aux conditions de réalité détaillées

au chapitre IV, et à (56, 20) ou à (56, 23). Les arguments  $b_3, c_3$  seront alors donnés par (56, 19) ou (56, 22). Ceci fait, les formules (33, 1) et (33, 2) permettent de calculer les angles faciaux des angles tétraèdres II et III, et les formules (56, 18) ceux des angles tétraèdres V et VI. Pour avoir ceux des angles tétraèdres I et IV on doit encore se donner  $\alpha_{11}$ , après quoi les formules (56, 21) ou (56, 24) donnent les valeurs de ces angles. Les déterminations des sept quantités  $\epsilon_1, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}, \epsilon_{32}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33}$ , dont les carrés sont égaux à l'unité, sont complètement arbitraires.

En se donnant  $\alpha_{11}$  on doit faire attention à ce qu'il soit tel que  $\cos \gamma_{36}$  donné par la formule  $\cos \gamma_{36} = (\cos \alpha_{11} \cos \alpha_{32} - \epsilon_1 \cos \alpha_{13}) / (\sin \alpha_{11} \sin \alpha_{32})$  soit inférieur en valeur absolue à l'unité. En vertu de (56, 2) et de (56, 10) tous les dièdres  $\gamma$  sont réels lorsqu'un seul d'entre eux l'est. On se rappelle, du reste, que la réalité de  $\alpha_{44}$  dépend de celle de  $\gamma_{21}$ .

**57. Variante du mécanisme précédent.** Je vais étudier maintenant le mécanisme analogue au précédent dans lequel les deux angles tétraèdres totalement décomposés se décomposent à angles supplémentaires. Tous les groupes de trois angles tétraèdres seront du type (45, 12). Soient

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{11} + \alpha_{31} \equiv \pi, \quad \alpha_{21} + \alpha_{41} \equiv \pi, \quad \alpha_{14} + \alpha_{34} \equiv \pi, \quad \alpha_{24} + \alpha_{44} \equiv \pi, \\
 & \quad t_{14} = \delta_4' t_{24} = \epsilon_4' t_{34} = -\epsilon_4' \delta_4' t_{44}, \\
 & \delta_1' = \frac{\sin \alpha_{11} + \epsilon_1' \sin \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{21} - \alpha_{11})}, \quad \delta_4' = \frac{\sin \alpha_{14} + \epsilon_4' \sin \alpha_{24}}{\sin(\alpha_{24} - \alpha_{14})}, \\
 & \epsilon_1'^2 = \epsilon_4'^2 = 1, \quad t_{21} = \delta_1' t_{31} = \epsilon_1' t_{41} = -\epsilon_1' \delta_1' t_{11}; \\
 & \gamma_{23} + \gamma_{36} \equiv \gamma_{43} + \gamma_{16} \equiv \gamma_{33} + \gamma_{26} \equiv \gamma_{13} + \gamma_{46} \equiv \gamma_{22} + \gamma_{15} \\
 & \quad \equiv \gamma_{42} + \gamma_{35} \equiv \gamma_{12} + \gamma_{25} \equiv \gamma_{32} + \gamma_{45} \equiv \pi, \\
 & \gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv \gamma_{11} + \gamma_{34} \equiv \gamma_{41} + \gamma_{24} \equiv \gamma_{31} + \gamma_{14} \equiv 0; \\
 & \quad c_2 = c_3 = c_5 = c_6, \quad c_2' = c_3' = c_5' = c_6', \\
 & \quad a_2 = b_3 = a_5 = b_6, \quad a_2' = b_3' = a_5' = b_6', \\
 & \quad m_2 = m_3 = m_5 = m_6; \\
 & \delta_1' = \frac{\nu_3 p_{23}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}{\mu_2 p_{22}} = \frac{-\nu_6 p_{26}}{\sin \alpha_{16} \sin \alpha_{46}} \frac{\sin \alpha_{35} \sin \alpha_{45}}{\mu_5 p_{25}}, \\
 & \epsilon_1' \delta_1' = \frac{-\nu_3 p_{13}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{33}} \frac{\sin \alpha_{15} \sin \alpha_{25}}{\mu_5 p_{35}} = \frac{\nu_6 p_{16}}{\sin \alpha_{26} \sin \alpha_{36}} \frac{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{12}}{\mu_2 p_{32}}, \\
 & \delta_4' = \frac{\nu_6 p_{46}}{\sin \alpha_{26} \sin \alpha_{36}} \frac{\sin \alpha_{15} \sin \alpha_{25}}{\mu_5 p_{45}} = \frac{-\nu_3 p_{43}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{33}} \frac{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{22}}{\mu_2 p_{42}}, \\
 & \epsilon_4' \delta_4' = \frac{-\nu_6 p_{36}}{\sin \alpha_{16} \sin \alpha_{46}} \frac{\sin \alpha_{32} \sin \alpha_{42}}{\mu_2 p_{12}} = \frac{\nu_3 p_{33}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{43}} \frac{\sin \alpha_{35} \sin \alpha_{45}}{\mu_5 p_{15}},
 \end{aligned}$$

la notation étant encore celle de la figure (56, 1).

On aura, comme avant

$$(57, 2) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_2 \equiv \gamma_3 \equiv \gamma_5 \equiv \gamma_6, \quad \alpha_2 \equiv \beta_3 \equiv \alpha_5 \equiv \beta_6, \\ \delta_1' = -\frac{f\alpha_3}{f\beta_2} = \epsilon_1' \frac{f\alpha_3}{f\beta_5} = \frac{f\alpha_6}{f\beta_5} = -\epsilon_1' \frac{f\alpha_6}{f\beta_2}, \\ \delta_4' = -\frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_6)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5)} = \epsilon_4' \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_6)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)} = \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)} \\ \hspace{15em} = -\epsilon_4' \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5)}, \end{array} \right.$$

d'où

$$(57, 3) \left\{ \begin{array}{l} f\beta_5 = -\epsilon_1' f\beta_2, \quad f\alpha_6 = \epsilon_1' f\alpha_3, \quad f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5) = -\epsilon_1' f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2), \\ f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_6) = \epsilon_1' f'(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3), \quad f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_5) = -\epsilon_1' (f\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2), \\ f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_6) = \epsilon_4' f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3), \quad f'\beta_5 = -\epsilon_4' f'\beta_2, \quad f'\alpha_6 = \epsilon_4' f'\alpha_3. \end{array} \right.$$

Les liaisons intérieures des angles tétraèdres I et IV donnent

$$(57, 4) \quad t_{32} = \delta_1' t_{23} = -\epsilon_1' t_{35} = \epsilon_1' \delta_1' t_{26}, \quad t_{45} = \delta_4' t_{36} = -\epsilon_4' t_{42} = \epsilon_4' \delta_4' t_{33}.$$

On peut encore adopter la représentation paramétrique donnée par les formules (56, 5), (56, 6), et (56, 7). Si l'on substitue dans (57, 4) les valeurs des  $t$  données par (56, 5), on obtient, moyennant (57, 2),

$$(57, 5) \quad fu_{32} = -fu_{23} = fu_{35} = -fu_{26}, \quad fu_{45} = -fu_{36} = fu_{42} = -fu_{33}.$$

D'autre part, l'élimination de certains  $u$  entre (56, 6) et (56, 7) donne, comme auparavant,

$$u_{32} \equiv u_{23} + \omega_1 \equiv u_{35} \equiv u_{26} + \omega_1, \quad u_{45} \equiv u_{36} + \omega_1 \equiv u_{42} \equiv u_{33} + \omega_1.$$

Comme ces relations-ci sont compatibles avec (57, 5), le mécanisme est déformable.

Il reste à exprimer les relations qui lient les deux angles tétraèdres décomposés. Les relations

$$\gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv \gamma_{11} + \gamma_{34} \equiv \gamma_{41} + \gamma_{24} \equiv \gamma_{31} + \gamma_{14} \equiv 0$$

donnent

$$(57, 6) \left\{ \begin{array}{l} 2\{f^2 \alpha_3 f^2 \beta_2 + m(f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2) + m^2 - 1 - \epsilon_4' f' \alpha_3 f' \beta_2 \cos \alpha_{14}\} f^2 \alpha_2 \\ \quad - \{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 + 2\epsilon_1' f \alpha_3 f \beta_2 \cos \alpha_{11}\} f'^2 \alpha_2 = 0, \\ \{f^2 \alpha_3 f^2 \beta_2 + m(f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2) + m^2 - 1 + f' \alpha_3 f' \beta_2 \cos \alpha_{24}\} f'^2 \alpha_2 \\ \quad - 2\{f^2 \alpha_3 + f^2 \beta_2 - 2f \alpha_3 f \beta_2 \cos \alpha_{21}\} f^2 \alpha_2 = 0, \\ \frac{\sin \alpha_{24} \sin \alpha_{11}}{\sin \alpha_{14} \sin \alpha_{21}} = \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{35}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{15}} = \frac{\sin \alpha_{32} \sin \alpha_{45}}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{25}} = \frac{\sin \alpha_{43} \sin \alpha_{16}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{36}} \\ \hspace{15em} = \frac{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{46}}{\sin \alpha_{33} \sin \alpha_{26}} = 2\epsilon_1' \epsilon_4' \frac{f^2 \alpha_2}{f'^2 \alpha_2} = \epsilon_1' \epsilon_4' a_2. \end{array} \right.$$

Donc  $\epsilon_1' = \epsilon_4'$ .

Or, les deux équations

$$\delta_1' = \frac{\sin a_{11} + \epsilon_1' \sin a_{21}}{\sin(a_{21} - a_{11})} = -\frac{f a_3}{f \beta_2}, \quad \delta_4' = \frac{\sin a_{14} + \epsilon_1' \sin a_{24}}{\sin(a_{24} - a_{14})} = \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}$$

peuvent également s'écrire de la manière suivante :

$$(57, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin a_{21}}{\sin a_{11}} = \frac{\epsilon_1' [f^2 a_3 - f^2 \beta_2]}{f^2 a_3 + f^2 \beta_2 + 2\epsilon_1' f a_3 f \beta_2 \cos a_{11}} \\ \quad = \frac{f^2 a_3 + f^2 \beta_2 - 2f a_3 f \beta_2 \cos a_{21}}{\epsilon_1' [f^2 a_3 - f^2 \beta_2]}, \\ \frac{\sin a_{24}}{\sin a_{14}} = \frac{\epsilon_1' [f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) - f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)]}{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) + f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) - 2\epsilon_1' f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) \cos a_{14}} \\ \quad = \frac{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) + f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) + 2f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) \cos a_{24}}{\epsilon_1' [f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) - f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)]}. \end{array} \right.$$

Puisque  $f a_3$  et  $f \beta_2$  sont purement imaginaires, et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)$  et  $f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)$  réelles, on doit donc avoir, comme auparavant,

$$(57, 8) \quad \epsilon_1' [f^2 a_3 - f^2 \beta_2] < 0, \quad \epsilon_1' [f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) - f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)] > 0.$$

Si l'on résout les équations (57, 6) et (57, 7) par rapport à  $\cos a_{21}$ ,  $\cos a_{14}$ ,  $\cos a_{24}$ , on trouve

$$(57, 9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos a_{31} = -\cos a_{11}, \\ \cos a_{44} = -\cos a_{24} = \frac{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) + f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}{2f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)} \\ \quad - \left(\frac{2f^2 a_2}{f'^2 a_2}\right) \frac{[f^2 a_3 - f^2 \beta_2]^2}{f' a_3 f' \beta_2 \{f^2 a_3 + f^2 \beta_2 + 2\epsilon_1' f a_3 f \beta_2 \cos a_{11}\}}, \\ -\cos a_{41} = \cos a_{21} = \frac{\epsilon_1' [f^2 a_3 + f^2 \beta_2] \cos a_{11} + 2f a_3 f \beta_2}{f^2 a_3 + f^2 \beta_2 + 2\epsilon_1' f a_3 f \beta_2 \cos a_{11}}, \\ -\epsilon_1' \cos a_{34} = \epsilon_1' \cos a_{14} = \frac{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3) + f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}{2f(\frac{1}{2}\omega_1 - a_3)f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)} \\ \quad - \left(\frac{f'^2 a_2}{2f^2 a_2}\right) \frac{f^2 a_3 + f^2 \beta_2 + 2\epsilon_1' f a_3 f \beta_2 \cos a_{11}}{f' a_3 f' \beta_2}. \end{array} \right.$$

Toutes les solutions elliptiques des équations (57, 3) sont comprises dans

$$(57, 10) \quad \beta_5 \equiv \beta_2 + (1 + \epsilon_1') \frac{1}{2}\omega_1, \quad a_6 \equiv a_3 + (1 - \epsilon_1') \frac{1}{2}\omega_1.$$

Celles-ci et les formules d'addition (57, 2) font savoir que

$$(57, 11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha_{15}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\sin \alpha_{25}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{\sin \alpha_{35}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{\sin \alpha_{45}}{\sin \alpha_{42}}, \\ \frac{\sin \alpha_{16}}{\sin \alpha_{13}} = \frac{\sin \alpha_{26}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{\sin \alpha_{36}}{\sin \alpha_{33}} = \frac{\sin \alpha_{46}}{\sin \alpha_{43}}, \\ \cos \alpha_{15} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{12}, \quad \cos \alpha_{16} = \epsilon_1' \cos \alpha_{13}, \\ \cos \alpha_{25} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{22}, \quad \cos \alpha_{26} = \epsilon_1' \cos \alpha_{23}, \\ \cos \alpha_{35} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{32}, \quad \cos \alpha_{36} = \epsilon_1' \cos \alpha_{33}, \\ \cos \alpha_{45} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{42}, \quad \cos \alpha_{46} = \epsilon_1' \cos \alpha_{43}. \end{array} \right.$$

On constate facilement que toutes les formules depuis (56, 19) jusqu'à, et y compris, (56, 24) sont encore valable au No. présent à condition que le symbole  $\epsilon_1$  soit remplacé par  $-\epsilon_1'$ . Il est inutile que je récrive ces formules. La construction d'un modèle se fait de la même manière qu'au No. précédent.

**58. Résumé des deux Nos. précédents. Exemple numérique.**

Ce cas de déformabilité du mécanisme de Kempe sur la sphère est composé de deux angles tétraèdres totalement décomposés, n'ayant pas d'axe commun, et de quatre angles tétraèdres irréductibles. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. La somme de deux dièdres variables, ou de deux dièdres constants, ayant un axe en commun est égale soit à  $\pi$  soit à  $2\pi$ .
2. Les quatre angles tétraèdres irréductibles ont tous le même invariant.
3. La déformation est de *genre un*.
4. Deux angles tétraèdres irréductibles conjugués ont leurs angles faciaux correspondants soit égaux soit supplémentaires, les angles faciaux correspondants étant ceux des angles tétraèdres (II, V), (III, VI) de la figure (56, 1) qui ont le même premier indice sur cette figure.
5. Le nombre des *constantes arbitraires* est de six.
6. Aucune relation ne lie les constantes du même angle tétraèdre irréductible.

7. Au cours de la déformation du mécanisme chacun des deux angles tétraèdres totalement décomposés conserve sa déformation initiale.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme je prends pour l'angle tétraèdre II celui du No. 35. On aura

$$(58, 1) \quad m = \cos 50^\circ, \quad k = \sin 65^\circ, \quad k' = \cos 65^\circ, \quad a_2 \equiv \frac{6.5}{9.0}K, \quad b_2 \equiv \frac{5.6}{9.0}K, \quad c_2 \equiv \frac{4.7}{9.0}K.$$

Soient en outre, d'après les formules (56, 19),

$$(58, 2) \quad a_3 \equiv \frac{4.1}{9.0}K, \quad b_3 \equiv a_2 \equiv \frac{6.5}{9.0}K, \quad c_3 \equiv c_2 \equiv \frac{4.7}{9.0}K,$$

d'où, en vertu de (56, 23),  $\epsilon_1 = -1$ .

Les fonctions Eta et Thêta des arguments  $a_2, b_2, c_2, b_3, c_3$  sont données par les formules (35, 3). Je prends dans les tables de M. Hippisley les valeurs suivantes de ces mêmes fonctions de l'argument  $a_3$  :

$$(58, 3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{H a_3}{H K} = 0,639432 + & \frac{\Theta(a_3 + b_3)}{\Theta 0} = 1,497172 \\ \frac{H(K - a_3)}{H K} = 0,740255 + & \frac{\Theta(K - a_3 - b_3)}{\Theta 0} = 1,040713 + \\ \frac{\Theta(a_3)}{\Theta 0} = 1,231039 & \frac{H(a_3 + c_3)}{H K} = 0,999336 + \\ \frac{\Theta(K - a_3)}{\Theta 0} = 1,305948 & \frac{\Theta(K - a_3 - c_3)}{\Theta 0} = 1,000652 + \\ \frac{H(a_3 - b_3)}{H K} = -0,391635 + & \frac{H(a_3 - c_3)}{H K} = -0,099929 + \\ \frac{H(K - a_3 + b_3)}{H K} = 0,906819 + & \frac{\Theta(K - a_3 + c_3)}{\Theta 0} = 1,532337 + \\ \frac{\Theta(a_3 - b_3)}{\Theta 0} = 1,088690 & \frac{H(-a_3 + b_3 + c_3)}{H K} = 0,941058 + \\ \frac{\Theta(K - a_3 + b_3)}{\Theta 0} = 1,448847 & \frac{H(a_3 - b_3 + c_3)}{H K} = 0,376002 + \\ \frac{H(a_3 + b_3)}{H K} = 0,958011 + & \frac{H(a_3 + b_3 - c_3)}{H K} = 0,847049 \\ \frac{H(K - a_3 - b_3)}{H K} = -0,264307 & \frac{H(a_3 + b_3 + c_3)}{H K} = 0,437956 \end{array} \right.$$

Quand on introduit ces valeurs dans les formules (33, 1), on obtient, moyennant (56, 18),

$$(58, 4) \left\{ \begin{array}{ll} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{12} = 0,720562 & \cos \alpha_{15} = -\cos \alpha_{12} = 0,693390 + \\ \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{22} = 0,967784 + & \cos \alpha_{25} = -\cos \alpha_{22} = 0,251780 \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{32} = 0,552146 + & \cos \alpha_{35} = -\cos \alpha_{32} = 0,833747 \\ \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{42} = 0,448415 + & \cos \alpha_{45} = -\cos \alpha_{42} = 0,893825 + \\ \sin \alpha_{16} = \sin \alpha_{13} = 0,533411 + & \cos \alpha_{16} = -\cos \alpha_{13} = 0,845856 \\ \sin \alpha_{26} = \sin \alpha_{23} = 0,934947 & \cos \alpha_{26} = -\cos \alpha_{23} = -0,354787 + \\ \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{33} = 0,976906 & \cos \alpha_{36} = -\cos \alpha_{33} = 0,213669 \\ \sin \alpha_{46} = \sin \alpha_{43} = 0,607941 + & \cos \alpha_{46} = -\cos \alpha_{43} = 0,793982 \end{array} \right.$$

Pour avoir les angles faciaux des angles tétraèdres I et IV il faut encore se donner  $\alpha_{11}$ . Soit

$$(58, 5) \quad \alpha_{11} = \frac{1}{3}(2\pi).$$

Les dits angles seront alors donnés par les formules (56, 21) dans le cas actuel, ou par (56, 24) si  $m$  était plus grand que  $un$ .

Je prends dans les tables de M. Hippisley les valeurs suivantes :

$$(58, 6) \quad \frac{H(a_3 - b_2)}{HK} = -0,248076 +, \quad \frac{H(a_3 + b_2)}{HK} = 0,991890.$$

Cela donne

$$(58, 7) \left\{ \begin{array}{ll} \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{31} = 0,866025 + & \cos \alpha_{11} = \cos \alpha_{31} = -0,500000 \\ \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{41} = 0,633108 & \cos \alpha_{21} = \cos \alpha_{41} = 0,774063 + \\ \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{34} = 0,939571 & \cos \alpha_{14} = \cos \alpha_{34} = 0,342354 + \\ \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{44} = 0,243871 + & \cos \alpha_{24} = \cos \alpha_{44} = 0,969807 + \end{array} \right.$$

Les angles faciaux du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par (58, 1), (58, 2), et (58, 5) sont ainsi données par les formules (58, 4) et (58, 7).

**59. Sixième mécanisme. Six angles tétraèdres totalement décomposés.** Si le mécanisme préliminaire composé des angles tétraèdres I, II, III appartient au cas de déformabilité du No. 46, il faut que tout autre groupe de trois angles tétraèdres appartienne au même cas. Ceci résulte de la proposition, déjà démontrée, qui fait voir que deux angles tétraèdres d'un tel groupe ne peuvent se décomposer totalement sans que le troisième

en fasse autant. Soient donc

$$(59, 1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{31} \equiv \alpha_{11}, & \alpha_{41} \equiv \alpha_{21}, & \alpha_{34} \equiv \alpha_{14}, & \alpha_{44} \equiv \alpha_{24}, \\ \delta_1 = \frac{\sin \alpha_{11} - \epsilon_1 \sin \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{11} - \alpha_{21})}, & \delta_4 = \frac{\sin \alpha_{14} - \epsilon_4 \sin \alpha_{24}}{\sin(\alpha_{14} - \alpha_{24})}, \\ \epsilon_1^2 = 1, & t_{21} t_{31} = \delta_1, & \epsilon_4^2 = 1, & t_{14} t_{24} = \delta_4, \\ t_{21} = \epsilon_1 t_{41}, & t_{31} = \epsilon_1 t_{11}; & t_{34} = \epsilon_4 t_{14}, & t_{44} = \epsilon_4 t_{24}; \\ \\ \alpha_{42} \equiv \alpha_{32}, & \alpha_{12} \equiv \alpha_{22}, & \alpha_{45} \equiv \alpha_{35}, & \alpha_{25} \equiv \alpha_{15}, \\ \delta_2 = \frac{\sin \alpha_{32} - \epsilon_2 \sin \alpha_{12}}{\sin(\alpha_{32} - \alpha_{12})}, & \delta_5 = \frac{\sin \alpha_{35} - \epsilon_5 \sin \alpha_{15}}{\sin(\alpha_{35} - \alpha_{15})}, \\ \epsilon_2^2 = 1, & t_{32} t_{12} = \delta_2, & \epsilon_5^2 = 1, & t_{45} t_{15} = \delta_5, \\ t_{22} = \epsilon_2 t_{12}, & t_{42} = \epsilon_2 t_{32}; & t_{35} = \epsilon_5 t_{45}, & t_{25} = \epsilon_5 t_{15}; \\ \\ \alpha_{33} \equiv \alpha_{23}, & \alpha_{43} \equiv \alpha_{13}, & \alpha_{46} \equiv \alpha_{16}, & \alpha_{36} \equiv \alpha_{26}, \\ \delta_3 = \frac{\sin \alpha_{13} - \epsilon_3 \sin \alpha_{23}}{\sin(\alpha_{13} - \alpha_{23})}, & \delta_6 = \frac{\sin \alpha_{16} - \epsilon_6 \sin \alpha_{26}}{\sin(\alpha_{16} - \alpha_{26})}, \\ \epsilon_3^2 = 1, & t_{23} t_{13} = \delta_3, & \epsilon_6^2 = 1, & t_{46} t_{26} = \delta_6, \\ t_{33} = \epsilon_3 t_{23}, & t_{43} = \epsilon_3 t_{13}; & t_{16} = \epsilon_6 t_{46}, & t_{36} = \epsilon_6 t_{26}; \end{array} \right.$$

la notation étant celle de la figure (47, 1).

Si tous les groupes de trois angles tétraèdres sont déformables séparément, le mécanisme entier le sera aussi, parce que la forme d'un angle tétraèdre totalement décomposé est déterminée par un seul de ses dièdres.

On se rappelle (46, 4) que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le sous-mécanisme I, II, III soit déformable sont

$$(59, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{22} + \gamma_{15}}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{23} + \gamma_{36}}{2} = \frac{\delta_1 - \delta_2 \delta_3}{1 - \delta_1 \delta_2 \delta_3}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma_{23} + \gamma_{36}}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{21} + \gamma_{44}}{2} = \frac{\delta_2 - \delta_1 \delta_3}{1 - \delta_1 \delta_2 \delta_3}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma_{21} + \gamma_{44}}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{22} + \gamma_{15}}{2} = \frac{\delta_3 - \delta_1 \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2 \delta_3}. \end{array} \right.$$

Les conditions analogues pour le groupe I, II, VI sont

$$(59, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{45} + \gamma_{32}}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{23} + \gamma_{36}}{2} = \frac{\epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2 \delta_6}{1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_1 \delta_2 \delta_6}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma_{23} + \gamma_{36}}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{14} + \gamma_{31}}{2} = \frac{\epsilon_2 \delta_2 - \epsilon_1 \delta_1 \delta_6}{1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_1 \delta_2 \delta_6}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma_{14} + \gamma_{31}}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{45} + \gamma_{32}}{2} = \frac{\delta_6 - \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_1 \delta_2}{1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_1 \delta_2 \delta_6}. \end{array} \right.$$

Si l'on élimine  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma_{45} + \gamma_{32})$  et  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma_{14} + \gamma_{31})$  entre celles-ci, et qu'on résolve la résultante par rapport à  $\delta_6$ , on trouve

$$\delta_6 + \frac{1}{\delta_6} = \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + (1 + \delta_1^2 \delta_2^2) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\gamma_{23} + \gamma_{36})}{\delta_1 \delta_2 [1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\gamma_{23} + \gamma_{36})]},$$

ou, en tenant compte de (59, 2),

$$\delta_6 + \frac{1}{\delta_6} = \epsilon_1 \epsilon_2 \left( \delta_3 + \frac{1}{\delta_3} \right).$$

Soit  $\delta_6 = \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_3$ . Les équations (59, 2) et (59, 3) donnent alors

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_{45} + \gamma_{32}}{2} = \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{\gamma_{22} + \gamma_{15}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma_{14} + \gamma_{31}}{2} = \epsilon_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma_{23} + \gamma_{36}}{2}.$$

Si l'on applique ce procédé à tous les groupes de trois angles tétraédres du mécanisme, on trouve les conditions définitives suivantes :

$$(59, 4) \quad \begin{cases} \epsilon_1 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_6 = 1, & \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 \epsilon_6 = 1, & \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4 \epsilon_5 = 1, \\ \delta_6 = \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_3, & \delta_4 = \epsilon_2 \epsilon_3 \delta_1, & \delta_5 = \epsilon_1 \epsilon_3 \delta_2; \end{cases}$$

$$(59, 5) \quad \begin{cases} \epsilon_3(\gamma_{11} + \gamma_{34}) \equiv \epsilon_3 \epsilon_5(\gamma_{41} + \gamma_{24}) \equiv \epsilon_2(\gamma_{31} + \gamma_{14}) \equiv (\gamma_{21} + \gamma_{44}) \equiv a, \\ \epsilon_3(\gamma_{42} + \gamma_{35}) \equiv \epsilon_3 \epsilon_4(\gamma_{12} + \gamma_{25}) \equiv \epsilon_1(\gamma_{32} + \gamma_{45}) \equiv (\gamma_{22} + \gamma_{15}) \equiv b, \\ \epsilon_2(\gamma_{43} + \gamma_{16}) \equiv \epsilon_2 \epsilon_4(\gamma_{33} + \gamma_{26}) \equiv \epsilon_1(\gamma_{13} + \gamma_{46}) \equiv (\gamma_{23} + \gamma_{36}) \equiv c, \end{cases}$$

les symboles  $a, b, c$  ayant encore leur sens défini au No. 46.

On vérifie aisément que

$$\frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1} = \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{21} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{11})^{\epsilon_1}, \quad \frac{1 - \delta_2}{1 + \delta_2} = \epsilon_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{12} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{32})^{\epsilon_2},$$

$$\frac{1 - \delta_3}{1 + \delta_3} = \epsilon_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{23} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{13})^{\epsilon_3},$$

ce qui fait, en vertu de (59, 4) que

$$(59, 6) \quad \begin{cases} \epsilon_4 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{24} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{14})^{\epsilon_4} = \epsilon_1 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{21} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{11})^{\epsilon_1}]^{\epsilon_2 \epsilon_3}, \\ \epsilon_5 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{15} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{35})^{\epsilon_5} = \epsilon_2 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{12} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{32})^{\epsilon_2}]^{\epsilon_1 \epsilon_3}, \\ \epsilon_6 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{26} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{16})^{\epsilon_6} = \epsilon_3 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{23} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{13})^{\epsilon_3}]^{\epsilon_1 \epsilon_2}. \end{cases}$$

Comme on veut que tous les  $a$  soient compris entre 0 et  $\pi$ , il faut qu'on ait

$$(59, 7) \quad \epsilon_1 = \epsilon_4, \quad \epsilon_2 = \epsilon_5, \quad \epsilon_3 = \epsilon_6.$$



manière suivante :

$$(59, 9) \quad \begin{cases} \alpha_{31} \equiv \alpha_{11} \equiv a_2 + a_3, & \alpha_{41} \equiv \alpha_{21} \equiv a_2' + a_3', \\ \alpha_{42} \equiv \alpha_{32} \equiv a_1 - a_3, & \alpha_{22} \equiv \alpha_{12} \equiv a_1' + a_3', \\ \alpha_{43} \equiv \alpha_{13} \equiv a_1 - a_2, & \alpha_{33} \equiv \alpha_{23} \equiv a_1' - a_2', \\ \alpha_{44} \equiv \alpha_{24} \equiv a_2 - a_3, & \alpha_{34} \equiv \alpha_{14} \equiv a_2' - a_3', \\ \alpha_{25} \equiv \alpha_{15} \equiv a_1 + a_3, & \alpha_{45} \equiv \alpha_{35} \equiv a_1' - a_3', \\ \alpha_{36} \equiv \alpha_{26} \equiv a_1 + a_2, & \alpha_{46} \equiv \alpha_{16} \equiv a_1' + a_2'. \end{cases}$$

Puisqu'on veut que  $\alpha_{26}$  et  $\alpha_{13}$  soient compris entre 0 et  $\pi$ , les deux fonctions  $\sin(a_1 + a_2)$  et  $\sin(a_1 - a_2)$  doivent être positives. Pour que ceci ait lieu, il faut et il suffit que  $|\sin a_1| > |\sin a_2|$ , et que  $\sin a_1 \cos a_2 > 0$ . En étendant ce raisonnement à toutes les formules (59, 9), on trouve que toutes les fonctions de la même ligne horizontale dans le tableau suivant doivent avoir le même signe :

$$(59, 10) \quad \begin{cases} \sin a_1, & \sin a_2, & \cos a_2, & \cos a_3, \\ \sin a_1', & \sin a_2', & \cos a_2', & \cos a_3'; \end{cases}$$

et que les inégalités suivantes doivent être satisfaites :

$$(59, 11) \quad |\sin a_1| > |\sin a_2| > |\sin a_3|, \quad |\sin a_1'| > |\sin a_2'| > |\sin a_3'|.$$

Je m'occupe ensuite des équations (59, 6), qui avec (59, 7) remplacent (59, 4). Quand on y substitue les valeurs des  $\alpha$  données par (59, 9) on obtient,

$$\begin{aligned} & \text{si } \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1, \\ & \epsilon_1 \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = -\epsilon_2 \frac{\sin a_2'}{\sin a_2} = \epsilon_3 \frac{\sin a_3'}{\sin a_3}; \\ & \text{et si } \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1, \\ & \epsilon_1 \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} = \epsilon_2 \frac{\cos a_2'}{\cos a_2} = \epsilon_3 \frac{\cos a_3'}{\cos a_3}; \end{aligned}$$

ce qui donne, en vertu de (59, 10), les deux cas suivants :

$$(59, 12) \quad \begin{cases} \text{Cas 1} \\ \epsilon_1 = -\epsilon_2, \quad \epsilon_3 = -1, \quad \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = \frac{\sin a_2'}{\sin a_2} = \epsilon_2 \frac{\sin a_3'}{\sin a_3} = \rho_1; \\ \text{Cas 2} \\ \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3, \quad -\epsilon_2 \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} = \frac{\cos a_2'}{\cos a_2} = \frac{\cos a_3'}{\cos a_3} = \rho_2. \end{cases}$$

Les conditions (59, 2) se réduisent dans le cas particulier dont on s'occupe à la condition unique  $\delta_1 \delta_2 - \delta_3 = 0$ , qui est satisfaite identiquement lorsque les paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_1', a_2', a_3'$  satisfont aux équations (59, 12).

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on n'a qu'à se donner quatre constantes réelles  $a_1, a_2, a_3, \rho$ . On peut alors calculer  $a_1', a_2', a_3'$  au moyen des équations (59, 12), et ensuite les angles faciaux au moyen de (59, 9). En se donnant  $\sigma_1, a_2, a_3$  on doit tenir compte des conditions (59, 10) et (59, 11). Aussi, en se donnant  $\rho$  doit-on le prendre assez petit pour que les paramètres  $a_1', a_2', a_3'$  donnés par (59, 12) soient réels. Les formules (59, 12) ne donnent  $a_1', a_2', a_3'$  qu'à un nombre fini de déterminations près. Il est facile de constater qu'on peut toujours en trouver qui soient compatibles avec les conditions (59, 10) et (59, 11). Les  $\epsilon$  ne sont assujettis qu'à satisfaire à (59, 7) et à (59, 12); la distribution des angles tétraèdres parallélogrammatiques et des angles tétraèdres contre-parallélogrammatiques reste donc considérablement arbitraire.

**60. Variante du mécanisme précédent.** Je considère maintenant une variante du mécanisme précédent dans laquelle certains angles tétraèdres se décomposent à angles supplémentaires. Soient, à la manière de (59, 1),

$$(60, 1) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{11} + \alpha_{31} \equiv \pi, & \alpha_{21} + \alpha_{41} \equiv \pi, & \alpha_{34} + \alpha_{14} \equiv \pi, & \alpha_{44} + \alpha_{24} \equiv \pi, \\ \delta_1' = \frac{\sin \alpha_{11} + \epsilon_1' \sin \alpha_{21}}{\sin (\alpha_{21} - \alpha_{11})}, & & \delta_4' = \frac{\sin \alpha_{34} + \epsilon_4' \sin \alpha_{44}}{\sin (\alpha_{44} - \alpha_{34})}, & \\ t_{21} = \delta_1' t_{31} = \epsilon_1' t_{41} = -\epsilon_1' \delta_1' t_{11}; & & t_{34} = \delta_4' t_{44} = \epsilon_4' t_{14} = -\epsilon_4' \delta_4' t_{24}; & \\ \alpha_{12} \equiv \alpha_{22}, & \alpha_{32} \equiv \alpha_{42}, & \alpha_{45} \equiv \alpha_{35}, & \alpha_{25} \equiv \alpha_{15}, \\ \delta_2 = \frac{\sin \alpha_{32} - \epsilon_2 \sin \alpha_{12}}{\sin (\alpha_{32} - \alpha_{12})}, & & \delta_5 = \frac{\sin \alpha_{35} - \epsilon_5 \sin \alpha_{15}}{\sin (\alpha_{35} - \alpha_{15})}, & \\ t_{32} = \frac{\delta_2}{t_{12}} = \frac{\epsilon_2 \delta_2}{t_{22}} = \epsilon_2 t_{42}; & & t_{45} = \frac{\delta_5}{t_{15}} = \frac{\epsilon_5 \delta_5}{t_{25}} = \epsilon_5 t_{35}; & \\ \alpha_{13} \equiv \alpha_{43}, & \alpha_{23} \equiv \alpha_{33}, & \alpha_{16} \equiv \alpha_{46}, & \alpha_{36} \equiv \alpha_{26}, \\ \delta_3 = \frac{\sin \alpha_{13} - \epsilon_3 \sin \alpha_{23}}{\sin (\alpha_{13} - \alpha_{23})}, & & \delta_6 = \frac{\sin \alpha_{16} - \epsilon_6 \sin \alpha_{26}}{\sin (\alpha_{16} - \alpha_{26})}, & \\ t_{23} = \frac{\delta_3}{t_{13}} = \frac{\epsilon_3 \delta_3}{t_{43}} = \epsilon_3 t_{33}; & & t_{46} = \frac{\delta_6}{t_{26}} = \epsilon_6 t_{16} = \frac{\epsilon_6 \delta_6}{t_{36}}; & \\ & & \epsilon_1'^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = \epsilon_4'^2 = \epsilon_5^2 = \epsilon_6^2 = 1; & \end{array} \right.$$

la notation étant toujours celle de la figure (47, 1). On voit que chaque groupe de trois angles tétraèdres est du type (46, 8).

Je suppose que tous les corps s'aplatissent cette fois de façon que tous les dièdres  $\gamma_{ij}$  soient nuls. Les équations (38, 2) donnent

$$(60, 2) \quad \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{13} + \alpha_{15} \equiv 0, & \alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{16} \equiv 0, \\ \alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{26} \equiv 0, & \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} \equiv 0, \\ \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{36} \equiv 0, & \alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{35} \equiv 0, \\ \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{44} \equiv 0, & \alpha_{41} + \alpha_{45} + \alpha_{46} \equiv 0. \end{cases}$$

Comme auparavant, les  $\alpha$  peuvent s'exprimer en fonction de six paramètres comme suit :

$$(60, 3) \quad \begin{cases} \alpha_{11} \equiv \pi - \alpha_{31} \equiv a_2' - a_3, & \alpha_{21} \equiv \pi - \alpha_{41} \equiv a_2' - a_3', \\ \alpha_{44} \equiv \pi - \alpha_{24} \equiv \pi + a_2 + a_3, & \alpha_{34} \equiv \pi - \alpha_{14} \equiv \pi + a_2' + a_3', \\ \alpha_{42} \equiv \alpha_{32} \equiv \pi - a_1 - a_3, & \alpha_{22} \equiv \alpha_{12} \equiv a_3' - a_1', \\ \alpha_{43} \equiv \alpha_{13} \equiv a_1 - a_2, & \alpha_{33} \equiv \alpha_{23} \equiv a_1' - a_2', \\ \alpha_{25} \equiv \alpha_{15} \equiv a_3 - a_1, & \alpha_{45} \equiv \alpha_{35} \equiv \pi - a_1' - a_3', \\ \alpha_{36} \equiv \alpha_{26} \equiv a_1 + a_2, & \alpha_{46} \equiv \alpha_{16} \equiv a_1' + a_2'. \end{cases}$$

Pour que tous les  $\alpha$  soient compris entre 0 et  $\pi$ , il faut et il suffit que

$$(60, 4) \quad \begin{cases} \sin a_3 \cos a_2 < 0, & \sin a_3 \cos a_1 > 0, & \sin a_1 \cos a_2 > 0, \\ \sin a_3' \cos a_2' < 0, & \sin a_3' \cos a_1' > 0, & \sin a_1' \cos a_2' > 0; \\ |\sin a_3| > |\sin a_1| > |\sin a_2|, & |\sin a_3'| > |\sin a_1'| > |\sin a_2'|. \end{cases}$$

L'unique condition donnée par les formules (46, 8) et celles qui lui sont analogues sont

$$\begin{aligned} \delta_3 + \delta_1' \delta_2 &= 0, & \epsilon_1' \epsilon_2 \delta_1' \delta_2 + \delta_6 &= 0, & \delta_4' \delta_5 - \delta_6 &= 0, \\ \delta_3 - \epsilon_4' \epsilon_5 \delta_4' \delta_5 &= 0, & \epsilon_3 \delta_3 - \epsilon_1' \delta_1' \delta_5 &= 0, & \epsilon_6 \delta_6 - \epsilon_5 \delta_5 \delta_1' &= 0, \\ \epsilon_6 \delta_6 + \epsilon_4' \delta_2 \delta_4' &= 0, & \epsilon_3 \delta_3 + \epsilon_2 \delta_2 \delta_4' &= 0. \end{aligned}$$

Ce système est équivalent au suivant :

$$(60, 5) \quad \begin{cases} \epsilon_1' \epsilon_3 \epsilon_4' \epsilon_6 = 1, & \epsilon_1' \epsilon_2 \epsilon_4' \epsilon_5 = 1, & \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 \epsilon_6 = 1, \\ \delta_3 + \delta_1' \delta_2 = 0, & \delta_4' = \epsilon_2 \epsilon_3 \delta_1', & \delta_5 = -\epsilon_1' \epsilon_3 \delta_2, & \delta_6 = \epsilon_1' \epsilon_2 \delta_3, \end{cases}$$

les trois dernières relations pouvant également s'écrire comme suit :

$$(60, 6) \quad \begin{cases} \epsilon_4' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{44} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{34})^{-\epsilon_4'} = \epsilon_1' [\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{21} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{11})^{-\epsilon_1'}]^{-\epsilon_2 \epsilon_3}, \\ \epsilon_5 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{15} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{35})^{\epsilon_5} = \epsilon_2 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{12} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{32})^{\epsilon_2}]^{-\epsilon_1' \epsilon_3}, \\ \epsilon_6 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{26} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{16})^{\epsilon_6} = \epsilon_3 [\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{23} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{13})^{\epsilon_3}]^{\epsilon_1' \epsilon_2}, \end{cases}$$

d'où

$$(60, 7) \quad \epsilon_4' = \epsilon_1', \quad \epsilon_5 = \epsilon_2, \quad \epsilon_6 = \epsilon_3.$$

Quand on substitue dans les équations (60, 6) les valeurs des  $a$  données par les formules (60, 3), on trouve,

$$\begin{aligned} & \text{si } \epsilon_1' \epsilon_2 \epsilon_3 = 1, \\ & -\epsilon_1' \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = \epsilon_2 \frac{\sin a_2'}{\sin a_2} = \epsilon_3 \frac{\sin a_3'}{\sin a_3}; \\ & \text{et si } \epsilon_1' \epsilon_2 \epsilon_3 = -1, \\ & \epsilon_1' \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} = \epsilon_2 \frac{\cos a_2'}{\cos a_2} = -\epsilon_3 \frac{\cos a_3'}{\cos a_3}. \end{aligned}$$

Ces formules donnent lieu, en vertu des conditions (60, 4), aux deux cas définitifs suivants :

$$(60, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cas 1} \\ \epsilon_1' = -\epsilon_3, \quad \epsilon_2 = -1, \quad \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = \epsilon_1' \frac{\sin a_2'}{\sin a_2} = \frac{\sin a_3'}{\sin a_3}; \\ \\ \text{Cas 2} \\ \epsilon_1' = \epsilon_2, \quad \epsilon_3 = -1, \quad \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} = \frac{\cos a_2'}{\cos a_2} = \epsilon_1' \frac{\cos a_3'}{\cos a_3}. \end{array} \right.$$

La seule condition dont on ne s'est pas occupé est  $\delta_3 + \delta_1' \delta_2 = 0$ . On trouve pourtant qu'elle est satisfaite identiquement lorsque les paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_1', a_2', a_3'$  satisfont aux conditions (60, 8).

Un modèle peut se construire de la même façon que tout à l'heure au moyen, cette fois, des formules (60, 3), (60, 4), (60, 7), et (60, 8).

**61. Résumé des deux Nos. précédents. Exemple numérique.** Ce cas de déformabilité du mécanisme de Kempe sur la sphère est composé de six angles tétraèdres tous totalement décomposés. Quelques unes de ses propriétés sont les suivantes :

1. Si  $a$  représente la somme de deux dièdres constants ayant le même axe, et  $b$  celle de deux dièdres constants dont l'axe commun se trouve sur la même diagonale du mécanisme que le premier axe, les deux sommes  $a$  et  $b$  sont ou bien égales ou bien supplémentaires,

2. La déformation est *algébrique*.

3. Aucun angle tétraèdre ne peut passer de l'une de ses deux déformations à l'autre au cours de la déformation du mécanisme.

Je n'ai pu pousser mes calculs jusqu'au bout que dans le cas où tous les corps s'aplatissent. Dans ce cas-là le mécanisme dépend de *quatre constantes arbitraires*.

Pour avoir un *exemple numérique*, je me donne trois paramètres  $a_1, a_2, a_3$  assujettis à satisfaire aux conditions (59, 10) et (59, 11). Soient

$$(61, 1) \quad \begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1, \\ \sin a_1 = \frac{1}{17}, \quad \sin a_2 = \frac{4}{5}, \quad \sin a_3 = \frac{7}{25}, \\ \cos a_1 = \frac{8}{17}, \quad \cos a_2 = \frac{3}{5}, \quad \cos a_3 = \frac{24}{25}. \end{cases}$$

Soit en outre  $\rho_2 = \frac{2}{6}$ .

Il vient, d'après les formules (59, 12),

$$(61, 2) \quad \begin{cases} \sin a_1' = \frac{11\sqrt{(321)}}{221}, \quad \sin a_2' = \frac{\sqrt{(451)}}{26}, \quad \sin a_3' = \frac{5}{13}, \\ \cos a_1' = \frac{100}{221}, \quad \cos a_2' = \frac{1}{26}, \quad \cos a_3' = \frac{12}{13}. \end{cases}$$

Les formules (59, 9) donnent les valeurs suivantes pour les angles  $\alpha$  :

$$(61, 3) \quad \begin{cases} \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{11} = 0,936000 & \cos \alpha_{31} = \cos \alpha_{11} = 0,352000 \\ \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{21} = 0,975861 + & \cos \alpha_{41} = \cos \alpha_{21} = 0,218391 \\ \sin \alpha_{22} = \sin \alpha_{12} = 0,997206 + & \cos \alpha_{22} = \cos \alpha_{12} = 0,074693 + \\ \sin \alpha_{42} = \sin \alpha_{32} = 0,715294 & \cos \alpha_{42} = \cos \alpha_{32} = 0,698823 + \\ \sin \alpha_{43} = \sin \alpha_{13} = 0,152941 & \cos \alpha_{43} = \cos \alpha_{13} = 0,988235 + \\ \sin \alpha_{33} = \sin \alpha_{23} = 0,144890 + & \cos \alpha_{33} = \cos \alpha_{23} = 0,989447 + \\ \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{14} = 0,532074 + & \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{14} = 0,846697 + \\ \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{24} = 0,600000 & \cos \alpha_{44} = \cos \alpha_{24} = 0,800000 \\ \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{15} = 0,978823 + & \cos \alpha_{25} = \cos \alpha_{15} = 0,204706 \\ \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{35} = 0,649138 + & \cos \alpha_{45} = \cos \alpha_{35} = 0,760670 + \\ \sin \alpha_{46} = \sin \alpha_{16} = 0,884075 & \cos \alpha_{46} = \cos \alpha_{16} = -0,467345 + \\ \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{26} = 0,905882 + & \cos \alpha_{36} = \cos \alpha_{26} = -0,423529 + \end{cases}$$

Tel est le mécanisme qui correspond aux constantes arbitraires données par (61, 1).

## Chapitre VII.

## OCTAEDRES A UN OU A DEUX SOMMETS IMPROPRES.

**62. Enoncé du problème.** Au chapitre précédent j'ai étudié les cas où toutes les chaînes de quatre corps du mécanisme représenté par la figure (1, 1) sont des angles tétraédres à sommet commun. Au premier chapitre j'ai fait remarquer que les seuls autres cas de déformabilité de ce mécanisme, tant que toutes ses chaînes de quatre corps sont des angles tétraédres, étaient des octaèdres articulés dont M. Bricard a fait et achevé l'étude. J'ai également fait remarquer que le cas où toutes les chaînes de quatre corps seraient des quadrilatères plans avaient été complètement

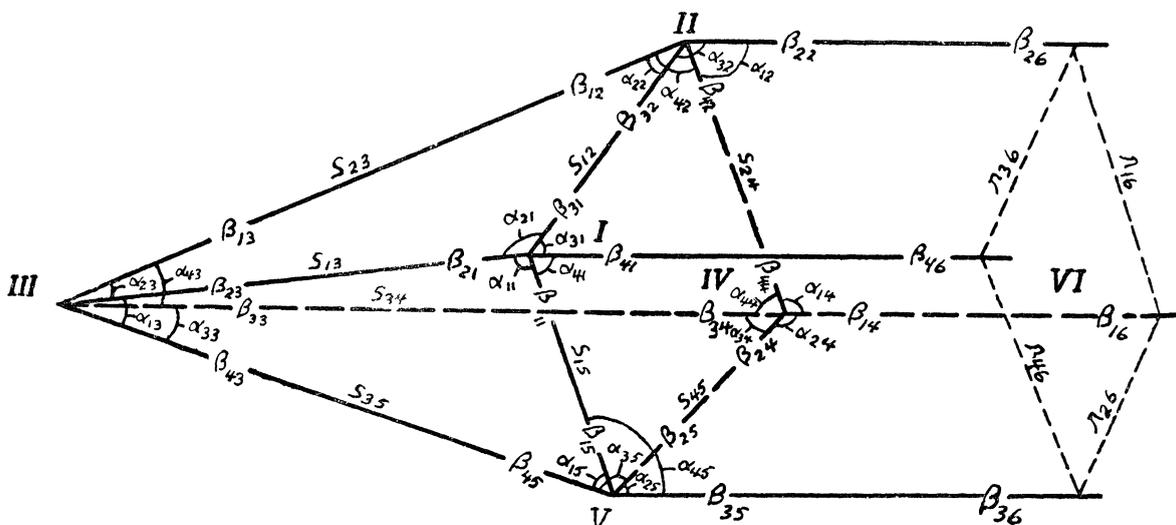


Fig. 62, 1.

étudié par Darboux. Il reste à examiner les cas où il y aurait des angles tétraédres et des quadrilatères plans mélangés dans le même mécanisme.

Si deux des trois chaînes qui entourent un corps étaient des quadrilatères plans, la troisième aurait déjà deux de ses axes parallèles, et ne pourrait donc pas être un angle tétraèdre. Cela fait que deux chaînes ayant un axe en commun ne peuvent pas être toutes les deux des quadrilatères plans. *Le nombre de quadrilatères plans du mécanisme ne peut donc pas dépasser deux, et s'il y en a deux, ceux-ci n'auront pas d'axe commun.*

Il est clair que les trois axes d'un corps qui est entouré de deux angles tétraèdres et d'un quadrilatère plan doivent être dans un plan. En effet celui des trois axes qui ne fait pas partie du quadrilatère plan rencontre les deux axes parallèles, et doit par conséquent se trouver dans leur plan.

D'autre part, quatre angles tétraèdres qui ont chacun un axe en commun avec un quadrilatère plan doivent avoir des sommets distincts, chaque sommet étant sur un axe différent du quadrilatère plan. Il en résulte que tous les corps du mécanisme doivent s'aplatir quand celui-ci est composé d'un ou de deux quadrilatères plans et de cinq ou de quatre angles tétraèdres. En effet, deux des trois axes de chaque corps rencontrent le

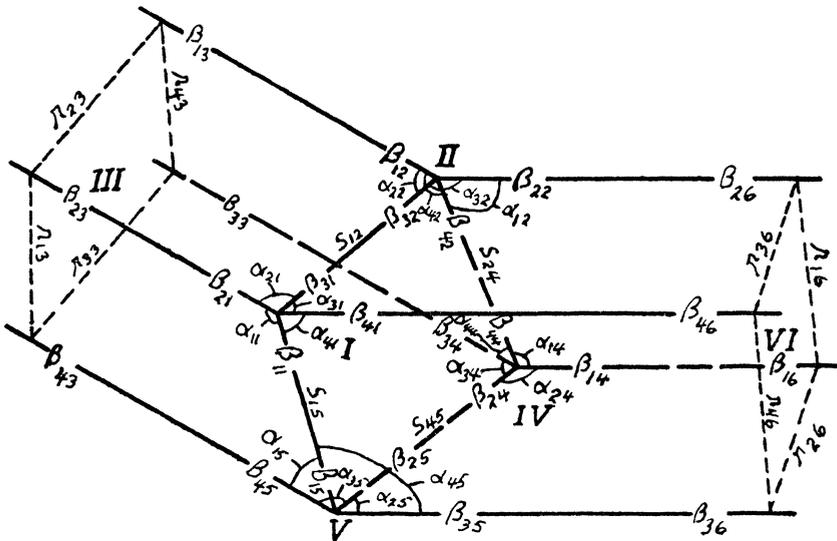


Fig. 62, 2.

troisième en des points différents tout en se rencontrant, s'ils ne sont parallèles. Dans les deux cas il faut que les trois axes soient situés dans un plan. *Les seuls mécanismes composés d'angles tétraèdres et de quadrilatères plans mélangés sont donc des octaèdres à un ou à deux sommets impropres.* On voit les schémas de ces deux cas aux figures (62, 1) et (62, 2), la notation des angles et des dièdres étant toujours celle de la figure (47, 1).

**63. Aplatissement des corps.** Comme l'angle de deux droites est indépendante de la distance qui les sépare, toute l'analyse du chapitre précédent s'applique encore aux mécanismes du chapitre présent.

Cependant, certaines formules trouvées précédemment ne se présenteront dans l'analyse actuelle que sous une forme limite; d'autres disparaîtront par suite d'être satisfaites identiquement. Enfin, de nouvelles constantes, qui représenteront les longueurs portées sur les arêtes de l'octaèdre, s'introduiront. Je conserve donc tous les résultats acquis au chapitre précédent.

On a vu tout à l'heure que les trois axes de chaque corps devaient être situés dans un plan et que leurs points de rencontre devaient être distincts. Il s'agit de trouver la forme limite des équations (38, 2) qui convient à ce cas.

Evidemment chacun des dièdres  $\gamma_i$ , du chapitre précédent est maintenant égal soit à 0 soit à  $\pi$ . Soient

$$(63, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{21} \equiv \zeta_{21} \left[ \frac{s_{32}}{\rho} - (1 - \zeta_{21}) \frac{1}{2} \pi \right], \quad \gamma_{22} \equiv \zeta_{22} \left[ \frac{s_{31}}{\rho} - (1 - \zeta_{22}) \frac{1}{2} \pi \right], \\ \gamma_{23} \equiv \zeta_{23} \left[ \frac{s_{12}}{\rho} - (1 - \zeta_{23}) \frac{1}{2} \pi \right], \\ \zeta_{21}^2 = \zeta_{22}^2 = \zeta_{23}^2 = 1, \end{array} \right.$$

où  $s_{32}/\rho$ ,  $s_{31}/\rho$ ,  $s_{12}/\rho$  sont de nouvelles constantes. Si je fais tendre  $\rho$  vers  $\infty$  pendant que  $s_{32}$ ,  $s_{31}$ ,  $s_{12}$  restent finis, les  $\gamma$  auront les valeurs voulues, et les équations (38, 2) se mettront sous la forme

$$(63, 2) \quad \frac{s_{32}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{s_{31}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{s_{12}}{\sin \alpha_{23}}, \quad \zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{22} \alpha_{22} + \zeta_{23} \alpha_{23} \equiv 0, \\ \zeta_{21} \zeta_{22} \zeta_{23} = 1.$$

On voit donc que les trois  $s$  représentent les longueurs des côtés du triangle formé par les trois axes du corps. Ce triangle n'est autre que la face I, II, III de l'octaèdre (figure 62, 1). On voit sur cette figure que j'ai donné à chaque longueur  $s$  les mêmes indices que ceux des cosinus directeurs  $l$ ,  $m$ ,  $n$  dont je me suis servi au No. 37. On se rappelle que l'ordre de ces indices est indifférent.

Si l'angle tétraèdre III était remplacé par un quadrilatère plan (figure 62, 2), l'angle  $\alpha_{23}$  serait égal soit à 0 soit à  $\pi$ , et les deux longueurs  $s_{31}$ ,  $s_{32}$  seraient infinies. Soient

$$\alpha_{23} \equiv \lim_{s_{31} \rightarrow \infty} \epsilon \left[ \frac{r_{23}}{s_{31}} - (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \pi \right], \quad \epsilon^2 = 1,$$

$r_{23}$  étant une nouvelle constante qui reste finie lorsque  $s_{31}$  augmente

indéfiniment. En vertu de celle-ci les formules (63, 2) donnent

$$s_{32} \rightarrow \infty, \quad r_{23} \rightarrow s_{12} \sin \alpha_{22}, \quad \zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{22} \alpha_{22} \rightarrow \zeta_{23} \epsilon (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \pi.$$

Pour que  $\alpha_{21}$  et  $\alpha_{22}$  soient tous les deux compris entre 0 et  $\pi$ , il faut donc que  $\epsilon = -\zeta_{21} \zeta_{22} = -\zeta_{23}$ . Cela donne en définitive

$$(63, 3) \quad \begin{cases} \zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{22} \alpha_{22} \equiv (1 + \zeta_{23}) \frac{1}{2} \pi, \\ r_{23} = s_{12} \sin \alpha_{22} = s_{12} \sin \alpha_{21} \end{cases}$$

ce qui fait que  $r_{23}$  représente la distance perpendiculaire des deux axes I, III et II, III, ou, si l'on veut, le côté du quadrilatère plan III.

On n'a plus qu'à étendre ce raisonnement au mécanisme entier. Ceci peut se faire à vue sans qu'on soit obligé de faire de calcul auxiliaire. On trouve pour le mécanisme de la figure (62, 1)

$$(63, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{22} \alpha_{22} + \zeta_{23} \alpha_{23} \equiv 0, \quad \zeta_{42} \alpha_{42} + \zeta_{44} \alpha_{44} + \zeta_{43} \alpha_{43} \equiv 0, \\ \zeta_{34} \alpha_{34} + \zeta_{35} \alpha_{35} + \zeta_{33} \alpha_{33} \equiv 0, \quad \zeta_{15} \alpha_{15} + \zeta_{11} \alpha_{11} + \zeta_{13} \alpha_{13} \equiv 0, \\ \zeta_{31} \alpha_{31} + \zeta_{32} \alpha_{32} \equiv (1 + \zeta_{36}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{12} \alpha_{12} + \zeta_{14} \alpha_{14} \equiv (1 + \zeta_{16}) \frac{1}{2} \pi, \\ \zeta_{24} \alpha_{24} + \zeta_{25} \alpha_{25} \equiv (1 + \zeta_{26}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{45} \alpha_{45} + \zeta_{41} \alpha_{41} \equiv (1 + \zeta_{46}) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{16} \equiv (1 + \zeta_{16}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{26} \equiv (1 + \zeta_{26}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{36} \equiv (1 + \zeta_{36}) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{46} \equiv (1 + \zeta_{46}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{16} \zeta_{26} \zeta_{36} \zeta_{46} = 1, \\ \zeta_{21} \zeta_{22} \zeta_{23} = \zeta_{42} \zeta_{44} \zeta_{43} = \zeta_{34} \zeta_{35} \zeta_{33} = \zeta_{15} \zeta_{11} \zeta_{13} = \zeta_{31} \zeta_{32} \zeta_{36} \\ = \zeta_{12} \zeta_{14} \zeta_{16} = \zeta_{24} \zeta_{25} \zeta_{26} = \zeta_{45} \zeta_{41} \zeta_{46} = 1; \end{array} \right. \quad \zeta_{ij}^2 = 1,$$

$$(63, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_{23}}{\sin \alpha_{44}} = \frac{s_{34}}{\sin \alpha_{42}} = \frac{s_{24}}{\sin \alpha_{43}} = \frac{r_{16}}{\sin \alpha_{43} \sin \alpha_{12}}, \\ \frac{s_{34}}{\sin \alpha_{35}} = \frac{s_{35}}{\sin \alpha_{34}} = \frac{s_{45}}{\sin \alpha_{33}} = \frac{r_{26}}{\sin \alpha_{33} \sin \alpha_{24}}, \\ \frac{s_{35}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{s_{13}}{\sin \alpha_{15}} = \frac{s_{15}}{\sin \alpha_{13}} = \frac{r_{46}}{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{45}}, \\ \frac{s_{13}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{s_{23}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{s_{12}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{r_{36}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{31}}; \end{array} \right.$$

et pour celui de la figure (62, 2),

$$(63, 6) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{22} \alpha_{22} \equiv (1 + \zeta_{23}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{42} \alpha_{42} + \zeta_{44} \alpha_{44} \equiv (1 + \zeta_{43}) \frac{1}{2} \pi, \\ \zeta_{34} \alpha_{34} + \zeta_{35} \alpha_{35} \equiv (1 + \zeta_{33}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{15} \alpha_{15} + \zeta_{11} \alpha_{11} \equiv (1 + \zeta_{13}) \frac{1}{2} \pi, \\ \zeta_{31} \alpha_{31} + \zeta_{32} \alpha_{32} \equiv (1 + \zeta_{36}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{12} \alpha_{12} + \zeta_{14} \alpha_{14} \equiv (1 + \zeta_{16}) \frac{1}{2} \pi, \\ \zeta_{24} \alpha_{24} + \zeta_{25} \alpha_{25} \equiv (1 + \zeta_{26}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{45} \alpha_{45} + \zeta_{41} \alpha_{41} \equiv (1 + \zeta_{46}) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{23} \equiv (1 + \zeta_{23}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{43} \equiv (1 + \zeta_{43}) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{33} \equiv (1 + \zeta_{33}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{13} \equiv (1 + \zeta_{13}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{ij}^2 = 1, \\ \alpha_{36} \equiv (1 + \zeta_{36}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{16} \equiv (1 + \zeta_{16}) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{26} \equiv (1 + \zeta_{26}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{46} \equiv (1 + \zeta_{46}) \frac{1}{2} \pi, \\ \zeta_{21} \zeta_{22} \zeta_{23} = \zeta_{42} \zeta_{43} \zeta_{44} = \zeta_{33} \zeta_{34} \zeta_{35} = \zeta_{11} \zeta_{13} \zeta_{15} = \zeta_{31} \zeta_{32} \zeta_{36} \\ = \zeta_{12} \zeta_{14} \zeta_{16} = \zeta_{24} \zeta_{25} \zeta_{26} = \zeta_{41} \zeta_{45} \zeta_{46} = \zeta_{13} \zeta_{23} \zeta_{33} \zeta_{43} \\ = \zeta_{16} \zeta_{26} \zeta_{36} \zeta_{46} = 1; \end{array} \right.$$

$$(63, 7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_{13}}{\sin \alpha_{15}} = s_{15} = \frac{r_{46}}{\sin \alpha_{45}}, \\ \frac{r_{23}}{\sin \alpha_{21}} = s_{12} = \frac{r_{36}}{\sin \alpha_{31}}, \\ \frac{r_{33}}{\sin \alpha_{34}} = s_{45} = \frac{r_{26}}{\sin \alpha_{24}}, \\ \frac{r_{43}}{\sin \alpha_{42}} = s_{24} = \frac{r_{16}}{\sin \alpha_{12}}. \end{array} \right.$$

Les dièdres  $\beta$  satisfont toujours aux relations suivantes :

$$(63, 8) \left\{ \begin{array}{l} \beta_{32} + \beta_{31} \equiv (1 - \zeta_{23} \zeta_{36}) \frac{1}{2} \pi, \quad \beta_{34} + \beta_{33} \equiv (1 - \zeta_{35} \zeta_{42}) \frac{1}{2} \pi, \\ \beta_{12} + \beta_{13} \equiv (1 - \zeta_{21} \zeta_{44}) \frac{1}{2} \pi, \quad \beta_{42} + \beta_{44} \equiv (1 - \zeta_{43} \zeta_{16}) \frac{1}{2} \pi, \\ \beta_{21} + \beta_{23} \equiv (1 - \zeta_{22} \zeta_{15}) \frac{1}{2} \pi, \quad \beta_{22} + \beta_{26} \equiv (1 - \zeta_{31} \zeta_{14}) \frac{1}{2} \pi, \\ \beta_{11} + \beta_{15} \equiv (1 - \zeta_{13} \zeta_{46}) \frac{1}{2} \pi, \quad \beta_{14} + \beta_{16} \equiv (1 - \zeta_{12} \zeta_{25}) \frac{1}{2} \pi, \\ \beta_{45} + \beta_{43} \equiv (1 - \zeta_{11} \zeta_{34}) \frac{1}{2} \pi, \quad \beta_{35} + \beta_{36} \equiv (1 - \zeta_{24} \zeta_{41}) \frac{1}{2} \pi, \\ \beta_{25} + \beta_{24} \equiv (1 - \zeta_{33} \zeta_{26}) \frac{1}{2} \pi, \quad \beta_{41} + \beta_{46} \equiv (1 - \zeta_{45} \zeta_{32}) \frac{1}{2} \pi. \end{array} \right.$$

**64. Quadrilatère du coude.** On pourrait se demander dans quelles circonstances le quadrilatère articulé dont les arêtes sont les axes (I, II),

(II, IV), (IV, V), et (V, I) est constamment plan. En ce qui concerne l'octaèdre représenté par la figure (62, 1), ce problème a déjà été résolu au No. 11; il faut et il suffit que l'angle tétraèdre III soit contre-parallélogrammatique, et que  $s_{31} = s_{34}$  et  $s_{32} = s_{35}$ . En ce qui concerne l'octaèdre représenté par la figure (62, 2), il faut une nouvelle analyse.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'énoncé ait lieu est évidemment

$$\begin{vmatrix} l_{15} & l_{12} & l_{24} \\ m_{15} & m_{12} & m_{24} \\ n_{15} & n_{12} & n_{24} \end{vmatrix} = 0$$

à tout instant. Ce déterminant développé selon les règles (37, 1) donne, puisque  $\gamma_{23} \equiv (1 - \zeta_{23}) \frac{1}{2}\pi$ ,

$$\begin{aligned} (64, 1) \quad & \sin \alpha_{11} \sin \alpha_{22} \cos \alpha_{42} \sin \beta_{21} + \sin \alpha_{11} \sin \alpha_{42} \cos \alpha_{22} \sin \beta_{21} \cos \beta_{12} \\ & + \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{21} \cos \alpha_{11} \sin \beta_{12} \\ & + \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{11} \cos \alpha_{21} \sin \beta_{12} \cos \beta_{21} = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit ensuite d'identifier l'équation (64, 1) avec celle qui lie  $\beta_{12}$  à  $\beta_{21}$  au cours ordinaire de la déformation du mécanisme. Cette opération est peu commode avant qu'on n'ait déduit toutes les conditions de déformabilité du mécanisme. Je reviendrai là-dessus ultérieurement.

**65. Deux cas à résultats négatifs.** Je commence par me débarrasser des mécanismes du chapitre précédent qui ne donnent pas lieu à un octaèdre du genre de celui qu'on est en train d'étudier.

Le premier mécanisme (No. 48) ne donne rien ici. En effet, les relations du type

$$\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23} = 0$$

ne sont compatibles ni avec (63, 4) ni avec (63, 6). Il est vrai que cette difficulté ne se présenterait plus, si l'on échangeait entre eux les rôles des angles tétraèdres I et III, car on aurait alors

$$\cos \alpha_{22} \cos \alpha_{23} - \cos \alpha_{21} = 0,$$

ce qui est compatible avec (63, 6). Cependant, dans cette nouvelle disposition, il faudrait en outre que les angles  $\alpha_{43}$  et  $\alpha_{33}$  fussent droits, ce qui est impossible, parce qu'on a déjà supposé qu'ils fussent égaux respectivement à  $(1 + \zeta_{43}) \frac{1}{2}\pi$  et à  $(1 + \zeta_{33}) \frac{1}{2}\pi$ . On peut donc exclure ce cas.

Le quatrième mécanisme (No. 54) ne donne rien non plus. En effet, les relations

$$\cos^2 \alpha_{13} = \cos^2 \alpha_{33} = \cos^2 \alpha_{16} = \cos^2 \alpha_{36},$$

$$\cos^2 \alpha_{23} = \cos^2 \alpha_{43} = \cos^2 \alpha_{26} = \cos^2 \alpha_{46}$$

exigent, si la chaîne VI est un quadrilatère plan, que la chaîne III en soit un aussi. Alors, les équations

$$\alpha_{21} \equiv \alpha_{31}, \quad \zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{22} \alpha_{22} \equiv (1 + \zeta_{23}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{31} \alpha_{31} + \zeta_{32} \alpha_{32} \equiv (1 + \zeta_{36}) \frac{1}{2} \pi,$$

$$\alpha_{44} \equiv \alpha_{14}, \quad \zeta_{12} \alpha_{12} + \zeta_{14} \alpha_{14} \equiv (1 + \zeta_{16}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{42} \alpha_{42} + \zeta_{44} \alpha_{44} \equiv (1 + \zeta_{43}) \frac{1}{2} \pi,$$

donnent

$$\alpha_{22} \equiv \zeta_{36} \zeta_{23} \alpha_{32} + (1 - \zeta_{23} \zeta_{36}) \frac{1}{2} \pi,$$

$$\alpha_{42} \equiv \zeta_{16} \zeta_{43} \alpha_{12} + (1 - \zeta_{16} \zeta_{43}) \frac{1}{2} \pi,$$

ce qui fait que l'angle tétraèdre II se décompose partiellement. Cela voudrait dire que le système fondamental d'équations appartenant au groupe I, II, III est composé de trois équations toutes partiellement décomposées. On se rappelle (No. 36) qu'un tel système ne peut pas être poristique dans les hypothèses de ce problème. Le cas est donc exclu.

On pourrait espérer un résultat positif si, au lieu de partir d'un quadrilatère plan bi-isocèle à la place d'un angle tétraèdre bi-isogone, on partait d'un quadrilatère plan circonscriptible à la place d'un angle tétraèdre de même nature. Il n'en est pourtant rien. En effet, je suppose que ce soit l'angle tétraèdre II au lieu de l'angle tétraèdre VI qui soit remplacé par un quadrilatère plan. Les relations (54, 9),

$$\alpha_{12} \equiv \alpha_{15}, \quad \alpha_{22} \equiv \alpha_{25}, \quad \alpha_{32} \equiv \alpha_{35}, \quad \alpha_{42} \equiv \alpha_{45}$$

montrent que l'angle tétraèdre V sera également remplacé par un quadrilatère plan.

Soient, à la manière de (63, 6),

$$\zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{23} \alpha_{23} \equiv (1 + \zeta_{22}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{21} \zeta_{23} \zeta_{22} = 1,$$

$$\zeta_{43} \alpha_{43} + \zeta_{44} \alpha_{44} \equiv (1 + \zeta_{42}) \frac{1}{2} \pi, \quad \zeta_{43} \zeta_{44} \zeta_{42} = 1,$$

$$\zeta_{23}^2 = 1.$$

Celles-ci et les formules (54, 7) donnent

$$\alpha_{21} \equiv \alpha_{31} \equiv -\zeta_{22} \zeta_{42} \alpha_{11} + (1 + \zeta_{22} \zeta_{42}) \frac{1}{2} \pi = -\zeta_{22} \zeta_{42} \alpha_{41} + (1 + \zeta_{22} \zeta_{42}) \frac{1}{2} \pi.$$

Le cas est donc banal.

**66. Septième mécanisme. Quatre angles tétraèdres et deux quadrilatères plans tous irréductibles.** Lorsque l'angle tétraèdre VI du

deuxième mécanisme (No. 50) tend vers un quadrilatère plan de la manière indiquée par les équations (63, 4), les formules (18, 8) donnent

$$(66, 1) \quad \frac{1}{2}\omega_1 + \zeta_{16}\alpha_6 + \zeta_{36}\beta_6 + \zeta_{46}\gamma_6 \equiv 0.$$

Or, en vertu de (50, 10) et de (50, 12), ceci donne

$$(66, 2) \quad \frac{1}{2}\omega_1 - \zeta_{16}\alpha_3 - \zeta_{36}\beta_2 - \zeta_{46}\gamma_3 \equiv 0.$$

L'angle tétraèdre III est donc également remplacé par un quadrilatère plan, avec

$$(66, 3) \quad \zeta_{13} = -\zeta_{16}, \quad \zeta_{23} = -\zeta_{26}, \quad \zeta_{33} = -\zeta_{36}, \quad \zeta_{43} = -\zeta_{46},$$

dans la notation des formules (63, 6).

On se rappelle (50, 9) que tous les couples sont de la catégorie *A*. Il faut donc, en vertu de (63, 8) et de (66, 3), que

$$(66, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{13} = -\zeta_{43} = \zeta_{46} = -\zeta_{16}, \quad \zeta_{23} = -\zeta_{33} = \zeta_{36} = -\zeta_{26}, \\ \zeta_{21} = \zeta_{44}, \quad \zeta_{22} = \zeta_{15}, \quad \zeta_{11} = \zeta_{34}, \quad \zeta_{35} = \zeta_{42}, \quad \zeta_{31} = \zeta_{14}, \\ \zeta_{12} = \zeta_{25}, \quad \zeta_{24} = \zeta_{41}, \quad \zeta_{45} = \zeta_{32}. \end{array} \right.$$

Les formules (50, 13) et (63, 6) donnent alors, puisque tous les  $\alpha$  sont compris entre 0 et  $\pi$ ,

$$(66, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{i1} = \sin \alpha_{i2} = \sin \alpha_{i4} = \sin \alpha_{i5} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ \cos \alpha_{11} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{12} = -\cos \alpha_{14} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{15}, \\ \cos \alpha_{21} = -\zeta_{23} \cos \alpha_{22} = -\cos \alpha_{24} = -\zeta_{23} \cos \alpha_{25}, \\ \cos \alpha_{31} = -\zeta_{23} \cos \alpha_{32} = -\cos \alpha_{34} = -\zeta_{23} \cos \alpha_{35}, \\ \cos \alpha_{41} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{42} = -\cos \alpha_{44} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{45}. \end{array} \right.$$

Si l'on substitue dans celles-ci les valeurs des  $\alpha$  en fonction des arguments elliptiques, on obtient

$$(66, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \equiv \gamma_2 + (1 - \epsilon) \frac{1}{2}\omega_1 \equiv \gamma_4 + \omega_1, \equiv \gamma_5 + (1 - \epsilon) \frac{1}{2}\omega_1, \quad \epsilon^2 = 1, \\ \alpha_1 \equiv \alpha_2 + (1 + \zeta_{13}\epsilon) \frac{1}{2}\omega_1 \equiv \alpha_4 \equiv \alpha_5 + (1 + \zeta_{13}\epsilon) \frac{1}{2}\omega_1, \quad \zeta_{13} = \zeta_{23}. \end{array} \right.$$

Les arguments elliptiques de l'angle tétraèdre II et du quadrilatère plan III s'expriment maintenant en fonction de ceux de l'angle tétraèdre I de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\equiv \alpha_1 + (1 + \zeta_{13}\epsilon) \frac{1}{2}\omega_1, & \beta_2 &\equiv \beta_1, & \alpha_2 &\equiv \alpha_1, \\ \gamma_2 &\equiv \gamma_3 \equiv \gamma_1 + (1 - \epsilon) \frac{1}{2}\omega_1, & \beta_3 &\equiv \alpha_1 - \gamma_1 + \zeta_{13}\epsilon \frac{1}{2}\omega_1, \end{aligned}$$

ce qui fait que les équations (18, 9) s'écrivent comme suit :

$$(66, 7) \quad \frac{r_{13}}{2f' a_1 f(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1) f\gamma_1} = \frac{r_{23}}{f' a_1 f'(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1) f' \gamma_1}$$

$$= \frac{r_{33}}{2fa_1 f'(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1) f\gamma_1}$$

$$= \frac{r_{43}}{2fa_1 f(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1) f' \gamma_1}.$$

Les formules (50, 13) donnent à la limite,

$$\frac{r_{13}}{r_{16}} = \frac{r_{23}}{r_{26}} = \frac{r_{33}}{r_{36}} = \frac{r_{43}}{r_{46}}.$$

Or, pour que ce soit compatible avec (63, 7), et (66, 5), et (66, 7), il faut et il suffit que

$$(66, 8) \quad \frac{r_{13} = r_{16}}{A \sin \alpha_{11}} = \frac{r_{23} = r_{26}}{B \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{33} = r_{36}}{B \sin \alpha_{31}} = \frac{r_{43} = r_{46}}{A \sin \alpha_{41}} = \frac{s_{15} = s_{24}}{A} = \frac{s_{12} = s_{45}}{B},$$

où

$$(66, 9) \quad \frac{A}{f(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1) f' \beta_1} = \frac{B}{f'(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1) f\beta_1}.$$

Telles sont les conditions auxquelles les longueurs du mécanisme doivent satisfaire.

De tous les symboles dont les carrés sont égaux à l'unité, le seul qui subsiste dans les formules définitives est  $\zeta_{13}$ . Ainsi, les formules (66, 5) s'écrivent en définitive

$$(66, 10) \quad \begin{cases} \sin \alpha_{i1} = \sin \alpha_{i2} = \sin \alpha_{i4} = \sin \alpha_{i5} \\ -\cos \alpha_{i1} = \zeta \cos \alpha_{i2} = \cos \alpha_{i4} = \zeta \cos \alpha_{i5} \end{cases} \quad (\zeta^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4).$$

Toutes les constantes du mécanisme sont maintenant exprimées en fonction de  $m$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , et d'un facteur de proportionnalité par les formules (66, 8), (66, 9), (66, 10), et (18, 7). *Le mécanisme dépend donc de cinq constantes arbitraires.*

Lorsque  $-1 < m < 1$ , la formule (66, 9) se met sous la forme suivante, dans la notation du chapitre IV :

$$(66, 11) \quad \frac{A}{\Theta(a_1 - c_1) \text{H}(K - a_1 + c_1) \text{H}b_1 \Theta(K - b_1)}$$

$$= \frac{B}{\text{H}(a_1 - c_1) \Theta(K - a_1 + c_1) \Theta b_1 \text{H}(K - b_1)}.$$

Il est évident d'après les équations (66, 8) et (66, 9) que la fonction

$$\frac{f'(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1)} = \sqrt{2} \frac{H(a_1 - c_1) \Theta(K - a_1 + c_1)}{\Theta(a_1 - c_1) H(K - a_1 + c_1)}$$

doit avoir le même signe que celui des trois fonctions  $f'a_1/fa_1$ ,  $f'\beta_1/f\beta_1$ ,  $f'\gamma_1/f\gamma_1$  qu'on a déjà assujetties à avoir le même signe. Il faut donc que les quatre quantités  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $(a_1 - c_1)$  soient ou bien toutes dans les intervalles  $(0, K)$ ,  $(2K, 3K)$ , ou bien toutes dans les intervalles  $(K, 2K)$ ,  $(3K, 4K)$ .

Lorsque  $m > 1$ , la formule (66, 9) se met sous la forme suivante, dans la notation du chapitre IV :

$$(66, 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{\Theta(a_1 - c_1) \Theta(K - a_1 + c_1) H b_1 H(K - b_1)} \\ \\ = \frac{B}{H(a_1 - c_1) H(K - a_1 + c_1) \Theta b_1 \Theta(K - b_1)}. \end{array} \right.$$

Comme tout à l'heure, la fonction

$$\frac{f'(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 + a_1 - \gamma_1)} = \sqrt{2} \frac{H(a_1 - c_1) H(K - a_1 + c_1)}{\Theta(a_1 - c_1) \Theta(K - a_1 + c_1)}$$

doit avoir le même signe que celui des trois fonctions  $f'a_1/fa_1$ ,  $f'\beta_1/f\beta_1$ ,  $f'\gamma_1/f\gamma_1$  qu'on a déjà assujetties à avoir le même signe. Il faut donc que les quatre quantités  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $(a_1 - c_1)$  se trouvent toutes du même côté du point  $K$ .

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on doit commencer par construire l'angle tétraèdre I en se donnant  $m$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  de la façon exposée au chapitre IV. Il convient pourtant de faire attention à la condition que je viens d'imposer à la quantité  $(a_1 - c_1)$ . Les angles faciaux des angles tétraèdres II, IV, et V seront alors donnés par les formules (66, 10). On n'a plus qu'à calculer les nombres  $A$  et  $B$  au moyen soit de la formule (66, 11) soit de la formule (66, 12), après quoi toutes les longueurs du mécanisme seront données par les formules (66, 8).

Pour trouver les cas, s'il y en a, où le *quadrilatère du coude* serait constamment plan, on procède de la manière suivante.

Les deux dièdres  $\beta_{12}$  et  $\beta_{21}$  sont liés par une équation qui se déduit de la troisième des équations (39, 1) et qui s'écrit à la limite comme suit :

$$(66, 13) \quad \nu_3' p'_{23} t_{12}^2 t_{21}^2 + \mu_3' p'_{43} t_{12}^2 + \lambda_3' p'_{13} t_{21}^2 - \sigma_3' p'_{33} + 2\zeta_{13} r_{13} r_{43} t_{12} t_{21} = 0,$$

les coefficients étant ceux définis par les formules (12, 5).

D'autre part, on a vu au No. 64 que les deux dièdres en question doivent satisfaire à l'équation (64, 1), si l'on veut que le quadrilatère du coude soit plan. Cette équation se met dans le cas présent sous la forme suivante :

$$(66, 14) \quad \cot a_{11}(1+t_{21}^2)t_{12} + \cot a_{21}(t_{12}-\zeta_{13}t_{21})(1+\zeta_{13}t_{12}t_{21}) \\ - \cos a_{41}(1+t_{12}^2)t_{21} = 0.$$

Pour que le quadrilatère du coude fût constamment plan, il faudrait que les deux équations (66, 13) et (66, 14) fussent identiques sans se décomposer, parce que (66, 13) est supposée irréductible. Ceci est impossible parce que les coefficients de l'une sont justement ceux qui manquent à l'autre. *Il n'existe donc pas de cas du mécanisme actuel où le quadrilatère du coude soit constamment plan.*

**67. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Le mécanisme que je viens de décrire est un octaèdre à deux sommets impropres. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. Les quatre angles tétraèdres ont leurs angles faciaux correspondants soit égaux soit supplémentaires, les angles faciaux correspondants étant ceux qui ont le même premier indice sur la figure (62, 2).
2. Les deux quadrilatères plans ont leurs côtés correspondants égaux, les côtés correspondants étant ceux qui ont le même premier indice sur la figure (62, 2).
3. Le quadrilatère gauche du coude a ses côtés opposés égaux.
4. Aucune relation ne lie ni les constantes du même angle tétraèdre ni celles du même quadrilatère plan.
5. Les quatre angles tétraèdres et les deux quadrilatères plans ont tous le même invariant.
6. La déformation de l'octaèdre est de *genre un*.
7. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *cinq*.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme, je prends pour l'angle tétraèdre I celui du No. 35. On aura, moyennant les formules (66, 5),

$$(67, 1) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{12} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{15} = 0,720562 \\ \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{25} = 0,967784 + \\ \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{32} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{35} = 0,552146 + \\ \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{42} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{45} = 0,448415 + \\ \cos \alpha_{11} = \zeta \cos \alpha_{12} = -\cos \alpha_{14} = \zeta \cos \alpha_{15} = -0,693390 + \\ \cos \alpha_{21} = \zeta \cos \alpha_{22} = -\cos \alpha_{24} = \zeta \cos \alpha_{25} = -0,251780 \\ \cos \alpha_{31} = \zeta \cos \alpha_{32} = -\cos \alpha_{34} = \zeta \cos \alpha_{35} = -0,833747 \\ \cos \alpha_{41} = \zeta \cos \alpha_{42} = -\cos \alpha_{44} = \zeta \cos \alpha_{45} = -0,893825 + \end{array} \right.$$

Je laisse indéterminé le symbole  $\zeta$  dont le carré est égal à l'unité. On a vu que sa détermination est arbitraire.

Les formules (66, 11) donnent les valeurs proportionnelles des longueurs du mécanisme quand on y substitue les valeurs des fonctions Eta et Thêta données par (35, 3). On trouve ainsi

$$(67, 2) \quad \frac{r_{13} = r_{16}}{499013} = \frac{r_{23} = r_{26}}{434670} = \frac{r_{33} = r_{36}}{247990 +} = \frac{r_{43} = r_{46}}{310542} \\ = \frac{s_{15} = s_{24}}{692532 +} = \frac{s_{12} = s_{45}}{449139}.$$

**68. Huitième mécanisme. Deux angles tétraèdres irréductibles à plans diagonaux perpendiculaires, deux angles tétraèdres bi-isogones, et deux quadrilatères plans bi-isosceles.** Ce mécanisme découle du cas de déformabilité du système sphérique de Kempe donné par le No. 52. Cependant, afin d'avoir un octaèdre plus maniable, je remplace les hypothèses (43, 1) et (43, 10) par (43, 14) et (43, 15). La notation est toujours celle des figures (62, 1) et (62, 2).

Soient

$$(68, 1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} + \alpha_{21} \equiv \pi, \quad \alpha_{13} = \alpha_{23}, \quad \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{32} \cos \alpha_{42} = 0, \\ \alpha_{31} + \alpha_{41} \equiv \pi, \quad \alpha_{33} \equiv \alpha_{43}, \quad \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} = 0, \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{32}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{21}}{\operatorname{tg} \alpha_{31}}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_{22}}{\operatorname{tg} \alpha_{42}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{23}}{\operatorname{tg} \alpha_{43}}. \end{array} \right.$$

L'élimination de  $\alpha_{22}$  entre les deux équations

$$\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22} = 0, \quad \zeta_{21} \alpha_{21} + \zeta_{22} \alpha_{22} + \zeta_{23} \alpha_{23} \equiv 0,$$

donne  $\sin a_{23} \sin a_{21} = 0$ ,

ce qui fait que l'angle tétraèdre III est remplacé par un quadrilatère plan. Cette relation fait voir également que ce ne pourrait pas être l'angle tétraèdre irréductible à plans diagonaux perpendiculaires qui joue le rôle de celui qui est remplacé par un quadrilatère plan. De plus, on y voit la raison pour laquelle le cas actuel *ne se présente pas dans la théorie des octaèdres à sommets tous propres*, dont M. Bricard a fait l'étude complète.

On se trouve ramené par là au mécanisme de la figure (62, 2) et des formules (63, 6). Soient, à la place des formules (68, 1),

$$(68, 2) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} + a_{21} \equiv \pi, \quad a_{14} + a_{24} \equiv \pi, \quad r_{13} = r_{23}, \quad r_{16} = r_{26}, \\ a_{31} + a_{41} \equiv \pi, \quad a_{34} + a_{44} \equiv \pi, \quad r_{33} = r_{43}, \quad r_{36} = r_{46}, \\ \cos a_{12} \cos a_{22} - \cos a_{32} \cos a_{42} = 0, \\ \cos a_{15} \cos a_{25} - \cos a_{35} \cos a_{45} = 0, \\ \frac{\operatorname{tg} a_{22}}{\operatorname{tg} a_{32}} = \frac{\operatorname{tg} a_{21}}{\operatorname{tg} a_{31}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{42}}{\operatorname{tg} a_{12}} = \frac{\operatorname{tg} a_{44}}{\operatorname{tg} a_{14}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{34}}{\operatorname{tg} a_{24}} = \frac{\operatorname{tg} a_{35}}{\operatorname{tg} a_{25}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{15}}{\operatorname{tg} a_{45}} = \frac{\operatorname{tg} a_{11}}{\operatorname{tg} a_{41}}, \\ \frac{\operatorname{tg} a_{22}}{\operatorname{tg} a_{42}} = \frac{\zeta_{23} r_{23}}{\zeta_{43} r_{43}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{32}}{\operatorname{tg} a_{12}} = \frac{\zeta_{36} r_{36}}{\zeta_{16} r_{16}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{25}}{\operatorname{tg} a_{45}} = \frac{\zeta_{26} r_{26}}{\zeta_{46} r_{46}}, \quad \frac{\operatorname{tg} a_{35}}{\operatorname{tg} a_{15}} = \frac{\zeta_{33} r_{33}}{\zeta_{13} r_{13}} \end{array} \right.$$

Les formules de l'avant dernière ligne de (68, 2) deviennent, en vertu de (63, 6),

$$(68, 3) \quad \zeta_{23} = \zeta_{36}, \quad \zeta_{43} = \zeta_{16}, \quad \zeta_{33} = \zeta_{26}, \quad \zeta_{13} = \zeta_{46},$$

ce qui est parfaitement compatible avec (43, 15) et (63, 8).

Les équations

$$\cos a_{13} = \cos a_{23} = -\zeta_{13} = -\zeta_{23}, \quad \cos a_{33} = \cos a_{43} = -\zeta_{33} = -\zeta_{43},$$

$$\cos a_{16} = \cos a_{26} = -\zeta_{16} = -\zeta_{26}, \quad \cos a_{36} = \cos a_{46} = -\zeta_{36} = -\zeta_{46}$$

donnent, moyennant (68, 3),

$$(68, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{13} = \zeta_{23} = \zeta_{46} = \zeta_{36}, \quad \zeta_{33} = \zeta_{43} = \zeta_{26} = \zeta_{16}, \\ \zeta_{11} = \zeta_{21} = \zeta_{34} = \zeta_{44}, \quad \zeta_{31} = \zeta_{41} = \zeta_{14} = \zeta_{24}, \end{array} \right.$$

et l'on sait d'après des relations analogues à (43, 15) et d'après (63, 8) que

$$\zeta_{22} = \zeta_{15}, \quad \zeta_{32} = \zeta_{45}, \quad \zeta_{42} = \zeta_{35}, \quad \zeta_{12} = \zeta_{25}.$$

Telles sont les relations auxquelles les  $\zeta$  du mécanisme doivent satisfaire.

Tous les  $\alpha$  s'expriment maintenant en fonction de ceux de l'angle tétraèdre II de la manière suivante :

$$(68, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22}, \\ \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{12}, \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{42}, \\ \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{32}, \\ \cos \alpha_{15} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{11} = \zeta_{13} \cos \alpha_{21} = -\cos \alpha_{22}, \\ \cos \alpha_{25} = -\zeta_{16} \cos \alpha_{24} = \zeta_{16} \cos \alpha_{14} = -\cos \alpha_{12}, \\ \cos \alpha_{35} = -\zeta_{16} \cos \alpha_{34} = \zeta_{16} \cos \alpha_{44} = -\cos \alpha_{42}, \\ \cos \alpha_{45} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{41} = \zeta_{13} \cos \alpha_{31} = -\cos \alpha_{32}. \end{array} \right.$$

Les longueurs du mécanisme doivent satisfaire à (63, 7) et aux équations de la dernière ligne de (68, 2). En vertu de (68, 4) et de (68, 5) toutes ces équations se réduisent aux suivantes :

$$(68, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_{13} = r_{23}}{\sin \alpha_{22} \cos \alpha_{42}} = \frac{r_{33} = r_{43}}{\zeta_{13} \zeta_{16} \sin \alpha_{42} \cos \alpha_{22}} = \frac{r_{16} = r_{26}}{\zeta_{13} \zeta_{16} \sin \alpha_{12} \cos \alpha_{22}} \\ = \frac{r_{36} = r_{46}}{\sin \alpha_{32} \cos \alpha_{42}} = \frac{s_{12} = s_{15}}{\cos \alpha_{42}} = \frac{s_{24} = s_{45}}{\zeta_{16} \zeta_{13} \cos \alpha_{22}}. \end{array} \right.$$

Pour que toutes les longueurs soient positives, il faut évidemment que  $\zeta_{13}$  et  $\zeta_{16}$  soient déterminés de façon que

$$(68, 7) \quad \zeta_{13} \zeta_{16} \cos \alpha_{12} \cos \alpha_{32} > 0.$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on n'a qu'à se donner quatre arguments  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{32}$ ,  $\alpha_{42}$  compris entre 0 et  $\pi$ , et tels que

$$\cos \alpha_{12} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{32} \cos \alpha_{42} = 0.$$

On doit se donner ensuite deux quantités  $\zeta_{13}$  et  $\zeta_{16}$  dont les carrés soient égaux à l'unité et qui satisfassent à la relation (68, 7). Tous les angles faciaux des quatre angles tétraèdres seront alors donnés par les formules (68, 5); après quoi, les longueurs du mécanisme seront données à un facteur de proportionnalité près par les formules (68, 6). *Le mécanisme dépend ainsi de quatre constantes arbitraires.*

Je vais démontrer maintenant que le *quadrilatère du coude* est constamment plan. En effet, l'équation (64, 1) s'écrit dans les conditions actuelles sous la forme suivante :

$$(68, 8) \quad (\cot \alpha_{42} - \cot \alpha_{22}) t_{12}^2 + 2\zeta_{13} \cot \alpha_{22} t_{12} t_{21} + (\cot \alpha_{42} + \cot \alpha_{22}) = 0.$$

D'autre part, la dernière des équations (43, 14) s'écrit à la limite, grâce à (63, 8) et à (68, 4), comme suit :

$$(\zeta_{16} r_{13} - \zeta_{13} r_{33}) t_{12}^2 + 2r_{33} t_{12} t_{21} + (\zeta_{13} r_{33} + \zeta_{16} r_{13}) = 0.$$

En vertu de la relation

$$\frac{\zeta_{16} r_{13}}{\cot \alpha_{42}} = \frac{\zeta_{13} r_{33}}{\cot \alpha_{22}},$$

qui fait partie du système (68, 2), les deux équations que je viens d'écrire sont identiques. *Le quadrilatère du coude est donc constamment plan.*

**69. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** L'octaèdre que je viens de décrire est composé de deux angles tétraèdres irréductibles à plans diagonaux perpendiculaires, n'ayant aucun axe en commun, de deux angles tétraèdres bi-isogones à angles supplémentaires, et de deux quadrilatères plans bi-isocèles. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. Les angles faciaux des deux angles tétraèdres irréductibles sont supplémentaires un à un.
2. Le quadrilatère du coude est bi-isocèle et constamment plan.
3. La déformation est de *genre un*.
4. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *quatre*.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne les quantités suivantes, comme il a été expliqué plus haut. Soient

$$\cos \alpha_{12} = \frac{1}{4}, \quad \cos \alpha_{22} = \frac{1}{3}, \quad \cos \alpha_{32} = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha_{42} = \frac{1}{6}, \quad \zeta_{13} = \zeta_{16}.$$

Cela me donne

$$\sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22} = \frac{2}{3} \sqrt{2} = 0,942809$$

$$\cos \alpha_{15} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{11} = \zeta_{13} \cos \alpha_{21} = -\cos \alpha_{22} = -\frac{1}{3} = -0,333333 +$$

$$\sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{12} = \frac{1}{4} \sqrt{15} = 0,968246$$

$$\cos \alpha_{25} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{24} = \zeta_{13} \cos \alpha_{14} = -\cos \alpha_{12} = -\frac{1}{4} = -0,250000$$

$$\sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{42} = \frac{1}{6} \sqrt{35} = 0,986013 +$$

$$\cos \alpha_{35} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{34} = \zeta_{13} \cos \alpha_{44} = -\cos \alpha_{42} = -\frac{1}{6} = -0,166666 +$$

$$\sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{32} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0,866025 +$$

$$\cos \alpha_{45} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{41} = \zeta_{13} \cos \alpha_{31} = -\cos \alpha_{32} = -\frac{1}{2} = -0,500000$$

$$\frac{r_{13} = r_{23}}{157135} = \frac{r_{33} = r_{43}}{328671} = \frac{r_{16} = r_{26}}{322748 +} = \frac{r_{36} = r_{46}}{144337 +} = \frac{s_{12} = s_{15}}{166666 +} = \frac{s_{24} = s_{45}}{333333 +}.$$

Je laisse indéterminé le symbole  $\zeta_{13}$ .

**70. Neuvième mécanisme. Deux angles tétraédres et deux quadrilatères plans, tous irréductibles, et deux angles tétraédres totalement décomposés.** Les prochains octaédres à considérer sont ceux qui découlent de l'analyse des Nos. 56 et 57. Pour le cas actuel c'est celle du No. 57 qui a l'avantage de donner l'octaèdre le plus maniable. On se rappelle que j'ai renuméroté les angles faciaux des angles tétraédres V et VI aux Nos. 56 et 57. Aux figures (70, 1) et (70, 2) on voit ce nouveau numérotage sur les octaédres à un et à deux sommets impropres. Je ne pense pas qu'il y ait besoin que je récrive les formules du No. 63; elles se modifient facilement à vue. Il y a pourtant lieu de se rappeler que les  $\zeta$  du No. 63 sont affectés des indices des  $\gamma$  de la figure (56, 1) et que ceux-ci ne correspondent plus à ceux des  $\alpha$  qui leur sont opposés dans leurs corps.

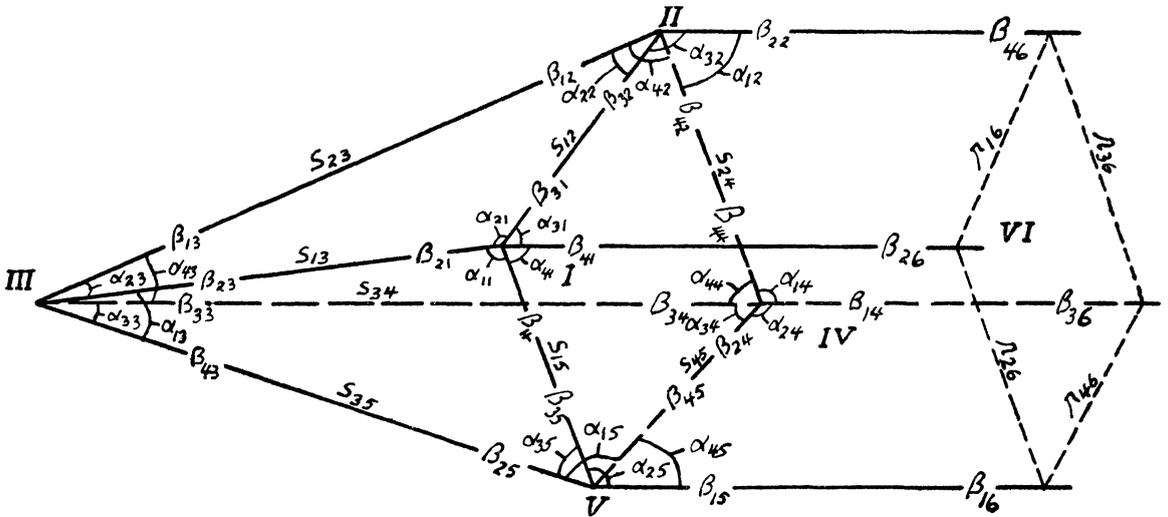


Fig. 70, 1.

Ainsi les valeurs limites des angles faciaux de l'angle tétraèdre VI sont données par

$$\cos \alpha_{16} = -\zeta_{36}, \quad \cos \alpha_{26} = -\zeta_{46}, \quad \cos \alpha_{36} = -\zeta_{16}, \quad \cos \alpha_{46} = -\zeta_{26},$$

ce qui fait que

$$(70, 1) \quad \frac{1}{2}\omega_1 + \zeta_{36} \alpha_6 + \zeta_{16} \beta_6 + \zeta_{26} \gamma_6 \equiv 0.$$

Mais en vertu de (57, 2) et de (57, 10), ceci donne

$$\frac{1}{2}\omega_1 + \epsilon'_1 \zeta_{36} \alpha_3 + \epsilon'_1 \zeta_{16} \beta_3 + \epsilon'_1 \zeta_{26} \gamma_3 \equiv 0.$$

L'angle tétraèdre III est donc remplacé par un quadrilatère plan, avec

$$(70, 2) \quad \zeta_{16} = \epsilon'_1 \zeta_{23}, \quad \zeta_{26} = \epsilon'_1 \zeta_{43}, \quad \zeta_{36} = \epsilon'_1 \zeta_{13}, \quad \zeta_{46} = \epsilon'_1 \zeta_{23},$$

parce qu'on a forcément

$$(70, 3) \quad \frac{1}{2}\omega_1 + \zeta_{13}\alpha_3 + \zeta_{33}\beta_3 + \zeta_{43}\gamma_3 \equiv 0.$$

L'octaèdre a ainsi deux sommets impropres.

En vertu de (57, 1), de (63, 8), et de (70, 2) les  $\zeta$  du mécanisme satisfont à

$$(70, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{43} = -\epsilon_1' \zeta_{33} = \epsilon_1' \zeta_{26} = -\zeta_{16}, \quad \zeta_{46} = -\epsilon_1' \zeta_{36} = \epsilon_1' \zeta_{23} = -\zeta_{13}, \\ \zeta_{21} = \zeta_{44}, \quad \zeta_{11} = \zeta_{34}, \quad \zeta_{41} = \zeta_{24}, \quad \zeta_{31} = \zeta_{14}. \end{array} \right.$$

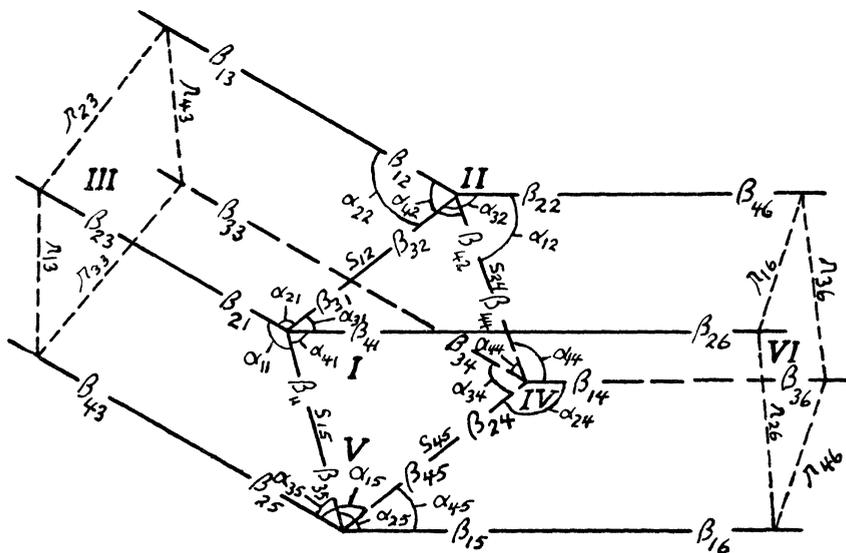


Fig. 70, 2.

Les formules (57, 11) et celles qui sont analogues à (63, 6) donnent maintenant

$$(70, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{12}, \\ \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22}, \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{32}, \\ \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{42}, \\ \cos \alpha_{15} = \epsilon_1' \zeta_{16} \cos \alpha_{14} = -\epsilon_1' \zeta_{16} \cos \alpha_{34} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{12}, \\ \cos \alpha_{25} = \zeta_{13} \cos \alpha_{41} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{21} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{22}, \\ \cos \alpha_{35} = \zeta_{13} \cos \alpha_{31} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{11} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{32}, \\ \cos \alpha_{45} = \epsilon_1' \zeta_{16} \cos \alpha_{24} = -\epsilon_1' \zeta_{16} \cos \alpha_{44} = -\epsilon_1' \cos \alpha_{42}. \end{array} \right.$$

Les arguments constants du quadrilatère plan III s'expriment maintenant en fonction de ceux de l'angle tétraèdre II au moyen des formules (57, 2) et (70, 3) de la façon suivante :

$$(70, 6) \quad \beta_3 \equiv \alpha_2, \quad \gamma_3 \equiv \gamma_2, \quad \alpha_3 \equiv \zeta_{13} [\zeta_{16} \gamma_2 - \epsilon_1' \zeta_{16} \alpha_2 - \frac{1}{2} \omega_1],$$

ce qui fait que

$$f\alpha_3 = -\zeta_{13} f[\frac{1}{2} \omega_1 - (\epsilon_1' \alpha_2 - \gamma_2)], \quad f'a_3 = -\zeta_{16} f'[\frac{1}{2} \omega_1 - (\epsilon_1' \alpha_2 - \gamma_2)].$$

Les équations analogues à (63, 7) se réduisent, en vertu de (70, 5), à

$$s_{12} = \frac{r_{23}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{r_{16}}{\sin \alpha_{32}}, \quad s_{24} = \frac{r_{43}}{\sin \alpha_{42}} = \frac{r_{36}}{\sin \alpha_{12}},$$

$$s_{45} = \frac{r_{33}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{r_{46}}{\sin \alpha_{42}}, \quad s_{15} = \frac{r_{13}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{r_{26}}{\sin \alpha_{22}}.$$

Mais, d'après les équations (57, 11), on a

$$\frac{r_{16}}{r_{13}} = \frac{r_{26}}{r_{23}} = \frac{r_{36}}{r_{33}} = \frac{r_{46}}{r_{43}},$$

ce qui fait que

$$s_{12} = s_{15} = \frac{r_{23} = r_{26}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{r_{13} = r_{16}}{\sin \alpha_{32}}, \quad s_{24} = s_{45} = \frac{r_{33} = r_{36}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{r_{43} = r_{46}}{\sin \alpha_{42}}.$$

Enfin, les équations (18, 9) permettent d'écrire celles-ci sous la forme suivante :

$$(70, 7) \quad \frac{r_{13} = r_{16}}{A \sin \alpha_{32}} = \frac{r_{23} = r_{26}}{A \sin \alpha_{22}} = \frac{r_{33} = r_{36}}{B \sin \alpha_{12}} = \frac{r_{43} = r_{46}}{B \sin \alpha_{42}} = \frac{s_{12} = s_{15}}{A} = \frac{s_{24} = s_{45}}{B},$$

où

$$(70, 8) \quad \frac{A}{\zeta_{13} \zeta_{16} f' [\frac{1}{2} \omega_1 - (\epsilon_1' \alpha_2 - \gamma_2)] f \beta_2} = \frac{B}{f [\frac{1}{2} \omega_1 - (\epsilon_1' \alpha_2 - \gamma_2)] f' \beta_2}.$$

Les formules (57, 9) sont remplacées par (70, 5). On se rend compte facilement que les deux systèmes sont compatibles.

Quand  $-1 < m < 1$ , la formule (70, 8) s'écrit dans la notation du chapitre IV de la manière suivante :

$$(70, 9) \quad \frac{A}{\zeta_{13} \zeta_{16} \text{H}(c_2 - \epsilon_1' a_2) \Theta(K - c_2 + \epsilon_1' a_2) \Theta b_2 \text{H}(K - b_2)}$$

$$= \frac{B}{\Theta(c_2 - \epsilon_1' a_2) \text{H}(K - c_2 + \epsilon_1' a_2) \text{H} b_2 \Theta(K - b_2)}.$$

Les formules (70, 7) font voir que la fonction

$$\zeta_{13} \zeta_{16} \frac{f'[\frac{1}{2}\omega_1 - (\epsilon_1' a_2 - \gamma_2)]}{f[\frac{1}{2}\omega_1 - (\epsilon_1' a_2 - \gamma_2)]} = \zeta_{13} \zeta_{16} \sqrt{2} \frac{H(c_2 - \epsilon_1' a_2) \Theta(K - c_2 + \epsilon_1' a_2)}{\Theta(c_2 - \epsilon_1' a_2) H(K - c_2 + \epsilon_1' a_2)}$$

doit avoir le même signe que celui des trois fonctions  $f' a_2 / f a_2$ ,  $f' \beta_2 / f \beta_2$ ,  $f' \gamma_2 / f \gamma_2$  qu'on a déjà assujéties à avoir toutes les trois le même signe. Ceci veut dire que si  $\zeta_{13} = \zeta_{16}$ , la quantité  $(c_2 - \epsilon_1' a_2)$  doit se trouver dans les mêmes intervalles que  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ , et que si  $\zeta_{13} = -\zeta_{16}$ , elle doit se trouver dans les intervalles contraires.

Quand  $m > 1$ , la formule (70, 8) s'écrit dans la notation du chapitre IV de la manière suivante :

$$(70, 10) \quad \frac{A}{\zeta_{13} \zeta_{16} H(c_2 - \epsilon_1' a_2) H(K - c_2 + \epsilon_1' a_2) \Theta b_2 \Theta(K - b_2)} \\ = \frac{B}{\Theta(c_2 - \epsilon_1' a_2) \Theta(K - c_2 + \epsilon_1' a_2) H b_2 H(K - b_2)}.$$

Comme tout à l'heure, la fonction

$$\zeta_{13} \zeta_{16} \frac{f'[\frac{1}{2}\omega_1 - (\epsilon_1' a_2 - \gamma_2)]}{f[\frac{1}{2}\omega_1 - (\epsilon_1' a_2 - \gamma_2)]} = \zeta_{13} \zeta_{16} \sqrt{2} \frac{H(c_2 - \epsilon_1' a_2) H(K - c_2 + \epsilon_1' a_2)}{\Theta(c_2 - \epsilon_1' a_2) \Theta(K - c_2 + \epsilon_1' a_2)}$$

doit avoir le même signe que celui des trois fonctions  $f' a_2 / f a_2$ ,  $f' \beta_2 / f \beta_2$ ,  $f' \gamma_2 / f \gamma_2$ , qu'on a déjà assujéties à avoir le même signe. Ceci veut dire que si  $\zeta_{13} = \zeta_{16}$ , la quantité  $(c_2 - \epsilon_1' a_2)$  doit se trouver du même côté du point  $K$  que  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ , et que si  $\zeta_{13} = -\zeta_{16}$ , elle doit se trouver du côté opposé.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on commence par se donner  $m$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ , et l'on procède à la construction de l'angle tétraèdre II de la manière exposée au chapitre IV. On se donne ensuite les deux symboles  $\zeta_{13}$  et  $\zeta_{16}$  dont les carrés sont égaux à l'unité, et qui satisfont à la condition que je viens d'imposer relativement à la valeur de  $(c_2 - \epsilon_1' a_2)$ , (où le signe de  $\epsilon_1'$  est arbitraire). Les valeurs des angles faciaux des autres angles tétraèdres seront alors données par les formules (70, 5). Pour avoir les longueurs il faut d'abord calculer la valeur du rapport  $A : B$  au moyen soit de (70, 8) soit de (70, 9), après quoi les valeurs des longueurs seront données à un facteur de proportionnalité près par les formules (70, 7). Comme ce facteur reste arbitraire, *le mécanisme dépend de cinq constantes arbitraires.*

*Le quadrilatère du coude ne peut pas être constamment plan.* En effet, le quadrilatère plan III étant supposé irréductible, les variables  $t_{12}$  et  $t_{21}$

sont liées par une équation doublement quadratique, dans laquelle ne figurent que les puissances paires. D'autre part  $t_{12}$  et  $t_{21}$  ne figurent à l'équation (64, 1) que par les puissances impaires. Il est donc impossible que ces deux équations soient identiques.

**71. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Cet octaèdre à deux sommets impropres est composé de deux angles tétraèdres irréductibles, n'ayant aucun axe en commun, de deux angles tétraèdres totalement décomposés et de deux quadrilatères plans irréductibles. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. Les angles faciaux correspondants des deux angles tétraèdres irréductibles sont ou bien égaux ou bien supplémentaires, les angles faciaux correspondants étant ceux des angles tétraèdres II et V de la figure (70, 2) qui ont le même premier indice sur cette figure.
2. Les côtés correspondants des deux quadrilatères plans sont égaux, les côtés correspondants étant ceux des quadrilatères plans III et VI de la figure (70, 2) qui sont affectés du même premier indice sur cette figure.
3. Aucune relation ne lie ni les constantes du même angle tétraèdre irréductible, ni celles du même quadrilatère plan.
4. Le quadrilatère gauche du coude est bi-isocèle, les axes appartenant au même angle tétraèdre totalement décomposé étant égaux.
5. Les deux angles tétraèdres irréductibles et les deux quadrilatères plans ont tous le même invariant.
6. La déformation du mécanisme est de *genre un*.
7. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *cinq*.
8. Au cours de la déformation du mécanisme chacun des deux angles tétraèdres totalement décomposés conserve sa déformation initiale.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme je prends pour l'angle tétraèdre II celui du No. 35. Puisqu'alors

$$c_2 - a_2 \equiv 3K + \frac{7}{9} \frac{2}{0} K, \quad c_2 + a_2 \equiv K + \frac{2}{9} \frac{2}{0} K,$$

il est évident, d'après la remarque qui suit la formule (70, 9), qu'on doit poser  $\zeta_{13} = -\zeta_{16}$  quel que soit le signe de  $\epsilon_1'$ . Je pose  $\epsilon_1' = -1$ .

Les formules (70, 5) donnent alors

$$\sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{12} = 0,720562$$

$$\cos \alpha_{15} = \zeta \cos \alpha_{14} = -\zeta \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{12} = -0,693390 +$$

$$\sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22} = 0,967784 +$$

$$\cos \alpha_{25} = \zeta \cos \alpha_{41} = -\zeta \cos \alpha_{21} = \cos \alpha_{22} = -0,251780$$

$$\sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{32} = 0,552146 +$$

$$\cos \alpha_{35} = \zeta \cos \alpha_{31} = -\zeta \cos \alpha_{11} = \cos \alpha_{32} = -0,833747$$

$$\sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{42} = 0,448415 +$$

$$\cos \alpha_{45} = \zeta \cos \alpha_{24} = -\zeta \cos \alpha_{44} = \cos \alpha_{42} = -0,893825 +$$

Je laisse indéterminé le symbole  $\zeta$  dont le carré est égal à l'unité et dont la détermination est arbitraire.

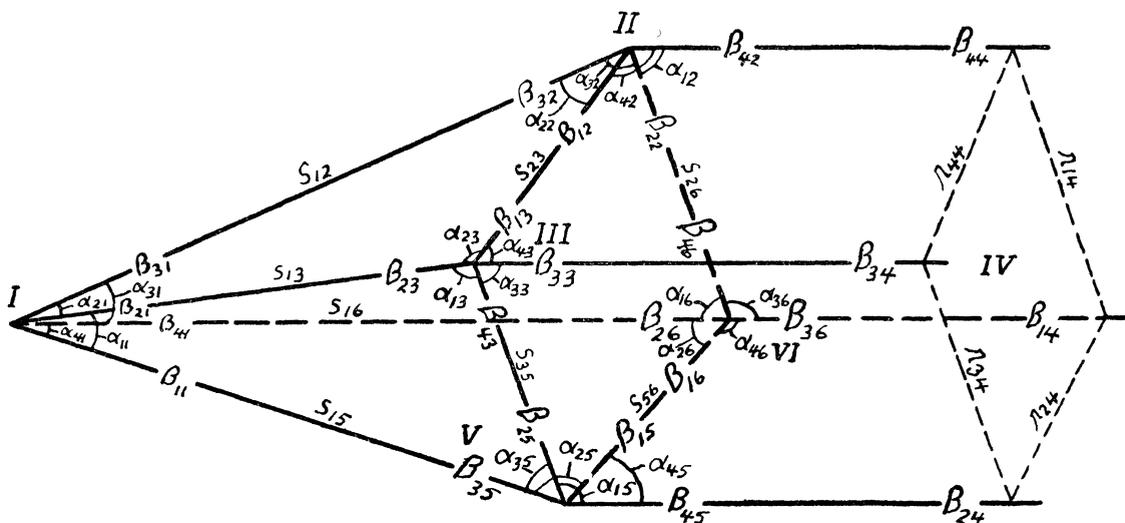


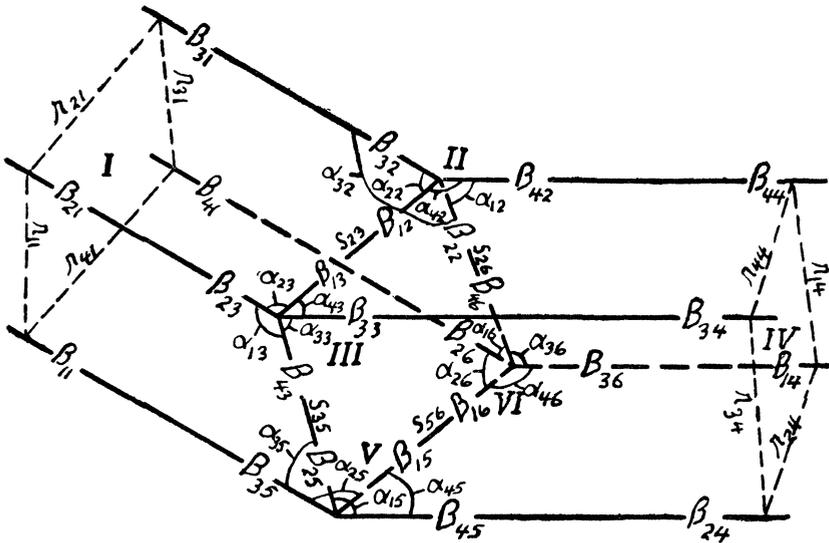
Fig. 72, 1.

Quand on introduit dans les formules (70, 8) les valeurs des fonctions Eta et Thêta données par les formules (35, 3), on obtient pour les longueurs du mécanisme les valeurs suivantes

$$\frac{r_{13} = r_{16}}{352796} = \frac{r_{23} = r_{26}}{618369+} = \frac{r_{33} = r_{36}}{314880+} = \frac{r_{43} = r_{46}}{195954+} = \frac{s_{12} = s_{15}}{638954} = \frac{s_{24} = s_{45}}{436993}.$$

**72. Dixième mécanisme. Deux parallélogrammes n'ayant aucun axe en commun, et quatre angles tétraèdres irréductibles.** Comme le mécanisme précédent, celui-ci découle de l'analyse des Nos. 56 et 57. Au

lieu de faire tendre des angles tétraèdres irréductibles vers des quadrilatères plans, je vais commencer cette fois par faire tendre un angle tétraèdre totalement décomposé vers un quadrilatère plan. La notation est encore celle de la figure (56, 1). On se rappelle que les indices des dièdres  $\gamma$  (et par conséquent ceux des  $\zeta$  dans les cas des octaèdres) ne correspondent plus toujours à ceux des angles faciaux  $\alpha$  qui leur sont opposés dans leurs corps. La nouvelle disposition des octaèdres est indiquée schématiquement aux figures (72, 1) et (72, 2).



Fig, 72, 2.

J'adopte l'analyse du No. 56, et je fais tendre l'angle tétraèdre IV vers un quadrilatère plan. On aura

$$(72, 1) \left\{ \begin{array}{l} r_{34} = r_{14}, \quad r_{44} = r_{24}, \quad \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{14} = -\zeta_{34} = -\zeta_{14}, \\ \cos \alpha_{44} = \cos \alpha_{24} = -\zeta_{44} = -\zeta_{24}, \quad \cos \alpha_{43} = -\zeta_{44} \cos \alpha_{42}, \\ \cos \alpha_{12} = -\zeta_{14} \cos \alpha_{36}, \quad \cos \alpha_{46} = -\zeta_{24} \cos \alpha_{45}, \\ \cos \alpha_{15} = -\zeta_{34} \cos \alpha_{33}. \end{array} \right.$$

Ceci donne, en vertu de (18, 7), de (56, 3), de (56, 13), et de (56, 18),

$$(72, 2) \left\{ \begin{array}{l} \{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) + \zeta_{44}f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)\}\{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3)f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) \\ \quad - \zeta_{44}f(a_2 + \gamma_2)f(a_2 - \gamma_2)\} = 0, \\ \{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) + \epsilon_1 \zeta_{34}f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)\}\{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3)f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) \\ \quad - \epsilon_1 \zeta_{34}f(a_2 + \gamma_2)f(a_2 - \gamma_2)\} = 0. \end{array} \right.$$

D'autre part, la considération de  $\delta_4$  donne

$$\delta_4 = \frac{\sin a_{14} - \epsilon_1 \sin a_{21}}{\sin(a_{14} - a_{24})} \rightarrow \frac{r_{14} - \epsilon_1 r_{24}}{\zeta_{14} r_{24} - \zeta_{24} r_{14}} = \frac{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}.$$

Je suppose d'abord que c'est le premier facteur de la première des équations (72, 2) qui s'annule. Cela donne

$$(72, 3) \quad \delta_4 = -\zeta_{44}, \quad \epsilon_1 - \zeta_{14} \zeta_{24} = 0, \quad f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) + \zeta_{24} f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) = 0,$$

et en conséquence, le premier facteur de la seconde des équations (72, 2) s'annule également.

Si c'est le second facteur de la première des équations (72, 2) qui s'annule, il faut évidemment que ce soit aussi le second facteur de la deuxième équation qui s'annule, sans quoi l'évanouissement de son premier facteur entraînerait celui du premier facteur de la première équation. Cela donne

$$\zeta_{24} = \zeta_{44} = \epsilon_1 \zeta_{14} = \epsilon_1 \zeta_{34},$$

$$f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) = \frac{\zeta_{24} f(a_2 + \gamma_2) f(a_2 - \gamma_2)}{f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)}, \quad \delta_4 = -\zeta_{24} = \frac{\zeta_{24} f(a_2 + \gamma_2) f(a_2 - \gamma_2)}{f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2)},$$

le cas où  $r_{14} = r_{24}$  étant banal. Cependant l'équation

$$f^2(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) + f(a_2 + \gamma_2) f(a_2 - \gamma_2) = 0$$

est également banale, parce qu'elle donne, moyennant (18, 7),  $\cos \alpha_{12} = 0$ . On sait donc que l'évanouissement des seconds facteurs des équations (72, 2) ne donne rien d'utile.

En vertu de (56, 2), (56, 10), et (63, 8), les  $\zeta$  du mécanisme satisfont aux relations suivantes :

$$(72, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{44} = \zeta_{24} = \epsilon_1 \zeta_{14} = \epsilon_1 \zeta_{34} = \zeta_{21} = \zeta_{41} = \epsilon_1 \zeta_{31} = \epsilon_1 \zeta_{11}, \quad \zeta_{23} = \zeta_{36}, \\ \zeta_{43} = \zeta_{16}, \quad \zeta_{33} = \zeta_{26}, \quad \zeta_{13} = \zeta_{46}, \quad \zeta_{22} = -\zeta_{15}, \quad \zeta_{42} = -\zeta_{35}, \\ \zeta_{12} = -\zeta_{25}, \quad \zeta_{32} = -\zeta_{45}. \end{array} \right.$$

L'équation

$$(72, 5) \quad f(\frac{1}{2}\omega_1 - \alpha_3) + \epsilon_1 \zeta_{11} f(\frac{1}{2}\omega_1 - \beta_2) = 0$$

entraîne

$$f^2 \alpha_3 = f^2 \beta_2,$$

d'où

$$\delta_1^2 = \left( \frac{\sin a_{11} - \epsilon_1 \sin a_{21}}{\sin(a_{11} - a_{21})} \right)^2 = \frac{f^2 \alpha_3}{f^2 \beta_2} = 1.$$

Pour que  $\delta_1^2 = 1$ , sans que l'angle tétraèdre I soit losangique (cas banal), il faut que celui-ci tende vers un parallélogramme. On doit donc

avoir

$$(72, 6) \left\{ \begin{array}{l} r_{11} = r_{31}, \quad r_{21} = r_{41}, \quad \epsilon_1 = \zeta_{11} \zeta_{21}, \\ \cos \alpha_{41} = \cos \alpha_{21} = -\zeta_{21} = -\epsilon_1 \zeta_{11}, \quad \cos \alpha_{31} = \cos \alpha_{11} = -\zeta_{11}, \\ \cos \alpha_{22} = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{23}, \quad \cos \alpha_{13} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{35}, \\ \cos \alpha_{25} = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{26}, \quad \cos \alpha_{16} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{32}, \\ \delta_1 = \frac{\sin \alpha_{11} - \epsilon_1 \sin \alpha_{21}}{\sin (\alpha_{11} - \alpha_{21})} \rightarrow \frac{r_{11} - \epsilon_1 r_{21}}{\zeta_{11} r_{21} - \zeta_{21} r_{11}} = -\epsilon_1 \zeta_{11} = \frac{f\alpha_3}{f\beta_2}, \end{array} \right.$$

ce qui fait, en vertu de (72, 5), que

$$(72, 7) \quad \alpha_3 = \beta_2 + (1 + \epsilon_1 \zeta_{11})^{\frac{1}{2}} \omega_1.$$

Les équations (56, 3) et (72, 7) donnent bien

$$\frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{\sin \alpha_{33}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\sin \alpha_{43}}{\sin \alpha_{42}},$$

de sorte que les angles faciaux des angles tétraèdres III, V, et VI s'expriment maintenant, moyennant (56, 18), en fonction de ceux de l'angle tétraèdre II de la manière suivante :

$$(72, 8) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{16} = \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{13} = \sin \alpha_{32}, \\ \sin \alpha_{26} = \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{23} = \sin \alpha_{22}, \\ \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{33} = \sin \alpha_{12}, \\ \sin \alpha_{46} = \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{43} = \sin \alpha_{42}; \\ \cos \alpha_{16} = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{35} = \epsilon_1 \cos \alpha_{13} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{32}, \\ \cos \alpha_{26} = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{25} = \epsilon_1 \cos \alpha_{23} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{22}, \\ \cos \alpha_{36} = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{15} = \epsilon_1 \cos \alpha_{33} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{12}, \\ \cos \alpha_{46} = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{45} = \epsilon_1 \cos \alpha_{43} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{42}. \end{array} \right.$$

Les équations (56, 16) se vérifient d'elles-mêmes sans rien apporter de nouveau.

Les longueurs du mécanisme satisfont aux équations suivantes :

$$(72, 9) \quad \frac{r_{11} = r_{31}}{\sin \alpha_{32}} = s_{26} = s_{35} = \frac{r_{34} = r_{14}}{\sin \alpha_{12}}, \quad \frac{r_{21} = r_{41}}{\sin \alpha_{22}} = s_{23} = s_{56} = \frac{r_{44} = r_{24}}{\sin \alpha_{42}}.$$

Les relations  $\delta_1 = \delta_4 = -\epsilon_1 \zeta_{11}$  montrent que les deux quadrilatères plans I et IV sont des parallélogrammes.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on commence par se donner quatre constantes  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{32}$ ,  $\alpha_{42}$  comprises entre 0 et  $\pi$ . Tous les autres angles faciaux seront alors donnés par les formules (72, 8). Les formules (72, 9) donnent les longueurs du mécanisme à deux facteurs de proportionnalité près. Ceux-ci sont arbitraires. *Le mécanisme dépend ainsi de six constantes arbitraires.*

Pour trouver les cas, s'il y en a, où le *quadrilatère du coude* serait constamment plan, il faut récrire l'équation (64, 1) en se basant sur la figure (72, 2). Ceci peut se faire à vue sans calcul. On trouve effectivement :

$$(72, 10) \quad \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{22} \cos \alpha_{32} \sin \beta_{23} + \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{32} \cos \alpha_{22} \sin \beta_{23} \cos \beta_{32} \\ + \sin \alpha_{32} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{13} \sin \beta_{32} \\ + \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{32} \cos \alpha_{23} \sin \beta_{32} \cos \beta_{23} = 0.$$

Dans les circonstances actuelles, cette équation se réduit à la suivante :

$$(72, 11) \quad \sin \alpha_{22} \cos \alpha_{32} [\sin \beta_{21} + \epsilon_1 \zeta_{11} \sin \beta_{31}] \\ + \sin \alpha_{32} \cos \alpha_{22} [\sin \beta_{21} \cos \beta_{31} - \epsilon_1 \zeta_{11} \sin \beta_{31} \cos \beta_{21}] = 0.$$

D'autre part, on sait que  $t_{21} t_{31} = \delta_1 = -\epsilon_1 \zeta_{11}$ , moyennant quoi

$$\sin \beta_{31} = -\epsilon_1 \zeta_{11} \sin \beta_{21}, \quad \cos \beta_{31} = -\cos \beta_{21}.$$

Les deux accolades de l'équation (72, 11) s'annulent donc toutes seules, et le *quadrilatère du coude* est constamment plan.

**73. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Cet octaèdre à deux sommets impropres est composé de quatre angles tétraèdres irréductibles et de deux parallélogrammes. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. Les angles faciaux correspondants des quatre angles tétraèdres irréductibles sont ou bien égaux ou bien supplémentaires, la correspondance étant définie par les formules (72, 8) et la figure (72, 2).
2. Aucune relation ne lie les constantes du même angle tétraèdre.
3. Les quatre angles tétraèdres ont tous le même invariant.
4. La déformation est de *genre un*,
5. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *six*.
6. Le quadrilatère du coude est constamment plan, et a ses côtés opposés égaux.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne arbitrairement les quatre constantes suivantes :

$$(73, 1) \quad \begin{cases} \sin \alpha_{12} = \frac{4}{5}, & \sin \alpha_{22} = \frac{1}{3}, & \sin \alpha_{32} = \frac{1}{7}, & \sin \alpha_{42} = \frac{2}{5}, \\ \cos \alpha_{12} = \frac{3}{5}, & \cos \alpha_{22} = \frac{5}{3}, & \cos \alpha_{32} = \frac{8}{7}, & \cos \alpha_{42} = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Comme il a été expliqué plus haut, cela me donne le mécanisme suivante :

$$(73, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{33} = \sin \alpha_{12} = \frac{4}{5} = 0,800000 \\ \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{26} = \sin \alpha_{23} = \sin \alpha_{22} = \frac{1}{3} = 0,923077 \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{16} = \sin \alpha_{13} = \sin \alpha_{32} = \frac{1}{7} = 0,882353 \\ \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{46} = \sin \alpha_{43} = \sin \alpha_{42} = \frac{2}{5} = 0,960000 \\ \epsilon_1 \cos \alpha_{15} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{36} \\ \qquad \qquad \qquad = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{33} = \cos \alpha_{12} = \frac{3}{5} = 0,600000 \\ \epsilon_1 \cos \alpha_{25} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{26} \\ \qquad \qquad \qquad = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{23} = \cos \alpha_{22} = \frac{5}{3} = 0,384615 + \\ \epsilon_1 \cos \alpha_{35} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{16} \\ \qquad \qquad \qquad = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{13} = \cos \alpha_{32} = \frac{8}{7} = 0,470588 \\ \epsilon_1 \cos \alpha_{45} = -\zeta_{11} \cos \alpha_{46} \\ \qquad \qquad \qquad = -\epsilon_1 \zeta_{11} \cos \alpha_{43} = \cos \alpha_{42} = \frac{7}{5} = 0,280000 \\ \frac{r_{11} = r_{31}}{75} = \frac{s_{26} = s_{35}}{85} = \frac{r_{14} = r_{34}}{68}, \\ \frac{r_{21} = r_{41}}{300} = \frac{s_{23} = s_{56}}{325} = \frac{r_{24} = r_{44}}{312}. \end{array} \right.$$

Je laisse indéterminés les deux symboles  $\epsilon_1, \zeta_{11}$  dont les carrés sont égaux à l'unité, ainsi que les deux facteurs de proportionnalité nécessaires à la détermination complète des longueurs.

**74. Onzième mécanisme. Un contre-parallélogramme et cinq angles tétraèdres totalement décomposés.** Ce mécanisme découle soit de l'analyse du No.59 soit de celle du No. 60. J'adopte celle du No. 60 parce qu'elle a l'avantage de donner l'octaèdre le plus maniable. La notation est de nouveau celle de la figure (62, 1).

Je suppose que la chaîne VI soit un quadrilatère plan, et que les corps s'aplatissent de la manière définie par les formules (63, 4). On aura, en

vertu de (60, 1),

$$(74, 1) \quad \begin{cases} r_{16} = r_{46}, & r_{36} = r_{26}, & \zeta_{16} = \zeta_{46}, & \zeta_{36} = \zeta_{26}, \\ \delta_6 = \frac{r_{16} - \epsilon_6 r_{26}}{\zeta_{16} r_{26} - \zeta_{26} r_{16}} = t_{26} t_{46}. \end{cases}$$

D'autre part, les formules (60, 2) et (60, 3) donnent

$$(74, 2) \quad \begin{cases} \zeta_{21} = \zeta_{22} = \zeta_{23}, & \zeta_{11} = \zeta_{13} = \zeta_{15}, & \zeta_{33} = \zeta_{34} = \zeta_{35}, & \zeta_{42} = \zeta_{43} = \zeta_{44}, \\ a_2 \equiv (1 + \zeta_{26}) \frac{1}{2} \pi - a_1, & a_2' \equiv (1 + \zeta_{16}) \frac{1}{2} \pi - a_1'. \end{cases}$$

Si l'on introduit les valeurs de  $a_2$  et de  $a_2'$  données par (74, 2) dans les conditions (60, 4), on trouve

$$(74, 3) \quad \begin{cases} \zeta_{26} = \zeta_{16} = 1, & \sin a_3 \cos a_1 > 0, & a_1 + a_2 \equiv a_1' + a_2' \equiv \pi, \\ \sin 2a_1 < 0, & \sin a_3' \cos a_1' > 0, & \sin 2a_1' < 0, \\ |\sin a_3| > |\sin a_1|, & |\sin a_3'| > |\sin a_1'|. \end{cases}$$

Tous les angles faciaux s'expriment maintenant en fonction des quatre paramètres  $a_1, a_3, a_1', a_3'$  de la manière suivante :

$$(74, 4) \quad \begin{cases} a_{11} \equiv \pi - a_{31} \equiv a_{42} \equiv a_{32} \equiv \pi - (a_1 + a_3), \\ a_{44} \equiv \pi - a_{24} \equiv a_{25} \equiv a_{15} \equiv a_3 - a_1, \\ a_{43} \equiv a_{13} \equiv \pi + 2a_1, \\ a_{21} \equiv \pi - a_{41} \equiv a_{45} \equiv a_{35} \equiv \pi - (a_1' + a_3'), \\ a_{34} \equiv \pi - a_{14} \equiv a_{22} \equiv a_{12} \equiv a_3' - a_1', \\ a_{33} \equiv a_{23} \equiv \pi + 2a_1'. \end{cases}$$

En vertu de (63, 8), (74, 1), (74, 2), et (74, 3) tous les  $\zeta$  du mécanisme sont égaux à  $un$ . Ceci n'a pas d'importance du moment qu'on sait que toutes les relations auxquelles ils doivent satisfaire sont compatibles les unes avec les autres.

Quand on introduit les valeurs de  $a_2$  et de  $a_2'$  données par (74, 2) dans les formules (60, 8), on obtient les deux cas suivants :

$$(74, 5) \quad \begin{cases} \text{Cas 1} \\ \epsilon_1' = -\epsilon_3 = -\epsilon_2 = 1, & \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = \frac{\sin a_3'}{\sin a_3}, & \frac{r_{16}}{r_{26}} = \frac{\text{tg } a_1'}{\text{tg } a_1}; \\ \text{Cas 2} \\ \epsilon_1' = \epsilon_2, & \epsilon_3 = -1, & \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} = \epsilon_1' \frac{\cos a_3'}{\cos a_3}, & \frac{r_{16}}{r_{26}} = \frac{\text{tg } a_1}{\text{tg } a_1'}. \end{cases}$$

Les longueurs du mécanisme satisfont aux équations suivantes, qu'on déduit de (63, 5) en passant par (74, 4) :

$$\begin{aligned}
 (74, 6) \quad & \frac{s_{32}}{\sin a_{21} \sin a_{44}} = \frac{s_{31}}{\sin a_{22} \sin a_{15}} = \frac{s_{35}}{\sin a_{11} \sin a_{34}} = \frac{s_{34}}{\sin a_{35} \sin a_{42}} \\
 & = \frac{s_{12}}{\sin a_{23} \sin a_{24}} = \frac{s_{15}}{\sin a_{12} \sin a_{13}} = \frac{s_{45}}{\sin a_{23} \sin a_{11}} \\
 & = \frac{s_{24}}{\sin a_{13} \sin a_{21}} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\sin a_{13} \sin a_{12} \sin a_{21}} = \frac{r_{26} = r_{36}}{\sin a_{23} \sin a_{24} \sin a_{11}}.
 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que celles-ci sont compatibles avec (74, 5).

Puisqu'on a toujours

$$\delta_6 = \frac{r_{26} + r_{16}}{r_{26} - r_{16}} = t_{26} t_{46},$$

on sait que le quadrilatère plan VI est un contre-parallélogramme.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on n'a qu'à se donner trois constantes  $a_1, a_1', a_3$  assujéties aux conditions (74, 3).  $a_3'$  sera alors donné par (74, 5), toute détermination compatible avec (74, 3) étant admissible. Ensuite les formules (74, 4) donnent tous les angles faciaux du mécanisme. Finalement, les longueurs sont données à un facteur de proportionnalité près par les formules (74, 6). *Le mécanisme dépend ainsi de quatre constantes arbitraires.* Si l'on adopte le Cas 2 des équations (74, 5), on peut encore disposer du signe de  $\epsilon_1'$ .

Pour rendre constamment plan le *quadrilatère du coude*, on n'a qu'à poser  $s_{31} = s_{34}$  et  $s_{23} = s_{35}$ , parce qu'on a déjà  $\epsilon_3 = -1$ . (cf. II, 3.) Ceci donne

$$\sin a_{22} \sin a_{15} = \sin a_{35} \sin a_{42},$$

$$\sin a_{21} \sin a_{44} = \sin a_{11} \sin a_{34},$$

ce qui s'écrit également, moyennant (74, 4), sous la forme suivante :

$$\sin a_3 \sin a_1 \cos a_1 \cos a_3 = 0,$$

$$\sin a_3' \sin a_1' \cos a_1' \cos a_3' = 0.$$

On reconnaît immédiatement que la seule solution non banale, et compatible avec (74, 3), de ces équations est

$$(74, 7) \quad \cos a_3 = 0, \quad \cos a_3' = 0.$$

Voilà donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que le quadrilatère du coude soit plan. Les équations (74, 6) montrent qu'il est alors un contre-parallélogramme.

Il est évident que seulement le Cas 2 des équations (74, 5) donne un octaèdre intéressant, quand on veut que le quadrilatère du coude soit plan.

**75. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Cet octaèdre à un sommet impropre est composé de cinq angles tétraèdres totalement décomposés et d'un contre-parallélogramme. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. La déformation est *algébrique*.
2. Le nombre des *constantes arbitraires* est de quatre.
3. Aucun angle tétraèdre ne peut passer de l'une de ses deux déformations à l'autre au cours de la déformation du mécanisme.
4. On peut rendre constamment plan le quadrilatère du coude aux dépens de deux paramètres.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne trois constantes  $a_1, a_1', a_3$  assujéties aux conditions (74, 3). Soient

$$\begin{aligned}\epsilon_1' &= \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1, \\ \sin a_1 &= -\frac{7}{25}, \quad \sin a_1' = -\frac{5}{13}, \quad \sin a_3 = \frac{4}{5}, \\ \cos a_1 &= \frac{24}{25}, \quad \cos a_1' = \frac{12}{13}, \quad \cos a_3 = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Les formules (74, 5) donnent alors

$$\sin a_3' = \frac{\sqrt{(451)}}{26}, \quad \cos a_3' = -\frac{1}{16},$$

et les formules (74, 4) donnent

$$\begin{aligned}\sin a_{42} &= \sin a_{32} = \sin a_{31} = \sin a_{11} = 0,600000 \\ \sin a_{35} &= \sin a_{45} = \sin a_{41} = \sin a_{21} = 0,975861 + \\ \sin a_{44} &= \sin a_{24} = \sin a_{25} = \sin a_{15} = 0,936000 \\ \sin a_{34} &= \sin a_{14} = \sin a_{22} = \sin a_{12} = 0,532074 + \\ \sin a_{43} &= \sin a_{13} = 0,537600 \quad \sin a_{33} = \sin a_{23} = 0,710059 \\ \cos a_{42} &= \cos a_{32} = -\cos a_{31} = \cos a_{11} = -0,800000 \\ \cos a_{35} &= \cos a_{45} = -\cos a_{41} = \cos a_{21} = 0,218391 \\ \cos a_{44} &= -\cos a_{24} = \cos a_{25} = \cos a_{15} = 0,352000 \\ \cos a_{34} &= -\cos a_{14} = \cos a_{22} = \cos a_{12} = -0,846697 + \\ \cos a_{43} &= \cos a_{13} = -0,843200 \quad \cos a_{33} = \cos a_{23} = -0,704142\end{aligned}$$

Les longueurs sont données par les formules (74, 6) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{s_{23}}{913406} &= \frac{s_{34}}{585517} = \frac{s_{24}}{524623} = \frac{s_{13}}{498021+} = \frac{s_{35}}{319244+} \\ &= \frac{s_{15}}{286043} = \frac{s_{45}}{426035+} = \frac{s_{12}}{664615+} = \frac{r_{16}=r_{46}}{279138+} = \frac{r_{26}=r_{36}}{398769} \end{aligned}$$

**76. Douzième mécanisme. Deux contre-parallélogrammes et quatre angles tétraèdres totalement décomposés.** Cet octaèdre, comme le précédent, découle de l'analyse du No. 60. Je pars maintenant de l'hypothèse que les deux angles tétraèdres III et VI sont remplacés par des quadrilatères plans. La notation est celle de la figure (62, 2).

Soient donc

$$(76, 1) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_{13} = \cos \alpha_{43} = -\zeta_{13} = -\zeta_{43}, \quad \cos \alpha_{16} = \cos \alpha_{46} = -\zeta_{16} = -\zeta_{46}, \\ \cos \alpha_{23} = \cos \alpha_{33} = -\zeta_{23} = -\zeta_{33}, \quad \cos \alpha_{26} = \cos \alpha_{36} = -\zeta_{26} = -\zeta_{36}, \\ r_{23} = r_{33}, \quad r_{13} = r_{43}, \quad r_{26} = r_{36}, \quad r_{16} = r_{46}, \\ \delta_3 = \frac{r_{13} - \epsilon_3 r_{23}}{\zeta_{13} r_{23} - \zeta_{23} r_{13}} = t_{13} t_{23}, \quad \delta_6 = \frac{r_{16} - \epsilon_3 r_{26}}{\zeta_{16} r_{26} - \zeta_{26} r_{16}} = t_{26} t_{46}. \end{array} \right.$$

Puisque tous les dièdres  $\gamma_{ij}$  du mécanisme du No. 60 sont nuls, les formules (63, 8) donnent

$$\zeta_{16} = \zeta_{46} = \zeta_{43} = \zeta_{13}, \quad \zeta_{36} = \zeta_{26} = \zeta_{33} = \zeta_{23}.$$

D'autre part, les formules (60, 3) donnent dans les circonstances actuelles

$$(76, 2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{43} \equiv \alpha_{13} \equiv a_1 - a_2 \equiv (1 + \zeta_{13}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{26} \equiv \alpha_{36} \equiv a_1 + a_2 \equiv (1 + \zeta_{23}) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{33} \equiv \alpha_{23} \equiv a_1' - a_2' \equiv (1 + \zeta_{23}) \frac{1}{2} \pi, \quad \alpha_{46} \equiv \alpha_{16} \equiv a_1' + a_2' \equiv (1 + \zeta_{13}) \frac{1}{2} \pi, \end{array} \right.$$

ce qui fait que

$$(76, 3) \left\{ \begin{array}{l} \sin a_1 \cos a_2 = \sin a_2 \cos a_1 = \sin a_1' \cos a_2' = \sin a_2' \cos a_1' = 0, \\ \cos a_1 \cos a_2 = -\frac{1}{2}(\zeta_{13} + \zeta_{23}) = \cos a_1' \cos a_2', \\ \sin a_1 \sin a_2 = \frac{1}{2}(\zeta_{23} - \zeta_{13}) = -\sin a_1' \sin a_2'. \end{array} \right.$$

En vertu des conditions (60, 4), les équations (76, 3) ne peuvent être satisfaites autrement que par

$$\sin a_1 = \sin a_2 = \sin a_1' = \sin a_2' = 0.$$

Je pose donc

$$(76, 4) \left\{ \begin{array}{l} a_1 \equiv a_1' \equiv 0, \quad a_2 \equiv a_2' \equiv \pi, \quad \zeta_{13} = \zeta_{23} = 1, \quad \sin a_3 > 0, \quad \sin a_3' > 0, \\ \delta_3 = \frac{r_{13} - \epsilon_3 r_{23}}{r_{23} - r_{13}} = t_{13} t_{23}, \quad \delta_6 = \frac{r_{16} - \epsilon_3 r_{26}}{r_{26} - r_{16}} = t_{26} t_{46}. \end{array} \right.$$

Les formules (60, 3) se mettent maintenant sous la forme

$$(76, 5) \left\{ \begin{array}{l} a_{31} \equiv \pi - a_{11} \equiv \pi - a_{42} \equiv \pi - a_{32} \equiv a_{44} \equiv \pi - a_{24} \equiv a_{25} \equiv a_{15} \equiv a_3, \\ a_{41} \equiv \pi - a_{21} \equiv a_{22} \equiv a_{12} \equiv a_{34} \equiv \pi - a_{14} \equiv \pi - a_{45} \equiv \pi - a_{35} \equiv a_3', \\ a_{13} \equiv a_{23} \equiv a_{33} \equiv a_{43} \equiv a_{16} \equiv a_{26} \equiv a_{36} \equiv a_{46} \equiv \pi. \end{array} \right.$$

Le Cas 2 des équations (60, 8) peut être rejeté, parce qu'il entraîne  $\cos a_3' = \epsilon_1' \cos a_3$ , ce qui rend losangiques tous les angles tétraèdres du mécanisme. Les équations du Cas 1 deviennent

$$(76, 6) \quad \epsilon_1' = -\epsilon_3, \quad \epsilon_2 = -1, \quad \delta_6 = \epsilon_3 \delta_3.$$

Les formules (63, 6), (63, 8), et (76, 5) seront toutes compatibles si l'on pose tous les  $\zeta$  du mécanisme égaux à *un*.\*

Je considère en premier lieu le cas où  $\epsilon_3 = -1$ . Le cas où  $\epsilon_3 = 1$  fera l'objet du No. 78.

Si l'on substitue dans  $\delta_6 = -\delta_3$  les valeurs de  $\delta_3$  et de  $\delta_6$  données par (76, 4), on obtient

$$r_{13} r_{16} - r_{23} r_{26} = 0.$$

Ceci donne, en vertu de (63, 7) et de (76, 1),

$$(76, 7) \quad \frac{r_{13} = r_{43} = r_{26} = r_{36}}{\sin a_3} = \frac{r_{23} = r_{33} = r_{16} = r_{46}}{\sin a_3'} = s_{12} = s_{24} = s_{45} = s_{15}.$$

$$\text{Puisque} \quad \delta_3 = -\delta_6 = \frac{r_{13} + r_{23}}{r_{23} - r_{13}} = t_{13} t_{23} = -t_{26} t_{46},$$

on sait que les deux quadrilatères plans III et VI sont des contre-parallélogrammes.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on n'a qu'à se donner deux arguments  $a_3$  et  $a_3'$  compris tous les deux entre 0 et  $\pi$ . Tous les angles faciaux seront alors donnés par les formules (76, 5), et les longueurs, à un facteur de proportionnalité près, par les formules (76, 7). Celui-ci est arbitraire. *Le mécanisme dépend ainsi de trois constantes arbitraires.*

\* Ce signe sert à marquer un renvoi ultérieur,

L'équation (64, 1) s'écrit dans les circonstances actuelles comme suit :

$$(76, 8) \quad \operatorname{tg} a_3' [\sin \beta_{23} + \sin \beta_{13}] + \operatorname{tg} a_3 [\sin \beta_{13} \cos \beta_{23} - \sin \beta_{23} \cos \beta_{13}] = 0,$$

ce qui devient, en vertu de (60, 1),

$$(76, 9) \quad [\operatorname{tg} a_3' - \operatorname{tg} a_3] \delta_3 + [\operatorname{tg} a_3' + \operatorname{tg} a_3] t_{13}^2 = 0.$$

Comme cette équation ne peut en aucun cas être satisfaite identiquement, *il est impossible de rendre constamment plan le quadrilatère du coude*. Cette discussion est d'ailleurs indépendante du signe de  $\epsilon_3$ .

**77. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Cet octaèdre à deux sommets impropres est composé de deux contre-parallélogrammes et de quatre angles tétraèdres totalement décomposés. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. Les côtés égaux de chacun des contre-parallélogrammes sont égaux à ceux de l'autre qui sont disposés sur les faces contraires du prisme coudé du mécanisme.
2. Les quatre côtés du quadrilatère gauche du coude sont égaux.
3. La déformation du mécanisme est *algébrique*.
4. Le nombre des *constantes arbitraires* est de *trois*.
5. Aucun angle tétraèdre ne peut passer de l'une à l'autre de ses deux déformations au cours de celle du mécanisme.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne deux arguments  $a_3$  et  $a_3'$  comme suit. Soient

$$a_3 = \frac{1}{3}\pi, \quad a_3' = \frac{1}{4}\pi.$$

Les formules (76, 5) donnent

$$a_{31} \equiv \pi - a_{11} \equiv \pi - a_{42} \equiv \pi - a_{32} \equiv a_{44} \equiv \pi - a_{24} \equiv a_{25} \equiv a_{15} \equiv \frac{1}{3}\pi,$$

$$a_{41} \equiv \pi - a_{21} \equiv a_{22} \equiv a_{12} \equiv a_{34} \equiv \pi - a_{14} \equiv \pi - a_{45} \equiv \pi - a_{35} \equiv \frac{1}{4}\pi,$$

la notation étant celle de la figure (62, 2).

Ensuite les formules (76, 7) donnent

$$\frac{r_{13} = r_{43} = r_{26} = r_{36}}{\sqrt{3}} = \frac{r_{23} = r_{33} = r_{16} = r_{46}}{\sqrt{2}} = \frac{s_{12} = s_{24} = s_{45} = s_{15}}{2}.$$

Je laisse indéterminé le facteur de proportionnalité qui est arbitraire.

**78. Treizième mécanisme. Deux parallélogrammes et quatre angles tétraèdres totalement décomposés.** Comme les deux précédents, cet octaèdre découle de l'analyse du No. 60. Je conserve même toute l'analyse du No. 76 jusqu'au signe \* qui suit de peu les formules (76, 6). Naturellement la notation est encore celle de la figure (62, 2).

Je m'occupe maintenant du cas où  $\epsilon_3 = 1$ . On aura

$$(78, 1) \quad \delta_6 = \delta_3 = -1 = t_{13} t_{23} = t_{26} t_{46},$$

ce qui n'entraîne aucune relation entre les longueurs du mécanisme. Celles-ci ne sont astreintes qu'à satisfaire aux équations (63, 7), qui se mettent maintenant sous la forme suivante :

$$(78, 2) \quad \frac{r_{13} = r_{43}}{\sin a_3} = s_{15} = s_{24} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\sin a_3'}, \quad \frac{r_{23} = r_{33}}{\sin a_3'} = s_{12} = s_{45} = \frac{r_{26} = r_{36}}{\sin a_3}.$$

La forme des relations (78, 1) montre que les deux quadrilatères plans III et VI sont des parallélogrammes.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on doit se donner d'abord deux arguments  $a_3$  et  $a_3'$  compris tous les deux entre 0 et  $\pi$ , et calculer ensuite les angles faciaux au moyen des formules (76, 5). Finalement les formules (78, 2) donnent les longueurs du mécanisme à deux facteurs de proportionnalité près. Ceux-ci restent arbitraires. *Le mécanisme dépend ainsi de quatre constantes arbitraires.*

La discussion que j'ai faite au No. 76 au sujet du quadrilatère du coude s'applique intégralement ici. *Il est impossible que ce quadrilatère soit constamment plan.*

**79. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Cet octaèdre à deux sommets impropres est composé de deux parallélogrammes et de quatre angles tétraèdres totalement décomposés. Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. Le produit des deux côtés inégaux d'un des parallélogrammes du mécanisme est égal à celui des deux côtés inégaux de l'autre.
2. Le quadrilatère gauche du coude a ses côtés opposés égaux.
3. La déformation du mécanisme est *algébrique*.
4. Le nombre des *constantes arbitraires* est de quatre.
5. Aucun angle tétraèdre ne peut passer de l'une à l'autre de ses deux déformations au cours de celle du mécanisme.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne deux arguments  $a_3$  et  $a_3'$  comme suit. Soient

$$a_3 = \frac{1}{3}\pi, \quad a_3' = \frac{1}{4}\pi.$$

Les formules (76, 5) donnent alors

$$\alpha_{31} \equiv \pi - \alpha_{11} \equiv \pi - \alpha_{42} \equiv \pi - \alpha_{32} \equiv \alpha_{44} \equiv \pi - \alpha_{24} \equiv \alpha_{25} \equiv \alpha_{15} \equiv \frac{1}{3}\pi,$$

$$\alpha_{41} \equiv \pi - \alpha_{21} \equiv \alpha_{22} \equiv \alpha_{12} \equiv \alpha_{34} \equiv \pi - \alpha_{14} \equiv \pi - \alpha_{45} \equiv \pi - \alpha_{35} \equiv \frac{1}{4}\pi,$$

la notation étant celle de la figure (62, 2).

Ensuite les formules (78, 2) donnent

$$\frac{r_{13} = r_{43}}{\sqrt{3}} = \frac{s_{15} = s_{24}}{2} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{r_{23} = r_{33}}{\sqrt{2}} = \frac{s_{12} = s_{45}}{2} = \frac{r_{26} = r_{36}}{\sqrt{3}}.$$

Je laisse indéterminés les deux facteurs de proportionnalité qui sont arbitraires.

## Chapitre VIII.

## MECANISMES CONTENANT DES ISOGRAMMES.

**80. Remarques préliminaires.** On a vu au No. 14 que les angles de l'isogramme satisfont aux mêmes lois que ceux de l'angle tétraèdre totalement décomposé. Si donc on veut que quelques-unes des chaînes de quatre corps du mécanisme de la figure (1, 1) soient isogrammatiques, il faut que l'analyse angulaire de celui-ci soit identique à celle de l'un des mécanismes du chapitre VI qui comporte des angles tétraèdres totalement décomposés. Ce sont les mécanismes des Nos. 56 et 59. Je pourrai conserver toute l'analyse angulaire de ces deux mécanismes et ne m'occuper ici que des relations qui lient les diverses longueurs des nouveaux mécanismes, tant celles qui sont portées sur les axes que celles qui sont portées sur les segments perpendiculaires des isogrammes.

**81. Quatorzième mécanisme. Deux isogrammes n'ayant pas d'axe en commun, et quatre angles tétraèdres irréductibles.** Ce mécanisme découle de l'analyse du No. 56. Avant de commencer son étude propre il est nécessaire que je fasse quelques remarques relatives aux dièdres  $\gamma$  du mécanisme du No. 56. La notation est celle de la figure (56, 1).

Puisque tous les  $\alpha$  sont supposés d'être compris entre 0 et  $\pi$ , les sinus des trois  $\gamma$  appartenant à un même corps doivent avoir le même signe. En effet ils satisfont à des relations du type

$$\frac{\sin \gamma_{21}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{\sin \gamma_{22}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{\sin \gamma_{23}}{\sin \alpha_{23}}.$$

Du reste, on sait que les quantités

$$\sin \gamma_{21}, \quad \sin \gamma_{22}, \quad \sin \gamma_{23}$$

ont le même signe que

$$\sin \gamma_{11}, \quad \sin \gamma_{13}, \quad \sin \gamma_{15},$$

et le signe contraire de celui de

$$\sin \gamma_{42}, \quad \sin \gamma_{43}, \quad \sin \gamma_{44},$$

à cause des relations

$$\gamma_{15} + \gamma_{22} \equiv \pi, \quad \gamma_{23} + \gamma_{36} \equiv 0,$$

qui font partie du système (56, 2).



En vertu de (81, 1), (81, 2), (81, 3) on peut maintenant écrire définitivement les équations suivantes :

$$(81, 4) \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma_{46} = -\sin \gamma_{13} = \sin \gamma_{36} = -\sin \gamma_{23} < 0, \\ \sin \gamma_{45} = \sin \gamma_{32} = -\sin \gamma_{15} = -\sin \gamma_{22} < 0, \\ \sin \gamma_{26} = -\sin \gamma_{33} = \sin \gamma_{16} = -\sin \gamma_{43} > 0, \\ \sin \gamma_{25} = \sin \gamma_{12} = -\sin \gamma_{35} = -\sin \gamma_{42} > 0, \\ \epsilon_1 \epsilon' \cos \gamma_{46} = \epsilon_1 \epsilon' \cos \gamma_{13} = \epsilon' \cos \gamma_{36} = \epsilon' \cos \gamma_{23} > 0, \\ \epsilon_1 \epsilon'' \cos \gamma_{45} = -\epsilon_1 \epsilon'' \cos \gamma_{32} = -\epsilon'' \cos \gamma_{15} = \epsilon'' \cos \gamma_{22} > 0, \\ \epsilon_1 \epsilon''' \cos \gamma_{26} = \epsilon_1 \epsilon''' \cos \gamma_{33} = \epsilon''' \cos \gamma_{16} = \epsilon''' \cos \gamma_{43} > 0, \\ \epsilon_1 \epsilon^{iv} \cos \gamma_{25} = -\epsilon_1 \epsilon^{iv} \cos \gamma_{12} = -\epsilon^{iv} \cos \gamma_{35} = \epsilon^{iv} \cos \gamma_{42} > 0. \end{array} \right.$$

Je passe maintenant à l'étude des longueurs portées sur les axes et sur leurs perpendiculaires communes. A la figure (81, 1) on voit le schéma du mécanisme en question.

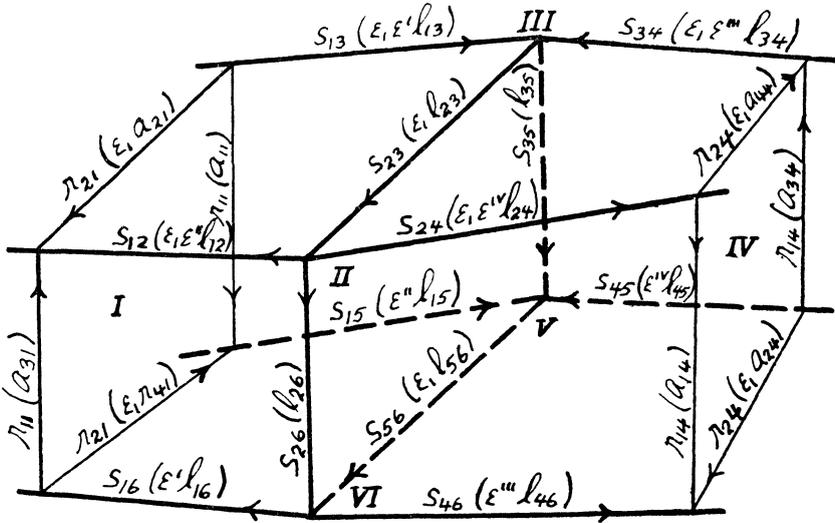


Fig. 81, 1.

Sur chaque arête sont marqués, d'abord sa longueur, et ensuite entre parenthèses son premier cosinus directeur orienté dans le sens indiqué par la flèche que porte l'arête. Les  $\epsilon$  ont le sens que je viens de leur donner.

Les longueurs appartenant au corps I, II, III satisfont aux trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} s_{13} \epsilon_1 \epsilon' l_{13} + s_{23} \epsilon_1 l_{23} + s_{12} \epsilon_1 \epsilon'' l_{12} - r_{21} \epsilon_1 a_{21} &= 0, \\ s_{13} \epsilon_1 \epsilon' m_{13} + s_{23} \epsilon_1 m_{23} + s_{12} \epsilon_1 \epsilon'' m_{12} - r_{21} \epsilon_1 b_{21} &= 0, \\ s_{13} \epsilon_1 \epsilon' n_{13} + s_{23} \epsilon_1 n_{23} + s_{12} \epsilon_1 \epsilon'' n_{12} - r_{21} \epsilon_1 c_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Quand on projette ces équations sur les vecteurs normaux aux axes du corps, on trouve :

$$(81, 5) \quad \begin{cases} \epsilon' s_{13} \sin \gamma_{23} \sin \alpha_{21} - r_{21} \cos \gamma_{23} = 0, \\ \epsilon'' s_{12} \sin \gamma_{22} \sin \alpha_{21} - r_{21} \cos \gamma_{22} = 0, \\ s_{23} \sin \gamma_{23} \sin \alpha_{22} - r_{21} = 0. \end{cases}$$

Les trois équations (81, 5) expriment que la chaîne qui est composée des quatre arêtes dont les longueurs sont  $s_{13}$ ,  $s_{23}$ ,  $s_{12}$ ,  $r_{21}$  est fermée. En vertu des équations (81, 4) elles peuvent être satisfaites par des valeurs positives de ces longueurs.

Quand on applique ce même procédé à tous les corps du mécanisme, on obtient les formules suivantes :

$$(81, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{13} = \frac{r_{21}}{\epsilon' \operatorname{tg} \gamma_{23} \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{11}}{\epsilon_1 \epsilon' \operatorname{tg} \gamma_{13} \sin \alpha_{11}}, \\ s_{12} = \frac{r_{21}}{\epsilon'' \operatorname{tg} \gamma_{22} \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{11}}{\epsilon_1 \epsilon'' \operatorname{tg} \gamma_{32} \sin \alpha_{11}}, \\ s_{16} = \frac{r_{21}}{-\epsilon_1 \epsilon' \operatorname{tg} \gamma_{46} \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{11}}{-\epsilon' \operatorname{tg} \gamma_{36} \sin \alpha_{11}}, \\ s_{15} = \frac{r_{21}}{-\epsilon_1 \epsilon'' \operatorname{tg} \gamma_{45} \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{11}}{-\epsilon'' \operatorname{tg} \gamma_{15} \sin \alpha_{11}}, \\ s_{34} = \frac{r_{24}}{-\epsilon''' \operatorname{tg} \gamma_{43} \sin \alpha_{24}} = \frac{r_{14}}{-\epsilon_1 \epsilon''' \operatorname{tg} \gamma_{33} \sin \alpha_{14}}, \\ s_{24} = \frac{r_{24}}{-\epsilon^{iv} \operatorname{tg} \gamma_{42} \sin \alpha_{24}} = \frac{r_{14}}{-\epsilon_1 \epsilon^{iv} \operatorname{tg} \gamma_{12} \sin \alpha_{14}}, \\ s_{46} = \frac{r_{24}}{\epsilon_1 \epsilon''' \operatorname{tg} \gamma_{26} \sin \alpha_{24}} = \frac{r_{14}}{\epsilon''' \operatorname{tg} \gamma_{16} \sin \alpha_{14}}, \\ s_{45} = \frac{r_{24}}{\epsilon_1 \epsilon^{iv} \operatorname{tg} \gamma_{25} \sin \alpha_{24}} = \frac{r_{14}}{\epsilon^{iv} \operatorname{tg} \gamma_{35} \sin \alpha_{14}}, \\ s_{23} = \frac{r_{21}}{\sin \gamma_{23} \sin \alpha_{22}} = \frac{r_{24}}{-\sin \gamma_{43} \sin \alpha_{42}}, \\ s_{26} = \frac{r_{11}}{-\sin \gamma_{36} \sin \alpha_{32}} = \frac{r_{14}}{\sin \gamma_{16} \sin \alpha_{12}}, \\ s_{56} = \frac{r_{21}}{-\sin \gamma_{46} \sin \alpha_{25}} = \frac{r_{24}}{\sin \gamma_{26} \sin \alpha_{45}}, \\ s_{35} = \frac{r_{11}}{\sin \gamma_{13} \sin \alpha_{35}} = \frac{r_{14}}{-\sin \gamma_{33} \sin \alpha_{15}}. \end{array} \right.$$

On voit qu'en vertu de (81, 4) toutes les équations (81, 6) admettent des valeurs positives des longueurs. On voit également que toutes ces équations sont compatibles avec les conditions de déformabilité des deux isogrammes, à savoir (*cf.* 14, 3)

$$\frac{r_{11}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{21}}{\sin \alpha_{21}}, \quad \frac{r_{14}}{\sin \alpha_{14}} = \frac{r_{24}}{\sin \alpha_{24}}.$$

On se rappelle que

$$\frac{\sin \alpha_{24} \sin \alpha_{11}}{\sin \alpha_{14} \sin \alpha_{21}} = \frac{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{22} \sin \alpha_{12}}.$$

A l'aide de cette identité, et moyennant (81, 4), on peut écrire les équations (81, 6) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (81, 7) \quad \frac{r_{11}}{A \sin \alpha_{11}} &= \frac{r_{21}}{A \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{14}}{B \sin \alpha_{14}} = \frac{r_{24}}{B \sin \alpha_{24}} = \frac{s_{13} = s_{16}}{A \epsilon' \cot \gamma_{23}} \\ &= \frac{s_{12} = s_{15}}{A \epsilon'' \cot \gamma_{22}} = \frac{s_{34} = s_{46}}{-B \epsilon''' \cot \gamma_{43}} = \frac{s_{24} = s_{45}}{-B \epsilon^{iv} \cot \gamma_{42}} \\ &= \frac{s_{23} = s_{56}}{A \sin \alpha_{21} / (\sin \gamma_{23} \sin \alpha_{22})} = \frac{B \sin \alpha_{24} / (-\sin \gamma_{43} \sin \alpha_{42})}{A \sin \alpha_{11} / (\sin \gamma_{23} \sin \alpha_{32})} \\ &= \frac{s_{26} = s_{35}}{A \sin \alpha_{11} / (\sin \gamma_{23} \sin \alpha_{32})} = \frac{B \sin \alpha_{14} / (-\sin \gamma_{43} \sin \alpha_{12})}{A \sin \alpha_{11} / (\sin \gamma_{23} \sin \alpha_{32})}, \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \frac{A}{\sin \gamma_{23} \sin \alpha_{32} \sin \alpha_{14}} = \frac{B}{-\sin \gamma_{43} \sin \alpha_{12} \sin \alpha_{11}},$$

$$\text{ou} \quad \frac{A}{\sin \gamma_{23} \sin \alpha_{22} \sin \alpha_{24}} = \frac{B}{-\sin \gamma_{43} \sin \alpha_{42} \sin \alpha_{21}}.$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on n'a qu'à se donner six constantes  $m, a_2, b_2, c_2, a_3, a_{11}$ . On calcule alors les angles faciaux de la façon que j'ai exposée au No. 56. Ensuite on calcule les quatre dièdres  $\gamma_{22}, \gamma_{23}, \gamma_{42}, \gamma_{43}$  au moyen des équations (81, 2). Ce dernier calcul donne, du reste, les déterminations des quatre symboles  $\epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \epsilon^{iv}$ . Les signes à donner aux fonctions  $\sin \gamma_{22}, \sin \gamma_{23}, \sin \gamma_{42}, \sin \gamma_{43}$  sont indiqués soit sur le tableau (81, 1) soit par les formules (81, 4). Finalement, toutes les longueurs du mécanisme sont données à une constante de proportionnalité près par les formules (81, 7), celle-ci étant arbitraire. *Le mécanisme dépend ainsi de sept constantes arbitraires.*

La condition pour que le quadrilatère dont les arêtes sont les axes  $s_{23}, s_{35}, s_{56}, s_{26}$  soit constamment plan est évidemment exprimée par l'équation (72, 10). Dans les circonstances actuelles elle se met sous la

forme suivante :

$$\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{22} \cos \alpha_{32} t_{21} (1 - t_{31}^2) + \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{32} \cos \alpha_{22} t_{21} (1 - t_{31}^2) - \sin \alpha_{32} \sin \alpha_{23} \cos \alpha_{13} t_{31} (1 + t_{21}^2) + \sin \alpha_{13} \sin \alpha_{32} \cos \alpha_{23} t_{31} (1 - t_{21}^2) = 0.$$

Pour que cette équation soit compatible avec  $t_{21} t_{31} = \delta_1$  il faut et il suffit que

$$\frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{\sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{22}}, \quad \delta_1 = \frac{\sin (\alpha_{22} + \alpha_{32})}{\sin \alpha_{32} \cos \alpha_{23} + \sin \alpha_{22} \cos \alpha_{13}}.$$

On vérifie aisément qu'en vertu de (18, 7) et de (56, 3) ces équations sont satisfaites identiquement. *Le quadrilatère dont les arêtes sont les axes  $s_{23}$ ,  $s_{35}$ ,  $s_{56}$ ,  $s_{26}$  est donc constamment plan.*

**82. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Ce mécanisme est composé de deux isogrammes dont les axes de l'un sont articulés un à un par des couples ponctuels à ceux de l'autre, les dites articulations étant les sommets de quatre angles tétraèdres tous irréductibles. Son schéma est indiqué sur la figure (81, 1). Il possède toutes les propriétés attribuées au cinquième mécanisme au No. 58 sauf la cinquième, à condition toutefois d'y remplacer l'expression *angle tétraèdre totalement décomposé* par *isogramme*. Il possède en outre les propriétés suivantes :

1. Le nombre des *constantes arbitraires* est de sept.
2. Les longueurs portées sur les axes alternatifs de chacun des deux isogrammes sont égales.
3. Le quadrilatère dont les sommets sont les articulations des axes des deux isogrammes est constamment plan, et a ses côtés opposés égaux.

Pour avoir un *exemple numérique*, j'adopte, en ce qui concerne les angles, la solution du mécanisme du No. 56 donnée par les formules (58, 1), (58, 2), (58, 4), (58, 5), et (58, 7).

Les formules (81, 2) donnent alors

$$(82, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_{23} = \frac{\cos \alpha_{21} \cos \alpha_{22} - \cos \alpha_{23}}{\sin \alpha_{21} \sin \alpha_{22}} = -0,897128, \\ \cos \gamma_{22} = \frac{\cos \alpha_{23} \cos \alpha_{21} - \cos \alpha_{22}}{\sin \alpha_{23} \sin \alpha_{21}} = 0,889319+, \\ \cos \gamma_{43} = \frac{\cos \alpha_{42} \cos \alpha_{44} - \cos \alpha_{43}}{\sin \alpha_{42} \sin \alpha_{44}} = -0,666235+, \\ \cos \gamma_{42} = \frac{\cos \alpha_{44} \cos \alpha_{43} - \cos \alpha_{42}}{\sin \alpha_{44} \sin \alpha_{43}} = 0,835128, \end{array} \right.$$

d'où, en vertu des hypothèses (81, 3),

$$(82, 2) \quad \epsilon' = -1, \quad \epsilon'' = 1, \quad \epsilon''' = -1, \quad \epsilon^{iv} = 1,$$

et en vertu des hypothèses (81, 1),

$$(82, 3) \quad \begin{cases} \sin \gamma_{23} = 0,441770+, & \sin \gamma_{43} = -0,745741+, \\ \sin \gamma_{22} = 0,457286+, & \sin \gamma_{42} = -0,550056. \end{cases}$$

Quand on introduit ces valeurs là dans les formules (81, 7), on trouve

$$(82, 4) \quad \frac{r_{11} = r_{31}}{198477+} = \frac{r_{21} = r_{41}}{145097} = \frac{r_{14} = r_{34}}{437240} = \frac{r_{24} = r_{44}}{113488+} = \frac{s_{13} = s_{16}}{465412+} \\ = \frac{s_{12} = s_{15}}{445707+} = \frac{s_{34} = s_{46}}{415747+} = \frac{s_{24} = s_{45}}{706539+} = \frac{s_{23} = s_{56}}{339377+} = \frac{s_{26} = s_{35}}{813692}.$$

**83. Examen de deux cas nuls.** On pourrait se demander premièrement si l'analyse du No. 56 ne peut pas donner lieu à un mécanisme dans lequel la chaîne I serait isogrammatique, et toutes les autres chaînes des angles tétraèdres. Ceci est impossible. En effet, puisque les angles tétraèdres II, III, V, et VI ne pourraient pas alors avoir un sommet commun, il faudrait que les quatre corps qui font partie de l'angle tétraèdre IV s'applatissent. Il s'ensuivrait, en vertu des relations

$$\gamma_{21} + \gamma_{44} \equiv 0, \quad \gamma_{11} + \gamma_{34} \equiv 0, \quad \gamma_{41} + \gamma_{24} \equiv 0, \quad \gamma_{31} + \gamma_{14} \equiv 0$$

que les quatre corps faisant partie de l'isogramme en feraient autant, ce qui est impossible.

Deuxièmement, on pourrait se demander si l'analyse du No. 56 ne peut pas donner lieu à un mécanisme dans lequel la chaîne I serait isogrammatique, les chaînes II, III, V, et VI des angles tétraèdres, et la chaîne IV un quadrilatère plan totalement décomposé. Ceci est également impossible. En effet, il faudrait alors que les quatre quantités

$$\sin \gamma_{44}, \quad \sin \gamma_{34}, \quad \sin \gamma_{24}, \quad \sin \gamma_{14}$$

fussent nulles. Il s'ensuivrait, en vertu des relations que j'ai citées tout à l'heure, que les axes de l'isogramme seraient parallèles, ce qui est impossible.

**84. Quinzième mécanisme. Deux angles tétraèdres, deux quadrilatères plans, tous irréductibles, et deux isogrammes.** Je considère maintenant le mécanisme qui découle de l'analyse du No. 56, et dans lequel les deux chaînes I et IV sont isogrammatiques, les deux chaînes II et V des angles tétraèdres, et les deux chaînes III et VI des quadrilatères plans. En vertu des relations

$$\gamma_{23} + \gamma_{36} \equiv 0, \quad \gamma_{13} + \gamma_{46} \equiv 0, \quad \gamma_{33} + \gamma_{26} \equiv 0, \quad \gamma_{43} + \gamma_{16} \equiv 0,$$

il est évident que si l'une des deux chaînes III et VI est un quadrilatère plan, il faut qu'il en soit de même de l'autre.

Il est aussi évident que toutes les quatre chaînes II, III, V, et VI ne peuvent pas être des quadrilatères plans, car alors les axes des deux isogrammes seraient parallèles.

La notation du No. présent est celle de la figure (56, 1). Je conserve en outre l'étude que j'ai faite au No. 81 des dièdres  $\gamma$ . A la figure (84, 1) on voit le schéma du mécanisme actuel. Comme d'habitude sont marqués sur chaque arête sa longueur et, entre parenthèses, son premier cosinus directeur orienté dans le sens de la flèche. Les  $\epsilon$  ont encore le sens qu'on leur a attribué aux formules (81, 3).

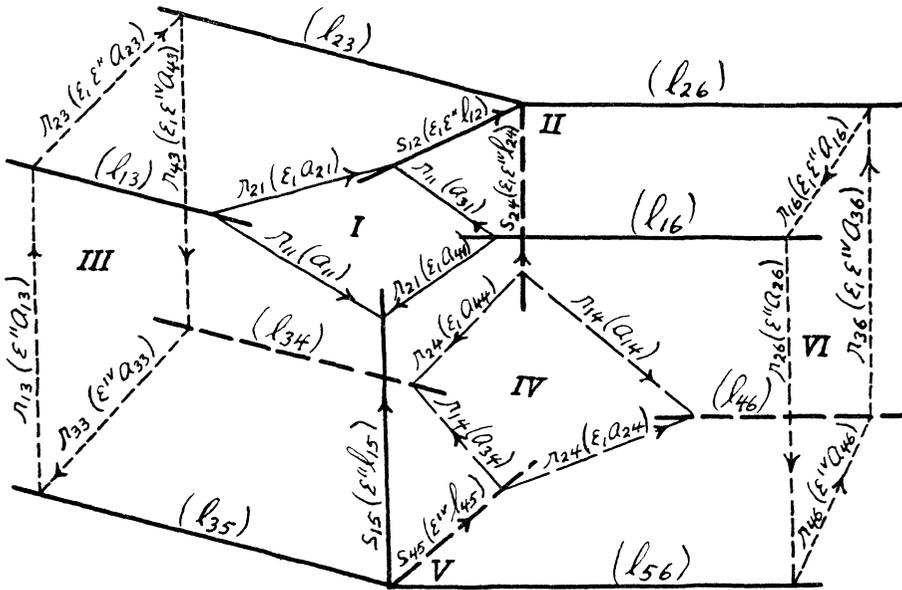


Fig. 84, 1.

Les longueurs appartenant au corps I, II, III satisfont aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 r_{23} \epsilon_1 \epsilon'' a_{23} - s_{12} \epsilon_1 \epsilon'' l_{12} - r_{21} \epsilon_1 a_{21} + Ll_{23} + Ml_{13} &= 0, \\
 r_{23} \epsilon_1 \epsilon'' b_{23} - s_{12} \epsilon_1 \epsilon'' m_{12} - r_{21} \epsilon_1 b_{21} + Lm_{23} + Mm_{13} &= 0, \\
 r_{23} \epsilon_1 \epsilon'' c_{23} - s_{12} \epsilon_1 \epsilon'' n_{12} - r_{21} \epsilon_1 c_{21} + Ln_{23} + Mn_{13} &= 0,
 \end{aligned}$$

où  $L$  et  $M$  sont des quantités sans intérêt qui disparaîtront dans les formules qui vont suivre.

En projetant ces équations sur les trois vecteurs normaux aux axes du corps, et en se souvenant que (cf. 81, 4)

$$\sin a_{23} = \sin \gamma_{23} = 0, \quad \cos \gamma_{23} = \epsilon',$$

on trouve que 
$$\frac{r_{23}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{s_{21}}{\sin \gamma_{22}} = \frac{r_{21}}{\epsilon'' \cos \gamma_{22} \sin \alpha_{22}},$$

$$\cos \gamma_{21} = \epsilon' \cos \gamma_{22}, \quad \sin \gamma_{21} = \sin \gamma_{22}, \quad \cos \alpha_{23} = \sim \epsilon',$$

$$\cos \alpha_{21} = -\epsilon' \cos \alpha_{22}, \quad \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22}.$$

Le même procédé appliqué à tous les corps du mécanisme donne

$$(84, 1) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{12}, \\ \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22}, \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{32}, \\ \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{42}, \\ \cos \alpha_{15} = -\epsilon_1 \epsilon''' \cos \alpha_{34} = -\epsilon_1 \epsilon''' \cos \alpha_{14} = \epsilon_1 \cos \alpha_{12}, \\ \cos \alpha_{25} = -\epsilon_1 \epsilon' \cos \alpha_{41} = -\epsilon_1 \epsilon' \cos \alpha_{21} = \epsilon_1 \cos \alpha_{22}, \\ \cos \alpha_{35} = -\epsilon_1 \epsilon' \cos \alpha_{11} = -\epsilon_1 \epsilon' \cos \alpha_{31} = \epsilon_1 \cos \alpha_{32}, \\ \cos \alpha_{45} = -\epsilon_1 \epsilon''' \cos \alpha_{24} = -\epsilon_1 \epsilon''' \cos \alpha_{44} = \epsilon_1 \cos \alpha_{42}, \\ \cos \alpha_{16} = \epsilon_1 \cos \alpha_{13} = \epsilon_1 \cos \alpha_{26} = \cos \alpha_{23} = -\epsilon', \\ \sin \gamma_{42} = \sin \gamma_{44} = -\sin \gamma_{21} = -\sin \gamma_{22}, \\ \cos \alpha_{36} = \epsilon_1 \cos \alpha_{33} = \epsilon_1 \cos \alpha_{46} = \cos \alpha_{43} = -\epsilon''', \\ \cos \gamma_{42} = \epsilon''' \cos \gamma_{44} = \epsilon''' \cos \gamma_{21} = \epsilon' \epsilon''' \cos \gamma_{22}; \end{array} \right.$$

$$(84, 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_{23}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{s_{12}}{\sin \gamma_{22}} = \frac{r_{21}}{\epsilon'' \cos \gamma_{22} \sin \alpha_{22}}, \\ \frac{r_{13}}{\sin \alpha_{35}} = \frac{s_{15}}{\sin \gamma_{15}} = \frac{r_{11}}{-\epsilon'' \cos \gamma_{15} \sin \alpha_{35}}, \\ \frac{r_{33}}{\sin \alpha_{15}} = \frac{s_{45}}{-\sin \gamma_{35}} = \frac{r_{14}}{-\epsilon^{IV} \cos \gamma_{35} \sin \alpha_{15}}, \\ \frac{r_{43}}{\sin \alpha_{42}} = \frac{s_{24}}{-\sin \gamma_{42}} = \frac{r_{24}}{\epsilon^{IV} \cos \gamma_{42} \sin \alpha_{42}}, \\ \frac{r_{16}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{s_{12}}{-\sin \gamma_{32}} = \frac{r_{11}}{-\epsilon_1 \epsilon'' \cos \gamma_{32} \sin \alpha_{32}}, \\ \frac{r_{26}}{\sin \alpha_{25}} = \frac{s_{15}}{-\sin \gamma_{45}} = \frac{r_{21}}{\epsilon_1 \epsilon'' \cos \gamma_{45} \sin \alpha_{25}}, \\ \frac{r_{36}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{s_{24}}{\sin \gamma_{12}} = \frac{r_{14}}{-\epsilon_1 \epsilon^{IV} \cos \gamma_{12} \sin \alpha_{12}}, \\ \frac{r_{46}}{\sin \alpha_{45}} = \frac{s_{45}}{\sin \gamma_{25}} = \frac{r_{24}}{\epsilon_1 \epsilon^{IV} \cos \gamma_{25} \sin \alpha_{45}}. \end{array} \right.$$

En vertu des équations (81, 4) toutes celles-ci peuvent être satisfaites par des valeurs positives des longueurs qui y figurent.

Tous les  $\gamma$  s'expriment maintenant en fonction de  $\gamma_{22}$  qui, n'étant plus lié aux  $\alpha$ , demeure arbitraire. Les formules (81, 3) se réduisent à

$$(84, 3) \quad \epsilon'' \cos \gamma_{22} > 0, \quad \epsilon' \epsilon''' \epsilon^{iv} \cos \gamma_{22} > 0, \quad \text{d'où} \quad \epsilon^{iv} = \epsilon' \epsilon'' \epsilon'''.$$

Les deux symboles  $\epsilon'$ ,  $\epsilon'''$  deviennent ainsi indéterminés.

En vertu de (18, 8) les arguments elliptiques des deux quadrilatères plans satisfont à

$$(84, 4) \quad \frac{1}{2}\omega_1 + \epsilon_1 \epsilon' a_3 + \epsilon_1 \epsilon''' \beta_3 + \epsilon''' \gamma_3 \equiv 0, \quad \frac{1}{2}\omega_1 + \epsilon' a_6 + \epsilon''' \beta_6 + \epsilon_1 \epsilon''' \gamma_6 \equiv 0.$$

Puisque  $(1 + \epsilon' - \epsilon_1 \epsilon') \frac{1}{2}\omega_1 \equiv \epsilon_1 \frac{1}{2}\omega_1$ , ces deux relations sont bien compatibles avec (56, 3) et (56, 13). Elles donnent, du reste

$$\begin{aligned} f a_6 &= \epsilon_1 f a_3 = -\epsilon' f [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)], \\ f' a_6 &= \epsilon_1 f' a_3 = -\epsilon''' f' [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)], \end{aligned}$$

ce qui fait que (cf. 18, 9)

$$(84, 5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r_{13}}{2f' [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)] f a_2 f \gamma_2} &= \frac{r_{23}}{f' [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)] f' a_2 f' \gamma_2} \\ &= \frac{r_{33}}{2\epsilon' \epsilon''' f [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)] f' a_2 f \gamma_2} \\ &= \frac{r_{43}}{2\epsilon' \epsilon''' f [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)] f a_2 f' \gamma_2}, \\ \frac{r_{16}}{r_{13}} &= \frac{r_{26}}{r_{23}} = \frac{r_{36}}{r_{33}} = \frac{r_{46}}{r_{43}}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (84, 1) remplacent les équations (56, 16). On reconnaît facilement que les deux systèmes sont compatibles.

Les équations (84, 2) et (84, 5) se combinent maintenant sous la forme unique et définitive suivante :

$$(84, 6) \quad \frac{r_{11}}{A \epsilon'' \cos \gamma_{22} \sin \alpha_{32}} = \frac{r_{21}}{A \epsilon'' \cos \gamma_{22} \sin \alpha_{22}} = \frac{r_{13} = r_{16}}{A \sin \alpha_{32}} \\ = \frac{r_{23} = r_{26}}{A \sin \alpha_{22}} = \frac{r_{33} = r_{36}}{B \sin \alpha_{12}} = \frac{r_{43} = r_{46}}{B \sin \alpha_{42}} = \frac{r_{14}}{B \epsilon'' \cos \gamma_{22} \sin \alpha_{12}} \\ = \frac{r_{24}}{B \epsilon'' \cos \gamma_{22} \sin \alpha_{42}} = \frac{s_{12} = s_{15}}{A \sin \gamma_{22}} = \frac{s_{24} = s_{45}}{B \sin \gamma_{22}},$$

où

$$(84, 7) \quad \frac{A}{\epsilon' \epsilon''' f \beta_2 f' [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)]} = \frac{B}{f' \beta_2 f [\frac{1}{2}\omega_1 - (a_2 + \epsilon_1 \gamma_2)]}.$$

Lorsque  $-1 < m < 1$ , l'équation (84, 7) se met sous la forme suivante :

$$(84, 8) \quad \frac{A}{\epsilon' \epsilon''' \text{H}(K-b_2) \Theta b_2 \text{H}(a_2 + \epsilon_1 c_2) \Theta (K-a_2 - \epsilon_1 c_2)} \\ = \frac{B}{-\text{H}b_2 \Theta (K-b_2) \text{H}(K-a_2 - \epsilon_1 c_2) \Theta (a_2 + \epsilon_1 c_2)}.$$

Lorsque  $m > 1$ , l'équation (84, 7) se met sous la forme suivante :

$$(84, 9) \quad \frac{A}{\epsilon' \epsilon''' \Theta (K-b_2) \Theta b_2 \text{H}(a_2 + \epsilon_1 c_2) \text{H}(K-a_2 - \epsilon_1 c_2)} \\ = \frac{B}{-\text{H}b_2 \text{H}(K-b_2) \Theta (a_2 + \epsilon_1 c_2) \Theta (K-a_2 - \epsilon_1 c_2)}.$$

Pour que les équations (84, 6) admettent comme solutions des valeurs positives des longueurs, il faut donc que le produit  $\epsilon' \epsilon'''$  soit déterminé comme suit :

$$(84, 10) \quad \epsilon' \epsilon''' \text{H}b_2 \text{H}(K-b_2) \text{H}(a_2 + \epsilon_1 c_2) \text{H}(K-a_2 - \epsilon_1 c_2) < 0.$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on doit se donner d'abord les quatre constantes  $m$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ , et construire l'angle tétraèdre II de la façon expliquée au chapitre IV. On détermine ensuite le produit  $\epsilon' \epsilon'''$  par la condition (84, 10). Tous les  $a$  du mécanisme seront alors donnés (84, 1) en fonction de ceux de l'angle tétraèdre II, les déterminations individuelles des deux symboles  $\epsilon'$ ,  $\epsilon'''$ , ainsi que celle de  $\epsilon_1$ , étant arbitraires. Après cela on calcule le rapport  $A/B$ , soit au moyen de (84, 8), soit de (84, 9). On se donne ensuite  $\gamma_{22}$  compris entre 0 et  $\pi$ , et on détermine  $\epsilon''$  par la condition  $\epsilon'' \cos \gamma_{22} > 0$ . Les formules (84, 6) donnent alors, à un facteur de proportionnalité près, toutes les longueurs du mécanisme. Ce facteur de proportionnalité est arbitraire. *Le mécanisme dépend ainsi de six constantes arbitraires.*

**85. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Ce mécanisme est composé de deux angles tétraèdres irréductibles, de deux quadrilatères plans irréductibles, et de deux isogrammes, disposés de la façon indiquée par la figure (84, 1). Ses propriétés principales sont les suivantes :

1. Les deux angles tétraèdres et les deux quadrilatères plans ont tous le même invariant.

2. La déformation est de *genre un*.

3. Les angles faciaux correspondants des deux angles tétraèdres sont ou bien égaux ou bien supplémentaires, les angles faciaux correspondants étant ceux qui ont le même premier indice sur la figure (84, 1).

4. L'angle que font entre eux deux axes d'un isogramme est ou bien égal ou bien supplémentaire à l'angle facial de l'angle tétraèdre qui contient l'un de ces deux axes, lequel angle facial étant celui qui fait partie du corps qui contient les deux axes.

5. Les côtés correspondants des deux quadrilatères plans sont égaux, les côtés correspondants étant ceux qui ont le même premier indice sur la figure (84, 1).

6. Le nombre des constantes arbitraires est de six.

7. Aucune relation ne lie ni les constantes du même angle tétraèdre ni celles du même quadrilatère plan.

8. Au cours de la déformation du mécanisme, chacun des deux isogrammes conserve sa déformation initiale.

Pour avoir un *exemple numérique*, je prends pour l'angle tétraèdre II celui du No. 35; c'est-à-dire que

$$(85, 1) \quad m = \cos 50^\circ, \quad a_2 \equiv \frac{65}{90}K, \quad b_2 \equiv \frac{56}{90}K, \quad c_2 \equiv \frac{47}{90}K.$$

Je pose en outre  $\epsilon_1 = 1$ . On a alors

$$a_2 + \epsilon_1 c_2 \equiv K + \frac{22}{90}K, \quad K - a_2 - \epsilon_1 c_2 \equiv 3K + \frac{68}{90}K,$$

ce qui fait, en vertu de la formule (84, 10), que  $\epsilon' \epsilon''' = 1$ .

Dans ces hypothèses les formules (84, 1) donnent

$$(85, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin a_{15} = \sin a_{34} = \sin a_{14} = \sin a_{12} = 0,720562 \\ \sin a_{25} = \sin a_{41} = \sin a_{21} = \sin a_{22} = 0,967784 + \\ \sin a_{35} = \sin a_{11} = \sin a_{31} = \sin a_{32} = 0,552146 + \\ \sin a_{45} = \sin a_{24} = \sin a_{44} = \sin a_{42} = 0,448415 + \\ \cos a_{15} = \zeta \cos a_{34} = \zeta \cos a_{14} = \cos a_{12} = -0,693390 + \\ \cos a_{25} = \zeta \cos a_{41} = \zeta \cos a_{21} = \cos a_{22} = -0,251780 \\ \cos a_{35} = \zeta \cos a_{11} = \zeta \cos a_{31} = \cos a_{32} = -0,833747 \\ \cos a_{45} = \zeta \cos a_{24} = \zeta \cos a_{44} = \cos a_{42} = -0,893825 + \end{array} \right.$$

où  $\zeta^2 = 1$ . Je laisse indéterminé ce nouveau  $\zeta$ .

Quand on substitue dans la formule (84, 8) les valeurs des fonctions Eta et Thêta données par les formules (35, 3), on trouve

$$\frac{A}{638954} = \frac{B}{436993}.$$

Je pose ensuite  $\gamma_{22} = \frac{1}{3}\pi$ , d'où  $\epsilon'' = 1$ .

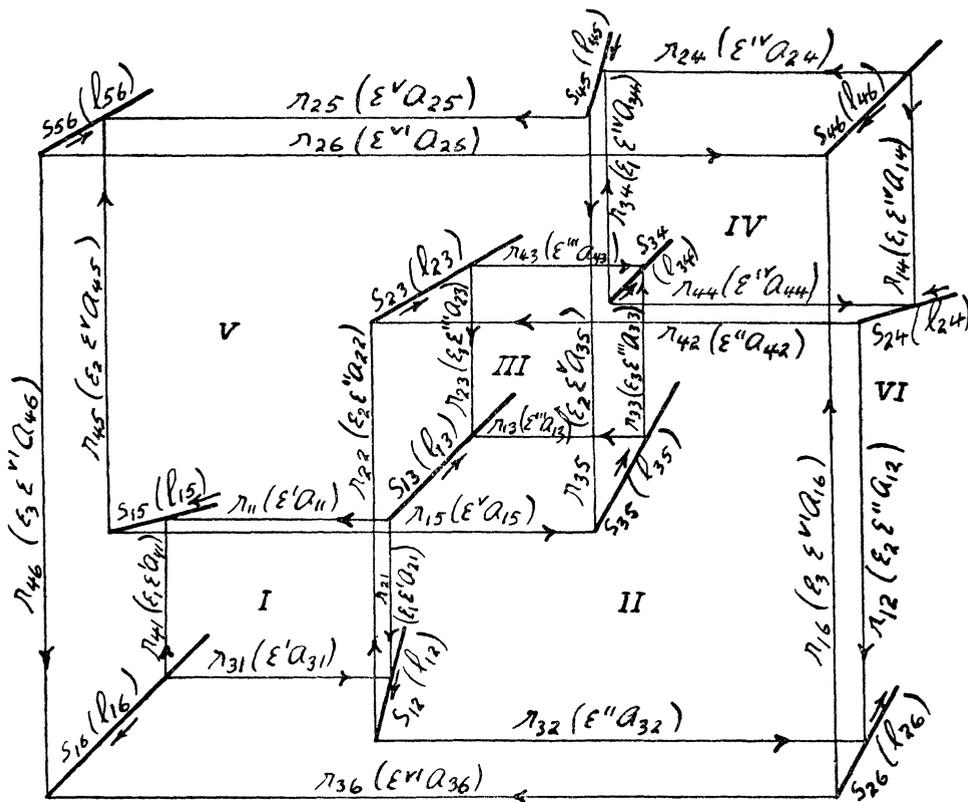


Fig. 86, 1.

Finalement, les formules (84, 6) donnent

$$(85, 3) \quad \frac{r_{13} = r_{16}}{352796} = \frac{r_{23} = r_{26}}{618369+} = \frac{r_{33} = r_{36}}{314880+} = \frac{r_{43} = r_{46}}{195954+} = \frac{r_{11}}{176398}$$

$$= \frac{r_{21}}{309185} = \frac{r_{14}}{157440+} = \frac{r_{24}}{97977} = \frac{s_{15} = s_{12}}{553350+} = \frac{s_{45} = s_{24}}{378447}.$$

**86. Seizième mécanisme. Six isogrammes.** Si l'on remplace les six angles tétraèdres du mécanisme du No. 59 par des isogrammes, on aura le mécanisme dont le schéma est donné par la figure (86, 1). Comme

d'habitude les traits pleins représentent les axes des isogrammes, et les traits fins leurs perpendiculaires communes. Sur chaque arête sont marqués, d'abord sa longueur, et ensuite entre parenthèses son premier cosinus directeur.\* Il est évident qu'on peut conserver intégralement l'analyse angulaire du No. 59. Je ne m'occuperai donc ici que de l'uniformisation des longueurs.

Les équations de fermeture du corps I, II, III sont les suivantes :

$$\begin{aligned} s_{12} l_{12} + s_{23} l_{23} - s_{13} l_{13} + r_{21} \epsilon_1 \epsilon' a_{21} + r_{22} \epsilon_2 \epsilon'' a_{22} + r_{23} \epsilon_3 \epsilon''' a_{23} &= 0, \\ s_{12} m_{12} + s_{23} m_{23} - s_{13} m_{13} + r_{21} \epsilon_1 \epsilon' b_{21} + r_{22} \epsilon_2 \epsilon'' b_{22} + r_{23} \epsilon_3 \epsilon''' b_{23} &= 0, \\ s_{12} n_{12} + s_{23} n_{23} - s_{13} n_{13} + r_{21} \epsilon_1 \epsilon' c_{21} + r_{22} \epsilon_2 \epsilon'' c_{22} + r_{23} \epsilon_3 \epsilon''' c_{23} &= 0. \end{aligned}$$

En projetant ces équations sur les trois axes du corps, et sur leurs trois perpendiculaires, on trouve

$$\frac{s_{12}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{s_{13}}{\sin \alpha_{22}} = \frac{s_{23}}{\sin \alpha_{21}}, \quad \epsilon_1 \epsilon' r_{21} - \epsilon_2 \epsilon'' r_{22} + \epsilon_3 \epsilon''' r_{23} = 0.$$

En procédant de même pour tous les huit corps du mécanisme, on obtient les relations suivantes :

$$(86, 1) \left\{ \begin{aligned} \frac{s_{13}}{\sin \alpha_{15}} &= \frac{s_{15}}{\sin \alpha_{13}} = \frac{s_{35}}{\sin \alpha_{11}}, & \frac{s_{24}}{\sin \alpha_{16}} &= \frac{s_{46}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{s_{26}}{\sin \alpha_{14}}, \\ \frac{s_{45}}{\sin \alpha_{26}} &= \frac{s_{46}}{\sin \alpha_{25}} = \frac{s_{56}}{\sin \alpha_{24}}, & \frac{s_{13}}{\sin \alpha_{22}} &= \frac{s_{23}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{s_{12}}{\sin \alpha_{23}}, \\ \frac{s_{12}}{\sin \alpha_{36}} &= \frac{s_{16}}{\sin \alpha_{32}} = \frac{s_{26}}{\sin \alpha_{31}}, & \frac{s_{34}}{\sin \alpha_{35}} &= \frac{s_{45}}{\sin \alpha_{33}} = \frac{s_{35}}{\sin \alpha_{34}}, \\ \frac{s_{34}}{\sin \alpha_{42}} &= \frac{s_{23}}{\sin \alpha_{44}} = \frac{s_{24}}{\sin \alpha_{43}}, & \frac{s_{15}}{\sin \alpha_{46}} &= \frac{s_{16}}{\sin \alpha_{45}} = \frac{s_{56}}{\sin \alpha_{41}}; \end{aligned} \right.$$

$$(86, 2) \left\{ \begin{aligned} r_{31} = r_{11} &= \epsilon'(\rho_2 + \rho_3), & r_{41} = r_{21} &= \epsilon_1 \epsilon'(\rho_2' + \rho_3'), \\ r_{42} = r_{32} &= \epsilon''(\rho_1 - \rho_3), & r_{22} = r_{12} &= \epsilon_2 \epsilon''(\rho_1' + \rho_3'), \\ r_{43} = r_{13} &= \epsilon'''(\rho_1 - \rho_2), & r_{33} = r_{23} &= \epsilon_3 \epsilon'''(\rho_1' - \rho_2'), \\ r_{44} = r_{24} &= \epsilon^{IV}(\rho_2 - \rho_3), & r_{34} = r_{14} &= \epsilon_1 \epsilon^{IV}(\rho_2' - \rho_3'), \\ r_{25} = r_{15} &= \epsilon^V(\rho_1 + \rho_3), & r_{45} = r_{35} &= \epsilon_2 \epsilon^V(\rho_1' - \rho_3'), \\ r_{36} = r_{26} &= \epsilon^{VI}(\rho_1 + \rho_2), & r_{46} = r_{16} &= \epsilon_3 \epsilon^{VI}(\rho_1' + \rho_2'); \end{aligned} \right.$$

où les six  $\rho$  sont de nouveaux paramètres.

\*  $\epsilon'^2 = \epsilon''^2 = \epsilon'''^2 = \epsilon^{IV^2} = \epsilon^V^2 = \epsilon^{VI^2} = 1$ ,



formules (86, 2) donnent

$$(86, 7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_{41} = r_{21} = r_{31} = r_{11}}{p_1} = \frac{\epsilon_2 p_2 r_{26} - \epsilon_3 p_3 r_{13}}{\epsilon'(\epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2)}, \\ \frac{r_{22} = r_{12} = r_{42} = r_{32}}{p_2} = \frac{\epsilon_1 p_1 r_{26} + \epsilon_3 p_3 r_{13}}{\epsilon''(\epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2)}, \\ \frac{r_{33} = r_{23} = r_{43} = r_{13}}{p_3}, \\ \frac{r_{34} = r_{14} = r_{44} = r_{24}}{p_4} = \frac{\epsilon_2 p_5 r_{26} - \epsilon_3 p_3 r_{13}}{\epsilon^{iv}(\epsilon_1 p_4 + \epsilon_2 p_5)}, \\ \frac{r_{45} = r_{35} = r_{15} = r_{25}}{p_5} = \frac{\epsilon_1 p_4 r_{26} + \epsilon_3 p_3 r_{13}}{\epsilon^v(\epsilon_1 p_4 + \epsilon_2 p_5)}, \\ \frac{r_{46} = r_{16} = r_{36} = r_{26}}{p_6}. \end{array} \right.$$

L'uniformisation des longueurs est maintenant complète. Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on doit commencer par se donner les quatre constantes  $a_1, a_2, a_3, a_3'$  et calculer les angles de la façon expliquée au No. 59. Ensuite on calcule les  $p$  au moyen de (86, 3), après quoi tous les  $r$  seront donnés par les formules (86, 7) en fonction de  $r_{13}$  et  $r_{26}$  qui sont arbitraires. On détermine les quatre symboles  $\epsilon', \epsilon'', \epsilon^{iv}, \epsilon^v$  de façon que tous les  $r$  soient positifs. Les longueurs  $s$  sont données à un facteur arbitraire de proportionnalité près par les formules (86, 1). *Le mécanisme dépend ainsi de sept constantes arbitraires.*

Si l'on pose égaux à zéro tous les  $s$ , ce mécanisme devient le mécanisme D3 de M. Bennett\*.

**87. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Ce mécanisme, qui est composé de six isogrammes, est une généralisation du mécanisme D3 de M. Bennett\*. Au cours de sa déformation, qui est algébrique, chaque isogramme conserve sa déformation initiale. Dans le cas où j'ai pu uniformiser les constantes, il y en a sept qui sont arbitraires, dont quatre angles et trois longueurs. On voit son schéma à la figure (86, 1).

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne les mêmes constantes angulaires que celles du No. 61, c'est-à-dire

$$(87, 1) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1, \\ \sin a_1 = \frac{1}{17}, \quad \sin a_2 = \frac{4}{5}, \quad \sin a_3 = \frac{7}{25}, \quad \sin a_3' = \frac{5}{13}, \\ \cos a_1 = \frac{8}{17}, \quad \cos a_2 = \frac{3}{5}, \quad \cos a_3 = \frac{24}{25}, \quad \cos a_3' = \frac{12}{13}. \end{array} \right.$$

\* *Proceedings of the London Mathematical Society* (1914), p. 166.

Les valeurs des angles  $\alpha$  seront ainsi données encore par les formules (61, 3) que je ne récris pas.

Les paramètres  $p$  sont donnés par les formules (86, 3) de la manière suivante :

$$(87, 2) \quad \begin{cases} p_1 = 1,042587 & p_4 = 0,886790+ \\ p_2 = 1,394121 & p_5 = 0,663182 \\ p_3 = 0,947362+ & p_6 = 0,975927. \end{cases}$$

Je me donne  $r_{26}$  et  $r_{13}$  de la façon suivante :

$$(87, 3) \quad \frac{r_{26}}{4} = \frac{r_{13}}{5}.$$

Les formules (86, 7) donnent alors

$$(87, 4) \quad \begin{aligned} \frac{r_{11} = r_{31}}{16793+} = \frac{r_{21} = r_{41}}{17508+} = \frac{r_{12} = r_{22}}{248353} = \frac{r_{32} = r_{42}}{178143} \\ = \frac{r_{13} = r_{43}}{243671} = \frac{r_{23} = r_{33}}{230844+} = \frac{r_{14} = r_{34}}{58109+} = \frac{r_{24} = r_{44}}{65527+} \\ = \frac{r_{15} = r_{25}}{260464} = \frac{r_{35} = r_{45}}{172735} = \frac{r_{16} = r_{46}}{190244} = \frac{r_{26} = r_{36}}{194936+}. \end{aligned}$$

Finalement, les onze premières équations du système (86, 1) donnent

$$(87, 5) \quad \begin{aligned} \frac{s_{12}}{13195} = \frac{s_{16}}{10419} = \frac{s_{26}}{20625+} = \frac{s_{13}}{90815+} = \frac{s_{15}}{14190} \\ = \frac{s_{35}}{86842+} = \frac{s_{45}}{23648+} = \frac{s_{46}}{25552+} = \frac{s_{56}}{15663} \\ = \frac{s_{34}}{105949} = \frac{s_{23}}{88871+} = \frac{s_{24}}{22653+}. \end{aligned}$$

Les cinq dernières équations de ce système ne servent qu'à contrôler l'arithmétique.

Toutes les constantes du mécanisme, dont les constantes arbitraires sont données par (87, 1) et (87, 3), sont ainsi données par les formules (61, 3), (87, 4), et (87, 5).

**88. Dix-septième mécanisme. Cinq isogrammes et un angle tétraèdre totalement décomposé. Exemple numérique.** Si l'on pose égaux à zéro certains des  $r$  dans les formules (86, 7), on aura tous les mécanismes dont les angles obéissent encore aux lois établies au No. 59, et qui contiennent à la fois des angles tétraèdres et des isogrammes.

Je suppose que l'isogramme III soit remplacé par un angle tétraèdre. On aura

$$r_{13} = r_{23} = r_{33} = r_{43} = 0,$$

et en vertu de (86, 7)

$$(88, 1) \quad \frac{r_{11} = r_{31} = r_{15} = r_{25}}{p_2} = \frac{r_{12} = r_{22} = r_{21} = r_{41}}{p_1 p_2} = \frac{r_{14} = r_{34} = r_{35} = r_{45}}{p_1 p_4 = p_2 p_5} \\ = \frac{r_{32} = r_{42} = r_{24} = r_{44}}{p_1} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\zeta p_6 (\epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2)} \\ = \frac{r_{26} = r_{36}}{\zeta (\epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2)} \quad (\zeta^2 = 1).$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on calcule tous les angles et les longueurs  $r$  comme on l'a fait au No. 86. Les longueurs  $r$  sont données

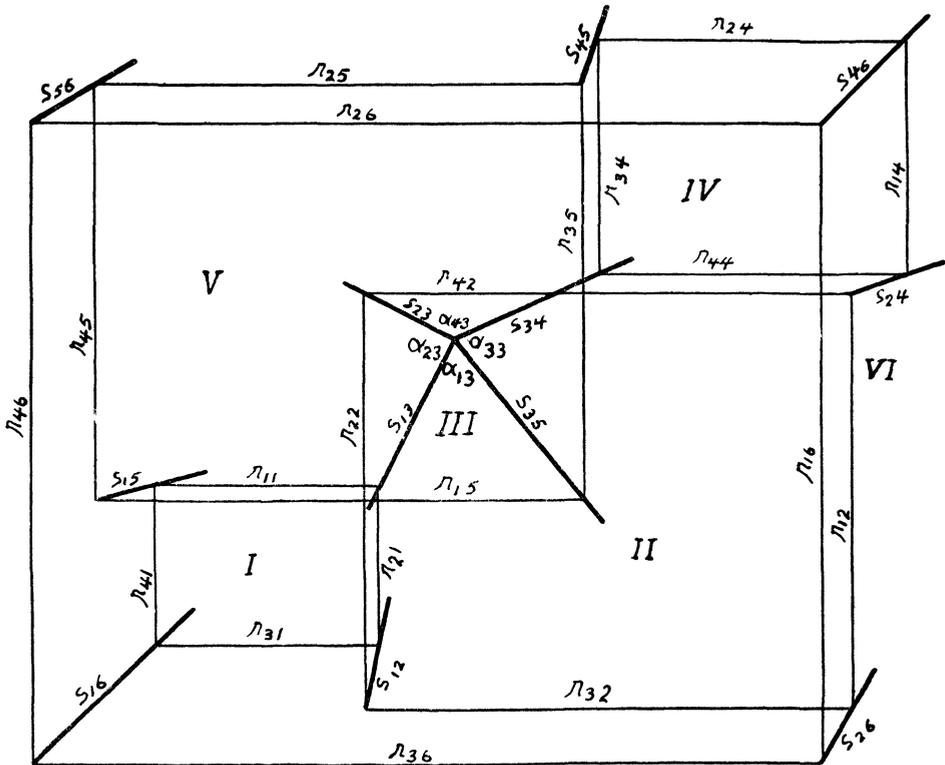


Fig. 88, 1.

à un facteur arbitraire de proportionnalité près par les formules (88, 1).  
Le mécanisme dépend de six constantes arbitraires.

A la figure (88, 1) on voit le schéma de ce mécanisme.

En ce qui concerne les angles  $\alpha$  et les longueurs  $s$ , je conserve l'*exemple numérique* du No. 87. Les nouvelles valeurs des longueurs  $r$  sont

$$(88, 2) \quad \frac{r_{11} = r_{31} = r_{15} = r_{25}}{139412} = \frac{r_{12} = r_{22} = r_{21} = r_{41}}{145349} = \frac{r_{14} = r_{34} = r_{35} = r_{45}}{92455+} \\ = \frac{r_{32} = r_{42} = r_{24} = r_{44}}{104258+} = \frac{r_{16} = r_{46}}{237805} = \frac{r_{26} = r_{36}}{243671}.$$

**89. Dix-huitième mécanisme. Quatre isogrammes et deux angles tétraèdres totalement décomposés. Exemple numérique.** Puisqu'aucun des paramètres  $p$  des formules (86, 3) ne peut être ni nul ni infini, sans qu'il s'introduise un quadrilatère plan, il est évident d'après les équations (88, 1) que le seul isogramme du mécanisme précédent qui peut être remplacé par un angle tétraèdre est l'isogramme VI. Pour que ceci ait lieu, il faut que

$$(89, 1) \quad \epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2 = \epsilon_1 \sin(a_1 - a_3) \sin(a_2' + a_3') + \epsilon_2 \sin(a_2 + a_3) \sin(a_1' + a_3') \\ = 0.$$

L'équation (89, 1) ne peut être compatible avec (59, 12) que des quatre manières suivantes :

*Solution 1*

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2, \quad \epsilon_3 = 1, \\ \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = \frac{\sin a_2'}{\sin a_2} = \epsilon_2 \frac{\sin a_3'}{\sin a_3}, \\ \left| \begin{array}{ccc} \cos a_1' & -\cos a_2' & -\epsilon_3 \cos a_3' \\ -\sin a_1 & \sin a_2 & -\sin a_3 \\ \cos a_1 & \cos a_2 & \cos a_3 \end{array} \right| = 0;$$

*Solution 2*

$$\epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3, \\ -\epsilon_2 \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} = \frac{\cos a_2'}{\cos a_2} = \frac{\cos a_3'}{\cos a_3}, \\ \left| \begin{array}{ccc} \epsilon_2 \sin a_1' & \sin a_2' & -\sin a_3' \\ \sin a_1 & \sin a_2 & -\sin a_3 \\ -\cos a_1 & \cos a_2 & \cos a_3 \end{array} \right| = 0;$$

*Solution 3*

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= -\epsilon_2, & \epsilon_3 &= -1, \\ \sin a_3 &= 0, & \sin a_3' &= 0, \\ \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} &= \frac{\sin a_2'}{\sin a_2}; \end{aligned}$$

*Solution 4*

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= -1, & \epsilon_2 &= \epsilon_3, \\ \cos a_3 &= 0, & \cos a_3' &= 0, \\ \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} &= -\epsilon_2 \frac{\cos a_2'}{\cos a_2}. \end{aligned}$$

Les deux premières de ces solutions conduisent à des cas losangiques, et la quatrième est incompatible avec les conditions (59, 11). Seule la troisième peut donner quelque chose d'utile. Soient donc

$$(89, 2) \quad \begin{cases} \epsilon_1 = -\epsilon_2, & \epsilon_3 = -1, & \sin a_3 = 0, & \sin a_3' = 0, \\ \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = \frac{\sin a_2'}{\sin a_2}, & \cos a_3 = \zeta, & \cos a_3' = \zeta', & \zeta^2 = \zeta'^2 = 1. \end{cases}$$

Les conditions (59, 11) se mettent maintenant sous la forme

$$(89, 3) \quad \begin{cases} \sin a_1, & \sin a_2, & \cos a_2, & \text{signe de } \zeta; \\ \sin a_1', & \sin a_2', & \cos a_2', & \text{signe de } \zeta'; \\ |\sin a_1| > |\sin a_2|, & |\sin a_1'| > |\sin a_2'|; \end{cases}$$

et les équations (59, 9) sous la forme

$$(89, 4) \quad \begin{cases} \alpha_{31} \equiv \alpha_{11} \equiv \alpha_{44} \equiv \alpha_{24} \equiv a_2 + (1 - \zeta) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{42} \equiv \alpha_{32} \equiv \alpha_{25} \equiv \alpha_{15} \equiv a_1 + (1 - \zeta) \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{43} \equiv \alpha_{13} \equiv a_1 - a_2, & \alpha_{36} \equiv \alpha_{26} \equiv a_1 + a_2, \\ \alpha_{41} \equiv \alpha_{21} \equiv \alpha_{34} \equiv \alpha_{14} \equiv a_2' + (1 - \zeta') \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{22} \equiv \alpha_{12} \equiv \alpha_{45} \equiv \alpha_{35} \equiv a_1' + (1 - \zeta') \frac{1}{2} \pi, \\ \alpha_{33} \equiv \alpha_{23} \equiv a_1' - a_2', & \alpha_{46} \equiv \alpha_{16} \equiv a_1' + a_2'. \end{cases}$$

Les paramètres  $p$  sont définis comme suit :

$$(89, 5) \quad \begin{cases} p_1 = p_4 = p_2 = p_5 = \zeta \zeta' \frac{\sin a_1'}{\sin a_1}, \\ p_3 = \frac{\sin(a_1' - a_2')}{\sin(a_1 - a_2)}, & p_6 = \frac{\sin(a_1' + a_2')}{\sin(a_1 + a_2)}, \end{cases} \quad (p_1^2 = p_3 p_6).$$

Les équations qui donnent les  $r$ , qui se déduisent de (88, 1), sont les suivantes :

$$(89, 6) \quad r_{31} = r_{11} = r_{25} = r_{15} = r_{42} = r_{32} = r_{44} = r_{24} \\ = \frac{r_{41} = r_{21} = r_{45} = r_{35} = r_{22} = r_{12} = r_{34} = r_{14}}{p_1}.$$

Les longueurs  $s$  satisfont maintenant aux équations suivantes :

$$(89, 7) \quad \frac{s_{13} = s_{34}}{\zeta \sin^2 a_1 \sin(a_1' + a_2')} = \frac{s_{15} = s_{24}}{\sin a_1 \sin(a_1 - a_2) \sin(a_1' - a_2')} \\ = \frac{s_{23} = s_{35}}{\zeta \sin a_1 \sin a_2 \sin(a_1' + a_2')} = \frac{s_{12} = s_{45}}{\zeta \zeta' \sin a_1' (\sin^2 a_1 - \sin^2 a_2)} \\ = \frac{s_{16} = s_{46}}{\zeta' \sin a_1 \sin a_1' \sin(a_1 - a_2)} = \frac{s_{26} = s_{56}}{\zeta' \sin a_2 \sin a_1' \sin(a_1 - a_2)}.$$

Pour construire un modèle de ce mécanisme on n'a qu'à se donner trois constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_1'$  telles que la valeur de  $\sin a_2'$  définie par

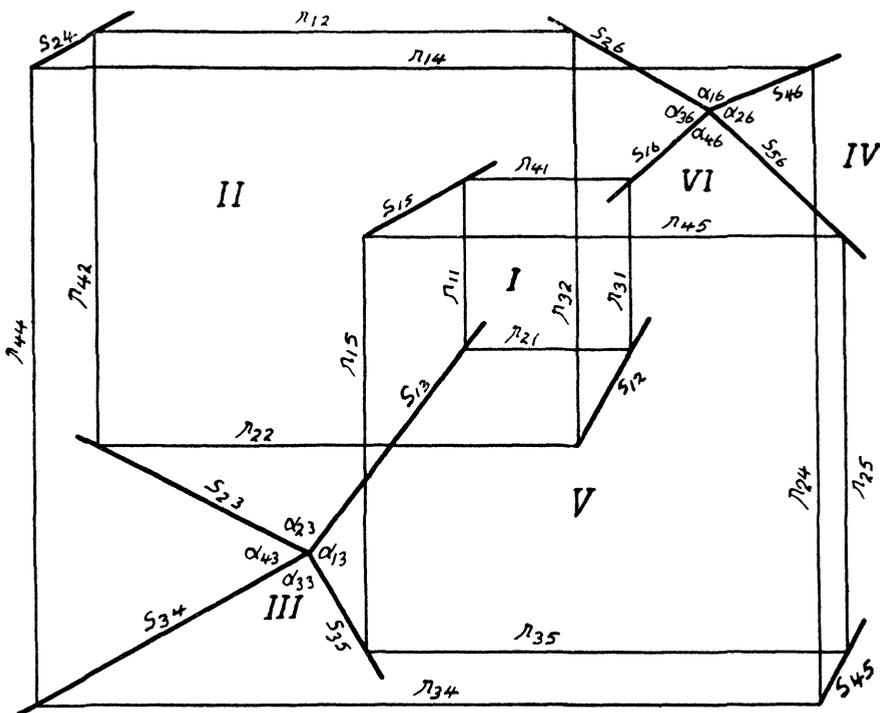


Fig. 89, 1.

$\sin a_2' = \sin a_2 \sin a_1' / \sin a_1$  soit comprise entre  $-1$  et  $1$ , et telles que les conditions (89, 3) soient satisfaites, les deux symboles  $\zeta$  et  $\zeta'$  étant de

détermination arbitraire. Les angles  $\alpha$  seront alors donnés par les formules (89, 4) et les longueurs  $s$  par (89, 7). On calcule ensuite la valeur de  $p_1$  au moyen de (89, 5), après quoi tous les  $r$  seront donnés par (89, 6). Comme il y a deux facteurs arbitraires de proportionnalité, *le mécanisme dépend de cinq constantes arbitraires.*

A la figure (89, 1) on voit le schéma de ce mécanisme.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme, je me donne

$$(89, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \zeta' = 1, \\ \sin \alpha_1 = \frac{2}{2} \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{1}{1} \frac{2}{3}, \quad \sin \alpha_1' = \frac{3}{5}, \\ \cos \alpha_1 = \frac{7}{2} \frac{5}{5}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{5}{1} \frac{5}{3}, \quad \cos \alpha_1' = \frac{4}{5}. \end{array} \right.$$

L'équation (89, 2) donne

$$(89, 9) \quad \sin \alpha_2' = \frac{1}{2} \frac{5}{6}, \quad \cos \alpha_2' = \sqrt{(451)/26}.$$

Ensuite les formules (89, 4) donnent

$$(89, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{24} = 0,923077 \\ \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{14} = 0,576923 \\ \sin \alpha_{42} = \sin \alpha_{32} = \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{15} = 0,960000 \\ \sin \alpha_{22} = \sin \alpha_{12} = \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{35} = 0,600000 \\ \qquad \qquad \qquad \sin \alpha_{33} = \sin \alpha_{23} = 0,028540 + \\ \qquad \qquad \qquad \sin \alpha_{43} = \sin \alpha_{13} = 0,110769 \\ \qquad \qquad \qquad \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{26} = 0,627692 + \\ \qquad \qquad \qquad \sin \alpha_{46} = \sin \alpha_{16} = 0,951617 + \\ \cos \alpha_{31} = \cos \alpha_{11} = \cos \alpha_{44} = \cos \alpha_{24} = 0,384615 + \\ \cos \alpha_{41} = \cos \alpha_{21} = \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{14} = 0,816798 + \\ \cos \alpha_{42} = \cos \alpha_{32} = \cos \alpha_{25} = \cos \alpha_{15} = 0,280000 \\ \cos \alpha_{22} = \cos \alpha_{12} = \cos \alpha_{45} = \cos \alpha_{35} = 0,800000 \\ \qquad \qquad \qquad \cos \alpha_{33} = \cos \alpha_{23} = 0,999592 + \\ \qquad \qquad \qquad \cos \alpha_{43} = \cos \alpha_{13} = 0,993846 \\ \qquad \qquad \qquad \cos \alpha_{36} = \cos \alpha_{26} = -0,778461 + \\ \qquad \qquad \qquad \cos \alpha_{46} = \cos \alpha_{16} = 0,307285 \end{array} \right.$$

Les formules (89, 5) donnent les valeurs suivantes des paramètres

$$(89, 11), \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = 0,625000 \\ p_3 = 0,257658 +, \quad p_6 = 1,516057 +. \end{array} \right.$$

Les longueurs  $r$  sont alors données par les formules (89, 6) comme suit :

$$(89, 12) \quad \frac{r_{31} = r_{11} = r_{25} = r_{15} = r_{42} = r_{32} = r_{44} = r_{24}}{8} \\ = \frac{r_{41} = r_{21} = r_{45} = r_{35} = r_{22} = r_{12} = r_{34} = r_{14}}{5}.$$

Les formules (89, 7) donnent les valeurs suivantes des longueurs

$$(89, 13) \quad \frac{s_{13} = s_{34}}{877010+} = \frac{s_{15} = s_{24}}{101193+} = \frac{s_{23} = s_{35}}{843279+} = \frac{s_{12} = s_{45}}{41717+} \\ = \frac{s_{16} = s_{46}}{63803} = \frac{s_{26} = s_{56}}{61349}.$$

Les valeurs de toutes les constantes du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par les formules (89, 8) sont ainsi données par les formules (89, 10), (89, 12), et (89, 13).

**90. Dix-neuvième mécanisme. Un contre-parallélogramme et cinq isogrammes. Exemple numérique.** Je considère maintenant les cas où certains des isogrammes du mécanisme du No. 86 seraient remplacés par des quadrilatères plans. Puisque deux axes adjacents d'un isogramme ne peuvent être parallèles sans que tous les quatre le soient, on voit qu'on n'a affaire qu'à des mécanismes qui comportent ou bien un seul quadrilatère plan ou bien deux n'ayant pas d'axe commun. J'exclus, naturellement, le cas du système plan de Kempe où tous les isogrammes sont remplacés par des quadrilatères plans. Je suppose que l'isogramme III du mécanisme du No. 86 tende vers un quadrilatère plan.

On aura

$$\sin a_{13} = \sin a_{23} = \sin a_{33} = \sin a_{43} = 0,$$

d'où, en vertu de (59, 9) et de (59, 10),

$$(90, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{13} \equiv a_{23} \equiv a_{33} \equiv a_{43} \equiv a_1 - a_2 \equiv a_1' - a_2' \equiv 0, \\ a_{31} \equiv a_{11} \equiv a_{25} \equiv a_{15} \equiv a_1 + a_3, \quad a_{41} \equiv a_{21} \equiv a_{22} \equiv a_{12} \equiv a_1' + a_3', \\ a_{42} \equiv a_{32} \equiv a_{44} \equiv a_{24} \equiv a_1 - a_3, \quad a_{34} \equiv a_{14} \equiv a_{45} \equiv a_{35} \equiv a_1' - a_3', \\ a_{36} \equiv a_{26} \equiv 2a_1, \quad a_{46} \equiv a_{16} \equiv 2a_1'. \end{array} \right.$$

Les conditions (59, 10) et (59, 11) s'écrivent maintenant comme suit :

$$(90, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin a_1 \cos a_3 > 0, \quad \sin 2a_1 > 0, \\ \sin a_1' \cos a_3' > 0, \quad \sin 2a_1' > 0, \\ |\sin a_1| > |\sin a_3|, \quad |\sin a_1'| > |\sin a_3'|. \end{array} \right.$$

Les équations (59, 12) se réduisent à

$$(90, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cas 1} \\ \epsilon_1 = -\epsilon_2, \quad \epsilon_3 = -1, \\ \frac{\sin a_1'}{\sin a_1} = \epsilon_2 \frac{\sin a_3'}{\sin a_3}; \\ \\ \text{Cas 2} \\ \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1, \\ \frac{\cos a_1'}{\cos a_1} = \frac{\cos a_3'}{\cos a_3}. \end{array} \right.$$

Dans les deux cas on a

$$\delta_3 = \frac{r_{13} + r_{23}}{r_{13} - r_{23}} = t_{23} t_{13},$$

ce qui fait que *le quadrilatère plan III est un contre-parallélogramme.*

Maintenant les équations (86, 1) ne peuvent être satisfaites que lorsque

$$s_{12} = s_{24} = s_{45} = s_{15} = s_{16} = s_{26} = s_{46} = s_{56} = 0,$$

$$s_{13} = s_{23} = s_{34} = s_{35}.$$

Les longueurs  $s$  n'interviennent donc pas dans l'analyse de ce mécanisme, ainsi que le montre la figure (90, 1).

La valeur du paramètre  $p_3$  donnée par l'expression

$$\frac{\sin(a_1' - a_2')}{\sin(a_1 - a_2)}$$

est indéterminée actuellement. Pour avoir la valeur de  $p_3$  il faut passer soit par  $(p_1 p_4)/p_6$  soit par  $(p_2 p_5)/p_6$ . Les autres  $p$  se calculent directement. On trouve

$$(90, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{\sin(a_1' + a_3')}{\sin(a_1 + a_3)}, \quad p_2 = \frac{\sin(a_1' + a_3')}{\sin(a_1 - a_3)}, \\ p_3 = \begin{cases} \operatorname{tg} a_1' \cot a_1 & \text{si } \epsilon_1 = -\epsilon_2, \\ \operatorname{tg} a_1 \cot a_1' & \text{si } \epsilon_1 = \epsilon_2, \end{cases} \quad p_4 = \frac{\sin(a_1' - a_3')}{\sin(a_1 - a_3)}, \\ p_5 = \frac{\sin(a_1' - a_3')}{\sin(a_1 + a_3)}, \quad p_6 = \frac{\sin 2a_1'}{\sin 2a_1}. \end{array} \right.$$

Les longueurs  $r$  sont encore données en fonction de  $r_{13}$  et de  $r_{26}$  par les formules (86, 7).

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on n'a qu'à se donner trois constantes  $a_1, a_3, a_1'$  telles que la valeur de  $a_3'$  donnée par les formules

(90, 3) soit réelle, et telles que les conditions (90, 2) soient satisfaites. Tous les angles  $\alpha$  seront alors donnés par les formules (90, 1). On se donne ensuite les deux constantes  $r_{13}$  et  $r_{26}$  et toutes les autres longueurs  $r$  seront données par (86, 7), les paramètres  $p$  étant définis par les formules (90, 4).

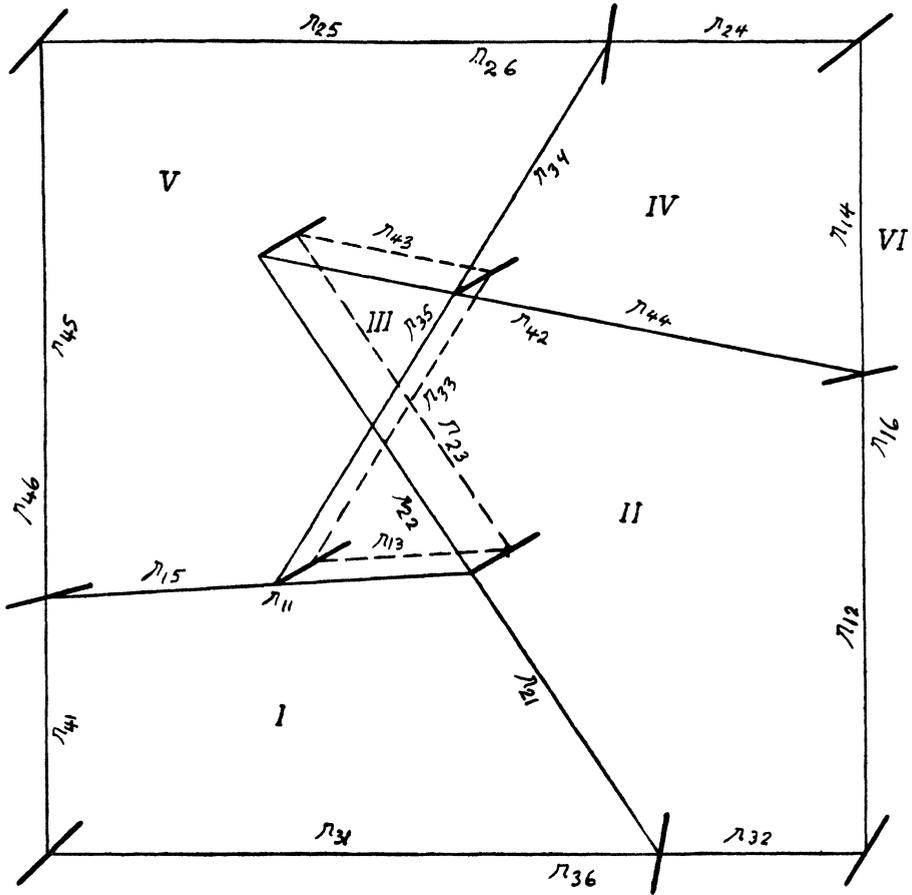


Fig. 90, 1.

Le mécanisme dépend ainsi de cinq constantes arbitraires. Comme auparavant, on détermine les symboles  $\epsilon^I, \epsilon^{II}, \epsilon^{IV}, \epsilon^V$  de façon que les  $r$  soient positifs.

Pour avoir un *exemple numérique* je me donne les trois constantes  $a_1, a_3, a_1'$  de la manière suivante : soient

$$(90, 5) \quad \begin{cases} \sin a_1 = \frac{4}{5}, & \sin a_3 = \frac{5}{13}, & \sin a_1' = \frac{24}{25}, \\ \cos a_1 = \frac{3}{5}, & \cos a_3 = \frac{12}{13}, & \cos a_1' = \frac{7}{25}, \end{cases} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1.$$

Les formules (90, 3) donnent alors

$$\sin \alpha_3' = \frac{\sqrt{(3441)}}{65}, \quad \cos \alpha_3' = \frac{2}{5} \frac{8}{5}.$$

Ensuite les formules (90, 1) donnent

$$(90, 6) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{31} = \sin \alpha_{11} = \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{15} = 0,969231 \\ \sin \alpha_{42} = \sin \alpha_{32} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{24} = 0,507692 + \\ \sin \alpha_{41} = \sin \alpha_{21} = \sin \alpha_{22} = \sin \alpha_{12} = 0,666228 \\ \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{35} = 0,160849 \\ \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{26} = 0,960000 \quad \sin \alpha_{46} = \sin \alpha_{16} = 0,537600 \\ \cos \alpha_{31} = \cos \alpha_{11} = \cos \alpha_{25} = \cos \alpha_{15} = 0,246154 \\ \cos \alpha_{42} = \cos \alpha_{32} = \cos \alpha_{44} = \cos \alpha_{24} = 0,861538 + \\ \cos \alpha_{41} = \cos \alpha_{21} = \cos \alpha_{22} = \cos \alpha_{12} = -0,745748 \\ \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{14} = \cos \alpha_{45} = \cos \alpha_{35} = 0,986979 \\ \cos \alpha_{36} = \cos \alpha_{26} = -0,280000 \quad \cos \alpha_{46} = \cos \alpha_{16} = -0,843200 \end{array} \right.$$

D'autre part, les formules (90, 4) donnent

$$(90, 7) \left\{ \begin{array}{ll} p_1 = 0,687378 & p_4 = 0,316824 \\ p_2 = 1,312267 & p_5 = 0,165955 + \\ p_3 = 0,388889 & p_6 = 0,560000. \end{array} \right.$$

Je me donne les deux constantes  $r_{13}$  et  $r_{26}$  comme suit : soit

$$(90, 8) \quad \frac{r_{13}}{5} = \frac{r_{26}}{4}.$$

Les formules (86, 7) donnent alors

$$(90, 9) \quad \begin{aligned} \frac{r_{11} = r_{31}}{66092+} &= \frac{r_{21} = r_{41}}{45430+} = \frac{r_{12} = r_{22}}{123194+} = \frac{r_{32} = r_{42}}{93879} \\ &= \frac{r_{13} = r_{43}}{199964+} = \frac{r_{23} = r_{33}}{77764} = \frac{r_{14} = r_{34}}{33610+} = \frac{r_{24} = r_{44}}{106085+} \\ &= \frac{r_{15} = r_{25}}{266057} = \frac{r_{35} = r_{45}}{44153+} = \frac{r_{16} = r_{46}}{89584} = \frac{r_{26} = r_{36}}{159971+}. \end{aligned}$$

Toutes les constantes du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par (90, 5) et (90, 8) sont ainsi données par les formules (90, 6) et (90, 9).

91. Vingtième mécanisme. Un contre-parallélogramme et un angle tétraèdre totalement décomposé ayant un axe en commun, et quatre isogrammes. Exemple numérique. Je considère ensuite le mécanisme qui se déduit du précédent quand on fait tendre l'isogramme I vers un angle tétraèdre.

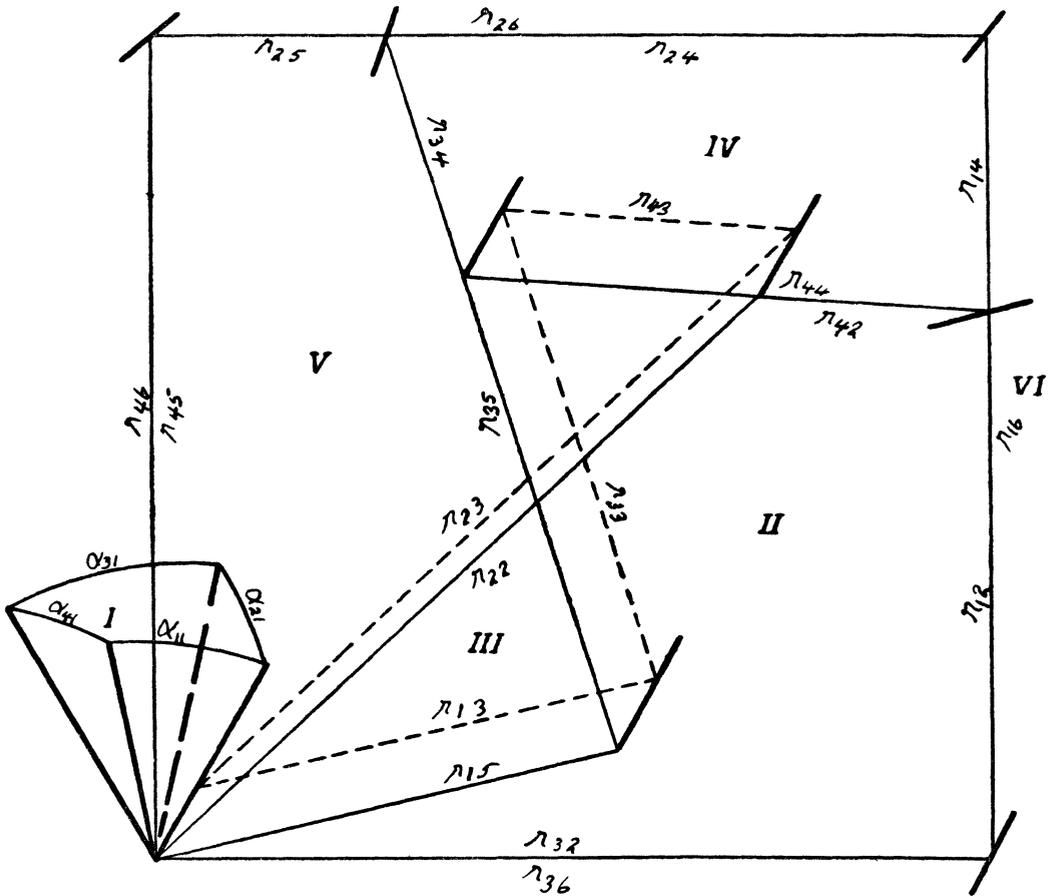


Fig. 91, 1.

On aura  $r_{11} = r_{21} = r_{31} = r_{41} = 0,$

d'où, en vertu de (86, 7) et de (90, 3),

$$p_2 r_{26} - p_3 r_{13} = 0, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1.$$

(La condition  $\epsilon_2 = \epsilon_3$  provient du choix arbitraire que j'ai fait en écrivant les formules (86, 7), quand j'ai posé  $\epsilon''' = \epsilon^{vi} = 1.$ )

Les formules (86, 7) se mettent maintenant sous la forme suivante :

$$(91, 1) \quad \frac{r_{32} = r_{42} = r_{26} = r_{36}}{p_3} = \frac{r_{13} = r_{43} = r_{15} = r_{25}}{p_2} = \frac{r_{12} = r_{22} = r_{23} = r_{33}}{p_2 p_3} \\ = \frac{r_{35} = r_{45} = r_{16} = r_{46}}{p_3 p_6} = \frac{r_{14} = r_{34}}{\zeta p_4 (p_2 - p_3)} = \frac{r_{24} = r_{44}}{\zeta (p_2 - p_3)}, \quad (\zeta^2 = 1),$$

les  $p$  étant toujours définis par les formules (90, 4). Comme auparavant, toutes les longueurs portées sur les axes sont nulles.

A la figure (91, 1) on voit le schéma de ce mécanisme. Pour en construire un modèle on doit se donner d'abord les trois constantes  $a_1, a_3, a_1'$ , de façon que  $a_3'$  donné par (90, 3) soit réel, et que les conditions (90, 2) soient satisfaites. En évaluant  $a_3'$  au moyen des formules (90, 3), on doit tenir compte de la nouvelle condition  $\epsilon_2 = \epsilon_3$ .

Tous les angles  $\alpha$  seront alors donnés par les formules (90, 1). Enfin les longueurs seront données à un facteur arbitraire de proportionnalité près par les formules (91, 1). Le symbole  $\zeta$  doit être déterminé de façon que tous les  $r$  soient positifs. *Le mécanisme dépend de quatre constantes arbitraires.*

Il est évident d'après les formules (91, 1) que le seul autre isogramme qui puisse tendre vers un angle tétraèdre est le IVème. Pour cela il faudrait que  $p_2 = p_3$ . En vertu des équations (90, 3) ceci ne conduit qu'à des cas banaux. Je ne m'arrête pas là-dessus.

Pour avoir un exemple numérique de ce mécanisme, je conserve, en ce qui concerne les angles  $\alpha$ , celui du No. 90.

Les formules (91, 1) donnent pour les longueurs  $r$

$$(91, 2) \quad \frac{r_{32} = r_{42} = r_{26} = r_{36}}{38889} = \frac{r_{13} = r_{43} = r_{15} = r_{25}}{131226+} = \frac{r_{14} = r_{34}}{29255} \\ = \frac{r_{12} = r_{22} = r_{23} = r_{33}}{51032+} = \frac{r_{35} = r_{45} = r_{16} = r_{46}}{21778} = \frac{r_{24} = r_{44}}{92338}.$$

Ainsi toutes les constantes du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par les formules (90, 5), sont données par (90, 6) et (91, 2).

**92. Vingt et unième mécanisme. Un contre-parallélogramme et un angle tétraèdre totalement décomposé n'ayant pas d'axe en commun, et quatre isogrammes. Exemple numérique.** Je considère ensuite le mécanisme qui se déduit de celui du No. 90, lorsqu'on y fait tendre l'isogramme VI vers un angle tétraèdre.

On aura

$$r_{16} = r_{26} = r_{36} = r_{46} = 0,$$

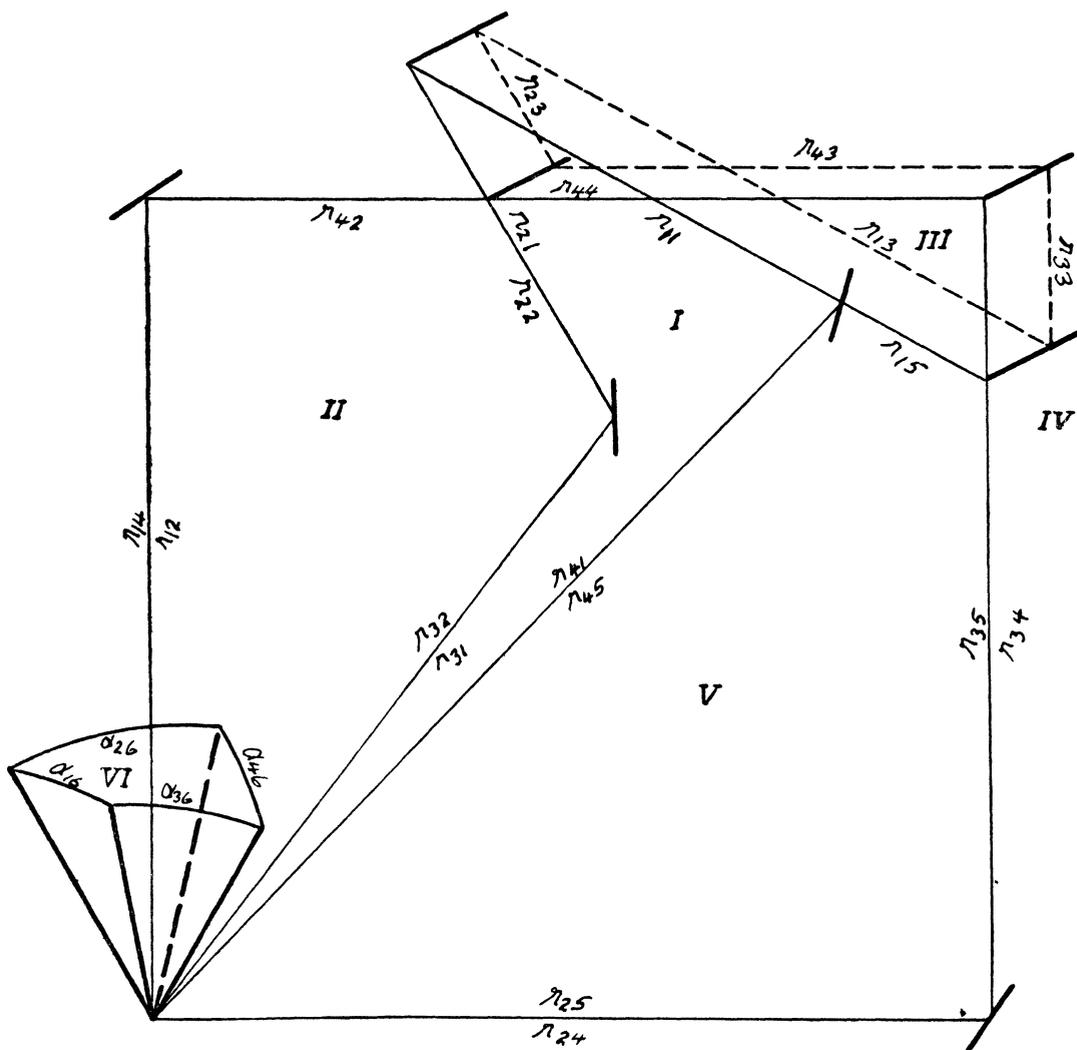


Fig. 92, 1.

d'où en vertu de (86, 7)

$$\begin{aligned}
 (92, 1) \quad \frac{r_{21} = r_{41} = r_{35} = r_{45}}{p_3 p_6} &= \frac{r_{12} = r_{22} = r_{14} = r_{34}}{p_2 p_4} = \frac{r_{13} = r_{43}}{\zeta(\epsilon_1 p_4 + \epsilon_2 p_2)} \\
 &= \frac{r_{11} = r_{31} = r_{32} = r_{42}}{p_4} = \frac{r_{24} = r_{44} = r_{15} = r_{25}}{p_2} = \frac{r_{23} = r_{33}}{\zeta p_3(\epsilon_1 p_4 + \epsilon_2 p_2)} \\
 &\qquad\qquad\qquad (\zeta^2 = 1),
 \end{aligned}$$

les  $p$  étant toujours définis par les formules (90, 4). Comme auparavant, toutes les longueurs portées sur les axes sont nulles.

A la figure (92, 1) on voit le schéma de ce mécanisme. Pour en construire un modèle, on doit se donner d'abord les trois constantes  $a_1, a_3, a_1'$  de façon que  $a_3'$  donné par (90, 3) soit réel, et que les conditions (90, 2) soient satisfaites. Tous les angles  $\alpha$  seront alors donnés par les formules (90, 1). Enfin les longueurs  $r$  seront données à un facteur arbitraire de proportionnalité près par les formules (92, 1). Le symbole  $\zeta$  doit être déterminé de façon que tous les  $r$  soient positifs. *Le mécanisme dépend de quatre constantes arbitraires.*

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme, je conserve, en ce qui concerne les angles  $\alpha$ , celui du No. 90.

Les formules (92, 1) donnent pour les longueurs  $r$

$$(92, 2) \quad \frac{r_{21} = r_{41} = r_{35} = r_{45}}{21778} = \frac{r_{12} = r_{22} = r_{14} = r_{34}}{41549} = \frac{r_{13} = r_{43}}{162909} \\ = \frac{r_{11} = r_{31} = r_{32} = r_{42}}{31682+} = \frac{r_{24} = r_{44} = r_{15} = r_{25}}{131226+} = \frac{r_{23} = r_{33}}{63353+}.$$

Ainsi toutes les constantes du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par les formules (90, 5), sont données par (90, 6) et (92, 2).

**93. Vingt-deuxième mécanisme. Deux parallélogrammes n'ayant pas d'axe en commun, et quatre isogrammes.** Il reste à étudier les mécanismes qui découlent de celui du No. 86, lorsqu'on remplace deux des isogrammes par des quadrilatères plans. On a vu que ces deux-là ne peuvent avoir d'axe en commun, et qu'on ne peut remplacer plus de deux isogrammes par des quadrilatères plans sans retomber sur le système plan de Kempe.

On se rappelle que l'analyse angulaire du mécanisme du No. 86 est celle du No. 59, et qu'à ce dernier No. on a été obligé d'introduire des hypothèses spéciales afin de pouvoir pousser jusqu'au bout les calculs algébriques. Du moment que deux des chaînes sont des quadrilatères plans, on n'a plus besoin de ces hypothèses; on peut étudier le problème sous la forme la plus générale. Je reprends donc l'analyse aux équations (59, 8).

Soient, comme au No. 63,

$$(93, 1) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{13} = \sin \alpha_{23} = \sin \alpha_{33} = \sin \alpha_{43} = 0, \\ \sin \alpha_{16} = \sin \alpha_{26} = \sin \alpha_{36} = \sin \alpha_{46} = 0, \\ \cos \alpha_{13} = -\zeta_{13}, \quad \cos \alpha_{23} = -\zeta_{23}, \quad \cos \alpha_{33} = -\zeta_{33}, \\ \cos \alpha_{43} = -\zeta_{43}, \quad \zeta_{13}^2 = \zeta_{23}^2 = \zeta_{33}^2 = \zeta_{43}^2 = 1, \quad \zeta_{13} = \zeta_{43}, \quad \zeta_{23} = \zeta_{33}, \\ \cos \alpha_{16} = -\zeta_{16}, \quad \cos \alpha_{26} = -\zeta_{26}, \quad \cos \alpha_{36} = -\zeta_{36}, \\ \cos \alpha_{46} = -\zeta_{46}, \quad \zeta_{16}^2 = \zeta_{26}^2 = \zeta_{36}^2 = \zeta_{46}^2 = 1, \quad \zeta_{16} = \zeta_{46}, \quad \zeta_{26} = \zeta_{36}. \end{array} \right.$$

Les formules (38, 2) donnent

$$(93, 2) \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma_{13} = \sin \gamma_{23} = \sin \gamma_{33} = \sin \gamma_{43} = 0, \\ \sin \gamma_{16} = \sin \gamma_{26} = \sin \gamma_{36} = \sin \gamma_{46} = 0, \\ \cos \gamma_{13} = \cos \gamma_{43} = \zeta_{13}, \quad \cos \gamma_{23} = \cos \gamma_{33} = \zeta_{23}, \\ \cos \gamma_{16} = \cos \gamma_{46} = \zeta_{16}, \quad \cos \gamma_{26} = \cos \gamma_{36} = \zeta_{26}, \end{array} \right.$$

ce qui fait que le paramètre  $c$  des formules (59, 5) est congru soit à 0 soit à  $\pi$ . Dans ces conditions la seule solution non banale des équations (46, 4) est

$$(93, 3) \quad 1 - \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0, \quad a \equiv b \equiv c \equiv \pi.$$

Maintenant, en vertu de (38, 2) et de (59, 5), on a

$$(93, 4) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{16} = -\zeta_{13}, \quad \zeta_{26} = -\zeta_{23}, \\ \sin \gamma_{34} = \sin \gamma_{35} = -\sin \gamma_{42} = -\sin \gamma_{44} \\ \quad = \sin \gamma_{21} = \sin \gamma_{22} = -\sin \gamma_{15} = -\sin \gamma_{11}, \\ \sin \gamma_{32} = -\sin \gamma_{45} = -\sin \gamma_{41} = \sin \gamma_{24} \\ \quad = \sin \gamma_{25} = -\sin \gamma_{12} = -\sin \gamma_{14} = \sin \gamma_{31}, \\ \cos \gamma_{34} = \zeta_{23} \cos \gamma_{35} = \zeta_{23} \cos \gamma_{42} = \zeta_{13} \zeta_{23} \cos \gamma_{44} \\ \quad = \zeta_{13} \zeta_{23} \cos \gamma_{21} = \zeta_{13} \cos \gamma_{22} = \zeta_{13} \cos \gamma_{15} = \cos \gamma_{11}, \\ \cos \gamma_{32} = \cos \gamma_{45} = -\zeta_{13} \cos \gamma_{41} = -\zeta_{13} \cos \gamma_{24} = \zeta_{13} \zeta_{23} \cos \gamma_{25} \\ \quad = \zeta_{13} \zeta_{23} \cos \gamma_{12} = -\zeta_{23} \cos \gamma_{14} = -\zeta_{23} \cos \gamma_{31}. \end{array} \right.$$

D'autre part, les formules (38, 2) et (59, 1) donnent

$$(93, 5) \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{32} = \sin \alpha_{11}, \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{12} = \sin \alpha_{21}, \\ \cos \alpha_{15} = \zeta_{23} \cos \alpha_{24} = -\zeta_{13} \zeta_{23} \cos \alpha_{32} = -\zeta_{13} \cos \alpha_{11}, \\ \cos \alpha_{35} = -\zeta_{23} \cos \alpha_{14} = -\zeta_{13} \zeta_{23} \cos \alpha_{12} = \zeta_{13} \cos \alpha_{21}. \end{array} \right.$$

Pour que les deux équations  $\delta_4 = \epsilon_2 \epsilon_3 \delta_1$  et  $\delta_5 = \epsilon_1 \epsilon_3 \delta_2$  (59, 4) soient satisfaites, il faut et il suffit qu'on ait

$$(93, 6) \quad \zeta_{13} \zeta_{23} = -\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3.$$

Il reste à satisfaire aux deux relations  $\delta_6 = \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_3$  et  $\delta_1 \delta_2 \delta_3 - 1 = 0$ . Pour cela je considérerai séparément les deux cas  $\epsilon_1 = \pm \epsilon_2^*$ .

Soit d'abord  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ . On aura

$$(93, 7) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{13} \zeta_{23} = \epsilon_3, \quad \delta_3 = \frac{r_{13} - \epsilon_3 r_{23}}{\zeta_{13} r_{23} - \zeta_{23} r_{13}} = -\zeta_{23} = t_{13} t_{23}, \\ \delta_6 = \frac{r_{16} - \epsilon_3 r_{26}}{\zeta_{16} r_{26} - \zeta_{26} r_{16}} = \zeta_{23} = t_{26} t_{46}. \end{array} \right.$$

La condition  $\delta_6 = \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_3$  est donc satisfaite.

On voit d'après les formules (93, 7) que les deux quadrilatères plans III et VI sont des parallélogrammes.

Dans l'hypothèse actuelle les deux quantités  $\delta_1$  et  $\delta_2$  peuvent s'écrire comme suit ;

$$\delta_1 = \frac{1 - \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{21} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{11})^{\epsilon_1}}{1 + \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{21} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{11})^{\epsilon_1}}, \quad \delta_2 = \frac{1 + \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{12} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{32})^{-\epsilon_1}}{1 - \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{12} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} a_{32})^{-\epsilon_1}},$$

d'où, en vertu de (93, 5), la condition  $\delta_1 \delta_2 \delta_3 - 1 = 0$  est satisfaite.

En plus des équations (93, 4) et (93, 5), les formules importantes à retenir, qu'on a trouvées jusqu'ici, sont les suivantes :

$$(93, 8) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{46} = \zeta_{16} = -\zeta_{43} = -\zeta_{13} = -\epsilon_3 \zeta_{23} = -\epsilon_3 \zeta_{33} = \epsilon_3 \zeta_{26} = \epsilon_3 \zeta_{36}, \\ \epsilon_1 = -\epsilon_2. \end{array} \right.$$

A la figure (93, 1) on voit le schéma de ce mécanisme. Comme d'habitude sont marqués sur chaque arête sa longueur et, entre parenthèses, son premier cosinus directeur † orienté dans le sens de la flèche.

\* Ce signe sert à marquer un renvoi ultérieur.

†  $\epsilon'^2 = \epsilon''^2 = \epsilon'''^2 = \epsilon^{iv^2} = 1$ ,

Les équations de fermeture du corps I, II, III sont

$$\begin{aligned} r_{23} \epsilon' a_{23} + r_{21} \epsilon_1 a_{21} + s_{12} \epsilon''' l_{12} - r_{22} \epsilon_1 a_{22} + L l_{13} + M l_{23} &= 0, \\ r_{23} \epsilon' b_{23} + r_{21} \epsilon_1 b_{21} + s_{12} \epsilon''' m_{12} - r_{22} \epsilon_1 b_{22} + L m_{13} + M m_{23} &= 0, \\ r_{23} \epsilon' c_{23} + r_{21} \epsilon_1 c_{21} + s_{12} \epsilon''' n_{12} - r_{22} \epsilon_1 c_{22} + L n_{13} + M n_{23} &= 0, \end{aligned}$$

où  $L$  et  $M$  sont des quantités sans intérêt qui disparaîtront des formules de la suite.

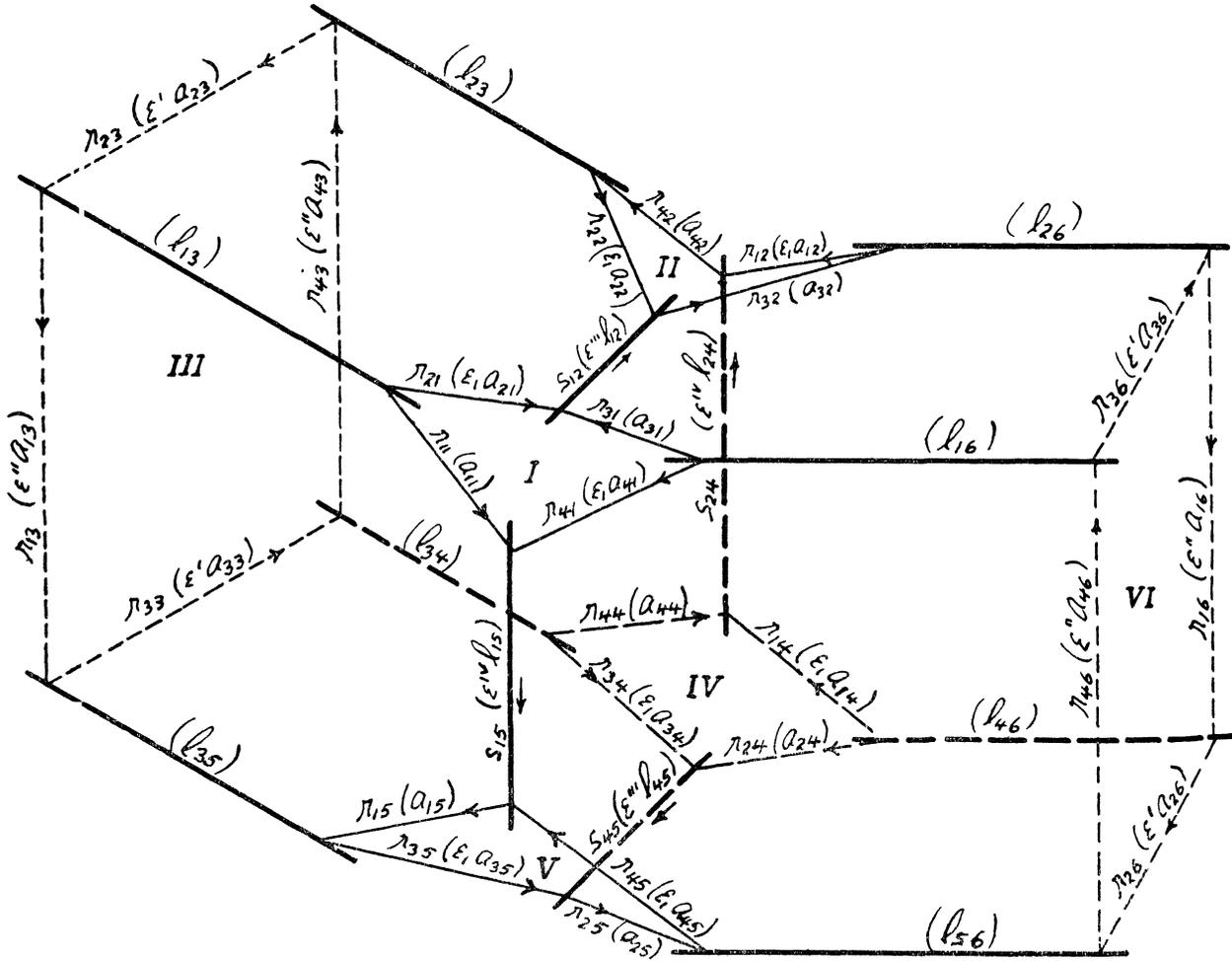


Fig. 93, 1.

Quand on projette ces équations sur les trois vecteurs  $(a_{23}, b_{23}, c_{23})$ ,  $(a_{21}, b_{21}, c_{21})$ ,  $(a_{22}, b_{22}, c_{22})$ , on trouve

$$(93, 9) \quad \frac{r_{23}}{\sin a_{21}} = \frac{s_{12}}{-\epsilon' \epsilon''' \sin \gamma_{21}} = \frac{\zeta_{23} r_{21} - r_{22}}{-\epsilon_1 \epsilon' \cos \gamma_{21} \sin a_{21}},$$

et il y aura sept autres systèmes d'équations semblables à celui-ci attachés aux sept autres corps du mécanisme.

D'autre part, les longueurs des perpendiculaires des quatre isogrammes doivent satisfaire à

$$(93, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_{11} = r_{31}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{21} = r_{41}}{\sin \alpha_{21}}, \quad \frac{r_{12} = r_{22}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{r_{32} = r_{42}}{\sin \alpha_{32}}, \\ \frac{r_{14} = r_{34}}{\sin \alpha_{14}} = \frac{r_{24} = r_{44}}{\sin \alpha_{24}}, \quad \frac{r_{15} = r_{25}}{\sin \alpha_{15}} = \frac{r_{35} = r_{45}}{\sin \alpha_{35}}. \end{array} \right.$$

Quand on exprime que les seize équations du type (93, 9) et les équations (93, 10) sont compatibles, on obtient, moyennant (59, 1), (93, 4), (93, 5), et (93, 8),

$$(93, 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma_{31} = \sin \gamma_{11}, \quad \cos \gamma_{31} = \epsilon_1 \epsilon_3 \cos \gamma_{11}, \\ \frac{s_{12} = s_{45}}{\epsilon' \epsilon'' \sin \gamma_{11}} = \frac{r_{23} = r_{33}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{26} = r_{36}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{\epsilon_3 r_{32} - \zeta_{13} r_{11}}{\epsilon_1 \epsilon' \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{11}}, \\ \frac{s_{15} = s_{24}}{\epsilon'' \epsilon^{IV} \sin \gamma_{11}} = \frac{r_{13} = r_{43}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{32} + \zeta_{13} r_{24}}{\epsilon_3 \epsilon'' \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{11}}, \\ \frac{r_{15} = r_{25}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{35} = r_{45}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{24} + \zeta_{13} r_{32} - \epsilon_3 r_{11}}{\epsilon_3 \zeta_{13} \sin \alpha_{11}}, \\ \frac{r_{34} = r_{14}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{44} = r_{24}}{\sin \alpha_{11}}, \\ \frac{r_{41} = r_{21}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{31} = r_{11}}{\sin \alpha_{11}}, \\ \frac{r_{22} = r_{12}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{42} = r_{32}}{\sin \alpha_{11}}, \end{array} \right.$$

d'où  $\epsilon' \epsilon'' \epsilon''' \epsilon^{IV} = 1$ . Toutes les longueurs sont ainsi exprimées en fonction de  $r_{11}, r_{24}, r_{32}, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \gamma_{11}$ .

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on doit se donner arbitrairement les six constantes  $r_{11}, r_{24}, r_{32}, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \gamma_{11}$ . Tous les angles  $\alpha$  seront alors donnés par les formules (59, 1) et (93, 5), et les longueurs par les formules (93, 11). *Le mécanisme dépend de six constantes arbitraires.*

En ce qui concerne les déterminations des divers symboles dont les carrés sont égaux à l'unité, on procède comme suit. Les symboles  $\epsilon_1, \epsilon_3$  sont arbitraires. Le symbole  $\zeta_{13}$  doit être déterminé de façon que

$$\begin{array}{l} r_{32} > \zeta_{13}(r_{11} - r_{24}), \quad \text{si } \epsilon_3 = 1; \\ r_{32} < r_{11} + r_{24}, \quad \text{et } \zeta_{13} = -1, \quad \text{si } \epsilon_3 = -1. \end{array}$$

Cela rend positives les longueurs  $r_{15}$  et  $r_{35}$ . On détermine ensuite  $\epsilon'$  et  $\epsilon''$  de façon que les deux expressions

$$\frac{\epsilon_3 r_{32} - \zeta_{13} r_{11}}{\epsilon_1 \epsilon' \cos \gamma_{11}}, \quad \frac{r_{32} + \zeta_{13} r_{24}}{\epsilon_3 \epsilon'' \cos \gamma_{11}}$$

soient positives. Finalement on détermine  $\epsilon'''$  et  $\epsilon^{IV}$  de façon que  $\epsilon' \epsilon''' \sin \gamma_{11}$ ,  $\epsilon'' \epsilon^{IV} \sin \gamma_{11}$  soient positifs. La relation  $\epsilon' \epsilon'' \epsilon''' \epsilon^{IV} = 1$  en est une conséquence algébrique. Comme toujours, on doit se donner  $r_{11}$ ,  $r_{24}$ ,  $r_{32}$  positivement, et  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$  compris entre 0 et  $\pi$ . Le symbole  $\zeta_{23}$  qui figure dans les formules (93, 5) est donné en fonction de  $\zeta_{13}$  par (93, 8).

**94. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Ce mécanisme est composé de deux parallélogrammes et de quatre isogrammes, disposés comme l'indique schématiquement la figure (93, 1). Pendant sa déformation, qui est *algébrique*, aucun isogramme ne peut passer de l'une à l'autre de ses deux déformations. Le nombre des *constantes arbitraires* est de six, dont trois angles et trois longueurs.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme je me donne les six constantes  $r_{11}$ ,  $r_{24}$ ,  $r_{32}$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\gamma_{11}$  de la façon suivante : soient

$$(94, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{11} = \frac{1}{5}, \quad \sin \alpha_{21} = \frac{1}{3}, \quad \sin \gamma_{11} = \frac{2}{5}, \\ \cos \alpha_{11} = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha_{21} = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma_{11} = \frac{4}{5}, \\ \frac{r_{32}}{4} = \frac{r_{11}}{5} = \frac{r_{24}}{3}. \end{array} \right. \quad \epsilon_3 = 1 = \zeta_{13},$$

Les formules (93, 8) donnent  $\zeta_{23} = \zeta_{13} = 1$  moyennant quoi les formules (93, 5) donnent

$$(94, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{32} = \sin \alpha_{42} = \sin \alpha_{31} \\ \qquad \qquad \qquad = \sin \alpha_{11} = 0,800000 \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{12} = \sin \alpha_{22} = \sin \alpha_{41} \\ \qquad \qquad \qquad = \sin \alpha_{21} = 0,923077 \\ \cos \alpha_{15} = \cos \alpha_{25} = \cos \alpha_{24} = \cos \alpha_{44} = -\cos \alpha_{32} = -\cos \alpha_{42} \\ \qquad \qquad \qquad = -\cos \alpha_{31} = -\cos \alpha_{11} = -0,600000 \\ \cos \alpha_{35} = \cos \alpha_{45} = -\cos \alpha_{14} = -\cos \alpha_{34} = -\cos \alpha_{12} = -\cos \alpha_{22} \\ \qquad \qquad \qquad = \cos \alpha_{41} = \cos \alpha_{21} = 0,384615+. \end{array} \right.$$

Les formules (93, 11) donnent alors

$$(94, 3) \quad \frac{r_{11} = r_{31}}{455} = \frac{r_{35} = r_{45}}{210} = \frac{r_{15} = r_{25}}{182} = \frac{r_{16} = r_{46}}{2625} = \frac{r_{13} = r_{43}}{2275}$$

$$= \frac{s_{15} = s_{24}}{2730} = \frac{r_{26} = r_{36}}{325} = \frac{r_{23} = r_{33}}{375} = \frac{s_{12} = s_{45}}{390} = \frac{r_{21} = r_{41}}{525}$$

$$= \frac{r_{32} = r_{42}}{364} = \frac{r_{24} = r_{44}}{273} = \frac{r_{14} = r_{34}}{315} = \frac{r_{12} = r_{32}}{420}.$$

Je laisse indéterminé le symbole  $\epsilon_1$  dont la détermination est arbitraire, et qui n'intervient que dans les formules qui lient les dièdres  $\gamma$ .

**95. Vingt-troisième mécanisme. Deux parallélogrammes n'ayant pas d'axe en commun, un angle tétraèdre totalement décomposé, et trois isogrammes. Exemple numérique.** Ce mécanisme se déduit de celui du No. 93 quand on y pose

$$r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = 0.$$

Les formules (93, 11) deviennent

$$(95, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma_{31} = \sin \gamma_{11}, \quad \cos \gamma_{31} = \epsilon_1 \epsilon_3 \cos \gamma_{11}, \\ \frac{r_{14} = r_{34}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{24} = r_{44}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{\epsilon_3 r_{11} - \zeta_{13} r_{32}}{\sin \alpha_{11}}, \\ \frac{r_{21} = r_{41}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{11} = r_{31}}{\sin \alpha_{11}}, \\ \frac{r_{12} = r_{22}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{32} = r_{42}}{\sin \alpha_{11}}, \\ \frac{s_{12} = s_{45}}{\epsilon' \epsilon''' \sin \gamma_{11}} = \frac{r_{23} = r_{33}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{26} = r_{36}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{\epsilon_3 r_{32} - \zeta_{13} r_{11}}{\epsilon_1 \epsilon' \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{11}}, \\ \frac{s_{15} = s_{24}}{\epsilon'' \epsilon^{iv} \sin \gamma_{11}} = \frac{r_{13} = r_{43}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{11} = r_{31}}{\epsilon'' \zeta_{13} \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{11}}. \end{array} \right.$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on doit se donner arbitrairement  $r_{11}$ ,  $r_{32}$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\gamma_{11}$ . Toutes les longueurs seront alors données par les formules (95, 1) et tous les angles  $\alpha$  par (59, 1), (93, 5), et (93, 8). Les deux symboles  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_3$  sont de détermination arbitraire. Le symbole  $\zeta_{13}$  doit être déterminé de façon que  $\epsilon_3 r_{11} - \zeta_{13} r_{32} > 0$ . Comme auparavant il est toujours possible de trouver  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$ ,  $\epsilon'''$ ,  $\epsilon^{iv}$  tels que les autres longueurs soient positives. *Le mécanisme dépend ainsi de cinq constantes arbitraires.*

Pour avoir un *exemple numérique*, je conserve, en ce qui concerne les angles  $\alpha$ , celui du No. 94. Soient donc

$$(95, 2) \begin{cases} \sin \alpha_{11} = \frac{4}{5}, & \sin \alpha_{21} = \frac{1}{3}, & \sin \gamma_{11} = \frac{2}{5}, \\ \cos \alpha_{11} = \frac{3}{5}, & \cos \alpha_{21} = \frac{5}{13}, & \cos \gamma_{11} = \frac{7}{25}, \end{cases} \quad \epsilon_3 = \zeta_{13} = \zeta_{23} = 1.$$

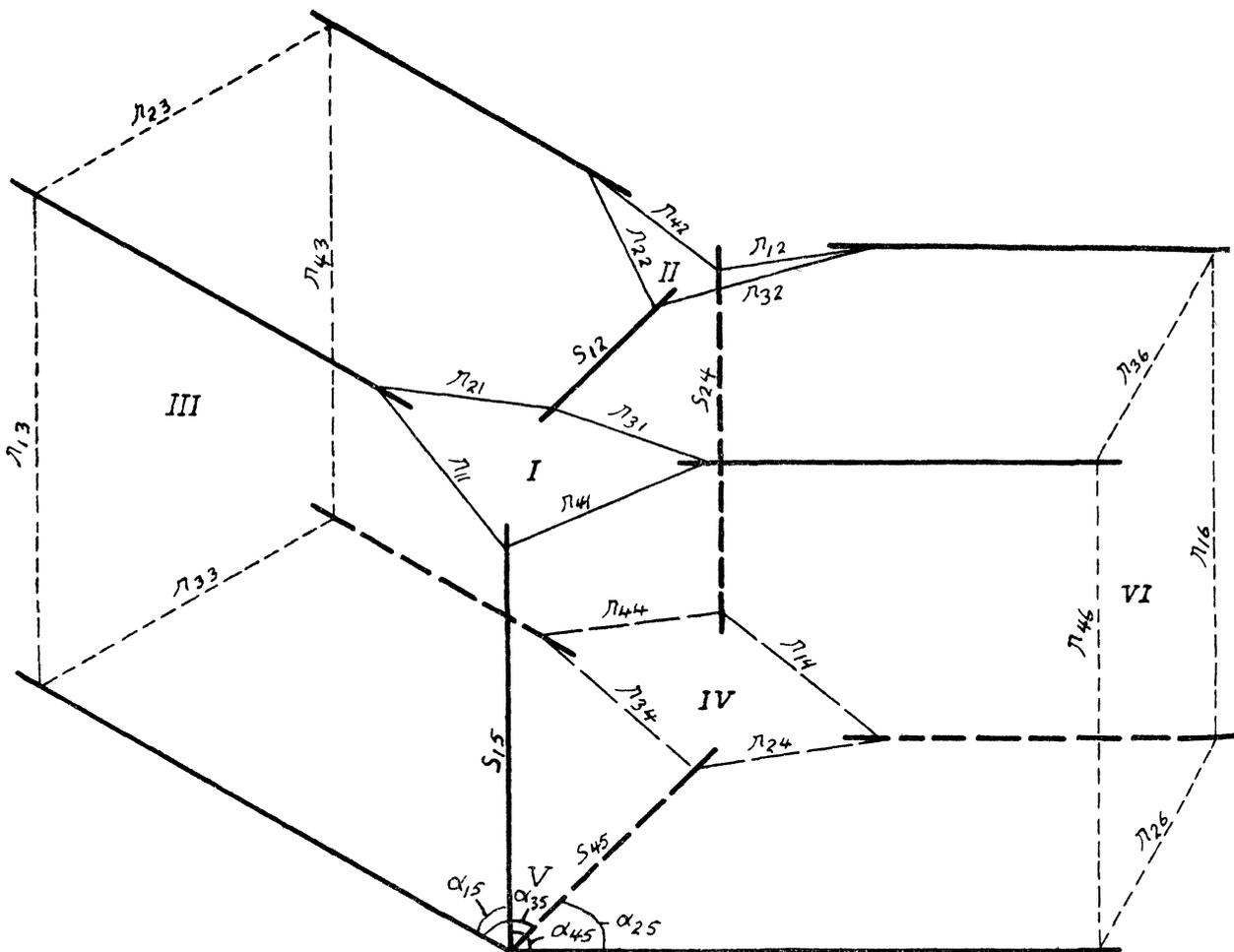


Fig. 95, 1.

Soit en outre

$$(95, 3) \quad \frac{r_{32}}{4} = \frac{r_{11}}{5}.$$

Les formules (95, 1) donnent

$$\begin{aligned}
 (95, 4) \quad \frac{r_{11} = r_{31}}{455} &= \frac{r_{21} = r_{44}}{91} = \frac{r_{14} = r_{34}}{105} = \frac{r_{21} = r_{41}}{525} = \frac{r_{32} = r_{42}}{364} = \frac{r_{12} = r_{22}}{420} \\
 &= \frac{r_{26} = r_{36}}{325} = \frac{r_{23} = r_{33}}{375} = \frac{r_{16} = r_{46}}{1875} = \frac{r_{13} = r_{43}}{1625} \\
 &= \frac{s_{12} = s_{45}}{390} = \frac{s_{15} = s_{24}}{1950}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, les constantes du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par les formules (95, 2) et (95, 3), sont données par (94, 2) et (95, 4).

**96. Vingt-quatrième mécanisme. Deux parallélogrammes sans axe commun, deux angles tétraèdres totalement décomposés également sans axe commun, et deux isogrammes. Exemple numérique.** Il est évident d'après les formules (95, 1) que le seul isogramme du mécanisme précédent qu'on peut remplacer par un angle tétraèdre est celui dont les longueurs perpendiculaires aux axes sont désignées par  $r_{12}$ ,  $r_{22}$ ,  $r_{32}$ ,  $r_{42}$ . Je considère maintenant ce cas-là.

Soient

$$r_{12} = r_{22} = r_{32} = r_{42} = 0.$$

Les formules (95, 1) deviennent

$$(96, 1) \quad \left\{ \begin{aligned}
 &\epsilon_3 = 1, \quad \sin \gamma_{31} = \sin \gamma_{11}, \quad \cos \gamma_{31} = \epsilon_1 \cos \gamma_{11}, \\
 &\frac{s_{12} = s_{45} = s_{15} = s_{24}}{\zeta \sin \gamma_{11}} = \frac{r_{23} = r_{33} = r_{16} = r_{46}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{13} = r_{43} = r_{26} = r_{36}}{\sin \alpha_{11}}, \\
 &= \frac{r_{11} = r_{31} = r_{24} = r_{44}}{\zeta' \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{11}} = \frac{r_{21} = r_{41} = r_{14} = r_{34}}{\zeta' \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{21}}, \\
 &\zeta^2 = \zeta'^2 = 1.
 \end{aligned} \right.$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on n'a qu'à se donner les trois angles  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\gamma_{11}$  tels que les quatre fonctions

$$\sin \alpha_{11}, \quad \sin \alpha_{21}, \quad \zeta \sin \gamma_{11}, \quad \zeta' \cos \gamma_{11} \quad (\zeta^2 = \zeta'^2 = 1),$$

soient positives. Les autres  $\alpha$  du mécanisme seront donnés par les formules (59, 1) et (93, 5) (dans lesquelles il convient de poser  $\zeta_{13} = \zeta_{23}$ ). Toutes les longueurs sont données à un facteur arbitraire de proportionnalité près par les formules (96, 1). *Le mécanisme dépend ainsi de quatre constantes arbitraires.*

A la figure (96, 1) on voit le schéma de ce mécanisme.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme, je conserve en ce qui concerne les angles  $\alpha$  celui du No. 94. Soient donc

$$(96, 2) \quad \begin{cases} \sin \alpha_{11} = \frac{4}{5}, & \sin \alpha_{21} = \frac{12}{13}, & \sin \gamma_{11} = \frac{24}{25}, \\ \cos \alpha_{11} = \frac{3}{5}, & \cos \alpha_{21} = \frac{5}{13}, & \cos \gamma_{11} = \frac{7}{25}. \end{cases}$$

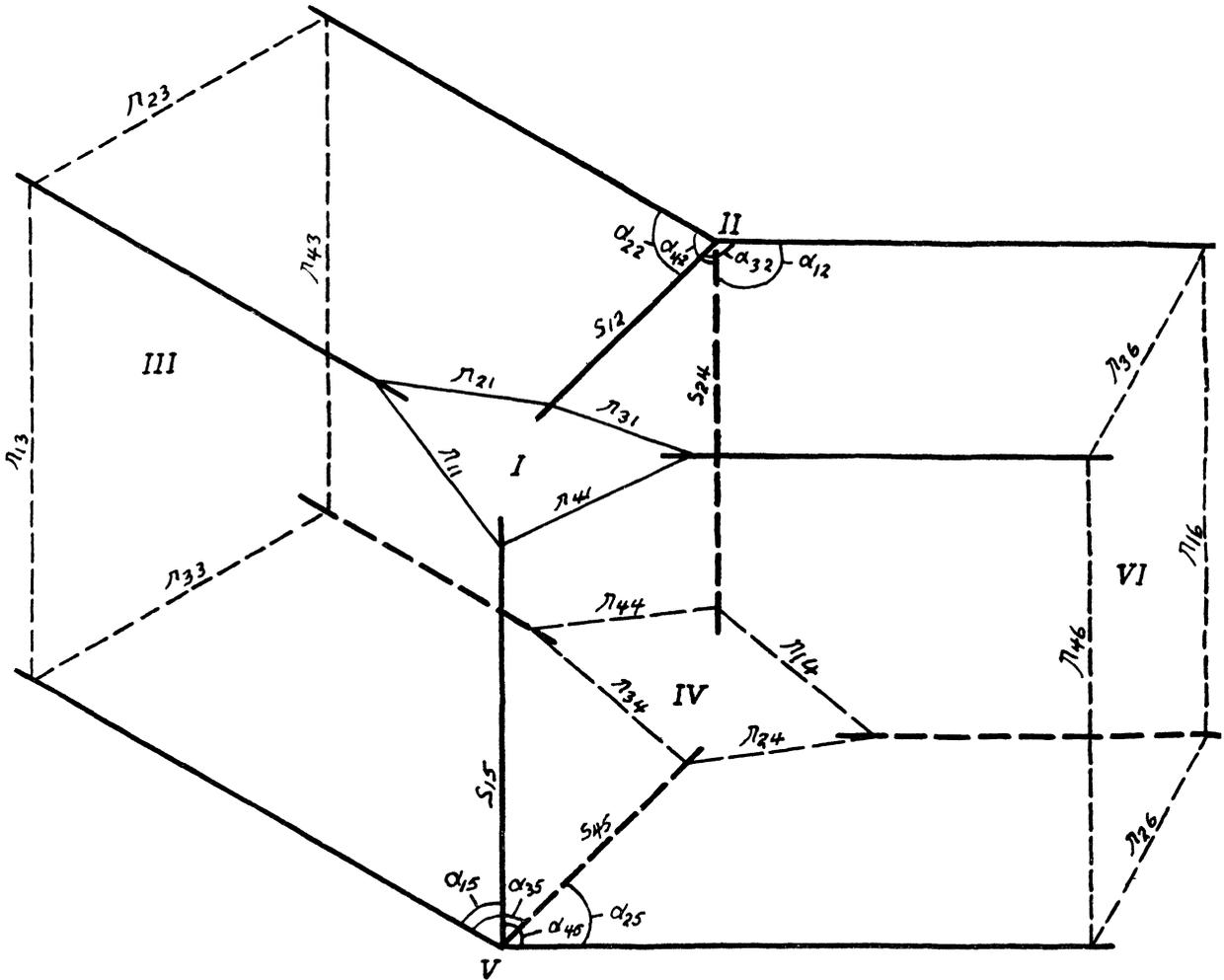


Fig. 96, 1.

On se rappelle que cette fois  $\epsilon_3 = 1$ ,  $\zeta_{13} = \zeta_{23}$  obligatoirement. Soient en outre  $\zeta_{13} = \zeta_{23} = 1$ .

Les formules (96, 1) donnent

$$(96, 3) \quad \frac{s_{12} = s_{45} = s_{15} = s_{24}}{390} = \frac{r_{23} = r_{33} = r_{16} = r_{46}}{375} = \frac{r_{13} = r_{43} = r_{26} = r_{36}}{325} \\ = \frac{r_{11} = r_{31} = r_{24} = r_{44}}{91} = \frac{r_{21} = r_{41} = r_{14} = r_{34}}{105}.$$

Ainsi, les constantes du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par les formules (96, 2) sont données par les formules (94, 2) et (96, 3).

**97. Vingt-cinquième mécanisme. Deux contre-parallélogrammes sans axe commun et quatre isogrammes.** Je reprends maintenant l'analyse au signe  $\times$  qui suit de peu les formules (93, 6).

Soit cette fois  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ . On aura

$$(97, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{13} = -\epsilon_3 \zeta_{23}, \\ \delta_3 = \frac{r_{13} - \epsilon_3 r_{23}}{\zeta_{13} r_{23} - \zeta_{23} r_{13}} = \epsilon_3 \zeta_{13} \frac{r_{13} - \epsilon_3 r_{23}}{r_{13} + \epsilon_3 r_{23}} = t_{13} t_{23}, \\ \delta_6 = \frac{r_{16} - \epsilon_3 r_{26}}{\zeta_{16} r_{26} - \zeta_{26} r_{16}} = -\epsilon_3 \zeta_{13} \frac{r_{16} - \epsilon_3 r_{26}}{r_{16} + \epsilon_3 r_{26}} = t_{16} t_{36}. \end{array} \right.$$

Ces formules montrent que les deux quadrilatères plans III et VI sont des contre-parallélogrammes.

L'équation  $\delta_6 = \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_3$  (59, 4) donne

$$(97, 2) \quad r_{13} r_{16} = r_{23} r_{26}.$$

D'autre part, on a

$$\delta_1 = \frac{1 - \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{21} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{11})^{\epsilon_1}}{1 + \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{21} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{11})^{\epsilon_1}}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{12} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{32})^{\epsilon_1}}{1 + \epsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{12} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{32})^{\epsilon_1}}.$$

En vertu de celles-ci, de (93, 5), et de (97, 2), l'équation  $\delta_1 \delta_2 \delta_3 = 1$  donne

$$(97, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3, \\ \frac{r_{13} = r_{43}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{23} = r_{33}}{\sin \alpha_{21}}, \quad \frac{r_{26} = r_{36}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\sin \alpha_{21}}. \end{array} \right.$$

A la figure (97, 1) on voit le schéma de ce mécanisme. Comme d'habitude j'ai marqué sur chaque arête d'abord sa longueur, et ensuite,

entre parenthèses, son premier cosinus directeur\* orienté dans le sens de la flèche.

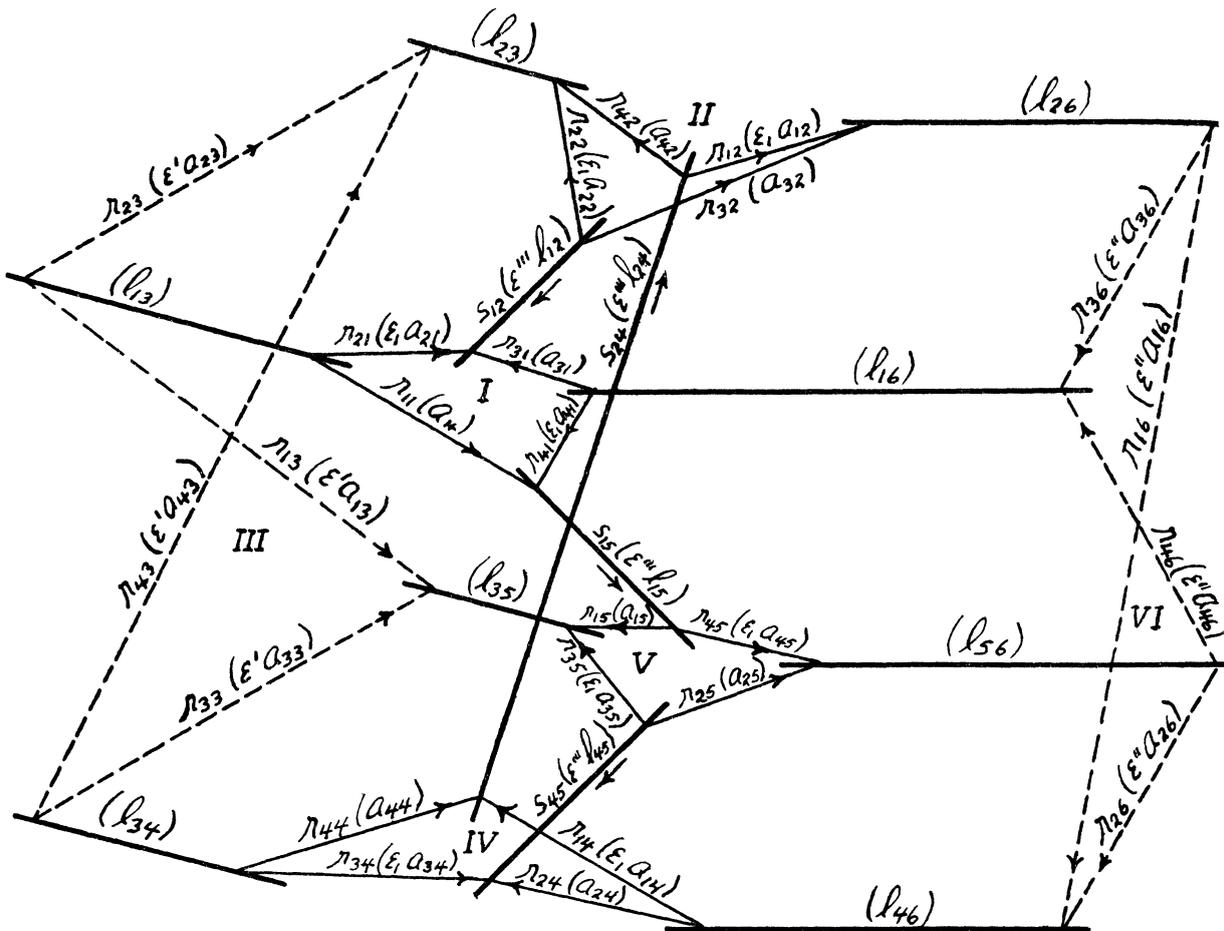


Fig. 97, 1.

Les équations de fermeture du corps I, II, III sont

$$r_{23} \epsilon' a_{23} - r_{21} a_{21} + s_{12} \epsilon''' l_{12} - r_{22} \epsilon_1 a_{22} + L l_{13} + M l_{23} = 0,$$

$$r_{23} \epsilon' b_{23} - r_{21} b_{21} + s_{12} \epsilon''' m_{12} - r_{22} \epsilon_1 b_{22} + L m_{13} + M m_{23} = 0,$$

$$r_{23} \epsilon' c_{23} - r_{21} c_{21} + s_{12} \epsilon''' n_{12} - r_{22} \epsilon_1 c_{22} + L n_{13} + M n_{23} = 0,$$

où  $L$  et  $M$  sont des quantités sans intérêt qui disparaîtront des formules

\*  $\epsilon'^2 = \epsilon''^2 = \epsilon'''^2 = 1$ .

de la suite. Quand on projette ces équations sur les trois vecteurs  $(a_{23}, b_{23}, c_{23}), (a_{21}, b_{21}, c_{21}), (a_{22}, b_{22}, c_{22})$  on obtient

$$(97, 4) \quad \frac{r_{23}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{s_{12}}{-\epsilon' \epsilon''' \sin \gamma_{21}} = \frac{\zeta_{23} r_{21} + r_{22}}{\epsilon_1 \epsilon' \cos \gamma_{21} \sin \alpha_{21}}.$$

Il y aura sept autres systèmes d'équations analogues à celui-ci qui appartiennent aux sept autres corps du mécanisme.

D'autre part, on a

$$(97, 5) \quad \begin{cases} \frac{r_{31} = r_{11}}{\sin \alpha_{11}} = \frac{r_{41} = r_{21}}{\sin \alpha_{21}}, & \frac{r_{22} = r_{12}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{r_{42} = r_{32}}{\sin \alpha_{32}}, \\ \frac{r_{25} = r_{15}}{\sin \alpha_{15}} = \frac{r_{45} = r_{35}}{\sin \alpha_{35}}, & \frac{r_{34} = r_{14}}{\sin \alpha_{14}} = \frac{r_{44} = r_{24}}{\sin \alpha_{24}}. \end{cases}$$

Quand on exprime que les équations (97, 3), (97, 5), et les seize équations du type (97, 4) sont compatibles, on trouve

$$(97, 6) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = 1, \quad \zeta_{13} = \zeta_{23}, \\ \frac{s_{12} = s_{15} = s_{24} = s_{45}}{\epsilon''' \sin \gamma_{11} \sin \gamma_{31}} = \frac{r_{23} = r_{33}}{\epsilon' \sin \gamma_{31} \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{13} = r_{43}}{\epsilon' \sin \gamma_{31} \sin \alpha_{11}} \\ = \frac{r_{11} = r_{31} = r_{24} = r_{44}}{\frac{1}{2} \zeta_{13} \sin (\gamma_{31} + \gamma_{11}) \sin \alpha_{11}} = \frac{r_{32} = r_{42} = r_{15} = r_{25}}{\frac{1}{2} \sin (\gamma_{31} - \gamma_{11}) \sin \alpha_{11}} \\ = \frac{r_{26} = r_{36}}{\epsilon'' \sin \gamma_{11} \sin \alpha_{11}} = \frac{r_{21} = r_{41} = r_{14} = r_{34}}{\frac{1}{2} \zeta_{13} \sin (\gamma_{31} + \gamma_{11}) \sin \alpha_{21}} \\ = \frac{r_{12} = r_{22} = r_{35} = r_{45}}{\frac{1}{2} \sin (\gamma_{31} - \gamma_{11}) \sin \alpha_{21}} = \frac{r_{16} = r_{46}}{\epsilon'' \sin \gamma_{11} \sin \alpha_{21}}. \end{aligned} \right.$$

Pour que ces équations puissent être satisfaites par des valeurs positives des longueurs, il faut et il suffit que

$$(97, 7) \quad \begin{cases} \epsilon''' (\cot \gamma_{11} - \cot \gamma_{31}) > 0, & \epsilon''' \epsilon' \sin \gamma_{11} > 0, & \epsilon''' \epsilon'' \sin \gamma_{31} > 0, \\ \epsilon''' \zeta_{13} (\cot \gamma_{11} + \cot \gamma_{31}) > 0. \end{cases}$$

On voit que, quelles que soient les valeurs de  $\gamma_{11}$  et de  $\gamma_{31}$ , les symboles  $\epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \zeta_{13}$  peuvent toujours être déterminés de façon unique.

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme, on doit commencer par se donner les quatre angles  $\gamma_{11}, \gamma_{31}, \alpha_{11}, \alpha_{21}$  dont les deux derniers doivent être compris entre 0 et  $\pi$ . On détermine ensuite les symboles  $\epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \zeta_{13}$  dont les carrés sont égaux à l'unité, au moyen des conditions (97, 7). Les formules (59, 1) et (93, 5), dans lesquelles il convient de poser  $\zeta_{13} = \zeta_{23}$  donnent alors les valeurs de tous les autres  $\alpha$ . Finalement les

formules (97, 6) donnent, à un facteur arbitraire de proportionnalité près, les valeurs des longueurs. *Le mécanisme dépend ainsi de cinq constantes arbitraires.*

**98. Résumé et exemple numérique du No. précédent.** Ce mécanisme est composé de deux contre-parallélogrammes et de quatre isogrammes, disposés comme l'indique la figure (97, 1). Les quatre isogrammes ne jouissent que d'une seule déformation. Deux isogrammes conjugués ont leurs arêtes correspondantes égales, la correspondance étant définie par les formules (97, 6) et la figure (97, 1). Le nombre des *constantes arbitraires* est de *cinq*, dont quatre angles et une longueur. La déformation du mécanisme est *algébrique*.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme, je me donne les quatre constantes  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{31}$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$  de la manière suivante : soient

$$(98, 1) \quad \begin{cases} \sin \alpha_{11} = \frac{4}{5}, & \sin \alpha_{21} = \frac{1}{3}, & \sin \gamma_{11} = \frac{2}{5}, & \sin \gamma_{31} = \frac{1}{7}, \\ \cos \alpha_{11} = \frac{3}{5}, & \cos \alpha_{21} = \frac{2}{3}, & \cos \gamma_{11} = \frac{3}{5}, & \cos \gamma_{31} = \frac{6}{7}. \end{cases}$$

On se rappelle qu'on a obligatoirement  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = 1$ ,  $\zeta_{13} = \zeta_{23}$ . Les formules (97, 6) donnent alors

$$(98, 2) \quad \begin{aligned} \frac{s_{12} = s_{15} = s_{24} = s_{45}}{11700} &= \frac{r_{11} = r_{31} = r_{24} = r_{44}}{3861} = \frac{r_{21} = r_{41} = r_{14} = r_{34}}{4455} \\ &= \frac{r_{12} = r_{22} = r_{35} = r_{45}}{1305} = \frac{r_{32} = r_{42} = r_{15} = r_{25}}{1131} \\ &= \frac{r_{13} = r_{43}}{9750} = \frac{r_{23} = r_{33}}{11250} = \frac{r_{16} = r_{46}}{12240} = \frac{r_{26} = r_{36}}{10608}. \end{aligned}$$

Ensuite les formules (93, 5) donnent

$$(98, 3) \quad \begin{cases} \sin \alpha_{15} = \sin \alpha_{25} = \sin \alpha_{24} = \sin \alpha_{44} = \sin \alpha_{32} = \sin \alpha_{42} = \sin \alpha_{31} \\ \hspace{15em} = \sin \alpha_{11} = 0,800000 \\ \sin \alpha_{35} = \sin \alpha_{45} = \sin \alpha_{14} = \sin \alpha_{34} = \sin \alpha_{12} = \sin \alpha_{22} = \sin \alpha_{41} \\ \hspace{15em} = \sin \alpha_{21} = 0,923077 \\ \cos \alpha_{15} = \cos \alpha_{25} = -\cos \alpha_{24} = -\cos \alpha_{44} = -\cos \alpha_{32} = -\cos \alpha_{42} \\ \hspace{15em} = \cos \alpha_{31} = \cos \alpha_{11} = 0,600000 \\ \cos \alpha_{35} = \cos \alpha_{45} = \cos \alpha_{14} = \cos \alpha_{34} = -\cos \alpha_{12} = -\cos \alpha_{22} \\ \hspace{15em} = -\cos \alpha_{41} = -\cos \alpha_{21} = -0,384615+ \end{cases}$$

99. Vingt-sixième mécanisme. Deux contre-parallélogrammes sans axe commun, deux isogrammes également sans axe commun, et deux angles tétraédres totalement décomposés. Exemple numérique. Il est évident d'après les équations (97, 6) qu'aucun isogramme du mécanisme du No. 97 ne peut être remplacé par un angle tétraèdre sans que son conjugué le soit en même temps. Je considère

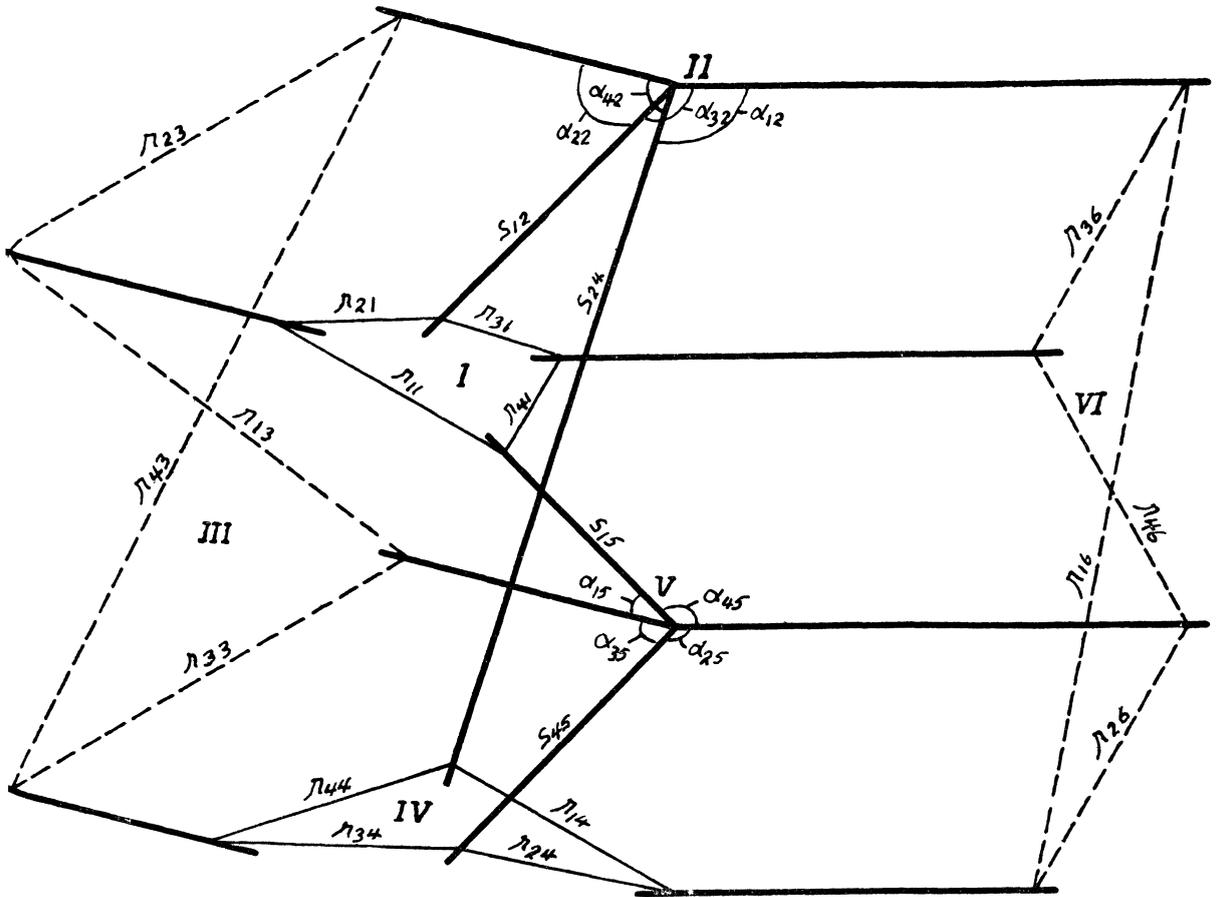


Fig. 99, 1.

maintenant le cas où les deux isogrammes du mécanisme du No. 97 dont les arêtes sont  $r_{i2}$  et  $r_{i5}$  sont remplacés par des angles tétraédres totalement décomposés.

Soient

$$r_{i2} = 0 = r_{i5}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On aura, en vertu des formules (97, 6),

$$(99, 1) \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma_{31} = \epsilon' \epsilon'' \sin \gamma_{11}, \quad \cos \gamma_{31} = \epsilon' \epsilon'' \cos \gamma_{11}, \\ \frac{s_{12} = s_{15} = s_{24} = s_{45}}{\zeta \sin \gamma_{11}} = \frac{r_{23} = r_{33} = r_{16} = r_{46}}{\sin \alpha_{21}} = \frac{r_{13} = r_{43} = r_{26} = r_{36}}{\sin \alpha_{11}} \\ = \frac{r_{11} = r_{31} = r_{24} = r_{44}}{\zeta' \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{11}} = \frac{r_{21} = r_{41} = r_{14} = r_{34}}{\zeta' \cos \gamma_{11} \sin \alpha_{21}}, \\ \text{où} \quad \zeta = \epsilon' \epsilon''', \quad \zeta' = \epsilon''' \zeta_{13}. \end{array} \right.$$

Pour que ces équations puissent être satisfaites par des valeurs positives des longueurs, il faut qu'on ait

$$(99, 2) \quad \zeta \sin \gamma_{11} > 0, \quad \zeta' \cot \gamma_{11} > 0.$$

Pour *construire un modèle* de ce mécanisme on commence par se donner les trois angles  $\gamma_{11}$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$  dont les deux derniers doivent être compris entre 0 et  $\pi$ . On détermine ensuite les symboles  $\zeta$ ,  $\zeta'$  dont les carrés sont égaux à l'unité, au moyen des conditions (99, 2). Les formules (59, 1) et (93, 5) (dans lesquelles il convient de poser  $\zeta_{13} = \zeta_{23}$ ) donnent les valeurs de tous les autres  $\alpha$ . Finalement, les formules (99, 1) donnent à un facteur arbitraire de proportionnalité près les valeurs des longueurs. *Le mécanisme dépend ainsi de quatre constantes arbitraires.* On voit son schéma à la figure (99, 1).

On voit aux formules (99, 1) qu'il est impossible de remplacer un troisième isogramme par un angle tétraèdre.

Pour avoir un *exemple numérique* de ce mécanisme, je conserve, en ce qui concerne les angles  $\alpha$  celui du No. 98. Soient donc

$$(99, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{11} = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha_{21} = \frac{1}{3}, \quad \sin \gamma_{11} = \frac{2}{5}, \\ \cos \alpha_{11} = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha_{21} = \frac{5}{13}, \quad \cos \gamma_{11} = \frac{7}{25}, \end{array} \right. \quad \zeta_{13} = \zeta_{23} = -1.$$

Les formules (99, 1) donnent

$$(99, 4) \quad \frac{s_{12} = s_{15} = s_{24} = s_{45}}{390} = \frac{r_{23} = r_{33} = r_{16} = r_{46}}{375} = \frac{r_{13} = r_{43} = r_{26} = r_{36}}{325} \\ = \frac{r_{11} = r_{31} = r_{24} = r_{44}}{91} = \frac{r_{21} = r_{41} = r_{14} = r_{34}}{105}.$$

Ainsi les constantes du mécanisme dont les constantes arbitraires sont données par les formules (99, 3) sont données par (98, 3) et (99, 4).

## Chapitre IX.

## REPERTOIRE DE TRAVAUX ANTERIEURS.

**100. Recherches de Darboux.** Darboux a démontré\* que le système plan de Kempe possède sept cas de déformabilité. Il les a numérotés depuis *a* jusqu'à *g*. Ce sont les suivants :

- (*a*) Deux parallélogrammes et quatre quadrilatères irréductibles.
- (*b*) Six parallélogrammes.
- (*c*) Six contre-parallélogrammes.
- (*d*) Deux quadrilatères à diagonales perpendiculaires, et quatre quadrilatères bi-isocèles.
- (*e*) Deux contre-parallélogrammes et quatre quadrilatères irréductibles.
- (*f*) Six quadrilatères irréductibles.—Premier Cas.
- (*g*) Six quadrilatères irréductibles.—Second Cas.

**101. Recherches de M. Bricard.** M. Bricard a démontré† que l'octaèdre à sommets tous propres possède les quatre cas de déformabilité suivants :

1. Six angles tétraèdres irréductibles.
2. Deux angles tétraèdres circonscriptibles et quatre angles tétraèdres *rhomboïdes* (bi-isogones).
3. Quatre angles tétraèdres irréductibles et deux angles tétraèdres à faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux (totalement décomposés).
4. Six angles tétraèdres à faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux (totalement décomposés).

**102. Recherches de M. Bennett.** M. Bennett a fait remarquer‡ que les représentations sphériques des axes des octaèdres de M. Bricard donnent des cas de déformabilité du mécanisme de Kempe sur la sphère. Sa méthode a *a priori* les deux inconvénients suivants : elle ne donne que des mécanismes dont les axes sont trois à trois dans des plans, et elle ne donne ni le mécanisme du No. 48 ni celui du No. 52.

Dans un mémoire sur l'*isogramme*§ M. Bennett a fait connaître un cas particulier du mécanisme du No. 86.

\* *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1879, p. 151.

† *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897, p. 113.

‡ *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1912, pp. 322, 330, et 331.

§ *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1914, p. 166.

## NOTE SUR LES CHAINES FERMÉES DE QUATRE COUPLES ROTOÏDES.

Il m'a paru utile d'adjoindre au travail précédent une démonstration du théorème énoncé au No. 1, savoir que la chaîne fermée de quatre couples rotoïdes ne possède que trois cas de déformabilité.

Soient  $l_i, m_i, n_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) les cosinus directeurs des quatre axes de la chaîne, et  $a_i, b_i, c_i$  ceux du vecteur normal aux axes  $i$  et  $i+1$ . Soient en outre  $s_i$  la longueur portée sur l'axe  $i$  entre les deux segments perpendiculaires qui y aboutissent, et  $r_i$  la longueur portée sur le segment  $i$  depuis l'axe  $i$  jusqu'à l'axe  $i+1$ .

Si l'on adopte une orientation convenable des cosinus directeurs, les équations de fermeture s'écriront

$$(N, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + s_4 l_4 + r_1 \epsilon_1 a_1 + r_2 \epsilon_2 a_2 + r_3 \epsilon_3 a_3 + r_4 \epsilon_4 a_4 = 0, \\ s_1 m_1 + s_2 m_2 + s_3 m_3 + s_4 m_4 + r_1 \epsilon_1 b_1 + r_2 \epsilon_2 b_2 + r_3 \epsilon_3 b_3 + r_4 \epsilon_4 b_4 = 0, \\ s_1 n_1 + s_2 n_2 + s_3 n_3 + s_4 n_4 + r_1 \epsilon_1 c_1 + r_2 \epsilon_2 c_2 + r_3 \epsilon_3 c_3 + r_4 \epsilon_4 c_4 = 0, \\ (\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = \epsilon_4^2 = 1). \end{array} \right.$$

Comme l'analyse angulaire du problème actuel est identique à celle de l'angle tétraèdre étudié au chapitre II (à condition de convenir que les quatre corps se suivent dans l'ordre 1, 2, 3, 4), j'adopte intégralement toutes les formules de ce chapitre. On se rappelle en particulier que les tangentes des demi dièdres alternes satisfont aux équations

$$(N, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \nu t_2^2 t_4^2 + p_1 p_2 t_2^2 - p_3 p_4 t_4^2 + \mu \sigma = 0, \\ \lambda \mu t_1^2 t_3^2 + p_1 p_4 t_1^2 - p_2 p_3 t_3^2 + \nu \sigma = 0. \end{array} \right.$$

D'autre part, si l'on projette les équations (N, 1) sur les quatre axes, on trouve

$$(N, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} [s_1 + s_2 \cos \alpha_1 + s_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + s_4 \cos \alpha_4](1+t_2^2)(1+t_4^2) \\ \quad - s_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 (1-t_2^2)(1+t_4^2) + 2\epsilon_2 r_2 \sin \alpha_1 t_2 (1+t_4^2) \\ \quad + 2\epsilon_3 r_3 \sin \alpha_4 t_4 (1+t_2^2) = 0, \\ [s_1 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 + s_2 \cos \alpha_2 + s_3 + s_4 \cos \alpha_3](1+t_2^2)(1+t_4^2) \\ \quad - s_1 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 (1-t_4^2)(1+t_2^2) + 2\epsilon_4 r_4 \sin \alpha_3 t_4 (1+t_2^2) \\ \quad + 2\epsilon_1 r_1 \sin \alpha_2 t_2 (1+t_4^2) = 0, \\ [s_1 \cos \alpha_4 + s_2 \cos \alpha_4 \cos \alpha_1 + s_3 \cos \alpha_3 + s_4](1+t_3^2)(1+t_1^2) \\ \quad - s_2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_1 (1-t_1^2)(1+t_3^2) + 2\epsilon_1 r_1 \sin \alpha_4 t_1 (1+t_3^2) \\ \quad + 2\epsilon_2 r_2 \sin \alpha_3 t_3 (1+t_1^2) = 0, \\ [s_1 \cos \alpha_1 + s_2 + s_3 \cos \alpha_2 + s_4 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3](1+t_3^2)(1+t_1^2) \\ \quad - s_4 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 (1-t_3^2)(1+t_1^2) + 2\epsilon_3 r_3 \sin \alpha_2 t_3 (1+t_1^2) \\ \quad + 2\epsilon_4 r_4 \sin \alpha_1 t_1 (1+t_3^2) = 0. \end{array} \right.$$

Il faut que les deux premières des équations (N, 3) soient identiques à la première de (N, 2), et que les deux dernières des équations (N, 3) soient identiques à la dernière de (N, 2); à moins, bien entendu, que les équations (N, 2) ne se décomposent. Dans ce dernier cas il faut que les deux premières de (N, 3) aient un facteur en commun avec la première de (N, 2), et que les deux dernières de (N, 3) en aient un en commun avec la deuxième de (N, 2). Ces conditions sont également suffisantes, sauf dans le cas où il n'y aurait pas trois des quatre axes qui ne soient pas équipollents. On verra que ce cas exceptionnel ne se présente pas.

Je considère en premier lieu le cas où les équations (N, 2) sont *irréductibles*. Puisqu'elles ne contiennent pas de puissance impaire des variables, il faut que les coefficients de ces puissances s'annulent dans les équations (N, 3). Cela entraîne

$$\begin{aligned} r_2 \sin a_1 = 0, \quad r_4 \sin a_3 = 0, \quad r_1 \sin a_4 = 0, \quad r_3 \sin a_2 = 0, \\ r_3 \sin a_4 = 0, \quad r_1 \sin a_2 = 0, \quad r_2 \sin a_3 = 0, \quad r_4 \sin a_1 = 0. \end{aligned}$$

Celles-ci n'ont que les quatre solutions suivantes :

$$(N, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \sin a_1 = 0, \quad \sin a_2 = 0, \quad \sin a_3 = 0, \quad \sin a_4 = 0; \\ 2. \quad \quad \quad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0; \\ 3. \quad \quad \quad r_1 = r_3 = 0, \quad \sin a_1 = 0, \quad \sin a_3 = 0; \\ 4. \quad \quad \quad r_2 = r_4 = 0, \quad \sin a_2 = 0, \quad \sin a_4 = 0. \end{array} \right.$$

Le premier cas des équations (N, 4) est celui du *quadrilatère plan* : je n'insiste pas là-dessus.

Le second cas donne, en vertu de (N, 3),

$$\begin{aligned} s_3 \sin a_1 \sin a_2 = 0, \quad s_1 \sin a_3 \sin a_4 = 0, \quad s_2 \sin a_4 \sin a_1 = 0, \\ s_4 \sin a_2 \sin a_3 = 0. \end{aligned}$$

Puisque tous les  $r$  sont nuls, aucune des quatre quantités  $\sin a_i$  ne peut s'annuler, sans que deux axes adjacents se confondent, ce qui rendrait impossible toute déformabilité. Il ne reste donc que le cas connu de *l'angle tétraèdre* pour lequel  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$ .

Les troisième et quatrième cas des équations (N, 4) sont inadmissibles, parce qu'ils donnent lieu à deux axes adjacents confondus.

Je passe aux premiers cas de *décomposition*. Soient

$$(N, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = \frac{1}{2}\pi - \zeta(\frac{1}{2}\pi - \alpha_1), \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}\pi - \zeta(\frac{1}{2}\pi - \alpha_2), \quad t_4 = \epsilon t_2, \quad t_3 = \epsilon \zeta t_1, \\ \epsilon^2 = \zeta^2 = 1. \end{array} \right.$$

Les équations (N, 3) s'écrivent maintenant sous la forme suivante :

$$(N, 6) \quad \left\{ \begin{array}{l} [s_1 + s_2 \cos \alpha_1 + s_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + s_4 \zeta \cos \alpha_2](1 + t_2^2) \\ \quad - s_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 (1 - t_2^2) + 2[\epsilon_2 r_2 \sin \alpha_1 + \epsilon_3 r_3 \sin \alpha_2] t_2 = 0, \\ [s_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_2 + s_3 + \zeta s_4 \cos \alpha_1](1 + t_2^2) \\ \quad - s_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 (1 - t_2^2) + 2[\epsilon_4 r_4 \sin \alpha_1 + \epsilon_1 r_1 \sin \alpha_2] t_2 = 0, \\ [\zeta s_1 \cos \alpha_2 + \zeta s_2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \zeta s_3 \cos \alpha_1 + s_4](1 + t_1^2) \\ \quad - s_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 (1 - t_1^2) + 2[\epsilon_2 \epsilon \zeta r_2 \sin \alpha_1 + \epsilon_1 r_1 \sin \alpha_2] t_1 = 0, \\ [s_1 \cos \alpha_1 + s_2 + s_3 \cos \alpha_2 + \zeta s_4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2](1 + t_1^2) \\ \quad - s_4 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 (1 - t_1^2) + 2[\epsilon_4 r_4 \sin \alpha_1 + \epsilon_3 \epsilon \zeta r_3 \sin \alpha_2] t_1 = 0. \end{array} \right.$$

Comme chacune des équations (N, 6) ne contient qu'une seule variable, il faut que ses coefficients soient tous nuls. Parmi d'autres conditions on trouve

$$(N, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0, \quad s_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0, \quad s_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0, \\ s_4 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0. \end{array} \right.$$

Si les deux quantités  $\sin \alpha_1$  et  $\sin \alpha_2$  étaient nulles, on aurait affaire à un quadrilatère plan. Si une seule d'entre elles l'était, par exemple  $\sin \alpha_2$ , on aurait  $r_2 = r_4 = 0$  en vertu de

$$(N, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_2 r_2 \sin \alpha_1 + \epsilon_3 r_3 \sin \alpha_2 = 0, \quad \epsilon_4 r_4 \sin \alpha_1 + \epsilon_1 r_1 \sin \alpha_2 = 0, \\ \epsilon_2 \epsilon \zeta r_2 \sin \alpha_1 + \epsilon_1 r_1 \sin \alpha_2 = 0, \quad \epsilon_4 r_4 \sin \alpha_1 + \epsilon_3 \epsilon \zeta r_3 \sin \alpha_2 = 0, \end{array} \right.$$

ce qui voudrait dire que les deux axes 2 et 3 se confondent. Les conditions (N, 7) ne peuvent donc pas être satisfaites autrement que par

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0,$$

et, cela étant, tous les coefficients des équations (N, 6) seront nuls dès que les conditions (N, 8) seront satisfaites. Celles-ci peuvent s'écrire comme suit (en tenant compte de l'hypothèse qui veut que les sinus de tous les  $\alpha$  soient positifs) :

$$(N, 9) \quad \frac{r_1 = r_3}{\sin \alpha_1} = \frac{r_2 = r_4}{\sin \alpha_2}, \quad \frac{\epsilon_4}{1} = \frac{\epsilon_3}{\epsilon \zeta} = \frac{\epsilon_2}{\zeta} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}.$$

C'est le cas de l'*isogramme* de M. Bennett. Analytiquement, le mécanisme dont M. Bricard parle dans ses *Leçons de Cinématique*, 1927, No. 413, 2°, est un cas particulier de celui-ci.

Il reste encore deux modes de décomposition à étudier. Ceux-ci sont donnés par

$$(N, 10) \quad \begin{cases} \alpha_2 \equiv \frac{1}{2}\pi - \zeta(\frac{1}{2}\pi - \alpha_1), & \alpha_4 = \frac{1}{2}\pi - \zeta(\frac{1}{2}\pi - \alpha_3), & t_3 = \zeta t_1, \\ \sin^2 \alpha_1 (t_4^2 + 1) t_2^{(1-\zeta)} - \sin^2 \alpha_3 (t_2^2 + 1) t_4^{(1-\zeta)} = 0, & \zeta^2 = 1. \end{cases}$$

Les deux dernières des équations (N, 3) s'écrivent maintenant comme suit :

$$(N, 11) \quad \begin{cases} [\zeta s_1 \cos \alpha_3 + \zeta s_2 \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 + s_3 \cos \alpha_3 + s_4](1 + t_1^2) \\ \quad - s_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 (1 - t_1^2) + 2 \sin \alpha_3 (\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 \zeta r_2) t_1 = 0, \\ [s_1 \cos \alpha_1 + s_2 + \zeta s_3 \cos \alpha_1 + \zeta s_4 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3](1 + t_1^2) \\ \quad - s_4 \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 (1 - t_1^2) + 2 \sin \alpha_1 (\epsilon_3 \zeta r_3 + \epsilon_4 r_4) t_1 = 0. \end{cases}$$

Ici encore il faut que les coefficients des différentes puissances de  $t_1$  soient nuls. En particulier, on a les deux conditions

$$\sin \alpha_3 (\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 \zeta r_2) = 0, \quad \sin \alpha_1 (\epsilon_3 \zeta r_3 + \epsilon_4 r_4) = 0.$$

Il serait impossible que les deux quantités  $\sin \alpha_1$  et  $\sin \alpha_3$  s'annulassent, parce que cela donnerait lieu à un quadrilatère plan. Soient par exemple  $\sin \alpha_3 = 0$ ,  $\sin \alpha_1 \neq 0$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} r_4 = r_3, \quad \epsilon_4 = -\zeta \epsilon_3, \\ \cos \alpha_3 = \epsilon, \quad \epsilon^2 = 1; \end{aligned} \quad -\cos \alpha_1 = \frac{s_1 + \zeta s_3 + \zeta \epsilon s_4}{s_2} = \frac{s_2}{s_1 + \zeta s_3 + \zeta \epsilon s_4} = \pm 1,$$

ce qui fait que  $\sin \alpha_1 = 0$ , contrairement à l'hypothèse.

Il faut donc qu'on ait

$$(N, 12) \quad \begin{cases} r_4 = r_3, \quad r_2 = r_1, \quad \epsilon_4 = -\zeta \epsilon_3, \quad \epsilon_2 = -\zeta \epsilon_1, \quad s_2 = s_4 = 0, \\ (\zeta s_1 + s_3) \cos \alpha_3 = 0, \quad (s_1 + \zeta s_3) \cos \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Quand  $\cos \alpha_3 = \cos \alpha_1 = 0$ , on a  $t_4 = \epsilon t_2$ ,  $\epsilon^2 = 1$ , et les deux premières des équations (N, 3) s'écrivent

$$s_1(1 + t_2^2) - s_3(1 - t_2^2) + 2(\epsilon_3 \epsilon r_3 - \zeta \epsilon_1 r_1) t_2 = 0,$$

$$s_3(1 + t_2^2) - s_1(1 - t_2^2) + 2(\epsilon_1 r_1 - \epsilon \epsilon_3 \zeta r_3) t_2 = 0.$$

Celles-ci n'ont pas d'autre solution que  $s_1 = s_3$ ,  $r_1 = r_3$ . C'est un cas particulier de l'isogramme.

Quand  $s_1 = s_3$ ,  $\zeta = -1$  les deux premières de (N, 3), et la relation (N, 2) qui lie  $t_2$  à  $t_4$ , s'écrivent comme suit [toujours moyennant les

conditions (N, 10) et (N, 12)] :

$$(N, 13) \begin{cases} s_1 \sin^2 \alpha_1 (1+t_4^2) t_2^2 + \epsilon_1 r_1 \sin \alpha_1 (1+t_4^2) t_2 + \epsilon_3 r_3 \sin \alpha_3 (1+t_2^2) t_4 = 0, \\ s_1 \sin^2 \alpha_3 (1+t_2^2) t_4^2 + \epsilon_3 r_3 \sin \alpha_3 (1+t_2^2) t_4 + \epsilon_1 r_1 \sin \alpha_1 (1+t_4^2) t_2 = 0, \\ \sin^2 \alpha_1 (t_4^2+1) t_2^2 - \sin^2 \alpha_3 (t_2^2+1) t_4^2 = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations ne sauraient être identiques sans se décomposer, parce que la troisième ne contient pas de puissances impaires des variables, et que les coefficients de ces puissances dans les deux premières équations ne s'annulent que lorsqu'on retombe dans des cas déjà étudiés. La troisième de ces équations ne se décompose que lorsque  $\sin \alpha_1 = \epsilon' \sin \alpha_3$ ,  $\epsilon'^2 = 1$ , auquel cas on a  $t_4 = \epsilon'' t_2$ ,  $\epsilon''^2 = 1$ . Les deux premières s'écrivent alors

$$s_1 \sin \alpha_1 t_2 + (\epsilon_1 r_1 + \epsilon_3 \epsilon' \epsilon'' r_3) = 0, \quad s_1 \sin \alpha_1 t_2 + (\epsilon_3 \epsilon' \epsilon'' r_3 + \epsilon_1 r_1) = 0.$$

Celles-ci ont bien la solution  $s_1 = 0$ ,  $r_1 = r_3$ , mais ce n'est qu'un cas particulier de l'isogramme.

Le théorème qui est énoncé au No. 1, savoir que la chaîne fermée de quatre couples rotoïdes ne possède que trois cas de déformabilité, se trouve donc démontré.

## TABLE.

## Chapitre I.

## INTRODUCTION.

	PAGE
1. Enoncé du problème ... ..	5
2. Historique ... ..	6
3. Aperçu général de la méthode ... ..	7

## Chapitre II.

## L'ANGLE TETRAEDRE.

4. Conventions préliminaires ... ..	8
5. Identités fondamentales ... ..	9
6. Angle tétraèdre à plans diagonaux perpendiculaires ... ..	9
7. Etude de la variation des dièdres ... ..	10
8. Angle tétraèdre circonscriptible ... ..	10
9. Angle tétraèdre inscriptible ... ..	11
10. Décomposition de l'angle tétraèdre ... ..	12
11. Digression sur l'hexaèdre à faces quadrilatérales planes ... ..	14
12. Quadrilatère plan. Cas limite de l'angle tétraèdre ... ..	15
13. Quadrilatère plan. Etude directe ... ..	18
14. Isogramme ... ..	19

## Chapitre III.

## APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE WEIERSTRASS.

15. Formules préliminaires ... ..	21
16. Introduction de constantes elliptiques ... ..	22
17. Représentation paramétrique des dièdres ... ..	23
18. Représentation elliptique des angles faciaux ... ..	24
19. Nécessité que $m > -1$ ... ..	27
20. Etude des valeurs prises par la fonction $fu$ lorsque $-1 < m < 1$ ... ..	27
21. Valeurs des arguments constants qui donnent un angle tétraèdre réel lorsque $-1 < m < 1$ ... ..	31
22. Etude de la déformation réelle de l'angle tétraèdre lorsque $-1 < m < 1$ ... ..	34
23. Etude des valeurs prises par la fonction $fu$ lorsque $m > 1$ ... ..	34
24. Valeurs des arguments constants qui donnent un angle tétraèdre réel lorsque $m > 1$ ... ..	38

	PAGE
25. Etude des déformations réelles de l'angle tétraèdre lorsque $m > 1$	38
26. Dégénérescence de la fonction $fu$ lorsque $m = 1$ ... ..	39
27. Valeurs des arguments constants qui donnent un angle tétraèdre réel lorsque $m = 1$ ... ..	40
28. Remarque relative au No. précédent ... ..	41
29. Etude des déformations réelles de l'angle tétraèdre lorsque $m = 1$	42

#### Chapitre IV.

##### APPLICATION DES FONCTIONS ETA ET THETA DE JACOBI.

30. Formules empruntées aux <i>Fundamenta Nova</i> ... ..	45
31. Expressions des fonctions $fu, f'u$ lorsque $-1 < m < 1$ ... ..	46
32. Expressions des fonctions $fu, f'u$ lorsque $m > 1$ ... ..	48
33. Formules donnant les angles faciaux de l'angle tétraèdre en fonction de $a, b, c$ ... ..	50
34. Calcul de $q$ ... ..	51
35. Exemple du calcul numérique ... ..	52

#### Chapitre V.

##### ETUDE DES SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS DOUBLEMENT QUADRATIQUES.

36. Considérations générales ... ..	54
37. <i>Mécanisme préliminaire</i> ... ..	59
38. Egalités fondamentales ... ..	61
39. Système fondamental de trois équations doublement quadratiques	62
40. <i>Premier Cas.</i> Trois équations irréductibles dont deux ont constamment deux racines communes par rapport à leur variable commune ... ..	62
41. <i>Deuxième cas.</i> Trois équations irréductibles dont aucune paire n'a constamment deux racines communes par rapport à sa variable commune ... ..	66
42. Impossibilité qu'un système composé de deux équations irréductibles, ayant constamment deux racines communes par rapport à leur variable commune, et d'une équation partiellement décomposée ait une solution ... ..	68
43. <i>Troisième cas.</i> Deux équations décomposées par rapport à la même variable ... ..	71
44. <i>Quatrième cas.</i> Deux équations décomposées par rapport à des variables différentes en gardant la même variable au second degré... ..	75

	PAGE
45. <i>Cinquième cas.</i> Deux équations irréductibles et la troisième totale-ment décomposée ... .. 78	78
46. <i>Sixième cas.</i> Trois équations toutes totale-ment décomposées ... 80	80

## Chapitre VI.

## LE MECANISME DE KEMPE SUR LA SPHERE.

47. Conventions préliminaires ... .. 83	83
48. <i>Premier mécanisme.</i> Mécanisme réduit à cinq angles tétraèdres ... 84	84
49. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 89	89
50. <i>Deuxième mécanisme.</i> Six angles tétraèdres tous irréductibles ... 90	90
51. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 96	96
52. <i>Troisième mécanisme.</i> Quatre angles tétraèdres bi-isogones et deux à plans diagonaux perpendiculaires ... .. 98	98
53. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 100	100
54. <i>Quatrième mécanisme.</i> Quatre angles tétraèdres bi-isogones et deux circonscriptibles ... .. 102	102
55. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 105	105
56. <i>Cinquième mécanisme.</i> Deux angles tétraèdres totale-ment décom- posés et quatre irréductibles ... .. 106	106
57. Variante du mécanisme précédent ... .. 116	116
58. Résumé des deux Nos. précédents. Exemple numérique ... 119	119
59. <i>Sixième mécanisme.</i> Six angles tétraèdres totale-ment décomposés 121	121
60. Variante du mécanisme précédent ... .. 126	126
61. Résumé des deux Nos. précédents. Exemple numérique ... 128	128

## Chapitre VII.

## OCTAEDRES A UN OU A DEUX SOMMETS IMPROPRES.

62. Enoncé du problème ... .. 130	130
63. Aplatissement des corps ... .. 131	131
64. Quadrilatère du coude ... .. 134	134
65. Deux cas à résultats négatifs ... .. 135	135
66. <i>Septième mécanisme.</i> Quatre angles tétraèdres et deux quadrilatères plans, tous irréductibles ... .. 136	136
67. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 140	140
68. <i>Huitième mécanisme.</i> Deux angles tétraèdres irréductibles à plans diagonaux perpendiculaires, deux angles tétraèdres bi-isogones, et deux quadrilatères plans bi-isocèles ... .. 141	141
69. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 144	144

	PAGE
70. <i>Neuvième mécanisme.</i> Deux angles tétraèdres et deux quadrilatères plans, tous irréductibles, et deux angles tétraèdres totalement décomposés ... ..	145
71. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	149
72. <i>Dixième mécanisme.</i> Deux parallélogrammes n'ayant aucun axe en commun, et quatre angles tétraèdres irréductibles ... ..	150
73. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	154
74. <i>Onzième mécanisme.</i> Un contre-parallélogramme et cinq angles tétraèdres totalement décomposés ... ..	155
75. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	158
76. <i>Douzième mécanisme.</i> Deux contre-parallélogrammes et quatre angles tétraèdres totalement décomposés ... ..	159
77. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	161
78. <i>Treizième mécanisme.</i> Deux parallélogrammes et quatre angles tétraèdres totalement décomposés ... ..	162
79. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	162

### Chapitre VIII.

#### MECANISMES CONTENANT DES ISOGRAMMES.

80. Remarques préliminaires ... ..	164
81. <i>Quatorzième mécanisme.</i> Deux isogrammes n'ayant pas d'axe en commun et quatre angles tétraèdres irréductibles ... ..	164
82. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	169
83. Examen de deux cas nuls ... ..	170
84. <i>Quinzième mécanisme.</i> Deux angles tétraèdres, deux quadrilatères plans, tous irréductibles, et deux isogrammes ... ..	170
85. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	174
86. <i>Seizième mécanisme.</i> Six isogrammes ... ..	176
87. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... ..	179
88. <i>Dix-septième mécanisme.</i> Cinq isogrammes et un angle tétraèdre totalement décomposé. Exemple numérique ... ..	180
89. <i>Dix-huitième mécanisme.</i> Quatre isogrammes et deux angles tétraèdres totalement décomposés. Exemple numérique ... ..	182
90. <i>Dix-neuvième mécanisme.</i> Un contre-parallélogramme et cinq isogrammes. Exemple numérique ... ..	186
91. <i>Vingtième mécanisme.</i> Un contre-parallélogramme et un angle tétraèdre totalement décomposé ayant un axe en commun, et quatre isogrammes. Exemple numérique ... ..	190
92. <i>Vingt et unième mécanisme.</i> Un contre-parallélogramme et un angle tétraèdre totalement décomposé n'ayant pas d'axe en commun, et quatre isogrammes ... ..	191

	PAGE
93. <i>Vingt-deuxième mécanisme.</i> Deux parallélogrammes n'ayant pas d'axe en commun, et quatre isogrammes ... .. 193	193
94. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 198	198
95. <i>Vingt-troisième mécanisme.</i> Deux parallélogrammes n'ayant pas d'axe en commun, un angle tétraèdre totalement décomposé et trois isogrammes. Exemple numérique ... .. 199	199
96. <i>Vingt-quatrième mécanisme.</i> Deux parallélogrammes sans axe en commun, deux angles tétraèdres totalement décomposés également sans axe commun, et deux isogrammes. Exemple numérique ... .. 201	201
97. <i>Vingt-cinquième mécanisme.</i> Deux contre-parallélogrammes sans axe commun et quatre isogrammes ... .. 203	203
98. Résumé et exemple numérique du No. précédent ... .. 206	206
99. <i>Vingt-sixième mécanisme.</i> Deux contre-parallélogrammes sans axe commun, deux isogrammes également sans axe commun, et deux angles tétraèdres totalement décomposés. Exemple numérique ... .. 207	207

## Chapitre IX.

## REPERTOIRE DE TRAVAUX ANTERIEURS.

100. Recherches de Darboux ... .. 209	209
101. Recherches de M. Bricard ... .. 209	209
102. Recherches de M. Bennett ... .. 209	209
Note sur les chaînes fermées de quatre couples rotoïdes ... .. 210	210
Errata ... .. 220	220

## ERRATA.

Page 33, ligne 17, il faut lire *tout angle tétraèdre* au lieu de *tout l'angle tétraèdre*.

Page 35, dernière ligne, il faut lire *la demi période* au lieu de *le demi période*.

Page 47, ligne 3 en remontant, il faut lire *jusqu'à 4K* au lieu de *jusqu'à la 4K*.

Page 49, ligne 5 en remontant, il faut lire *cette* au lieu de *certe*.

Page 61, ligne 7 en remontant, il faut lire *suivante* au lieu de *suivent*.

Page 67, ligne 15, il faut lire *de ces trois* au lieu de *de des trois*.

Page 68, ligne 14 en remontant, il faut lire *No. 37* au lieu de *No. 36*.

Page 73, ligne 10, il faut lire *valeurs des produits* au lieu de *valeurs les produits*.