CHARLES RACINE

Le problème des N corps dans la théorie de la relativité

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__158__1_0>

N° D'ORDRE :
2350
SÉRIE A.
N° DE SÉRIE :
1484

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. CHARLES RACINE

1re THÈSE. — LE PROBLÈME DES N CORPS DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ.

2e THÈSE. — SUR LES COURBES DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

Soutenues le 1934 devant la Commission d'examen.

MM. E. CARTAN, *Président.*
J. CHAZY, G. DARMOIS, *Examinateurs*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1934

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire	M. MOLLIARD.
Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires	H. LE CHATELIER.	LÉON BRILLOUIN.
	H. LEBESGUE.	GOURSAT.
	A. FERNBACH.	WALLERANT.
	A. LEDUC.	GUILLET.
	ÉMILE PICARD.	PÉCHARD.
	RÉMY PERRIER.	FREUNDLER.

PROFESSEURS

P. JANET	T	Electrotechnique générale.
G. BERTRAND	T	Chimie biologique.
Mme P. CURIE	T	Physique générale.
M. CAULLERY	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
ÉMILE BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
L. MARCHIS	T	Aviation.
JEAN PERRIN	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM	T	Physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE	T	Physiologie générale.
E. VESSIOT	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. COTTON	T	Physique.
J. DRACH	T	Analyse supérieure.
CHARLES FABRY	T	Physique.
CHARLES PÉREZ	T	Zoologie.
LÉON BERTRAND	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
E. BLAISE	T	Chimie organique.
R. LESPIEAU	T	Théories chimiques.
P. PORTIER	T	Physiologie comparée.
E. RABAUD	T	Biologie expérimentale.
P.-A. DANGEARD	T	Botanique.
V. AUGER	T	Chimie appliquée.
M. GUICHARD		Chimie minérale.
PAUL MONTEL	T	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM	T	Botanique.
O. DUBOSCQ	T	Biologie maritime.
G. JULIA	T	Mécanique analytique.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY		Pétrographie.
H. BÉNARD	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
EUGÈNE BLOCH	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT		Physique.
E. DARMOIS		Physique.
A. DEBIERNE		Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. N.).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique (P. C. N.).
M. JAVILLIER		Chimie biologique.
L. JOLEAUD		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY		Zoologie.
H. MOUTON		Chimie physique.
F. PICARD		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
HENRI VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS		Chimie organique.
H. BEGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. N.).
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT		Zoologie.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN		Zoologie (P. C. N.).
COMBES		Sciences naturelles (P. C. N.).
GARNIER		Mécanique rationnelle.
PÉRÈS		Mécanique des Fluides.
HACKSPILL		Chimie (P.C.N.).
LAUGIER		Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P.C.N.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY		Mathématiques.
GAULT		Chimie (P. C. N.).
CROZE		Physique.
DUPONT		Chimie (P. C. N.).
LANQUINE		Géologie.

Secrétaire	A. PACAUD.
Secrétaire honoraire	D. TOMBECK.

A MONSIEUR ELIE CARTAN

Témoignage
de profonde admiration
et de reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE

LE PROBLÈME DES N CORPS

DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

INTRODUCTION.

On a surtout traité d'un point de vue local les problèmes que soulève l'application des théories de la Relativité ([1]). Dans les solutions particulières ou approchées qu'on a formées ([2]), on a toujours supposé que l'espace-temps avait un domaine à l'infini et que, dans ce domaine, sa métrique était très voisine de la métrique euclidienne. En précisant la nature de ces conditions, nous avons été conduits à en formuler d'autres qui permettent de poser avec une assez grande généralité le problème de la Mécanique céleste dans la théorie de la Relativité. Ces conditions sont telles que si l'espace-temps est régulier partout il est euclidien et, inversement, s'il existe un champ gravifique, il existe aussi nécessairement des singularités de ce champ. Celles-ci, si elles vérifient certaines conditions que nous énonçons au Chapitre V, pourront être considérées comme la cause physique du champ et, en

---

([1]) *Cf.* G. Darmois, *Mémorial des Sciences math.*, fasc. XXV.

([2]) *Cf.* J. Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste* (Gauthier-Villars, 1930).

cherchant à leur donner une forme aussi simple que possible, on aboutit à une schématisation qui semble devoir généraliser dans la théorie d'Einstein la notion de point matériel (de masse non négligeable) de la Mécanique classique.

Nous appliquons constamment des formules classiques relatives aux espaces de Riemann. Mais comme il se pose toujours à leur sujet des questions de signe, nous éluciderons ce point une fois pour toutes ici.

Le ds^2 étant supposé décomposé en une somme de carrés

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2,$$

posons

$$\omega'_i = \sum_{h=1}^{n} [\omega_h \omega_{hi}],$$

$$\omega'_{ij} = \sum_{h} [\omega_{ih} \omega_{hj}] + \Omega_{ij},$$

où l'on a

$$\Omega_{ij} = \sum_{h,k} R_{ijhk} [\omega_h \omega_k].$$

Lorsque nous calculerons les composantes du même tenseur à l'aide du ds^2 naturel, nous poserons, pour avoir une notation cohérente avec la précédente :

$$R^i_{jkh} = \frac{\partial \Gamma^i_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^h} + \sum_{\alpha} (\Gamma^\alpha_{jk} \Gamma^i_{\alpha h} - \Gamma^\alpha_{jh} \Gamma^i_{\alpha k}).$$

Cette notation, remarquons-le, donne une quantité négative pour la courbure scalaire

$$2R = \sum R^i_i$$

d'une sphère.

C'est un devoir pour nous, au début de ce travail, de remercier très respectueusement M. Élie Cartan dont l'enseignement, les conseils et les encouragements nous ont été extrêmement précieux. Nous remercions aussi MM. Georges Darmois et Jean Chazy. Leurs travaux nous ont été d'indispensables auxiliaires et nous leur sommes très reconnaissants de l'aide bienveillante qu'ils nous ont toujours assurée.

CHAPITRE I.

SUR UNE CLASSE D'ESPACES DE RIEMANN.

1. Métriques infiniment voisines. — La notion de voisinage entre fonctions a été introduite par Weierstrass pour élucider certains points du calcul fonctionnel. Nous dirons avec M. Hadamard (1) que deux fonctions $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ et $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ont entre elles un voisinage d'ordre p défini par le nombre positif ε, si l'on peut établir entre les points $(x^1, \ldots, x^n)$ et $(y^1, \ldots, y^n)$ une correspondance biunivoque telle que l'on ait

$$|f(x^1, \ldots, x^n) - \varphi(y^1, \ldots, y^n)| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{\partial^m f}{(\partial x^1)^\alpha (\partial x^2)^\beta \ldots} - \frac{\partial^m \varphi}{(\partial y^1)^\alpha (\partial y^2)^\beta \ldots}\right| < \varepsilon \qquad (m = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha + \beta + \ldots = m).$$

On démontre aisément que si f est continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p on pourra toujours supposer

$$x^i = y^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons, par exemple, deux fonctions de deux variables

$$f(x, y) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x, y),$$

qui ont un voisinage d'ordre p comme il vient d'être défini. Elles peuvent être représentées, dans l'espace euclidien à trois dimensions rapporté à des coordonnées rectangulaires, par les deux surfaces

$$z_1 = f(x, y), \qquad z_2 = \varphi(x, y).$$

Employant le langage géométrique on pourra dire que les deux surfaces sont dans un voisinage d'ordre p défini par le nombre positif ε.

La métrique de chacune de ces surfaces est définie respectivement par les éléments linéaires suivants :

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz_1^2$$

---

(1) *Cf.* J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, t. I, p. 49 (Hermann, 1910).

et

$$ds_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz_2^2,$$

où l'on remplace z_1 et z_2 par leurs expressions en fonction de x et de y. Si les derivées partielles du premier ordre de z_1 et de z_2 sont bornées dans un certain domaine D, on aura, pour des valeurs suffisamment petites de ε, en tout point de ce domaine,

$$1 - \eta < \frac{ds_1}{ds_2} < 1 + \eta,$$

η étant un nombre positif plus petit que 1 et ne dépendant que de ε. On en déduit que le rapport des longueurs de deux courbes homologues de longueur finie diffère de 1 d'une quantité qui tend vers zéro avec ε. Soit η cette quantité. On peut dire que les métriques sont dans un voisinage d'ordre $p - 1$ défini par le nombre η.

Soient maintenant

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_m, \quad \ldots$$

une suite de fonctions de n variables et

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_m, \quad \ldots$$

une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Si entre chaque fonction f_i et une fonction φ de n variables existe un voisinage d'ordre p défini par le nombre positif ε_i on dira que la suite des f_i définit des fonctions infiniment voisines de φ et dans un voisinage d'ordre p.

Les notions précédentes conduisent à introduire d'une manière très naturelle la notion de métriques riemanniennes infiniment voisines.

On sait que l'on définit un espace de Riemann comme un continuum à n dimensions dans lequel on s'est donné une forme différentielle quadratique

$$ds^2 = \sum_1^n g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

cette forme étant appelée l'élément linéaire de l'espace de Riemann. On peut dire aussi qu'un espace de Riemann est un continuum en chaque point duquel on se donne une quadrique d'équation

$$\sum_1^n g_{ij} X^i X^j = 1.$$

Celle-ci peut être normée en chaque point par le changement de variables

$$Y^i = \sqrt{g_{ii}}\, X^i.$$

Son équation est alors

$$\sum_1^n Y_i^2 + \sum_1^n a_{ij} Y^i Y^j = 1.$$

Si la forme quadratique est, comme nous le supposerons sauf indication contraire, définie positive, les quantités

$$a_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} \cdot g_{jj}}},$$

qui définissent le cosinus de l'angle fait par les directions

$$dx^1 = 0, \quad dx^2 = 0, \quad \ldots, \quad dx^i = 1, \quad \ldots, \quad dx^n = 0$$

et

$$dx^1 = 0, \quad dx^2 = 0, \quad \ldots, \quad dx^j = 1, \quad \ldots, \quad dx^n = 0,$$

sont, en valeur absolue, comprises entre 0 et 1.

Pour étudier les propriétés métriques d'un espace de Riemann, on est obligé de se servir d'un système de coordonnées. Mais les propriétés de la métrique riemannienne sont indépendantes du choix des coordonnées employées.

Nous appellerons système régulier de coordonnées un système tel que pour tout point d'un domaine D (domaine de régularité) :

1° Deux points différents ont des coordonnées différentes et un même point ne peut être représenté par des coordonnées différentes;

2° Les g_{ij} sont définis, continus et leurs dérivées continues jusqu'à un certain ordre. Soit p cet ordre. On dira alors que ce système régulier de coordonnées est régulier d'ordre p;

3° La forme quadratique

$$\sum_1^n g_{ij} X^i X^j, \qquad \text{où} \qquad \| g_{ij} \| \neq 0,$$

qui est décomposable en la somme de n carrés linéairement indépendants est telle que les quantités $|a_{ij}|$ sont bornées supérieurement par un nombre plus petit que 1, le déterminant des a_{ij}, ($a_{ii} = 1$), étant supérieur à un nombre fixe plus grand que zéro.

Nous appellerons métrique riemannienne régulière dans un domaine D une métrique pour laquelle on peut trouver, dans ce domaine, au moins un système de coordonnées régulier.

Si le domaine est de dimensions assez restreintes et comprend sa frontière, s'il existe un système de coordonnées régulier et d'ordre p, il en existera une infinité d'autres de même ordre. Pour le constater, il suffit de considérer la transformation

$$y^1 = x^1 + X(x^1 \ldots x^n),$$

X étant analytique et uniforme dans le domaine considéré.

Une métrique riemannienne sera dite régulière d'ordre p dans un domaine D, si l'on peut définir, dans ce domaine, au moins un système de coordonnées régulier et d'ordre p et s'il n'existe aucun autre système de coordonnées régulier et d'ordre $q > p$ dans D.

Un espace de Riemann sera dit doué d'une métrique régulière d'ordre p si tout point de cet espace peut être entouré d'un domaine D pour lequel (frontières comprises) on puisse définir un système de coordonnées régulier et d'ordre p au moins.

Considérons maintenant un continuum à n dimensions formé des points $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ intérieurs à un certain domaine D. Soit E_1, E_2, ..., E_m, ... une suite de métriques riemanniennes régulières et d'ordre p dans ce domaine. La métrique E_m sera définie par la donnée de la forme quadratique

$$\sum_1^n g_{ij}^{(m)} X^i X^j.$$

Soit enfin E une métrique riemannienne régulière d'ordre p dans le même domaine et définie par la forme quadratique

$$\sum_1^n g_{ij} X^i X^j,$$

le système des coordonnées étant supposé régulier dans l'une et l'autre métrique.

Soient L_m une courbe rectifiable de E_m; l_m sa longueur; l la longueur de la courbe L homologue de L_m dans E. Considérons l'expression

$$\left|\frac{l_m - l}{l}\right|.$$

Si quelle que soit la courbe L rectifiable, intérieure à D et de longueur finie, à tout nombre positif ε arbitrairement petit, il correspond un nombre positif M tel que pour $m > M$ on ait

$$\left|\frac{l_m - l}{l}\right| < \varepsilon,$$

nous dirons que les métriques E_m sont infiniment voisines de E.

Nous serons conduits à une définition analytique des métriques infiniment voisines par le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les métriques E_m *soient infiniment voisines de* E *est que les quantités*

$$\frac{g_{ii}^{(m)}}{g_{ii}} - 1 \quad \text{et} \quad a_{ij}^{(m)} - a_{ij} \qquad \left(a_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}\cdot g_{jj}}}, \quad a_{ij}^{(m)} = \frac{g_{ij}^{(m)}}{\sqrt{g_{ii}^{(m)}\cdot g_{jj}^{(m)}}}\right)$$

soient des fonctions infiniment voisines de zéro au sens défini plus haut.

Ajoutons de suite que si le voisinage est d'ordre p, selon la définition donnée, les métriques seront dites, par définition, être infiniment voisines dans un voisinage d'ordre p.

La condition est nécessaire.

En effet, soient P et P′ deux points infiniment voisins mais quelconques, ds_m la distance de ces points dans E_m et ds la distance analogue dans E. On doit avoir quelles que soient les quantités $X^1, X^2, \ldots, X^n$ et le point $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$

$$\left|\frac{\Sigma g_{ij}^{(m)} X^i X^j}{\Sigma g_{ij} X^i X^j} - 1\right| < \varepsilon \qquad (\text{quand } m > M).$$

Ceci suppose qu'on a tout d'abord :

$$\left|\frac{g_{ii}^{(m)}}{g_{ii}} - 1\right| < \varepsilon \qquad \text{si } m > M \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Puis i et j étant deux indices quelconques, quelles que soient les quantités X et Y et le point $(x^1, \ldots, x^n)$

$$\left|\frac{g_{ii}^{(m)} X^2 + 2 g_{ij}^{(m)} XY + g_{jj}^{(m)} Y^2}{g_{ii} X^2 + 2 g_{ij} XY + g_{jj} Y^2} - 1\right| < \varepsilon \qquad (m > M).$$

Posons

$$\overline{X}=\sqrt{g_{ii}}X, \qquad \overline{Y}=\sqrt{g_{jj}}Y, \qquad \sum_1^n g_{ij}X^iX^j=1.$$

la condition précédente s'écrit, pour $m > M$,

$$\left|\overline{X}^2\left(\frac{g_{ii}^{(m)}}{g_{ii}}-1\right)+\overline{Y}^2\left(\frac{g_{jj}^{(m)}}{g_{jj}}-1\right)\right.$$
$$\left.+2\left[a_{ij}^{(m)}\left(\sqrt{\frac{g_{ii}^{(m)}}{g_{ii}}\frac{g_{jj}^{(m)}}{g_{jj}}}-1\right)+a_{ij}^{(m)}-a_{ij}\right]\overline{X}\overline{Y}\right|<\varepsilon.$$

Le déterminant $\|a_{ij}\|$ étant pour tout point du domaine considéré supérieur à un nombre supérieur à zéro, les quantités $|\overline{X}|$ et $|\overline{Y}|$ sont bornées supérieurement dans tout ce domaine par un nombre A. Dès lors il vient

$$|a_{ij}^{(m)}-a_{ij}|<\frac{\varepsilon}{2A^2}(1+4A^2) \qquad (m>M).$$

La condition est suffisante.

Par hypothèse, à tout nombre ε arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre M tel que si $m > M$, il vient

$$\left|\frac{g_{ii}^{(m)}}{g_{ii}}-1\right|<\varepsilon, \qquad |a_{ij}^{(m)}-a_{ij}|<\varepsilon \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Considérons alors deux points infiniment voisins P et $P + dP$, soit ds_m leur distance dans E_m. Posons comme plus haut

$$\overline{X}^i=\sqrt{g_{ii}}X^i \qquad (|\overline{X}^i|<A)$$
$$ds^2=1.$$

On a

$$\frac{ds_m^2}{ds^2}-1=\sum_1^n(\overline{X}^i)^2\left(\frac{g_{ii}^{(m)}}{g_{ii}}-1\right)$$
$$+\sum_{ij}2\overline{X}^i\overline{X}^j\left[a_{ij}^{(m)}\left(\sqrt{\frac{g_{ii}^{(m)}}{g_{ii}}\frac{g_{jj}^{(m)}}{g_{jj}}}-1\right)+a_{ij}^{(m)}-a_{ij}\right].$$

De là on déduit

$$\left|\frac{ds_m^2}{ds^2}-1\right|<nA^2\varepsilon(2n-1).$$

Posons encore

$$\eta'=nA^2\varepsilon(2n-1), \qquad \eta^2+2\eta=\eta'.$$

Il vient

$$1 - \eta < \frac{ds_m}{ds} < 1 + \eta.$$

η tendant vers zéro en même temps que ε, on voit qu'à tout nombre η arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre positif M tel que si $m > M$, on ait

$$1 - \eta < \frac{ds_m}{ds} < 1 + \eta.$$

Considérons maintenant une courbe rectifiable L et de longueur finie dans l'une et l'autre des métriques. En vertu de l'inégalité précédente on a

$$1 - \eta < \frac{\int_L ds_m}{\int_L ds} < 1 + \eta.$$

La courbe L étant quelconque, les métriques sont bien infiniment voisines.

Remarquons qu'on peut généraliser le résultat précédent en considérant deux suites $E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots$ et $F_1, F_2, \ldots, F_m, \ldots$ de métriques infiniment voisines.

2. **Comportement asymptotique d'un espace de Riemann.** — Considérons le continuum des points $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ où les nombres x^i peuvent prendre toutes les valeurs réelles possibles. Appelons domaine à l'infini l'ensemble des points pour lesquels l'expression

$$|x^1| + |x^2| + \ldots + |x^n|$$

surpasse une valeur M. Attachons en chaque point de ce continuum un ensemble de fonctions de point g_{ij}, de telle sorte que l'élément linéaire

$$ds^2 = \sum_1^n g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

définisse une métrique régulière (d'un certain ordre) sauf peut-être en certains points du domaine, à distance finie.

Considérons alors, dans le domaine où la métrique est régulière, une courbe L partant d'un point donné, d'ailleurs quelconque, et *s'éloignant à l'infini*, c'est-à-dire contenant des points pour lesquels le nombre

$$|x^1| + |x^2| + \ldots + |x^n|$$

surpasse toute valeur donnée à l'avance.

Si quelle que soit la courbe L considérée, sa longueur, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_L \sqrt{\Sigma g_{ij}\, dx^i\, dx^j},$$

surpasse toute valeur donnée à l'avance, on dira que la métrique considérée admet un domaine à l'infini.

Soient A et B deux métriques remplissant ces conditions. Considérons des valeurs de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ formant une suite indéfiniment croissante. A chaque valeur r_i de cette suite faisons correspondre le domaine des points pour lesquels on a $r > r_i$. Soient $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ la suite de ces domaines pour A et D'_1; $D'_2, \ldots, D'_m, \ldots$ la suite homologue pour B.

Soient L_m et L'_m deux courbes rectifiables homologues de longueur finie et tout entières situées dans des domaines de A et de B affectés du même indice. Soient l_m et l'_m leurs longueurs. Si l'on peut, à tout nombre positif ε arbitrairement petit, faire correspondre un nombre M tel que, si $m > M$

$$\left| \frac{l'_m - l_m}{l_m} \right| < \varepsilon,$$

quelles que soient les courbes L_m et L'_m, on dira que les deux espaces ont même comportement asymptotique.

Cette définition revient, au fond, à la suivante : les espaces de Riemann constitués par les deux suites $D_1, D_2, \ldots$ et $D'_1, D'_2, \ldots$ précédentes sont des espaces infiniment voisins. On déduit de là aisément la condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces de Riemann aient même comportement asymptotique.

Rapportons, en effet, leurs domaines à l'infini à un même système de coordonnées régulières. Soient

$$ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

l'élément linéaire de A pour ce choix des coordonnées et

$$d\sigma^2 = \sum \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

l'élément linéaire de B, avec les mêmes coordonnées. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux espaces aient même comportement asymptotique est, en posant encore $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, qu'on puisse, à tout nombre ε positif arbitrairement petit, faire correspondre un nombre positif R tel que si $r > R$ on ait :

$$\left| \frac{g_{ii}}{\gamma_{ii}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |a_{ij} - \alpha_{ij}| < \varepsilon,$$

où

$$a_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} \cdot g_{jj}}} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{\gamma_{ii} \cdot \gamma_{jj}}}.$$

Un exemple simple est fourni, dans l'espace euclidien à trois dimensions, par une surface $Z = f(x, y)$ asymptote au plan des xy.

On peut toujours, dans l'espace euclidien à trois dimensions, construire deux surfaces qui, sans être asymptotes l'une à l'autre, donnent naissance à deux métriques ayant même comportement asymptotique. Tel est par exemple le cas des surfaces

$$Z = \sin\theta \qquad \text{ou} \qquad \theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{z}$$

et

$$z = 0.$$

Si une métrique ayant un domaine à l'infini a même comportement asymptotique que l'espace euclidien, nous dirons habituellement que son comportement asymptotique est euclidien.

Si les fonctions $\frac{g_{ii}}{\gamma_{ii}} - 1$, $a_{ij} - \alpha_{ij}$ et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre q sont, en module, inférieures à ε lorsque $r > R$, nous dirons qu'il y a même comportement asymptotique d'ordre q.

3. **Espaces de la classe E_{pq}.** — Dans tout ce travail, il ne sera question que d'espaces de Riemann satisfaisant aux conditions suivantes :

Soit le continuum des points $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ où les nombres x^i prennent toutes les valeurs réelles. Les espaces de Riemann considérés s'obtiennent en attachant à tout point de ce continuum une forme quadratique

$$\sum_{1}^{n} g_{ij} X^i X^j,$$

de façon à définir en tout domaine intérieur (sauf peut-être certains domaines bornés dans toutes leurs dimensions) un système de coordonnées régulier. La métrique ainsi définie est partout régulière et d'ordre p au moins ($p \geqq 2$).

Soit maintenant une suite infinie d'espaces de Riemann tels que les précédents $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, cette suite définissant des espaces infiniment voisins de l'espace euclidien, chacun d'eux ayant un comportement asymptotique euclidien.

Supposons le voisinage d'ordre p et le comportement asymptotique euclidien d'ordre q. Le ds^2 de la métrique proposée s'écrira :

$$ds^2 = \Sigma(\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dx^i\, dx^j, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Nous écrirons habituellement (avec trois dimensions)

$$ds^2 \sim dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Supposons, de plus, qu'on puisse définir dans ces métriques un système de coordonnées polaires tel que les quantités ε_{ij} dépendant de r, de θ et de φ puissent se développer suivant les puissances de $\frac{1}{r}$ dans le domaine à l'infini [1]

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{ij.m}}{r^m}.$$

Nous dirons que *les espaces de Riemann considérés sont de la classe* E_{pq}.

Théorème. — *Un espace à comportement asymptotique euclidien donne naissance, au moins dans son domaine à l'infini, à une famille d'espaces infiniment voisins de l'espace euclidien.*

Soit, en effet, l'espace d'élément linéaire

$$ds^2 \sim dr^2 + r^2\, d\varpi^2,$$

---

[1] Cette dernière hypothèse n'est pas toujours nécessaire. En fait, elle n'intervient, dans notre travail, qu'au Chapitre IV.

$d\varpi^2$ étant l'élément linéaire sphérique à $n - 1$ dimensions, et considérons l'élément linéaire, dépendant du paramètre λ

$$ds^2 = [1 + \varepsilon_{11}(\lambda r, \theta, \varphi)]\, dr^2 + \ldots .$$

On a, par hypothèse,

$$\lim_{r=\infty} \varepsilon_{ij}(\lambda r, \theta, \varphi) = \lim_{\lambda=\infty} \varepsilon_{ij}(\lambda r, \theta, \varphi) = 0.$$

Dans un domaine (r, θ, φ) fini les espaces définis par l'élément linéaire en λ sont, pour $\lambda > 1$, des espaces infiniment voisins de l'espace euclidien.

Considérons des espaces de Riemann à quatre dimensions dont l'élément linéaire puisse s'écrire

$$(1) \qquad ds^2 = (1 + \varepsilon_{00})\, dt^2 - \sum_1^3 (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dx^i\, dx^j.$$

Si, pour toute valeur de t comprise entre deux limites, 0 et T, l'élément linéaire à trois dimensions

$$\sum_1^3 (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dx^i\, dx^j$$

est de la classe E_{pq} et si, quel que soit le point considéré, ε_{00} tend vers zéro dans les mêmes conditions que les ε_{ij}, ε_{00}, $\frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$ tendant d'ailleurs uniformément vers zéro quand on s'éloigne à l'infini sur les variétés $t =$ const., on dira qu'on a affaire à un espace-temps de la classe E_{pq}.

Nous ne considérerons dans ce travail que les solutions des équations de la gravitation d'Einstein qui engendrent des espace-temps de la classe $E_{pq} (p \geqq 2,\ q \geqq 2)$. Nous supposerons que leur élément linéaire a été ramené à la forme (1) — forme canonique — dans tout leur domaine d'existence, négligeant d'étudier les cas d'exception où cette réduction ne peut être effectuée. Nous appellerons sections d'espace les sections $t =$ const. et lignes de temps les lignes sur lesquelles t seul varie.

4. Nous allons clore ce chapitre par la démonstration d'un théorème important touchant des espaces de la classe E_{pq}.

On sait que, dans l'espace à trois dimensions, si les composantes R_i^j du tenseur de courbure de Riemann contracté sont nulles, l'espace est localement euclidien.

Considérons maintenant des espaces à trois dimensions de la classe E_{pq}. Supposons leur ds^2 de la forme

$$ds^2 \sim dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Si ces espaces sont infiniment voisins de l'espace euclidien, on pourra écrire

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{(n)} + \ldots,$$

les quantités d'indice $(i+1)$ étant infiniment petites par rapport aux quantités d'indice (i).

De même on peut écrire, les indices gardant la même signification,

$$R_i^j = (R_i^j)^{(1)} + (R_i^j)^{(2)} + \ldots + (R_i^j)^{(n)} + \ldots.$$

Nous allons démontrer que, pour les espaces E_{pq} *réguliers partout*, si les quantités $(R_i^j)^{(1)}$ sont toutes nulles, il existe un système de coordonnées tel que les $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ sont aussi tous nuls.

Ce théorème peut donc s'énoncer d'une manière abrégée :

Si les parties principales des R_i^j sont toutes nulles, la métrique réduite à sa partie principale est euclidienne.

Supposons le ds^2 de la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (1+\varepsilon_{11})\, dx^2 + (1+\varepsilon_{22})\, dy^2 + (1+\varepsilon_{33})\, dz^2 \\ & + 2\varepsilon_{12}\, dx\, dy + 2\varepsilon_{23}\, dy\, dz + 2\varepsilon_{31}\, dx\, dz. \end{aligned}$$

Écrivons alors, en négligeant les quantités du second ordre, les équations exprimant que les R_{ijkh} sont nuls. Posons

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \qquad S = \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z}.$$

Ces équations sont

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(2\varepsilon_{23} - \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S - 2\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z}\right) = 0,$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par permutation circulaire.

On tire de là, en introduisant les six arbitraires e_{23}, e_{31}, e_{12}, U, V, W soumises aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial y\,\partial z}=0,\qquad \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial z\,\partial x}=0,\qquad \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}=0,$$

les équations

$$2\varepsilon_{23}=\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}+2e_{23},$$

$$2\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right),$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par permutation circulaire.

On a donc

$$2e_{23}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}+a_{23},$$

où

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x}=\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial y\,\partial z}=0,$$

ainsi que les deux autres égalités déduites par permutation. Posons

$$\mathrm{A}=b(y)+c(z),\qquad a_{23}=\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z},$$

$$\mathrm{B}=a'(x)+c'(z),\qquad a_{31}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x},$$

$$\mathrm{C}=a''(x)+b''(y),\qquad a_{12}=\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}.$$

Il vient, en posant

$$\mathrm{X}=\xi+\mathrm{U}+\mathrm{A},\qquad \mathrm{Y}=\eta+\mathrm{V}+\mathrm{B},\qquad \mathrm{Z}=\zeta+\mathrm{W}+\mathrm{C},$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x},\qquad \varepsilon_{22}=\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y},\qquad \varepsilon_{33}=\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y},\qquad \varepsilon_{23}=\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z},\qquad \varepsilon_{31}=\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}.$$

D'où

$$ds^2=(dx+d\mathrm{X})^2+(dy+d\mathrm{Y})^2+(dz+d\mathrm{Z})^2.$$

Le ds^2, au second ordre près, a donc bien la forme euclidienne.

CHAPITRE II

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN. CAS DES ESPACE-TEMPS RÉGULIERS PARTOUT.

1. Il serait fastidieux d'exposer ici à nouveau la théorie de la gravitation telle qu'elle a été construite, à partir d'une métrique riemannienne attribuée à l'espace-temps, par M. Einstein. Elle consiste essentiellement, une fois donnée en une forme différentielle quadratique,

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{1}$$

où les g_{ij} sont des fonctions de point continues, admettant des dérivées des trois premiers ordres, celles du premier ordre étant continues, à lui associer une autre forme différentielle quadratique

$$G = \sum_1^4 G_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{2}$$

covariante de la première vis-à-vis d'un changement de coordonnées arbitraire et vérifiant les deux conditions suivantes :

1° Les G_{ij} qui dépendent des g_{ij} et de leurs dérivées des deux premiers ordres sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre de ces fonctions.

2° Ce sont les composantes d'un tenseur conservatif, c'est-à-dire que l'on a avec les notations du calcul tensoriel

$$\sum_{\alpha=1}^4 G^{\alpha}_{i.\alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Soient R_{ij} les composantes du tenseur de courbure riemannienne contracté et $2R$ la courbure scalaire. M. E. Cartan a démontré le théorème suivant, fondamental dans la théorie de la Relativité :

Les seuls tenseurs G_{ij} satisfaisant aux conditions précédentes sont *nécessairement de la forme*

$$G_{ij} = \lambda[R_{ij} - g_{ij}(R + \mu)], \tag{3}$$

λ et μ étant deux constantes [1].

Ceci admis, la théorie de la gravitation einsteinienne s'énonce comme il suit :

Les quantités G_{ij} de signification purement géométrique sont nulles hors des masses et égales à un tenseur T_{ij} de signification mécanique, à l'intérieur des masses.

Selon que ce dernier tenseur est nul ou non, on dira que l'on traite le cas extérieur ou le cas intérieur. Dans le cas extérieur les équations de la gravitation sont :

$$R_{ij} = 0.$$

Formons explicitement les équations aux dérivées partielles qui expriment cette loi.

Supposons pour cela que dans un certain domaine l'espace-temps puisse être rapporté à un système de coordonnées tel que l'élément linéaire prenne la forme

$$ds^2 = V^2 dt^2 - \sum_1^3 g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Posons

$$\Omega_{kh} = \frac{1}{2V}\frac{\partial g_{kh}}{\partial t}, \qquad \Omega_k^h = \sum_1^3 g^{\alpha h}\Omega_{\alpha k}.$$

Les Ω_{ij} définissent sur les sections d'espace des tenseurs symétriques à deux indices. Soient de plus $\overline{R}_{ijkh}$ les composantes du tenseur de courbure riemannienne de ces sections. Posons enfin

$$K = \sum \Omega_h^h, \qquad H^2 = \sum \Omega_\alpha^\beta \Omega_\beta^\alpha, \qquad \Pi_i^j = \Omega_i^j - g_i^j K.$$

Les équations de la gravitation (cas extérieur) s'écrivent

$$\overline{R}_i^j + \frac{V_{i,}{}^j}{V} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Omega_i{}^j}{\partial t} - K\,\Omega_i{}^j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$\sum_1^3 \Pi_{i,\alpha}^\alpha = 0, \qquad 2\overline{R} - K^2 + H^2 = 0.$$

---

[1] *Cf.* E. Cartan, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein* (*Journal de Mathématiques*, t. 1, 1922, p. 141-203).

2. Dans le cas général, posons

$$R_{ij} - g_{ij}R = S_{ij}$$

et soit T_{ij} le tenseur matériel. Soit

$$P_{ij} = S_{ij} - T_{ij}.$$

Le tenseur P_{ij} qui est conservatif doit être nul identiquement en tout point de l'espace-temps gravitationnel d'Einstein. Divisons les équations d'Einstein en deux groupes, en nous servant toujours du système de coordonnées précédent. Dans le premier,

$$\text{(A)} \qquad P_{ij} = 0 \qquad (i \neq 0, j \neq 0),$$

figurent les dérivées secondes par rapport à la variable t. Le second groupe sera constitué par les quatre équations

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} P_i^0 = 0 \\ \sum_1^3 P_i^i - P_0^0 = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

Ces quatre dernières équations ne contiennent aucune dérivée seconde par rapport à t.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Si les équations (B) *sont vérifiées sur une section d'espace et si les équations* (A) *sont vérifiées en tout point du domaine d'espace-temps considéré, les équations* (B) *sont vérifiées partout.*

Ceci découle immédiatement de la propriété du tenseur d'être conservatif. Les équations

$$\sum_{\alpha=0}^{3} P_{i,\alpha}^{\alpha} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

forment en effet, dans ce cas, un système linéaire par rapport aux $\frac{\partial P_i^0}{\partial t}$ et aux P_i^0. Par suite le système des équations d'Einstein est en involution et l'on peut leur appliquer les résultats classiques de la théorie de ces systèmes [1].

---

[1] *Cf.* E. CARTAN, *Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. LIX, 1931, p. 88-118).

3. Le problème de l'intégration des équations d'Einstein se précise donc en vertu de la forme même de ces équations. Il se divise en deux autres problèmes de nature très différente. Le premier que l'on peut appeler le problème des conditions initiales consiste à trouver des solutions des équations (B). Le second consiste, étant données les valeurs, pour une valeur t_0 de t, des quantités g_{ij} et de leurs dérivées premières par rapport à t, à calculer, au moyen des équations (A), les développements suivant les puissances de t qui donnent pour t quelconque la métrique d'une section d'espace.

On pourrait se demander si cette méthode de résolution du problème proposé est bien indiquée, ayant été choisie en raison de commodités de calcul dans une question qui est, avant tout, posée par la physique (1).

Ce que l'on se propose essentiellement dans un problème de gravitation, c'est, connaissant l'état d'un système au temps $t = t_0$, de trouver l'état du même système au temps $t = t_0 + h$.

Dans la théorie de la Relativité, il n'y a plus de temps absolu, chaque système de coordonnées comportant une division qui lui est propre de l'univers en espace et en temps. Le problème de la physique théorique comportera donc, dans cette théorie, trois étapes : il faudra premièrement se fixer un système de coordonnées, c'est-à-dire un ensemble d'observateurs dont les liaisons spatiales et temporelles satisfassent à certaines conditions. En deuxième lieu il faudra se donner les quantités qui, pour ces observateurs, déterminent l'état du système pour deux valeurs très voisines de t. Il faudra enfin trouver un mécanisme analytique permettant de passer de ces valeurs initiales à des valeurs ultérieures.

Entre ces trois pas successifs et la division précédente du problème de l'intégration, on voit qu'il y a entier parallélisme.

4. Les méthodes d'intégration que nous venons d'exposer peuvent tomber en défaut quand l'espace-temps admet un groupe d'isométrie dont les lignes de temps sont les trajectoires. Ce cas est celui où

---

(1) Touchant cet ordre d'idées, *cf.* J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, 1932, p. 39 : « Un problème analytique est toujours correctement posé quand il est la traduction d'une question mécanique ou physique. »

l'espace-temps est défini par un élément linéaire dépendant de dt mais non de t. M. Levi-Cività l'appelle le *cas statique*.

C'est seulement dans ce cas, à coup sûr le moins intéressant pour un problème de mécanique puisqu'il suppose essentiellement l'immobilité des masses en présence, que l'on a pu trouver des solutions des équations de la gravitation ayant une interprétation physique acceptable pour le problème des n corps (1).

On a traité deux cas, le premier est le fameux cas où il y a symétrie sphérique et comportement euclidien à l'infini. La solution est donnée par le ds^2 de Schwarzschild. Le second cas est celui de la symétrie axiale et, pour solutions, on a les ds^2 de MM. Bach, Palatini et Chazy. Ces solutions sont encore à comportement euclidien à l'infini. Un élégant exposé de ces travaux est l'objet du Chapitre VI du très précieux ouvrage de M. Georges Darmois sur les équations de la gravitation einsteinienne (2).

On peut réunir ces diverses solutions dans une même formule (3). Nous l'écrivons sans rien changer aux notations de M. Darmois :

$$ds^2 = e^{2\psi}\,dt^2 - e^{-2\psi}[r^2\,d\varphi^2 + e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2)],$$

où l'on a

$$d\gamma = \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] r\,dr + 2r\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{d\psi}{\partial z}dz$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{2}\log\frac{r_{i1} + r_{i2} - 2a_i}{r_{i1} + r_{i2} + 2a_i},$$

les quantités r_{ij} étant les distances euclidiennes d'un point variable à des points P_{i1}, P_{i2}, ..., situés sur l'axe de révolution.

Il est aisé de constater, le calcul complet étant fait par M. Darmois pour le cas de $i = 2$, que si l'on détermine les quantités ψ et γ par la condition que le ds^2 soit à comportement asymptotique euclidien, la quantité γ qui est nulle sur la partie de l'axe de révolution extérieure à l'intervalle (P_{11}, P_{p2}), sur les segments $P_{i2}P_{i+11}$, ..., est différente

(1) Dans une Note des *Comptes rendus* où nous publions un résultat commun sur lequel nous reviendrons au Chapitre III, M. Delsarte donne des exemples d'un autre cas d'intégration. Mais on ne peut s'en servir pour le problème de la Mécanique céleste. Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **196**, 1933, p. 1277.

(2) *Mémorial des Sciences math.*, fasc. XXV (Gauthier-Villars, 1927).

(3) *Loc. cit.*, p. 35.

de zéro. Dans le cas étudié par M. Darmois, elle est égale à

$$\gamma = k_1 k_2 \log \frac{d(a_1 + a_2 + d)}{(a_1 + d)(a_2 + d)}, \qquad d = \overline{P_{12}P_{21}}.$$

les quantités a_1, a_2 et d ainsi que k_1 et k_2 ne pouvant être nulles. Dans ces conditions le ds^2 n'est pas régulier en les points de l'intervalle $P_{12}P_{21}$. On peut le constater facilement en considérant une section $z = \text{const.}$ d'une section d'espace $t = \text{const.}$ Aux environs d'un point de l'axe, le ds^2 a la forme

$$-e^{-2\psi}[r^2 d\varphi^2 + e^h(1 + h_1 r + \ldots)dr^2].$$

Il suffit alors de déplacer par parallélisme un vecteur de module unité suivant la courbe fermée $r = \text{const.}$ pour constater qu'aussi petit que soit r, l'angle formé par le vecteur ainsi déplacé après une révolution avec le vecteur initial est de grandeur finie, sauf si $h = 0$. Or, précisément, h est ici essentiellement une quantité positive.

Cette singularité des ds^2 proposés, hors le cas où l'on ne considère sur l'axe de révolution qu'un couple de points, l'intervalle entre ces points constituant alors la singularité matérielle, n'a croyons-nous jamais été montrée. Elle constitue pourtant une intéressante confirmation de la théorie de la Relativité puisqu'il est ainsi démontré, dans le cas de la symétrie axiale, que cette théorie est incompatible avec l'immobilité de plusieurs corps en liberté. Il serait intéressant et très important de généraliser la proposition précédente et de rechercher ce qui advient dans le cas statique général.

5. Le seul point traité dans le cas général du problème des n corps est le calcul par approximations successives du ds^2 de n masses dont on connaît à chaque instant les positions, les vitesses et les accélérations généralisées. Encore n'a-t-on pu surmonter les difficultés du calcul que pour la première et la seconde approximation et cela en faisant des hypothèses de nature assez arbitraires sur l'ordre de grandeur des dérivées par rapport à t. Les résultats obtenus ainsi sont exposés au long par M. Chazy dans son bel ouvrage : *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste* [1].

L'inconvénient d'une telle méthode est de supposer connues au

---

[1] Cf. *Op. cit.*, II, p. 175 et suiv.. Gauthier-Villars, 1930.

temps t, non seulement les vitesses des points matériels mais encore leurs accélérations. Les résultats ne valent plus que pour calculer l'action des masses proposées sur un autre point matériel de masse négligeable. De plus, dans le cas de deux corps dont le mouvement relatif admet la symétrie axiale, par exemple, ce qui est le cas le plus simple, la méthode indiquée permettrait de construire en seconde approximation un espace-temps où l'accélération relative des deux corps serait une fonction arbitraire de la vitesse, résultat paradoxal.

6. Les deux questions qui semblent les plus importantes dans une théorie du problème des n corps selon les principes relativistes sont, à notre avis, les suivantes :

D'une part, quelles sont les données physiques qu'il est indispensable de fournir pour que le problème mathématique des conditions initiales puisse être résolu ?

D'autre part, quelles conditions supplémentaires faut-il joindre aux équations de la gravitation (qui sont des conditions locales seulement) pour que le problème des conditions initiales soit susceptible d'une solution et d'une seule ?

Nous ne traiterons pas la première de ces questions. Pour ce qui est de la seconde, nous nous proposons seulement d'étudier les conditions à joindre aux conditions locales pour qu'on ait le théorème suivant :

Le seul espace-temps extérieur régulier partout est l'espace euclidien.

Il semble essentiel de se limiter à la considération de la famille d'espace-temps pour laquelle est vérifiée cette proposition. Un espace-temps régulier partout et partout extérieur donne en effet la représentation géométrique d'un univers sans matière et où pourtant existent des forces de gravitation. Pour qu'on puisse assigner comme cause aux forces de gravitation l'existence de masses matérielles, il apparait nécessaire de ne faire naître ces forces que dans des univers où le champ extérieur possède des singularités. Ces singularités devront d'ailleurs pouvoir être « meublées », c'est-à-dire que le champ extérieur pourra être prolongé par un champ intérieur de manière à ce que l'espace-temps soit régulier partout.

7. Il est tout d'abord bien naturel dans le problème de Mécanique céleste que nous avons en vue, les masses étant en nombre fini et occu-

pant des domaines finis, de poser comme première condition la suivante :

Les sections d'espace doivent avoir un comportement asymptotique euclidien pour un certain choix du système des coordonnées.

Une condition moins nécessaire peut-être mais qui cependant a toujours été supposée remplie dans les travaux antérieurs est que les g_{ij} de la section d'espace, satisfaisant à la première condition, soient développables par la formule de Taylor suivant les puissances des masses. Si l'on considère des valeurs assez petites des masses et qu'on exige que lorsqu'elles tendent vers zéro les sections d'espace tendent vers une métrique euclidienne, on aura cette seconde condition :

Les sections d'espace peuvent être choisies de manière que, satisfaisant à la première condition, elles soient en outre infiniment voisines de l'espace euclidien.

En d'autres termes, on doit pouvoir déterminer les sections d'espace de manière que les ε_{ij} dépendant d'un certain nombre de paramètres, lorsque ces paramètres tendent vers zéro, on ait des espaces de la classe E_{pq}. L'espace-temps lui-même sera, de plus, de la classe E_{pq}.

L'intérêt de cette classe d'espace-temps est qu'elle peut s'étudier assez complètement au moyen d'équations aux variations et, par conséquent linéaires, déduites des équations générales de la gravitation.

8. Ces deux conditions ne suffisent d'ailleurs pas. On peut, en effet, énoncer le théorème suivant :

Il existe des espace-temps extérieurs réguliers partout de la classe E_{pq} *qui ne sont pas euclidiens.*

Rappelons les conditions initiales. Elles s'écrivent

$$\Pi_i^\alpha = \Omega_i^\alpha - g_i^\alpha K, \qquad K = \sum \Omega_\alpha^\alpha, \qquad H^2 = \sum \Omega_\alpha^\beta \Omega_\beta^\alpha,$$

$$\sum_\alpha \Pi_{i,\alpha}^\alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$2\bar{R} - K^2 + H^2 = 0$$

ainsi qu'il a été déjà indiqué.

Les quantités Ω_i^j et $\overline{R}$ doivent tendre vers zéro lorsqu'on s'éloigne à l'infini.

Posons

$$ds^2 = P^4(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad \Omega_i^j = \frac{\Lambda_i^j}{P^6}, \qquad K = 0, \qquad H_i^\alpha = \Omega_i^\alpha,$$

$$h^2 = \sum_{\alpha,\beta} \Lambda_\alpha^\beta \Lambda_\beta^\alpha, \qquad H^2 = \frac{h^2}{P^{12}},$$

on a

$$\overline{R} = 4\frac{\Delta P}{P^5}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Les quatre équations du problème des conditions initiales se réduisent aux suivantes :

$$\Lambda_1^1 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^3 = 0, \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda_1^1}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_1^2}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda_1^3}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \Lambda_2^1}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_2^2}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda_2^3}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \Lambda_3^1}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_3^2}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda_3^3}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\Delta P = -\frac{h^2}{8P^7}, \tag{6}$$

où

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_2^1, \qquad \Lambda_1^3 = \Lambda_3^1, \qquad \Lambda_2^3 = \Lambda_3^2.$$

Nous allons tout d'abord montrer qu'on peut construire des solutions régulières partout des équations (5).

Posons, en effet,

$$\Lambda_1^1 = -X, \qquad \Lambda_2^2 = -Y, \qquad \Lambda_3^3 = -Z,$$

$$\Lambda_1^2 = \frac{\partial^2 A}{\partial x\, \partial y}, \qquad \Lambda_1^3 = \frac{\partial^2 B}{\partial x\, \partial z}, \qquad \Lambda_2^3 = \frac{\partial^2 C}{\partial y\, \partial z}.$$

Ces équations s'écrivent

$$-\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 A}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 B}{\partial x\, \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 A}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 C}{\partial y\, \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 B}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 C}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

avec

$$X + Y + Z = 0.$$

On satisfera à ces équations en posant

$$X = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2},$$

$$Y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2},$$

$$Z = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

On devra avoir, de plus, en vertu de la quatrième équation,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A + B) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(A + C) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(B + C) = 0.$$

La solution suivante satisfait à ces équations

$$2A = U + V - W, \qquad 2C = V + W - U, \qquad 2B = W + U - V;$$

où

$$U = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right),$$

$$V = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right),$$

$$W = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right),$$

L, M, N étant trois fonctions arbitraires, régulières partout, possédant des dérivées partielles jusqu'au sixième ordre et s'annulant à l'infini ainsi que ces dérivées partielles. Si L, M, N sont analytiques les A_i^j jouiront de la même propriété.

On peut faire en sorte que C et par conséquent A_2^3 soit nul.

Il faut pour cela que les fonctions L, M, N soient telles qu'on ait

$$V + W - U = 0,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right).$$

Ces relations seront satisfaites en posant

$$L = -\frac{\partial^2 K}{\partial y\, \partial z}, \qquad M = \frac{\partial^2 K}{\partial x\, \partial z}, \qquad N = \frac{\partial^2 K}{\partial x\, \partial y}.$$

Les quantités A_i^j sont alors définies en fonction d'une seule quantité arbitraire, K.

Reste à construire une solution régulière partout et se réduisant à l'infini à une constante de l'équation

$$\Delta P = -\frac{h^2}{8P^7} = -\frac{4\pi k^2}{P^7}.$$

P doit se réduire à l'infini à une constante pour que le ds^2 de l'espace initial soit euclidien à l'infini.

Pour résoudre cette équation, considérons tout d'abord l'équation auxiliaire

$$\Delta u = -4\pi k^2.$$

Supposons qu'on en connaisse une solution régulière partout et se réduisant à l'infini à une constante. On pourra toujours, par l'addition d'une constante à la solution proposée, faire en sorte que la valeur à l'infini de u soit M et le maximum de la même fonction $M + m$, M *et m étant tous deux plus grands que* o.

Considérons alors la suite $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ de fonctions définies par les équations

$$\Delta P_0 = -4\pi k^2,$$
$$\Delta P_1 = -4\pi \frac{k^2}{P_1^7},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta P_n = -4\pi \frac{k^2}{P_{n-1}^7},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et la condition que toutes ces fonctions se réduisent à M à l'infini.

Nous démontrerons à la fin de ce chapitre que la suite des fonctions converge vers une fonction P satisfaisant à l'équation proposée. Nous sommes donc en mesure de construire une solution du problème des conditions initiales. Je dis que si, par exemple, on a, comme c'est le cas page 25,

$$\Lambda_2^3 = 0, \qquad \Omega_2^3 = 0,$$

l'espace-temps engendré par cette solution du problème des conditions initiales est différent de l'espace-temps euclidien.

En effet, si l'espace-temps engendré était l'espace-temps euclidien, on aurait pour $t = t_0$,

$$\overline{R}_{0ijk} = 0 \qquad (i, j, k \neq 0;\ i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k).$$

ou, étant donnée la forme particulière de notre solution,

$$\frac{\partial}{\partial x}(P^2\Omega_2^3) = \frac{\partial}{\partial y}(P^2\Omega_1^3) = \frac{\partial}{\partial z}(P^2\Omega_1^2),$$

ce qui entraînerait

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^3 = \Omega_3^1 = 0, \qquad \Omega_i^i = 0 \ (i = 1, 2, 3), \qquad K = 0, \qquad k^2 = 0.$$

Ces dernières égalités ne sont certainement pas vérifiées.

9. Il reste à démontrer l'existence de P ainsi qu'il a été dit.

Faisons d'abord quelques remarques au sujet des potentiels newtoniens.

Soit une masse de densité ρ répandue dans tout l'espace à trois dimensions. Si ρ est une fonction qui admet pour dominante la fonction $\bar{\rho}$ suivante :

$$\begin{aligned} r &\leqq A, & \bar{\rho} &= B \\ r &\geqq A, & \bar{\rho} &= \left(\frac{A}{r}\right)^{q+4} \cdot B \quad (q > 0) \end{aligned} \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

A et B étant des constantes, le potentiel I dû à ces masses sera une fonction de point continue, bornée et tendant vers zéro lorsque r croît indéfiniment. Si ρ a des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p, I aura des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $p + 1$ (1).

Tout d'abord ρ et $\bar{\rho}$ étant positifs, on aura pour tout domaine d'intégration, I étant le potentiel dû à ρ et $\bar{I}$ celui dû aux masses $\bar{\rho}$,

$$I < \bar{I}.$$

Calculons

$$\bar{I}(a, b, c) = \int\int\int \frac{\bar{\rho}}{p}\, d\tau,$$

où

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

$d\tau$ désignant l'élément de volume, l'intégration étant étendue à tout l'espace.

En appliquant des propositions classiques sur les masses réparties

(1) *Cf.* Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, p. 273-279; *cf.* aussi Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, Chap. XXIX.

en couches sphériques concentriques homogènes, il vient

$$\bar{\mathrm{I}} = \frac{1}{r}\int_0^r 4\pi\bar{\rho}\alpha^2\,d\alpha + \int_r^\infty 4\pi\bar{\rho}\alpha\,d\alpha.$$

Le maximum de cette expression est atteint pour $r = 0$. Il est

$$\bar{\mathrm{I}}(0) = \int_0^\infty 4\pi\bar{\rho}\alpha\,d\alpha = \int_0^{\mathrm{A}} 4\pi\mathrm{B}\alpha\,d\alpha + \int_{\mathrm{A}}^\infty 4\pi\left(\frac{\mathrm{A}}{\alpha}\right)^{q+4}\mathrm{B}\alpha\,d\alpha = 2\pi\mathrm{A}^2\mathrm{B}\,\frac{q+4}{q+2}.$$

Lorsque r croît indéfiniment, $\bar{\mathrm{I}}$ décroît et tend vers zéro.

Choisissons alors la fonction K de la page 25 de telle sorte que k^2 soit une fonction ayant pour dominante en tout point une fonction du type de $\bar{\rho}$. Soit m le maximum de $\bar{\mathrm{I}}$.

Nous choisirons M et k^2 de telle sorte que l'on ait

$$\mathrm{M} > 1, \qquad \frac{7(\mathrm{M}+m)^6}{\mathrm{M}^{14}} < 1, \qquad m < 1.$$

Posons alors

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.\\
\mathrm{P}_0 &= \mathrm{M} + \iiint \frac{k^2}{p}\,d\tau,\\
\mathrm{P}_1 &= \mathrm{M} + \iiint \frac{k^2}{\mathrm{P}_0^7}\,\frac{d\tau}{p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{P}_n &= \mathrm{M} + \iiint \frac{k^2}{\mathrm{P}_{n-1}^7}\,\frac{d\tau}{p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que les fonctions P_i sont toutes plus grandes que M, plus grand que 1 et plus petites que $\mathrm{M}+m$.

Je dis que cette suite de fonctions converge uniformément vers une fonction P.

En effet cherchons une limite supérieure du module de

$$|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1}|.$$

On a

$$|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1}| = \iiint \frac{k^2}{p}\left|\frac{1}{\mathrm{P}_{n-1}^7} - \frac{1}{\mathrm{P}_{n-2}^7}\right| d\tau.$$

Or, en vertu des hypothèses faites sur M et m on a les inégalités suivantes :

$$e_n = \max|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1}| < e_{n-1}\,\frac{7(\mathrm{M}+m)^6 m}{\mathrm{M}^{14}}.$$

D'où l'on tire

$$e_n < e_1 \left[\frac{7(M+m)^6 m}{M^{14}}\right]^{n-1}.$$

La quantité entre parenthèses étant plus petite que 1 par hypothèse, lorsque n croît indéfiniment, e_n tend bien vers zéro.

On en déduit que P est continue. En effet

$$\begin{aligned}&|P(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - P(x, y, z)| \\ &\quad = |P(x+\xi, \ldots) - P_n(x+\xi, \ldots)| + |P_n(x+\xi, \ldots) - P_n(x, y, z)| \\ &\qquad + |P_n(x, y, z) - P(x, y, z)|\end{aligned}$$

et lorsque n croît indéfiniment, ξ, η, ζ tendant vers zéro, chacun des trois termes entre barres tend uniformément vers zéro.

Considérons alors la fonction

$$Q = M + \iiint \frac{k^2\, d\tau}{p P^7},$$

et cherchons une limite supérieure de la différence

$$|Q - P_n| = \iiint \frac{k^2}{p}\left|\frac{1}{P_{n-1}^7} - \frac{1}{P^7}\right| d\tau.$$

On a

$$\iiint \frac{k^2}{p}\left|\frac{1}{P_{n-1}^7} - \frac{1}{P^7}\right| d\tau < \max\left|P - P_n\right| \frac{7(M+m)^6 m}{M^{14}}.$$

Quand n croît indéfiniment, la différence précédente tend donc uniformément vers zéro. On en déduit que $P = Q$.

Comme d'ailleurs on a

$$Q = M + \iiint \frac{k^2}{P^7}\frac{d\tau}{p};$$

il est manifeste que la fonction P vérifie l'équation aux dérivées partielles proposée et de plus l'équation intégrale

$$P = M + \iiint \frac{k^2}{P^7}\frac{d\tau}{p}.$$

Cette dernière identité démontre que si k^2 admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p, P en admet jusqu'à l'ordre $p+1$. En effet, P étant continue, le potentiel

$$\iiint \frac{k^2}{P^7}\frac{d\tau}{p}$$

admet des dérivées du premier ordre continues. D'une façon générale, si la quantité sous le signe $\iiint$ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p, la fonction définie par l'intégrale en admettra jusqu'à l'ordre $p+1$.

Nous sommes ainsi en possession d'une solution du problème des conditions initiales régulière partout. Nous allons montrer maintenant qu'on peut choisir k^2 de telle façon que la solution précédente existe et soit holomorphe dans le domaine complexe.

Rappelons comment former k^2. On pourra poser, par exemple,

$$A = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}, \qquad X = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}, \qquad A_1^1 = -X,$$

$$B = \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \qquad Y = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \qquad A_2^2 = -Y,$$

$$C = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}, \qquad Z = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \qquad A_3^3 = -Z,$$

$$A_1^2 = A_2^1 = \frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y}, \qquad A_1^3 = A_3^1 = \frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial z}, \qquad A_2^3 = A_3^2 = \frac{\partial^2 C}{\partial y\,\partial z},$$

et

$$32\pi k^2 = \Sigma A_\alpha^\beta A_\beta^\alpha.$$

Choisissons pour K une fonction holomorphe dans le domaine complexe suivant :

$$x = x' + ix'', \qquad -\infty < x' < +\infty, \qquad -2 \leqq x'' \leqq +2,$$

$$y = y' + iy'', \qquad -\infty < y' < +\infty, \qquad -2 \leqq y'' \leqq +2,$$

$$z = z' + iz'', \qquad -\infty < z' < +\infty, \qquad -2 \leqq z'' \leqq +2.$$

k^2 sera holomorphe dans tout domaine intérieur au précédent. En particulier, nous considérerons dans ce qui suivra un domaine J défini comme il est indiqué par les inégalités

$$-\infty < x' < +\infty, \qquad -1 \leqq x'' \leqq +1,$$

$$-\infty < y' < +\infty, \qquad -1 \leqq y'' \leqq +1,$$

$$-\infty < z' < +\infty, \qquad -1 \leqq z'' \leqq +1.$$

Soit $\mathfrak{M}$ le module de k^2 aux points x, y, z. Il est facile de voir qu'on peut choisir K de façon que ce module étant, quels que soient x, y, z, borné supérieurement par un nombre fixe, on ait de plus, en posant

$$\overline{\mathfrak{M}}(x, y, z) = \overline{\lim}\,\mathfrak{M}(x+a, y+b, z+c), \qquad |a| \leqq 1, \qquad |b| \leqq 1, \qquad |c| \leqq 1,$$

$$\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right|^4 . \overline{\mathfrak{M}}(x, y, z) \leqq 1$$

dans J.

On aura alors *a fortiori*

$$\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right|^4 \cdot \mathfrak{M}(x, y, z) \leqq 1.$$

Par exemple, on pourra prendre

$$K = \varepsilon e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

en donnant à ε une valeur positive comprise entre o et 1. Dans ces conditions, suivant ce que nous avons montré page 28, l'intégrale

$$V(a, b, c) = \iiint \frac{\overline{\mathfrak{M}}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

étendue au domaine réel tout entier converge. On pourra choisir ε assez petit pour que la quantité

$$M - \overline{V}, \qquad \text{où} \qquad \overline{V} = \overline{\lim}\, V(a, b, c),$$

soit supérieure à 1. Nous ne considérerons que ces valeurs de ε.

Soit alors la fonction

$$P_0 = M + \iiint \frac{k^2\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2}},$$

l'intégration étant étendue comme précédemment au domaine réel tout entier, a, b, c prenant des valeurs réelles. Posons

$$D_{a,b,c} = \frac{\partial^q}{\partial a^i\, \partial b^j\, \partial c^h} \qquad (i+j+h=q,\ q=1, 2, \ldots).$$

Il vient, d'après un théorème classique de la théorie des potentiels newtoniens,

$$D_{a,b,c} P_0(a, b, c) = \iiint \frac{D_{x,y,z}\, k^2(x, y, z)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Mais k^2 étant analytique, on a

$$|D_{x,y,z} k^2| < \overline{\mathfrak{M}}\, i!\, j!\, h!,$$
$$|D_{a,b,c} P_0| < i!\, j!\, h!\, V(a, b, c).$$

Cette limitation des dérivées partielles de P en tout point (a, b, c) réel entraîne l'analyticité de la fonction dans tout domaine intérieur au domaine J.

On peut encore remarquer que, l'intégration étant étendue à tout le domaine réel (domaine sans frontière), on a

$$\iiint \frac{k^2(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \iiint \frac{k^2(x+a, y+b, z+c)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Or, la fonction

$$P_0 = M + \iiint \frac{k^2(x+a, y+b, z+c)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz$$

est aussi définie et holomorphe pour des valeurs complexes de a, b, c. De plus, le module de P sera compris entre les quantités $M - \overline{V}$ et $M + \overline{V}$.

Dès lors, $\frac{k^2}{P_0^7}$ est une fonction qui jouit exactement des mêmes propriétés que k^2 : elle est holomorphe dans le domaine J et en posant

$$\mathfrak{M}'(x, y, z) = \overline{\lim} \left| \frac{k^2(x+a, y+b, z+c)}{P_0^7(x+a, y+b, z+c)} \right| \qquad (|a| \leqq 1,\ |b| \leqq 1,\ |c| \leqq 1),$$

l'intégrale

$$\iiint \frac{\mathfrak{M}'\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

étendue au domaine réel est convergente et inférieure à V.

Par conséquent, la fonction P_1 définie par l'égalité

$$P_1 = M + \iiint \frac{k^2}{P_0^7} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

est, elle aussi, holomorphe dans J, son module étant borné par les nombres $M - \overline{V}$ et $M + \overline{V}$. Il en sera de même pour les diverses fonctions $P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ de la suite définie plus haut. Elles sont toutes holomorphes dans J et bornées en module. La suite infinie de ces fonctions, d'après les théorèmes généraux sur les fonctions de variables complexes converge donc vers une fonction $\overline{P}$, coïncidant pour des valeurs réelles des variables avec la fonction P définie plus haut. Il s'ensuit que cette fonction $\overline{P}$, lorsqu'on donne aux variables des valeurs complexes, est holomorphe dans J.

Pour des valeurs réelles ou complexes des variables, on a comme nous venons de le voir

$$M - \overline{V} < P_i < M + \overline{V}.$$

Essayons de resserrer cet intervalle. Remarquons qu'on a

$$M - \left| \iiint \frac{k^2(x+a, \ldots)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz \right| < P_i < M + \left| \iiint \frac{k^2(x+a, \ldots)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz \right|.$$

Posons, x, y, z étant réels :

$$a = a' + ia'', \qquad b = b' + ib'', \qquad c = c' + ic'',$$

et donnons à a', b', c' des valeurs fixes, a'', b'', c'' variant entre -1 et $+1$. Soient

$$\mathfrak{M}_1(x+a', y+b', z+c') = \overline{\lim}\, | k^2(x+a'+ia'', \ldots) |,$$
$$U(a', b', c') = \iiint \frac{\mathfrak{M}_1(x+a', y+b', z+c')}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dx.$$

On aura

$$M - U(x, y, z) < P_i < M + U(x, y, z).$$

D'après les hypothèses faites sur k^2 on a

$$\mathfrak{M}_1 . \left| \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right|^4 \leqq 1,$$

$\mathfrak{M}_1$ étant borné. On pourra donc majorer $\mathfrak{M}_1$ par une fonction ne dépendant quede $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ seulement, comme à la page 27. On en déduit, cette fonction contenant ε^2 en facteur :

1° que $U(x, y, z)$ tend vers zéro lorsque $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ croît indéfiniment;

2° que $U(x, y, z)$ tend vers zéro lorsque ε tend lui aussi vers zéro.

On tire de là, en posant $P = M + \varpi$ que ϖ tend aussi vers zéro lorsque $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ croît indéfiniment dans le domaine J ou lorsque ε tend vers zéro.

P étant ainsi déterminé, nous posons, comme nous l'avons dit :

$$\Omega_i^j = \frac{\Lambda_i^j}{P^6} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

les Λ_i^j étant définis comme plus haut. Ce sont évidemment des fonctions holomorphes dans J, tendant vers zéro dans les mêmes conditions que ϖ. Il en va de même pour les Ω_i^j.

10. Considérons maintenant le système suivant d'équations aux

dérivées partielles

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \sum_{k,l} G^i_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

où les G sont des fonctions des $u_1, \ldots, u_m$ seulement.

Supposons que ces fonctions soient analytiques et développables en séries de puissances dans le voisinage de la valeur zéro des $u_1, u_2, \ldots u_m$. M étant le maximum des G dans le domaine

$$|u_1| < r, \qquad |u_2| < r, \; \ldots, \qquad |u_m| < r,$$

ces fonctions sont majorées par l'expression suivante :

$$\frac{M}{1 - \frac{u_1 + \ldots + u_m}{2}}.$$

Cherchons à déterminer une solution du système proposé telle que pour $x_1 = 0$ on ait

$$u_i = \varphi_i(x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

les fonctions φ_i étant nulles au point $x_2 = x_3 = \ldots = x_m = 0$ et analytiques, développables en séries de puissances des x_i dans le voisinage de ce point, de telle sorte qu'elles soient toutes majorées par l'expression suivante :

$$\frac{Ny}{\rho - y} \qquad \text{où} \qquad y = x_2 + x_3 + \ldots + x_n.$$

On sait, comme l'a démontré M^me de Kowalewska, que, dans ce cas, il existe une solution et une seule pouvant être représentée dans le voisinage du point $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ par des développements procédant suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tous ces développements étant majorés par la fonction Z, solution de l'équation

$$\left(1 - \frac{m}{r} Z\right) y + M m (n-1) x_1 = \left(1 - \frac{m}{r} Z\right) \frac{\rho Z}{N + Z},$$

qui se réduit à 0 pour $x_1 = y = 0$, dans le domaine où elle est représentable par un développement en série de puissances de x_1 et y [1].

---

[1] *Cf.* JORDAN, *Cours d'Analyse à l'École Polytechnique*, t. III, p. 317-321.

Cette solution s'écrit, pour $y = 0$:

$$Z = \frac{\rho - t - \sqrt{(\rho - t)^2 - 4\rho\beta t}}{2\mu\rho},$$

en posant

$$\beta = N\frac{m}{r}, \qquad \frac{m}{r} = \mu. \qquad t = Mm(n-1)x_1.$$

On peut la développer en série de puissances de x_1, le rayon de convergence est

$$\rho(1 + 2\beta - \sqrt{(1+2\beta)^2 - 1}).$$

Lorsque ρ, r et M étant donnés, N tend vers zéro, Z tend aussi vers zéro pour toute valeur de t située dans le domaine de convergence attaché au point $y = 0$.

Considérons alors une famille de fonctions $\varphi_{ip}(x_2, \ldots, x_n)$, telles que les fonctions correspondant à une même valeur de l'indice p soient majorées par l'expression $\frac{N_p y}{\rho - y}$, N_p tendant vers zéro quand p augmente indéfiniment.

A chaque valeur de l'indice p correspond une solution du système proposé d'équations aux dérivées partielles. Ces solutions, qui dépendent de cet indice p, tendent uniformément vers zéro quand cet indice augmente indéfiniment.

Ces résultats s'étendent au cas où les fonctions G dépendent de paramètres sans que l'expression qui les majore en dépende elle-même.

De même, ces résultats s'étendent à des équations d'ordre supérieur et non linéaires en les dérivées partielles ([1]).

En particulier, considérons le système des équations du second ordre fourni par la théorie de la Relativité. Ces équations s'écrivent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} = \overline{R}_{ij} + \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}\Omega_{i\alpha}\Omega_{j\beta} - \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{ij}.$$

On les ramènera au type précédent en prenant comme variables auxiliaires $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$ et u défini par l'équation supplémentaire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1. \qquad (u)_0 = x.$$

([1]) *Cf.* JORDAN, *loc. cit.*, n° 244, page 321.

Les fonctions correspondant aux fonctions G du premier système proposé sont ici des fractions rationnelles en les g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$, dont le dénominateur est soit g, soit g^2, où g est le déterminant

$$g = \| g_{ij} \|.$$

Les données initiales étant $(g_{ij})_0 = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}$ et $\Omega_{ij.0}$ dans le voisinage complexe d'un point $x_0 y_0 z_0$, $t = 0$, supposons qu'on ait

$$\varepsilon_{ij} = 0 \ (i \neq j), \qquad \varepsilon_{ii}\,(x_0, y_0, z_0) = a_{ii}.$$

Posons, dans ce domaine,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij} + e_{ij}.$$

Supposons que, pour des valeurs nulles des a_{ij}, g soit développable en série de puissances des e_{ij}, le développement étant convergent lorsqu'on a $|e_{ij}| < e^2$.

Pour des valeurs non nulles et positives des a_{ij}, on a

$$g = (1 + a_{11})(1 + a_{22})(1 + a_{33}) \begin{vmatrix} 1 + \frac{e_{11}}{1 + a_{11}} & \frac{e_{12}}{1 + a_{11}} & \frac{e_{13}}{1 + a_{11}} \\ \frac{e_{21}}{1 + a_{22}} & 1 + \frac{e_{22}}{1 + a_{22}} & \frac{e_{23}}{1 + a_{22}} \\ \frac{e_{31}}{1 + a_{33}} & \frac{e_{32}}{1 + a_{33}} & 1 + \frac{e_{33}}{1 + a_{33}} \end{vmatrix}$$

g peut donc, dans le même domaine de variation des e_{ij} se représenter par une série convergente procédant suivant les puissances de ces quantités. De même g^2.

Supposons alors que les conditions initiales, analytiques, dépendent d'un paramètre ε et soient soumises aux conditions suivantes :

$$\lim_{\varepsilon=0} |\varepsilon_{ij}| = \lim_{\varepsilon=0} |\Omega_{ij.0}| = 0, \qquad \lim_{r=\infty} |\varepsilon_{ij}| = \lim_{r=\infty} |\Omega_{ij.0}| = 0,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On voit que les conclusions précédentes s'appliquent au système des équations d'Einstein et que leurs solutions tendront vers zéro uniformément quand ε tendra lui-même vers zéro. De même, les e_{ij} tendront vers zéro quand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tendra vers des valeurs infiniment grandes. Ces quantités e_{ij} pourront être représentées par des développements procédant suivant les puissances de t et le rayon de convergence de ces séries ne dépendra que de la quantité ρ relative aux ε_{ij} et aux $\Omega_{ij.0}$ ainsi que de la limite supérieure du module de ces quantités. Supposons que ces données initiales soient holomorphes dans un domaine tel que le domaine J proposé précédemment. Supposons de plus que N soit un nombre positif bornant supérieurement leurs modules dans tout le domaine J. Le rayon de convergence des séries en t sera borné inférieurement par un nombre positif, le même pour tout l'espace.

En d'autres termes, pour des valeurs de t différentes de la valeur initiale, le ds^2 de l'espace-temps extérieur d'Einstein s'écrira

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{1}^{3} (\delta_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij})\, dx^i\, dx^j;$$

les $\bar{\varepsilon}_{ij}$ satisfaisant comme les données initiales aux conditions

$$\lim_{\varepsilon=0} |\bar{\varepsilon}_{ij}| = 0, \qquad \lim_{r=\infty} |\bar{\varepsilon}_{ij}| = 0.$$

On obtiendrait le même résultat pour les dérivées partielles des $\bar{\varepsilon}_{ij}$.

L'espace-temps engendré est donc de la classe E_{pq}.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'on puisse engendrer à partir de certaines données initiales, $(\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}, \Omega_{ij.0})$, *un espace-temps de la classe* E_{pq}, *il suffit :*

1° *que les* ε_{ij} *et les* $\Omega_{ij.0}$ *soient analytiques dans un domaine tel que* J ;

2° *que le maximum de leur module dans les domaines cerclés formés de cercles ayant pour centre un point réel et pour rayon l'unité tende vers zéro uniformément avec un paramètre* ε *ou encore lorsque* $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *croît indéfiniment dans* J.

Ces conditions sont effectivement remplies dans le cas de l'exemple que nous avons construit précédemment.

Nous avons donc donné l'exemple d'un espace-temps de la classe E_{pq} existant sur une épaisseur finie de temps et qui, étant un espace-temps extérieur d'Einstein, est régulier partout, sans pour cela se réduire à l'espace-temps euclidien.

Nous énumérons au Chapitre IV un certain nombre de groupes de conditions supplémentaires grâce auxquelles il n'y a de solution régulière partout des équations extérieures d'Einstein que l'espace euclidien. Seule une condition portant sur les parties principales des ε_{ij} donne le moyen d'aborder ensuite le problème des conditions initiales par les ressources actuelles de l'analyse. Mais il nous a paru intéressant de définir d'autres groupes de conditions montrant l'importance de certains systèmes de coordonnées, ou celle de l'évolution relativiste à de grandes distances des masses.

Ainsi apparaît la possibilité d'instituer un parallélisme assez étroit entre les dix équations d'Einstein et l'équation fondamentale de la Mécanique classique, l'équation de Laplace, qui devient dans le cas intérieur l'équation de Poisson. On sait que les solutions de l'équation de Laplace se réduisent à une constante lorsqu'elles sont soumises à la condition d'être régulières partout et de se réduire à l'infini à une constante. En entendant la régularité au sens de « espace-temps de la classe E_{pq} ($p \geqq 2$, $q \geqq 2$) » on a, moyennant l'addition des conditions supplémentaires dont il vient d'être question, la même propriété. On comprend ainsi un peu mieux, nous semble-t-il, la profondeur de la généralisation de la Mécanique classique proposée par M. Einstein.

CHAPITRE III.

L'ESPACE-TEMPS STATIQUE.

1. Dans ce chapitre, nous traitons le cas où les équations de la gravitation d'Einstein se réduisent à une forme plus simple; c'est le cas étudié par M. Levi-Cività du ds^2 statique d'expression [1]

$$ds^2 = V^2(x, y, z)\,dt^2 - \sum_1^3 g_{ij}(x, y, z)\,dx^i dx^j \qquad (x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z).$$

A son sujet nous démontrerons le théorème suivant :

Si un espace-temps statique de M. Levi-Cività est tel que ses sections

[1] *Cf.* T. Levi-Civita, *ds^2 einsteiniani in Campi Newtoniani* (*Rendiconti Ac. Lincei*, 1917-1918).

d'espace aient un comportement asymptotique euclidien ou bien soient des espaces clos, sans frontières, il ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace euclidien.

Nous supposons seulement l'existence et la continuité de V, des g_{ij} et de leurs dérivées jusqu'au second ordre.

Nous avons publié une première démonstration de ce théorème dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1). Elle était basée sur l'existence d'une solution élémentaire (2) pour l'équation

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta V = \sum V^{\alpha}, \alpha$$

dans un domaine où la métrique définissant Δ est régulière, pourvu que ce domaine soit suffisamment petit. Soit U une telle solution. Elle satisfait en tout point du domaine à l'équation ci-dessus sauf en un point où elle devient infinie. Soient P ce point et M un point voisin de P, ρ la distance géodésique de P à M. Lorsque M tend vers P, U devient infini comme $\frac{1}{\rho}\cdot$ En appliquant la formule de Green généralisée aux fonctions U et V, on établit une formule de médiation pour V. Soit Σ une surface fermée quarrable et de surface finie, entourant P; $\frac{d}{dn}$ étant le symbole de la dérivation par rapport à la normale intérieure à cette surface, il vient

$$V(P) = \frac{\displaystyle\int\!\!\int_{\Sigma} V \frac{dU}{dn}\, d\sigma}{\displaystyle\int\!\!\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn}\, d\sigma}.$$

On en déduit sans peine la monotonie de V en P. Si la métrique est partout régulière, V ne pourra avoir en aucun point d'extremum. Dans les deux hypothèses que l'on envisage dans l'énoncé du théorème, V est donc constant. Or les équations de la gravitation sont dans ce cas

$$R_{ij} + \frac{V_{i,j}}{V} = 0, \qquad \Delta V = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Si V est constant, les R_{ij} sont tous identiquement nuls et les sections d'espace sont localement euclidiennes. Le théorème est donc démontré.

---

(1) Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 15 juin 1931, p. 1533.

(2) *Cf.* G. Giraud, *Ann. École Norm.*, t. XLIII, janvier 1926, p. 66.

Dans un récent Mémoire (¹), M. G. Giraud a démontré le théorème suivant pour des équations du type

$$\Delta V = f(M),$$

Δ ayant la même signification que précédemment :

Si ΔV est positif ou nul dans un domaine connexe $(\mathcal{D})$ et si la borne supérieure $\mathcal{M}$ de V est atteinte en un point de $(\mathcal{D})$, V est partout égale à $\mathcal{M}$ dans $(\mathcal{D})$.

L'application de ce théorème donne une seconde démonstration de notre proposition, beaucoup plus simple que la première. Il n'y a qu'à poser $V = M - u$, M étant la borne supérieure de V, et à raisonner sur u. V ne peut s'annuler sans quoi la métrique de l'espace-temps considéré ne serait pas partout régulière. u est donc compris entre O et $M - m$, m étant la borne inférieure de V. Si V n'est pas constant, u est donc maximum au moins en un point et donc constant dans un domaine entourant ce point. Dans ce domaine l'espace-temps sera euclidien. Mais il en sera de même hors de ce domaine car les dérivées premières des quantités V et g_{ij} étant continues par hypothèse, un espace-temps euclidien ne peut se prolonger par un espace-temps non euclidien, sauf peut-être le cas où l'hypersurface commune est caractéristique. Or ici, manifestement, le prolongement devrait se faire à travers une hypersurface engendrée par des lignes de temps.

2. Il existe une classe d'espace-temps analogues à ceux de M. Levi-Cività. M. Delsarte les a, le premier, étudiés (²) et en a donné un exemple qui n'est d'ailleurs pas un espace-temps de la classe E_{pq}. Ils ont pour élément linéaire :

$$ds^2 = -U^2(x^1, x^2, x^3)\,d\xi^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

où U désigne une fonction des deux variables d'espace x^1 et x^2 et de la variable de temps x^3. ω_1, ω_2, ω_3 sont trois formes de Pfaff linéaires en dx^1, dx^2, dx^3 et dépendant seulement des variables x^1, x^2, x^3. ξ est une variable d'espace variant de o à 2π.

(¹) *Cf.* G. Giraud, *Généralisation des problèmes sur les opérations de type elliptique* (*Bull. des Sc. math.*, t. LVI, 1932, p. 9).

(²) Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. **196**, 1933, p. 1277.

On peut se proposer d'étudier les espace-temps précédents infiniment voisins de l'espace-temps euclidien et lui étant asymptotes.

Mais le théorème précédent ne s'étend pas à cette classe d'espaces, du moins quand on n'énonce pas des conditions restrictives en tous points analogues à celles que nous proposerons au chapitre suivant.

Nous terminerons ce chapitre en signalant des formules qui permettent de simplifier l'étude des espace-temps statiques et des espace-temps de la classe précédente.

Considérons un élément linéaire comme le précédent mais sans préciser quelle est la variable de temps. Posons

$$ds^2 = U^2\, d\xi^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

$$\omega_i = \frac{1}{U}\varpi_i \qquad (i=1, 2, 3), \qquad d\sigma^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \qquad dl^2 = \varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2.$$

Soient R_{ijkh} les composantes du tenseur de courbure pour l'élément linéaire $d\sigma^2$ et $\overline{R}_{ijkh}$ les quantités analogues pour l'élément linéaire dl^2. Soit de plus

$$dF = F_1\omega_1 + F_2\omega_2 + F_3\omega_3 = \overline{F}_1\varpi_1 + \overline{F}_2\varpi_2 + \overline{F}_3\varpi_3.$$

Un calcul sans difficulté montre que si l'on a

$$R_{ij} + \frac{U_{i,j}}{U} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3), \qquad \Delta U = 0,$$

on aura

$$\overline{R_{ij}} + 2\overline{\tau_i}\overline{\tau_j} = 0, \qquad \overline{\Delta}\tau = 0, \qquad \tau = \log U,$$

le symbole $\overline{\Delta}$ étant le symbole de Beltrami sur la métrique définie par l'élément linéaire dl^2 (1).

Ces formules permettent, toutes les fois que l'espace-temps admet un groupe d'isométrie, de réduire les équations de la gravitation à une forme plus simple.

En particulier, soit un espace-temps statique de cette sorte et qui, de plus, soit de la classe E_{pq}. On a, en négligeant le second ordre,

$$U = 1 + \varepsilon_{00}^1; \qquad (\varepsilon_{00} = \varepsilon_{00}^1 + \varepsilon_{00}^2 + \ldots) \qquad \tau = \log(1 + \varepsilon_{00}) = \varepsilon_{00}^1 + \ldots.$$

(1) Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. **196**, 1933, p. 1277, où M. Delsarte et moi nous donnons avec une notation différente cette transformation. Elle avait déjà été employée dans un cas particulier par M. Levi-Civitá, *ds^2 einsteiniani* (*Rendiconti Ac. Lincei*, 1917-1918).

Les équations de la gravitation se réduisent à

$$\overline{R}_{ij} = 0, \qquad \overline{\Delta}\varepsilon^1_{00} = 0,$$

lorsqu'on ne considère que les parties principales.

CHAPITRE IV.

ESPACE-TEMPS QUELCONQUES (1).

1. Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

Soient des espace-temps extérieurs dont l'élément linéaire est

$$[1 + \varepsilon_{00}(x^1, x^2, x^3)]\, dt^2 - \sum_1^3 [\delta^j_i + \varepsilon_{ij}(x^1, x^2, x^3)]\, dx^i dx^j, \qquad \delta^j_i = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Supposons-les de la classe E_{pq} et considérons la partie principale de ε_{00} et des ε_{ij}. Si ces quantités sont régulières partout et ne dépendent pas de t, le ds^2 est euclidien au second ordre près.

Ce théorème est, en somme, analogue à celui que nous avons démontré au début du chapitre précédent. Mais alors que nous considérions le ds^2 rigoureusement exact, ici nous n'en considérons plus qu'une approximation. Il est donc besoin d'une nouvelle démonstration.

Soient donc

$$R_{ij} + \frac{V_{i,j}}{V} = 0, \qquad \Delta V = 0 \tag{1}$$

les équations de la gravitation, cas extérieur. Par la transformation dont il a été question au dernier chapitre, elles peuvent s'écrire, en conservant les mêmes notations

$$\overline{R}_{ij} + 2\overline{\tau}_i\overline{\tau}_j = 0, \qquad \overline{\Delta}\tau = 0.$$

Or

$$V = 1 + \varepsilon_{00} = 1 + \varepsilon^1_{00} + \varepsilon^2_{00} + \ldots.$$

(1) Quelques-uns des résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus* (Cf. *C. R. Acad. Sc.*, **197**, 1933, p. 302).

Donc

$$\tau = \varepsilon_{00}^1 + \dots .$$

Si donc on néglige les quantités d'ordre supérieur au premier, les équations précédentes deviendront

$$(2) \qquad \overline{R}_{ij} = 0, \qquad \Delta\varepsilon_{00}^1 = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ε_{00}^1 étant nul à l'infini, restant borné en tout point et ayant son laplacien nul est constamment nul. Les quantités $\overline{R}_{ij}$ sont par ailleurs nulles au second ordre près. En vertu du dernier théorème du Chapitre I, la solution des équations (1) est donc donnée par un ds^2 euclidien au second ordre près. Le théorème est démontré.

Soit maintenant une famille d'espace-temps infiniment voisins de l'espace euclidien et dépendant effectivement des quatre variables. Supposons leur ds^2 de la classe E_{pq}. Supposons de plus que le ds^2 étant de la forme

$$ds^2 = (1 + \varepsilon_{00})\, dt^2 - \sum_1^3 (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dx^i dx^j, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases}$$

les parties principales des ε_{ij} ne puissent par aucun changement de variables être toutes annulées et soient toutes, au moins dans un certain système de coordonnées, indépendantes de t.

Les espace-temps de cette famille ne peuvent être réguliers partout.

En négligeant les quantités du second ordre, on a, en effet, un ds^2 statique. Or nous avons vu qu'un tel ds^2 régulier partout se réduisait à l'élément linéaire euclidien. Dans le cas actuel cette réduction est impossible. Il n'y a donc pas régularité partout.

2. Nous allons maintenant considérer d'autres groupes de conditions.

Tout d'abord, considérons des espace-temps extérieurs de la classe E_{pq} de métrique régulière non seulement au voisinage d'une section d'espace particulière, mais encore pour toutes les valeurs de t supérieures à un nombre donné, à zéro par exemple.

Supposons que le système des coordonnées ait pu être choisi de telle sorte que pour $t \geqq 0$ le ds^2 réduit à sa partie principale ait la forme

$$ds^2 = (1 + \varepsilon^1_{00})\, dt^2 - \sum_1^3 (\delta_{ij} + \varepsilon^1_{ij})\, dx^i\, dx^j,$$

les quantités ε^1_{00} et ε^1_{ij} satisfaisant non seulement aux conditions ordinaires mais en plus à la suivante : elles sont bornées dans tout l'espace-temps, supérieurement et inférieurement, par deux nombres et pour des valeurs fixes des variables d'espace, ce sont des fonctions presque périodiques de t (1). Dans ces conditions, leur moyenne, définie par la formule

$$\overline{f(x, y, z, t)} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x, y, z, \alpha)\, d\alpha = F(x, y, z),$$

définit en tout point (x, y, z) une fonction de ces trois variables continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Supposons que $\bar{\varepsilon}^1_{00}$ ne soit pas identiquement nul.

Effectuons la moyenne des parties principales des quantités

$$R^j_i + \frac{V_{i,}{}^j}{V} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Omega^j_i}{\partial t} - K\,\Omega^j_i, \qquad \sum_\alpha \Pi^\alpha_{i,\alpha}, \qquad 2\bar{R} - K^2 + H^2.$$

Les parties principales de ces quantités sont linéaires à coefficients indépendants de t par rapport aux ε_{ij}, ε_{00} et à leurs dérivées partielles des deux premiers ordres. Il est clair que si ces quantités sont nulles, ce qui est le cas puisqu'on a affaire à un espace-temps extérieur d'Einstein, leurs moyennes seront aussi nulles. Nous obtenons ainsi des équations qui se réduisent aux six équations du cas statique touchant le ds^2,

$$ds^2 = (1 + \bar{\varepsilon}^1_{00})\, dt^2 - \sum_1^3 (\delta_{ij} + \bar{\varepsilon}^1_{ij})\, dx^i\, dx^j.$$

---

(1) *Cf.* J. Favard, *Sur les fonctions harmoniques presque périodiques* (*Thèse*, 1927; Introduction, p. 3).

Dans un univers schématisé par un espace-temps du type étudié dans ce paragraphe, les valeurs des g_{ij} oscillent autour d'une valeur moyenne dans le temps, pour un choix convenable des systèmes de référence. Par analogie avec la mécanique classique on est conduit à penser qu'il en doit être ainsi dans le cas de n corps restant toujours à une distance finie les uns des autres sans qu'il y ait de chocs ou de phénomènes de résonance.

En particulier on a

$$\Delta \bar{\varepsilon}^{1}_{00} = 0.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur $\bar{\varepsilon}^{1}_{00}$ cette quantité ne peut être régulière partout. D'où le théorème suivant :

Un espace-temps extérieur d'Einstein satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus ne peut être régulier partout.

3. Soit maintenant un continuum (r, θ, φ, t), où les variables sont soumises aux inégalités suivantes :

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \qquad r - t \geqq 0, \qquad r > 0.$$

Douons ce continuum d'une métrique partout régulière de la classe E_{pq} et que par un choix judicieux du système des coordonnées on puisse décrire au moyen de l'élément linéaire

$$ds^2 = (1 + \varepsilon_{00})\, dt^2 - \sum_{1}^{3} (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})\, dx^i\, dx^j$$

$$(x^1 = r \cos\theta \cos\varphi,\ x^2 = r \cos\theta \sin\varphi,\ x^3 = r \sin\theta).$$

Ne considérant la métrique précédente que dans son domaine à l'infini, posons

$$\varepsilon_{ij} = \frac{a_{ij}}{r} + \frac{b_{ij}}{r^2} + \ldots.$$

Faisons maintenant l'hypothèse suivante :

La métrique proposée est un espace-temps extérieur d'Einstein ; les quantités a_{ij} et b_{ij} sont telles que les quantités

$$\frac{1}{T}\int_0^T a_{ij}\, dt, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T b_{ij}\, dt,$$

pour $T > t_0$, t_0 étant un nombre donné, sont des fonctions non croissantes de t. Je dis que l'on a, dans ces conditions,

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} = 0.$$

Faisons tout d'abord une remarque. Soit

$$V^2(x^1, x^2, x^3, t)\, dt^2 - \sum_{1}^{3} g_{ij}(x^1, x^2, x^3, t)\, dx^i\, dx^j,$$

un espace-temps extérieur d'Einstein. Il est manifeste que le ds^2 suivant, où λ est une constante

$$V^2(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3, t)\, dt^2 - \lambda^2 \sum_1^3 g_{ij}(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3, t)\, dx^i\, dx^j,$$

satisfait aux mêmes équations de la gravitation. De même encore

$$\frac{V^2(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3, t)}{\lambda^2}\, dt^2 - \sum_1^3 g_{ij}(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x_2, t)\, dx^i\, dx^j.$$

Du ds^2 proposé, on déduit ainsi une famille à un paramètre d'espace-temps de même nature, au moins dans le domaine à l'infini, λ variant de 1 à l'infini. Si la variété proposée est de la classe E_{pq}, les variétés en λ seront au moins dans le domaine à l'infini de la même classe.

Pour les variétés d'une telle famille, les équations de la gravitation pour le cas extérieur sont :

$$\lambda = \frac{1}{\alpha},$$

$$\overline{R}_i^j + \frac{V_{i,}{}^j}{V} - \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{V}\frac{\partial \Omega_i^j}{\partial t} + K\Omega_i^j\right] = 0,$$

$$2\overline{R} - \alpha^2(K^2 - H^2) = 0, \qquad \sum_j H_{i.j}^j = 0.$$

On voit, par la forme même de ces équations, que si l'on développe, dans le domaine à l'infini, les quantités $\overline{R}_i^j + \frac{V_{i,}{}^j}{V}$ et $\frac{1}{V}\frac{\partial \Omega_i^j}{\partial t} + K\Omega_i^j$ par rapport à α, les termes en α et α^2 dans $\frac{1}{V}\frac{\partial \Omega_i^j}{\partial t} + K\Omega_i^j$ doivent être identiquement nuls. D'où

$$\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 b_{ij}}{\partial t^2} = 0,$$

et par suite des hypothèses que nous avons faites

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} = 0.$$

Supposons maintenant qu'en posant

$$\varepsilon_{ij} = \frac{a_{ij}}{r} + \frac{b_{ij}}{r^2} + \frac{c_{ij}}{r^3} + \dots.$$

la quantité c_{ij} soit soumise aux mêmes conditions que les a_{ij} et b_{ij}. Posons de plus :

$$V = 1 + \frac{k+h}{r} + \ldots, \qquad \frac{\partial k}{\partial t} = 0,$$

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h\, dt = 0, \qquad \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^m h}{\partial \vartheta^i \partial \varphi^j} dt = 0 \qquad (m = i + j = 1, 2),$$

la convergence étant uniforme. Posons enfin

$$\overline{R}_i^j = \alpha \rho_i^j + \ldots,$$

et soit θ_{ij} dans le terme ρ_i^j le coefficient de $\frac{1}{r^3}$. Les équations de la gravitation donneront dans le domaine à l'infini

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \theta_{11} + 2k &&= -2h &&+ \frac{\partial^2 c_{11}}{\partial t^2},\\
\Theta_{22} &= \theta_{22} + \frac{\partial^2 k}{\partial \vartheta^2} - k &&= -\frac{\partial^2 h}{\partial \vartheta^2} + h &&+ \frac{\partial^2 c_{22}}{\partial t^2},\\
\Theta_{33} &= \theta_{33} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 k}{\partial \varphi^2} - \operatorname{tang}\theta \frac{\partial k}{\partial \theta} - k &&= -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \operatorname{tang}\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} + h &&+ \frac{\partial^2 c_{33}}{\partial t^2},\\
\Theta_{12} &= \theta_{12} - 2\frac{\partial k}{\partial \vartheta} &&= 2\frac{\partial h}{\partial \vartheta} &&+ \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial t^2},\\
\Theta_{13} &= \theta_{13} - \frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial k}{\partial \varphi} &&= \frac{2}{\cos^2\theta}\frac{\partial h}{\partial \varphi} &&+ \frac{\partial^2 c_{13}}{\partial t^2},\\
\Theta_{23} &= \theta_{23} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 k}{\partial \theta\, \partial \varphi} + \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial k}{\partial \varphi} &&= -\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 h}{\partial \vartheta\, \partial \varphi} - \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial h}{\partial \varphi} &&+ \frac{\partial^2 c_{23}}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Les quantités a_{ij}, b_{ij} et k étant indépendantes de t, il vient

$$\lim_{T \succ \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Theta_{ij}\, dt = \Theta_{ij} = \lim \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial t^2} + \ldots \right) dt = 0.$$

D'où l'on tire

$$\Theta_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Supposons $h = 0$. Il vient

$$\frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial t^2} = 0,$$

et les c_{ij} sont eux aussi indépendants du temps. On constate aisément que, dans ce cas, en négligeant les termes en $\frac{1}{r^m}$ $(m > 1)$ le ds^2, dans le domaine à l'infini, est un ds^2 de Schwarzschild.

Supposons maintenant qu'on ait (au moins dans le domaine à l'infini) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

En continuant de proche en proche le raisonnement précédent on verra que si toutes les quantités $a_{ij}.m$ dans le développement de

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{ij.m}}{r^m},$$

sont soumises aux mêmes conditions que les quantités a_{ij} et b_{ij} il est possible d'énoncer le théorème suivant :

Si l'on a

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

et si toutes les quantités $a_{ij.m}$ sont soumises aux mêmes conditions que les a_{ij} précédemment, le ds^2, au moins dans le domaine à l'infini, est statique.

Mais si la métrique est régulière partout et au moins d'ordre un, *un ds^2 statique ne peut être prolongé que par un ds^2 de même nature.*

Pour démontrer cette proposition, appliquons la méthode d'intégration des équations d'Einstein décrite au Chapitre II. Les données initiales seront supposées connues sur une hypersurface à trois dimensions engendrée par des lignes de temps. On distinguera les deux faces de cette variété par les indices 1 et 2. Supposons que la face 1 appartienne à un espace-temps statique régulier en tous ses points, dans un certain domaine D comprenant cette variété. Je dis que cet espace-temps ne peut être prolongé au delà de la face 2 par un espace-temps extérieur qu'à condition que cet espace-temps soit statique.

Les données initiales sont les mêmes pour les deux faces de la variété car le prolongement suppose la continuité des dérivées premières. L'espace-temps limité par la face 1 aura un élément linéaire qui s'écrira

$$-dx^2 + V^2 dt^2 - \sum_{2}^{3} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad \begin{pmatrix} x^2 = y \\ x^3 = z \end{pmatrix},$$

Celui de l'espace-temps limité par la face 2 s'écrira

$$- dx^2 + V^2 dt^2 - 2 g_{02} dt\, dy - 2 g_{03} dt\, dz - \sum_{2}^{3} g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Les fonctions g_{ij}, g_{0i} et V sont indépendantes de t d'un côté et de l'autre car, par hypothèse, les conditions initiales restant invariantes par le groupe

$$t' = t + h,$$

les solutions admettront ce même groupe.

Je dis, de plus, qu'on a

$$g_{02} = g_{03} = 0.$$

En effet du côté 1 cette relation est assurée. Or on ne peut avoir pour ces quantités deux développements différents par rapport à la variable d'intégration x, les données initiales n'étant pas portées, il est à peine besoin de le remarquer, par une variété caractéristique.

4. Nous proposons pour clore ce chapitre, un autre genre de conditions restrictives. Celles-ci ne font plus, comme les précédentes, intervenir une épaisseur infinie de temps.

Elles supposent qu'un espace-temps de la classe E_{pq} a pu être rapporté à des coordonnées d'un type spécial, caractérisé par le fait que sur les sections d'espace la quantité K, définie plus haut

$$K = \sum_{1}^{3} \Omega_i^i$$

est nulle identiquement. Si l'on vérifie que l'on a alors

$$\sum_{1}^{3} \Gamma_{0i}^{i} = 0,$$

on voit que ce fait peut s'interpréter en disant que l'espace-temps est rapporté à des familles d'hypersurfaces extrémales à trois dimensions et à leurs trajectoires orthogonales. Supposons qu'avec ce système de coordonnées, l'élément linéaire s'écrive

$$ds^2 = V^2\, dt^2 - \sum_1^3 g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

L'espace-temps étant de la classe E_{pq}, écrivons les équations de la gravitation. Dans ce cas particulier, elles prennent la forme simple

$$R_i^j + \frac{V_{i,}{}^j}{V} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Omega_i^j}{\partial t} = 0,$$

$$\sum_\alpha \Omega_{i,\alpha}^\alpha = 0, \qquad 2R + H^2 = 0.$$

Considérons alors l'intégrale

$$\int\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma = \iiint \Delta V\, d\tau = \iiint VH^2\, d\tau$$

étendue à des surfaces $r = \text{const.}$ Le ds^2 d'espace pourra être ramené à la forme

$$ds^2 \sim dr^2 + r^2\, d\varpi^2.$$

Lorsque r croît indéfiniment, cette intégrale croît en restant essentiellement positive. On doit donc avoir

$$\varepsilon_{00} = \frac{k}{r} + \ldots,$$

la quantité k ne pouvant s'annuler identiquement.

Approchons maintenant la solution rigoureuse en lui substituant sa partie principale. Soit $V = 1 + \varepsilon_{00}$; on voit que l'on a, en posant $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{00}^1 + \varepsilon_{00}^2 + \ldots$,

$$\Delta \varepsilon_{00}^1 = 0.$$

Il en résulte que si dans le domaine à l'infini ε_{00}^1 n'est pas identiquement nul, il admet dans l'espace-temps proposé des singularités.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si la partie principale de $V^2 - 1$ n'est pas identiquement nulle dans le domaine à l'infini, il n'y a pas de solution régulière, partout des équations d'Einstein extérieures.

Si au contraire ε_{00} est d'un ordre infinitésimal supérieur au premier, on ne peut rien dire en se contentant d'une épaisseur finie de temps.

CHAPITRE V.

NATURE DES SINGULARITÉS MATÉRIELLES.

1. Nous venons de passer en revue un certain nombre de groupes de conditions qui, adjointes aux conditions locales que constituent les équations de la gravitation d'Einstein, déterminent les solutions de ces équations de telle sorte qu'elles ne peuvent être partout régulières sans se réduire à l'espace euclidien.

Dans ce dernier chapitre nous ferons choix du seul groupe de conditions supplémentaires qui permettent effectivement de former une solution du problème des conditions initiales. Comme nous l'avons déjà dit, nous supposerons que les parties principales des ε_{ij} et de $V - 1$ sont indépendantes de t.

Ces conditions posées, pour pouvoir déterminer les solutions, il est nécessaire de les astreindre à ne présenter que des singularités d'une nature déterminée.

Il nous faut donc maintenant adjoindre aux conditions mentionnées plus haut *d'autres conditions touchant la nature des singularités et de telle façon qu'elles permettent de construire d'une manière et d'une seule la métrique de l'espace initial.*

La détermination de cette métrique n'est d'ailleurs que la première partie de la résolution du problème des conditions initiales. Il reste ensuite à déterminer les quantités Ω_i^j qui définissent les $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$, éléments initiaux du premier ordre, alors que la métrique initiale d'espace peut être appelée élément initial d'ordre zéro.

Tout d'abord énonçons la condition restrictive touchant la nature des singularités acceptables. Dans le cas d'un seul corps à symétrie sphérique, la solution unique est le ds^2 de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\varphi^2).$$

On a là un exemple de la singularité cherchée. Celle-ci est double :

d'une part sur la sphère $r = a$ l'inverse du déterminant : $\| g_{ij} \|$ s'annule ainsi que V et si l'on traverse cette surface le ds^2 d'espace change de caractère devenant à l'intérieur d'un type de Minkowski

$$ds^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2.$$

D'autre part au point $r = 0$ se trouve une autre singularité d'un intérêt moindre et au sujet de laquelle nous ne ferons aucune remarque.

Appelons *singularité de Schwarzschild* une singularité analogue à la précédente et caractérisée par les deux conditions suivantes :

1° *Les points singuliers sont ceux d'une surface fermée homéomorphe à une sphère, ainsi qu'un certain nombre d'autres points formant tout au plus une suite dénombrable à son intérieur.*

2° *Lorsqu'on traverse la surface singulière, le ds^2 d'espace change de caractère de la même façon que celui de Schwarzschild.*

Ces deux conditions sont comprises dans la suivante, un peu plus restrictive mais que néanmoins nous adopterons.

La métrique d'espace, dans un domaine contenant entièrement à son intérieur la singularité proposée, aura l'expression suivante :

$$ds^2 = \mathrm{H}^4(r, \theta, \varphi) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2(d\theta^2 + \cos\theta^2 d\varphi^2) \right]$$

pour un choix judicieux des coordonnées, H étant une fonction de point régulière dans ce domaine.

Cherchons tout d'abord une solution telle que la courbure scalaire de la section d'espace initiale soit nulle.

Dans ces conditions il existe une solution et une seule de la première partie du problème des conditions initiales.

Remarquons d'abord que, dans le voisinage précédemment défini, on peut écrire le ds^2 par un changement de variables sous la forme

$$\mathrm{H}_1^4(\rho, \theta, \varphi)(d\rho^2 + \rho^2 d\varpi^2)$$

le changement de variable est

$$r = \frac{(\rho + a)^2}{4\rho}.$$

Sous cette dernière forme donnée à l'élément linéaire il est aisé de voir que la condition pour que la courbure scalaire soit nulle est

$$\Delta H_1 = 0,$$

H_1 est donc une fonction harmoniqne dans l'espace euclidien à trois dimensions. La section d'espace étant à comportement asymptotique euclidien, H_1 doit tendre vers une constante à l'infini; soit 1 cette constante. H_1 ne devant avoir qu'un ensemble au plus dénombrable de singularités ponctuelles, il faut poser

$$H_1 = 1 + \sum \frac{m_i}{r_i},$$

$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ étant les distances d'un point variable à une suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ et $m_1, m_2, \ldots$ des masses attribuées à chacun de ces points.

Nous allons maintenant grouper ces points P_i de façon que notre métrique présente n singularités de Schwarzschild.

Soient tout d'abord, dans l'espace euclidien ordinaire à trois dimensions, n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que nous appellerons points de base. A chacun de ces n points, nous attacherons des poids $M_1, M_2, \ldots, M_n$ tous positifs.

Soient $C_1, C_2, \ldots$ des sphères de centres $A_1, A_2, \ldots$, extérieures les unes aux autres et ayant respectivement pour rayons les poids attachés à leurs centres. Appelons image d'un point P de l'espace par rapport à la sphère C_i le point P' situé sur la droite A_iP et défini par la relation

$$\overline{A_iP} \times \overline{A_iP'} = M_i^2.$$

Nous pouvons dire que nous faisons une transformation par réflexion.

Considérons alors l'ensemble des points de base et l'ensemble de leurs images. C'est un ensemble dénombrable. En effet, il y a n sphères et l'image du centre d'une sphère par rapport à cette sphère étant rejeté à l'infini ne sera pas compté. Une première réflexion donne donc $n(n-1)$ nouveaux points. Après deux réflexions il s'en ajoute aux précédents $n(n-1)^2$. D'une manière générale, la $p^{\text{ième}}$ réflexion donne $n(n-1)^p$ nouveaux points.

Il est manifeste qu'un point P qui est l'image d'un point A après q réflexions ne peut être l'image d'un autre point de base ni l'image de A_i après un nombre différent de réflexions. Celà découle de ce qu'on ne peut remonter de P à A_i, que d'une manière et d'une seule, A_i n'étant évidemment l'image que du point à l'infini.

Attachons maintenant des poids à chacun des points-images au moyen de la règle suivante :

Soit Q l'image d'un point P. Soit d la distance du point P au centre A_i de la sphère C_i, par rapport à laquelle se fait la réflexion. Le poids m' attaché à Q sera défini par la relation

$$m' = m.\frac{M_i}{d}.$$

Par l'application de cette règle on voit que chaque image sera pourvue d'un poids et d'un seul.

Soit maintenant M un point quelconque de l'espace, à une distance supérieure à un nombre positif de chacun des points de base et de leurs images successives. Soient $A_{ipqr...}$ ces points, les indices indiquant le premier le point de base initial, les suivants les réflexions successives, l'indice p signifiant qu'il y a eu réflexion sur la sphère C_p. Soit $\rho_{ipqr...}$ la distance euclidienne de M au point $A_{ipqr...}$. Soit enfin $M_{ipqr...}$ la masse attachée par la règle énoncée à l'instant au point $A_{ipqr...}$.

Considérons la quantité

$$S = \sum_1^\infty \frac{M_{ipqr...}}{\rho_{ipqr...}}.$$

Je dis que pourvu que les distances mutuelles des différents points de base soient suffisamment grandes cette série est convergente. Il suffit pour cela, la série étant à termes positifs, de prouver que la série

$$\sum M_{ipqr...}$$

est convergente.

Les points images sont tous à l'intérieur des sphères C_i qui sont supposées ne point empiéter les unes sur les autres. Soit δ le minimum de la distance d'un point-image (ou d'un point de base) aux centres des sphères autres que celle contenant ce point. Soit, de plus, M le maximum des poids M_i attachés aux points de base.

Supposons les termes de notre série groupés de manière que le nombre des indices aille toujours en croissant. Les poids attachés à des points engendrés par p réflexions auront pour borne supérieure

$$n(n-1)^p \frac{M^{p+1}}{\delta^p}.$$

La série précédente convergera si la série majorante

$$M \sum_{p} n \left[\frac{(n-1)M}{\delta} \right]^{p}$$

converge. Cela aura lieu si

$$\delta > (n-1)M.$$

Cette condition sera remplie dès que les distances mutuelles des sphères C_i seront suffisamment grandes. La série S convergeant absolument, on pourra d'ailleurs y intervertir l'ordre des termes.

Considérons maintenant l'expression

$$H_1 = 1 + S,$$

et le ds^2 suivant

$$H_1^4 (d\rho^2 + \rho^2 \, d\varpi^2).$$

La métrique définie par cet élément linéaire aura une courbure scalaire nulle.

Considérons maintenant un point de base, soit A_i. Écrivons la série précédente en faisant suivre chaque terme relatif à un point intérieur à C_i du terme relatif au point dont il est l'image. La série pourra s'écrire dans ces conditions, P′ étant l'image de P par rapport à C_i,

$$S = \frac{M_i}{\rho_{A_i}} + \Sigma_P \left(\frac{M_P}{\rho_P} + \frac{M_{P'}}{\rho_{P'}} \right).$$

Posons

$$A_i P = \beta, \qquad A_i P' = \frac{M_i^2}{\beta}, \qquad M_{P'} = M_P \frac{M_i}{\beta},$$

$$\rho_P^2 = \beta^2 + \rho^2 - 2\rho\beta \cos l,$$

$$\rho_{P'}^2 = \frac{M_i^4}{\beta^2} + \rho^2 - 2\rho \frac{M_i^2}{\beta} \cos l = \frac{1}{\beta^2} (M_i^4 + \beta^2 \rho^2 - 2\rho M_i^2 \beta \cos l).$$

On a les relations

$$\rho_P\left(\frac{M_i^2}{\rho'}\right)=\frac{\beta}{\rho'}\rho_{P'}(\rho'),$$
$$\rho_{P'}\left(\frac{M_i^2}{\rho'}\right)=\frac{M_i^2}{\rho'\beta}\rho_P(\rho').$$

Faisons alors la transformation : $\rho\rho'=M_i^2$. Il vient :

$$\begin{aligned}S&=\sum\left(\frac{M_P}{\rho_P}+\frac{M_{P'}}{\rho_{P'}}\right)\\&=\sum\left[\frac{M_P}{\rho_{P'}(\rho')}\frac{\rho'\beta}{M_i^2}+\frac{M_{P'}}{\rho_P(\rho')}\frac{\rho'}{\beta}\right]\\&=\frac{\rho'}{M_i}\sum\left[\frac{M_P}{\rho_P(\rho')}+\frac{M_{P'}}{\rho_{P'}(\rho')}\right].\end{aligned}$$

D'où la formule fondamentale

$$1+S(\rho)=\frac{\rho}{M_i}[1+S(\rho')].$$

Or dans le voisinage du point A le ds^2 peut s'écrire

$$ds^2=(1+S)^4[d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\cos^2\theta\,d\varphi^2)].$$

On voit qu'il est invariant par la substitution

$$\left(\rho\,\middle|\,\frac{M_i^2}{\rho}\right).$$

L'espace défini par la métrique précédente et intérieur à la sphère C_i est donc applicable en tous les points distincts des points images sur l'espace extérieur à cette même sphère.

Soit

$$r=\frac{(\rho+M_i)^2}{4\rho}.$$

A toute valeur de $r>M_i$, correspondent deux valeurs de ρ définissant deux points homologues de cette application. Considérons la relation précédente comme un changement de variables. Par cette transformation, on a, comme il est facile de vérifier,

$$ds^2=H^4(r,\theta,\varphi)\left[\frac{dr^2}{1-\frac{M_1}{r}}+r^2d\varpi^2\right].$$

De la propriété d'applicabilité dont il vient d'être question on tire aisément pour H la propriété de ne contenir aucun radical. *La métrique précédente sera donc encore déterminée et réelle pour des valeurs de r plus petites que* M_i. Elle est bien au voisinage de A_i de la forme demandée.

Il n'y a pas d'autre solution au problème. Soient en effet les mêmes points de bases. Adjoignons-leur les mêmes sphères et cherchons à déterminer un autre ds^2 admettant sur ces sphères des singularités de Schwarzschild. Nous l'avons vu, la courbure scalaire de l'espace devant être nulle ces ds^2 sont de la forme

$$ds^2 = K^4(\rho, \theta, \varphi)[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2)].$$

Les points singuliers autres que ceux des surfaces C_i étant seulement une infinité dénombrable on doit avoir pour $K = 1 + \sum \frac{m_i}{\rho_i}$.

La transformation

$$r = \frac{(\rho + M_i)^2}{4\rho}$$

changera ce ds^2, dans le voisinage de A_i, en le suivant :

$$K_1^4(r, \sqrt{r - 2M_i}, \theta, \varphi)\left[\frac{ds^2}{1 - \frac{M_1^2}{r}} + r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2)\right].$$

Mais on constate que si K n'est pas tel qu'il y ait applicabilité comme ci-dessus il contiendra r sous des radicaux et ne sera plus réel pour des valeurs de r plus petites que M_i. Pour qu'il y ait applicabilité il faut que K se réduise à une fonction identique à H. Elle est, en effet, déterminée complètement par les points images des points de base.

2. Nous allons maintenant résoudre, en première approximation, la seconde partie du problème des conditions initiales. Dans sa généralité, elle s'énonce ainsi : trouver des solutions des équations

$$\sum_\alpha H^\alpha_{i.\alpha} = 0, \qquad 2\overline{R} - K^2 + H^2 = 0,$$

qui soient au moins du second ordre par rapport aux masses et qui s'annulent à l'infini. La principale difficulté à surmonter est celle-ci : il faut former des conditions qui portant sur les Ω_i^j à un instant t soient encore vérifiées par les Ω_i^j à un instant $t+h$. Le fait d'être au moins du second ordre par rapport aux masses est bien une condition de ce genre. Mais elle ne suffit pas pour déterminer entièrement le problème.

Nous allons exposer une méthode permettant de définir, en première approximation, les quantités Ω_i^j. Cette méthode est imparfaite car elle ne les définit pas par une condition jouissant de la propriété que nous venons d'énoncer. Elle présente au moins l'avantage de fournir, en première approximation, l'image d'une évolution relativiste concernant le problème des n corps et se prêtant aisément au calcul.

Partons de la remarque suivante, le ds^2 de l'espace initial étant de la forme

$$ds^2 \sim dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

les équations du problème des conditions initiales sont, au troisième ordre près,

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Pi_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La condition

$$2\overline{R} - K^2 + H^2 = 0$$

n'intervient pas car elle porte, étant donné nos hypothèses, sur des quantités du quatrième ordre au moins.

Posons

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x_j}, \qquad \Delta W = 0.$$

Les équations sont satisfaites localement. Déterminons W par la double condition de s'annuler à l'infini et de fournir, pour $\frac{dW}{dn}$ sur les surfaces C_i des singularités de Schwarzschild, des valeurs déterminées. W est la solution d'un problème de Neumann et l'on sait en former l'expression. Les valeurs aux limites de $\frac{dW}{dn}$ étant données, la solution est unique.

Soit L une ligne de longueur l. Supposons les coordonnées choisies de telle sorte qu'on ait pour équations de cette ligne

$$x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

Il est manifeste qu'on aura pour partie principale de $\frac{dl}{dt}$ l'expression

$$\frac{dl}{dt} = \int_{L} \Omega_{11}\, dx_1.$$

Considérons, en particulier, le cas de la symétrie axiale avec deux singularités matérielles. Soit pour le ds^2 d'espace

$$ds^2 \sim dr^2 + dz^2 + r^2\, d\varphi^2 \qquad (z = x_1,\ r = x_2,\ \varphi = x_3)$$

et considérons les lignes L suivantes :

$$r = \text{const.}, \qquad \varphi = \text{const.}$$

On aura le long de ces lignes

$$\frac{dl}{dt} = \int_{L} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\, dz = \left[\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{z_0}^{z_1}.$$

La variation de $\frac{dW}{dz}$ sur les portions de lignes L comprises entre les deux surfaces singulières et dans le domaine extérieur aux domaines singuliers est connue par hypothèse. Elle fournit une première approximation de la vitesse relative des deux corps.

Nous allons indiquer un autre genre de conditions n'ayant pas le désavantage du précédent. Elles permettent encore de construire la partie principale des Ω_{ij}, mais sont moins commodes dans les applications.

Nous avons montré que le ds^2

$$ds^2 = (1 + S)^4\, (d\rho^2 + \rho^2\, d\varpi^2)$$

admet un groupe d'automorphie. Cette propriété est une conséquence de ce que la fonction

$$H = 1 + S$$

satisfait à la relation

$$H(\rho) = \frac{\rho'}{M_i}\, H(\rho') \qquad (\rho\rho' = M_i^2).$$

3. Il est facile de former d'autres fonctions satisfaisant à la même relation. Considérons, en effet, les mêmes points de base, mais donnons à leurs images successives des poids déterminés par la loi

suivante :

$$M_{P'} = M_P \frac{M_i^m}{\beta^m},$$

et considérons, les notations demeurant les mêmes que précédemment,

$$H_m = 1 + \frac{M_i^m}{\rho^m} + \sum_P \left(\frac{M_P^{(m)}}{\rho_P^m} + \frac{M_{P'}^{(m)}}{\rho_{P'}^m} \right).$$

Un calcul aisé montre que l'on a

$$H_m(\rho) = \left(\frac{\rho'}{M_i} \right)^m H_m(\rho').$$

La fonction

$$\mathcal{H} = \frac{H_m}{H_{m-1}}$$

possédera la propriété demandée, et

$$ds^2 = \mathcal{H}^4 (d\rho + \rho^2 d\varpi^2)$$

sera un ds^2 pouvant servir à la construction des conditions initiales. Pour ce qui est de sa courbure scalaire, les M_i étant les paramètres infiniment petits, seule sa partie principale, comme on le constate immédiatement, est nulle.

Considérons maintenant un tenseur symétrique à deux indices Λ_{ij}. Il est bien naturel d'appeler ce tenseur automorphe si la forme quadratique

$$\sum \Lambda_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

se reproduit par les transformations

$$\rho\rho' = M_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

du groupe d'automorphie.

Supposons que nous ayons pu construire un tenseur Λ_{ij} automorphe. S'il satisfait, en outre, aux quatre dernières équations de la gravitation, on aura là une solution du problème des conditions initiales, qui, jointes à la condition $V = 1$, permettra de construire un espace-temps invariant par un certain groupe d'automorphie que l'on construit aisément à l'aide du précédent.

Ces remarques nous amèneraient à penser qu'il serait possible de choisir comme conditions complémentaires pour les Ω_i^j des conditions d'automorphie qui doteraient ces tenseurs de propriétés invariantes dans le temps.

On sait construire des tenseurs automorphes dans la métrique définie par un ds^2 tel que les précédents. Il suffit de considérer une forme quadratique

$$K^4(d\rho^2 + \rho^2 d\varpi^2),$$

où la fonction K jouisse de la même propriété que la fonction $\mathcal{H}$. Posons alors

$$K^4(d\rho^2 + \rho^2 d\varpi^2) \equiv \sum \Lambda_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

Λ_{ij} est un tenseur qui répond à la question.

Existe-t-il des tenseurs tels que Λ_{ij} et satisfaisant dans l'espace des conditions initiales aux quatre dernières équations de la gravitation? Il nous est encore impossible de répondre à cette question, hors le cas du tenseur $\Lambda_{ij} = 0$, manifestement automorphe et qui engendre si $5\,R = 0$ pour $t = 0$, un espace-temps rigoureusement automorphe, à vitesses initiales stationnaires.

Du moins il est possible de construire un tenseur dont la partie principale soit automorphe et satisfasse, aux quantités d'ordre supérieur près, aux équations du problème des conditions initiales.

Soit

$$da^2 = \sum a_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

A partir des quantités a_{ij}, on sait construire une forme

$$dA^2 = \sum A_{ji}\, dx^i\, dx^j$$

covariante de la précédente. Il n'y a qu'à appliquer aux a_{ij} les procédés de calcul par lesquels on passe des quantités g_{ij} aux G_{ij} définis dans le Chapitre II. Ces derniers tenseurs seront aussi automorphes si les premiers le sont. Les M_i étant les paramètres infiniment petits, écrivons alors les équations de conservation en ne retenant que les parties principales. Soit $\overline{A}_{ij}$ la partie principale de A_{ij} et supposons qu'on puisse écrire la forme quadratique dont nous sommes partis sous la forme

$$da^2 = h^4(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Il vient, avec ce choix des coordonnées, en première approximation

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \overline{A}_{i\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z).$$

Les $\overline{A}_{ij}$ pourront donc être pris pour partie principale des Π_{ij}.

Des solutions comme celle-ci ont peut-être une plus grande perfection, au point de vue mathématique, que celle que nous avons indiquée auparavant. Mais on se rend compte qu'elles se prêtent beaucoup moins bien aux applications. De plus, il est vraiment très difficile de former les approximations suivantes et même de formuler à leur sujet des théorèmes d'existence.

CONCLUSION.

Les deux faits mathématiques principaux qui se dégagent de notre étude sont les suivants :

Les espace-temps considérés étant de la classe E_{pq} comme il a été défini, d'une part les espace-temps extérieurs statiques ne peuvent être partout réguliers sans se réduire à l'espace-temps euclidien. D'autre part, lorsqu'on ne se restreint pas à la considération des espace-temps statiques, il existe des variétés de la classe E_{pq}, régulières partout et non identiques à l'espace euclidien dont la métrique satisfait aux équations d'Einstein pour le cas extérieur.

Ce dernier type d'espace-temps, celui où les quantités g_{ij} et V dépendent effectivement des quatre variables, est au fond le seul qui soit à considérer dans un problème comme celui des n corps. Si l'on veut donc assigner comme cause unique aux effets gravitationnels la présence de masses — ou de singularités du champ extérieur — il faudra ajouter aux conditions assujettissant la variété à être de la classe E_{pq} un certain nombre d'autres restrictions. Nous en avons énoncé quelques-unes au Chapitre IV et les avons rangées en groupes. Le premier ne fait intervenir que les parties principales et nous avons vu, par les résultats du Chapitre V, que ce sont les seules qui permettent d'aborder pratiquement le problème des conditions initiales.

En étudiant plus spécialement les espace-temps définis par ces conditions nous avons vu qu'on pouvait, rigoureusement pour la section d'espace initiale et au troisième ordre près pour les Ω_i^j, résoudre le problème des conditions initiales et calculer les premières approximations d'une évolution relativiste d'un problème de Mécanique céleste.

Cette solution est malheureusement imparfaite et il doit être possible d'énoncer des conditions générales touchant les Ω_i^j et ne prêtant pas le flanc aux critiques que nous avons signalées. Il nous semble même que c'est sur ce point précis que des progrès seraient le plus à souhaiter dans la théorie de la Relativité, au moins en ce qui concerne son application à la Mécanique céleste.

Vu et approuvé :

Paris, le 12 mai 1934.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 12 mai 1934.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.