THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ANTOINE APPERT

Propriétés des espaces abstraits les plus généraux

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__156__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Série A, N° 1465
N° d'ordre :
2331

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. ANTOINE APPERT

1re THÈSE. — PROPRIÉTÉS DES ESPACES ABSTRAITS LES PLUS GÉNÉRAUX.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté : Stabilité a la Poisson au sens d'Henri Poincaré.

Soutenues le   Mars 1934, devant la Commission d'Examen

MM. E. CARTAN . .	*Président*	
M. FRÉCHET . .	*Examinateurs*	
G. VALIRON . .		

PARIS
HERMANN et Cie, ÉDITEURS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

—

1934

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire. . . . M. MOLLIARD.

Doyen. . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraires:

- H. LE CHATELIER.
- H. LEBESGUE.
- A. FERNBACH.
- A. LEDUC.
- Émile PICARD.
- Rémy PERRIER.
- Léon BRILLOUIN.
- GOURSAT.
- WALLERANT.
- GUILLET.
- PECHARD.
- FREUNDLER.

PROFESSEURS

P. JANET.	T	Électrotechnique générale.
G. BERTRAND. . .	T	Chimie biologique.
M^me P. CURIE. . .	T	Physique générale.
M. CAULLERY. . .	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
Émile BOREL. . .	T	Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS. . . .	T	Aviation.
Jean PERRIN. . .	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM . . .	T	Physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD . .	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE . . .	T	Physiologie générale.
E. VESSIOT. . . .	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. COTTON	T	Physique.
J. DRACH.	T	Analyse supérieure
Charles FABRY. .	T	Physique.
Charles PÉREZ . .	T	Zoologie.
Léon BERTRAND .	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
É. BLAISE	T	Chimie organique.
R. LESPIEAU. . .	T	Théories chimiques.
P. PORTIER . . .	T	Physiologie comparée.
E. RABAUD . .	T	Biologie expérimentale.
P.-A. DANGEARD.	T	Botanique.
V. AUGER	T	Chimie appliquée.
M. GUICHARD. . .		Chimie minérale.
Paul MONTEL . .	T	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT .	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM .	T	Botanique.
O. DUBOSCQ . . .	T	Biologie maritime.
G. JULIA.	T	Mécanique analytique.
C. MAUGUIN . . .	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY .		Pétrographie.
H. BÉNARD. . . .	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
L. LUTAUD. . . .	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH . .	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT. . . .		Physique.
E. DARMOIS . . .		Physique.
A. DEBIERNE . . .		Radioactivité.
A. DUFOUR. . . .	T	Physique (P. C. N.).
L. DUNOYER . . .		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique (P. C. N.).
M. JAVILLIER. . .		Chimie biologique.
L. JOLEAUD . . .		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY . .		Zoologie.
H. MOUTON. . . .		Chimie physique.
F. PICARD		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT . .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL. . . .	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET . . .	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON . .	T	Astronomie.
M^me RAMART-LUCAS		Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH.		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER . . .		Physique (P. C. N.).
DE BROGLIE . . .	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE. . . .		Physique du Globe.
PRENANT.		Zoologie.
VILLEY.		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN.		Zoologie (P. C. N.).
COMBES		Sciences naturelles (P. C. N.).
GARNIER		Mécanique rationnelle.
PÉRÉS		Mécanique des fluides.
HACKSPILL. . . .		Chimie (P. C. N.).
LAUGIER		Physiologie générale.
TOUSSAINT. . . .		Technique Aéronautique
M. CURIE.		Physique (P. C. N.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY		Mathématiques.
GAULT.		Chimie (P. C. N.).
CROZE		Physique.
DUPONT		Chimie (P. C. N.).

Secrétaire . . . . A. PACAUD.

INSTITUT H. POINCARÉ
1, Rue Pierre-Curie
PARIS-5e

PREMIÈRE THÈSE

PROPRIÉTÉS DES ESPACES ABSTRAITS LES PLUS GÉNÉRAUX

AVANT-PROPOS

Pour qu'un ensemble P d'objets de nature quelconque puisse être considéré comme un « espace », il est nécessaire de s'être donné non seulement les éléments ou « points » de l'ensemble P, mais aussi d'avoir précisé certaines relations de proximité ou de situation de ces points les uns par rapport aux autres. Pour donner une forme précise à cette idée, nous considérerons un « espace » comme défini si l'on s'est donné d'une part l'ensemble P de ses points, et d'autre part une opération K, appelée dérivation, faisant correspondre à tout ensemble E de points de P, l'ensemble $E' = K(E)$ des points qui seront considérés comme infiniment voisins de l'ensemble E. L'ensemble E′ sera dit le *dérivé* de E ou l'ensemble des « points d'accumulation » de E. Si on laisse indéterminés dans une mesure plus ou moins large l'ensemble P et l'opération K, l'étude de l'espace envisagé fournira les propriétés communes à toute une classe d'espaces quand on fait abstraction de leurs différences ; d'où le nom d'*espace abstrait* donné dans ce cas au système (P, K).

L'objet de cet ouvrage est l'étude des propriétés des espaces abstraits les plus généraux, c'est-à-dire de ceux où l'opération K est soumise à des conditions aussi peu restrictives que possibles. Parmi ceux-ci nous nous occuperons principalement des espaces ($\mathfrak{V}$) introduits par M. Fréchet au moyen de la notion de famille de voisinages attachée à chaque point de l'espace. On peut également définir un espace ($\mathfrak{V}$) comme un système (P,K) dont on suppose seulement qu'il satisfait aux deux conditions suivantes, « la propriété pour un point *a* d'être infiniment voisin d'un ensemble E ne doit dépendre que des éléments de E distincts de a », et « tout point infiniment voisin d'une partie d'un ensemble est infiniment voisin de cet ensemble ». Ces deux conditions paraissent si naturelles qu'il semble qu'un système (P,K) ne satisfaisant pas à ces conditions, ne mériterait plus guère le nom d'espace.

Le lecteur trouvera dans cet ouvrage un exposé d'ensemble des propriétés des espaces ($\mathfrak{V}$). Nous ne prétendons pas, il est vrai, avoir passé en revue dans les pages qui vont suivre, tous les résultats se rattachant à la théorie des espaces ($\mathfrak{V}$) et qui ont pu être publiés. Nous avons dû nous borner à un certain nombre de questions importantes que nous avons traitées à fond et qui constituent par leur variété une vue d'ensemble des propriétés de ces espaces.

M. Fréchet, puis MM. Chittenden, Tychonoff et Vedenissoff, etc., avaient déjà étendu aux espaces ($\mathfrak{V}$) beaucoup de propriétés d'espaces moins généraux tels que les espaces accessibles, les espaces de Hausdorff et les espaces distanciés. Nous avons pu compléter leur travail sur un certain nombre de points se rattachant en particulier aux notions d'ensemble connexe et bien enchaîné et à la notion de transformation continue. De plus nous avons été amené à constater qu'un grand nombre de propriétés des espaces abstraits plus particuliers que nous venons d'énumérer, propriétés qui ne s'étendent pas, ou ne s'étendent qu'en se compliquant beaucoup, aux espaces ($\mathfrak{V}$) les plus généraux, s'étendent cependant sous une forme simple aux espaces ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à la condition suivante :

α) *L'opération de fermeture* $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E} + \mathrm{E}'$ *est telle que* $\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \overline{\mathrm{E}}$.

Les simplifications dues à la réalisation de cette condition α) se font sentir dans toutes les parties de la théorie des espaces ($\mathfrak{V}$), mais principalement dans toutes les questions se rattachant à la notion d'ensemble compact (ensembles qui généralisent les ensembles euclidiens bornés). En particulier, nous avons pu formuler, dans les espaces ($\mathfrak{V}$) vérifiant α), diverses *conditions simples qui sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur un ensemble* E *atteigne un maximum sur* E. Ces conditions sont nouvelles à notre connaissance, même dans le cas plus particulier des espaces accessibles et des espaces de Hausdorff.

La condition $\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \overline{\mathrm{E}}$ n'est pas absolument nouvelle car elle avait déjà été envisagée par M. C. KURATOWSKI [1]. Nous croyons toutefois avoir mis en évidence l'importance vraiment fondamentale de cette condition dans la topologie des espaces abstraits. En particulier, nous avons indiqué pour la première fois le rôle simplificateur de cette condition dans la théorie de la compacité et le fait qu'elle permet dans ce cas de *diminuer le nombre des définitions admises*. Nous n'avons d'ailleurs fait presque aucun usage du *Mémoire* [2] de M. KURATOWSKI qui s'était posé des problèmes différents des nôtres.

Dans un autre ordre d'idées, nous nous sommes également occupé des espaces ($\mathfrak{V}$) où la dérivation est distributive [3], c'est-à-dire où $(\mathrm{E} + \mathrm{F})' = \mathrm{E}' + \mathrm{F}'$; cette étude nous a conduit à plusieurs résultats qui sont nouveaux à notre connaissance, du moins dans les espaces très généraux que nous envisageons. Cette condition de distributivité est loin de jouer l'important rôle simplificateur de la condition $\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \overline{\mathrm{E}}$; toutefois nous avons pu constater que les espaces ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à la fois à ces deux conditions jouissent de presque toutes les propriétés des espaces accessibles de M. FRÉCHET, tout en étant plus généraux et d'une définition plus simple.

Nous consacrons le VIII^e Chapitre de cet ouvrage à l'étude des ordres de séparabilité. La question avait déjà été abordée par M. HARATOMI dans le cas des espaces distanciés [4] ; nous l'avons reprise à l'aide de définitions différentes et en nous plaçant dans le cas beaucoup plus général des espaces ($\mathfrak{V}$). Ces nouvelles définitions ont d'ailleurs l'avantage de fournir dans les espaces distanciés des résultats plus simples que ceux de M. HARATOMI. Nos recherches sur les ordres de séparabilité ont abouti, entre autres résultats nouveaux, à la définition pour tout espace ($\mathfrak{V}$) d'un nombre car-

---

(1) « Sur l'opération $\overline{\mathrm{A}}$ de l'Analysis situs » Fund. Math., t. III, p. 182-199.

(2) La plupart de nos propres résultats concernant la condition $\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \overline{\mathrm{E}}$ avaient déjà été obtenus et communiqués à M. FRÉCHET quand celui-ci nous a fait connaître ce *Mémoire*.

(3) Ces espaces ne sont autres que les espaces ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à la deuxième condition proposée par M. F. RIESZ pour la notion de point d'accumulation (« Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. » *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, Roma, vol. II, p. 19).

(4) « Über höherstufige Separabilität und Kompaktheit » *Japanese Journ. of math.*, vol. VIII, 1931, p. 113-141.

dinal transfini $\aleph_\xi$ appelé *ordre* de cet espace. Alors beaucoup de propriétés des ensembles euclidiens où intervient le nombre cardinal $\aleph_0$ des ensembles dénombrables — et en particulier diverses formes du théorème de CANTOR-BENDIXSON — s'étendent sans changement aux espaces $(\mathfrak{V})$ les plus généraux à la condition d'y remplacer $\aleph_0$ par l'ordre $\aleph_\xi$. Nous avons même obtenu une généralisation du théorème de CANTOR-BENDIXSON qui fournirait dans l'espace euclidien des résultats intéressants à la condition d'admettre que l'hypothèse du continu ne soit pas exacte.

Enfin, pour ce qui est du maximum des fonctionnelles continues et semi-continues sur un ensemble abstrait, nous avons pu établir que plusieurs théorèmes fondamentaux indiquant les cas où ce maximum existe et où il est atteint, ne sont que des cas particuliers de l'invariance d'une certaine propriété (propriété que peut avoir un ensemble d'être ce que nous appelons compact en soi au sens large) relativement à toute transformation continue. Il y a là un exemple intéressant de propositions d'Analyse fonctionnelle qui ne sont que des cas particuliers d'un théorème plus simple d'Analyse générale.

Il nous a paru avantageux de diviser cet ouvrage en deux Tomes : le Tome I comprend l'étude des ensembles ouverts, fermés, denses en soi et clairsemés, ainsi que des propriétés de connexion ; le Tome II comprend l'étude des notions de compacité et de séparabilité, ainsi que des transformations et fonctionnelles. Ces deux Tomes présentent des différences assez tranchées non seulement à cause des sujets traités, mais aussi à cause des modes de raisonnement employés. C'est ainsi que beaucoup de propositions empruntées à la théorie des nombres cardinaux transfinis et inutiles à l'intelligence du Tome I, interviennent presque constamment dans le Tome II et nous ont paru devoir être résumées au début de ce dernier Tome.

A ce propos, nous tenons à prévenir le lecteur que nous admettons l'axiome de ZERMELO avec toutes ses conséquences. D'ailleurs, et nous ne sommes pas le seul, nous avons le cerveau fait de telle manière que cet axiome, conçu comme un simple axiome d'existence, nous apparaisse comme tout à fait évident, d'une évidence du même ordre que celle du principe de non-contradiction.

Nous ne saurions trop insister sur l'intérêt que présente pour la philosophie des mathématiques, la théorie des espaces abstraits les plus généraux. De même que l'Analyse vectorielle traite des propriétés communes aux champs de forces, de vitesses, de tourbillons, aux champs magnétiques et électriques, etc., de même l'étude des propriétés des espaces abstraits les plus généraux fournit le substrat commun à un grand nombre de théories analytiques et géométriques. De plus, comme ces propriétés doivent être démontrées en faisant appel à des hypothèses aussi peu restrictives que possibles, d'autant moins restrictives que l'espace est plus général, et que l'intuition géométrique, tout en jouant un grand rôle dans la recherche, doit alors être absolument éliminée dans l'établissement de la preuve, l'étude des propriétés envisagées et de leurs démonstrations est débarrassée de beaucoup d'éléments inutiles et permet de mieux pénétrer ce qu'il y a en elles de vraiment essentiel.

On trouverait une bibliographie très complète des publications se rapportant aux espaces abstraits, du moins de celles antérieures à 1928, à la fin de l'Ouvrage de M. Fréchet : « Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale » (Paris, Gauthier-Villars, 1928). Nous aurons fréquemment l'occasion de renvoyer à cet ouvrage que nous désignerons par l'abréviation E. A.

Avant de terminer cette trop longue introduction, nous tenons à exprimer nos sentiments de bien vive reconnaissance à M. Fréchet, le créateur de la théorie des espaces abstraits, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à nos recherches et pour les précieux conseils par lesquels il les a guidées.

Antoine Appert.

(Versailles, décembre 1933.)

NOTE SUR LA DISPOSITION TYPOGRAPHIQUE EMPLOYÉE

Nos Chapitres et nos § seront numérotés avec des chiffres romains : Chapitres I, II, III, ..., § I, § II, § III, ... Quand nos renvois ne feront pas mention du Chapitre, il s'agira toujours de renvois à l'intérieur d'un même Chapitre.

Nos théorèmes seront numérotés avec des chiffres arabes 1), 2), 3), ..., le numérotage commençant par 1) au début de chaque Chapitre.

Comme nous démontrerons beaucoup de résultats déjà obtenus par d'autres auteurs, nous croyons utile de signaler par un * les résultats qui sont nouveaux à notre connaissance.

Enfin nous devons prévenir le lecteur que, toutes les fois que nous énoncerons une définition ou un théorème sans indiquer dans l'énoncé même à quel espace cette définition ou ce théorème s'applique, il sera toujours sous-entendu qu'il s'applique à l'espace $(\mathfrak{V})$ le plus général. D'ailleurs cette convention n'interviendra effectivement qu'à partir du Chapitre V.

TOME I

ENSEMBLES OUVERTS, FERMÉS, DENSES EN SOI, CLAIRSEMÉS. CONNEXION

CHAPITRE I

LES ESPACES TOPOLOGIQUES ET LES ESPACES ($\mathfrak{V}$)

Notre but dans ce Chapitre est d'une part de définir les *espaces topologiques* qui peuvent être considérés comme les espaces abstraits de généralité maxima, et d'autre part de définir les *espaces* ($\mathfrak{V}$) dont la généralité est encore telle qu'ils contiennent comme cas particuliers tous les espaces abstraits dont l'étude ait paru jusqu'ici présenter quelque utilité. Pour cela il sera bon de rappeler quelques notions élémentaires de théorie des ensembles ; c'est ce que nous ferons dans les § I, II et III qui vont suivre.

§ I. **Notations.** — Soient E, F, G,..... des ensembles dont les éléments sont des objets de nature quelconque.

Pour exprimer qu'un objet p est *élément* d'un ensemble E nous écrirons avec M. G. Peano

$$p \in E.$$

Nous aurons à considérer des ensembles dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles ; dans ce cas, au lieu de dire « ensemble d'ensembles », nous dirons souvent « famille d'ensembles ».

Quand deux ensembles E et F ont les mêmes éléments nous dirons qu'ils sont identiques et nous écrirons

$$E = F.$$

Si E et F ne sont pas identiques nous écrirons $E \neq F$.

Nous désignerons par (a) l'ensemble formé d'un seul élément qui est l'objet a.

Nous désignerons *l'ensemble vide* par 0. La relation $E \neq 0$ signifie que l'ensemble E contient au moins un élément.

Si tout élément de l'ensemble E est élément de l'ensemble F, nous écrirons

$$E \subset F \quad \text{ou} \quad F \supset E.$$

Nous dirons alors que E est un *sous-ensemble* de F ou est contenu dans F ou est une partie de F ; nous dirons alors aussi que F contient E. La relation $E \subset F$ est appelée *inclusion.*

Il sera commode pour la généralité de certains énoncés, de considérer l'ensemble vide comme un sous-ensemble de tout ensemble.

§ II. **Opérations sur les ensembles.** — Considérons des ensembles E, F, G,...

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à l'un au moins des ensembles E, F, G,... est appelé *somme* de ces ensembles et sera désigné par

$$E + F + G + \cdots.$$

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à tous les ensembles E, F, G,... est appelé *produit* de ces ensembles et sera désigné par

$$EFG\cdots$$

ou encore par

$$E \cdot F \cdot G \cdots.$$

Nous désignerons aussi ce produit par la locution « ensemble commun ou partie commune aux ensembles E, F, G,..... »

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à un ensemble E sans appartenir à un ensemble F est appelé *différence* de ces deux ensembles et sera désigné par

$$E - F.$$

Deux ensembles E et F sont *disjoints* s'ils n'ont aucun élément commun, c'est-à-dire si $EF = 0$.

§ III. **Complémentaire d'un ensemble.** — Si $E \subset P$ on pose par définition :

$P - E$ = complémentaire de E par rapport à P.

Dans les développements qui suivront, nous aurons constamment à considérer des sous-ensembles E, F, G,..... d'un certain ensemble P *donné une fois pour toutes.* P *sera l'ensemble des éléments ou points d'un certain espace* ; E, F, G,... seront des ensembles de points de cet espace. Alors, quand nous parlerons de complémentaires, il s'agira toujours, sauf mention expresse du contraire, de complémentaires par rapport à P, c'est-à-dire par rapport à l'espace tout entier.

Nous poserons pour tout ensemble E de points de P :

$$C(E) = P - E = \text{complémentaire de } E.$$

Pour tous les sous-ensembles de l'ensemble donné P on a les propriétés suivantes :

$$E \cdot C(E) = 0, \qquad C[C(E)] = E.$$

On a les théorèmes classiques suivants, dont la démonstration est immédiate :

Le complémentaire d'un produit est la somme des complémentaires des facteurs.

Le complémentaire d'une somme est le produit des complémentaires des termes de cette somme.

La relation $E \subset F$ équivaut à

$$C(E) \supset C(F).$$

On a l'identité

$$E - F = E \cdot C(F),$$

d'où

$$C(E - F) = C(E) + F.$$

Toutes ces propriétés nous serviront souvent dans la suite.

§ IV. **Les espaces topologiques.** — On peut considérer un espace abstrait comme défini si l'on s'est donné d'une part l'ensemble P de ses « points », et d'autre part une opération

$$E' = K(E)$$

faisant correspondre à chaque sous-ensemble E de P l'ensemble E′ des points qui seront considérés comme *infiniment voisins* de

E. L'ensemble E' sera dit le *dérivé* de E ou l'ensemble des *points d'accumulation* de E ; l'opération K sera appelée *l'opération de dérivation.*

Notre but est de formuler la conception d'un espace abstrait dont la généralité soit en quelque manière maxima. Pour cela on pourrait songer à laisser tout à fait arbitraires l'ensemble P et l'opération K ; mais il nous a semblé qu'il y a deux conditions telles que, si elles n'étaient pas réalisées, les points de E' = K (E) ne correspondraient plus en rien à la notion intuitive de points infiniment voisins de E. Ces conditions sont les suivantes :

a) *L'ensemble* E' (*qui est un sous-ensemble de* P *et qui peut être vide*) *est défini et unique pour chaque sous-ensemble non vide* E *de* P.

b) *Pour qu'un point a appartienne à* E' *il faut et il suffit que* E — (*a*) *soit non vide et que a appartienne à* [E — (*a*)]'.

Cette condition *b*) peut s'exprimer d'une manière intuitive en disant que la propriété pour un point *a* d'être infiniment voisin d'un ensemble E ne doit dépendre que des éléments de l'ensemble E — (*a*) supposé non vide.

Ces remarques nous amènent à adopter [1] la définition suivante d'un espace topologique, entendant par espace topologique l'espace abstrait le plus général :

Un espace topologique est un *système* (P, K) constitué par un ensemble arbitrairement choisi P (qui est l'ensemble des « points » de l'espace) et par une opération E' = K (E) dont on suppose seulement qu'elle satisfait aux conditions *a*) et *b*).

Il nous sera commode d'introduire dans les espaces topologiques le dérivé de l'ensemble vide ; ce dérivé devra être considéré comme *vide* en vertu de *b*).

§ V. **L'intérieur d'un ensemble.** — Nous adoptons la définition suivante dans l'espace topologique le plus général :

Un point *a* est *intérieur* à un ensemble E s'il appartient à E tout en n'étant point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de C(E).

L'intérieur d'un ensemble sera l'ensemble des points qui lui sont intérieurs.

Cette définition apparaît comme une traduction très naturelle

---

[1] Avec M. Fréchet (E. A., p. 167-168).

de la notion intuitive d' « intérieur ». Elle peut s'exprimer par l'identité :

(intérieur de E) = E — (somme des dérivés des sous-ensembles de C(E)).

Remarque. — Il résulte de notre définition que, dans tout espace topologique, on a la propriété suivante :

Tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble.

Autrement dit l'hypothèse que

$$E \subset F$$

entraîne que

$$(\text{intérieur de } E) \subset \text{intérieur de } F.$$

§ VI. **La condition 1° de F. Riesz** [1]. — Nous appellerons ainsi la condition suivante :

1° *de F. Riesz. Pour deux ensembles quelconques* E *et* F *l'hypothèse que* $E \subset F$ *entraîne que* $E' \subset F'$.

Puisque nous considérons les points d'accumulation d'un ensemble comme les points infiniment voisins de cet ensemble, nous pouvons exprimer la condition 1° de F. Riesz sous la forme intuitive suivante : tout point infiniment voisin d'une partie d'un ensemble est infiniment voisin de cet ensemble.

Dans un espace topologique vérifiant la condition 1° de F. Riesz notre définition de l'intérieur d'un ensemble peut s'exprimer par l'identité suivante plus simple que celle du § précédent :

$$(\text{intérieur de } E) = E - [C(E)]'.$$

§ VII. **Les espaces** ($\mathfrak{V}$) [2]. — Par définition un *espace* ($\mathfrak{V}$) est un système (P, K) où l'opération de dérivation K satisfait à la condition suivante :

v) *Il est possible d'associer à chaque point* a *de* P *une famille* $\{V_a\}$ *d'ensembles* V_a *de points de* P *de telle manière que :*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a *soit point*

---

[1] Pour les conditions de M. F. Riesz, voir E. A., p. 181.

[2] C'est à M. Fréchet (E. A., p. 172-173 et p. 179) que sont dûs l'introduction des espaces ($\mathfrak{V}$) et presque tous les résultats de ce Chapitre I.

d'accumulation d'un ensemble E *de points de* P *est que chaque* V_a *contienne au moins un point de* E *distinct de* a.

Les V_a seront appelés *les voisinages de a* ; la famille $\{V_a\}$ sera la famille des voisinages de a.

Il résulte de cette définition qu'un espace ($\mathfrak{V}$) est bien défini si l'on s'est donné d'une part l'ensemble P de ses points, et d'autre part si l'on a associé à chaque point a de P une famille *arbitrairement choisie* de sous-ensembles de P, ces sous-ensembles étant considérés comme les voisinages de a. La donnée des voisinages détermine en effet l'opération de dérivation.

Remarque I. — On constate sans peine que la condition v) entraîne les conditions a) et b) imposées dans tout espace topologique. Les espaces ($\mathfrak{V}$) sont donc certains espaces topologiques.

Remarque II. — Nous considérons l'opération de dérivation K comme l'essentiel du concept d'*espace*. Nous sommes donc amené à considérer deux espaces ($\mathfrak{V}$) comme identiques s'ils sont composés des mêmes points et si l'opération K est la même dans ces deux espaces, ceci même dans le cas où cette opération serait définie par l'intermédiaire de familles de voisinages différentes.

Par exemple, dans l'espace euclidien à trois dimensions, prenons pour voisinages de chaque point a les sphères de centre a. Alors la définition habituelle des points d'accumulation des ensembles de points de l'espace euclidien nous sera fournie par la condition v). Mais la même définition des points d'accumulation sera obtenue en prenant comme voisinages d'un point quelconque a les cubes de centre a, ou les ellipsoïdes de centre a, etc...

Nous dirons que deux familles de voisinages d'un point a, $\{V_a\}$ et $\{W_a\}$, sont *équivalentes* si elles définissent la même opération de dérivation des ensembles.

Nous donnerons au § IX une condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de voisinages d'un point a soient équivalentes.

Remarque III. — Soit $\{V_a\}$ une famille de voisinages de a. Nous obtenons évidemment une famille équivalente en remplaçant chaque V_a par $V_a + (a)$. Nous pouvons donc supposer sans inconvénient que *chaque point a appartient à tous ses voisinages. C'est ce que nous supposerons toujours dans la suite.*

§ VIII. **Identité des espaces ($\mathfrak{V}$) et des espaces topologiques vérifiant la condition 1° de F. Riesz.** — Donnons-nous un espace topologique (P, K) vérifiant la condition 1° de F. Riesz, et soit a un point quelconque de cet espace. Posons

$$\{ I_a \} = \text{famille de tous les ensembles } I_a \text{ auxquels } a \text{ est intérieur.}$$

Je vais montrer que $\{ I_a \}$ peut être considérée comme une famille de voisinages de a au sens de la condition v). Soit en effet E un ensemble quelconque de points de l'espace considéré ; nous avons deux cas possibles :

1° *cas : a est point d'accumulation de* E.

Je dis qu'alors tout I_a contient au moins un point de E distinct de a. En effet dans le cas contraire il existerait un I_a vérifiant

$$[E - (a)] \cdot I_a = 0.$$

Or nous devons avoir, en vertu de la condition b) imposée à tout espace topologique,

$$a \in [E - (a)]'.$$

Donc a serait point d'accumulation d'un sous-ensemble de C (I_a), et, par conséquent, a ne serait pas intérieur à I_a contrairement à l'hypothèse.

2° *cas : a n'est pas point d'accumulation de* E. Posons alors

$$I = C(E) + (a) ;$$

on a

$$C(I) = E - (a),$$
$$(\text{intérieur de } I) = I - [E - (a)]'.$$

a appartient à I, et, en vertu de la condition b), a n'appartient pas à $[E - (a)]'$; donc a est intérieur à I. Par conséquent l'ensemble $I = C(E) + (a)$ est un I_a qui ne contient évidemment aucun point de E distinct de a. Donc l'hypothèse que a n'est pas point d'accumulation de E entraîne l'existence d'un I_a ne contenant aucun point de E distinct de a.

Nous concluons de l'examen des deux cas 1° et 2° que la condition nécessaire et suffisante pour que a soit point d'accumulation d'un ensemble E de points de l'espace considéré est que tout I_a contienne au moins un point de E distinct de a. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Tout espace topologique (P, K) *satisfaisant à la condition 1° de F. Riesz est un espace* ($\mathfrak{V}$), *et on peut y prendre comme famille de voisinages d'un point quelconque a la famille* $\{I_a\}$ *des ensembles* I_a *auxquels a est intérieur.*

Réciproquement tout espace ($\mathfrak{V}$) est un espace topologique vérifiant la condition 1° de F. Riesz. On voit en effet de suite que la condition v) implique que tout point d'accumulation d'une partie d'un ensemble est point d'accumulation de cet ensemble.

Nous pouvons donc conclure qu'*il y a identité entre un espace* ($\mathfrak{V}$) *et un espace topologique vérifiant la condition* 1° *de F. Riesz.*

§ IX. **Familles de voisinages équivalentes.** — Démontrons le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles $\{V_a\}$ *et* $\{W_a\}$ *de voisinages de a soient équivalentes est que tout voisinage* V_a *contienne un voisinage* W_a *et réciproquement.*

Il est bien entendu dans cet énoncé que le point a appartient par hypothèse à tous ses voisinages V_a et W_a.

Démonstration. 1) Supposons remplie la condition, tout V_a contient un W_a et réciproquement. Si alors tout W_a contient un point de E distinct de a, il en est de même pour tout V_a ; et réciproquement si tout V_a contient un point de E distinct de a, il en est de même pour tout W_a. Les familles $\{V_a\}$ et $\{W_a\}$ sont par conséquent équivalentes.

2) Supposons au contraire que la condition, tout V_a contient un W_a et réciproquement, ne soit pas remplie. Alors il existe, par exemple, un V_a, que je désigne par V_a^0, ne contenant entièrement aucun W_a. Alors tout W_a contient au moins un point de $C(V_a^0)$, et ce point est nécessairement distinct de a.

Ainsi, relativement à l'opération de dérivation définie par la famille $\{W_a\}$, a est point d'accumulation de $C(V_a^0)$; au contraire, relativement à l'opération de dérivation définie par la famille $\{V_a\}$, a n'est pas point d'accumulation de $C(V_a^0)$. Les familles $\{V_a\}$ et $\{W_a\}$ ne sont donc pas équivalentes.

C. Q. F. D.

§ X. **Relations entre les notions d'intérieur et de voisinage.**

* *Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que, dans un espace* ($\mathfrak{V}$), *une famille* $\{V_a\}$ *d'ensembles* V_a *puisse être considérée*

comme une famille de voisinages de a est que les deux conditions suivantes soient remplies :

1) *a est intérieur à chaque* V_a.

2) *Pour tout ensemble* E *auquel a est intérieur il existe un* V_a *appartenant entièrement à* E.

Cette condition est intéressante car les points intérieurs à un ensemble ont été définis en termes ne faisant intervenir que l'opération de dérivation.

Démonstration. — Posons comme plus haut :

$\{I_a\}$ = famille de tous les ensembles I_a auxquels a est intérieur.

Nous avons vu que $\{I_a\}$ peut être prise comme famille de voisinages de a. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que $\{V_a\}$ puisse être considérée comme une famille de voisinages de a est que $\{V_a\}$ et $\{I_a\}$ soient équivalentes, c'est-à-dire que les deux conditions suivantes soient remplies :

1° Tout V_a contient un I_a.

2° Tout I_a contient un V_a.

La condition 2° est identique à 2). D'autre part, si 1) est réalisée, tout V_a contient un I_a qui est V_a lui-même, donc 1° est vraie. Inversement, si 1° est réalisée, tout V_a contient un ensemble auquel a est intérieur ; or nous avons vu que tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; donc a est intérieur à chaque V_a et 1) est vraie. Par conséquent la condition 1) est équivalente à 1°. C. Q. F. D.

On déduit immédiatement de ce théorème les corollaires suivants :

Dans un espace ($\mathfrak{V}$), *chaque point a est intérieur à chacun de ses voisinages.*

Ainsi toute famille de voisinages de a est nécessairement extraite de $\{I_a\}$. On peut donc dire que la famille $\{I_a\}$ des ensembles I_a auxquels a est intérieur, constitue la famille de voisinages de a la plus *riche* possible.

Dans un espace ($\mathfrak{V}$), *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a soit intérieur à un ensemble* E *est qu'il existe un voisinage de a appartenant entièrement à* E.

La condition est nécessaire en vertu du théorème démontré à l'instant. Réciproquement, si un voisinage V_a de a appartient à E, a est intérieur à une partie V_a de E, donc a est intérieur à E par conséquent la condition est bien suffisante.

CHAPITRE II

ENSEMBLES OUVERTS ET FERMÉS DANS LES ESPACES ($\mathfrak{V}$), LA CONDITION α)

Notre principal but dans ce Chapitre est d'introduire une condition que nous appellerons la condition α) et dont la réalisation apporte d'importantes simplifications aux propriétés des espaces ($\mathfrak{V}$).

§ I. **Quelques définitions dans un espace** ($\mathfrak{V}$). — Nous adoptons dans un espace ($\mathfrak{V}$) les définitions suivantes qui généralisent d'une manière naturelle les définitions usitées dans l'espace euclidien.

a) Un ensemble E est *fermé* si $E' \subset E$. Cette définition implique que l'espace entier et l'ensemble vide sont fermés.

b) L'*ensemble de fermeture* d'un ensemble E est

$$\overline{E} = E + E'.$$

c) Nous avons déjà défini la notion d'*intérieur*. Un point *a* est *intérieur* à un ensemble E s'il existe un voisinage de *a* appartenant entièrement à E (Chapitre I, § X).

Nous avons vu que dans un espace topologique vérifiant 1° de F. Riesz, c'est-à-dire dans un espace ($\mathfrak{V}$), on avait l'identité

$$(\text{intérieur de } E) = E - [C(E)]',$$

d'où résulte l'identité

$$C(\text{intérieur de } E) = C(E) + [C(E)]' = \overline{C(E)}.$$

d) Un ensemble E est *ouvert* si

$$E = \text{intérieur de } E.$$

Cette définition implique que l'espace entier et l'ensemble vide sont ouverts. On peut dire aussi qu'un ensemble E est *ouvert* si chaque point de E est intérieur à E, autrement dit si, pour chaque point a de E, il existe un voisinage de a appartenant entièrement à E.

La relation

$$E = \text{intérieur de } E$$

équivaut à

$$C(E) = \overline{C(E)},$$

c'est-à-dire à

$$[C(E)]' \subset C(E).$$

Par conséquent, dans un espace ($\mathcal{V}$), *le complémentaire d'un ensemble ouvert est un ensemble fermé et réciproquement.*

e) Un point est *extérieur* à un ensemble E s'il est intérieur à C(E). On a l'identité

$$(\text{extérieur de } E) = C(E) - E' = C(\overline{E}).$$

f) Un point est *frontière* d'un ensemble E, et aussi de C(E), s'il n'est ni intérieur ni extérieur à E.

Il est équivalent de dire qu'un point a est frontière de E, ou appartient à la *frontière* de E, si chaque voisinage de a contient au moins un point de E et au moins un point de C(E). On a l'identité

$$\begin{aligned}(\text{frontière de } E) &= C(\text{intérieur de } E) \cdot C(\text{extérieur de } E)\\ &= \overline{E} \cdot \overline{C(E)} = E \cdot [C(E)]' + E' \cdot C(E).\end{aligned}$$

§ II. **Sommes d'ensembles ouverts.** — *Théorème.* — *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *toute somme d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

En effet soient O des ensembles ouverts et soit S leur somme

$$S = \Sigma O.$$

Soit a un point quelconque de S ; a appartient à un O ; donc a est intérieur à cet O ; or nous savons que tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; donc a est intérieur à S. Par conséquent S est ouvert. C. Q. F. D.

Application : Soit E un ensemble quelconque de points d'un espace ($\mathcal{V}$). La somme O de tous les sous-ensembles ouverts de E est un ensemble ouvert qui peut être vide ; nous poserons

$$O = \text{le plus grand sous-ensemble ouvert de } E.$$

Tout point de O est intérieur à O et par conséquent intérieur à E ; on a donc

$$O \subset \text{intérieur de } E \subset E.$$

Par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour que

$$O = \text{intérieur de } E$$

est que l'intérieur de E soit ouvert.

§ III. **Produits d'ensembles fermés.** — *Théorème. — Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *tout produit d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

Nous allons déduire cette proposition du théorème analogue du § II en nous servant des complémentaires. Soient F des ensembles fermés et $\mathfrak{F}$ leur produit. Comme le complémentaire d'un produit est la somme des complémentaires des facteurs, nous avons

$$C(\mathfrak{F}) = \Sigma C(F).$$

Les C(F) sont ouverts comme complémentaires d'ensembles fermés ; donc $C(\mathfrak{F})$ est ouvert en vertu du théorème du § II, donc $\mathfrak{F}$ est fermé. C. Q. F. D.

Application : Soit E un ensemble quelconque de points d'un espace ($\mathfrak{V}$). Le produit F de tous les ensembles fermés contenant E est un ensemble fermé contenant E. Nous poserons

$$F = \text{le plus petit ensemble fermé contenant } E.$$

On a, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$F \supset F' \supset E'.$$

D'où

$$F \supset \overline{E}.$$

On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour que $F = \overline{E}$ est que $\overline{E}$ soit fermé.

§ IV. **La condition** α). — Nous appellerons ainsi la condition suivante susceptible d'être imposée à l'opération de dérivation dans un espace ($\mathfrak{V}$) :

α) *Tout ensemble de fermeture* $\overline{E} = E + E'$ *est fermé.*

Il serait facile de constater que l'espace euclidien et presque tous les espaces abstraits importants étudiés jusqu'à ce jour (espaces accessibles de M. Fréchets, espaces de Hausdorff, espaces distanciés etc.), sont des espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant α). Nous verrons que les espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant α) jouissent de propriétés particulièrement simples et élégantes et qu'on peut leur étendre un grand nombre de propriétés d'espaces moins généraux.

Tenant compte de nos définitions ainsi que du résultat obtenu à la fin du § III nous voyons que * *la condition α) équivaut, dans un espace* ($\mathcal{V}$), *à l'une quelconque des deux identités suivantes conçues comme ayant lieu quel que soit l'ensemble* E :

$$\bar{\bar{E}} = \bar{E}.$$

$\bar{E}$ = le plus petit ensemble fermé contenant E.

Remarquons encore que, dans un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant α), la frontière d'un ensemble E peut se mettre sous la forme d'un produit de deux ensembles fermés (§ I, *f*).

Par conséquent, * *dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant α), la frontière d'un ensemble quelconque est un ensemble fermé.*

§ V. **La condition** α_1). — Tenant compte de l'identité suivante obtenue plus haut dans un espace ($\mathcal{V}$) :

$$C(\text{intérieur de } E) = \overline{C(E)},$$

et tenant compte du fait que, dans un espace ($\mathcal{V}$), le complémentaire d'un ensemble ouvert est un ensemble fermé et réciproquement, nous voyons que :

* *Dans l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général la condition α) est équivalente à la suivante* :

α_1). *L'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert.*

Cette condition α_1) peut s'exprimer par l'identité :

$$(\text{intérieur de } E) = \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

En vertu du résultat obtenu à la fin du § II, nous voyons aussi que, * *dans un espace* ($\mathcal{V}$), *la condition α_1)* [*et par conséquent la condition α)*] *équivaut à l'identité suivante* :

$$(\text{intérieur de } E) = \text{le plus grand sous-ensemble ouvert de } E.$$

§ VI. **La condition** α_2). — Nous appellerons ainsi la condition suivante qui porte directement sur les familles de voisinages :

α_2) *Pour tout point a et tout voisinage* V_a *de a, il existe un voisinage* W_a *de a tel que, pour tout point b de* W_a, *il existe un voisinage* V_b *de b appartenant entièrement à* V_a.

Dans cette condition chaque point appartient par hypothèse à tous ses voisinages, comme nous le supposons toujours (1). L'intérêt de cette condition α_2) provient du fait que, dans l'espace ($\mathfrak{V}$) le plus général, elle est équivalente à α). Cette équivalence sera démontrée au § suivant.

Remarque. — Tenons compte du fait que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), un point a est intérieur à un ensemble E s'il existe un voisinage de a appartenant entièrement à E ; nous voyons alors que la condition α_2) peut se mettre successivement sous les deux formes suivantes qui lui sont équivalentes dans un espace ($\mathfrak{V}$) :

Pour tout point a et tout voisinage V_a de a, il existe un voisinage W_a de a tel que

$$W_a \subset \text{intérieur de } V_a.$$

Ou finalement :

Pour tout point a et tout voisinage V_a de a on a :

$$a \in \text{intérieur de l'intérieur de } V_a.$$

§ VII. * **Équivalence de α) et de α_2) dans un espace ($\mathfrak{V}$).** — *Théorème.* — Dans un espace ($\mathfrak{V}$) où l'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert, les familles de voisinages vérifient nécessairement α_2).

En effet, considérons un espace ($\mathfrak{V}$) où l'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert, et soient, dans cet espace, un point a et un voisinage V_a de a. Alors l'intérieur de V_a est ouvert. D'autre part, dans un espace ($\mathfrak{V}$), chaque point est intérieur à chacun de ses voisinages. On a donc :

$$a \in \text{intérieur de } V_a = \text{intérieur de l'intérieur de } V_a.$$

Par conséquent les familles de voisinages vérifient α_2).

C. Q. F. D.

Théorème réciproque. — Dans un espace ($\mathfrak{V}$) où les familles de voisinages adoptées vérifient α_2), l'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert.

En effet, soit un espace ($\mathfrak{V}$) où les familles de voisinages adoptées vérifient α_2), et soit un ensemble quelconque E de points de cet espace. Nous avons deux cas possibles :

(1) Cette condition (α_2) avait été considérée par M. Fréchet (E. A., p. 184).

1° *cas.* L'intérieur de E est vide.

Alors l'intérieur de E est ouvert.

2° *cas.* L'intérieur de E n'est pas vide.

Soit alors a un point quelconque de l'intérieur de E. Il existe un voisinage V_a de a tel que

$$V_a \subset E.$$

Or nous savons que tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; on a donc :

$$\text{intérieur de } V_a \subset \text{intérieur de } E,$$
$$\text{intérieur de l'intérieur de } V_a \subset \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

En vertu de α_2) on a

$$a \in \text{intérieur de l'intérieur de } V_a,$$

d'où

$$a \in \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

Donc l'intérieur de E est ouvert.

C. Q. F. D.

On peut condenser en un seul énoncé les deux théorèmes précédents en disant que, * dans un espace ($\mathfrak{V}$), la condition α_2) équivaut à la condition α_1). Nous avons donc le théorème suivant :

* *Dans l'espace* ($\mathfrak{V}$) *le plus général les trois conditions* α), α_1), α_2) *sont entièrement équivalentes.*

Autrement dit, tout espace ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à l'une quelconque de ces trois conditions, satisfait nécessairement aux deux autres.

Remarque. — Nous venons de démontrer l'équivalence de la condition α) qui porte directement sur l'opération de dérivation, et de la condition α_2) qui porte directement sur les familles de voisinages. Si donc α_2) est vérifiée pour un certain choix des familles de voisinages, α_2) ne cessera pas d'être vérifiée si l'on remplace ces familles par des familles équivalentes relativement à l'opération de dérivation.

§ VIII. **Le problème de M. Tumarkin.** — Ce problème consiste dans la question suivante :

A quelle condition l'opération de dérivation dans un espace ($\mathfrak{V}$) doit-elle satisfaire pour que l'*on puisse y adopter des familles de voisinages exclusivement constituées par des ensembles ouverts ?*

M. TUMARKIN (1) a démontré que *les espaces* ($\mathfrak{V}$) *satisfaisant à cette condition sont ceux qui vérifient* α).

Le résultat précédent est une conséquence des deux théorèmes suivants :

Théorème. — Si dans un espace ($\mathfrak{V}$) on peut adopter des familles de voisinages exclusivement formées d'ensembles ouverts, cet espace ($\mathfrak{V}$) vérifie α).

En effet adoptons dans cet espace ($\mathfrak{V}$) des voisinages qui soient tous ouverts, et considérons alors dans cet espace un point a et un voisinage V_a de a. Nous pouvons écrire :

$$a \in V_a = (\text{intérieur de } V_a) = \text{intérieur de l'intérieur de } V_a.$$

Donc les voisinages adoptés vérifient α_2) ; donc notre espace ($\mathfrak{V}$) vérifie α).

C. Q. F. D.

* *Théorème réciproque.* — *Soit un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant* α), *et soient, dans cet espace, un point a et une famille admissible* $\{V_a\}$ *de voisinages* V_a *de a* ; *on peut alors prendre comme famille de voisinages de a équivalente à la précédente, la famille* $\{\mathfrak{V}_a\}$ *des ensembles*

$$\mathfrak{V}_a = \text{intérieur de } V_a$$

et les $\mathfrak{V}_a$ *sont tous ouverts.*

En effet tout d'abord, puisque α) équivaut à α_1), les $\mathfrak{V}_a$ sont tous ouverts. Il nous reste donc à démontrer l'équivalence des deux familles $\{V_a\}$ et $\{\mathfrak{V}_a\}$, et pour cela il nous faut montrer que tout V_a contient un $\mathfrak{V}_a$, et que tout $\mathfrak{V}_a$ contient un V_a.

D'abord tout V_a contient un $\mathfrak{V}_a$ à savoir l'intérieur de V_a.

Réciproquement donnons-nous un

$$\mathfrak{V}_a = \text{intérieur de } V_a.$$

Puisque α) équivaut à α_2), la famille $\{V_a\}$ vérifie α_2) ; donc, en vertu de la seconde forme de la condition α_2) donnée au § VI, il existe un voisinage W_a appartenant à la famille $\{V_a\}$ tel que

$$W_a \subset (\text{intérieur de } V_a) = \mathfrak{V}_a.$$

Donc tout $\mathfrak{V}_a$ contient un ensemble de la famille $\{V_a\}$.

C. Q. F. D.

---

(1) Voir E. A., p. 187.

Le dernier théorème entraîne le corollaire suivant :

* Dans un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant α), la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a soit point d'accumulation d'un ensemble E est que tout voisinage de a contienne *à son intérieur* au moins un point de E distinct de a.

CHAPITRE III

COMPARAISON DE LA CONDITION « TOUT ENSEMBLE DE FERMETURE EST FERMÉ » AVEC LA CONDITION « TOUT ENSEMBLE DÉRIVÉ EST FERMÉ »

§ I. **Les conditions 2° et 3° de F. Riesz.** — Nous appellerons ainsi les conditions suivantes :

2° de F. Riesz. — *Tout point d'accumulation de la somme de deux ensembles est point d'accumulation de l'un au moins de ces deux ensembles.*

3° de F. Riesz. — *Tout ensemble n'ayant qu'un seul élément n'a pas de point d'accumulation.*

Remarquons que l'ensemble des conditions 1° de F. Riesz (définie au Chapitre I) et 2° de F. Riesz équivaut, comme on le voit sans peine, à l'identité

$$(E + F)' = E' + F'.$$

Comme tout espace ($\mathfrak{V}$) vérifie 1° de F. Riesz nous voyons que *la condition 2° de F. Riesz équivaut dans un espace ($\mathfrak{V}$) à l'identité ci-dessus c'est-à-dire à la distributivité de l'opération de dérivation.*

§ II. **La condition** β). — Nous appellerons ainsi la condition suivante [1] :

β) *Tout ensemble dérivé est fermé.*

Cette condition est à rapprocher de notre condition :

α) *Tout ensemble de fermeture est fermé.*

α) et β) sont toutes deux vérifiées dans de nombreux espaces abstraits (espaces euclidiens, espaces distanciés, espaces accessibles). Nous allons démontrer que :

---

[1] Étudiée par M. Fréchet (E. A., p. 183).

* *Les conditions* α) *et* β) *chevauchent dans l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général.*

Nous entendons par là qu'un espace ($\mathcal{V}$) peut vérifier α) sans vérifier β), et qu'un espace ($\mathcal{V}$) peut vérifier β) sans vérifier α). Ceci résulte des deux exemples su vants.

§ III. * **Exemple d'un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant α) sans vérifier β).** — Appelons espace ($\mathcal{E}_1$) un espace ($\mathcal{V}$) formé des points

$$\cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

où n peut prendre toutes les valeurs entières > 0, < 0 et $= 0$. Pour compléter la définition de l'espace ($\mathcal{E}_1$) nous attachons à chaque point a_n deux voisinages, l'un $(a_n) + (a_{n-1})$, l'autre $(a_n) + (a_{n+1})$.

On voit sans peine que tous les voisinages adoptés dans l'espace ($\mathcal{E}_1$) sont des ensembles ouverts. Par conséquent l'espace ($\mathcal{E}_1$) vérifie α).

Ceci posé, dans l'espace ($\mathcal{E}_1$), la condition nécessaire et suffisante pour que a_n soit point d'accumulation d'un ensemble E est que E contienne à la fois les deux points a_{n-1} et a_{n+1}. Considérons alors l'ensemble

$$e = (a_1) + (a_3) + (a_5)$$

on a

$$e' = (a_2) + (a_4),$$
$$e'' = (a_3).$$

On n'a pas $e'' \subset e'$, donc e' n'est pas fermé et l'espace ($\mathcal{E}_1$) ne vérifie pas β).

Remarque. — L'espace ($\mathcal{E}_1$) vérifie évidemment la condition 3° de F. Riesz, mais il ne vérifie pas la condition 2° ; en effet a_2 par exemple est point d'accumulation de $(a_1) + (a_3)$ sans être point d'accumulation ni de (a_1) ni de (a_3).

§ IV. * **Exemple d'un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant β) sans vérifier α).** — Appelons espace ($\mathcal{E}_2$) un espace ($\mathcal{V}$) formé des trois points a, b, c et où nous définissons les voisinages de la façon suivante :

nous attribuons à c un seul voisinage $V_c = (c)$,
nous attribuons à b un seul voisinage $V_b = (b) + (c)$
et nous attribuons à a deux voisinages $V_a^1 = (a) + (b)$ et $V_a^2 = (a) + (c)$.

Si alors nous désignons par E un ensemble non vide quelconque de points de l'espace ($\mathcal{E}_2$), nous n'avons que sept cas possibles :

1)	$E = (a)$,	alors	$E' = 0$,		
2)	$E = (b)$,	alors	$E' = 0$,		
3)	$E = (c)$,	alors	$E' = (b)$,	et	$E'' = 0$,
4)	$E = (a) + (b)$,	alors	$E' = 0$,		
5)	$E = (a) + (c)$,	alors	$E' = (b)$,	et	$E'' = 0$,
6)	$E = (b) + (c)$,	alors	$E' = (a) + (b)$,	et	$E'' = 0$,
7)	$E = (a) + (b) + (c)$,	alors	$E' = (a) + (b)$,	et	$E'' = 0$.

Dans chacun des sept cas ci-dessus, E' est fermé ; donc l'espace ($\mathcal{E}_2$) vérifie β).

Par contre on a dans le cas 3)

$$E = (c), \qquad E + E' = (b) + (c), \qquad (E + E')' = (a) + (b),$$

donc, dans ce cas, $E + E'$ n'est pas fermé. Par conséquent l'espace ($\mathcal{E}_2$) ne vérifie pas α) et ne vérifie donc ni α_1) ni α_2).

§ V. **Cas des espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant 2° de F. Riesz.** — Nous allons démontrer que, * *dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* 2° *de F. Riesz, la condition* β) *entraîne la condition* α), *mais que* α) *n'entraîne pas* β). Ceci résulte du théorème et de l'exemple suivants :

* *Théorème.* — Si un espace ($\mathcal{V}$) vérifie 2° et β) il vérifie α).

En effet, soit dans un tel espace un ensemble quelconque E. En vertu de 2° la dérivation est distributive, de sorte que l'on a

$$(E + E')' = E' + E''$$

et on a en vertu de β)

$$E' + E'' = E',$$

d'où

$$(E + E')' \subset E + E'.$$

C. Q. F. D.

Exemple. — Appelons espace ($\mathcal{E}_3$) un espace ($\mathcal{V}$) dont les points sont les éléments d'un ensemble donné quelconque P (comprenant plus de deux éléments), et où nous attribuons à chaque point a un voisinage unique

$$V_a = P = \text{espace entier.}$$

On vérifie sans peine que cet espace ($\mathcal{E}_3$) est *un * exemple d'espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz et* α) *sans vérifier* β).

On peut remarquer que l'espace ($\mathcal{E}_3$) ne vérifie pas 3° de F. Riesz.

§ VI. **Sur un cas d'équivalence de α) et de β).** — THÉORÈME. — * *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant* 2° *et* 3° *de F. Riesz la condition* β) *équivaut à la condition* α) *et par conséquent aussi à* α_1) *et à* α_2).

En vertu des résultats obtenus au § précédent et au Chapitre II il nous suffit de démontrer que, dans un tel espace, α) entraîne β). Soit donc un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant 2°, 3° et α), et soit un ensemble quelconque E de points de cet espace.

On a, en vertu de la condition 1° de F. RIESZ vérifiée par tout espace ($\mathfrak{V}$),

$$E'' \subset (E + E')'$$

et on a, en vertu de α),

$$(E + E')' \subset E + E',$$

d'où

$$E'' \subset E + E'. \tag{1}$$

Soit a un point quelconque de E″ ; nous avons deux cas possibles :

1^er^ *cas* : a n'appartient pas à E.

Alors a appartient nécessairement à E′ en vertu de (1).

2^e^ *cas* : a appartient à E.

Posons alors

$$F = E - (a),$$

d'où

$$E = F + (a).$$

En vertu de 2° la dérivation est distributive, de sorte que nous avons

$$E' = F' + (a)'.$$

Or $(a)'$ est vide en vertu de 3°, on a donc

$$E' = F',$$
$$E'' = F''.$$

Ceci posé, la relation (1) a lieu quel que soit l'ensemble E ; donc elle a lieu aussi pour l'ensemble F, autrement dit

$$F'' \subset F + F'.$$

Or le point a appartient à $E'' = F''$, et le point a n'appartient pas à F ; donc le point a appartient à $F' = E'$. Ainsi dans le 2e cas comme dans le 1er cas le point a appartient à E' ; donc $E'' \subset E'$.

C. Q. F. D. [1]

§ VII. **Sur diverses classes d'espaces** ($\mathcal{V}$). — M. FRÉCHET a appelé *espaces accessibles* [2] les espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant les conditions 2° et 3° de F. RIESZ et la condition β).

D'après le théorème précédent on voit que l'on obtient une définition équivalente à la précédente en y remplaçant la condition β) par la condition α) sous l'une quelconque de ses formes.

La suite de cet ouvrage nous permettra de constater que presque toutes les propriétés importantes des espaces accessibles peuvent s'étendre aux espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant seulement les conditions 2° de F. RIESZ et α). Il est donc intéressant de remarquer que l'exemple des espaces ($\mathcal{E}_3$) et ($\mathcal{E}_1$) envisagés plus haut montre que * *la classe des espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz et* α) *est effectivement plus générale que celle des espaces accessibles mais effectivement moins générale que celle des espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* α).

---

(1) On doit à M. FRÉCHET la démonstration de l'équivalence des conditions β) et α_2) dans le cas d'un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant 2° et 3° (« Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits » *Bull. Sc. math.*, t. XLII, 1918, p. 138-156). On lui doit aussi une démonstration directe de l'équivalence de β) et de α_1) dans le même cas (« *American journ. of math.* » vol. L, janvier 1928, p. 59).

(2) E. A., p. 185.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DE LA DEUXIEME CONDITION DE F. RIESZ

Notre principal objet dans ce Chapitre est de mettre la condition 2° de F. Riesz sous diverses formes intéressantes en elles-mêmes et dont plusieurs seront utilisées ultérieurement.

§ I. **La condition** 2°. — Nous avons vu au début du Chapitre précédent que la condition 2° de F. Riesz à savoir :

2° *Tout point d'accumulation de la somme de deux ensembles est point d'accumulation de l'un au moins de ces deux ensembles.*

Équivaut, dans un espace ($\mathcal{V}$), à l'identité suivante

$$(E + F)' = E' + F',$$

c'est-à-dire à la *distributivité de l'opération de dérivation.*

§ II. **La condition** $(2°)_1$. — Nous allons démontrer que, * *dans un espace* ($\mathcal{V}$), *la condition* 2° *de F. Riesz équivaut à la suivante* :

$(2°)_1$. *L'opération de fermeture est distributive, autrement dit on a l'identité*

$$\overline{E + F} = \overline{E} + \overline{F}. \tag{1}$$

En effet, considérons d'abord un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant 2°. Dans un tel espace on a l'identité

$$(E + F)' = E' + F',$$

d'où résulte évidemment l'identité (1).

Réciproquement considérons un espace ($\mathcal{V}$) où la relation (1) a lieu quels que soient les ensembles E et F. Soit alors a un point quelconque de $(E + F)'$, nous poserons

$$e = E - (a), \qquad f = F - (a).$$

Par hypothèse la relation (1) est vérifiée aussi pour e et f, autrement dit :

$$(2) \qquad e + f + (e + f)' = (e + e') + (f + f').$$

Tenant compte de la condition b) imposée par nous au Chapitre I à tout espace topologique (et qui est vérifiée dans tout espace $(\mathcal{V})$), nous voyons que $a \in (e + f)'$; or a n'appartient ni à e ni à f ; donc, en vertu de (2), $a \in e' + f'$. Si nous tenons encore compte de la condition b), nous voyons que $a \in E' + F'$. Donc

$$(E + F)' \subset E' + F'.$$

Donc notre espace $(\mathcal{V})$ vérifie la condition 2°.

C. Q. F. D.

§ III. **La condition** $(2°)_2$. — Nous venons de voir que, dans un espace $(\mathcal{V})$, la condition 2° de F. Riesz équivaut à l'identité

$$(1) \qquad \overline{E + F} = \bar{E} + \bar{F}.$$

Remplaçons, dans cette identité, E par C (E) et F par C (F) ; l'identité (1) devient

$$(1)' \qquad \overline{C(EF)} = \overline{C(E)} + \overline{C(F)}.$$

Ceci posé, rappelons l'identité vraie dans tout espace $(\mathcal{V})$ et qui nous a servi si souvent :

$$C(\text{intérieur de } E) = \overline{C(E)}.$$

Tenant compte de cette identité, (1)' devient :

$$C(\text{intérieur de } EF) = C(\text{intérieur de } E) + C(\text{intérieur de } F),$$

ou bien :

$$(3) \qquad (\text{intérieur de } EF) = (\text{intérieur de } E)(\text{intérieur de } F)$$

Nous concluons de là que la condition 2° de F. Riesz équivaut, dans un espace $(\mathcal{V})$, à l'identité (3). Autrement dit, * *la condition 2° de F. Riesz équivaut, dans un espace* $(\mathcal{V})$, *à la suivante* :

$(2°)_2$. *L'intérieur de tout produit de deux ensembles est le produit des intérieurs de ces deux ensembles.*

On obtient évidemment une condition équivalente à $(2°)_2$ en y remplaçant les mots « deux ensembles » par les mots « nombre fini d'ensembles ».

§ IV. **La condition** $(2^o)_3$. — Nous allons démontrer que, *dans un espace* ($\mathfrak{V}$), *la condition* 2° *de F. Riesz équivaut à la suivante* (1) :

$(2^o)_3$. *Pour tout point a et tous voisinages* V_a *et* W_a *de a, il existe au moins un voisinage de a appartenant entièrement à la fois à* V_a *et* W_a.

Démonstration. — Il nous suffit de démontrer l'équivalence, dans un espace ($\mathfrak{V}$), des conditions $(2^o)_2$ et $(2^o)_3$.

1) Considérons d'abord un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant $(2^o)_2$. On a dans un tel espace pour tout point a et tous voisinages V_a et W_a de a :

$$(\text{intérieur de } V_aW_a) = (\text{intérieur de } V_a)(\text{intérieur de } W_a).$$

Comme, dans un espace ($\mathfrak{V}$), chaque point est intérieur à chacun de ses voisinages, a est intérieur à la fois à V_a et à W_a ; donc

$$a \in \text{intérieur de } V_aW_a.$$

Donc il existe un voisinage de a appartenant entièrement au produit $V_a W_a$; autrement dit notre espace ($\mathfrak{V}$) vérifie $(2^o)_3$.

2) Réciproquement considérons un espace ($\mathfrak{V}$) où les familles de voisinages adoptées vérifient $(2^o)_3$. Soient alors, dans cet espace, deux ensembles quelconques E et F, et soit a un point arbitraire du produit

$$(\text{intérieur de E})\ (\text{intérieur de F}).$$

Alors il existe deux voisinages V_a et W_a de a tels que

$$V_a \subset E \quad \text{et} \quad W_a \subset F.$$

En vertu de $(2^o)_3$ il existe un voisinage $\mathfrak{V}_a$ de a tel que

$$\mathfrak{V}_a \subset V_aW_a \subset EF,$$

donc a est intérieur à EF ; par conséquent :

$$(\text{intérieur de E})(\text{intérieur de F}) \subset \text{intérieur de EF}.$$

Or nous savons que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; nous avons donc aussi :

$$(\text{intérieur de EF}) \subset (\text{intérieur de E})\ (\text{intérieur de F}).$$

---

(1) Cette forme de la condition 2° de F. Riesz a été obtenue par M. Fréchet (« Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits » *Bull. sc. math.*, t. XLII, 1918, p. 138-156.)

D'où finalement :

$$(\text{intérieur de } EF) = (\text{intérieur de } E)\,(\text{intérieur de } F).$$

Nous en concluons que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), $(2^o)_3$ entraîne $(2^o)_2$.

C. Q. F. D.

§ V. **La condition** $(2^o)_4$. — Nous allons donner à la condition 2^o de F. Riesz une cinquième forme qui est en relation intime avec la « propriété de Hedrick généralisée » dont nous nous occuperons plus loin. Cette forme est la suivante :

$(2^o)_4$. *Si a est point d'accumulation d'un ensemble* F, *et si a est en même temps intérieur à un ensemble* E, *alors a est point d'accumulation du produit* FE.

Nous allons démontrer que, * *dans un espace* ($\mathfrak{V}$), *les conditions* 2^o *de F. Riesz et* $(2^o)_4$ *sont équivalentes.*

En effet considérons d'abord un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant 2^o, et soient, dans cet espace, deux ensembles quelconques E et F. On a

$$F = FE + FC(E).$$

D'où en vertu de 2^o

$$F' \subset (FE)' + [FC(E)]'.$$

Soit alors a un point appartenant à la fois à F' et à l'intérieur de E ; a n'est pas point d'accumulation de FC (E), et par conséquent, en vertu de la relation ci-dessus, on peut écrire :

$$a \in (FE)'.$$

Nous avons donc démontré que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), 2^o entraîne $(2^o)_4$.

Réciproquement, considérons un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant $(2^o)_4$. Par hypothèse on a dans un tel espace, quels que soient les ensembles E et F :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset (FE)'. \tag{1}$$

Soient, dans cet espace, deux ensembles quelconques A et B ; posons :

$$F = A + B, \qquad E = C(A).$$

La relation (1) devient :

$$(A + B)' \cdot C(A + A') \subset [BC(A)]'.$$

On en déduit en tenant compte de la condition 1° de F. RIESZ :

$$(A + B)' \cdot C(A + A') \subset B'$$

d'où

$$(A + B)' \subset A + A' + B'. \tag{2}$$

Ceci posé, soit x un point quelconque de $(A + B)'$, posons

$$A_1 = A - (x).$$

Comme la relation (2) a lieu quels que soient les ensembles A et B, on peut écrire :

$$(A_1 + B)' \subset A_1 + A'_1 + B'.$$

En vertu de la condition *b*) imposée à tout espace topologique on a $x \in (A_1 + B)'$, et comme x n'appartient pas à A_1, on a $x \in A_1' + B'$. Tenant encore compte de la condition *b*), nous voyons que $x \in A' + B'$. D'où finalement

$$(A + B)' \subset A' + B'.$$

Nous avons donc démontré que, dans un espace $(\mathfrak{V})$, $(2°)_4$ entraîne 2°.

C. Q. F. D.

On peut résumer les résultats obtenus depuis le début de ce Chapitre en disant que, * *dans un espace* $(\mathfrak{V})$, *les cinq conditions* 2°, $(2°)_1$, $(2°)_2$, $(2°)_3$ *et* $(2°)_4$ *sont équivalentes.*

§ VI. **La propriété de Hedrick généralisée.** — On peut envisager une condition distincte de la condition $(2°)_4$ mais de forme analogue en adoptant [1] la définition suivante :

Un espace $(\mathfrak{V})$ possède la *propriété de Hedrick généralisée* si, pour tous les sous-ensembles E et F de cet espace, on a la relation suivante :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset [F \cdot (\text{intérieur de } E)]'.$$

Le principal intérêt de la propriété de HEDRICK généralisée consiste, nous semble-t-il, en ceci que cette propriété permet de caractériser l'importante classe des espaces $(\mathfrak{V})$ vérifiant à la fois les conditions 2° de F. RIESZ et α). Nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

---

[1] Avec M. FRÉCHET E. A., p. 211-212.

* *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *la propriété de Hedrick généralisée équivaut à l'ensemble des conditions* 2° *de F. Riesz et* α).

En effet considérons d'abord un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant 2° et α). Dans cet espace $(2°)_4$ est vérifiée, autrement dit on a quels que soient les ensembles E et F :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset (F \cdot E)'.$$

En vertu de α) l'intérieur de E est ouvert, autrement dit :

$$(\text{intérieur de } E) = \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

Ceci posé, remplaçons dans (1) E par l'intérieur de E ; (1) étant vraie quel que soit E ne cessera pas d'être vraie ; on a donc :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset [F \cdot (\text{intérieur de } E)]'. \tag{2}$$

Nous avons donc démontré qu'un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant 2° et α) vérifie nécessairement la propriété de Hedrick généralisée.

Réciproquement considérons un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant la propriété de Hedrick généralisée. Dans cet espace on a par hypothèse la relation (2) ci-dessus quels que soient les ensembles E et F ; on en déduit en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset (F \cdot E)',$$

autrement dit notre espace ($\mathcal{V}$) vérifie $(2°)_4$ et par conséquent 2°. D'autre part faisons dans (2)

$$F = C(\text{intérieur de } E).$$

(2) devient

$$[C(\text{intérieur de } E)]' \cdot (\text{intérieur de } E) = 0.$$

L'intérieur de E est donc ouvert et par conséquent notre espace ($\mathcal{V}$) vérifie α). Nous avons donc démontré que, dans un espace ($\mathcal{V}$), la propriété de Hedrick généralisée entraîne les conditions 2° et α).

C. Q. F. D.

§ VII. **Sur deux propriétés des ensembles ouverts et fermés.** — Considérons les deux propriétés suivantes :

p_{I}. Toute somme d'un nombre fini d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

p_{II}. Tout produit d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

En prenant les complémentaires on constate sans peine que, dans un espace $(\mathcal{V})$, p_{I} entraîne p_{II} et p_{II} entraîne p_{I}. Autrement dit p_{I} et p_{II} sont équivalentes dans un espace $(\mathcal{V})$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

* *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant* 2° *de F. Riesz les propriétés* p_{I} *et* p_{II} *sont vraies.*

En effet, il nous suffit de démontrer que p_{I} est vraie dans le cas de deux ensembles fermés. Soient donc E et F deux ensembles fermés. On a

$$E' \subset E, \qquad F' \subset F$$

et on a en tenant compte de 2° :

$$(E + F)' \subset E' + F' \subset E + F.$$

Donc E + F est fermé

C. Q. F. D.

Première remarque. — Nous allons montrer sur un exemple que * *les propriétés* p_{I} *et* p_{II} *ne s'étendent pas à l'espace* $(\mathcal{V})$ *le plus général.*

Pour cela prenons comme espace $(\mathcal{V})$ l'espace $(\mathcal{E}_1)$ étudié au § III du Chapitre III.

On vérifie de suite que, dans cet espace, les deux ensembles $E = (a_{n-1})$ et $F = (a_{n+1})$ n'ont aucun point d'accumulation et sont par conséquent fermés. Par contre l'ensemble

$$E + F = (a_{n-1}) + (a_{n+1})$$

admet a_n pour point d'accumulation et n'est donc pas fermé. L'espace $(\mathcal{E}_1)$ est donc un espace $(\mathcal{V})$ ne vérifiant pas la propriété p_{I}, et il en résulte que l'espace $(\mathcal{E}_1)$ ne vérifie pas non plus la propriété p_{II}.

Deuxième remarque. — Nous allons montrer sur un exemple que * *les propriétés* p_{I} *et* p_{II} *s'étendent cependant à certains espaces* $(\mathcal{V})$ *ne satisfaisant pas à la condition* 2° *de F. Riesz.*

Pour cela, appelons espace $(\mathcal{E}_4)$ un espace $(\mathcal{V})$ formé des points $\ldots\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots$, n prenant toutes les valeurs entières > 0, $= 0$ et < 0, et où on attribue à chaque point a_n deux voisinages :

$$W^1_{a_n} = (a_n) + (a_{n+1}) + (a_{n+2}),$$
$$W^2_{a_n} = (a_{n-1}) + (a_n) + (a_{n+1}).$$

On voit de suite que ces voisinages ne satisfont pas à la condition $(2^o)_3$. Donc l'espace $(\mathcal{E}_4)$ ne vérifie pas la condition 2° de F. Riesz.

Nous allons déterminer tous les ensembles ouverts de l'espace $(\mathcal{E}_4)$. Pour cela remarquons que si E est un ensemble ouvert de $(\mathcal{E}_4)$ et si $a_n \in E$, alors un voisinage de a_n appartient à E, et par conséquent $a_{n+1} \in E$. Il en résulte que tout ensemble ouvert de l'espace $(\mathcal{E}_4)$ (en dehors de l'espace entier et de l'ensemble vide) est nécessairement de la forme :

$$(1) \qquad E = (a_n) + (a_{n+1}) + (a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+p}) + \cdots$$

p prenant toutes les valeurs entières $\geqslant 0$; et on vérifie de suite que tout ensemble de la forme (1) ci-dessus est ouvert.

Ceci posé, on vérifie immédiatement que le produit d'un nombre fini d'ensembles de la forme (1) ci-dessus est encore de la forme (1). Donc l'espace $(\mathcal{E}_4)$ jouit de la propriété p_{II} et il jouit par conséquent aussi de la propriété p_{I}.

CHAPITRE V

LES ENSEMBLES DENSES EN SOI ET CLAIRSEMÉS DANS LES ESPACES $(\mathfrak{V})$

Dans les quatre Chapitres précédents nous avons défini diverses classes très générales d'espaces abstraits. Nous allons maintenant commencer l'étude systématique des propriétés des ensembles de points de ces espaces. Le principal objet de la suite de ce travail sera d'ailleurs l'étude des ensembles appartenant soit à l'espace $(\mathfrak{V})$ le plus général, soit à un espace $(\mathfrak{V})$ vérifiant la condition que nous avons appelée α).

Afin de simplifier le langage nous nous soumettrons, jusqu'à la fin de cet ouvrage, à la convention suivante : toutes les fois que nous énoncerons une définition ou un théorème sans indiquer dans l'énoncé même à quel espace cette définition ou ce théorème s'appliquent, *il sera toujours sous-entendu qu'ils s'appliquent à l'espace* $(\mathfrak{V})$ *le plus général.* Toutes les fois qu'une définition ou un théorème ne s'appliqueront qu'à un espace $(\mathfrak{V})$ particulier, mention en sera faite explicitement dans chaque énoncé.

Pour faciliter la tâche au lecteur nous précisons que nos § seront numérotés comme plus haut avec des chiffres romains : § I, § II,... ; mais que nos théorèmes seront numérotés avec des chiffres arabes : 1), 2), 3),..., le numérotage commençant par 1) au début de chaque Chapitre.

§ I. **Définitions.** — Nous adoptons les définitions suivantes (1) :

Un ensemble E est *dense en soi* s'il appartient à son dérivé E'.

Un ensemble E est *parfait* s'il est fermé et dense en soi, autrement dit s'il est identique à son dérivé.

(1) Admises par M. Fréchet (E. A., p. 174).

Un ensemble E est *clairsemé* s'il ne contient aucun ensemble non vide et dense en soi [1].

§ II. Sur le plus grand sous-ensemble dense en soi d'un ensemble.

1) *Toute somme* S *d'ensembles* E *chacun dense en soi est un ensemble dense en soi.*

En effet soit a un point de S ; alors il existe un E tel que

$$a \in E \subset E',$$

Or

$$E \subset S,$$

d'où, en vertu de la condition 1° de F. Riesz :

$$E' \subset S',$$

d'où

$$a \in S'.$$

Donc tout point de S appartient à S'.

C. Q. F. D.

Soit alors E un ensemble quelconque de points d'un espace $(\mathfrak{V})$; posons :

D = somme de tous les ensembles denses en soi appartenant à E.

En vertu de 1), D, qui peut être vide, est un ensemble dense en soi appartenant à E. Nous dirons avec M. Hausdorff et M. Fréchet que D est *le plus grand sous-ensemble dense en soi de* E.

On a, en tenant compte de 1° de F. Riesz :

$$D \subset D' \subset E',$$

d'où

$$D \subset EE'.$$

Si EE' est dense en soi, ce qui n'a même pas lieu pour tout ensemble linéaire, on a D = EE'. Dans le cas contraire D n'est qu'une partie de EE'.

Nous avons les deux théorèmes suivants [2] :

---

[1] Cette définition des ensembles clairsemés coïncide avec la définition des « separierte Mengen » de G. Cantor et avec celle des « zerstreute Mengen » de M. Hausdorff ; mais le nom d'ensemble « clairsemé » est dû à M. Denjoy.

[2] Les théorèmes 2) et 3) sont dus, dans l'espace $(\mathfrak{V})$ le plus général, à M. Sierpinski et à M. Fréchet (E. A., p. 227).

2) *Tout ensemble* E *est la somme de deux ensembles disjoints, l'un dense en soi et l'autre clairsemé (l'un ou l'autre pouvant être vide).*

On a en effet

$$E = D + (E - D).$$

Si E — D contenait un ensemble non vide H dense en soi, D + H serait dense en soi en vertu de 1) et D ne serait pas le plus grand sous-ensemble dense en soi de E. Donc E — D est clairsemé.

C. Q. F. D.

Supposons E fermé ; on peut alors écrire en tenant compte de 1° de F. Riesz :

$$D \subset D' \subset E' \subset E,$$
$$D' \subset D''.$$

donc D' est un sous-ensemble dense en soi de E ; donc $D' \subset D$, et par conséquent D est parfait. Nous avons donc la proposition suivante :

3) *Tout ensemble* E *fermé est la somme de deux ensembles disjoints, l'un parfait et l'autre clairsemé (l'un ou l'autre pouvant être vide).*

Remarques sur les théorèmes 2) *et* 3). — Posons E = la droite euclidienne, et soit a un point quelconque de E ; on peut écrire :

$$E = [E - (a)] + (a).$$

E — (a) est dense en soi et (a) est clairsemé. Nous voyons ainsi que, même dans le cas euclidien, il y a en général plus d'une manière de décomposer un ensemble E en une somme de deux ensembles disjoints, l'un dense en soi et l'autre clairsemé ; autrement dit *la décomposition dont l'existence est affirmée par le théorème* 2) *n'est pas en général unique.*

Par contre nous allons voir que, * *dans le cas très général des espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz, la décomposition dont l'existence est affirmée par le théorème* 3) *est unique.* Ce résultat est une conséquence du théorème suivant :

* 4) *Soit, dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz, un ensemble quelconque* E. *S'il existe une décomposition* E = P + Q, P *étant parfait et* Q *clairsemé (l'un de ces deux ensembles pouvant être vide), alors* P *est nécessairement le plus grand sous-ensemble dense en soi de* E.

Démonstration. — Soit, comme plus haut, D le plus grand sous-ensemble dense en soi de E. On a

$$P \subset D,$$

d'où

$$D = P + (D - P).$$

On peut écrire en tenant compte de 2° de F. Riesz :

$$D - P \subset D \subset D' \subset P' + (D - P)' = P + (D - P)',$$

d'où

$$D - P \subset (D - P)',$$

de plus

$$D - P \subset Q.$$

Si donc D — P n'était pas vide, Q contiendrait l'ensemble D — P non vide et dense en soi contrairement à l'hypothèse. D — P est donc vide et par conséquent P = D.

C. Q. F. D.

§ III. Sur la fermeture d'un ensemble dense en soi.

5) *Si un ensemble* E *est dense en soi, alors* $\overline{E} = E' =$ *un ensemble dense en soi.*

En effet par hypothèse $E \subset E'$, d'où en vertu de la condition 1° de F. Riesz

$$E' \subset E'',$$

donc E' est dense en soi. De plus

$$\overline{E} = E + E' = E'.$$

C. Q. F. D.

Nous déduisons immédiatement de 5) la proposition suivante :

*6) *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant l'une au moins des deux conditions* α) *ou* β) (définie au Chapitre III), *si un ensemble* E *est dense en soi, alors* $\overline{E} = E' =$ *un ensemble parfait.*

§ IV. Sur certaines propriétés des espaces denses en soi. — Considérons les deux propriétés suivantes :

p_{III}. Tout point est point d'accumulation de tout ensemble auquel il est intérieur.

p_{IV}. Tout ensemble ouvert est dense en soi.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

* 7). *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *dense en soi et vérifiant* 2° *de F. Riesz, les propriétés* p_{III} *et* p_{IV} *sont vraies.*

En effet, en vertu de la forme $(2^o)_4$ de la condition 2° de F. RIESZ (Chapitre IV, § V), on a, quels que soient les ensembles E et F, la relation suivante :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset (FE)'.$$

Faisons F = espace entier ; cette relation devient :

$$(\text{intérieur de } E) \subset E'.$$

Autrement dit p_{III} est vraie, et par conséquent p_{IV} est vraie.

C. Q. F. D.

Remarques. — * *Les propriétés p_{III} et p_{IV} s'étendent à certains espaces* ($\mathcal{V}$) *denses en soi mais ne vérifiant pas la condition* 2° *de F. Riesz.*

En effet l'espace ($\mathcal{E}_4$) défini au § VII du Chapitre IV est un espace ($\mathcal{V}$) dense en soi mais ne vérifiant pas 2° ; de plus on voit de suite que dans ($\mathcal{E}_4$) chaque point est point d'accumulation de chacun de ses voisinages ; donc l'espace ($\mathcal{E}_4$) vérifie p_{III} et par conséquent p_{IV}.

Mais * *il existe des espaces* ($\mathcal{V}$) *denses en soi où ni p_{III} ni p_{IV} ne sont vérifiées.*

En effet l'espace ($\mathcal{E}_1$) défini au § III du Chapitre III est un espace ($\mathcal{V}$) dense en soi. Dans cet espace l'ensemble $E = (a_1) + (a_2)$ est ouvert, mais $E' = 0$; par conséquent ni p_{III} ni p_{IV} ne sont vérifiées dans l'espace ($\mathcal{E}_1$).

Remarquons enfin que dans un espace ($\mathcal{V}$) qui n'est pas dense en soi les propriétés p_{III} et p_{IV} ne peuvent être vérifiées. Nous savons en effet que l'espace entier est un ensemble ouvert c'est-à-dire identique à son intérieur.

CHAPITRE VI

LES PROPRIÉTÉS DE CONNEXION DANS LES ESPACES ($\mathcal{V}$)

Nous étudierons dans ce Chapitre les ensembles bien enchaînés et connexes ainsi que les continus appartenant à un espace ($\mathcal{V}$).

§ I. **Définitions.** — Nous adoptons les définitions suivantes [1] :

Deux ensembles E et F sont *mutuellement enchaînés* si

$$EF' + E'F + E'F' \neq 0.$$

Deux ensembles E et F sont *mutuellement connexes* si

$$EF' + E'F \neq 0.$$

Un ensemble G est *bien enchaîné* si, quels que soient les ensembles E et F non vides, distincts et tels que $G = E + F$, les ensembles E et F sont toujours mutuellement enchaînés.

Un ensemble G est *connexe* si, quels que soient les ensembles E et F non vides, distincts et tels que $G = E + F$, les ensembles E et F sont toujours mutuellement connexes.

Il sera commode, et d'ailleurs compatible avec les définitions précédentes, de considérer comme bien enchaîné et connexe tout ensemble réduit à un seul point.

§ II. **Remarques sur les définitions précédentes.** — Il résulte évidemment de nos définitions que *deux ensembles mutuellement connexes sont mutuellement enchaînés*, et que *tout ensemble connexe est bien enchaîné.* Mais on sait que les réciproques de ces deux propositions n'ont même pas lieu dans l'espace euclidien.

En tenant compte de la condition 1° de F. Riesz on obtient immédiatement la proposition suivante [2] :

---

(1) Qui sont les définitions admises par M. Fréchet (E. A., p. 175).

(2) Parmi les propositions démontrées dans ce Chapitre VI, les théorèmes 1), 2), 3), 6), 10), 23), 24), 25), 26), 30), 32), 33), sont dûs à M. Fréchet dans

1) *Si deux ensembles* e *et* f *sont mutuellement connexes* (*enchaînés*) *et si* $e \subset E$ *et* $f \subset F$, *alors* E *et* F *sont aussi mutuellement connexes* (*enchaînés*) (¹).

Démontrons maintenant les propositions suivantes qui nous seront utiles dans la suite :

2) On obtient des définitions *équivalentes* aux définitions, données au § I, d'un ensemble bien enchaîné et d'un ensemble connexe en y remplaçant les mots « ensembles E et F *distincts* » par les mots « ensembles E et F *disjoints.* »

En effet soit G un ensemble tel que, quels que soient les ensembles E et F non vides, disjoints et vérifiant

$$G = E + F,$$

E et F soient toujours mutuellement connexes (enchaînés). Considérons alors une décomposition

$$G = e + f$$

où e et f sont non vides et distincts mais pas nécessairement disjoints. L'un au moins des ensembles e ou f est différent de G ; nous pouvons supposer par exemple que $e \neq G$. Alors

$$G = e + (f - e),$$

e et $(f - e)$ étant non vides et disjoints. Alors, par hypothèse, e et $(f - e)$ sont mutuellement connexes (enchaînés), et, par suite de la proposition 1), il en est de même pour e et f. L'équivalence annoncée en résulte.

C. Q. F. D.

3) *Si tout couple de points d'un ensemble* G *appartient à un sous-ensemble connexe* (*bien enchaîné*) *de* G, *alors* G *est connexe* (*bien enchaîné*).

---

l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général. Quelques autres propositions, en particulier 15), 19), 21), 22) et 28), ont été démontrées par M. Fréchet dans le cas des espaces accessibles et seront étendues par nous à des cas effectivement plus généraux. (Pour les résultats obtenus par M. Fréchet, consulter par exemple E.A., p. 175-176, p. 228-229. et p. 243-244).

(¹) Dans cet énoncé les parenthèses signifient que l'on a une première proposition vraie en supprimant partout le mot « enchaînés » entre parenthèses, et une deuxième proposition vraie en remplaçant partout dans la première « connexes » par « enchaînés ». Nous emploierons souvent ce procédé des parenthèses pour condenser deux définitions, deux propositions et même deux démonstrations en une seule.

En effet soit $G = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints ; soient de plus a un point de E et b un point de F. Il existe alors un ensemble g connexe (bien enchaîné) contenant a et b et tel que $g \subset G$. On a

$$g = gE + gF,$$

gE et gF étant non vides et disjoints. gE et gF sont donc mutuellement connexes (enchaînés), et il en est de même pour E et F en vertu de 1). Donc G est connexe (bien enchaîné).

C. Q. F. D.

4) *Deux ensembles* E *et* F *fermés et disjoints ne peuvent être ni mutuellement connexes ni mutuellement enchaînés.*

On a en effet :

$$E' \subset E, \qquad F' \subset F, \qquad EF = 0$$

d'où

$$EF' + E'F + E'F' = 0.$$

C. Q. F. D.

5) *Deux ensembles* E *et* F *ouverts et disjoints ne peuvent être mutuellement connexes, mais ils peuvent être mutuellement enchaînés.*

On a en effet $F \subset C(E)$. En vertu de la définition d'un ensemble ouvert, les points de E ne sont points d'accumulation d'aucun sous-ensemble de C (E) ; donc $EF' = 0$. On montrerait de même que $E'F = 0$. Donc E et F ne sont pas mutuellement connexes.

Par contre deux ensembles E et F ouverts et disjoints peuvent être mutuellement enchaînés ; il suffit pour le voir de prendre pour E et F les intérieurs de deux cercles du plan euclidien extérieurs l'un à l'autre et tangents.

C. Q. F. D.

§ III. **Les continus.** — Commençons par démontrer les propositions suivantes :

6) *Il y a identité entre un ensemble fermé bien enchaîné et un ensemble fermé connexe.*

En effet il nous suffit évidemment de démontrer que tout ensemble fermé bien enchaîné est connexe. Soit donc G un ensemble fermé et bien enchaîné, et soit $G = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et distincts. On a :

$$EF' + E'F + E'F' \neq 0.$$

Tenant compte de la condition 1° de F. RIESZ, nous voyons que :

$$E'F' \subset G' \subset G = E + F.$$

D'où

$$E'F' \subset EF' + E'F.$$

On peut donc écrire

$$EF' + E'F = EF' + E'F + E'F' \neq 0.$$

Donc G est connexe.

C. Q. F. D.

*7) *Tout ensemble* G *fermé et non connexe est décomposable en une somme de deux ensembles* E *et* F *non vides, fermés et disjoints.*

En effet il existe deux ensembles E et F de somme G, non vides, disjoints et non mutuellement connexes. On a :

$$EF' = 0, \qquad E'F = 0$$

et en vertu de la condition 1° de F. RIESZ :

$$E' \subset G' \subset G = E + F$$
$$F' \subset G' \subset G = E + F.$$

D'où

$$E' \subset E$$
$$F' \subset F.$$

C. Q. F. D.

Nous déduisons de 6) et de 7) en tenant compte de 4) le résultat fondamental suivant :

*8) *Il y a identité entre un ensemble fermé bien enchaîné, un ensemble fermé connexe et un ensemble fermé indécomposable en une somme de deux ensembles non vides, fermés et disjoints.*

Nous appellerons *continu* un ensemble fermé bien enchaînés [1].

D'après le théorème précédent il est équivalent, dans un espace $(\mathcal{V})$, de définir un *continu* comme un ensemble fermé connexe, ou comme un ensemble fermé indécomposable.......

---

[1] Dans une de nos Notes précédentes (*Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, t. CLXXXXVI, p. 1205, séance du 24 avril 1933) nous avions appelé « continu » un ensemble fermé bien enchaîné et *contenant plus d'un point*. Nous croyons devoir supprimer cette dernière restriction qui est une source de complications inutiles.

Application à l'espace entier. — Appliquons les résultats précédents au cas de l'espace ($\mathfrak{V}$) tout entier qui, nous le savons, est à la fois ouvert et fermé. En vertu des résultats précédents il est équivalent d'admettre qu'un espace ($\mathfrak{V}$) est bien enchaîné, ou bien qu'il est connexe, ou bien qu'il est un continu.

Nous allons démontrer les propositions suivantes :

9) *Tout espace* ($\mathfrak{V}$) *qui n'est pas un continu est décomposable en une somme de deux ensembles non vides, disjoints et tous deux à la fois ouverts et fermés.*

En effet tout espace ($\mathfrak{V}$) qui n'est pas un continu est décomposable en une somme de deux ensembles E et F non vides, fermés et disjoints ; E et F sont ouverts comme étant chacun le complémentaire d'un ensemble fermé.

C. Q. F. D.

10) *Pour qu'un espace* ($\mathfrak{V}$) *soit un continu il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun ensemble à la fois ouvert et fermé, en dehors de l'espace entier et de l'ensemble vide.*

En effet, supposons qu'un espace ($\mathfrak{V}$) contienne un ensemble E non vide, distinct de l'espace entier et à la fois ouvert et fermé ; alors le complémentaire C (E) de E est aussi non vide et à la fois ouvert et fermé ; E et C (E) ne sont donc pas mutuellement connexes en vertu de 4) ; donc l'espace ($\mathfrak{V}$) considéré n'est pas connexe. Notre condition est donc bien nécessaire. D'autre part notre condition est suffisante en vertu de 9).

C. Q. F. D.

§ IV. Les ensembles ouverts connexes et ouverts bien enchaînés. — Tout ensemble ouvert connexe est évidemment un ensemble ouvert bien enchaîné. Mais *la réciproque de cette proposition n'a même pas lieu dans le cas euclidien.* Il suffit pour le voir de considérer l'ensemble G somme des intérieurs de deux cercles du plan euclidien extérieurs l'un à l'autre et tangents. Cet ensemble G est ouvert et bien enchaîné mais n'est pas connexe.

Nous allons démontrer les deux propositions suivantes analogues à 7) :

* 11) *Dans un espace* ($\underline{\mathfrak{V}}$) *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz tout ensemble* G *ouvert et non connexe est décomposable en une somme de deux ensembles* E *et* F *non vides, ouverts et disjoints.*

En effet il existe deux ensembles E et F de somme G, non vides, disjoints et non mutuellement connexes. On a :

$$C(E) = F + C(G).$$

D'où en tenant compte de la condition 2° de F. Riesz :

$$[C(E)]' \subset F' + [C(G)]'.$$

G étant ouvert, on a

$$[C(G)]' \subset C(G) \subset C(E);$$

de plus on a $EF' = 0$, d'où $F' \subset C(E)$, d'où finalement

$$[C(E)]' \subset C(E).$$

E est donc ouvert, et on montrerait de même que F est ouvert.

C. Q. F. D.

* 12) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz, tout ensemble* G *ouvert et non bien enchaîné est décomposable en une somme de deux ensembles* E *et* F *non vides, ouverts, non mutuellement enchaînés et disjoints.*

En effet il existe deux ensembles E et F de somme G, non vides, disjoints et non mutuellement enchaînés. On montrerait de la même manière que pour la proposition 11) que E et F sont ouverts.

C. Q. F. D.

On déduit sans peine des résultats précédents, en tenant compte de 5), les deux théorèmes suivants :

* 13) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz il y a identité entre un ensemble ouvert connexe et un ensemble ouvert indécomposable en une somme de deux ensembles non vides, ouverts et disjoints.*

* 14) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz il y a identité entre un ensemble ouvert bien enchaîné et un ensemble ouvert indécomposable en une somme de deux ensembles non vides, ouverts, non mutuellement enchaînés et disjoints.*

Remarque. — Les propriétés d'ensembles exprimées par les propositions 11), 12), 13) et 14) ont été démontrées en supposant vérifiée la condition 2° de F. Riesz. Nous allons montrer sur un exemple que * *ces propriétés ne s'étendent pas à l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général.*

En effet, reprenons l'espace ($\mathcal{E}_1$) envisagé au Chapitre III. Dans cet espace l'ensemble $G = (a_0) + (a_1)$ est ouvert ; d'autre part les deux ensembles (a_0) et (a_1) ne sont ni mutuellement connexes ni mutuellement enchaînés ; donc G n'est ni connexe ni bien enchaîné. Or il n'y a qu'une manière de décomposer G en une somme de deux ensembles E et F non vides et disjoints, c'est de poser:

$$E = (a_0), \qquad F = (a_1)$$

et E et F ne sont pas ouverts.

C. Q. F. D.

§ V. Relations entre les propriétés de connexion et la fermeture d'un ensemble.

* 15) *Si l'ensemble* G *est connexe* (*bien enchaîné*) *et si* $H \subset G'$, *alors* $G + H$ *est aussi connexe* (*bien enchaîné*).

En effet soit $G + H = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. Nous avons trois cas possibles :

1[er] *cas* : on a $EG \neq 0$ et $FG \neq 0$.

Alors EG et FG sont deux ensembles à la fois non vides, disjoints et de somme G ; donc EG et FG sont mutuellement connexes (enchaînés). Par conséquent, en vertu du théorème 1), E et F sont aussi mutuellement connexes (enchaînés).

2[e] *cas* : on a $EG = 0$.

Alors $$E \subset H \subset G'$$

et $$G \subset F,$$

d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$G' \subset F' ;$$

on en déduit que

$$E \subset F'$$

d'où $$EF' \neq 0$$

donc E et F sont mutuellement connexes et mutuellement enchaînés.

3[e] *cas* : on a $FG = 0$.

On montrerait comme dans le 2[e] cas que E et F sont mutuellement connexes et mutuellement enchaînés.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas possibles, E et F sont mutuellement connexes (enchaînés). Donc $G + H$ est connexe (bien enchaîné).

C. Q. F. D.

Le théorème 15) entraîne immédiatement que si un ensemble G est connexe (bien enchaîné), son ensemble de fermeture $\overline{G} = G + G'$ est aussi connexe (bien enchaîné). Nous allons même démontrer le théorème plus précis suivant :

* 16) *Si un ensemble* G *est bien enchaîné, alors* $\overline{G} = G + G'$ *est connexe.*

En effet soit $G + G' = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. Nous avons trois cas possibles :

1er *cas* : on a $EG \neq 0$ et $FG \neq 0$.

Alors EG et FG sont deux ensembles à la fois non vides, disjoints et de somme G ; donc EG et FG sont mutuellement enchaînés, autrement dit

$$EG(FG)' + (EG)'FG + (EG)'(FG)' \neq 0;$$

d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$EF' + E'F + E'F'G' \neq 0;$$

or $$G' \subset E + F$$

d'où $$E'F'G' \subset EF' + E'F;$$

nous avons donc

$$EF' + E'F \neq 0,$$

autrement dit E et F sont mutuellement connexes.

2e *cas* : on a $EG = 0$.

Alors $$E \subset G'$$

et $$G \subset F,$$

d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$G' \subset F';$$

on en déduit que $$E \subset F',$$

d'où $$EF' \neq 0;$$

donc E et F sont mutuellement connexes.

3e *cas* : on a $FG = 0$.

On montrerait comme dans le 2e cas que E et F sont mutuellement connexes.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas possibles, E et F sont mutuellement connexes. Donc $G + G'$ est connexe.

C. Q. F. D.

Il y a lieu de remarquer que cette proposition 16) devient une conséquence immédiate de 15) dans le cas d'un espace ($\mathfrak{V}$) où tout ensemble de fermeture est fermé, c'est-à-dire d'un espace ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à la condition α). Nous savons en effet que tout ensemble fermé bien enchaîné est connexe. D'ailleurs 15) entraîne immédiatement que :

* 17) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *l'ensemble de fermeture d'un ensemble bien enchaîné est un continu.*

Nous allons maintenant démontrer la réciproque suivante de 15), réciproque qui supposera il est vrai, contrairement à 15), la réalisation des conditions 2° de F. Riesz et α) :

* 18) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α), *si l'ensemble* $G + H$ *est bien enchaîné et si* $H \subset G'$, *alors* G *est bien enchaîné.*

En effet, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\bar{G} &= G + G' = G + H + G' \\ &= G + H + (\text{certains points d'accumulation de } G + H);\end{aligned}$$

donc, en vertu de 15), $\bar{G}$ est bien enchaîné. Ceci dit posons $G = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. On a en vertu de 2° de F. Riesz

$$\bar{G} = \bar{E} + \bar{F}.$$

$\bar{E}$ et $\bar{F}$ ont un point commun, car, dans le cas contraire, $\bar{E}$ et $\bar{F}$ seraient deux ensembles à la fois non vides (puisque E et F sont non vides) disjoints, fermés en vertu de α) et mutuellement enchaînés puisque $\bar{G}$ est bien enchaîné ; et ceci est impossible comme nous l'avons vu au théorème 4). Nous pouvons donc écrire

$$\bar{E}\bar{F} = EF + EF' + E'F + E'F' \neq 0,$$

et, comme par hypothèse $EF = 0$, les ensembles E et F sont mutuellement enchaînés ; donc G est bien enchaîné.

C. Q. F. D.

On déduit immédiatement des résultats précédents que :

* 19) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α), *pour qu'un ensemble soit bien enchaîné il faut et il suffit que son ensemble de fermeture soit bien enchaîné.*

En vertu de la condition α), cette proposition 19) peut se mettre sous la forme suivante :

* 20) *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α), *pour qu'un ensemble soit bien enchaîné il faut et il suffit que son ensemble de fermeture soit un continu.*

Remarque. — Considérons l'espace $(\mathcal{V})$ formé des quatre points a_1, a_2, a_3, a_4, et où on choisit les voisinages de la façon suivante :

a_1 a pour voisinage unique $(a_1) + (a_2)$,
a_2 a pour voisinage unique $(a_1) + (a_2) + (a_3)$,
a_3 a pour voisinage unique $(a_2) + (a_3) + (a_4)$,
a_4 a pour voisinage unique $(a_3) + (a_4)$.

Cet espace $(\mathcal{V})$ vérifie la condition 2° de F. Riesz mais ne satisfait pas à α). On vérifie sans peine que, dans cet espace, l'ensemble $G = (a_1) + (a_4)$ n'est pas bien enchaîné, tandis que

$$\overline{G} = (a_1) + (a_2) + (a_3) + (a_4) = \text{espace entier}$$

est bien enchaîné et même connexe. De plus $\overline{G}$ est fermé ; $\overline{G}$ est par conséquent un continu.

Nous voyons ainsi que les conditions suffisantes pour qu'un ensemble soit bien enchaîné, énoncées dans 18), 19) et 20), * *ne sont même pas suffisantes dans tous les espaces* $(\mathcal{V})$ *vérifiant la condition* 2° *de F. Riesz.*

§ VI. **Sur quelques propriétés de connexion liées à la condition** 3° **de F. Riesz.** — Rappelons que la condition 3° de F. Riesz s'énonce de la manière suivante :

3° Tout ensemble réduit à un seul élément a un dérivé vide.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

* 21) *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant la condition* 3° *de F. Riesz, tout ensemble bien enchaîné et contenant plus d'un point est dense en soi.*

En effet, soit, dans un tel espace, un ensemble G bien enchaîné et contenant plus d'un point. Soit a un point arbitraire de G. Alors (a) et $G - (a)$ sont deux ensembles non vides et mutuellement enchaînés. On a donc, puisque $(a)'$ est vide en vertu de 3°,

$$(a)\left[G - (a)\right]' \neq 0$$

d'où $$a \in \left[G - (a)\right]' \subset G'.$$

On en déduit que $$G \subset G'$$ C. Q. F. D.

On déduit immédiatement de 21) la proposition suivante :

* 22) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* 3° *de F. Riesz, tout continu contenant plus d'un point est parfait.*

Remarque. — Nous allons montrer sur un exemple que * *les propriétés* 21) *et* 22) *ne s'étendent même pas à tous les espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α).

En effet considérons l'espace ($\mathcal{V}$) formé des deux points a et b et où on attribue au point a l'unique voisinage $V_a = (a)$, et au point b l'unique voisinage $V_b = (b) + (a)$. Cet espace vérifie les conditions 2° de F. Riesz et α). On constate sans peine que, dans cet espace, l'ensemble

$$P = (a) + (b) = \text{espace entier}$$

est bien enchaîné et est même un continu. Et cependant $P' = (b)$; l'ensemble P n'est donc ni dense en soi ni parfait.

C. Q. F. D.

§ VII. Les sommes d'ensembles connexes et d'ensembles bien enchaînés.

23) *Si* G *et* H *sont deux ensembles chacun connexe* (*bien enchaîné*), *et si de plus* G *et* H *sont soit non disjoints soit mutuellement connexes* (*enchaînés*), *alors* $G + H$ *est connexe* (*bien enchaîné*).

En effet posons $G + H = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. Nous avons trois cas possibles :

1er *cas* : Nous supposons $EG \neq 0$ et $FG \neq 0$.

Alors EG et FG sont deux ensembles non vides, disjoints et de somme G ; donc EG et FG sont mutuellement connexes (enchaînés) ; par conséquent, en vertu du théorème 1), E et F sont aussi mutuellement connexes (enchaînés).

2e *cas* : Nous supposons $EH \neq 0$ et $FH \neq 0$.

Alors EH et FH sont deux ensembles non vides, disjoints et de somme H ; donc EH et FH sont mutuellement connexes (enchaînés) ; par conséquent E et F sont aussi mutuellement connexes (enchaînés).

3e *cas* : Nous supposons que ni le 1er cas, ni le 2e cas ne soit réalisé. Ce 3e cas se subdivise en quatre autres qui sont les seuls possibles et que nous numéroterons I, II, III et IV :

Cas I : On a $EG = 0$ et $EH = 0$.

Ce cas est irréalisable puisque E est non vide et appartient à $G + H$.

Cas II : On a $FG = 0$ et $FH = 0$.

Ce cas est irréalisable puisque F est non vide et appartient à $G + H$.

Cas III : On a $EG = 0$ et $FH = 0$.

Alors
$$E \subset H \subset E$$
$$F \subset G \subset F$$
d'où
$$E = H \quad \text{et} \quad F = G.$$

Ce cas est donc irréalisable si G et H sont non disjoints, puisque E et F ont été supposés disjoints. Si au contraire G et H sont disjoints, ils sont par hypothèse mutuellement connexes (enchaînés) ; donc E et F sont mutuellement connexes (enchaînés).

Cas IV : On a $FG = 0$ et $EH = 0$.

Alors
$$E \subset G \subset E$$
$$F \subset H \subset F$$
d'où
$$E = G \quad \text{et} \quad F = H.$$

Les conclusions sont les mêmes que dans le cas III.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas possibles, E et F sont mutuellement connexes (enchaînés) ; donc $G + H$ est connexe bien enchaîné). C. Q. F. D.

On déduit facilement de 23) le théorème suivant :

24) *Soit* $(\mathcal{F})$ *une famille d'ensembles chacun connexe* (*bien enchaîné*) ; *si deux ensembles quelconques de la famille* $(\mathcal{F})$ *sont toujours soit non disjoints soit mutuellement connexes* (*enchaînés*), *alors la somme* S *des ensembles de la famille* $(\mathcal{F})$ *est connexe* (*bien enchaînée*).

En effet soient a et b deux points quelconques de S. Alors a appartient à un ensemble G de la famille $(\mathcal{F})$, et b appartient à un ensemble H de la famille $(\mathcal{F})$. L'ensemble $G + H$ est connexe (bien enchaîné) en vertu de 23). Ainsi a et b appartiennent toujours à un sous-ensemble connexe (bien enchaîné) de S. Donc, en vertu du théorème 3), S est connexe (bien enchaîné).

C. Q. F. D.

§ VIII. **Les composants d'un ensemble.** — Soit G un ensemble non vide appartenant à un espace $(\mathcal{V})$, et soit a un point de G ; posons :

g_a = somme de tous les sous-ensembles de G qui sont chacun connexe et contiennent chacun le point a.

g_a contient le point a et est connexe en vertu de 24) ; g_a peut d'ailleurs se réduire au seul point a. On peut dire que g_a est le plus grand sous-ensemble de G qui soit connexe et contienne le point a.

Nous dirons avec M. Fréchet [1] qui emprunte lui-même cette définition à M. Hausdorff, que g_a est le *composant* de G relatif au point a de G.

Ceci posé, soient a et b deux points de G, et soient g_a et g_b les composants de G respectivement relatifs à a et b. Nous avons deux cas possibles :

1er *cas* : g_a et g_b ont un point commun.

Alors $g_a + g_b$ est connexe en vertu de 23), et, en vertu de la définition des composants, on a

$$g_a + g_b \subset g_a$$
$$g_a + g_b \subset g_b$$

d'où

$$g_a = g_b.$$

Il en résulte que g_a est le composant de G relatif à n'importe quel point de g_a. *On peut donc parler d'un composant d'un ensemble sans spécifier par rapport à quel point.*

2e *cas* : g_a et g_b sont disjoints.

Alors g_a et g_b ne sont pas mutuellement connexes, car, dans le cas contraire, $g_a + g_b$ serait connexe en vertu de 23), ce qui contredirait à la définition de g_a et de g_b.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

25) *Tout ensemble* G *non vide est la somme de ses composants qui sont des ensembles non vides, chacun connexe, deux à deux disjoints et deux à deux non mutuellement connexes.*

§ IX. Quelques propriétés des composants.

26) *Les composants d'un ensemble fermé sont des continus.*

En effet, soit G un ensemble fermé, soit g un composant de G et soit a un point de g'. On a $g \subset G$, d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$a \in g' \subset G' \subset G\,;$$

d'où

$$g + (a) \subset G.$$

(1) E. A., p. 228.

Or $g + (a)$ est connexe en vertu de 23) ; on a donc en vertu de la définition des composants :

$$g + (a) \subset g, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a \in g$$

d'où
$$g' \subset g.$$

Donc g est fermé ; et comme g est connexe, g est un continu.

C. Q. F. D.

* 27) *Soient* G *et* g *deux ensembles non vides tels que* $g \subset G$; *si* g *et* $G - g$ *ne sont pas mutuellement connexes et si* g *est connexe, alors* g *est un composant de* G.

En effet, soit a un point de g et soit g_a le composant de G relatif à a. On a

$$g \subset g_a$$

d'où
$$g_a = g + (g_a - g)$$

avec
$$g_a - g \subset G - g.$$

Si on avait $g_a - g \neq 0$, alors g et $g_a - g$ seraient mutuellement connexes puisque leur somme g_a est connexe. Par conséquent, en vertu du théorème 1), g et $G - g$ devraient être aussi mutuellement connexes, contrairement à l'hypothèse.

On a donc nécessairement $g_a - g = 0$, d'où $g = g_a$.

C. Q. F. D.

La réciproque de 27) n'est pas toujours vraie : plus précisément, *si* g *est un composant de* G, *l'ensemble* $G - g$ *étant non vide, il peut cependant arriver que* g *et* $G - g$ *soient mutuellement connexes.* En effet considérons par exemple sur la droite euclidienne l'ensemble G formé du point d'abscisse 0 et des points d'abscisses $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3,...)$, et appelons g l'ensemble formé du seul point d'abscisse 0. Alors g est un composant de G, et cependant g et $G - g$ sont mutuellement connexes.

§ X. **Sur une réciproque du théorème** 25). — Nous allons utiliser le théorème 27) précédent pour obtenir une proposition fournissant, dans un cas particulier, une réciproque au théorème 25). Pour cela nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — Soient, dans un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant 2° de F. Riesz, un ensemble H et une somme

$$S = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

formée d'un nombre fini d'ensembles. Si S et H sont mutuellement connexes, alors l'un au moins des G_i et H sont mutuellement connexes.

En effet par hypothèse, ou bien un point de S est point d'accumulation de H, et alors ce point appartient à l'un des G_i ; donc ce G_i et H sont mutuellement connexes. Ou bien un point de H est point d'accumulation de S ; alors, en vertu de 2°, ce point est point d'accumulation de l'un des G_i ; donc ce G_i et H sont encore mutuellement connexes.

C. Q. F. D.

Ce lemme étant établi, la proposition que nous avons en vue est la suivante :

*28). *Soient, dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz, des ensembles* $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *non vides, en nombre fini, chacun connexe, et de plus deux à deux disjoints et deux à deux non mutuellement connexes. Alors les* G_i *sont les composants de la somme*

$$S = G_1 + G_2 + \cdots + G_n.$$

En effet, en vertu du lemme précédent, G_i et $S - G_i$ ne sont pas mutuellement connexes. Puisque G_i est connexe, il en résulte, en vertu de 27), que G_i est un composant de S.

C. Q. F. D.

Même dans un espace accessible, le théorème 28) *précédent ne s'étend pas au cas de la somme d'une infinité dénombrable d'en sembles* G_i. Nous allons démontrer ce fait au moyen de l'exemple suivant :

Soit P un ensemble infini dénombrable ; nous considérons P comme l'ensemble des points de l'espace que nous allons définir. Nous déterminons l'opération de dérivation $E' = K(E)$ pour les ensembles $E \subset P$ au moyen de la convention suivante :

Si E est fini, on pose $E' = 0$.

Si E est infini, on pose $E' = P$.

Alors on vérifie sans peine que l'opération $E' = K(E)$ satisfait à la condition *b*) imposée par nous à tout espace topologique, aux conditions 1°, 2° et 3° de F. Riesz et à la condition α). Le système (P, K) ainsi défini est donc un espace accessible.

Si nous posons $P = E + F$, les ensembles E et F étant non vides, l'un au moins des deux ensembles E ou F est infini et a pour dérivé P. On a donc nécessairement $EF' + E'F \neq 0$. P est donc connexe ; par conséquent P n'a qu'un seul composant qui est P lui-même. Et cependant P est décomposable en la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles formés chacun d'un seul élément, et ces ensembles sont évidemment chacun connexe, deux à deux disjoints et deux à deux non mutuellement connexes en vertu de 3° de F. Riesz.

C. Q. F. D.

§ XI. **Quelques propriétés de connexion où intervient la notion de frontière.** — Soit E un ensemble de points d'un espace ($\mathcal{V}$) et soit C (E) son complémentaire par rapport à l'espace entier. Posons

$$i = (\text{intérieur de E})$$
$$e = (\text{extérieur de E}) = \text{intérieur de } C(E).$$

On a
$$i \subset E, \qquad e \subset C(E)$$
$$C(i + e) = \text{frontière de E}.$$

Un point de i n'est point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de C (E). Donc un point de i n'est point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de e. De même un point de e n'est point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de i. Il s'ensuit que deux ensembles appartenant l'un à i et l'autre à e ne sont jamais mutuellement connexes. On a en particulier la proposition suivante :

29) *L'intérieur et l'extérieur d'un ensemble ne sont jamais mutuellement connexes.*

Par contre l'intérieur et l'extérieur d'un ensemble peuvent être mutuellement enchaînés comme le montre l'exemple de l'intérieur et de l'extérieur d'un cercle dans le plan euclidien.

Démontrons les théorèmes suivants :

30) *Si un ensemble* G *connexe contient au moins un point d'un ensemble* E *et au moins un point du complémentaire de* E, *alors* G *contient au moins un point de la frontière de* E.

En effet si G ne contenait aucun point de la frontière de E on aurait

$$G = Gi + Ge,$$

Gi et Ge étant deux ensembles non vides, disjoints et non mutuellement connexes, ce qui est impossible puisque G est connexe.

C. Q. F. D.

* 31) *Si l'intérieur d'un ensemble* E *est non vide et connexe, cet intérieur est un composant du complémentaire de la frontière de* E.

En effet on a

$$C\,(\text{frontière de } E) = i + e.$$

i et e ne sont pas mutuellement connexes et i est connexe ; donc, en vertu de 27), i est un composant de $i + e$.

C. Q. F. D.

Si E est ouvert il coïncide avec son intérieur, et 31) prend la forme plus particulière suivante :

32) *Si* E *est un ensemble non vide, ouvert et connexe, il est un composant du complémentaire de la frontière de* E.

On déduit immédiatement de 32) que :

33) *Tout ensemble ouvert et connexe* E *est bien déterminé quand on en connaît un point a et la frontière.*

On a en effet

$$E = \text{composant relatif à } a \text{ de } C\,(\text{frontière de } E)$$

C. Q. F. D.

TOME II

COMPACITÉ, SÉPARABILITÉ, TRANSFORMATIONS ET FONCTIONNELLES

CHAPITRE VII

SUR LA NOTION DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES ($\mathfrak{V}$)

Avant d'aborder l'objet propre de ce Chapitre, objet qui sera expliqué au § II, il nous a semblé utile de résumer dans l'Introduction suivante un certain nombre de définitions et de propositions auxquelles il sera fréquemment fait appel dans la suite et qui sont empruntées à la théorie des nombres transfinis (1).

§ I. **Introduction**. — *a) Les ensembles ordonnés.* — Un ensemble E est dit *ordonné* si, pour tout couple d'éléments a et b distincts et appartenant à E, l'un de ces éléments a pu être considéré comme *précédant* l'autre, et ceci de telle manière que les deux conditions suivantes soient remplies :

1. Asymétrie. On ne peut pas avoir en même temps les deux relations « a précède b » et « b précède a ».
2. Transitivité. Si a précède b et si b précède c, alors a précède c.

Au lieu de dire qu'un ensemble E est ordonné, nous dirons aussi que l'on a attribué un *ordre* aux éléments de E.

Il n'est nullement évident que tout ensemble peut être ordonné (2).

---

(1) Le lecteur au courant de la théorie des nombres transfinis pourra passer dans cette Introduction tout ce qui est imprimé en petits caractères, et se contenter d'en lire la dernière partie consacrée aux ensembles *normalement bien ordonnés.*

(2) Par exemple il n'est pas évident que l'on peut ordonner les points d'un plan.

Le fait que tout ensemble peut être ordonné résultera du théorème de Zermelo énoncé plus loin.

Nous adoptons la terminologie suivante : si a précède b, nous dirons que b *suit* a. Si a précède b et si b précède c, nous dirons que b est *entre* a *et* c. Si, dans un ensemble ordonné E, il existe un élément a qui n'est précédé d'aucun autre élément de E, nous dirons que a est le *premier* élément de E. Si, dans un ensemble ordonné E, il existe un élément a qui ne précède aucun autre élément de E, nous dirons que a est le *dernier* élément de E.

On appelle ensemble *bien ordonné* un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble non vide contient un premier élément.

Nous admettrons le théorème suivant :

I. *Théorème de Zermelo. — Tout ensemble peut, d'une possibilité idéale, être bien ordonné.*

Ce théorème affirme seulement l'*existence d'un bon ordre* pour tout ensemble, ne préjugeant rien de la possibilité pour nous de déterminer effectivement un tel ordre dans chaque ensemble particulier.

La démonstration [1] du théorème de Zermelo suppose que l'on admette le célèbre axiome de Zermelo, axiome connu aussi sous le nom d'*axiome du choix* et dont voici l'énoncé :

Pour tout ensemble M *dont les éléments sont des ensembles* P *non vides et deux à deux sans élément commun, il existe au moins un ensemble* N *qui contient un élément et un seul de chaque ensemble* P *de* M.

Comme pour le théorème de Zermelo, cet axiome affirme seulement une *existence*, à savoir l'existence d'un ensemble N ; mais il n'affirme nullement que nous possédons toujours un moyen de déterminer un ensemble N satisfaisant aux conditions énoncées dans l'axiome.

b) La puissance d'un ensemble. — Soient E et F deux ensembles, et soit

$$y = \mathrm{T}(x)$$

une transformation faisant correspondre à tout élément x de E un élément y de F. Nous dirons que T est une transformation *biunivoque* de E en F, ou bien que T définit une *correspondance biunivoque* entre E et F, si T fait correspondre à tout élément x de E un élément unique y de F, et si tout élément y de F est le transformé ou le correspondant d'un élément unique x de E.

Ceci posé, étant donnés deux ensembles E et F, les quatre cas suivants sont les seuls *a priori* possibles :

1[er] *cas. Il existe une correspondance biunivoque entre* E *et un sous-ensemble de* F, *et il en existe une entre* F *et un sous-ensemble de* E.

---

[1] Pour la démonstration du théorème de Zermelo ainsi que pour toutes les questions traitées dans cette Introduction, nous renvoyons à l'ouvrage de M. W. Sierpinski « Leçons sur les nombres transfinis » (Paris, Gauthier-Villars, 1928), et particulièrement aux Chapitres VI et XII de cet ouvrage.

On peut démontrer (théorème de CANTOR-BERNSTEIN) qu'alors il existe une correspondance biunivoque entre E et F. Réciproquement s'il existe une correspondance biunivoque entre E et F on est évidemment dans le 1er *cas* puisque tout ensemble est lui-même un de ses sous-ensembles. Quand ce 1er *cas* est réalisé, on dit que les deux ensembles E et F ont *même puissance* ou *même nombre cardinal*, et nous écrirons

$$\text{puis. } E = \text{puis. } F.$$

Le signe $=$ s'énonçant « égale » et puis. étant l'abréviation du mot puissance.

2e *cas. Il existe une correspondance biunivoque entre* E *et un sous-ensemble de* F, *mais il n'en existe aucune entre* F *et un sous-ensemble de* E.

Alors on dit que la puissance de E est inférieure à la puissance de F, et nous écrirons

$$\text{puis. } E < \text{puis. } F$$

ou bien

$$\text{puis. } F > \text{puis. } E.$$

3e *cas. Il existe une correspondance biunivoque entre* F *et un sous-ensemble de* E, *mais il n'en existe aucune entre* E *et un sous-ensemble de* F.

Alors on dit que la puissance de E est supérieure à la puissance de F, et nous écrirons conformément aux notations adoptées dans le 2e *cas*

$$\text{puis. } E > \text{puis. } F$$

ou bien

$$\text{puis. } F < \text{puis. } E.$$

4e *cas. Il n'existe aucune correspondance biunivoque entre* E *et un sous-ensemble de* F, *et il n'en existe aucune entre* F *et un sous-ensemble de* E.

Alors on considérerait les puissances de E et de F comme n'étant pas comparables en grandeur. On peut démontrer à l'aide de l'axiome de ZERMELO que ce 4e *cas est impossible.* On désigne quelquefois cette impossibilité par le mot *trichotomie* (1). Remarquons enfin que deux quelconques des cas précédents ne peuvent évidemment pas être réalisés simultanément.

Remarque. — F. HARTOGS a même démontré que :

L'axiome de Zermelo, le théorème de Zermelo et la trichotomie sont équivalents (1).

Il faut entendre par là que de l'axiome de ZERMELO on peut déduire le théorème de ZERMELO et la trichotomie, que du théorème de ZERMELO on peut déduire la trichotomie et l'axiome de ZERMELO et enfin que de la trichotomie on peut déduire l'axiome de ZERMELO et le théorème de ZERMELO.

---

(1) Pour la démonstration de la *trichotomie* et du théorème d'HARTOGS, voir M. SIERPINSKI, ouvrage cité, p. 228-232, et aussi F. HARTOGS, *Math. Ann.*, LXXVI, 1915, p. 443.

c) Propriétés des nombres cardinaux ou puissances d'ensembles. — Il résulte de la discussion précédente qu'en admettant l'axiome de Zermelo on a la proposition suivante :

II. *Etant donnés deux ensembles quelconques* E *et* F, *on a toujours une et une seule des trois relations*

$$\text{puis. } E = \text{puis. } F$$

ou

$$\text{puis. } E < \text{puis. } F$$

ou

$$\text{puis. } E > \text{puis. } F.$$

Pour exprimer que la puissance de E est inférieure ou égale à la puissance de F, c'est-à-dire pour signifier que l'on est, soit dans le 1er *cas*, soit dans le 2e *cas*, nous écrirons

$$\text{puis. } E \leqslant \text{puis. } F$$

ou

$$\text{puis. } F \geqslant \text{puis. } E.$$

Il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour que cette relation ait lieu est qu'il existe une correspondance biunivoque entre E et un sous-ensemble de F.

Comme la transformation *identique* (c'est-à-dire la transformation faisant correspondre à tout objet a cet objet a lui-même) est une transformation biunivoque, nous concluons de la proposition précédente que la relation

$$E \subset F$$

entraîne

$$\text{puis. } E \leqslant \text{puis. } F.$$

On démontrerait très facilement que les égalités et inégalités introduites plus haut entre puissances ou nombres cardinaux, vérifient les propriétés formelles suivantes des égalités et inégalités ordinaires :

Les relations	puis. $E =$ puis. F
et	puis. $F =$ puis. G
entraînent toujours	puis. $E =$ puis. G.
Les relations	puis. $E \leqslant$ puis. F
et	puis. $F <$ puis. G
entraînent toujours	puis. $E <$ puis. G.
Les relations	puis. $E <$ puis. F
et	puis. $F \leqslant$ puis. G
entraînent toujours	puis. $E <$ puis. G.

On a les propositions suivantes que nous admettrons pour la plupart sans démonstrations :

III. *L'ensemble de tous les sous-ensembles* [1] *d'un ensemble* E *non vide a une puissance supérieure à celle de* E.

[1] Nous comptons l'ensemble vide parmi les sous-ensembles de E. On trouverait une démonstration de ce théorème III dans l'ouvrage déjà cité de M. Sierpinski (p. 84).

IV. *Etant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles* E, *il existe un ensemble* H *ayant une puissance supérieure à toutes celles des ensembles* E *de* $\mathcal{F}$.

Ce théorème se déduit sans peine du précédent. Soit en effet S la somme de tous les ensembles E de $\mathcal{F}$; on a pour chaque E de $\mathcal{F}$:

$$E \subset S$$

d'où

$$\text{puis. } E \leqslant \text{puis. } S.$$

Soit H l'ensemble de tous les sous-ensembles de S ; on a, en vertu de **III**,

$$\text{puis. } S < \text{puis. } H$$

d'où

$$\text{puis. } E < \text{puis. } H.$$

C. Q. F. D.

On peut démontrer (¹) qu'étant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles E chacun bien ordonné, il existe un ensemble E de $\mathcal{F}$ dont la puissance est inférieure ou égale à toutes celles des autres ensembles de $\mathcal{F}$. Si donc on admet l'axiome de ZERMELO et par conséquent le théorème de ZERMELO, on a la proposition suivante :

V. *Etant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles quelconques* E, *il existe un ensemble* E *de $\mathcal{F}$ dont la puissance est inférieure ou égale à toutes celles des autres ensembles de $\mathcal{F}$.*

Remarquons que ce théorème V entraîne que les puissances de deux ensembles sont toujours comparables (il suffit pour le voir de prendre le cas où $\mathcal{F}$ ne contient que deux ensembles). Le théorème V entraîne donc la trichotomie et par conséquent (en vertu du théorème d'HARTOGS) l'axiome de ZERMELO. Le théorème V équivaut donc à l'axiome de ZERMELO.

Enfin, on peut établir (²) que l'axiome de ZERMELO équivaut à la proposition suivante :

VI. *Si* E *et* F *sont deux ensembles dont la somme n'est pas finie* (³), *l'un au moins de ces deux ensembles a même puissance que* E + F.

d) Définition du nombre cardinal en lui-même. — Bien que nous ayons employé très fréquemment les mots de « nombre cardinal » ou de « puissance », nous avons omis jusqu'ici de donner une définition du nombre cardinal — ou puissance — en lui-même ; nous nous sommes contenté de définir des relations liant deux ensembles et exprimées par les formules :

$$\text{puis. } E <, = \quad \text{ou} \quad > \text{puis. } F.$$

Comme toutes les fois que nous nous sommes servi des mots « nombre cardinal » ou « puissance », il s'agissait d'exprimer une telle relation, il n'y a eu aucun illogisme dans cette façon de procéder. Nous présenterons de la manière suivante la définition du nombre cardinal lui-même :

(¹) M. SIERPINSKI, ouvrage cité, p. 214.

(²) *Ibid.*, p. 233.

(³) Nous supposons acquise la notion d'ensemble *fini*.

Soit E un ensemble quelconque ; désignons en général par C_E la classe des ensembles e tels que

(1) $$\text{puis. } e = \text{puis. E}.$$

En particulier E est élément de C_E. On a vu que la relation (1) ci-dessus était transitive comme les égalités ordinaires, et on déduit de là sans peine les résultats suivants :

Deux classes du type précédent sont toujours soit identiques, soit sans ensemble-élément commun. Donc tout ensemble E appartient à une et une seule des classes précédentes à savoir à la classe C_E. Deux ensembles appartenant à une même classe ont même puissance, et deux ensembles appartenant à deux classes différentes n'ont pas même puissance.

Ceci posé, nous appelons *nombre cardinal* ou *puissance* de l'un quelconque des ensembles d'une classe C du type précédent, la propriété commune à tous les ensembles de C, propriété qui consiste à avoir même puissance que l'un des ensembles de C. Nous représenterons ce nombre cardinal par un symbole, ξ par exemple, le même pour tous les ensembles de C.

Alors à chacune des relations définies plus haut

(2) $$\text{puis. E} <, = \quad \text{ou} \quad > \text{puis. F}$$

nous convenons de pouvoir substituer celle des relations

(3) $$\xi <, = \quad \text{ou} \quad > \eta.$$

qui est de même forme, ξ et η étant les nombres cardinaux correspondant aux classes C_E et C_F. Et comme les relations du type (2) satisfont aux mêmes propriétés formelles que les égalités et inégalités ordinaires, il en sera de même pour les relations du type (3).

e) Notions succinctes sur la suite des nombres cardinaux. — Pour que deux ensembles finis E et F aient le même nombre d'éléments (au sens usuel du mot nombre) il faut et il suffit qu'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de E et les éléments de F, c'est-à-dire que E et F aient le même *nombre cardinal.* Ainsi, pour les ensembles finis, il y a identité, ou du moins équivalence, entre la notion de nombre au sens usuel et la notion de *nombre cardinal* ou *puissance*. Les nombres cardinaux des ensembles finis sont dits *finis*, ce sont les entiers naturels

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

On constate sans peine que si deux entiers naturels m et n vérifient l'inégalité $n < m$ au sens de l'arithmétique élémentaire, on a aussi $n < m$ au sens des inégalités entre nombres cardinaux.

Ceci posé, on dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il a même puissance que l'ensemble de tous les entiers naturels, autrement dit s'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de E et *tous* les entiers naturels. On désigne la puissance ou le nombre cardinal d'un ensemble dénombrable par le symbole $\aleph_0$ qui s'énonce « aleph-zéro ».

On peut démontrer [1] à l'aide de l'axiome de ZERMELO que :

VII. *Tout ensemble non vide qui n'est pas fini contient un sous-ensemble dénombrable.*

Soit alors E un ensemble non vide quelconque, et soit ξ le nombre cardinal de E. En vertu du théorème VII précédent, nous n'avons que deux cas possibles :

1er *cas*. E est fini.

Alors ξ est le nombre entier naturel des éléments de E. Dans ce cas il existe une correspondance biunivoque entre E et l'ensemble des ξ premiers entiers naturels, mais il n'en existe aucune entre l'ensemble de tous les entiers naturels et un sous-ensemble de E. On a donc $\xi < \aleph_0$.

2e *cas*. E contient un sous-ensemble dénombrable.

Alors on a $\aleph_0 \leqslant \xi$. Quand ce 2e *cas* est réalisé, l'ensemble E sera dit *infini*, et son nombre cardinal ξ sera dit *transfini*.

En vertu du théorème III il existe des ensembles de nombre cardinal $> \aleph_0$; de tels ensembles sont dits *non-dénombrables*.

Parmi les nombres cardinaux $> \aleph_0$, il en existe un qui est plus petit que tous les autres (ceci peut se déduire du théorème V) ; on le désigne par $\aleph_1$.

De même il existe des nombres cardinaux $> \aleph_1$ (en vertu du théorème III) ; et parmi ceux-ci il en existe un qui est le plus petit (théorème V), on le désigne par $\aleph_2$. On définit de même $\aleph_3, \aleph_4, \ldots, \aleph_n, \ldots$ pour tout entier naturel n.

Il existe un nombre cardinal $\eta > \aleph_n$ quel que soit l'entier naturel n (en vertu du théorème IV) ; et parmi les nombres cardinaux η satisfaisant à cette condition, il en existe un qui est le plus petit (théorème V) ; on le désigne par $\aleph_\omega$.

On pourrait continuer ce procédé de définition sans être jamais arrêté. Nous nous contenterons de ces notions extrêmement succinctes sur la suite des *alephs*.

On désigne par c le nombre cardinal ou puissance de l'ensemble de tous les « nombres réels » ; on dit que c est la *puissance du continu linéaire* ou plus simplement la *puissance du continu*. On peut démontrer que

$c =$ puissance de l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble dénombrable.

On a donc, en vertu du théorème III,

$$\aleph_0 < c.$$

Dans l'état actuel de la théorie des ensembles, on ignore quelle est la

---

(1) M. SIERPINSKI, ouvrage cité, p. 115-116.

place de c dans la suite des alephs. L'hypothèse suivant laquelle on aurait

$$c = \aleph_1$$

est souvent appelée « hypothèse du continu ».

Remarque I. — Nos définitions successives des $\aleph_1$, $\aleph_2$,... $\aleph_\omega$,... supposent que l'on accorde le théorème V qui équivaut à l'axiome de Zermelo comme on l'a vu.

Remarque II. — Nous ne prétendons pas avoir passé en revue, dans ce qui précède, toutes les propriétés des puissances d'ensembles susceptibles d'être utilisées par nous ; nous les mentionnerons au fur et à mesure des besoins. Indiquons toutefois encore les propriétés suivantes qui sont d'un usage courant

Toute somme d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Toute somme de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles chacun fini ou dénombrable est dénombrable (ou exceptionnellement finie).

Cette dernière proposition se démontre en utilisant l'axiome de Zermelo (1).

f) Les ensembles normalement bien ordonnés. — Soit E un ensemble ordonné, et soit a un élément de E ; nous poserons

E_a = ensemble des éléments de E qui précèdent a.

On a toujours $E_a \subset E$, d'où

$$\text{puis. } E_a \leqslant \text{puis. } E.$$

Ceci posé, nous dirons qu'un ensemble E est *normalement bien ordonné* (ou qu'un *bon ordre normal* a été attribué aux éléments de E) si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° E est bien ordonné.

2° Pour tout élément a de E on a

$$\text{puis. } E_a < \text{puis. } E.$$

Nous allons démontrer que le théorème de Zermelo entraîne la proposition suivante : Pour tout ensemble G il existe un ensemble normalement bien ordonné et de même puissance que G.

En effet, en vertu du théorème de Zermelo, il existe un ensemble E bien ordonné et de même puissance que G. Si E est normalement bien ordonné, notre conclusion est établie.

Si E n'est pas normalement bien ordonné, il existe un élément

---

(1) M. Sierpinski, ouvrage cité, p. 123-124.

a de E tel que puis. E_a = puis. E. Soit alors a_0 le premier élément de E tel que

$$\text{puis. } E_{a_0} = \text{puis. } E.$$

Si b est un élément de E_{a_0}, b est un élément de E précédant a_0, de sorte que

$$\text{puis. } E_b < \text{puis. } E = \text{puis. } E_{a_0}.$$

Donc E_{a_0} est normalement bien ordonné ; de plus E_{a_0} a même puissance que G.

C. Q. F. D.

Considérons alors un ensemble G, et soit E un ensemble normalement bien ordonné et de même puissance que G. Il existe une transformation biunivoque transformant G en E. Si alors nous attribuons à deux éléments quelconques de G le même ordre relatif qu'à leurs transformés qui appartiennent à E, G sera normalement bien ordonné. Nous déduisons de là que le théorème de ZERMELO entraîne le théorème suivant :

VIII. — *Tout ensemble peut, d'une possibilité idéale, être normalement bien ordonné.*

Ce théorème VIII entraîne évidemment le théorème de ZERMELO, de sorte qu'il lui équivaut.

§ II. **La notion de compacité**. — Notre but va être maintenant de définir et d'étudier, dans les espaces abstraits les plus généraux, des ensembles analogues par leurs propriétés aux ensembles euclidiens bornés et surtout aux ensembles euclidiens à la fois bornés et fermés. Pour se rendre compte de l'intérêt d'une telle recherche, il suffit de se rappeler le rôle important joué dans l'Analyse classique par les ensembles bornés, et peut-être surtout par les ensembles à la fois bornés et fermés. Nous nous contentons de citer à l'appui de cette assertion, le principe de WEIERSTRASS-BOLZANO [1] ainsi que la proposition suivante :

Si l'on se limite aux ensembles de nombres réels, il y a identité [2] entre la classe des ensembles à la fois bornés et fermés et la classe des ensembles E tels que chaque fonction réelle

[1] Dans un espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions, tout ensemble infini et borné admet au moins un point d'accumulation.

[2] Nous indiquerons au Chapitre IX (§ VI) une généralisation de cette importante proposition.

continue sur E soit bornée sur E et atteigne ses bornes supérieure et inférieure sur E.

Les ensembles généralisant les ensembles euclidiens bornés seront désignés dans la suite par l'appellation générique de *compacts*, et les ensembles généralisant les ensembles euclidiens à la fois bornés et fermés seront désignés par l'appellation générique de *compacts en soi*. Ces derniers ne seront d'ailleurs pas toujours fermés, du moins dans les espaces abstraits les plus généraux.

De plus il y aura lieu, suivant les diverses propriétés des ensembles euclidiens bornés (ou bornés et fermés) que nous chercherons à généraliser au cas des espaces $(\mathfrak{V})$, de distinguer diverses espèces d'ensembles compacts (en soi), à savoir les ensembles proprement appelés « compacts (en soi) », les ensembles « compacts (en soi) au sens large », les ensembles « parfaitement compacts (en soi) », etc. [1]. Nous verrons d'ailleurs que le nombre de ces nuances variées qui différencient la notion de compacité se réduit considérablement quand se trouve réalisée notre condition α) (tout ensemble de fermeture est fermé).

§ III. **Les ensembles parfaitement compacts (en soi).** — Nous adoptons dans un espace $(\mathfrak{V})$ la terminologie suivante :

Un point a sera dit *point d'accumulation maximée* d'un ensemble e si, pour tout ensemble I_a auquel a est intérieur, on a

$$\text{puis.}\ (e \cdot I_a) = \text{puis.}\ e,$$

$e.I_a$ désignant, suivant nos notations habituelles, l'ensemble commun à e et à I_a.

Un point a sera dit *point d'accumulation hyper-maximée* d'un ensemble e si, pour tout ensemble I_a auquel a est intérieur, on a

$$\text{puis.}\ (e \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis.}\ e.$$

Un ensemble E sera dit *parfaitement compact* (*en soi*) si, pour

---

(1) On trouverait dans l'ouvrage de M. Fréchet (*E. A.*, p. 191-193, et aussi p. 68-70) des indications historiques détaillées sur le développement de la théorie des ensembles compacts, développement auquel ont concouru de nombreux auteurs parmi lesquels nous citerons en premier lieu M. Fréchet et ensuite M. M. Chittenden, R. L. Moore, F. Riesz, Sierpinski, Kuratowski, etc. Nous nous contentons de rappeler ici que la notion d'ensemble compact a été introduite pour la première fois par M. Fréchet (*Thèse*, Paris, 1906, p. 6).

tout sous-ensemble infini e de E, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.

Nous considérons tout ensemble fini comme étant parfaitement compact et parfaitement compact en soi.

Il nous sera commode d'introduire aussi des ensembles que nous nommerons *parfaitement compacts* (*en soi*) *au sens large* ; leur définition se déduit de la définition des ensembles parfaitement compacts (en soi) en y remplaçant les points d'accumulation hyper-maximée par les points d'accumulation maximée.

§ IV. **Remarques sur les définitions précédentes.** — *a*) Nous savons que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a soit intérieur à un ensemble E, est qu'il existe un voisinage de a appartenant entièrement à E (voir Chapitre I). On déduit facilement de là que l'on obtient des définitions équivalentes à nos définitions des points d'accumulation maximée et hyper-maximée, en y remplaçant les mots « ensemble auquel a est intérieur » par les mots « voisinage de a » (1).

b) On constate sans peine que :

1) *Tout point d'accumulation hyper-maximée d'un ensemble e est un point d'accumulation maximée de e, et par conséquent tout ensemble parfaitement compact* (*en soi*) *est parfaitement compact* (*en soi*) *au sens large.*

2) *Si l'ensemble e contient plus d'un point, les points d'accumulation maximée et hyper-maximée de e sont des points d'accumulation de e.*

c) La réalisation de la condition α) permet de réduire le nombre des définitions admises au § III ; nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

* 3) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *il y a identité entre les points d'accumulation maximée et hyper-maximée, et par conséquent il y a identité entre un ensemble parfaitement compact* (*en soi*) *et un ensemble parfaitement compact* (*en soi*) *au sens large.*

En effet, soit a un point d'accumulation maximée d'un ensemble e ; soit I_a un ensemble auquel a est intérieur, et soit

$$K_a = \text{intérieur de } I_a.$$

(1) On déduit de là que notre définition d'un ensemble *parfaitement compact* (*en soi*) équivaut, dans un espace ($\mathfrak{V}$), à la définition d'un ensemble *parfaitement compact* (*en soi*) admise dans le même cas par M. Fréchet (*E. A.*, p. 195).

En vertu de α), K_a est un ensemble ouvert ; on peut donc écrire

$$a \in K_a = \text{intérieur de } K_a.$$

On a donc, en vertu de la définition d'un point d'accumulation maximée,

$$\text{puis. } (e \cdot K_a) = \text{puis. } e$$

d'où

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis. } e.$$

Donc a est point d'accumulation hyper-maximée de e

C. Q. F. D.

Par contre, nous allons construire *un exemple d'espace* ($\mathfrak{V}$) *où ne subsistent aucune des identités énoncées dans le théorème* 3) *précédent.* Cet espace, que nous appellerons l'espace (Si) et qui nous sera souvent utile, a été imaginé par M. Sierpinski (1).

d) *L'espace* (Si). — Pour définir cet espace nous aurons besoin des nombres ordinaux de classes I et II. Il nous sera commode d'introduire ces nombres de la façon suivante :

Soit S un ensemble de puissance $\aleph_1$ et normalement bien ordonné (un tel ensemble existe en vertu du théorème VIII de l'Introduction à ce Chapitre). Nous conviendrons d'appeler *nombres ordinaux* (de classes I et II) les éléments de S.

La suite des nombres ordinaux sera ainsi pour nous purement et simplement une suite de symboles donnés une fois pour toutes et ordonnés de la manière que nous venons de définir.

Si α est un élément de S, nous posons

$$S_\alpha = \text{ensemble des éléments de S qui précèdent } \alpha.$$

En vertu de la définition d'un ensemble normalement bien ordonné, on a toujours

$$\text{puis. } S_\alpha < \text{puis. } S = \aleph_1.$$

Par conséquent S_α, s'il n'est pas vide, est fini ou dénombrable.

Nous désignerons le premier élément de S par 0, le premier élément de S qui suit 0 par 1, le premier élément de S qui suit 1 par 2, et ainsi de suite. Alors les nombres ordinaux α pour lesquels S_α est vide ou fini seront représentés par les mêmes symboles que les entiers naturels (y compris 0) :

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

Ces nombres ordinaux sont dits de *classe* I ; ils sont aussi dits *finis.*

---

(1) Voir M. Fréchet « Démonstration de quelques propriétés des ensembles abstraits », *Amer. Journ. of math.*, vol. L, 1928, p. 51.

Si S_α est infini dénombrable, nous dirons que α est un nombre ordinal de *classe* II. Les nombres de classe II sont dits *transfinis*. Le premier nombre ordinal de classe II se représente par ω, le suivant par $\omega + 1$, etc. On peut écrire :

$$S_\omega = \text{classe I}$$
$$S - S_\omega = \text{classe II}.$$

Ceci posé, nous appellerons espace (Si) un espace ($\mathfrak{V}$) dont les points sont les éléments de S et où on attribue à chaque point α un seul voisinage

$$V_\alpha = (\alpha) + (S - S_\omega) \qquad \text{si } \alpha \in S_\omega$$

et

$$V_\alpha = (\alpha) + S_\alpha \qquad \text{si } \alpha \in S - S_\omega.$$

e) *Application de l'espace* (Si). — On vérifie sans peine que l'on a dans l'espace (Si)

$$(\text{intérieur de } V_\alpha) = (\alpha) \qquad \text{si } \alpha \in S_\omega$$
$$(\text{intérieur de } V_\alpha) = (\alpha) + (S_\alpha - S_\omega) \qquad \text{si } \alpha \in S - S_\omega.$$

On en déduit

$$S_\omega \cdot \text{intérieur de } V_\alpha = (\alpha) \qquad \text{si } \alpha \in S_\omega$$
$$S_\omega \cdot \text{intérieur de } V_\alpha = 0 \qquad \text{si } \alpha \in S - S_\omega.$$

Nous en concluons que le sous-ensemble infini S_ω de S n'a pas de point d'accumulation hyper-maximée. Par conséquent S n'est pas parfaitement compact en soi, ni même parfaitement compact.

Ceci posé, soit e un sous-ensemble infini quelconque de S ; on a

$$e = eS_\omega + e(S - S_\omega)$$

et l'un des deux cas suivants est sûrement réalisé (théorème VI du § I) :

1er *cas* : puis. e = puis. (eS_ω).

Alors $$eV_\omega = e[(\omega) + S_\omega]$$

d'où $$\text{puis. } (eV_\omega) = \text{puis. } e$$

donc ω est point d'accumulation maximée de e.

2e *cas* ; puis. e = puis. $[e(S - S_\omega)]$.

Alors si $\alpha \in S_\omega$, on a

$$eV_\alpha = e[(\alpha) + (S - S_\omega)]$$

d'où $$\text{puis. } (eV_\alpha) = \text{puis. } e$$

donc α est point d'accumulation maximée de e.

Il résulte de l'examen des deux cas précédents que pour tout sous-ensemble infini e de S, il existe un point de S qui est point d'accumulation maximée de e ; par conséquent S est parfaitement compact en soi au sens large. C'est le résultat que nous voulions établir.

f) Il serait facile de vérifier que, dans l'espace euclidien, les ensembles parfaitement compacts coïncident avec les ensembles bornés, et que les ensembles parfaitement compacts en soi coïncident avec les ensembles à la fois bornés et fermés. La propriété qui nous a servi à définir au § III les ensembles parfaitement compacts (en soi) est simplement une forme plus précise que la forme habituelle du « principe de WEIERSTRASS-BOLZANO ». Remarquons toutefois [1] que dans un espace $(\mathfrak{V})$, et même *dans un espace accessible, un ensemble parfaitement compact en soi peut ne pas être fermé.* Ceci résultera de l'exemple suivant :

Nous avons déjà utilisé au Chapitre VI un espace dont les points étaient les éléments d'un ensemble infini dénombrable P, et où on posait pour tout ensemble $E \subset P$,

$$E' = 0 \quad \text{si E est fini,}$$

et

$$E' = P \quad \text{si E est infini.}$$

Nous avions vu que cet espace était un espace accessible.

Soit alors E un sous-ensemble infini de P tel que

$$C(E) = P - E \neq 0.$$

Alors $E' = P$ de sorte que E n'est pas fermé.

Ceci posé, soit e un sous-ensemble infini de E, soit a un point de E, et soit I_a un ensemble auquel a soit intérieur. Alors a n'appartient pas à $[C(I_a)]'$, et par conséquent $[C(I_a)]'$ étant distinct de l'espace entier, est nécessairement vide ; donc $C(I_a)$ est fini ou vide, et

$$I_a = \text{intérieur de } I_a.$$

Il en résulte que l'ensemble

$$e(\text{intérieur de } I_a) = eI_a = e - C(I_a)$$

a même puissance que e. Donc a est point d'accumulation hyper-maximée de e ; par conséquent E est parfaitement compact en soi quoique non fermé.

Par contre, on a dans un espace $(\mathfrak{V})$ la proposition suivante :

4) *Tout ensemble* E *parfaitement compact et fermé est parfaitement compact en soi.*

En effet, soit e un sous-ensemble infini de E ; alors il existe un point a qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.

---

(1) Avec M. FRÉCHET *E. A.*, p. 230.

Tenant compte du théorème 2) et de la condition 1° de F. RIESZ, on peut écrire :

$$a \in e' \subset E' \subset E$$

donc
$$a \in E.$$

C. Q. F. D.

g) Remarquons enfin que nos définitions entraînent immédiatement les propositions suivantes :

5) *Toute partie d'un ensemble parfaitement compact est parfaitement compacte.*

6) *Toute partie d'un ensemble parfaitement compact au sens large est parfaitement compacte au sens large.*

§ V. **Le théorème de Chittenden.** — Nous adoptons les définitions suivantes :

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles *couvre* l'ensemble E si chaque point de E est intérieur à l'un au moins des ensembles de $\mathcal{F}$.

Un ensemble E possède la *propriété de Borel-Lebesgue* si, quelle que soit la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles couvrant E, il existe une famille [1] finie $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ et couvrant E.

Démontrons alors le théorème suivant :

7) *Théorème de Chittenden* [2]. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble possède la propriété de Borel-Lebesgue est que cet ensemble soit parfaitement compact en soi.*

Le théorème de CHITTENDEN résulte des deux propositions suivantes que nous allons établir :

7)' *Tout ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue est parfaitement compact en soi.*

En effet, soit E un ensemble possédant la propriété de BOREL-

---

(1) La relation $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ signifie que tout ensemble de la famille $\mathcal{F}_1$ est un ensemble de la famille $\mathcal{F}$; on peut l'exprimer en disant que $\mathcal{F}_1$ est une *sous-famille* de $\mathcal{F}$.

(2) Ce théorème est dû à M. CHITTENDEN dans l'espace ($\mathfrak{V}$) le plus général (« Nuclear and hyper-nuclear points.... » *Bull. Amer. math. Soc.*, vol. XXX, 1924, p. 517), et il constitue une justification de la définition d'un ensemble parfaitement compact en soi, admise au § III ; on sait en effet que, dans l'espace euclidien, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble possède la propriété de BOREL-LEBESGUE est que cet ensemble soit à la fois borné et fermé. Plusieurs cas particuliers du théorème de CHITTENDEN avaient été obtenus auparavant par divers auteurs qui s'étaient placés dans des espaces moins généraux.

LEBESGUE et qui ne soit pas parfaitement compact en soi. Alors il existe un sous-ensemble infini e de E tel qu'un point de E ne soit jamais point d'accumulation hyper-maximée de e. Donc, pour tout point a de E, il existe un ensemble I_a auquel a est intérieur tel que

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_a) \neq \text{puis. } e.$$

La famille des ensembles I_a correspondant à tous les points a de E, couvre E. Donc cette famille contient une sous-famille finie $I_{a_1}, I_{a_2}, \ldots I_{a_n}$, ($n$ = un entier naturel) couvrant E. On a donc

$$\sum_{k=1}^{k=n} (e \cdot \text{intérieur de } I_{a_k}) = e.$$

Alors, en vertu du théorème VI du § I de ce Chapitre (théorème qui se généralise immédiatement au cas d'un nombre fini d'ensembles), l'un au moins des ensembles

$$e \cdot \text{intérieur de } I_{a_k}$$

devrait avoir même puissance que e. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

7)'' *Tout ensemble parfaitement compact en soi possède la propriété de Borel-Lebesgue.*

En effet, soit E un ensemble ne possédant pas la propriété de BOREL-LEBESGUE. Alors il existe au moins une famille d'ensembles jouissant de la propriété suivante :

P) Cette famille couvre E mais elle ne contient aucune sous-famille finie couvrant E.

Parmi les familles d'ensembles jouissant de la propriété P) il en existe une $\mathcal{F}$ dont la puissance est minima (théorème V du § I de ce Chapitre). $\mathcal{F}$ est évidemment infinie, et (théorème VIII du § I) nous pouvons supposer $\mathcal{F}$ *normalement bien ordonnée.* Appelons $\mathcal{G}$ la famille des ensembles I de $\mathcal{F}$ jouissant de la propriété suivante :

Q) Il existe un point a_I de E qui est intérieur à I, mais qui n'est intérieur à aucun des ensembles de $\mathcal{F}$ précédant I.

Si alors a est un point arbitraire de E, a est intérieur à un ensemble de $\mathcal{F}$, et le premier ensemble I de $\mathcal{F}$ auquel a est intérieur appartient à la famille $\mathcal{G}$. Donc la famille $\mathcal{G}$ couvre E. Par conséquent $\mathcal{G}$ qui est une sous-famille de $\mathcal{F}$, possède comme $\mathcal{F}$ la propriété P). Il en résulte que

$$\text{puis. } \mathcal{G} = \text{puis. } \mathcal{F}.$$

Faisons correspondre à tout ensemble I de $\mathcal{G}$ un point a_{I} bien déterminé satisfaisant aux conditions énoncées dans Q). Alors si I et K sont deux ensembles distincts de la famille $\mathcal{G}$ tels que K précède I, il en résulte que a_{K} est intérieur à K mais que a_{I} n'est pas intérieur à K. Donc $a_{\mathrm{I}} \neq a_{\mathrm{K}}$. Soit alors e l'ensemble de tous les points a_{I} correspondant à tous les ensembles I de $\mathcal{G}$. On a

$$\text{puis. } e = \text{puis. } \mathcal{G} = \text{puis. } \mathcal{F}\,;$$

e est infini comme $\mathcal{F}$, et $e \subset \mathrm{E}$.

Ceci posé, supposons l'ensemble E parfaitement compact en soi. Alors il existe un point x de E tel que x soit point d'accumulation hyper-maximée de e. Puisque $\mathcal{G}$ couvre E, x est intérieur à un ensemble K de $\mathcal{G}$. On a donc

$$(1) \qquad \text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) = \text{puis. } e = \text{puis. } \mathcal{F}.$$

Or on a, en vertu de la définition des a_{I},

$$(e \cdot \text{intérieur de K}) \subset (\text{ensemble des } a_{\mathrm{I}} \text{ pour lesquels I précède K}) + (a_{\mathrm{K}}).$$

Les deux termes de cette inclusion sont infinis en vertu de la relation (1) ; et comme on ne change pas la puissance d'un ensemble infini en lui enlevant un élément (théorème VI du § I), nous pouvons écrire

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) \leqslant \text{puis. } (\text{famille des ensembles I de } \mathcal{G} \text{ précédant K})\,;$$

d'où

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) \leqslant \text{puis. } (\text{famille des ensembles I de } \mathcal{F} \text{ précédant K})\,;$$

d'où, en tenant compte de ce que $\mathcal{F}$ a été supposée normalement bien ordonnée,

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) < \text{puis. } \mathcal{F}$$

contrairement à la relation (1). Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

§ VI. **Sur diverses généralisations d'un théorème de M. F. Riesz.** — Démontrons la proposition suivante :

* 8) *Soit* G *un ensemble parfaitement compact en soi, et soit* $\mathcal{F}$ *une famille d'ensembles* E. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un point de* G *commun aux fermetures* $\overline{E}$ *de tous les ensembles* E *de* $\mathcal{F}$ *est que cette propriété ait lieu pour toute sous-famille finie de* $\mathcal{F}$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, supposons qu'il n'existe aucun point de G commun aux fermetures $\overline{E}$ de tous les ensembles E de $\mathcal{F}$. Alors pour tout point a de G il existe un ensemble E de $\mathcal{F}$ tel que

$$a \in C(\overline{E}) = \text{intérieur de } C(E).$$

Donc la famille de tous les ensembles C(E) couvre G. Donc, en vertu du théorème de Chittenden, cette famille contient une sous-famille finie $C(E_1)$, $C(E_2),\ldots$, $C(E_n)$, couvrant G (Les E_i étant des ensembles de $\mathcal{F}$). Par conséquent

$$G \subset \sum_{i=1}^{i=n} [\text{intérieur de } C(E_i)] = \sum_{i=1}^{i=n} C(\overline{E}_i).$$

Donc il n'existe aucun point de G commun aux ensembles $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2,\ldots$, $\overline{E}_n$. Par conséquent la condition est bien suffisante.

C. Q. F. D.

Si l'on suppose que G est la fermeture d'un ensemble de $\mathcal{F}$, on déduit immédiatement de 8) le théorème suivant :

* 9) *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille d'ensembles dont l'un au moins a sa fermeture parfaitement compacte en soi. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un point commun aux fermetures de tous les ensembles de* $\mathcal{F}$ *est que cette propriété ait lieu pour toute sous-famille finie de* $\mathcal{F}$.

Comme tout ensemble parfaitement compact et fermé est parfaitement compact en soi et coïncide avec sa fermeture, le théorème 9) s'applique immédiatement à une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles dont l'un au moins est parfaitement compact et fermé.

Le théorème 9) admet le cas particulier suivant (1) :

(1) Déjà obtenu par M. Fréchet dans un espace $(\mathcal{V})$, *Amer. journ. of math.*, janvier 1928, p. 53.

10) *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles fermés dont l'un au moins est parfaitement compact. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un point commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, est que cette propriété ait lieu pour toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$* [1].

§ VII. **La propriété cantorienne généralisée.** — Dans l'espace euclidien, on a la proposition suivante que CANTOR appelait le « Durchschnittssatz » :

Si $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$, est une suite infinie d'ensembles dont chacun est non vide, borné, fermé et contenant le suivant (les n étant tous les entiers naturels), il existe au moins un point commun à tous ces ensembles.

Nous allons donner une généralisation de cette proposition s'appliquant à un espace $(\mathfrak{V})$. Pour cela nous adoptons la terminologie suivante :

Nous dirons qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *monotone* si, étant donnés deux ensembles quelconques de $\mathcal{F}$, il y en a toujours un qui est un sous-ensemble de l'autre.

Nous dirons qu'un ensemble G possède la *propriété cantorienne généralisée* s'il possède la propriété suivante :

p_1) Pour toute famille monotone $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de G dont chacun est non vide, il existe au moins un point de G commun aux fermetures de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

Démontrons que * *cette propriété p_1) équivaut dans un espace $(\mathfrak{V})$ à la suivante* :

p_2) Pour toute famille monotone $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de G dont chacun est non vide, il existe au moins un point de G commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, ou un point de G commun aux dérivés de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

En effet p_2) entraîne évidemment p_1). Réciproquement supposons p_1) vérifiée. Si alors $\mathcal{F}$ est une famille monotone de sous-ensembles de G dont chacun est non vide, il existe un point a de G commun aux fermetures de tous les ensembles de $\mathcal{F}$, et il n'y a que deux cas possibles :

1er *cas* : a est commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

2^e *cas* : Il existe un ensemble E_0 de $\mathcal{F}$ ne contenant pas a.

---

[1] Dans le cas de l'espace euclidien, ce théorème avait été énoncé pour la première fois par M. F. RIESZ puis retrouvé et démontré pour la première fois par M. SIERPINSKI (*Bull. int. acad. sc. Cracovie*, série A, 1918, p. 49-51).

Alors $a \in E_0'$. Soit alors E un ensemble quelconque de $\mathcal{F}$. Ou bien $E \subset E_0$, et dans cette hypothèse a appartient à $\overline{E}$ sans appartenir à E ; donc $a \in E'$. Ou bien $E_0 \subset E$, et, dans cette hypothèse, en vertu de la condition 1° de F. Riesz, $a \in E'_0 \subset E'$. Nous en concluons que, dans le 2e *cas*, a est commun aux dérivés de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

Donc p_1) entraîne p_2). C. Q. F. D.

Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

11) *Tout ensemble parfaitement compact en soi possède la propriété cantorienne généralisée.*

En effet, soit G un ensemble parfaitement compact en soi, et soit $\mathcal{F}$ une famille monotone de sous-ensembles de G dont chacun soit non vide. Si $\mathcal{F}_1$ est une sous-famille finie de $\mathcal{F}$, on vérifie sans peine qu'il existe un ensemble E_1 de $\mathcal{F}_1$ qui est contenu dans tous les autres ensembles de $\mathcal{F}_1$. Comme $E_1 \neq 0$, il existe au moins un point commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}_1$, et ce point appartient évidemment à G. Nous en concluons, en appliquant le théorème 8), qu'il existe au moins un point de G commun aux fermetures de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

C. Q. F. D. (1)

Nous allons étudier la vérité de la réciproque de 11). Donnons tout d'abord * *un exemple d'espace* ($\mathcal{V}$) *où un ensemble peut jouir de la propriété cantorienne généralisée sans être parfaitement compact en soi.*

Cet exemple est fourni par l'espace (Si) de M. Sierpinski. Reprenons en effet les notations employées au § IV [subdivisions *d*) et *e*)]. Alors S désignera l'ensemble des points de l'espace (Si). Soit $\mathcal{F}$ une famille monotone de sous-ensembles E de S dont chacun soit non vide. Il n'y a que deux cas possibles :

1er *cas* : Il existe un ensemble E_0 de $\mathcal{F}$ tel que $E_0 \subset S_\omega$.

Alors, en vertu de la monotonie, tout ensemble E de $\mathcal{F}$ vérifie $ES_\omega \neq 0$ d'où $S - S_\omega \subset E'$.

2e *cas* : Tout ensemble E de $\mathcal{F}$ vérifie $E(S - S_\omega) \neq 0$.

Alors $$S_\omega \subset E'.$$

(1) M. Fréchet a démontré (*Ann. Ec. norm. sup.*, t. XXXVIII, 1921, p. 346-347) que, dans l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général, tout ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue jouit de la propriété que nous avons appelée p_1), c'est-à-dire jouit de la propriété cantorienne généralisée. C'est là au fond le résultat que nous avons établi dans la démonstration de 11).

Nous en concluons qu'il existe toujours un point de S commun à tous les E'. Donc S possède la propriété cantorienne généralisée. Et pourtant on a vu (§ IV, *e*) que S n'était pas parfaitement compact en soi ni même parfaitement compact.

Par contre nous allons démontrer le théorème suivant :

* 12) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *tout ensemble possédant la propriété cantorienne généralisée est parfaitement compact en soi.*

En effet soit, dans un tel espace, un ensemble G qui ne soit pas parfaitement compact en soi. Alors, en vertu du théorème de CHITTENDEN, G ne possède pas la propriété de BOREL-LEBESGUE. Raisonnant comme au début de la démonstration de 7)'', nous en déduisons qu'il existe au moins une famille d'ensembles jouissant de la propriété suivante :

P) Cette famille couvre G, mais elle ne contient aucune sous-famille finie couvrant G.

Parmi les familles d'ensembles jouissant de la propriété P) il en existe une $\mathcal{F}$ dont la puissance est minima. $\mathcal{F}$ est évidemment infinie, et nous supposerons $\mathcal{F}$ normalement bien ordonnée, ce qui nous est loisible. Si I est un ensemble quelconque de $\mathcal{F}$ nous posons :

$\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ = famille des ensembles de $\mathcal{F}$ qui précèdent I.

G_{I} = ensemble des points de G qui ne sont intérieurs à aucun des ensembles de la famille $\mathcal{F}_{\mathrm{I}} + (\mathrm{I})$.

Démontrons que les G_{I} sont tous non vides. En effet si G_{I} était vide, la famille $\mathcal{F}_{\mathrm{I}} + (\mathrm{I})$ couvrirait G ; et comme cette famille est contenue dans $\mathcal{F}$, elle posséderait comme $\mathcal{F}$ la propriété P). On devrait donc avoir

$$\text{puis. } (\mathcal{F}_{\mathrm{I}} + (\mathrm{I})) = \text{puis. } \mathcal{F}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est infinie et que l'on ne change pas la puissance d'un ensemble infini en lui enlevant un élément, on devrait avoir

$$\text{puis. } \mathcal{F}_{\mathrm{I}} = \text{puis. } \mathcal{F}$$

contrairement à la définition d'un ensemble normalement bien ordonné. Les G_{I} sont donc tous non vides. D'autre part, il est évident que la famille des G_{I} correspondant à tous les ensembles I de $\mathcal{F}$ est une famille monotone de sous-ensembles de G.

Ceci étant, supposons que G possède la propriété cantorienne généralisée. Alors il devrait exister un point x de G commun à tous les $\overline{G_I}$. Or on a

$$G_I \subset C(\text{intérieur de } I) = \overline{C(I)}$$

d'où, en tenant compte des conditions 1° de F. Riesz et α),

$$\overline{G_I} \subset \overline{\overline{C(I)}} = \overline{C(I)} = C(\text{intérieur de } I).$$

x ne serait donc intérieur à aucun des ensembles I de $\mathcal{F}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que $\mathcal{F}$ couvre G. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Les théorèmes 3), 7), 11) et 12) entraînent l'énoncé suivant qui met en évidence les simplifications dues à l'introduction de la condition α) :

* 13) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* α), *il y a identité entre un ensemble parfaitement compact en soi, un ensemble parfaitement compact en soi au sens large, un ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue et un ensemble possédant la propriété cantorienne généralisée.*

§ VIII. **Les ensembles compacts (en soi) et la propriété de Borel.** — Nous dirons qu'un ensemble E possède la *propriété de Borel* si chaque famille $\mathcal{F}$ dénombrable d'ensembles couvrant E contient une sous-famille finie couvrant E.

On sait depuis longtemps que dans les espaces ($\mathcal{V}$) très généraux dont nous nous occupons ici, et même dans un espace accessible, les propriétés de Borel et de Borel-Lebesgue ne sont pas équivalentes [1]. Nous allons développer une théorie analogue à celle des ensembles parfaitement compacts (en soi) où le rôle de la propriété de Borel-Lebesgue sera joué par la propriété de Borel. Pour cela nous adopterons, dans un espace ($\mathcal{V}$), les définitions suivantes d'un ensemble compact (en soi) [2] et d'un ensemble compact (en soi) au sens large :

---

(1) Le premier exemple à l'appui de cette assertion est dû, croyons-nous, à M. F. Riesz (*E. A.*, p. 191). Nous obtiendrons au § V du Chapitre VIII, un exemple d'espace accessible possédant la propriété de Borel, mais ne possédant pas la propriété de Borel-Lebesgue.

(2) De même que les ensembles parfaitement compacts en soi nous ont fourni une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble jouisse de la propriété de Borel-Lebesgue, de même les ensembles compacts en soi

Un ensemble E sera dit *compact* (*en soi*) [1] si, pour tout sous-ensemble dénombrable [2] e de E, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.

Un ensemble E sera dit *compact* (*en soi*) *au sens large* si, pour tout sous-ensemble dénombrable e de E, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation maximée de e.

Nous considérons tout ensemble fini comme étant compact (en soi) et compact (en soi) au sens large.

§ IX. **Remarques diverses sur les définitions précédentes.** — On a la proposition évidente suivante : Tout ensemble parfaitement compact (en soi) est compact (en soi). Nous verrons au § V du Chapitre VIII un exemple qui nous montrera que la réciproque de cette proposition n'a pas toujours lieu même dans un espace accessible.

Tenant compte de 1) on a la proposition : Tout ensemble compact (en soi) est compact (en soi) au sens large. Par contre les raisonnements faits au § IV, subdivision e), montrent que l'ensemble S de tous les points de l'espace (Si) — *qui est un espace* ($\mathfrak{V}$) — *est compact en soi au sens large sans être compact en soi ni même compact.*

Nous avons vu [théorème 3)] que, dans un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant

---

nous fourniront, dans des cas étendus, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble jouisse de la propriété de Borel. C'est d'ailleurs la non-équivalence des propriétés de Borel et de Borel-Lebesgue qui a été l'origine de l'introduction des ensembles parfaitement compacts (en soi) à côté des ensembles compacts (en soi).

[1] Il serait facile de vérifier que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), les ensembles que nous appelons *compacts* (*en soi*) coïncident avec les ensembles que M. Fréchet (*E. A.*, p. 195) a appelés *compacts* (*en soi*) *au sens très strict*, et que les ensembles que nous appelons *compacts* (*en soi*) *au sens large* coïncident avec les ensembles que M. Fréchet a appelés *compacts* (*en soi*). Nous avons cru devoir modifier légèrement la terminologie de M. Fréchet, ceci afin d'harmoniser les définitions admises dans le cas des ensembles compacts avec celles que nous avons adoptées dans le cas des ensembles parfaitement compacts. D'ailleurs, comme nous le verrons, dans le cas infiniment général des espaces ($\mathfrak{V}$) vérifiant la condition α), il n'y a plus de différence à faire entre les ensembles « compacts (en soi) » à notre sens et les ensembles « compacts (en soi) au sens large » à notre sens, et par conséquent il n'y a plus de différence à faire entre notre terminologie et celle de M. Fréchet.

[2] Comme nous l'avons dit plus haut, nous appelons *dénombrable* un ensemble ayant exactement même puissance que l'ensemble de tous les entiers naturels. Un ensemble dénombrable est donc toujours infini.

la condition α), il y avait identité entre les points d'accumulation maximée et hyper-maximée. Il en résulte que

* 14) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* α), ***il y a identité entre les ensembles compacts*** (*en soi*) ***et les ensembles compacts*** (*en soi*) *au sens large.*

Raisonnant exactement comme dans la démonstration de 4), nous obtenons les propositions :

15) *Tout ensemble compact et fermé est compact en soi.*

16) *Tout ensemble compact au sens large et fermé est compact en soi au sens large.*

Par contre, nous avons obtenu au § IV (subdivision f)) un exemple d'espace ($\mathcal{V}$) — *qui est même un espace accessible — où un ensemble non fermé peut être parfaitement compact en soi et par conséquent aussi compact en soi et compact en soi au sens large.*

Nous avons enfin les conséquences presque immédiates suivantes de nos définitions : Toute partie d'un ensemble compact est compacte. Toute partie d'un ensemble compact au sens large est compacte au sens large.

§ X. **Deux théorèmes** [1] **concernant la propriété de Borel.**

17) *Tout ensemble compact en soi possède la propriété de Borel.*

Nous allons donner de ce théorème une démonstration analogue à celle de 7)″ mais plus simple. Soit E un ensemble ne possédant pas la propriété de Borel. Alors il existe une famille $\mathcal{F}$ dénombrable d'ensembles I_1, I_2,...... I_n,....... (les n étant tous les entiers naturels) couvrant E mais ne contenant aucune sous-famille finie couvrant E. Appelons $\mathcal{G}$ la famille des ensembles I_q de $\mathcal{F}$ jouissant de la propriété suivante :

Q) Il existe un point a_q de E qui est intérieur à I_q, mais qui n'est intérieur à aucun des ensembles I_n pour lesquels $n < q$.

Si alors a est un point arbitraire de E, a est intérieur à un I_n, et celui des ensembles I_n auxquels a est intérieur pour lequel n est minimum, appartient à $\mathcal{G}$. Donc la famille $\mathcal{G}$ couvre E. Puisque $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ne contient aucune sous-famille finie couvrant E ; donc

$$\text{puis. } \mathcal{G} = \aleph_0.$$

Ceci étant, faisons correspondre à chaque ensemble I_q de $\mathcal{G}$ un

[1] Ces deux théorèmes 17) et 18) sont dus, dans un espace ($\mathcal{V}$), à M. Fréchet, *Amer. journ. of math.*, vol. L, janvier 1928, p. 49-51.

point a_q bien déterminé satisfaisant aux conditions énoncées dans Q). Alors si I_q et I_r sont deux ensembles de $\mathcal{G}$ tels que $r < q$, il en résulte que a_r est intérieur à I_r mais que a_q n'est pas intérieur à I_r. Donc les points a_q sont tous différents. Soit alors e l'ensemble de tous les points a_q correspondant à tous les ensembles I_q de $\mathcal{G}$. On a

$$\text{puis. } e = \text{puis. } \mathcal{G} = \aleph_0$$

et

$$e \subset E.$$

Ceci posé, supposons l'ensemble E compact en soi. Alors il doit exister un point x de E tel que x soit point d'accumulation hyper-maximée de e. Puisque $\mathcal{G}$ couvre E, x est intérieur à un ensemble I_r de $\mathcal{G}$. On devrait donc avoir

$$(1) \qquad \text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_r) = \text{puis. } e = \aleph_0.$$

Or on a

$$(e \cdot \text{intérieur de } I_r) \subset (\text{ensemble des } a_q \text{ pour lesquels } q \leqslant r),$$

ce qui implique que le produit $e \cdot$ intérieur de I_r est fini contrairement à la relation (1). Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

18) *Tout ensemble possédant la propriété de Borel est compact en soi au sens large.*

En effet, soit E un ensemble qui n'est pas compact en soi au sens large. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable e de E tel qu'un point de E ne soit jamais point d'accumulation maximée de e. Désignons les points de e par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, les n étant tous les entiers naturels et les a_n tous distincts. Alors à chaque point x de E nous pouvons supposer que l'on fasse correspondre un ensemble I_x bien déterminé auquel x soit intérieur, tel que

$$\text{puis. } (e \cdot I_x) \neq \text{puis. } e$$

c'est-à-dire tel que I_x ne contienne qu'un nombre fini ou nul de points a_n. Posons alors

K_n = somme de tous les ensembles I_x tels que I_x ne contienne aucun des points $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots$

Si alors x est un point arbitraire de E, il existe un entier n tel que I_x ne contienne aucun des points $a_n, a_{n+1}, \ldots$; dans ce cas

$I_x \subset K_n$, et par conséquent x est intérieur à K_n. Donc la famille dénombrable des ensembles $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ couvre E.

Ceci étant, supposons que l'ensemble E possède la propriété de Borel. Alors la famille des K_n devrait contenir une sous-famille finie $K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, \ldots, K_{\alpha_r}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r)$ couvrant E. Or le point a_{α_r} de E ne peut évidemment appartenir à aucun des ensembles $K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, \ldots, K_{\alpha_r}$. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Les deux théorèmes précédents 17) et 18) fournissent le premier une condition suffisante et le second une condition nécessaire pour qu'un ensemble possède la propriété de Borel. Nous allons démontrer, avec M. Fréchet, que, *dans l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général, aucune de ces conditions n'est à la fois nécessaire et suffisante.*

Pour cela reprenons l'espace (Si) défini au § IV [subdivision *d*)] auquel nous renvoyons pour les notations adoptées.

Je dis que l'ensemble S des points de l'espace (Si) possède la propriété de Borel. En effet soit $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ une famille dénombrable d'ensembles couvrant S. Puisque S n'est pas dénombrable, l'un au moins des ensembles I_n, soit I_{n_0}, contient à son intérieur une infinité non-dénombrable de points de S. Si alors α est un point arbitraire de S, comme l'ensemble des éléments de S qui précèdent un élément arbitrairement choisi de S est au plus dénombrable, il existe un élément β de S tel que β soit intérieur à I_{n_0} et ne précède ni α ni ω. Alors

$$\alpha \in (\beta) + S_\beta = V_\beta \subset I_{n_0}.$$

Il en résulte que

$$I_{n_0} = S = \text{espace entier}.$$

Comme chaque point de l'espace est intérieur à l'espace, l'ensemble I_{n_0} tout seul couvre S. Donc S possède la propriété de Borel.

Ceci posé, nous avons établi au § IV (subdivision *e*)) que, dans l'espace (Si), le sous-ensemble dénombrable S_ω de S n'avait pas de point d'accumulation hyper-maximée. Donc S n'est pas compact en soi ni même compact. Par conséquent la réciproque de 17) n'est pas vraie dans l'espace (Si).

D'autre part considérons, dans l'espace (Si), l'ensemble

$$E = S_\omega + (\omega),$$

et soit $\mathcal{F}$ la famille dénombrable des voisinages des différents points de E. $\mathcal{F}$ couvre E, et on vérifie sans peine qu'une sous-famille finie de $\mathcal{F}$ ne peut couvrir E. Donc E ne possède pas la propriété de Borel.

Par contre si e est un sous-ensemble dénombrable de E, comme

$$V_\omega = (\omega) + S_\omega = E,$$

il en résulte que ω est point d'accumulation maximée de e. Donc E est compact en soi au sens large. Nous voyons ainsi que la réciproque de 18) n'est pas vraie dans l'espace (Si).

Mais si l'on se place dans le cas d'un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant la condition α), les propositions 14), 17) et 18) entraînent immédiatement la suivante :

* 19) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *il y a identité entre les ensembles compacts en soi, les ensembles possédant la propriété de Borel et les ensembles compacts en soi au sens large.*

§ XI. **Sur la propriété cantorienne restreinte au cas d'une famille dénombrable d'ensembles.** — Démontrons les deux théorèmes suivants :

* 20) *Soit* E *un ensemble compact* (*en soi*) *au sens large, et soit* $\mathcal{F}$ *une famille monotone et dénombrable de sous-ensembles non vides de* E. *Alors il existe au moins un point de* E *commun à tous les ensembles de* $\mathcal{F}$, *ou un point* (*de* E) *commun aux dérivés de tous les ensembles de* $\mathcal{F}$.

En effet soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles de $\mathcal{F}$, les n étant tous les entiers naturels. Posons

$$I_n = E_1 E_2 \cdots E_n.$$

Comme $\mathcal{F}$ est monotone, l'un au moins des n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est contenu dans les $(n-1)$ autres, et par conséquent on a toujours $I_n \neq 0$. Prenons un point a_n bien déterminé dans chaque I_n. L'un des deux cas suivants est sûrement réalisé :

1er *cas* : Un point x figure une infinité de fois dans la suite des a_n.

Alors x est commun à tous les E_n et appartient à E.

2e *cas* : La suite des a_n contient un ensemble infini dénombrable e de points distincts.

Alors, comme $e \subset E$, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation maximée de e. Si donc I_a est un ensemble auquel a est intérieur, I_a contient une infinité de points a_n distincts. Par conséquent I_a contient une infinité de points a_n distincts pour lesquels $n \geqslant$ un entier naturel q donné ; et ces points appartiennent à E_q. Donc $a \in E'_q$, ce quel que soit l'entier naturel q.

C. Q. F. D.

* 21) *Soit* E *un ensemble. Si pour chaque suite de la forme*

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

où les E_n *sont des sous-ensembles non vides de* E *et où les* n *sont tous les entiers naturels, il existe au moins un point (de* E*) commun aux fermetures de tous les* E_n, *alors* E *est compact (en soi) au sens large.*

En effet soit e un sous-ensemble dénombrable de E. Désignons les points de e par a_1, a_2,....., a_n,......, les n étant tous les entiers naturels et les a_n tous distincts, et posons

$$E_n = (a_n) + (a_{n+1}) + (a_{n+2}) + \cdots$$

On a

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

Alors, par hypothèse, il existe un point a (de E) commun à tous les $\overline{E}_n = E_n + E_n'$. Alors chaque voisinage de a contient un point de E_n, et ce quel que soit n. Donc chaquevoisinage de a contient une infinité dénombrable de points de e. Par conséquent a est point d'accumulation maximée de e.

C. Q. F. D.

Les deux propositions 20) et 21) précédentes permettent d'énoncer diverses conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble soit compact (en soi) au sens large. 20) et 21) entraînent par exemple le théorême suivant :

* 22). *La condition* [1] *nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit compact (en soi) au sens large est que, pour chaque famille* $\mathcal{F}$ *monotone et dénombrable de sous-ensembles non vides de* E, *il existe au moins un point de* E *commun à tous les ensembles de* $\mathcal{F}$, *ou un point (de* E*) commun aux dérivés de tous les ensembles de* $\mathcal{F}$.

§ XII. **Cas des espaces distanciés.** — Il nous a paru intéressant d'indiquer brièvement les principales simplifications qui se produisent dans la théorie de la compacité, quand on se place dans le cas des espaces $(\mathcal{D})$ ou *distanciés* [2]. On sait qu'un espace distancié est

[1] Un théorème analogue à 22) a été obtenu par M. Fréchet (*Amer. journ. of math.*, janvier 1928, p. 52) : ce théorème qui énonce aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit compact (en soi) au sens large, est également une conséquence immédiate de 20) et de 21).

[2] Les espaces $(\mathcal{D})$ ou distanciés ont été introduits par M. Fréchet (*E. A.*, p. 61-62). On peut définir un espace *distancié* comme étant un système (P, K)

un espace accessible particulier ; les espaces distanciés sont donc des espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant la condition α), et ils bénéficient de toutes les simplifications dues à cette condition. De plus on doit à M. FRÉCHET [1] d'avoir établi les résultats suivants :

Dans un espace distancié, il y a identité entre un ensemble compact (en soi) et un ensemble parfaitement compact (en soi), et par conséquent il y a identité entre un ensemble possédant la propriété de Borel et un ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue. De plus il n'y a plus de différence à faire entre un ensemble compact en soi et un ensemble compact et fermé.

Remarquons enfin que dans l'espace euclidien, qui est un espace distancié particulier, les ensembles compacts coïncident avec les ensembles bornés, et les ensembles compacts en soi avec les ensembles à la fois bornés et fermés.

---

où l'opération de dérivation $E' = K(E)$ jouit de la propriété suivante : il est possible d'associer à tout couple a, b de points de l'espace considéré, un nombre réel

$$(a, b) = (b, a) \geqslant 0,$$

nombre qui est appelé *distance* de a et de b, et ceci de telle manière que les trois conditions suivantes soient remplies :

1. On a $(a, b) = 0$ si a et b coïncident et dans ce cas seulement.
2. Pour trois points quelconques a, b, c on a toujours

$$(a, b) \leqslant (a, c) + (c, b).$$

3. Pour qu'un point a appartienne à E', il faut et il suffit qu'il existe dans l'ensemble E des points distincts de a dont la distance à a soit aussi petite que l'on veut.

Beaucoup d'auteurs se bornent d'ailleurs à considérer les espaces distanciés où la distance (a, b) est effectivement donnée.

(1) *E. A.*, p. 269.

CHAPITRE VIII

SUR LES ORDRES DE SÉPARABILITÉ DANS LES ESPACES $(\mathcal{V})$

On sait que, dans l'espace euclidien, on peut déterminer de bien des manières un ensemble dénombrable N de points tel que chaque point de l'espace soit infiniment voisin de N, autrement dit appartienne à N'. Ce fait intervient plus ou moins explicitement dans les démonstrations de plusieurs propriétés importantes des ensembles euclidiens (1). C'est en cherchant à étendre ces propriétés aux espaces abstraits que M. Fréchet (2) a été amené à définir d'abord les ensembles séparables dans les espaces distanciés, puis, dans des espaces abstraits plus généraux, les ensembles parfaitement séparables à côté des ensembles séparables.

Plus récemment M. Haratomi (3) a généralisé la notion d'ensemble séparable en introduisant dans les espaces distanciés des ensembles qu'il appelle $\aleph_\alpha$*-separabel.* Dans ce Chapitre nous reprenons la question étudiée par M. Haratomi en nous plaçant dans le cas beaucoup plus général des espaces $(\mathcal{V})$. Nos définitions, différentes de celles de M. Haratomi, auront d'ailleurs l'avantage de fournir, dans le cas particulier des espaces distanciés, des résultats plus simples que les siens (voir § VIII).

§ I. Les ensembles $\aleph_\alpha$-parfaitement séparables. — Nous adoptons dans un espace $(\mathcal{V})$ les définitions suivantes, $\aleph_\alpha$ étant un nombre cardinal transfini arbitraire :

---

(1) Par exemple du théorème de Cantor-Bendixson.

(2) Voir par exemple *E. A.*, p. 190.

(3) « Über höherstufige Separabilität und Kompaktheit. » *Japanese Journ. f Math.*, VIII, 1931, p. 114.

Un ensemble E est $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable* si l'on peut, sans altérer l'opération de dérivation dans l'espace ($\mathcal{V}$) considéré, adopter pour les différents points x de E des voisinages appartenant à une même famille d'ensembles, cette famille, indépendante de x, ayant une puissance $\leqslant \aleph_\alpha$.

Un ensemble E est *d'ordre* $\aleph_\xi$ si $\aleph_\xi$ est le plus petit nombre cardinal transfini tel que E soit $\aleph_\xi$–parfaitement séparable [1].

On voit sans peine, en tenant compte du théorème V de l'Introduction au Chapitre VII, que, *pour tout ensemble* E *appartenant à un espace* ($\mathcal{V}$), *il existe un et un seul nombre cardinal transfini* $\aleph_\xi$ *tel que* E *soit d'ordre* $\aleph_\xi$.

De plus on a évidemment les propositions suivantes :

Si un ensemble E est d'ordre $\aleph_\xi$, alors, pour tout $\aleph_\alpha \geqslant \aleph_\xi$, l'ensemble E et chacun de ses sous-ensembles sont $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables.

Chaque sous-ensemble d'un ensemble d'ordre $\aleph_\xi$ est d'ordre $\leqslant \aleph_\xi$. En particulier, dans un espace ($\mathcal{V}$) d'ordre $\aleph_\xi$, tout ensemble est d'ordre $\leqslant \aleph_\xi$.

Il est intéressant de constater que l'espace euclidien et chacun de ses sous-ensembles sont d'ordre $\aleph_0$. Cette remarque permettrait de déduire des résultats de ce Chapitre un grand nombre de propriétés usuelles des ensembles euclidiens.

§ II. **Les ensembles $\aleph_\alpha$–séparables.** — Nous adoptons la définition suivante :

Un ensemble E est $\aleph_\alpha$*–séparable* [2] s'il existe un ensemble N de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ tel que $N \subset E \subset N + N'$.

Comme nous le verrons au § VIII, les ensembles $\aleph_\alpha$–séparables coïncident dans un espace distancié avec les ensembles $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables. Mais il n'en est plus ainsi dans les espaces ($\mathcal{V}$) les plus généraux ; dans ceux-ci la notion d'ensemble $\aleph_\alpha$–séparable jouera un rôle peu important et appa-

---

[1] Dans une Note parue antérieurement (C. R. de l'Acad. des Sc., t. 196, 1933, p. 1071) nous avions dit dans le même cas que l'ensemble E est *d'ordre* ξ, il nous paraît maintenant plus naturel de dire que E est *d'ordre* $\aleph_\xi$.

[2] Les ensembles $\aleph_\alpha$–séparables et $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables se réduisent pour $\aleph_\alpha = \aleph_0$ aux ensembles séparables et parfaitement séparables définis par M. Fréchet (*E. A.*, p. 190) dans un espace ($\mathcal{V}$).

raître seulement comme exprimant une propriété intéressante des ensembles $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables. Nous avons le théorème suivant :

* 1) *Tout ensemble* $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable est* $\aleph_\alpha$*–séparable* (1).

En effet soit E un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable. Alors nous pouvons supposer que les voisinages des différents points de E forment une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles telle que

$$\text{puis. } \mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha.$$

Ceci étant supposé, prenons dans chaque ensemble V de $\mathcal{F}$ un point x_V de E, et soit N l'ensemble des points x_V distincts. On a

$$\text{puis. N} \leqslant \aleph_\alpha \qquad \text{et} \qquad \text{N} \subset \text{E}.$$

Soit alors a un point arbitraire de E. Chaque voisinage de a contient un point de N. Donc

$$a \in \text{N} + \text{N}'$$

C. Q. F. D.

Nous allons donner un exemple qui nous montrera que *la réciproque du théorème* 1) *précédent n'est pas toujours vraie même dans un espace accessible.*

Pour cela appelons espace (u) un espace $(\mathfrak{V})$ dont les points sont tous les entiers > 0 et où les voisinages sont définis de la façon suivante. On attribue à chaque entier > 1 un seul voisinage formé de cet entier lui-même. On attribue à l'entier 1 comme voisinages tous les ensembles V contenant 1, formés d'entiers > 0 et tels que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,[\text{V}]}{n} = 1$$

n[V] désignant le nombre des éléments de V qui sont $\leqslant$ l'entier positif n.

L'espace (u) étant dénombrable, est $\aleph_0$-séparable.

Par contre, nous allons démontrer que l'espace (u) n'est pas $\aleph_0$-parfaitement séparable. En effet supposons que l'espace (u) soit $\aleph_0$-parfaitement séparable. Alors la famille des voisinages V de 1 devrait équivaloir à une famille finie ou dénombrable de voisinages de 1, soit $\text{W}_1, \text{W}_2, \ldots\ldots, \text{W}_q, \ldots.$ Alors chaque W_q doit contenir un V, et chaque V

(1) Ce théorème 1) est dû à M. Fréchet dans le cas particulier où $\aleph_\alpha = \aleph_0$; la même remarque s'applique à plusieurs autres propositions démontrées dans ce Chapitre, en particulier aux théorèmes 2), 6), 7), 8), 9) [et aussi à 10) dans le cas d'un espace accessible] (*E. A.*, p. 233-235 et p. 243).

doit contenir un W_q. Comme chaque V est évidemment infini, chaque W_q est infini. Nous pouvons donc poser pour chaque W_q :

$x_q =$ le plus petit entier $> q^2$ et appartenant à W_q.

x_q existe pour chaque W_q. Appelons E l'ensemble des nombres x_q. Soit alors n un entier positif arbitraire ; l'inégalité $x_q \leqslant n$ entraîne $q^2 < n$ d'où $q < \sqrt{n}$. On a donc toujours

$$n[\mathrm{E}] < \sqrt{n}.$$

Soit C(E) le complémentaire de E par rapport à l'espace (u) ; on a

$$n \geqslant n[\mathrm{C(E)}] = n - n[\mathrm{E}] > n - \sqrt{n}$$

On en déduit immédiatement

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n[\mathrm{C(E)}]}{n} = 1$$

De plus E ne contient pas 1, et par conséquent C(E) contient **1**. Il en résulte que C(E) est un V ; et pourtant C(E) ne peut contenir entièrement aucun des W_q. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Démontrons enfin que l'espace (u), que nous venons d'étudier, est un espace accessible. En effet on vérifie de suite que tous les voisinages adoptés sont des ensembles ouverts ; donc l'espace (u) vérifie la condition α). De plus on constate sans peine que l'espace (u) satisfait à la condition 3° de F. Riesz. Il nous reste à établir que l'espace (u) vérifie la condition 2° de F. Riesz. Pour cela rappelons que la condition 2° de F. Riesz équivaut, dans un espace $(\mathcal{V})$, à la condition suivante :

$(2^o)_3$ Pour tout point a et tous voisinages V_a et W_a de a, il existe au moins un voisinage de a appartenant au produit $V_a W_a$.

La condition $(2^o)_3$ est évidemment vérifiée en tout point $a \neq 1$ de l'espace (u). Soient maintenant V_1 et V_2 deux voisinages V de 1. Quel que soit l'entier positif n, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant n - n[V_1V_2] = n[C(V_1V_2)] = n\,[C(V_1) + C(V_2)] &\leqslant n[C(V_1)] + n[C(V_2)] \\ &= n - n[V_1] + n - n[V_2] \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leqslant 1 - \frac{n[V_1V_2]}{n} \leqslant 2 - \frac{n\,[V_1]}{n} - \frac{n[V_2]}{n}.$$

Si $n \to \infty$, le dernier membre de cette double inégalité $\to 0$; donc $\frac{n[V_1V_2]}{n} \to 1$. Par conséquent V_1V_2 est un voisinage V de 1. Il en résulte que $(2^o)_3$ est aussi vérifiée au point 1.

C. Q. F. D. [1]

[1] Dans notre définition de l'espace (u), nous nous sommes inspiré de la définition d'un espace imaginé par Urysohn (*Math. Annalen*, 94, 1925, p. 290).

§ III. **Les propriétés lindelöfiennes.** — L'objet de ce § est d'établir une propriété, intéressante en elle-même et utilisée plus loin, des ensembles $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables. Nous adoptons la définition suivante :

Un ensemble E possède la *propriété lindelöfienne* [1] *d'ordre* $\aleph_\alpha$ si chaque famille $\mathcal{G}$ d'ensembles couvrant E contient une sous-famille $\mathcal{G}_1$ couvrant E telle que puis. $\mathcal{G}_1 \leqslant \aleph_\alpha$.

Alors on a le théorème suivant :

* 2) *Tout ensemble* $\aleph_\alpha$–*parfaitement séparable possède la propriété lindelöfienne d'ordre* $\aleph_\alpha$.

En effet soit E un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable. Alors nous pouvons supposer que les voisinages des différents points de E appartiennent à une même famille $\mathcal{F}$ d'ensembles telle que

$$\text{puis. } \mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha.$$

Soit $\mathcal{G}$ une famille d'ensembles couvrant E. Appelons $\mathcal{F}_1$ la famille des ensembles V de $\mathcal{F}$ tels que chaque V soit contenu dans un ensemble de $\mathcal{G}$. Alors nous pouvons supposer que l'on ait fait correspondre à chaque ensemble V de $\mathcal{F}_1$ un ensemble I_V bien déterminé de $\mathcal{G}$ tel que

$$V \subset I_V.$$

Soit $\mathcal{G}_1$ la famille des ensembles I_V correspondant à tous les ensembles V de $\mathcal{F}_1$. On a

$$\text{puis. } \mathcal{G}_1 \leqslant \text{puis. } \mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha.$$

Je dis que $\mathcal{G}_1$ couvre E. En effet soit a un point arbitraire de E. Alors a est intérieur à un ensemble de $\mathcal{G}$, et il existe un voisinage V_a de a contenu dans cet ensemble de $\mathcal{G}$. V_a est donc un ensemble de $\mathcal{F}_1$, et il lui correspond l'ensemble I_{V_a} de $\mathcal{G}_1$ tel que $V_a \subset I_{V_a}$, Donc a est intérieur à I_{V_a}.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il est presque évident que tout ensemble dénombrable possède la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_0$. Par conséquent l'espace (u), défini au § II, possède la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_0$, et pourtant cet espace n'est pas $\aleph_0$–parfaitement

---

[1] Si $\alpha = 0$ cette propriété coïncide avec la propriété que M. Fréchet a appelée la propriété de Lindelöf (*E. A.*, p. 176).

séparable. *La réciproque du théorème* 2) *précédent n'est donc même pas vraie dans tout espace accessible.*

§ IV. **Les ensembles $\aleph_\alpha$–condensés en soi.** — Rappelons d'abord la proposition suivante ([1]) que nous utiliserons dans un instant et dont la démonstration suppose l'axiome de ZERMELO :

Soit η *un nombre cardinal* $\geqslant \aleph_0$. *Si* E *est un ensemble de puissance* $\leqslant \eta$ *dont les éléments sont des ensembles* M *dont chacun a une puissance* $\leqslant \eta$, *alors la somme de tous les ensembles* M *de* E *a aussi une puissance* $\leqslant \eta$.

Adoptons de plus la terminologie suivante :

a) Nous dirons qu'un nombre cardinal ξ est de 1re *espèce* si, parmi les nombres cardinaux $< \xi$, il en existe un qui est le plus grand. Dans le cas contraire nous dirons que le nombre cardinal ξ est de 2me *espèce.* Alors $\aleph_n$ est de 1re espèce pour tout entier positif n, tandis que $\aleph_0$ et $\aleph_\omega$, par exemple, sont de 2me espèce.

b) Si $\aleph_\alpha$ est un nombre cardinal transfini quelconque, nous désignerons par $\aleph_{\alpha+1}$ le plus petit des nombres cardinaux $> \aleph_\alpha$. Le nombre $\aleph_{\alpha+1}$ existe toujours en vertu des théorèmes III et V de l'Introduction au Chapitre VII.

Ces préliminaires étant posés, nous allons démontrer le théorème suivant :

* 3). *Tout ensemble* E *possédant la propriété lindelöfienne d'ordre* $\aleph_\alpha$ *jouit de la propriété suivante :*

$\mathfrak{L}_\alpha$. *Pour chaque sous-ensemble e de* E *tel que le nombre cardinal de e soit de* 1re *espèce et* $> \aleph_\alpha$, *il existe au moins un point de* E *qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.*

En effet, soit E un ensemble possédant la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_\alpha$, et soit e un sous-ensemble de E tel que le nombre cardinal ξ de e soit de 1re espèce et $> \aleph_\alpha$.

Supposons qu'il n'existe aucun point de E qui soit point d'accumulation hyper-maximée de e. Alors, pour chaque point a de E, il existe un ensemble I_a auquel a est intérieur tel que

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_a) < \text{puis. } e = \xi$$

Soit η le plus grand nombre cardinal $< \xi$; le nombre η existe par hypothèse et on a

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_a) \leqslant \eta,$$
$$\aleph_\alpha \leqslant \eta.$$

([1]) Cette proposition est une conséquence immédiate de résultats obtenus dans l'ouvrage de M. W. SIERPINSKI « Leçons sur les nombres transfinis » Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 126 et 233).

Ceci étant, la famille des I_a correspondant à tous les points a de E, couvre E. Donc cette famille contient une sous-famille $\mathcal{G}_1$ couvrant E telle que

$$\text{puis. } \mathcal{G}_1 \leqslant \aleph_\alpha \leqslant \eta.$$

On a évidemment

$$\sum_{\mathcal{G}_1} e \cdot \text{intérieur de } I_a = e,$$

cette somme étant étendue à tous les ensembles I_a de $\mathcal{G}_1$. Par conséquent, en vertu du théorème rappelé au début de ce §, on devrait avoir puis. $e = \xi \leqslant \eta$. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Il nous sera commode d'adopter la définition suivante :

Un ensemble E est $\aleph_\alpha$*–condensé en soi* si, pour chaque sous-ensemble e de E tel que puis. $e = \aleph_{\alpha+1}$, il existe au moins un point de E qui soit point d'accumulation hyper-maximée de e.

Si on avait puis. $E < \aleph_{\alpha+1}$, il n'existerait pas de sous-ensemble e de E tel que puis. $e = \aleph_{\alpha+1}$; dans ce cas nous considérerions conventionnellement E comme étant toujours $\aleph_\alpha$–condensé en soi.

Cette définition étant admise, comme $\aleph_{\alpha+1}$ est nécessairement de 1re espèce, on a le cas particulier suivant du théorème 3) :

* 4). *Tout ensemble possédant la propriété lindelöfienne d'ordre* $\aleph_\alpha$ *est* $\aleph_\alpha$*–condensé en soi.*

§ V. **Sur la réciproque du théorème** 4). — Nous allons démontrer que * *la réciproque du théorème* 4) *n'est pas toujours vraie* (1) *même dans un espace accessible.*

Pour cela appelons espace (R) un espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les éléments d'un certain ensemble ordonné R, et où on attribue à chaque point a de R tous les voisinages de la forme suivante :

$$V_a = \text{ensemble des points } x \text{ de R tels que } b < x \leqslant a,$$

b étant un point quelconque de R tel que $b < a$. (Nous écrivons pour simplifier $b < a$, par exemple, pour dire que b précède a). Si a était un élément de R précédant tous les autres, nous poserions $V_a = (a)$.

---

(1) Il serait intéressant de savoir si la même circonstance se produit ou non pour le théorème 3).

On vérifie sans peine que l'espace (R) est un espace accessible. Nous poserons pour tout point x de R :

R_x = ensemble des éléments de R qui précèdent x.

Ceci étant, supposons de plus que l'on a choisi R normalement bien ordonné et de puissance $\aleph_{\alpha+2} = \aleph_{\alpha+1+1}$. Nous avons le droit de faire cette hypothèse en vertu du théorème VIII de l'Introduction au Chapitre VII. Soit alors e un sous-ensemble de R tel que

$$\aleph_0 \leqslant \text{puis. } e \leqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

Je dis qu'il existe au moins un élément y de R tel que tout élément de e précède y. En effet dans le cas contraire on aurait

$$R = \sum_e [R_x + (x)],$$

cette somme étant étendue à tous les éléments x de e. Or on a, pour tout élément x de R,

$$\text{puis. } R_x \leqslant \aleph_{\alpha+1} \quad , \quad \text{d'où} \quad \text{puis. } [R_x + (x)] \leqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

On devrait donc avoir (en vertu du théorème rappelé au début du § IV de ce Chapitre) puis. R $\leqslant \aleph_{\alpha+1}$, contrairement à l'hypothèse. L'existence de l'élément y est donc établie.

Ceci posé, pour $\xi = y$ on a évidemment

$$\text{puis. } (eR_\xi) = \text{puis. } e \tag{1}$$

Parmi les points ξ de R tels que la relation (1) ci-dessus ait lieu, il en existe un a qui n'est précédé d'aucun autre. Soit alors V_a un voisinage quelconque de ce point a. On a

$$\begin{aligned} V_a = {} & \text{ensemble des points } x \text{ de R} \\ & \text{tels que } b < x \leqslant a, \end{aligned}$$

b étant un point de R tel que $b < a$. On peut écrire

$$eR_b + e \cdot (b) + eV_a = eR_a + e \cdot (a).$$

La puissance du second membre de cette égalité est puis. e ; de plus on a puis. $(eR_b) \neq$ puis. e. Par conséquent, en vertu du théorème VI de l'Introduction au Chapitre VII, on doit avoir puis. (eV_a) = puis. e. a est donc point d'accumulation maximée de e. Comme la condition α) est vérifiée, il en résulte que a est aussi point d'accumulation hypermaximée de e. Nous concluons de là que l'espace (R) est $\aleph_\alpha$-condensé en soi. Nous en concluons aussi, ce qui nous servira plus loin, que l'espace (R) est compact en soi.

Par contre, nous allons démontrer que l'espace (R) ne possède pas la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_\alpha$. En effet supposons que l'espace (R) possède cette propriété, et appelons $\mathcal{G}$ la famille formée de tous les voisinages de tous les points de R. Alors $\mathcal{G}$ couvre R, et $\mathcal{G}$ doit contenir une sous-famille $\mathcal{G}_1$ couvrant R telle que puis. $\mathcal{G}_1 \leqslant \aleph_\alpha$. Les éléments de la famille $\mathcal{G}_1$ sont des voisinages de certains points de R; et ces points de R forment un ensemble e vérifiant puis. $e \leqslant \aleph_\alpha$. Par conséquent, en vertu des raisonnements faits il y a un instant, il doit exister un point y de R tel que tout élément de e précède y. Mais alors y ne pourrait appartenir à aucun ensemble de $\mathcal{G}_1$. Nous aboutissons donc à une contradiction et le résultat que nous avions en vue est établi.

Remarque. — En vertu des résultats obtenus dans ce §, l'espace (R) est un espace accessible compact en soi et jouissant par conséquent de la propriété de BOREL. Mais, comme cet espace ne possède pas la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_\alpha$, cet espace ne possède pas la propriété de BOREL-LEBESGUE et n'est donc pas parfaitement compact en soi.

§ VI. **Sur diverses généralisations du théorème de Cantor-Bendixson.** — Faisons d'abord les remarques suivantes que nous utiliserons tout à l'heure : Les théorèmes 2) et 4) entraînent évidemment que tout ensemble $\aleph_\alpha$-parfaitement séparable est $\aleph_\alpha$-condensé en soi. De plus il est évident, d'après la définition même, que chaque partie d'un ensemble $\aleph_\alpha$-parfaitement séparable est $\aleph_\alpha$-parfaitement séparable. Par conséquent tout ensemble $\aleph_\alpha$-parfaitement séparable est tel que chacune de ses parties soit $\aleph_\alpha$-condensée en soi. Ces préliminaires posés, nous adoptons la définition suivante :

Un point a sera dit un $\aleph_\alpha$-*hyperpoint* d'un ensemble E si, pour tout ensemble I_a auquel a est intérieur, on a

$$\text{puis. } (E \cdot \text{intérieur de } I_a) > \aleph_\alpha.$$

Démontrons alors le théorème suivant :

* 5). *Soit* E *un ensemble* $\aleph_\alpha$-*parfaitement séparable et de puissance* $> \aleph_\alpha$. *Alors, si l'on pose*

$$N = \textit{ensemble de ceux des points de } E \text{ qui sont des } \aleph_{\alpha+1}\textit{-hyperpoints de } E$$

et

$$R = E - N,$$

on a la décomposition

$$E = N + R,$$

et on a

$$\text{puis. } R \leqslant \aleph_\alpha,$$
$$\text{puis. } N = \text{puis. } E;$$

de plus chaque point de N *est un* $\aleph_{\alpha+1}$*–hyperpoint de* N, *et par conséquent* N *est dense en soi* ([1]).

Démonstration. — *a*) Supposons que puis. R $>\aleph_\alpha$. Dans cette hypothèse on a puis. R $\geqslant \aleph_{\alpha+1}$, et R contient un sous-ensemble *e* de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Or R est une partie de l'ensemble E qui est $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable ; donc R est $\aleph_\alpha$–condensé en soi ; et par conséquent il existe un point *a* de R tel que *a* soit point d'accumulation hyper-maximée de *e*. Alors, pour tout ensemble I_a auquel *a* est intérieur, on a

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis. } e = \aleph_{\alpha+1}$$

d'où

$$\text{puis. } (E \cdot \text{intérieur de } I_a) \geqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

Donc *a*, qui est un point de E, est un $\aleph_{\alpha+1}$–hyperpoint de E. Par conséquent on devrait avoir $a \in N$ en même temps que

$$a \in R = E - N,$$

ce qui est contradictoire. Ainsi nous avons démontré que

$$\text{puis. } R \leqslant \aleph_\alpha.$$

b) Tenant compte du résultat précédent, du fait que l'on a les relations

$$E = N + R, \qquad \text{puis. } E > \aleph_\alpha,$$

et du théorème VI de l'Introduction au Chapitre VII, nous voyons que l'on a

$$\text{puis. } N = \text{puis. } E.$$

c) Enfin soit *a* un point arbitraire de N. Alors *a* est un $\aleph_{\alpha+1}$–hyperpoint de E ; par conséquent, pour tout ensemble I_a auquel *a* est intérieur, on a

$$\text{puis} \cdot (E \cdot \text{intérieur de } I_a) \geqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

([1]) Il ne faudrait pas croire qu'un théorème aussi général que le théorème 5) soit sans intérêt dans l'espace euclidien. En effet tous les ensembles de l'espace euclidien sont $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables quel que soit $\aleph_\alpha$; le théorème 5) s'applique donc tout d'abord aux ensembles euclidiens lorsqu'on y fait $\aleph_\alpha = \aleph_0$ et il fournit dans ce cas un résultat classique. De plus, si l'*hypothèse du continu* $\aleph_1 = c$ (c étant la puissance du continu) n'était pas exacte, le théorème 5) fournirait dans l'espace euclidien des propriétés différentes et ne rentrant pas les unes dans les autres pour chacun des $\aleph_\alpha < c$.

Or on a

$$E \cdot \text{intérieur de } I_a = N \cdot \text{intérieur de } I_a + R \cdot \text{intérieur de } I_a,$$
$$\text{puis.}\,(R \cdot \text{intérieur de } I_a) \leqslant \aleph_\alpha.$$

Par conséquent, en vertu du théorème VI rappelé à l'instant, on a

$$\text{puis.}\,(N \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis.}\,(E \cdot \text{intérieur de } I_a) \geqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

Donc chaque point a de N est un $\aleph_{\alpha+1}$–hyperpoint de N. Il en résulte que chaque point de N est un point d'accumulation de N ; par conséquent N est dense en soi.

C. Q. F. D.

Il résulte du théorème 5) précédent que si E est un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable et de puissance $> \aleph_\alpha$, alors E contient un sous-ensemble N non vide et dense en soi, et par conséquent E n'est pas clairsemé. D'où le théorème suivant [1] :

* 6). *Tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable et clairsemé est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$.*

Si nous combinons ce théorème 6) avec les théorèmes 2) et 3) du Chapitre V et si nous tenons compte du fait que chaque partie d'un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable, nous obtenons les propositions suivantes :

* 7). *Tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est la somme de deux ensembles disjoints, l'un dense en soi, l'autre clairsemé et de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ (l'un ou l'autre de ces deux ensembles pouvant être vide).*

* 8). *Tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable et fermé est la somme de deux ensembles disjoints, l'un parfait, l'autre clairsemé et de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ (l'un ou l'autre de ces deux ensembles pouvant être vide).*

De plus on obtient les deux décompositions précédentes en prenant pour premier ensemble partiel le plus grand sous-ensemble dense en soi de l'ensemble donné (voir Chapitre V, § II).

---

[1] Les théorèmes 6), 7), 8), 9) et 10) de ce Chapitre fournissent le résultat le plus précis possible si $\aleph_\alpha$ est l'*ordre* de l'ensemble considéré. Ces théorèmes s'appliquent d'ailleurs toujours en prenant pour $\aleph_\alpha$ l'*ordre* de l'espace ($\mathfrak{V}$) auquel appartient l'ensemble considéré, mais le résultat obtenu peut alors être moins précis.

§ VII. Sur quelques propriétés liées à la puissance d'un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable. — Soit N un ensemble de nombre cardinal $\aleph_\alpha$. Nous poserons par définition :

$2^{\aleph_\alpha}$ = puissance de l'ensemble de tous les sous-ensembles de N.

Nous rappelons que (voir l'Introduction au Chapitre VII)

$$2^{\aleph_0} = c = \text{puissance du continu.}$$

Ceci étant, nous allons démontrer le théorème suivant:

* 9). *Soit* E *un ensemble* $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable, soit* A *la famille des sous-ensembles ouverts de* E *et soit* B *la famille des sous-ensembles fermés de* E ; *on a*

$$\text{puis. A} \leqslant 2^{\aleph_\alpha} \qquad et \qquad \text{puis. B} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}.$$

Démonstration. — Par hypothèse on peut adopter pour les différents points de E des voisinages appartenant à une même famille $\mathcal{F}$ d'ensembles telle que puis. $\mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha$. Nous supposerons que de tels voisinages ont été adoptés. Soit alors e un ensemble de A, et soit

$\mathcal{F}_1$ = famille de ceux des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont entièrement contenus dans e.

Pour chaque point a de e il existe un voisinage V_a de a appartenant entièrement à e. Un tel V_a est un ensemble de $\mathcal{F}_1$, et par conséquent

$$e = \text{somme de tous les ensembles de } \mathcal{F}_1.$$

Nous déduisons de cette égalité qu'à deux ensembles distincts e de A correspondent nécessairement deux sous-familles $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ différentes. D'où

$$\text{puis. A} \leqslant \text{puis.} \begin{pmatrix}\text{famille de toutes les} \\ \text{sous-familles de } \mathcal{F}\end{pmatrix} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}.$$

Soit maintenant g un ensemble de B, et soit

$\mathcal{F}_2$ = famille de ceux des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont entièrement contenus dans C(g),

C(g) désignant comme d'habitude le complémentaire de g par rapport à l'espace. Puisque g est fermé, C(g) est ouvert, et on déduit de là sans peine que

$$C(g) = (\text{somme de tous les ensembles de } \mathcal{F}_2) + C(E).$$

Par conséquent à deux ensembles distincts g de B correspondent nécessairement deux sous-familles $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$ différentes. D'où

$$\text{puis. B} \leqslant \text{puis.} \begin{pmatrix}\text{famille de toutes les} \\ \text{sous-familles de } \mathcal{F}\end{pmatrix} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$$

C. Q. F. D.

Le théorème 9) entraîne la proposition suivante :

* 10). *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* 3° *de F. Riesz tout ensemble* $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable* E *est de puissance* $\leqslant 2^{\aleph_\alpha}$.

En effet, dans un tel espace, les sous-ensembles de E formés chacun d'un seul point sont fermés. On a donc, en reprenant les notations du théorème 9),

$$\text{puis. E} \leqslant \text{puis. B} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons utilisé au Chapitre III un espace ($\mathcal{E}_3$) dont voici la définition. Les points de cet espace sont les éléments d'un ensemble donné quelconque P comprenant plus de deux éléments ; on attribue à chaque point a le voisinage unique

$$V_a = P = \text{espace entier.}$$

Nous avions vu que cet espace était un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant les conditions 2° de F. Riesz et α). Il est visible que l'espace ($\mathcal{E}_3$) est $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable quel que soit $\aleph_\alpha$; en particulier l'espace ($\mathcal{E}_3$) est $\aleph_0$–parfaitement séparable ; et pourtant sa puissance peut être choisie aussi grande que l'on veut. Donc ** le théorème* 10) *ne s'étend même pas à tous les espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz et* α).

§ VIII. **Cas des espaces distanciés.** — Il nous a paru intéressant de mentionner ici un certain nombre de simplifications qui se produisent dans la théorie des ordres de séparabilité quand on se place dans le cas des espaces ($\mathcal{D}$) ou distanciés [1]. Nous avons pu établir le théorème suivant dont la démonstration sera publiée dans un autre recueil :

---

[1] Les espaces distanciés sont certains espaces accessibles comme nous l'avons vu à la fin du Chapitre VII.

* *Dans un espace distancié il y a identité* (1) *entre un ensemble* $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable, un ensemble* $\aleph_\alpha$*–séparable, un ensemble possédant la propriété lindelöfienne d'ordre* $\aleph_\alpha$ *et un ensemble* $\aleph_\alpha$*–condensé en soi.*

De plus il résulte d'un théorème de M. Fréchet (2) que *dans un espace distancié tout ensemble compact est* $\aleph_0$*–séparable et par conséquent aussi* $\aleph_0$*–parfaitement séparable* ; mais la réciproque n'a même pas lieu dans l'espace euclidien.

---

(1) Ces identités sont plus simples que certaines identités analogues obtenues à partir de définitions différentes par M. Haratomi (*Mémoire cité*, p. 120 et 127).

(2) E. A., p. 268.

CHAPITRE IX

SUR LES TRANSFORMATIONS ET FONCTIONNELLES DANS LES ESPACES $(\mathcal{V})$

§ I. **Les transformations continues.** — Soient E et F deux ensembles appartenant respectivement à deux espaces $(\mathcal{V})$ distincts ou non. Nous dirons que $y = T(x)$ est une *transformation univoque* ou, plus simplement, une *transformation* de E en F si elle fait correspondre à chaque point x de E un point unique $y = T(x)$ de F, F étant l'ensemble des points $T(x)$.

Une transformation $y = T(x)$ univoque de E en F sera dite *continue* au point a de E si, pour chaque voisinage V_b de $b = T(a)$, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in EV_a$ entraîne que $T(x) \in V_b$. Si la transformation $y = T(x)$ est continue en chaque point a de E, elle sera simplement dite *continue*, ou, si l'on préfère, *continue sur* E. Une transformation qui est à la fois univoque et continue de E en F et de F en E, autrement dit biunivoque et bicontinue, est appelée *homéomorphie*. Il est intéressant d'étudier les diverses notions définies dans les Chapitres précédents au point de vue de leur invariance relativement aux transformations continues ; ce sera l'objet du § II suivant.

Remarque. — Si nous adoptons pour chaque point a comme famille de voisinages, la famille de tous les ensembles auxquels a est intérieur, ce que nous avons toujours le droit de faire (voir Chapitre I), la définition précédente des transformations continues prendra une forme équivalente qui aura l'avantage d'être plus intrinsèque.

§ II. **Quelques propriétés des transformations continues.** — Démontrons le théorème suivant :

1). *Toute transformation continue transforme un ensemble connexe en un ensemble connexe* [1].

En effet soit E un ensemble connexe, et soit $y = T(x)$ une transformation continue sur E et transformant E en un ensemble F. Supposons que $F = G + H$, G et H étant non vides et disjoints ; et posons :

$$K = \text{ensemble des points } x \text{ de E tels que } T(x) \in G,$$
$$L = \text{ensemble des points } x \text{ de E tels que } T(x) \in H.$$

On a $E = K + L$; de plus K et L sont nécessairement non vides et disjoints. Par conséquent

$$KL' + K'L \neq 0$$

et il existe, par exemple, un point a vérifiant

$$a \in K \quad \text{et} \quad a \in L',$$

d'où

$$b = T(a) \in G.$$

Soit alors V_b un voisinage arbitraire de b ; il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in EV_a$ entraîne que $T(x) \in V_b$. Or V_a contient un point ξ de L, et on a par conséquent $T(\xi) \in V_b$ et $T(\xi) \in H$, d'où $T(\xi) \neq b$. Donc $b \in H'$ et par conséquent $GH' \neq 0$. Ainsi G et H sont toujours mutuellement connexes ; donc F est connexe.

C. Q. F. D.

Par contre il serait très facile de construire, même dans l'espace euclidien, des exemples de transformations continues et même d'*homéomorphies qui ne transforment pas nécessairement un ensemble bien enchaîné en un ensemble bien enchaîné.* C'est le cas par exemple de l'inversion au sens de la géométrie élémentaire.

Nous allons maintenant examiner comment les diverses notions d'ensemble compact, définies au Chapitre VII, se comportent vis-à-vis des transformations continues. Pour cela nous commencerons par démontrer le théorème suivant :

* 2). *Soit un ensemble* E *jouissant de la propriété suivante : pour tout sous-ensemble e de* E *tel que* puis. $e = \aleph_\chi$ *il existe un point de* E *qui est point d'accumulation maximée de e. Alors toute*

---

[1] Ce théorème 1) est dû à M. Fréchet (*E. A.*, p. 241).

transformation $y = \mathrm{T}(x)$ *continue sur* E, *transforme* E *en un ensemble* F *jouissant de la même propriété.*

En effet supposons que f soit un sous-ensemble de F vérifiant puis. $f = \aleph_\alpha$. Chaque point y de f est le transformé d'un ou plusieurs points de E ; aussi nous pouvons supposer que l'on ait fait correspondre à chaque point y de f un point bien déterminé x_y de E tel que

$$y = \mathrm{T}(x_y) \tag{1}$$

Soit alors e l'ensemble de tous ces points x_y. Puisque $\mathrm{T}(x)$ est univoque, la relation (1) montre qu'à deux points y distincts de f correspondent nécessairement deux points x_y de e différents. Donc la correspondance établie entre les éléments de f et les éléments de e est biunivoque, et puis. $e = \aleph_\alpha$. Par conséquent il existe un point a de E qui est point d'accumulation maximée de e. Soit $b = \mathrm{T}(a)$ et soit V_b un voisinage arbitraire de b. Puisque $\mathrm{T}(x)$ est continue sur E, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in \mathrm{EV}_a$ entraîne que $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{V}_b$. Or V_a contient $\aleph_\alpha$ points distincts de e ; ces points appartiennent à EV_a et sont par conséquent transformés biunivoquement en $\aleph_\alpha$ points distincts de $f\mathrm{V}_b$. Donc

$$\aleph_\alpha = \text{puis. } f = \text{puis. } (f\mathrm{V}_b)$$

et le point b de F est point d'accumulation maximée de f.

C. Q. F. D.

Si nous nous reportons maintenant aux définitions admises au Chapitre VII, nous voyons que le théorème 2) admet les cas particuliers suivants :

* 3). *Toute transformation continue transforme un ensemble compact en soi au sens large en un ensemble de même nature.*

* 4). *Toute transformation continue transforme un ensemble parfaitement compact en soi au sens large en un ensemble de même nature.*

Rappelons d'ailleurs que, dans un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant la condition α), les mots « au sens large » n'ajoutent rien et peuvent être supprimés sans inconvénient [1].

Dans l'espace euclidien les théorèmes 3) et 4) se réduisent à la

---

[1] Les théorèmes 3) et 4) doivent être considérés comme dus à M. Fréchet dans le cas plus particulier encore des espaces accessibles (*E. A.*, p. 247).

proposition suivante : Toute transformation continue transforme un ensemble à la fois borné et fermé en un ensemble à la fois borné et fermé. On sait par contre que, dans l'espace euclidien, une transformation continue, et même une homéomorphie, peut transformer un ensemble fermé en un ensemble non fermé et un ensemble borné en un ensemble non borné. Ce dernier résultat montre que les théorèmes 3) et 4) cessent d'être exacts si on y supprime les mots « en soi ».

Enfin, si nous tenons compte du fait que les points d'accumulation maximée et hyper-maximée coïncident dans un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant la condition α), nous voyons que le théorème 2) entraîne la proposition suivante :

* 5). *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant la condition* α), *toute transformation continue transforme un ensemble* $\aleph_\alpha$*–condensé en soi* [1] *en un ensemble de même nature.*

§ III. **Sur les modes de continuité des fonctionnelles.** — Soit E un ensemble de points d'un espace $(\mathcal{V})$. Supposons qu'à chaque point x de E corresponde un nombre réel $y = f(x)$ bien déterminé ; alors on dit que $y = f(x)$ est une *fonctionnelle univoque* ou plus simplement une *fonctionnelle* définie sur E.

Les fonctionnelles peuvent être considérées comme des cas particuliers des transformations définies au § I. Soit en effet (Δ) un espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les nombres réels et où une certaine définition Δ des voisinages a été adoptée. On peut alors dire que la fonctionnelle $y = f(x)$ est une transformation de E en un certain ensemble F de points de l'espace (Δ).

Nous avons défini au § I ce que nous entendions par transformation continue en un point a de E et par transformation continue sur E. Ceci nous permet d'adopter la définition suivante :

Une fonctionnelle $y = f(x)$ définie sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathcal{V})$ sera dite Δ*–continue* au point a de E (sur E) si elle est continue au point a de E (sur E) en tant que transformation de E en un ensemble de points de l'espace (Δ).

Ainsi à chaque choix particulier de la définition Δ des voisinages dans l'ensemble des nombres réels correspondra une certaine manière d'entendre la continuité des fonctionnelles. Pour

[1] Défini au § IV du Chapitre VIII.

un certain choix de Δ nous obtiendrons les fonctionnelles dites continues ; pour d'autres choix de Δ nous obtiendrons les fonctionnelles dites semi-continues. L'introduction de la Δ–continuité nous permettra de montrer que des propriétés tout à fait importantes des fonctionnelles continues et semi-continues ne sont que des cas particuliers de certains théorèmes généraux concernant les transformations continues (à savoir des théorèmes 1) et 3) de ce Chapitre).

§ IV. **Sur les fonctionnelles continues.** — Appelons Δ_0 la définition suivante des voisinages dans l'ensemble des nombres réels : les voisinages de chaque nombre réel y sont les intervalles ouverts de centre y. Alors l'espace (Δ_0) n'est autre que la droite euclidienne où les points d'accumulation sont définis comme d'habitude.

Par définition nous dirons qu'une fonctionnelle est *continue* si elle est Δ_0–continue.

On vérifie sans peine que cette définition peut se mettre sous la forme équivalente suivante qui peut être considérée comme la forme classique :

Une fonctionnelle $y = f(x)$ définie sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathfrak{V})$ est *continue au point a de* E si, pour chaque nombre positif ε, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in EV_a$ entraîne

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon.$$

Comme pour les transformations, une fonctionnelle définie sur E et continue en chaque point de E sera dite *continue sur* E.

Soit alors une fonctionnelle continue sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathfrak{V})$. Cette fonctionnelle est une transformation continue de E en un ensemble F de points de la droite euclidienne (Δ_0). En vertu du théorème 1), si E est connexe, F est aussi connexe. Or, sur la droite euclidienne, si un ensemble connexe contient les nombres réels a et b, il contient aussi tous les nombres réels compris entre a et b. D'où le théorème suivant :

6) *Si une fonctionnelle $f(x)$ continue sur un ensemble* E *connexe prend sur* E *les valeurs a et b, elle prend aussi sur* E *toutes les valeurs comprises entre a et b.*

De même, en vertu du théorème 3), si E est compact en soi au sens large, F est aussi compact en soi au sens large. Or, sur la droite euclidienne, les ensembles compacts en soi au sens large ne sont autres que les ensembles à la fois bornés et fermés, et de tels ensembles contiennent leurs bornes supérieure et inférieure. D'où le théorème suivant [1] :

7) *Si une fonctionnelle $f(x)$ est continue sur un ensemble* E *compact en soi au sens large, elle est bornée sur* E *et elle atteint ses bornes supérieure et inférieure en certains points de* E.

§ V. **Sur les fonctionnelles semi-continues.** — Soit (Δ_s) l'espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les nombres réels et où la définition suivante Δ_s des voisinages est adoptée : on attribue à chaque nombre réel y tous les voisinages de la forme

$$V_y^\varepsilon = \text{ensemble des nombres réels} < y + \varepsilon,$$

ε étant un nombre réel positif arbitraire [2].

Par définition nous dirons qu'une fonctionnelle est *semi-continue supérieurement* si elle est Δ_s–continue.

On voit sans peine que cette définition peut se mettre sous la forme équivalente suivante qui peut être considérée comme classique :

Une fonctionnelle $y = f(x)$ définie sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathcal{V})$ est *semi-continue supérieurement* au point a de E si, pour chaque nombre positif ε, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in EV_a$ entraîne

$$f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Une fonctionnelle définie sur E et semi-continue supérieurement en chaque point de E sera dite *semi-continue supérieurement sur* E.

Soit alors $y = f(x)$ une fonctionnelle semi-continue supérieurement sur un ensemble E compact en soi au sens large. Cette fonctionnelle est une transformation continue de E en un en-

---

(1) Les théorèmes 6) et 7) sont dus à M. Fréchet (*E. A.*, p. 236) qui les a démontrés directement.

(2) On voit sans peine que l'espace (Δ_s) est un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant la condition α) mais ne satisfaisant pas à la condition 3° de F. Riesz. L'espace (Δ_s) n'est donc ni un espace distancié, ni même un espace accessible.

semble F de l'espace (Δ_s) ; et, en vertu du théorème 3), F est aussi compact en soi au sens large. Or il est facile de vérifier à partir de la définition du Chapitre VII que, dans l'espace (Δ_s), les ensembles compacts en soi au sens large ne sont autres que les ensembles bornés supérieurement, au sens usuel, et contenant leur borne supérieure. D'où le théorème suivant [1] :

8). *Si une fonctionnelle $f(x)$ est semi-continue supérieurement sur un ensemble* E *compact en soi au sens large, elle est bornée supérieurement sur* E *et elle atteint sa borne supérieure en au moins un point de* E.

§ VI. **Sur les réciproques des théorèmes 7) et 8).** — Les théorèmes 7) et 8) fournissent chacun une condition nécessaire pour qu'un ensemble soit compact en soi au sens large ; nous allons étudier la question de savoir si et dans quels cas ces conditions sont suffisantes. Pour cela nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

* 9) *Dans un espace* $(\mathfrak{V})$ *vérifiant la condition* α), *si chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur l'ensemble* E *est bornée supérieurement sur* E, *alors* E *est compact en soi au sens large* [2].

En effet supposons que l'ensemble E ne soit pas compact en soi au sens large. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable e de E tel qu'un point de E ne soit jamais point d'accumulation maximée de e. Désignons les points de e par a_1, a_2, ..., a_n, ..., les n étant tous les entiers naturels et les a_n tous distincts. Ceci étant, supposons que nous ayons adopté dans l'espace considéré des voisinages qui soient tous ouverts ; nous avons le droit de faire cette hypothèse en vertu de la condition α). Soit alors x un point arbitraire de E, et soit V_x un voisinage de x. Posons :

Si eV_x est vide, $p(V_x) = 0$.

Si eV_x est infini, $p(V_x) = +\infty$.

Si eV_x est fini, $p(V_x) =$ le plus grand indice des a_n contenus dans V_x.

---

(1) Dû à M. Fréchet (*E. A.*, p. 236).

(2) Dans cet énoncé les mots « au sens large » n'ajoutent rien puisque la condition α) est réalisée. Ce théorème 9) exprime un résultat qui, à notre connaissance, est vraiment nouveau même dans le cas plus particulier des espaces accessibles.

Puis posons :

$$f(x) = \text{minimum de } p(V_x) \text{ pour tous les voisinages } V_x \text{ de } x.$$

Comme x n'est pas point d'accumulation maximée de e, $f(x)$ est un entier *fini* $\geqslant 0$. $f(x)$ est donc une fonctionnelle définie sur E. On a évidemment pour tout voisinage V_{a_n} de a_n :

$$p(V_{a_n}) \geqslant n, \quad \text{d'où} \quad f(a_n) \geqslant n.$$

$f(x)$ n'est donc pas bornée supérieurement sur E.

Ceci posé, soit a un point arbitraire de E. Il existe un voisinage V_a^0 de a tel que

$$f(a) = p(V_a^0).$$

Alors l'hypothèse que $x \in E\,V_a^0$ entraîne l'existence d'un voisinage V_x de x tel que $V_x \subset V_a^0$, ce qui entraîne

$$f(x) \leqslant p(V_x) \leqslant p(V_a^0) = f(a).$$

Donc $f(x)$ est semi-continue supérieurement au point a. Par conséquent la fonctionnelle $f(x)$ est semi-continue supérieurement sur E sans être bornée supérieurement sur E contrairement à l'hypothèse. C. Q. F. D.

Tenant compte du théorème 9) précédent et des résultats obtenus au Chapitre VII, nous allons pouvoir établir un théorème qui, d'une part, résumera tout ce que nous pourrons dire sur les réciproques des théorèmes 7) et 8), et qui, d'autre part, aura l'avantage de ramasser en un énoncé unique plusieurs des plus importantes simplifications introduites dans la théorie des ensembles compacts par la réalisation de la condition α). Pour énoncer ce théorème il nous sera commode d'adopter les notations suivantes ; nous posons dans l'espace ($\mathcal{V}$) considéré :

S = classe des ensembles E tels que chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur E soit bornée supérieurement sur E et atteigne sa borne supérieure en au moins un point de E.

S_1 = classe des ensembles E tels que chaque fonctionnelle continue sur E soit bornée sur E et atteigne ses bornes supérieure et inférieure en certains points de E.

A = classe des ensembles compacts en soi [1].

B = classe des ensembles possédant la propriété de Borel [1].

C = classe des ensembles compacts en soi au sens large [1].

---

[1] Définis au § VIII du Chapitre VII.

D = classe des ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte.

(Nous disons qu'un ensemble E possède la *propriété cantorienne restreinte* si, pour chaque famille monotone [1] et dénombrable $\mathcal{F}$ de sous-ensembles non vides de E, il existe au moins un point de E commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, ou un point de E commun aux dérivés de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.)

Le théorème que nous avons en vue et qui peut être considéré comme la conclusion d'une importante partie de cet Ouvrage est alors le suivant :

* 10). *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α) *on a* [2]

$$A = B = C = D = S \subset S_1.$$

Mais il existe des espaces ($\mathfrak{V}$) *vérifiant* α) *et même des espaces accessibles où la classe* S_1 *est plus étendue que chacune des cinq classes* A, B, C, D et S. *Dans l'espace* ($\mathfrak{V}$) *le plus général subsistent les relations suivantes :*

$$A \subset B \subset C = D \subset S \subset S_1.$$

Mais il existe des espaces ($\mathfrak{V}$) *où* $A \neq B \neq C \neq S \neq S_1$.

Démonstration de 10). — *a*) Il résulte des théorèmes 17), 18) et 22) du Chapitre VII et du théorème 8) du Chapitre actuel que dans l'espace ($\mathfrak{V}$) le plus général

$$A \subset B \subset C = D \subset S.$$

De plus, comme chaque fonctionnelle continue est semi-continue supérieurement, on voit sans peine que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), $S \subset S_1$.

Enfin il résulte du théorème 19) du Chapitre VII et des théorèmes 8) et 9) du Chapitre actuel que dans un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant α) on a :

$$A = B = C = S.$$

---

[1] Définie au § VII du Chapitre VII.

[2] L'identité A = S (ou C = S) constitue à notre connaissance un résultat vraiment nouveau, non seulement dans les espaces ($\mathfrak{V}$) vérifiant α), mais aussi dans le cas plus particulier des espaces accessibles ; la même remarque s'applique aux identités B = S et D = S. Par contre, dans le cas plus particulier encore des espaces distanciés, il résulte immédiatement d'un théorème de M. Fréchet (*Thèse*, Paris, 1906, p. 31) que $C = S_1$. On a donc dans un espace distancié

$$A = B = C = D = S = S_1.$$

b) Donnons maintenant un exemple d'espace accessible où $C \not\equiv S_1$.

Pour cela appelons espace ($\mathcal{V}_b$) un espace ($\mathcal{V}$) dont les points sont les éléments d'un certain ensemble infini non-dénombrable P, et où on attribue à chaque point a tous les voisinages de la forme suivante :

$$V_a = (a) + C \text{ (un ensemble au plus dénombrable de points de P).}$$

C désignant ici le complémentaire par rapport à P. On vérifie sans peine que l'espace ($\mathcal{V}_b$) est un espace accessible.

Soit alors $f(x)$ une fonctionnelle continue sur l'espace ($\mathcal{V}_b$) tout entier, et soient a et b deux points quelconques de cet espace. Donnons-nous un nombre positif ε ; alors il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in V_a$ entraîne

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Et il existe un voisinage V_b de b tel que l'hypothèse que $x \in V_b$ entraîne

$$|f(x) - f(b)| < \varepsilon, \tag{2}$$

Or

$$V_a = (a) + C(K), \qquad V_b = (b) + C(L),$$

K et L étant des ensembles au plus dénombrables ; d'où

$$C(K) \cdot C(L) = C(K + L) \subset V_a V_b.$$

$K + L$ étant au plus dénombrable, $C(K + L)$ ne peut être vide. Il existe donc un point $x \in V_a V_b$, et pour ce point x on a à la fois les relations (1) et (2). D'où

$$|f(a) - f(b)| < 2\varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi aussi petit que l'on veut, on doit avoir $f(a) = f(b)$. Donc chaque fonctionnelle continue sur l'espace ($\mathcal{V}_b$) tout entier est constante sur cet espace. L'espace ($\mathcal{V}_b$) tout entier est donc de classe S_1.

Par contre soit e un sous-ensemble dénombrable de l'espace ($\mathcal{V}_b$), et soit a un point arbitrairement choisi de cet espace. a admet le voisinage

$$V_a = (a) + C(e).$$

L'ensemble $e.V_a = e.(a)$ ne peut avoir même puissance que e ; donc a n'est jamais point d'accumulation maximée de e. Par conséquent l'espace ($\mathcal{V}_b$) tout entier n'est pas compact en soi au sens large, autrement dit n'est pas de classe C.

c) Donnons enfin un exemple d'espace ($\mathcal{V}$) où $A \neq B \neq C \neq S \neq S_1$.

Pour cela considérons d'abord un espace ($\mathcal{V}_{b_1}$) qui est par définition un espace ($\mathcal{V}$) dont les points sont les éléments de la suite....., $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\ldots$, les n étant tous les entiers $<$, $=$ et > 0, et où on attribue à chaque point a_n l'unique voisinage

$$V_a = (a_{n-1}) + (a_n) + (a_{n+1}).$$

L'ensemble e de tous les points de l'espace $(\mathcal{N}_1)$ est dénombrable et il n'existe aucun point d'accumulation maximée de e. Donc l'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier n'est pas compact en soi au sens large, autrement dit n'est pas de classe C.

Soit maintenant $f(x)$ une fonctionnelle semi-continue supérieurement sur l'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier. Alors, le point a_n étant choisi, pour tout $\varepsilon > 0$ l'hypothèse que $x \in V_{a_n}$ entraîne

$$f(x) < f(a_n) + \varepsilon.$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$f(a_{n-1}) < f(a_n) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad f(a_{n+1}) < f(a_n) + \varepsilon,$$

d'où

$$f(a_{n-1}) \leqslant f(a_n) \qquad \text{et} \qquad f(a_{n+1}) \leqslant f(a_n).$$

Comme ces deux dernières inégalités ont lieu quel que soit n, on a

$$f(a_n) \leqslant f(a_{n+1}).$$

On a donc quel que soit l'entier n

$$f(a_n) = f(a_{n+1}).$$

Par conséquent chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur l'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier est constante sur cet espace. L'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier est donc de classe S.

Nous disposons maintenant d'un espace $(\mathcal{V})$, à savoir l'espace $(\mathcal{N}_1)$, dans lequel $C \neq S$. De plus nous avons considéré au § X du Chapitre VII un espace (Si) qui était un espace $(\mathcal{V})$ dans lequel $A \neq B \neq C$. Enfin l'espace $(\mathcal{N})$ étudié il y a un instant était un espace $(\mathcal{V})$ dans lequel $C \neq S_1$. Comme l'espace $(\mathcal{N})$ vérifie la condition α), on a dans cet espace $C = S$ d'où $S \neq S_1$. Alors en juxtaposant les trois espaces (Si), $(\mathcal{N})$ et $(\mathcal{N}_1)$ sans y altérer les voisinages, on voit sans peine que l'on obtiendra un espace $(\mathcal{V})$ dans lequel on aura simultanément $A \neq B \neq C \neq S \neq S_1$.

Le théorème 10) est ainsi complètement établi.

§ VII. Comparaison des types de dimensions de deux ensembles au moyen de la notion d'homéomorphie. — Avant de terminer ce Chapitre il nous a paru intéressant d'indiquer très brièvement comment la notion d'homéomorphie (définie au § I) a été utilisée par M. Fréchet pour comparer ce qu'il appelle les *types de dimensions* (¹) de deux ensembles.

On dit que le type de dimensions d'un ensemble E est inférieur

---

(¹) Pour plus de détails sur cette question, nous renvoyons à l'ouvrage de M. Fréchet (*E. A.*, pp. 29-35).

ou égal au type de dimensions d'un ensemble F et on écrit $d\mathrm{E} \leqslant d\mathrm{F}$ s'il existe une homéomorphie transformant E en un sous-ensemble de F (ce sous-ensemble pouvant être F lui-même). Cette définition permet d'obtenir dans l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général, des égalités et inégalités entre types de dimensions jouissant des mêmes propriétés formelles que les égalités et inégalités ordinaires. Remarquons toutefois que, même dans le cas euclidien, les types de dimensions de deux ensembles ne sont pas toujours comparables de cette façon (1).

La définition précédente conduit à admettre que $d\mathrm{E} = d\mathrm{F}$ si et seulement s'il existe à la fois une homéomorphie transformant E en un sous-ensemble de F et une homéomorphie transformant F en un sous-ensemble de E. Il est intéressant de remarquer que même dans le cas euclidien cette hypothèse n'entraîne pas nécessairement (2) l'existence d'une homéomorphie transformant E en F. Toutefois on déduit sans peine d'un théorème (3) de M. Banach que, *dans l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général, l'hypothèse que* $d\mathrm{E} = d\mathrm{F}$ *entraîne l'existence de deux décompositions :*

$$\mathrm{E} = e_1 + e_2, \qquad e_1 \text{ et } e_2 \text{ étant disjoints,}$$
$$\text{et } \mathrm{F} = f_1 + f_2, \qquad f_1 \text{ et } f_2 \text{ étant disjoints,}$$

telles qu'une homéomorphie transforme e_1 en f_1 et qu'une homéomorphie transforme e_2 en f_2.

(1) Pour un exemple à l'appui de cette assertion, voir *E. A.*, p. 48.
(2) Pour un exemple à l'appui de cette assertion, voir *E. A.*, p. 42.
(3) Voir pour ce théorème M. W. Sierpiński, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 90.

TABLE DES MATIÈRES

TOME I

(1) Le lecteur trouverait p. 22 la définition des espaces accessibles.

TOME II

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. BUSSIÈRE. — 1-3-1934