CHARLES EHRESMANN

Sur la topologie de certains espaces homogènes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__162__391_0>

A mon camarade Lautman

C. Ehresmann

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. CHARLES EHRESMANN

1re THÈSE — **SUR LA TOPOLOGIE DE CERTAINS ESPACES HOMOGÈNES**

2e THÈSE — **ÉTUDE DES POTENTIELS**

SOUTENUES LE   JUILLET 1934 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN :

MM. CARTAN, PRÉSIDENT

JULIA
GARNIER } EXAMINATEURS

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire ..... M. MOLLIARD.

Doyen .... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraires

H. LE CHATELIER.	Léon BRILLOUIN.
H. LEBESGUE.	GOURSAT.
A. FERNBACH.	WALLERANT.
A. LEDUC.	GUILLET.
Émile PICARD.	PECHARD.
Rémy PERRIER.	FREUNDLER.

PROFESSEURS

P. JANET ....Électrotechnique générale.
G. BERTRAND ......Chimie biologique.
Mme P. CURIE .....Physique générale.
M. CAULLERY .....Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN ....Chimie générale.
Émile BOREL ......Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS ..... .Aviation.
Jean PERRIN ......Chimie physique.
H. ABRAHAM ......Physique.
E. CARTAN ....Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD ......Physiologie végétale.
L. LAPICQUE ....Physiologie générale.
E. VESSIOT ....Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. COTTON ....Physique.
J. DRACH ....Analyse supérieure.
Charles FABRY .....Physique.
Charles PÉREZ .....Zoologie.
Léon BERTRAND ....Géologie structurale et géologie appliquée.
É. BLAISE .. ..Chimie organique.
R. LESPIEAU ......Théories chimiques.
P. PORTIER .. ..Physiologie comparée.
E. RABAUD ....Biologie expérimentale.
P.-A. DANGEARD ....Botanique.
V. AUGER ....Chimie appliquée.
M. GUICHARD .....Chimie minérale.
Paul MONTEL .....Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT ....Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM ...Botanique.
O. DUBOSCQ ....Biologie maritime.
G. JULIA ....Mécanique analytique.
C. MAUGUIN ......Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY...Pétrographie.
H. BÉNARD ....Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY ....Calcul différentiel et calcul intégral.
L. LUTAUD ....Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH ....Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT ....Physique.
E. DARMOIS ....Physique.
A. DEBIERNE ......Radioactivité.
A. DUFOUR ....Physique (P. C. N.).
L. DUNOYER ......Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND..Botanique (P. C. N.).
M. JAVILLIER ......Chimie biologique.
L. JOLEAUD ....Paléontologie.
ROBERT-LÉVY ......Zoologie.
H. MOUTON ....Chimie physique.
F. PICARD ....Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT ......Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB ....Géologie.
P. PASCAL ....Chimie minérale.
M. FRÉCHET ....Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON .....Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS Chimie organique.
H. BÉGHIN ....Mécanique physique et expérimentale.
FOCH ....Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER ......Physique (P. C. N.).
De BROGLIE ....Théories physiques.
CHRÉTIEN ....Optique appliquée.
P. JOB ....Chimie générale.
LABROUSTE ....Physique du Globe.
PRENANT ....Zoologie.
VILLEY ....Mécanique physique et expérimentale.
BOHN ....Zoologie (P. C. N.).
COMBES ....Sciences naturelles (P. C. N.).
GARNIER ....Mécanique rationnelle.
PÉRÉS ....Mécanique des fluides.
HACKSPILL ....Chimie (P. C. N.).
LAUGIER ....Physiologie générale.
TOUSSAINT ....Technique Aéronautique.
M. CURIE ....Physique (P. C. N.).
G. RIBAUD ....Hautes températures.
M. CHAZY ....Mathématiques.
M. GAULT ....Chimie (P. C. N.).
M. CROZE ....Physique.
DUPONT ....Chimie (P. C. N.)

Sécrétaire ....A. PACAUD
Sécrétaire Honoraire ....D. TOMBECK

A

MONSIEUR ÉLIE CARTAN

MEMBRE DE L'INSTITUT

HOMMAGE DE RESPECTUEUSE ADMIRATION

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol 35, No 2, April, 1934

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA TOPOLOGIE DE CERTAINS ESPACES HOMOGÈNES

Préface. Les propriétés d'un espace homogène dans lequel opère un groupe transitif de Lie expriment simplement les propriétés de ce groupe. Il serait intéressant de savoir les relations entre la topologie d'un tel espace et les propriétés de son groupe de structure. Nos connaissances à ce sujet sont encore très incomplètes. Cependant, dans ses recherches concernant les groupes simples et les espaces homogènes symétriques, M. E. Cartan est arrivé à des résultats remarquables qui font connaître certaines de ces relations. Un des résultats les plus surprenants ramène la détermination des nombres de Betti d'un espace riemannien symétrique clos à un problème purement algébrique concernant le groupe linéaire d'isotropie de cet espace. Il existe une classe d'espaces riemanniens symétriques clos qui sont réalisés par des variétés algébriques complexes. Dans ce mémoire nous nous proposons d'étudier les propriétés topologiques des espaces de cette classe. La méthode indiquée par M. E. Cartan pour calculer les nombres de Betti revient, pour ces espaces, à décomposer certains groupes linéaires en groupes irréductibles. Ce sera l'une des méthodes employées. Comme les espaces considérés ont des définitions géométriques simples, nous avons cherché une deuxième méthode, qui utilise des procédés habituels à la topologie, à savoir les déformations et les subdivisions en cellules. Par cette deuxième méthode on peut déterminer d'une façon élémentaire les bases d'homologie et les groupes de Poincaré. Nous étudierons ainsi tous les espaces de la classe considérée et nous appliquerons la deuxième méthode à certaines autres familles de variétés algébriques. Nous démontrerons par la topologie certaines formules de géométrie énumérative, en particulier une formule importante due à H. Schubert.

Pour faciliter la lecture de ce mémoire, nous rappelons dans la première section quelques notions et quelques résultats qui jouent un rôle fondamental dans les travaux déjà mentionnés de M. E. Cartan. En ce qui concerne la topologie, nous renvoyons à un ouvrage de M. S. Lefschetz: "*Topology*" (voir l'index bibliographique). Au sujet des propriétés classiques des variétés étudiées, on trouvera des renseignements très complets dans un article de C. Segre: *Mehrdimensionale Raume.*

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. Elie Cartan et à M. Salomon Lefschetz qui ont bien voulu montrer de l'intérêt pour mon travail. Leurs critiques et leurs suggestions m'ont grandement aidé au cours de mes recherches.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

CARTAN, E.: a. *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* (Memorial Sc. math., fasc. XLII, 1930).

b. *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces* (Ann. Soc. pol. Math., 8, 1929, p. 181–225).

c. *Les espaces riemanniens symétriques* (Verh. internat. Math.-Kongr. 1, p. 152–161, 1932).

d. *La géométrie des groupes simples* (Annali di Mat., 4, 1927, p 209–256).

e. *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple* (Ann. Ec Norm , 44, 1927, p. 345–467).

f. *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (Bull. Soc Math France, 41, 1913, p. 53–96).

g. *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes* (Publ. math. Univ. Belgrade 1, p. 55–74, 1932).

EHRESMANN, C.. a. *Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé* (C. R. Acad Sci. Paris, 194, 1932, p. 2004–2006).

b. *Sur la topologie de certaines variétés algébriques* (C. R Acad. Sci Paris, 196, 1933, p 152–154)

KOOPMAN, B. O., AND BROWN, A. B : a *On the covering of analytic loci by complexes* (Trans. Am. Math. Soc , 34, 1932, p 231–251).

LEFSCHETZ, S.: a. *Topology* (Am. Math. Soc. Colloquium, Publ. New York, 1932).

b. *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques* (Mémorial Sc. Math. fasc. XL, 1929).

LEFSCHETZ, S., AND WHITEHEAD, J H. C : a. *On analytical complexes* (Trans. Am. Math. Soc , 35, 1933, p 510–517).

DE RHAM, G.: a. *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions* (J. Math. pures et appl., 10, 1931, p. 115–200)

SCHUBERT, H.. a *Losung des Charakteristiken—Problems fur lineare Raume beliebiger Dimension* (Mitteil. Math. Ges. Hamburg 1, 1886)

b. *Kalkul der abzahlenden Geometrie* (Leipzig, Teubner 1879)

SEGRE, C : a. *Mehrdimensionale Raume* (Encyklop. d. math. Wissensch. III 2 C 7).

SEVERI, F.: a. *Sulla varieta que rappresenta gli spazi subordinati di date dimensione, immersi in uno spazio lineare* (Annali di Math., 1915).

b *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche* (Atti del R Instituto Veneto di Sc. L. ed A , 1916)

c *Le coincidenze di una seri algebrica di coppie di spazi a k dimensioni*, etc. (Rendiconti d. R. Accad. dei Lincei, vol IX, p 321–326).

TUCKER, A. W. a. *An abstract approach to manifolds* (Ann. of Math. 2, vol. 34, p. 191–243).

VANEY, F.. a *Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels à 3 et à 7 dimensions etc* (Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 1929)

VAN DER WAERDEN, B. L : a *Topologische Begrundung des Kalkuls der abzahlenden Geometrie* (Math Ann , 102, 1929, p 337–362).

b. *Zur algebraischen Geometrie IV* (Math Ann., 109, 1933, p 7–12).

WEYL, H.: a *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen I* (Math. Zeitschr., 23, 1925, p. 271–309).

I. Généralités sur les espaces homogènes[1]

1. Définitions et propriétés générales. Un *espace homogène* du type le plus général est un espace topologique dont le groupe des *homéomorphies* est

[1] Voir E. Cartan, *a* et *b*. Pour les titres complets des articles et des ouvrages cités voir l'index bibliographique.

transitif. Dans la suite nous réservons le nom d'espace homogène à une variété topologique à n dimensions qui est transformée transitivement par un groupe fini et continu G. Ce groupe sera appelé le *groupe de structure* de l'espace et nous supposerons que c'est un groupe fini et continu de Lie.

Soit E un tel espace homogène, G son groupe de structure et g le plus grand sous-groupe de G qui laisse invariant un point O de l'espace. g est un sous-groupe fermé dans G. En outre g ne contient pas de sous-groupe invariant dans G, si aucune transformation de G ne laisse fixes tous les points de E. G est supposé connexe. Le groupe g s'appelle *groupe d'isotropie* ou groupe des rotations autour de O.

A un point M arbitraire de E on peut faire correspondre l'ensemble Sg de toutes les transformations de G amenant O en M. On les obtient en effectuant successivement une transformation arbitraire de g et une transformation particulière S qui amène O en M. Réciproquement étant donné un groupe G, soit g un sous-groupe fermé dans G. L'ensemble de G et de g peut servir à définir un espace homogène E dont les points correspondent aux ensembles de transformations Sg de G. Il y aura une correspondance ponctuelle entre les points de E et les points de la variété du groupe G. Un point de G a pour image un point unique M de E, mais un point M de E correspond à un ensemble de points Sg de G. Un voisinage du point M dans E se compose des images des ensembles sSg, où s est un élément arbitraire d'un voisinage V_0 de l'élément unité dans G. Ainsi un voisinage du point O se compose des images des ensembles sg. Supposons que les paramètres dans une région autour de l'élément unité de G soient des paramètres canoniques. Chaque transformation dans cette région est alors représentée d'une manière et d'une seule par le symbole $e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots + e_nX_n + e_{n+1}X_{n+1} + \cdots + e_rX_r$. Le sous-groupe g, qui est fermé dans G, est un groupe de Lie et nous supposerons que sa partie connexe contenant l'élément unité est engendrée par $X_{n+1}, \cdots, X_{r-1}, X_r$. Si V_0 est suffisamment petit, tout élément s de V_0 est le produit d'une transformation bien déterminée de g par une transformation bien déterminée t de V_0 représentée par $e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots + e_nX_n$. Cela veut dire que la variété sg coupe l'hyperplan $e_{n+1} = e_{n+2} = \cdots = e_r = 0$ en un seul point t à l'intérieur de V_0. Le point P qui représente dans E l'ensemble sg est en correspondance biunivoque avec le point t de paramètres $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Tout autre point de G correspondant au point P est représenté d'une manière et d'une seule par un produit tg. Donc la région de G qui a pour image sur E un voisinage V_0' suffisamment petit de O est le produit topologique de V_0' et de g.

Une transformation T de G fait correspondre au point M, image de Sg, le point M', image de TSg. En particulier S^{-1} transforme le voisinage V_0Sg du point M en un voisinage $S^{-1}V_0Sg$ du point O. Les points de ce dernier voisinage sont encore en correspondance biunivoque avec des points t de paramètres $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. En revenant au point M par la transformation S, on voit qu'un voisinage V_0' de M a pour image dans G le produit topologique de V_0' et de g. Cette propriété a lieu pour un voisinage suffisamment petit d'un point quelconque de E; mais, en général, la variété de G n'est pas globalement le produit topologique de E et de g. E est un espace de décomposition pour la variété G. Les propriétés d'un espace homogène ne traduisent ou ne révèlent que des propriétés de son groupe de structure. Cette remarque s'applique en particulier aux propriétés *topologiques*. L'existence même de la décomposition de la variété G qui fournit l'espace homogène E est une propriété topologique de G, qui permettrait peut-être d'arriver encore à de nouveaux résultats.

2. **Groupe de Poincaré d'un espace homogène.** Le groupe de Poincaré de l'espace homogène E dépend d'une façon assez simple des propriétés de l'ensemble de G et de g.

Toute courbe dans G a pour image une courbe dans l'espace homogène E. Tout arc OM dans E peut être recouvert par un nombre fini de voisinages V_0 dont chacun a pour image dans G une région qui est le produit topologique de ce voisinage avec g. On obtient alors sans peine un arc continu IS dans G qui a pour image l'arc OM. On peut aussi trouver dans G deux arcs voisins ayant pour images dans E deux arcs voisins donnés. Si l'on déforme l'arc OM d'une façon continue en laissant les points O et M fixes, on peut définir une déformation correspondante de l'arc IS, I restant fixe et S se déplaçant en général sur l'ensemble Sg. Etant donnée dans E une courbe fermée orientée C partant de O et y revenant, il lui correspond dans G une courbe orientée allant de l'élément unité I à un point J de g.

Le sous-groupe g peut se composer de plusieurs parties connexes $g_0, g_1, \cdots, g_k$. La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit réductible à O par déformation continue est qu'il lui corresponde dans G une courbe IJ qui soit déformable en une courbe située sur g_0, le point I étant fixe et J pouvant se déplacer d'une façon continue sur g. Le point J se trouvera alors nécessairement sur g_0. On peut alors définir dans la variété de G un groupe Γ isomorphe au groupe de Poincaré de l'espace E. Une courbe allant de I à un point J_α de la variété g_α représente un élément du groupe. Soient deux courbes IJ_α et IJ_β. Si S est le point général de la courbe IJ_β, le point SJ_α décrit une courbe $J_\alpha J_\gamma$ allant du point J_α au point $J_\gamma = J_\beta J_\alpha$. La courbe composée de IJ_α et $J_\alpha J_\gamma$ représentera le produit des deux éléments de Γ correspondant à IJ_α et IJ_β. L'élément unité du groupe sera représenté par toutes les courbes IJ_0 qui sont déformables en des courbes situées sur g_0, en supposant I fixe et J_0 mobile sur g_0. Le groupe Γ a pour sous-groupe invariant le groupe Γ_0 représenté par les courbes IJ_0. Le groupe quotient Γ/Γ_0 est isomorphe au groupe quotient g/g_0. En particulier, *si g est connexe le groupe Γ se réduit à Γ_0. Si le groupe G est simplement connexe, Γ se réduit à g/g_0.*

Si G n'est pas simplement connexe, on peut considérer la variété simplement connexe de recouvrement de G C'est la variété d'un groupe $\bar{G}$. g_0 a pour image dans $\bar{G}$ une variété $\bar{g}_0$ formant un sous-groupe de $\bar{G}$. $\bar{g}_0$ n'est pas nécessairement connexe. Si $\bar{g}_0'$ est la partie connexe de $\bar{g}_0$ contenant l'élément unité, le groupe discontinu $\bar{g}_0/\bar{g}_0'$ est isomorphe au groupe Γ_0. Si $\bar{g}$ est le plus grand sous-groupe de $\bar{G}$ recouvrant g, le groupe Γ est isomorphe au groupe quotient $\bar{g}/\bar{g}_0'$

3. Espaces homogènes orientables et non orientables. Considérons un point P infiniment voisin de O. Il définit un vecteur infiniment petit $\overrightarrow{OP}$ ou une direction issue de O. Le point P se déduit de O par une transformation infinitésimale $e_1X_1 + \cdots + e_nX_n$ bien déterminée et les quantités $e_1, e_2, \cdots, e_n$ peuvent être considérées comme les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$. Etant donnés n vecteurs infiniment petits $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \cdots, \overrightarrow{OP_n}$, nous dirons que le simplexe $OP_1P_2 \cdots P_n$ est de sens positif lorsque le déterminant $|e_i^{(j)}|$ des composantes de ces vecteurs est positif. Si le déterminant a une valeur négative, le simplexe est dit de sens négatif. Etant donnée une courbe allant de O à M, on peut la considérer comme image d'une courbe dans la variété G allant de l'élément unité I à un élément S. La courbe IS définit un déplacement continu le long de la courbe OM amenant le simplexe $OP_1P_2 \cdots P_n$ en un simplexe $MQ_1Q_2 \cdots Q_n$. Soit en particulier une courbe fermée (C) passant par O. On peut lui faire correspondre dans G une courbe allant de I à un élément R qui appartient à g. Le déplacement le long de la courbe (C) amène le simplexe $OP_1P_2 \cdots P_n$ en un simplexe $OQ_1Q_2 \cdots Q_n$. Un point P correspondant à une transformation infinitésimale s est amené au point Q correspondant à la transformation Rs ou $(RsR^{-1})R$. Le point Q est donc défini par la transformation infinitésimale RsR^{-1} qui se déduit de s par une opération du groupe adjoint linéaire de G. Lorsque R varie d'une façon quelconque dans g, cette opération engendre un sous-groupe du groupe adjoint linéaire. Comme elle laisse invariantes les transformations infinitésimales de g, les variables $e_1, \cdots, e_n$ sont transformées entre elles suivant les transformations d'un groupe linéaire γ. Ce groupe indique simplement comment le groupe g transforme entre eux les vecteurs infiniment petits d'origine O. Nous l'appellerons *groupe linéaire d'isotropie.* Si le déterminant de l'opération de γ correspondant à R est positif, le simplexe $OQ_1Q_2 \cdots Q_n$ a le même sens que le simplexe primitif. Si ce déterminant est négatif, le déplacement le long de la courbe fermée (C) ramène le simplexe au point O avec un sens opposé.

L'espace E sera orientable lorsque le déterminant de γ est toujours positif. Il sera non orientable lorsque ce déterminant n'a pas son signe constant. En particulier si g est connexe, le déterminant de γ ne peut pas changer de signe et l'espace E est orientable. Ainsi la variété d'un groupe est toujours orientable.

Le groupe γ est en relation avec d'autres propriétés de l'espace E. Rappelons que l'existence dans E d'une métrique riemannienne invariante par G revient à l'existence d'une forme quadratique définie positive en $e_1, e_2, \cdots, e_n$ invariante par le groups γ.

4. Les invariants intégraux d'un espace homogène à groupe fondamental clos.[2] Un invariant intégral de degré p de l'espace homogène E est une intégrale $\int\Omega$ de degré p dont l'élément Ω est invariant par G. Ω est une forme extérieure $\Sigma A_{i_1i_2\cdots i_p}[dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}]$ dont les coefficients $A_{i_1i_2\cdots i_p}$ sont des fonctions

[2] Voir E. Cartan, *b.*

uniformes des coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$ d'un point M dans l'espace E. Les produits extérieurs $[dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}]$ sont les composantes d'un p-vecteur formé de p vecteurs infiniment petits d'origine M.

La forme Ω sera complètement déterminée par sa valeur Ω^0 au point O, soit $\Omega^0 = \Sigma A^0_{i_1 i_2 \cdots i_p} [dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}]$. On peut considérer comme composantes d'un vecteur infiniment petit $\overrightarrow{OP}$ soit les différentielles correspondantes $dx_1, \cdots, dx_n$, soit les paramètres $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ de la transformation infinitésimale $\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \cdots + \omega_n X_n$ qui amène O en P. Les ω_i sont des formes linéaires indépendantes par rapport aux dx_i. Donc Ω^0 peut se mettre sous la forme $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$. Une transformation R du groupe des rotations g amène le vecteur $\overrightarrow{OP}$ de composantes ω_i en un vecteur $\overrightarrow{OP'}$ dont les composantes $\bar{\omega}_i$ se déduisent des ω_i par une transformation du groupe linéaire γ. Le fait que Ω^0 est invariant par g se traduit par l'égalité:

$$\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\bar{\omega}_{i_1} \bar{\omega}_{i_2} \cdots \bar{\omega}_{i_p}] = \Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$$

c'est-à-dire la forme $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$ est une forme extérieure à coefficients constants invariante par le groupe linéaire γ.

Réciproquement toute forme extérieure $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$ à coefficients constants invariante par γ définit un invariant intégrale Ω de l'espace E.

Donc *la recherche des invariants intégraux de l'espace homogène E revient à la recherche des formes extérieures $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$ invariantes par le groupe linéaire γ.*

Si le groupe de structure G de l'espace E est clos on a deux théorèmes importants démontrés par M. E. Cartan:

a) *Toute intégrale de différentielle exacte est équivalente à un invariant intégral.*

b) *Tout invariant intégral équivalent à zéro est la dérivée extérieure d'un invariant intégral dont le degré est moindre d'une unité.*

Les intégrales que l'on considère sont des intégrales multiples $\int \Omega$ régulières[3] dans tout l'espace. Rappelons qu'une telle intégrale $\int \Omega$ est dite intégrale de différentielle exacte, si la dérivée extérieure Ω' de Ω est identiquement nulle. L'intégrale $\int \Omega$ est dite équivalente à zéro, si la forme Ω est la dérivée extérieure d'une forme Π dont le degré est moindre d'une unité. Plusieurs intégrales de différentielles exactes sont dites linéairement indépendantes, lorsqu'aucune combinaison linéaire de ces intégrales n'est équivalente à zéro.

Il résulte des théorèmes (a) et (b) que, si l'espace E admet en tout n_p formes invariantes de degré p, linéairement indépendantes au sens algébrique ordinaire, et si ν_p de ces formes sont à dérivée extérieure nulle, *le nombre d'intégrales de différentielles exactes linéairement indépendantes de degré p est égal à $\nu_p + \nu_{p-1} - n_{p-1}$.*

Un espace homogène E dont le groupe de structure est un groupe de Lie forme une variété analytique sans singularités. Il en existe par suite une subdivision polyédrale définissant une multiplicité (en anglais "manifold") du point

[3] Voir G. de Rham, *a*.

de vue de la topologie combinatoire.[4] G étant clos, l'espace E forme une variété analytique close à n dimensions dont une subdivision polyédrale fournit un complexe analytique fini. Cette variété rentre dans la catégorie des variétés closes au sujet desquelles M. G. de Rham a démontré le résultat fondamental suivant:[5]

Le nombre d'intégrales de différentielles exactes de degré p linéairement indépendantes est égal au nombre de Betti relatif à la dimension p.

La considération des invariants intégraux fournit ainsi une méthode pour déterminer les nombres de Betti d'un espace homogène à groupe fondamental clos. Soit R_p le nombre de Betti relatif à la dimension p. On a: $R_p = \nu_p + \nu_{p-1} - n_{p-1}$. Cette méthode se simplifie dans le cas des espaces homogènes symétriques.

5. **Les espaces homogènes symétriques.**[6] Un espace homogène E qui a G pour groupe de structure et g pour groupe d'isotropie au point O est dit *symétrique* s'il existe une transformation ponctuelle σ_0 de cet espace ayant les propriété suivantes:

1. σ_0 est involutive.
2. O est un point invariant isolé pour σ_0.
3. σ_0 est une automorphie de G.
4. La partie connexe de g contenant la transformation identique est le plus grand sous-groupe continu de G dont toutes les transformations sont invariantes par σ_0. L'existence d'une *"symétrie"* σ_0 par rapport au point O entraîne l'existence d'une symétrie analogue par rapport à un point quelconque de l'espace et toutes ces symétries sont transformées entre elles par le groupe G.

Les résultats rappelés au §4 se simplifient ici en vertu du théorème suivant:

Tout invariant intégral d'un espace homogène symétrique est une intégrale de différentielle exacte.

Donc si l'espace homogène symétrique E est *clos, le nombre d'intégrales de différentielles exactes linéairement indépendantes de degré p, ou encore le nombre de Betti R_p, est égal au nombre d'invariants intégraux de degré p linéairement indépendants dans le sens algébrique ordinaire.* On connaîtra les nombres de Betti si l'on sait trouver le nombre d'invariants linéaires du groupe linéaire γ_p qui indique comment les formes extérieures $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p}]$ sont transformées par le groupe linéaire d'isotropie γ.

γ étant un groupe clos, il existe une forme quadratique définie positive invariante par γ et par suite une métrique riemannienne à ds^2 défini positif invariante par G.

La détermination des espaces riemanniens symétriques se ramène à la détermination de ceux que sont dits *irréductibles.* Pour un espace irréductible, le

[4] Voir au sujet de cette subdivision· S. Lefschetz, *a*, p. 364–366. S. Lefschetz and J. H C. Whitehead, *a* B O Koopman and A. B. Brown, *a*.

[5] G. de Rham, *a*, chap. III, p. 73.

[6] Voir E. Cartan, *a*, *b* et *c*.

groupe γ est irréductible dans le domaine réel des variables $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Laissons de côté les espaces riemanniens symétriques ouverts qui sont tous homéomorphes à l'espace euclidien. Les espaces symétriques irréductibles clos se répartissent en deux catégories. La première catégorie comprend les *espaces des groupes simples clos.*[7] La deuxième catégorie[8] comprend les *espaces dont le groupe de structure G est un groupe simple clos, le groupe d'isotropie g,* ou au moins sa partie connexe contenant l'élément unité, *étant le plus grand sous-groupe continu de G dont toutes les transformations sont invariantes par une automorphie involutive de G.*

Pour les espaces de la deuxième catégorie, deux cas peuvent se présenter. Dans le premier cas, le groupe linéaire d'isotropie est un groupe linéaire simple ou semi-simple et *irréductible* même dans le domaine *complexe* des variables $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Dans le deuxième cas, le groupe linéaire γ, qui est toujours irréductible dans le domaine réel des variables $e_1, e_2, \cdots, e_n$, est *réductible* dans le domaine *complexe* de ces variables. Il transforme entre elles $n/2$ variables $u_1, u_2, \cdots, u_{n/2}$, combinaisons linéaires à coefficients complexes des $e_1, e_2, \cdots, e_n$, ainsi que les $n/2$ variables $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_{n/2}$, combinaisons linéaires de $e_1, e_2, \cdots, e_n$ à coefficients complexes conjugués des précédents. Le groupe γ, opérant sur ces nouvelles variables, laisse invariante la forme d'Hermite

$$u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + \cdots + u_{n/2}\bar{u}_{n/2}$$

et contient toujours le groupe à un paramètre $u_k' = e^{i\theta}u_k$. γ sera le produit direct de ce groupe à un paramètre et d'un groupe simple ou semi-simple γ'. Les espaces correspondant à ce deuxième cas forment une *classe d'espaces riemanniens symétriques clos qu'on peut considérer comme analytiques complexes.* Considérons particulièrement les espaces de cette dernière classe.

Pour déterminer les nombres de Betti d'un tel espace, il faut déterminer le nombre d'invariants linéaires du groupe γ_p qui indique comment γ transforme les formes extérieures $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p}]$, ou $[u_{i_1} \cdots u_{i_\alpha} \bar{u}_{i_{\alpha+1}} \cdots \bar{u}_{i_p}]$ avec les variables u_i et $\bar{u}_i$. Une combinaison linéaire de ces formes n'est invariante par la transformation

$$u_k' = e^{i\theta}u_k$$
$$\bar{u}_k' = e^{-i\theta}\bar{u}_k$$

que si elle se compose de formes ayant autant de variables u_k que de variables $\bar{u}_k$. En particulier il n'existe pas de forme extérieure invariante de degré impair. Donc les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls.

Considérons alors les formes extérieures de degré $2s$, combinaisons linéaires des formes $[u_{i_1} \cdots u_{i_s} \bar{u}_{j_1} \cdots \bar{u}_{j_s}]$. Elles sont transformées par γ' suivant un certain groupe linéaire γ_{2s}'. Le nombre de formes de degré $2s$ invariantes par γ, c'est-à-dire le nombre d'invariants linéaires du groupe γ_{2s}', est égal à la valeur

---

[7] Voir E Cartan, *d.*

[8] Voir E. Cartan, *e.*

moyenne du caractère de γ'_{2s}.[9] On voit que le caractère de γ'_{2s} est le produit des caractères des groupes linéaires γ''_s et $\bar{\gamma}''_s$ qui indiquent comment γ' transforme les formes $[u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_s}]$ et $[\bar{u}_{i_1} \bar{u}_{i_2} \cdots \bar{u}_{i_s}]$. Donc le caractère de γ'_{2s} est égal au carré du module du caractère de γ''_s. Pour en trouver la valeur moyenne, on peut décomposer le groupe linéaire γ''_s en groupes linéaires irréductibles. Si l'on obtient k groupes linéaires irréductibles non équivalents entre eux, ces groupes figurant respectivement ν_1 fois, ν_2 fois, $\cdots$, ν_k fois dans la décomposition, la valeur moyenne du carré du module du caractère de γ''_s est égale à

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_k^2.$$

C'est aussi le nombre de Betti R_{2s}.

En particulier γ''_1 est irréductible et par suite les nombres de Betti R_2 et R_{n-2} sont égaux à l'unité.

Abstraction faite de deux espaces exceptionnels correspondant à un groupe simple de type exceptionnel, cette dernière classe d'espaces symétriques clos comprend les espaces suivants:

L'espace projectif complexe.

L'espace des variétés planes à p dimensions de l'espace projectif complexe à n dimensions.

La quadrique complexe non dégénérée.

L'espace des variétés planes à p dimensions génératrices de la quadrique complexe à 2p dimensions.

L'espace des variétés planes à p dimensions qui appartiennent à un complexe linéaire non dégénéré de l'espace projectif complexe à 2p + 1 dimensions.

L'étude des espaces de cette classe sera l'objet principal de ce mémoire. Nous appliquerons la méthode que nous venons de rappeler et qui conduit à des problèmes intéressants concernant certains groupes linéaires.[10] Comme tous les espaces de cette classe ont une définition géométrique très simple, il sera intéressant d'étudier leur topologie aussi par une méthode plus directe qui donne des renseignements plus précis et qui s'applique à un grand nombre d'autres variétés algébriques.

II. Les variétés de Grassmann considérées comme des espaces homogènes symétriques

6. **Le groupe de structure et le groupe d'isotropie.** L'ensemble des variétés planes à k dimensions d'un espace projectif complexe à n dimensions définit une variété algébrique V appelée *variété de Grassmann*. En définissant chaque variété plane à k dimensions par l'ensemble de ses $\binom{n+1}{k+1}$ coordonnées plückeriennes homogènes $p_{i_0 i_1 \cdots i_k}$, on obtient une représentation biunivoque de la

[9] Voir pour la théorie des caractères: H Weyl, *a*.

[10] Au sujet de l'application de cette méthode à l'espace projectif complexe, à l'espace des droites de l'espace projectif à 3 dimensions et à la quadrique complexe, voir E Cartan, *b* et *g*.

variété V par une variété algébrique sans singularités de l'espace projectif à $\binom{n+1}{k+1} - 1$ dimensions. (Nous désignons par $\binom{a}{b}$ le nombre de combinaisons b à b de a éléments.) La variété V est connexe, car elle est transformée transitivement par le groupe projectif complexe, qui est connexe.

La variété V peut être considérée comme un espace homogène symétrique clos. Considérons en effet le groupe hermitien elliptique, c'est-à-dire le groupe projectif G

$$x'_i = \Sigma\, a_{ij}\, x_j, \qquad (i, j, = 0, 1, \cdots, n) \tag{1}$$

qui laisse invariante la forme d'Hermite $x_0\,\bar{x}_0 + x_1\,\bar{x}_1 + \cdots + x_n\,\bar{x}_n$. Si A est la matrice de la transformation (1) et $\bar{A}^*$ la matrice imaginaire conjuguée transposée, on a: $A\ \bar{A}^* = 1$. Nous pouvons supposer $|A| = 1$. Les transformations infinitésimales sont:

$$\delta x_i = \Sigma\, \alpha_{ij}\, x_j, \qquad \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ji} = 0.$$

Nous désignerons toujours par $[k]$ une variété plane à k dimensions. Soit la variété plane $[k]_0$ définie par les équations $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$. En appelant $y_0, y_1, \cdots, y_q$ les $n - k$ dernières variables $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$, le plus grand sous-groupe g de G qui laisse invariante la variété plane $[k]_0$ a pour équations:

$$(g) \qquad \begin{aligned} x'_{j'} &= \Sigma\, a_{j'j}\, x_j & (j, j' &= 0, 1, \cdots, k) \\ y'_{i'} &= \Sigma\, b_{i'i}\, y_i & (i, i' &= 0, 1, \cdots, q) \end{aligned}$$

C'est aussi le plus grand sous-groupe continu de G qui soit invariant par l'involution:

$$x'_0 = x_0, x'_1 = x_1, \cdots, x'_k = x_k, y'_0 = -y_0, y'_1 = -y_1, \cdots, y'_q = -y_q.$$

Cette involution est une automorphie involutive de G. L'ensemble de G et de g définit donc un espace homogène symétrique clos.

Chaque transformation infinitésimale de G se décompose d'une manière et d'une seule en une transformation infinitésimale de g et une transformation infinitésimale de la forme:

$$\begin{aligned} \delta x_j &= -\Sigma\, \bar{\omega}_{ij}\, y_i & (i &= 0, 1, \cdots, q) \\ \delta y_i &= \Sigma\, \omega_{ij}\, x_j & (j &= 0, 1, \cdots, k) \end{aligned}$$

Celle-ci transforme la variété $[k]_0$ d'équations $y_0 = y_1 = \cdots = y_q = 0$ en une variété $[k]$ d'équations:

$$y_i = \omega_{ij}\, x_j. \tag{2}$$

Les $(k + 1)\ (n - k)$ paramètres complexes ω_{ij} peuvent être considérés comme les coordonnées complexes de cette variété plane. Les équations de toute variété plane $[k]$ voisine de $[k]_0$ peuvent se mettre sous la forme (2). Le groupe G est donc transitif dans la variété de Grassmann V au voisinage de l'élément $[k]_0$. Les transformés de $[k]$ par le groupe clos G engendrent une variété close

V', qui devra être une région de V n'ayant pas de frontière dans V. Par suite V' est confondu avec V. *La variété de Grassmann V peut donc être considérée comme l'espace riemannien symétrique clos défini par G et g.*

Sous forme symbolique, les équations de g s'écrivent:

$$(x') = (a)\,(x)$$

$$(y') = (b)\,(y)$$

avec les conditions: $(a)\,(\bar{a})^* = 1$, $(b)\,(\bar{b})^* = 1$, $|a| \cdot |b| = 1$. Soit (ω) la matrice des paramètres ω_{ij}. Etant donnée la transformation infinitésimale

$$(\delta y) = (\omega)\,(x),$$

cherchons sa transformée par une transformation de g. On aura:

$$(\delta y') = (b)\,(\delta y) = (b)\,(\omega)\,(x) = (b)\,(\omega)\,(a)^{-1}\,(x').$$

La transformation infinitésimale cherchée est donc définie par la matrice (ω'):

$$(\omega') = (b)\,(\omega)\,(a)^{-1} = (b)\,(\omega)\,(\bar{a})^*.$$

La matrice (ω) est donc transformée comme la matrice dont les éléments sont les produits $y_i\,\bar{x}_j$. Posons

$$(a) = e^{i\varphi}\,(a_1), \qquad (b) = e^{i\psi}\,(b_1),$$

les matrices (a_1) et (b_1) étant unimodulaires. On aura: $e^{i(k+1)\varphi + i(q+1)\psi} = 1$.

$$(w') = e^{i(\psi-\varphi)}\,(b_1)\,(\omega)\,(\bar{a}_1)^* = e^{i\theta}\,(b_1)\,(\omega)\,(\bar{a}_1)^*. \tag{3}$$

Le groupe linéaire d'isotropie est le groupe linéaire γ qui opère sur les paramètres ω_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$ et qui est définie par l'équation (3). Il est du type considéré à la fin du §5. Le groupe linéaire qui opère sur les ω_{ij} seuls est le produit de groupe d'équation $(\omega') = e^{i\theta}\,(\omega)$ et du groupe γ'' défini par:

$$(\omega') = (b_1)\,(\omega)\,(\bar{a}_1)^*.$$

Désignons par $\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_q$ les groupes linéaires unimodulaires unitaires opérant respectivement sur les variables $x_0, \cdots, x_k$ et sur les variables $y_0, \cdots, y_q$. *Le groupe γ'' est identique au groupe suivant lequel sont transformés les produits $y_i\,x_j$ lorsque les variables x_j et y_i subissent respectivement les transformations des groupes $\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_q$.*

7. **Détermination des invariants intégraux et des nombres de Betti.** Déterminons les invariants intégraux de l'espace riemannien symétrique réalisé par la variété de Grassmann V. D'après le §5, il suffit de déterminer les formes extérieures à coefficients constants des variables ω_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$, ces formes étant invariantes par γ. Il n'y a pas de forme extérieure invariante de degré impair, c'est-à-dire *les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls.* Pour chercher les formes invariantes de degré $2s$, nous décomposons en groupes irréductibles le groupe γ''_s qui opère sur les formes extérieures $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$

lorsque les variables ω_{ij} subissent les transformations de γ''. Nous employons la *méthode des poids dominants de M. E. Cartan.*[11]

γ'' est une représentation linéaire irréductible du groupe semi-simple $\mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_q$, produit direct de $\mathfrak{g}_k$ et de $\mathfrak{g}_q$. Nous considérons le sous-groupe abélien de γ'' correspondant aux transformations infinitésimales:

$$\delta x_j = \lambda_j x_j, \qquad (j = 0, 1, \cdots, k)$$

$$\delta y_i = \mu_i y_i, \qquad (i = 0, 1, \cdots, q)$$

où les λ_j et les μ_i sont imaginaires pures et satisfont aux relations $\sum_j \lambda_j = 0$ et $\sum_i \mu_i = 0$. Par rapport à ce sous-groupe abélien, la variable x_j est de poids λ_j, y_i est de poids μ_i et ω_{ij} est de poids $\lambda_j + \mu_i$. La variable $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$ est de poids $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_s} + \mu_{i_1} + \cdots + \mu_{i_s}$. Ce poids est une forme linéaire à coefficients entiers:

$$\Pi(\lambda, \mu) = m_0 \lambda_0 + \cdots + m_k \lambda_k + n_0 \mu_0 + \cdots + n_q \mu_q$$

où $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n_0 + n_1 + \cdots + n_q = s$. Le poids $\Pi(\lambda, \mu)$ est dit *plus haut* qu'un autre poids $\Pi'(\lambda, \mu)$ défini par des entiers m'_j et n'_i lorsque:

$$m_j - m_k \geqq m'_j - m'_k, \qquad (j = 0, 1, \cdots, k - 1)$$

$$n_i - n_q \geqq n'_i - n'_q, \qquad (i = 0, 1, \cdots, q - 1),$$

l'une au moins de ces conditions étant une inégalité. D'après un théorème fondamental de M. E. Cartan, *tout groupe irréductible Γ_s contenu dans γ''_s est complètement déterminé par sa variable dominante.* Pour qu'une variable u, c'est-à-dire une combinaison linéaire de formes extérieures $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$, soit la variable dominante d'un groupe irréductible Γ_s, il faut et il suffit que le poids de u soit plus haut que le poids de n'importe quelle variable transformée de u.

Au lieu de considérer seulement les transformations des groupes unitaires $\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_q$, appliquons aux variables x_j et y_i les transformations des deux groupes linéaires unimodulaires à coefficients complexes arbitraires. Les produits $x_j y_i$ subissent alors les transformations d'un groupe semi-simple γ'''. C'est le groupe à paramètres complexes qui a la même structure que le groupe unitaire γ''. Toute représentation linéaire Γ de γ'' peut être élargie en une représentation linéaire Γ' de γ'''. Si Γ' est irréductible, Γ l'est également, et réciproquement.[12] Appliquons donc aux variables ω_{ij} les transformations du groupe γ'''. Pour que u soit une variable dominante, il faut et il suffit que son poids soit plus haut que le poids de toute variable transformée. Il suffit de considérer les transformations infinitésimales de γ''' qui correspondent aux transformations infinitésimales $x_{j'} \partial f/\partial x_j$ et $y_{i'} \partial f/\partial y_i$. A une variable de poids Π elles font correspondre une variable de poids $\Pi + \lambda_{j'} - \lambda_j$ ou $\Pi + \mu_{i'} - \mu_i$. Ainsi pour que

---

[11] Voir E. Cartan, *f* et H. Weyl, *a*.

[12] Voir H. Weyl, *a*, p. 289–290.

u soit variable dominante, il faut et il suffit que les transformées de u par $x_{j'}\,\partial f/\partial x_j$ ou $y_{i'}\,\partial f/\partial y_i$ soient identiquement nulles lorsque $j' < j$ ou $i' < i$.

Soit u une combinaison linéaire de formes extérieures $[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}]$. Pour que u soit une variable de poids $\Pi(\lambda, \mu)$, il faut et il suffit qu'elle ne soit composée que de formes extérieures de poids $\Pi(\lambda, \mu)$. Si $\Pi(\lambda, \mu)$ est le poids dominant d'un groupe irréductible Γ_s, on a:

$$m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k, \qquad n_0 \geqq n_1 \geqq \cdots \geqq n_q,$$

car en permutant les λ_j entre eux et les μ_i entre eux, on obtient encore des poids de Γ_s. En permutant convenablement les ω_{ij} dans chacune des formes extérieures $[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}]$, on peut d'abord écrire les m_0 variables ω_{ij} dont l'indice j est égal à 0, puis les m_1 variables ω_{ij} dont l'indice j est égal à 1, etc. On arrangera les variables ω_{ij} qui correspondent à une même valeur de j de telle façon que leurs indices i soient rangés par ordre croissant de gauche à droite. u aura alors la forme suivante:

$$u = \Sigma \alpha_P P_{(i)} [\omega_{i_10} \cdots \omega_{i_{m_0}0}\, \omega_{i_{m_0+1}1}\, \omega_{i_{m_0+2}1} \cdots].$$

Dans cette expression, $P_{(i)}$ désigne une permutation P à effectuer sur les indices $i_1, i_2, \cdots, i_s$, et α_P est un coefficient dépendant de la permutation P. Nous allons ranger les termes de cette expression dans un ordre bien déterminé. Prenons d'abord les termes dans lesquels le premier indice i a la plus petite valeur. Parmi ceux-ci prenons les termes dans lesquels le deuxième indice i a la plus petite valeur. En continuant la sélection d'après le même principe, on arrive finalement à un terme bien déterminé, qui sera pris comme premier terme. Le deuxième terme sera obtenu de la même façon parmi les termes restants. On voit qu'on pourra ainsi ranger tous les termes.

Soit $[\omega_{i_10} \cdots \omega_{i_{m_0}0}\, \omega_{i_{m_0+1}1} \cdots]$ le premier terme. Nous allons montrer qu'il est égal à la forme extérieure

$$[\omega_{00}\,\omega_{10} \cdots \omega_{m_0-1\,0}\,\omega_{01}\,\omega_{11} \cdots \omega_{m_1-1\,1} \cdots],$$

que nous designons par v. Soit i_h le premier des indices $i_1, \cdots, i_{m_0}$ tel que $i_h > h - 1$. Posons $i_h = p$ et appliquons la transformation infinitésimale $y_{h-1}\,\partial f/\partial y_p$. La variable transformée de u doit être identiquement nulle. Or c'est la somme des termes qu'on déduit des termes de u en remplaçant par $h - 1$ un quelconque des indices i qui est égal à p. En particulier, en remplaçant dans le premier terme de u l'indice i_h par $h - 1$, on obtient une forme extérieure qui ne peut figurer qu'une fois dans la variable transformée de u. Par conséquent il n'y a pas d'indice i_h tel que $i_h > h - 1$. Ce raisonnement montre que le premier terme de u est égal à v. Or v est une variable dominante de poids $\Pi(\lambda, \mu)$. Donc $u - v$ est une variable dominante de poids $\Pi(\lambda, \mu)$. Ainsi le deuxième terme de u devrait être un multiple de v, c'est-à-dire la variable u se réduit simplement à la forme extérieure v.

A tout ensemble d'entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$, tel que

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_k = s, \qquad q + 1 = n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k \geqq 0$$

correspond une variable dominante, $[\omega_{00}\omega_{10} \cdots \omega_{m_0-1\,0}\,\omega_{01} \cdots]$, et par suite un groupe irréductible Γ_s bien déterminé. A deux ensembles distincts $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ et $(m_0', m_1', \cdots, m_k')$ correspondent deux groupes irréductibles Γ_s et Γ_s' qui ne sont pas équivalents. Donc la valeur moyenne du carré du module du caractère de γ_s'' est égal au nombre de ces ensembles d'entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$. Donc:

THÉORÈME. *Etant donné l'espace riemannien symétrique réalisé par la variété de Grassmann V, le nombre de ses invariants intégraux de degré $2s$ est égal au nombre d'ensembles de $k + 1$ entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ tels que $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = s$ et $n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k \geqq 0$. Ce nombre est aussi le nombre de Betti R_{2s} de la variété V.*

Pour connaître les variables qui sont transformées par le groupe Γ_s correspondant aux entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$, on peut utiliser le schéma $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ qui caractérise d'après M. H. Weyl,[13] la représentation linéaire irréductible du groupe $\mathfrak{g}_k$ de poids dominant $m_0\lambda_0 + m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k$.

1	2	.	.	.	m_0
$m_0 + 1$	.	.	$m_0 + m_1$		
.	.	.			

schéma $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$

Le schéma définit un certain arrangement des s premiers nombres entiers Dans la première ligne nous écrivons les m_0 premiers nombres, dans la deuxième ligne les m_1 nombres suivants, etc. Le coefficient n_i du poids dominant de Γ_s est le nombre d'entiers contenus dans la $i^{\text{ième}}$ colonne du schéma. En échangeant les lignes avec les colonnes, on obtient un deuxième schéma qui caractérise la représentation linéaire de $\mathfrak{g}_q$ de poids dominant $n_0\mu_0 + n_1\mu_1 + \cdots + n_q\mu_q$. Γ_s est équivalent au produit des deux représentations linéaires correspondant à ces deux schémas.

Soit P une permutation des nombres du schéma $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$. Soit A une permutation par laquelle les nombres de chaque colonne sont permutés entre eux. Soit B une permutation par laquelle les nombres de chaque ligne sont permutés entre eux. Si P peut se mettre sous la forme AB (on effectue d'abord la permutation B, ensuite la permutation A), nous posons $\epsilon_P =$ signe de la permutation A; sinon $\epsilon_P = 0$. Si P peut se mettre sous la forms BA, nous posons $\epsilon_P' =$ signe de B, sinon $\epsilon_P' = 0$. Les variables du groupe Γ_s sont alors les quantités $\sum_P \epsilon_P P_{(j)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}]$. On a en effet:

$$\sum_P \epsilon_P P_{(j)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}] = \sum_P \epsilon_P' P_{(i)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}].$$

On en conclut que les quantités $\sum_P \epsilon_P P_{(j)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}]$ sont transformées entre

[13] Voir H. Weyl, *a*.

elles par les operations de Γ_s qui correspondent soit aux transformations de $\mathfrak{g}_k$, soit aux transformations de $\mathfrak{g}_q$. Par suite ces quantités sont bien transformées entre elles par le groupe Γ_s.

Le groupe Γ_s étant clos, il laisse invariante une forme d'Hermite définie positive. En remplaçant dans cette forme d'Hermite les produits ordinaires par des produits extérieurs, on obtient une forme extérieure invariante par γ. La forme d'Hermite est déterminée à un facteur constant près, car il n'y a qu'une forme extérieure invariante par Γ_s. L'invariant intégral le plus général est défini par une combinaison linéaire arbitraire des formes extérieures invariantes qui correspondent aux différents groupes Γ_s.

Ainsi l'invariant intégral de second ordre est défini par $\Sigma\,[\omega_{ij}\bar{\omega}_{ij}]$. Il est facile d'en donner l'expression explicite en fonction des coordonnées plückeriennes $p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$. Le groupe hermitien elliptique G transforme les variables $p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ suivant un groupe linéaire irréductible clos, qui laisse invariante une certaine forme d'Hermite. Comme chaque terme de cette forme doit avoir un poids nul par rapport aux transformations infinitésimales $\delta x_i = \lambda_i x_i$, où $i = 0, 1, \cdots, n$ et où les λ_i sont imaginaires pures, on trouve que la forme d'Hermite invariante est $\Sigma p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} \bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$. Imposons aux variables $p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ la condition $\Sigma p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} \bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} = 1$. L'invariant intégral du second degré sera $\int \Sigma[dp_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}\, d\bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}]$. On en déduit un invariant intégral de degré $2s$, à savoir $\int (\Sigma[dp_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}\, d\bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}])^s$. En général il y aura encore d'autres invariants intégraux de degré $2s$.

Si V est l'espace projectif $[n]$ lui-même, c'est-à-dire si $k = 0$, on obtient ainsi tous les invariants intégraux. On a $R_{2s} = 1$. On peut imposer aux coordonnées $x_0, \cdots, x_n$ la condition $\Sigma x_i \bar{x}_i = 1$. L'invariant intégral de degré $2s$ sera $\int (\Sigma[dx_i d\bar{x}_i])^s$.

Vérification. Donnons une vérification des résultats précédents en utilisant un théorème[14] de topologie dû à M. S. Lefschetz. D'après ce théorème, le nombre de points fixes d'une déformation d'une multiplicité orientable V_n est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré multipliée par $(-1)^n$. La variété de Grassmann V est une multiplicité orientable, parce que c'est une variété algébrique sans singularités, on encore parce que le groupe d'isotropie g est connexe. D'après les résultats précédents, la caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à la somme des nombres de Betti R_{2s}. C'est le nombre d'ensembles d'entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ tels que $n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k = 0$. En remplaçant m_i par $l_i = m_i + k - i$, on obtient les ensembles d'entiers $(l_0, l_1, \cdots, l_k)$ tels que $n \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k \geqq 0$. La caractéristique d'Euler-Poincaré est donc égale à $\binom{n+1}{k+1}$.

D'autre part, le groupe projectif complexe étant connexe, toute transformation projective de $[n]$ est une déformation de $[n]$. Etant donnée une transformation

[14] Voir S. Lefschetz, *a*, p. 272.

projective générale, le nombre de points fixes est $n + 1$ et le nombre d'éléments $[k]$ fixes est $\binom{n+1}{k+1}$. On retrouve bien la valeur de la caractéristique d'Euler-Poincaré. Cependant il reste à démontrer que tout élément fixe doit être compté avec l'ordre de multiplicité égal à $+1$. Ceci résulte du théorème général suivant:

THÉORÈME. *Etant donné un groupe continu de Lie G opérant transitivement dans une variété analytique complexe V, les transformations de G étant définies par des équations analytiques par rapport à des variables et des paramètres complexes, tout point fixe isolé d'une transformation de G doit être compté avec un ordre de multiplicité égal à* $+1$.

En effet, soit O un point fixe isolé d'une transformation T de G. Un système de paramètres canoniques de G sera fourni par un système de r paramètres complexes $e_1, \cdots, e_r$. Supposons que les $r - n$ dernières transformations infinitésimales de base engendrent le groupe d'isotropie relatif à O. L'ensemble des n paramètres complexes $e_1, e_2, \cdots, e_n$ constitue un système de coordonnées pour un voisinage v_0 de O. (Voir §1.) Dans v_0 la transformation T est représentée par des équations linéaires par rapport aux variables $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Pour définir la multiplicité du point fixe O, on considère le produit topologique $v_0 \times v_0$, c'est-à-dire le domaine défini par le système de coordonnées $e_1, e_2, \cdots, e_n, e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$. Dans ce système de coordonnées, la transformation T et la transformation identique sont représentées par des variétés planes complexes qui se coupent seulement au point $e_i = e'_i = 0$. L'indice de Kronecker de ce point d'intersection est égal à $+1$, ce qui prouve le théorème énoncé.

III. Etude directe de la topologie des variétés de Grassmann[15]

8. **Démonstration d'un lemme.** Comme les variétés de Grassmann ont une définition géométrique très simple, il est naturel d'étudier leurs propriétés topologiques sans passer par l'intermédiaire des intégrales de différentielles exactes. On peut chercher à les décomposer en *cellules*. Il n'est pas nécessaire d'arriver à une subdivision en *simplexes*; en ce qui concerne l'homologie et l'homotopie, des cellules d'une espèce plus générale peuvent remplir le même rôle que les simplexes. L'intérieur des cellules que nous aurons à considérer sera homéomorphe à l'intérieur d'une sphère ordinaire, mais la frontière ne sera pas nécessairement homéomorphe à la surface de cette sphère. L'emploi de cellules de cette espèce est justifié à cause du lemme suivant:

LEMME. *Etant donnés un complexe K et un sous-complexe L dans K, si K–L est homéomorphe à une cellule ouverte, toute chaîne sur K, de dimension inférieure à la dimension de K–L, peut être déformée d'une façon continue en une chaîne sur L. Pendant la déformation les points de L peuvent être maintenus fixes.*

L'expression "*cellule ouverte*" désignera toujours un ensemble de points

[15] On trouvera un résumé de cette méthode et l'indication des variétés auxquelles nous l'avons appliquée dans une note des Comptes Rendus. C. Ehresmann, *b*.

homéomorphe à l'intérieur d'une sphère ordinaire. Les complexes considérés sont formés de simplexes. Si L est un sous-complexe du complexe K, nous appelons K–voisinage de L l'ensemble des simplexes de K dont la frontière a une partie commune avec L. Soit N_K^L ce K–voisinage. K–N_K^L est l'ensemble des éléments de K qui n'ont pas de partie commune avec L. K–N_K^L est un complexe fermé, N_K^L est un ensemble ouvert. Le K–voisinage est dit *normal*, si tout simplexe de K qui a tous ses sommets sur L est situé entièrement sur L. Si le K–voisinage n'est pas normal, on peut considérer le complexe dérivé K' de K et le K'–voisinage de L sera normal.[16] Nous pouvons donc supposer dans la suite que le K–voisinage de L est normal.

Si K–L est homéomorphe à une cellule, toute chaîne sur K–L est déformable en une chaîne sur N_K^L, à condition que la dimension de la chaîne soit inférieure à celle de K–L. Soit, en effet, C_p une chaîne sur K, c'est-à-dire C_p est l'image continue et uniforme d'une chaîne formée de simplexes à p dimensions. D'après le théorème fondamental[17] de la déformation des chaînes sur un complexe, la chaîne C_p peut être déformée en une sous-chaîne de K. Cette opération effectuée, nous supposerons que C_p ne contient pas tous les simplexes de K–L, ce qui a lieu en particulier si p est inférieur à la dimension de K–L. Il existe alors un point O de K–L qui est extérieur à C_p. Considérons l'homéomorphie représentant K–L sur l'intérieur d'une sphère S. Il existe une sphère S' intérieure à S et contenant à son intérieur l'image $\bar{O}$ du point O ainsi que l'image de l'ensemble fermé K–N_K^L. On effectue alors la déformation suivante de l'image $\bar{C}_p$ de la partie de la chaîne C_p intérieure à K–L: Les points de $\bar{C}_p$ extérieurs à S' et situés sur S' sont laissés fixes. Les points de $\bar{C}_p$ intérieurs à S' sont déplacés le long des rayons issus de O et sont finalement projetés sur S'. Après cette déformation la chaîne C_p se trouvera complètement à l'intérieur de N_K^L.

Dans le raisonnement précédent, on aurait pu considérer aussi bien le K'–voisinage $N_{K'}^L$, où K' est une subdivision normale de K. Nous supposerons donc C_p déformé en une chaîne sur $N_{K'}^L$. Il existe une déformation continue du complexe K qui réduit $N_{K'}^L$ à L et qui réduit par suite C_p à une chaîne sur L. En effet, comme le K–voisinage de L est normal, tout simplexe E_q de N_K^L a en commun avec L un simplexe $E_{q'}'$ bien déterminé. Pour faire la subdivision normale de K, nous introduisons un sommet M à l'intérieur de E_q et un sommet M' à l'intérieur de $E_{q'}'$. Les points M sont les sommets des simplexes de $N_{K'}^L$. Le segment rectiligne $M\,M'$ est bien défini à l'intérieur du simplexe E_q. Faisons correspondre à tout point M le point M' correspondant tandis que les sommets de K–N_K^L se correspondent à eux-mêmes. Nous définissons ainsi une transformation barycentrique du complexe K' et les segments $M\,M'$ définissent une déformation barycentrique qui réduit $N_{K'}^L$ à L. Seuls les simplexes de N_K^L–L subissent une déformation; en particulier les points de L restent fixes.

---

[16] Comparer S. Lefschetz, *a*, p. 91.

[17] Voir S. Lefschetz, *a*, p. 86.

Il existe donc bien une déformation continue satisfaisant à l'énoncé du lemme. En particulier la frontière de la cellule ouverte K–L est toujours connexe.

Le fait qu'une chaîne contenue dans un voisinage N^L de L peut être déformée en une chaîne sur L, a été démontré par M. S. Lefschetz[18] avec des hypothèses moins restrictives. Il suffit de supposer qu'il existe une métrique dans K et que K et L sont clos et localement connexes. Le lemme démontré ici est valable si l'on suppose de plus que K–L est une cellule ouverte. Mais nous n'aurons qu'à considérer le cas où K et L sont des complexes.

9. **Conséquences du lemme.** Soit K un complexe formé de simplexes. Les points d'un simplexe qui n'appartiennent pas à la chaîne-frontière de celui-ci seront appelés points intérieurs du simplexe. L'ensemble de plusieurs simplexes sera considéré comme une cellule lorsque l'ensemble de leurs points intérieurs est homéomorphe à l'intérieur d'une sphère. Les simplexes qui composent une telle cellule forment une multiplicité combinatoire ouverte, en vertu d'un théorème de M. E R. van Kampen. La frontière de la cellule sera aussi composée de simplexes. On peut fixer une orientation de la cellule, ce qui détermine en même temps une orientation de ses simplexes de dimension maximum La cellule orientée définit alors une chaîne bien déterminée, somme de ses simplexes orientés, et par suite une chaîne-frontière bien déterminée.

Supposons que le complexe K puisse être considéré comme un assemblage de cellules du type considéré satisfaisant aux conditions suivantes: 1. *Tout point de K est intérieur à une cellule et une seule*; 2. *La frontière de chaque cellule est un ensemble de points formé par la somme d'un certain nombre de cellules de dimension inférieure.* Désignons par E_p^i les cellules orientées à p dimensions ou également les chaînes de simplexes définies par ces cellules orientées. Comme la chaîne-frontière d'une cellule E_p^i est un cycle orienté, elle contient toute la chaîne définie par une cellule E_{p-1}^j, dès qu'elle en contient un simplexe. D'une façon plus précise, les chaînes-frontières des cellules E_p^i sont des combinaisons linéaires des chaînes E_{p-1}^j, ce qu'on écrit sous la forme:

$$E_p^i \rightarrow \Sigma\, \mu_{i\,j}^{p-1}\, E_{p-1}^j. \tag{1}$$

Soit K_p le complexe formé par toutes les cellules de K dont la dimension est inférieure ou égale à p. Le lemme du paragraphe précédent entraine alors la conséquence suivante:

a. Toute chaîne C_p sur le complexe K peut être déformée d'une façon continue en une chaîne sur le complexe K_p.

Le preuve par induction est évidente.

En particulier tout cycle Γ_p sur K peut être déformé en un cycle sur K_p. Une nouvelle déformation de ce cycle fournit ensuite un cycle formé de simplexes de K_p D'après une remarque déjà faite, le cycle sera déformé en une

[18] Voir S. Lefschetz, *a*, p 92–94.

combinaison linéaire des chaînes E^i_p plus des simplexes dégénérés le cas échéant. Donc:

b. Tout cycle Γ_p est homologue à une combinaison linéaire des cellules E^i_p.

Soit Γ_p un cycle homologue à zéro. Il existe une chaîne C_{p+1} telle que: $C_{p+1} \to \Gamma_p$. Supposons Γ_p déformé en une combinaison linéaire de cellules E^i_p. D'après le lemme, nous pouvons laisser fixes les points de Γ_p et déformer C_{p+1} en une chaîne C'_{p+1} sur K_{p+1}. Nous pouvons supposer que C'_{p+1} est formé de simplexes de K_{p+1}. Comme C'_{p+1} est un cycle (mod K_p), en d'autres termes comme sa frontière est sur K_p, C'_{p+1} sera une combinaison linéaire de cellules E^i_{p+1}. L'homologie $\Gamma_p \sim 0$ sera une combinaison linéaire des homologies $\Sigma \mu^p_{ij} E^j_p \sim 0$. Par conséquent:

c. Les bases d'homologie, les nombres de Betti et les coefficients de torsion s'obtiennent simplement par la réduction des systèmes de relations (1) *à la forme canonique habituelle.*[19]

Les considérations précédentes permettent d'étudier la structure topologique d'un grand nombre de variétés algébriques. Rappelons que toute variété algébrique, réelle ou complexe, admet une subdivision en simplexes.[20] Un domaine ouvert d'une variété analytique sera appelé une cellule analytique, s'il est homéomorphe à l'intérieur d'une sphère et si sa frontière est composée d'éléments analytiques. L'ensemble d'une cellule analytique et de sa frontière peut être subdivisé en simplexes de telle façon que le complexe formé par cette subdivision admet un sous-complexe recouvrant exactement la frontière. Donc le lemme du paragraphe précédent s'applique et toute chaîne C_q sur la cellule analytique à p dimensions peut être déformée en une chaîne sur la frontière de la cellule, à condition que q soit inférieur à p. Comme nous n'aurons qu'à considérer des variétés algébriques, il sera commode d'utiliser l'expression "*cellule algébrique*" pour désigner un *domaine ouvert d'une variété algébrique, ce domaine étant homéomorphe à une cellule ouverte et sa frontière étant composée d'éléments de variétés algébriques.* Un point sera considéré comme une cellule algébrique de dimension zéro.

Etant donnée une variété algébrique V, supposons qu'on sache trouver un système de variétés algébriques contenues dans V et fournissant une subdivision de V en cellules algébriques E^i_p. Cette subdivision devra satisfaire aux conditions suivantes: 1. Tout point de V appartient à une cellule E et une seule; 2. La frontière de chaque cellule E^i_p est la somme d'un certain nombre de cellules de dimension inférieure à p. Il existe dans ces conditions un complexe formé de simplexes recouvrant la variété V et tel que chaque cellule algébrique E^i_p soit subdivisée par un sous-complexe de ce complexe. Alors le lemme du paragraphe précédent est applicable et le complexe formé des cellules algébriques E^i_p jouit des propriétés *a*, *b* et *c*.

[19] Ceci est à rapprocher d'un résultat de topologie combinatoire qui indique dans quelles conditions un agrégat de cellules peut être traité comme une cellule unique dans le calcul des nombres de Betti et des coefficients de torsion Voir A. W. Tucker, *a*.

[20] Voir B. L. van der Waerden, *a*.

Les variétés algébriques considérées ici peuvent être supposées réelles ou complexes. En ce qui concerne les variétés algébriques *complexes*, on arrive ainsi à des propriétés topologiques particulièrement simples. Une cellule algébrique complexe a un nombre pair de dimensions réelles; sa frontière, qui est par hypothèse formée de parties de variétés algébriques complexes, sera au plus à $2p - 2$ dimensions réelles, si la cellule est à $2p$ dimensions réelles. Une cellule algébrique complexe définit donc un cycle. On sait qu'une variété algébrique complexe V est toujours orientable et qu'il existe une orientation naturelle bien déterminée pour V et pour toute variété algébrique contenue dans V.[21] Supposons que par un système de variétés algébriques complexes on sache décomposer la variété V en cellules algébriques complexes E_{2p}^i. La structure topologique de V sera alors très simple et très particulière. Chaque cellule E_{2p}^i définira un cycle orienté bien déterminé. Tout cycle Γ_{2p+1} sur V pourra être déformé en un cycle Γ'_{2p+1} sur le complexe K_{2p} défini par l'ensemble des cellules algébriques dont la dimension est inférieure ou égale à $2p$. Ce cycle Γ'_{2p+1} est uniquement formé d'éléments dégénérés; *donc tout cycle* Γ_{2p+1} *est homologue à zéro.* Il n'y aura aucune homologie liant les cycles algébriques définis par les cellules E_{2p}^i. *Donc ces cycles formeront une base minima du groupe d'homologie relatif à la dimension $2p$ et il n'y aura pas de coefficients de torsion.*

Une cellule algébrique à une dimension complexe a pour frontière un point unique. Donc si la variété V est connexe, le complexe de ses cellules algébriques n'a qu'un élément E_0, formé par un point unique. Toute courbe fermée dans V peut être réduite à ce point par déformation continue. *Le groupe de Poincaré se réduit à l'identité.*

Un exemple classique d'une variété algébrique de cette nature est fourni par *l'espace projectif complexe* $[n]$. Il suffit de considérer une suite de variétés planes $[n - 1], [n - 2], \cdots, [2], [1], [0]$ satisfaisant aux conditions:

$$[n] \supset [n-1] \supset \cdots \supset [p] \supset [p-1] \supset \cdots \supset [2] \supset [1] \supset [0].$$

Les cellules algébriques sont $[p] - [p - 1]$. Si $[p]$ a pour équations

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = 0$$

une chaîne C_s, où $s \leqq 2p + 1$, peut être déformée en une chaîne sur $[p]$ par la déformation homographique:

$$x'_i = x_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, p)$$

$$x'_j = \lambda x_j, \qquad (j = p+1, p+2, \cdots, n)$$

le facteur λ variant d'une façon continue de 1 à O; par une petite déformation préalable il faudrait pourtant faire disparaître les points d'intersection éventuels de C_s avec la variété plane d'équations: $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$.

---

[21] Voir S. Lefschetz, *a*, ch. VII.

Nous allons voir que la réduction en cellules algébriques réussit pour un grand nombre de variétés algébriques; en particulier l'étude de la topologie des variétés de Grassmann devient par là d'une simplicité extrême.

10. **Les bases d'homologie des variétés de Grassmann.** Nous considérons la variété V de tous les $[k]$ d'un espace projectif complexe $[n]$. Pour éviter les confusions, nous représentons par $\{k\}$ une variété plane $[k]$ qui est considérée comme élément générateur d'une certaine variété. Introduisons les symboles de Schubert $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Etant données $k + 1$ variétés $[a_0], [a_1], \cdots, [a_k]$ satisfaisant aux conditions:

$$0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leqq n, \qquad [a_0] \subset [a_1] \subset \cdots \subset [a_k] \subset [n],$$

le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ représente la variété des $\{k\}$ contenus dans $[a_k]$ et ayant en commun avec $[a_i]$ une variété plane à i dimensions au moins. Les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ seront appelées *variétés fondamentales de Schubert.*[22]

Ainsi $[0, 1, \cdots, k]$ représente un élément $\{k\}$ unique; la variété V elle-même a pour symbole $[n - k, n - k - 1, \cdots, n]$.

La variété fondamentale $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est une variété algébrique contenue dans V. On montre facilement que sa dimension complexe est $a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \dfrac{k(k+1)}{2}$. La variété $[a_i]$ qui intervient dans la définition de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est parfaitement déterminée, sauf dans le cas où $a_{i+1} - a_i = 1$. Un $\{k\}$ sera un élément singulier de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, s'il coupe l'un des $[a_i]$ suivant un $[i + 1]$, pourvu qu'on ait $a_{i+1} - a_i > 1$. Le lieu des éléments singuliers sera composé d'un certain nombre de variétés fondamentales dont les symboles s'obtiennent à partir de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ en exprimant que l'élément $\{k\}$ coupe suivant un $[i + 1]$ l'une des variétés $[a_i]$ pour laquelle $a_{i+1} - a_i > 1$. Par exemple, le lieu des éléments singuliers de $[1, 3, 4, 6]$ est composé de $[0, 1, 4, 6]$ et $[1, 2, 3, 4]$. Une variété fondamentale moins le lieu de ses éléments singuliers est une variété homogène transformée transitivement par un groupe projectif de l'espace $[n]$. Les seules variétés fondamentales qui n'ont pas d'éléments singuliers sont les variétés de tous les $\{k\}$ contenus dans un $[m]$, ou les variétés de tous les $\{k\}$ contenus dans $[m]$ et passant par $[r]$. Ce sont des variétés de Grassmann; la variété des $\{k\}$ contenus dans $[m]$ et passant par $[r]$ est, en effet, en correspondance biunivoque avec la variété des $[k - r - 1]$ d'un espace $[m - r - 1]$.

Ceci étant, nous allons montrer que la variété V peut être décomposée en cellules algébriques par un système de variétés fondamentales de Schubert. Prenons dans $[n]$ une suite de variétés planes $[n - 1], [n - 2], \cdots, [1], [0]$ satisfaisant aux conditions:

$$[n] \supset [n - 1] \supset [n - 2] \supset \cdots \supset [1] \supset [0] \tag{1}$$

[22] *H. Schubert*, *a* et *b*; *C. Segre*, *a*, p. 795.

et considérons toutes les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ définies à l'aide des $[a_i]$ de cette suite. Démontrons par récurrence la règle suivante:

La variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ *devient homéomorphe à une cellule ouverte, lorsqu'on en retranche toutes les variétés fondamentales dont les symboles se déduisent du symbole* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ *en y remplaçant un des nombres* a_i *par* $a_i - 1$. *Si un symbole obtenu de cette façon n'a pas de sens, on le néglige.*

Supposons la règle démontrée pour les variétés fondamentales engendrées par des $\{k-1\}$ et montrons qu'elle est alors également vérifiée pour les variétés fondamentales engendrées par des $\{k\}$. Comme elle est vérifiée pour $k = 0$ (espace projectif), elle sera démontrée pour tous les cas.

Considérons la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Un élément général $\{k\}$ de cette variété rencontre $[a_0]$ en un point M et coupe suivant un $\{k-1\}$ un hyperplan général $[n-1]'$. Nous pouvons choisir l'hyperplan $[n-1]'$ de telle façon qu'il satisfait aux conditions suivantes: $[a_0]$ est coupé par $[n-1]'$ suivant $[a_0 - 1]$; les variétés $[a_0 + 1], [a_0 + 2], \cdots, [n-1]$ de la suite (1) sont coupées par $[n-1]'$ respectivement suivant des variétés $[a_0]', [a_0+1]', \cdots, [n-2]'$ distinctes des variétés planes de la suite (1). L'élément $\{k\}$ de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ correspond d'une façon biunivoque à l'ensemble d'un point M de $[a_0]$ et d'un $\{k-1\}$ de l'hyperplan $[n-1]'$, pourvu que $\{k\}$ ne rencontre pas la variété $[a_0 - 1]$. L'élément $\{k-1\}$ n'est pas arbitraire dans $[n-1]'$. En effet, si $\{k\}$ coupe $[a_i]$ suivant un $[i]$, il coupe $[a_i - 1]'$ suivant un $[i-1]$. Réciproquement, si $\{k\}$ coupe $[a_i - 1]'$ suivant un $[i-1]$, il coupera $[a_i]$ suivant un $[i]$, à condition que le point d'intersection M de $\{k\}$ et de $[a_0]$ ne soit pas sur $[a_0 - 1]$. Donc les $\{k\}$ qui ne rencontrent pas $[a_0 - 1]$ correspondent aux $\{k-1\}$ de la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]' - [a_0 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]'$, définie à l'aide des variétés planes de la suite $[a_0 - 1], [a_0]', [a_0 + 1]', \cdots, [n-1]'$. Or par hypothèse la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]'$ se réduit à une cellule ouverte lorsqu'on en retranche toutes les variétés dont le symbole se déduit du symbole $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]'$ en remplaçant un des nombres $a_i - 1$ par $a_i - 2$. Lorsque $\{k-1\}$ décrit cette cellule ouverte pendant que M décrit la cellule ouverte $[a_0] - [a_0 - 1]$, l'élément $\{k\}$ déterminé par l'ensemble de $\{k-1\}$ et de M engendre une variété homéomorphe au produit topologique des deux cellules ouvertes; c'est-à-dire $\{k\}$ engendre une cellule ouverte.

La cellule ouverte ainsi engendrée par $\{k\}$ est la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ dont on a enlevé les variétés suivantes: 1°. La variété $[a_0 - 1, a_1, \cdots, a_k]$ pour laquelle le point M se trouve sur $[a_0 - 1]$. 2°. Les variétés des $\{k\}$ qui coupent l'hyperplan $[n-1]'$ suivant les $\{k-1\}$ générateurs des variétés $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_i - 2, \cdots, a_k - 1]'$, où i est l'un quelconque des indices $1, 2, \cdots, k$, le point M étant arbitraire sur $[a_0]$. Si $\{k-1\}$ coupe $[a_0 + s]'$ suivant un $[r]$, l'élément $\{k\}$, déterminé par $\{k-1\}$ et un point M extérieur à $[a_0 - 1]$, coupe $[a_0 + s + 1]$ suivant un $[r+1]$ Donc la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_i - 2, \cdots, a_k - 1]'$ correspond à la variété $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i - 1, \cdots, a_k]$ engendrée par des $\{k\}$. Certains symboles qu'on serait ainsi conduit à écrire peuvent ne pas avoir de sens Par hypothèse, nous n'avons pas à tenir compte des symboles $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_i - 2, \cdots, a_k - 1]'$ qui n'ont pas de sens. Si $a_0 = a_1 - 1$, le symbole $[a_0, a_1 - 1, \cdots, a_k]$ n'a pas de sens. On voit qu'il suffit de le remplacer également par zéro.

Le raisonnement précédent suppose que $a_0 > 0$. Il reste à considérer le cas d'une variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, où $a_r = r$ et $a_{r+1} > r + 1$. Soit $[n - r - 1]'$ une variété qui ne coupe pas $[a_r]$ et qui coupe $[a_r + 1], [a_r + 2], \cdots, [n - 1]$ suivant des variétés $[0]', [1]', \cdots, [n - r - 2]'$. Tout $\{k\}$ de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est bien déterminé par son intersection avec $[n - r - 1]'$. Cette intersection est un élément $\{k - r - 1\}$ engendrant la variété

$$[a_{r+1} - r - 1, \cdots, a_i - r - 1, \cdots, a_k - r - 1]'$$

définie à l'aide des variétés de la suite $[0]', [1]', \cdots, [n - r - 1]'$. Comme la règle énoncée est vérifiée pour cette variété engendrée par des $\{k - r - 1\}$, on voit qu'elle est encore vérifiée pour la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Ceci prouve la règle dans tous les cas.

D'après cette règle, *l'ensemble des variétés fondamentales* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ *fournit une subdivision de la variété de Grassmann V en cellules algébriques.* Nous avons un complexe de cellules algébriques auquel nous pouvons appliquer les résultats du §9.

La variété V est une multiplicité orientable à $(k + 1)(n - k)$ dimensions complexes. Chaque variété fondamentale $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ définit un cycle avec une orientation bien déterminée; ce cycle sera représenté par le même symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Nous pouvons énoncer les théorèmes:

THÉORÈME. *Tout cycle Γ_{2s} ou Γ_{2s+1} sur la variété V peut être déformé en un cycle qui recouvre complètement un certain nombre de variétés fondamentales $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, où $a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \frac{k(k+1)}{2} \leqq s$. En particulier, la variété V est simplement connexe.*

THÉORÈME. *Les cycles algébriques $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, à s dimensions complexes, forment une base minima du groupe d'homologie pour la dimension 2s. Il n'y a pas de coefficients de torsion. Les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont tous nuls.*

11. **Intersection de deux cycles de dimensions complémentaires.** Nous dirons que deux cycles sur la variété de Grassmann V ont des dimensions complémentaires, lorsque la somme de leurs dimensions est égale à la dimension réelle de V, c'est-à-dire égale à $2(k + 1)(n - k)$. Ainsi deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$ sont de dimensions complémentaires lorsque:

$$(1) \qquad a_0 + a_1 + \cdots + a_k + b_0 + b_1 + \cdots + b_k = (k + 1)n.$$

Etant données deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_k]'$ dont les symboles sont composés des mêmes nombres, il existe une transformation projective de $[n]$, et par suite une déformation continue, qui transforme la première variété en la deuxième. Ces deux variétés définissent toujours des cycles algébriques homologues. Soient $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$ deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires. Par une transformation projective, amenons la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ en une position telle que les variétés $[a_0], \cdots, [a_k]$ aient des positions générales par rapport aux variétés $[b_0], \cdots, [b_k]$ qui servent à définir $[b_0\ b_1, \cdots, b_k]$. Pour qu'il existe alors un élément d'intersection de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et de $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$, il faut qu'il existe un $\{k\}$ qui coupe $[a_i]$ suivant un $[i]$ et qui coupe $[b_{k-i}]$ suivant un $[k - i]$. Or les variétés $[i]$ et $[k - i]$ ont un point d'intersection sur $\{k\}$; donc $[a_i]$ et $[b_{k-i}]$ ont un point d'intersection. Comme $[a_i]$ a une position générale par rapport à $[b_{k-i}]$, il en résulte que $a_i + b_{k-i} \geqq n$. Mais en vertu de l'équation (1) on a alors $a_i + b_{k-i} = n$, quel que soit i, et le symbole de la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$ est $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$. Réciproquement les deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ ont un élément d'intersection et un seul, si l'on a donné à la première variété une position générale par rapport à la deuxième. Cet élément d'intersection est l'élément $\{k\}$ déterminé par les $k + 1$ points d'intersection $[a_i] \cdot [n - a_i]'$, en supposant que $[a_i]$ et $[n - a_i]'$ servent à définir respectivement les deux variétés fondamentales considérées.

Le cycle d'intersection de deux cycles quelconques sur une multiplicité a été défini par M. S. Lefschetz.[23] Dans le cas de deux cycles de dimensions complémentaires, on peut définir le *nombre algébrique de points d'intersection* ou *l'indice de Kronecker des deux cycles.* Si A et B sont deux variétés algébriques de dimensions complémentaires contenues dans la multiplicité K formée par une variété algébrique sans singularités, l'ordre de multiplicité d'un point d'intersection isolé de A et de B est le nombre algébrique de points qu'il représente quand on évalue l'indice de Kronecker des cycles algébriques A et B. Rappelons que cet ordre de multiplicité est positif lorsque K, A et B sont des variétés complexes.

Soit M un point d'intersection isolé de A avec B, les variétés A, B et K étant supposées complexes. M admet dans K un voisinage formé par une cellule analytique complexe E, dont les points sont définis par un système de coordonnées complexes $u_1, u_2, \cdots, u_\alpha$. A l'intérieur de E, les voisinages de M sur les deux variétés A et B sont des domaines de variétés complexes qui sont représentées par des variétés analytiques complexes a et b dans le domaine des coordonnées $u_1, u_2, \cdots, u_\alpha$. Si le point M est un point ordinaire de a et de b, c'est-à-dire s'il admet sur chacune des deux variétés sécantes un voisinage formant une cellule analytique complexe, l'ordre de multiplicité de M est égal à $+1$, à condition que M soit le seul point d'intersection des deux plans tangents en M aux variétés a et b. Dans le cas général on fera subir à b une petite déformation définie par une translation arbitraire dans le domaine des variables $u_1, u_2, \cdots, u_\alpha$. Après cette déformation, les variétés a et b se couperont en h points d'intersection voisins de M et tels qu'en chacun de ces points

[23] Voir S. Lefschetz, *a*, ch. IV.

l'intersection sera du type simple qu'on vient de considérer. L'ordre de multiplicité de M sera alors égal à h.

Ceci posé, il est facile de démontrer d'une façon rigoureuse que *l'indice de Kronecker des deux variétés fondamentales* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ *et* $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ *est égal à* $+1$. Désignons comme au §6 par $x_0, x_1, \cdots, x_k, y_0, y_1, \cdots, y_q$ les coordonnées homogènes des points de $[n]$, et soit $[k]_0$ la variété définie par les équations: $y_0 = y_1 = \cdots = y_q = 0$. Un élément $\{k\}$ voisin de $\{k\}_0$ a pour équations:

$$(2) \qquad y_i = \omega_{ij} x_j \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \cdots, q \\ j = 0, 1, \cdots, k \end{pmatrix}.$$

C'est l'élément défini par $k + 1$ points $P_0, P_1, \cdots, P_k$, le point P_j ayant pour coordonnées

$$x_j = 1, \qquad x_{j'} = 0, \qquad y_i = \omega_{ij} \qquad (j' \neq j).$$

Les équations (2) sont valables tant que $\{k\}$ ne rencontre pas la variété $[n - k - 1]$ d'équations: $x_0 = x_k = \cdots = x_k = 0$. Les $(k + 1)(n - k)$ quantités ω_{ij} forment un système de coordonnées complexes pour la cellule ouverte $[n - k, n - k + 1, \cdots, n] - [n - k - 1, n - k + 1, \cdots, n]$.

Considérons une variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ contenant l'élément $\{k\}_0$. Nous supposons que $\{k\}_0$ est un élément général de cette variété c'est-à-dire que son intersection avec la variété $[a_r]$ qui intervient dans la définition de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est une variété plane à r dimensions exactement. Par une transformation projective de $[n]$ laissant invariant l'élément $\{k\}_0$, on pourra amener les variétés $[a_r]$ en coincidence avec les variétés suivantes:

$$\begin{array}{lrl} [a_k] & y_{m_0} = y_{(m_0+1)} = \cdots = y_q = 0 & a_k = m_0 + k \\ [a_{k-1}] & x_0 = y_{m_1} = y_{(m_1+1)} = \cdots = y_q = 0 & a_{k-1} = m_1 + k - 1 \\ [a_{k-r}] & x_0 = x_1 = \cdots = x_{r-1} = y_{m_r} = y_{(m_r+1)} = \cdots = y_q = 0 & a_{k-r} = m_r + k - r \\ [a_0] & x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = y_{m_k} = y_{(m_k+1)} = \cdots = y_q = 0 & a_0 = m_k \end{array}$$

Les inégalités $n \geqq a_k > a_{k-1} > \cdots > a_1 > a_0 \geqq 0$ entrainent les inégalités $n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k \geqq 0$. Soit $\{k\}$ un élément général de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ défini par les équations (2). La condition que les variétés planes $\{k\}$ et $[a_{k-r}]$ se coupent suivant une variété plane à $k - r$ dimensions entraine $\omega_{ij} = 0$ pour tous les ensembles d'indices i et j vérifiant les inégalités $i \geqq m_r, j \geqq r$. Dans l'espace des variables complexes ω_{ij}, la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est donc représentée par une variété plane dont les équations sont:

$$\omega_{ij} = 0 \qquad \text{pour } i \geqq m_j.$$

Ceci prouve, en passant, que la dimension complexe de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Considérons maintenant la variété d'éléments $\{k\}$ ayant pour équations: $\omega_{ij} = 0$ pour $i < m_j$. C'est une variété fondamentale de symbole $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ définie par les variétés planes suivantes:

$$
\begin{array}{lrl}
[n - a_0] & y_0 = y_1 = \cdots = y_{(m_k - 1)} & = 0 \\
[n - a_1] & x_k = y_0 = y_1 = \cdots = y_{(m_{k-1} - 1)} & = 0 \\
[n - a_{k-r}] & x_{r+1} = \cdots = x_k = y_0 = y_1 = \cdots = y_{m_r} & = 0 \\
[n - a_k] & x_1 = \cdots = x_k = y_0 = y_1 = \cdots = y_{m_0} & = 0.
\end{array}
$$

Les deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ sont représentées dans l'espace des variables ω_{ij} par deux variétés planes qui n'ont qu'un point d'intersection, $\omega_{ij} = 0$; c'est le point représentatif de l'élément $\{k\}_0$. Cet élément doit donc être compté avec l'ordre de multiplicité égal à $+1$ dans l'intersection des deux variétés. Comme il n'y a pas d'autre élément d'intersection, l'indice de Kronecker des deux variétés est égal à $+1$:

$$[a_0, a_1, \cdots, a_k] \cdot [n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0] = +1,$$

en désignant par $A \cdot B$ l'indice de Kronecker de deux cycles A et B.

Pour chaque dimension $2s$ nous avons une base minima du groupe d'homologie formée par R_{2s} cycles fondamentaux $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, où $a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \dfrac{k(k+1)}{2} = s$. La matrice des nombres d'intersection des cycles fondamentaux de dimension $2s$ avec les cycles fondamentaux de dimension complémentaire est égale à la matrice-unité, à condition d'écrire ces cycles dans un ordre convenable. Soit Γ_{2s} un cycle quelconque sur V. On a l'homologie:

$$\Gamma_{2s} \sim \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)\, [a_0, a_1, \cdots, a_k]. \tag{3}$$

Le coefficient $(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)$ dans cette homologie est le nombre d'intersections de Γ_{2s} et de $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$:

$$(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0) = \Gamma_{2s} \cdot [n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0].$$

Soit $\Gamma'_{2s'}$ un cycle de dimension complémentaire, $s' = (k + 1)(n - k) - s$. On aura:

$$\Gamma'_{2s'} \sim \Sigma(a_0, a_1, \cdots, a_k)' [n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0],$$

où:

$$(a_0, a_1, \cdots, a_k)' = \Gamma'_{2s'} \cdot [a_0, a_1, \cdots, a_k].$$

Le nombre d'intersections de Γ_{2s} et de $\Gamma'_{2s'}$ sera:

$$\Gamma_{2s} \cdot \Gamma'_{2s'} = \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)(a_0, a_1, \cdots, a_k)'. \tag{4}$$

En particulier si Γ_{2s} est le cycle défini par une variété algébrique A, les coefficients $(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)$ sont des nombres positifs. H. Schubert, qui les a déjà considérés dans ses recherches de géométrie énumérative, les a appelés les *degrés* (en allemand *Gradzahlen*) de la variété A. Si l'on a deux variétés algébriques A et B de dimensions complémentaires, les degrés de A

étant les nombres $(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)$ et ceux de B étant les nombres $(a_0, a_1, \cdots, a_k)'$, le nombre d'intersections de A et de B sera:

$$(4)' \qquad A \cdot B = \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)(a_0, a_1, \cdots, a_k)'.$$

Cette formule constitue une généralisation du *théorème de Bézout.* En effet, soit *V l'espace projectif complexe* $[n]$, qui est un cas particulier des variétés de Grassmann. Si $A_{(s)}$ est une variété algébrique contenue dans $[n]$, de dimension complexe s, on a l'homologie: $A_{(s)} \sim (n - s)[s]$. Le nombre $(n - s)$ est le degré de A d'après la définition ordinaire de cette notion. Soit $B_{(n-s)}$ une variété algébrique à $n - s$ dimensions complexes. On a: $B_{(n-s)} \sim (s)'[n - s]$, ou $(s)'$ est le degré de $B_{(n-s)}$. Il en résulte: $A_{(s)} \cdot B_{(n-s)} = (n - s)(s)'$, ce qui constitue le théorème de Bézout.

Considérons aussi le cas particulier des *variétés de droites.* V est la variété des droites de $[n]$, $A_{(s)}$ et $B_{(s')}$ sont des variétés algébriques engendrées par des droites. Supposons $s + s' = 2n - 2$. Alors les formules précédentes deviennent:

$$A_{(s)} \sim \Sigma(n - q, n - p)\,[p, q], \qquad p + q = s$$

$$B_{(s')} \sim \Sigma(p, q)'\,[n - q, n - p]$$

$$A_{(s)} \cdot B_{(s')} = \Sigma(n - q, n - p)\,(p, q)'.$$

Un complexe de droites, c'est-à-dire une variété algébrique $A_{(2n-3)}$ contenue dans V, n'a qu'un degré: $A_{(2n-3)} \sim (0, 2)\,[n - 2, n]$, où $(0, 2) = A_{(2n-3)} \cdot [0, 2]$. Si $(0, 2) = 1$, $A_{(2n-3)}$ est un complexe linéaire. Une surface réglée, c'est-à-dire une variété $B_{(1)}$, a aussi un seul degré; c'est le nombre $(n - 2, n) = B_1 \cdot [n - 2, n]$. Le nombre de droites communes à $A_{(2n-3)}$ et $B_{(1)}$ est égal au produit de leurs degrés.

Les bases d'homologie de la variété des droites de l'espace projectif [3] sont:

[2, 3]		$R_8 = 1$
[1, 3]		$R_6 = 1$
[0, 3]	[1, 2]	$R_4 = 2$
[0, 2]		$R_2 = 1$
[0, 1]		$R_0 = 1.$

Considérons deux congruences de droites $A_{(2)}$ et $B_{(2)}$. On a:

$$A_{(2)} \sim (0, 3)\,[0, 3] + (1, 2)\,[1, 2]$$

$$B_{(2)} \sim (0, 3)'\,[0, 3] + (1, 2)'\,[1, 2].$$

Le nombre de droites communes sera:

$$A_{(2)} \cdot B_{(2)} = (0, 3)(0, 3)' + (1, 2)(1, 2)'.$$

Cette égalité constitue le théorème de Halphen relatif aux congruences de droites.

12. **Remarque au sujet du problème des caractéristiques de Schubert.** La formule (4)′ du paragraphe précédent exprime un résultat de géométrie énumérative déjà obtenu par Schubert.[24] Cependant le raisonnement de Schubert ne peut pas être considéré comme rigoureux, car il ne s'appuie pas sur une définition précise et générale de l'ordre de multiplicité d'un point d'intersection et il manque de précision en ce qui concerne une certaine déformation de variétés algébriques.

Rappelons que la topologie fournit une interprétation et une justification du *calcul symbolique de Schubert.*[25] Elle permet aussi de montrer que le *problème des caractéristiques* pour une variété algébrique sans singularités admet toujours une solution.

Etant donnée la variété de Grassmann V engendrée par les $[k]$ de l'espace $[n]$, les bases d'homologie pour les cycles algébriques sont fournies par les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Soit $A_{(s)}$ une variété algébrique à s dimensions contenue dans V. Elle définit un cycle algébrique $A_{(s)}$. La relation (3) du paragraphe précédent entraîne une égalité symbolique de Schubert:

$$A_{(s)} = \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)[a_0, a_1, \cdots, a_k].$$

Cette égalité fournit la solution du problème des caractéristiques. Les différentes variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ ne sont liées par aucune égalité symbolique de Schubert. *Dans une variété de Grassmann l'égalité symbolique de Schubert* $A_{(s)} = B_{(s)}$ *et l'homologie* $A_{(s)} \sim B_{(s)}$ *sont donc deux relations équivalentes.*

13. **Remarque à propos d'un théorème de M. F. Severi.** Nos résultats topologiques sont à rapprocher d'un théorème démontré par M. F. Severi. Considérons la variété de Grassmann engendrée par les $\{k\}$ de $[n]$ et soit $V_{(d)}$ sa représentation à l'aide des coordonnées pluckeriennes $p_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ dans l'espace projectif $[r]$, où $r = \binom{n+1}{k+1} - 1$. Pour la dimension complexe $d - 1$, la base d'homologie est formée par la variété $[n - k - 1, n - k + 1, \cdots, n]$ dont l'équation peut se ramener à $p_{01 \cdots k} = 0$. C'est une section hyperplane particulière de $V_{(d)}$. Soit C une section de $V_{(d)}$ par un $[r - 1]$ général. La variété $[0, 1, \cdots, k - 1, k + 1]$ est représentée sur $V_{(d)}$ par une droite. Donc $C \cdot [0, 1, \cdots, k - 1, k + 1] = 1$ et par suite $C \sim [n - k - 1, n - k + 1, \cdots, n]$. Un complexe algébrique, $A_{(d-1)}$, est une variété algébrique à $d - 1$ dimensions complexes contenue dans $V_{(d)}$. On aura $A_{(d-1)} \sim \lambda C$, où λ est le degré du complexe. D'après un théorème de M. S. Lefschetz,[26] cette homologie entraîne l'équivalence algébrique $A_{(d-1)} \equiv \lambda C$. Ainsi C forme la base minima de Severi,

---

[24] Voir H. Schubert, *a*. Une autre démonstration se trouve dans F Severi, *c*. Il y a de nombreux travaux de géométrie énumérative concernant les variétés fondamentales de Schubert. On pourra consulter à ce sujet C Segre, *a*

[25] Voir B. L van der Waerden, *a*. Voir également F. Severi, *b*.

[26] S. Lefschetz, *b*, p 25 et 48.

et les complexes de degré λ forment un système continu complet. Comme le nombre de Betti relatif à la dimension 1 est nul, la variété $V_{(d)}$ est régulière et par suite $A_{(d-1)}$ et λC sont des variétés génériques d'un même système linéaire. Donc *les complexes algébriques de degré λ forment un système linéaire complet* qui contient évidemment le système linéaire des intersections complètes de $V_{(d)}$ par les hypersurfaces de degré λ de $[r]$. Dans son mémoire consacré aux variétés de Grassmann, M. F. Severi[27] démontre une propriété plus précise, à savoir que tout complexe algébrique est l'intersection complète de $V_{(d)}$ par une hypersurface de $[r]$.

IV. Etude des autres familles de variétés algébriques de la classe considérée

14. **La quadrique complexe non dégénérée à n dimensions complexes.** Nous nous proposons de montrer comment notre méthode élémentaire permet d'étudier la topologie des variétés algébriques qui sont classées au §5 avec les variétés de Grassmann comme fournissant des espaces homogènes symétriques.[28]

Rappelons quelques propriétés classiques d'une quadrique non dégénérée Q_n appartenant à un espace $[n + 1]$.[29] En supposant $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$, la quadrique Q_n contient une infinité de variétés planes à p dimensions, mais ne contient pas de variétés planes de dimension supérieure à p. Si $n = 2p + 1$, ces génératrices planes à p dimensions forment une seule famille continue. Si $n = 2p$, les génératrices planes à p dimensions forment deux familles distinctes. Deux génératrices $[p]$ et $[p]'$ de même famille se coupent suivant une variété plane à $p - 2s$ dimensions. Deux génératrices $[p]$ et $[p]'$ qui n'appartiennent pas à la même famille se coupent suivant une variété plane à $p - 2s - 1$ dimensions. s est un entier tel que $p - 2s \geqq -1$ et $p - 2s - 1 \geqq -1$. On convient de considérer une intersection nulle comme une intersection de dimension -1. En général, deux génératrices $[p]$ et $[p]'$ de même système (de systèmes différents) ont un point commun si p est pair (impair), et n'ont pas de point commun si p est impair (pair).

Soit O un point de la quadrique non dégénérée Q_n. Soit $[n]$ l'hyperplan tangent en O. $[n]$ coupe Q_n suivant un cône Q_{n-1} de sommet O. Soit $[n]'$ un hyperplan ne passant pas par O et coupant $[n]$ suivant $[n - 1]'$. Par projection centrale de centre O on met $Q_n - Q_{n-1}$ en correspondance biunivoque avec la cellule ouverte $[n]' - [n - 1]'$. *Donc $Q_n - Q_{n-1}$ est une cellule algébrique ouverte.*

Soit $[k]$ une génératrice plane de Q_n. Supposons $k < p$. $[k]$ admet une variété conjuguée $[n - k]$ qui coupe Q_n suivant une quadrique Q_{n-k-1}; celle-ci est $k + 1$ fois dégénérée et admet $[k]$ comme lieu de ses points doubles. Soit O' un point de Q_{n-l-1} non situé sur $[k]$. L'ensemble de O' et de $[k]$ détermine une génératrice $[k + 1]$ dont la variété conjuguée est une variété $[n - k - 1]$.

---

[27] Voir F. Severi, *a*.

[28] Les résultats relatifs aux quadriques complexes sont connus. Voir E. Cartan, *g* et B. L. van der Waerden, *b*.

[29] Voir C. Segre, *a*.

Q_n est coupé par $[n - k - 1]$ suivant une quadrique Q_{n-k-2}. Tout point de $Q_{n-k-1} - Q_{n-k-2}$ correspond d'une façon biunivoque à une droite de $[n - k]$ qui passe par O' et qui n'est pas située dans $[n - k - 1]$. *Donc* $Q_{n-k-1} - Q_{n-k-2}$ *est une cellule algébrique ouverte.*

Supposons $n = 2p + 1$. Prenons une génératrice $[p]$ de Q_{2p+1} et considérons dans $[p]$ des variétés $[p - 1], \cdots, [1], [0]$ telles que $[p] \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0]$. Nous faisons correspondre à une variété $[k]$ de cette suite la quadrique Q_{n-k-1}, intersection de Q_n par la variété conjuguée de $[k]$. Si $k = p$, Q_{n-p-1} se réduit à $[p]$. On a ainsi une suite de variétés:

$$Q_{2p+1} \supset Q_{2p} \supset \cdots \supset Q_{p+1} \supset [p] \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

La différence entre deux variétés successives forme une cellule algébrique ouverte. *Ces variétés forment les bases d'homologie. Il n'y a pas de coefficients de torsion. L'indice de Kronecker* $[k]\cdot Q_{n-k}$ *est égal à* 1.

Supposons $n = 2p$. Considérons sur Q_{2p} la suite des variétés planes:

$$[p] \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

A une variété $[k]$ de cette suite nous faisons encore correspondre une quadrique Q_{n-k-1}. Pour $k = p - 1$, Q_{n-k-1} se réduit à deux génératrices $[p]$ et $[p]'$, de systèmes différents, qui se coupent suivant $[p - 1]$. *Les bases d'homologie sont encore formées par* $Q_{2p}, Q_{2p-1}, \cdots, Q_{p+1}, [p], [p]', [p - 1], \cdots, [1], [0]$. Remarquons qu'il y a deux variétés de base pour la dimension p. *Il n'y a pas de coefficients de torsion.* On a encore: $[k]\cdot Q_{n-k} = 1$ pour $k \neq p$. Si p est impair: $[p]\cdot[p]' = 1, [p]\cdot[p] = [p]'\cdot[p]' = 0$. Si p est pair:

$$[p]\cdot[p] = [p]'\cdot[p]' = 1, \qquad [p]\cdot[p]' = 0.$$

15. **La variété des génératrices planes à p dimensions d'une quadrique complexe non dégénérée Q_{2p}.** Considérons sur la quadrique complexe non dégénérée Q_{2p} les génératrices planes à p dimensions appartenant à l'un des deux systèmes de génératrices à p dimensions. Elles engendrent une variété algébrique V à $p(p + 1)/2$ dimensions complexes. Un élément quelconque de V sera designé par $\{p\}$. Nous nous proposons de subdiviser V en cellules algébriques.

Supposons d'abord $p = 2$. Les points de Q_4 représentent les droites complexes d'un espace projectif [3]. Une génératrice plane de Q_4 représente les droites de [3] qui passent par un point ou les droites de [3] qui sont situées dans un plan. Les éléments $\{2\}$ de la variété V sont donc en correspondance biunivoque avec les points de [3]. Cette remarque conduit aux résultats suivants: Soit $\{2\}_0$ un élément particulier de V. C'est une variété plane $[2]_0$ contenue dans Q_4. Prenons dans la variété $[2]_0$ une droite [1] et un point [0] sur cette droite. Tout élément $\{2\}$ de V a un point en commun avec $[2]_0$. Considérons la variété des éléments de V qui rencontrent la droite [1]. Nous la représentons par $[1, \cdot, \cdot]$. La variété des éléments de V qui contiennent le point $[0]$ sera représentée par $[0, \cdot, \cdot]$. Représentons par $[0, 1, 2]$ l'élément particulier $\{2\}_0$ et par $[2, \cdot, \cdot]$ la variété totale V. On reconnait alors que $[2, \cdot, \cdot] - [1, \cdot, \cdot]$ est une cellule algébrique ouverte. Il en est de même pour $[1, \cdot, \cdot] - [0, \cdot, \cdot]$ et pour $[0, \cdot, \cdot] - [0, 1, 2]$.

Passons à l'étude du cas général. Considérons sur la quadrique Q_{2p} une variété plane $[p]_0$ formant un élément particulier $\{p\}_0$ de la variété V lorsque p est pair, et n'appartenant pas à V lorsque p est impair. L'intersection d'un élément $\{p\}$ de V avec $[p]_0$ a toujours un nombre pair de dimensions; en général ce sera un point. Introduisons dans $[p]_0$ une suite de variétés $[p-1], [p-2], \cdots, [0]$ telles que:

$$[p]_0 \supset [p-1] \supset [p-2] \supset \cdots \supset [0]. \tag{1}$$

Considérons $2i + 1$ variétés de cette suite: $[a_0] \subset [a_1] \subset \cdots \subset [a_{2i}]$. Le symbole $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ représentera la variété des éléments $\{p\}$ de V qui coupent $[a_s]$ suivant une variété à s dimensions. Dans le symbole nous mettons $p - 2i$ points à la suite du dernier nombre a_{2i} pour indiquer que l'élément générateur est une variété plane à p dimensions. La variété V elle-même est représentée par $[p, \cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot]$. Nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme. *La variété $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en retranche les variétés représentées par les symboles qu'on obtient en diminuant d'une unité un quelconque des nombres du symbole donné, ou en remplaçant, dans le cas où $a_{2i} < p - 1$, les deux premiers points qui suivent a_{2i} par $p - 1$ et p. Tout symbole qui n'a pas de sens devra être remplacé par zéro.*

Le lemme est bien vérifié pour $p = 1$ et $p = 2$. En le supposant exact pour une quadrique Q_{2p-2}, nous allons le démontrer pour une quadrique Q_{2p}.

La quadrique Q_{2p} appartient à un espace $[2p + 1]$. Soit $[2p]'$ un hyperplan ne passant pas par le point $[0]$ de la suite (1). L'hyperplan tangent à Q_{2p} au point $[0]$ coupe $[2p]'$ suivant une variété $[2p - 1]'$. L'intersection de Q_{2p} avec $[2p - 1]'$ est une quadrique non dégénérée Q_{2p-2}. Soit $\{p\}$ une génératrice de Q_{2p} appartenant à la variété V. Si $\{p\}$ ne passe pas par $[0]$, la projection stéréographique de centre $[0]$ lui fait correspondre d'une façon biunivoque une variété plane $\{p\}'$ de l'hyperplan $[2p]'$. $\{p\}'$ coupe $[2p - 1]'$ suivant une génératrice $\{p - 1\}'$ de la quadrique Q_{2p-2}. $\{p - 1\}'$ engendre un des systèmes de génératrices de Q_{2p-2}. Tout $\{p\}'$ appartenant à $[2p]'$ et coupant $[2p - 1]'$ suivant une telle génératrice $\{p - 1\}'$ correspond à une génératrice $\{p\}$ ne passant pas par $[0]$.

Les variétés de la suite (1) sont coupées par $[2p - 1]'$ suivant des variétés $[p - 1]_0'$, $[p - 2]'$, $\cdots$, $[0]'$ telles que:

$$[p-1]_0' \supset [p-2]' \supset \cdots \supset [0]'. \tag{2}$$

Considérons la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ et supposons $a_0 > 0$. Les $\{p\}$ de cette variété qui ne contiennent pas $[0]$ se projettent suivant les $\{p\}'$ de $[2p]'$ qui coupent $[2p - 1]'$ suivant des génératrices $\{p - 1\}'$ de Q_{2p-2}. Ces génératrices $\{p - 1\}'$ engendrent la variété $[a_0', a_1', \cdots, a_{2i}', \cdot, \cdot\cdot]'$ définie à l'aide des variétés de la suite (2), le nombre a'_s étant égal à $a_s - 1$. Nous pouvons appliquer le lemme à la variété $[a'_0, a'_1, \cdots, a'_{2i}, \cdot, \cdot \cdot]'$. Celle-ci devient une cellule algébrique ouverte A lorsqu'on en retranche les variétés indiquées dans l'énoncé du lemme. Il reste à démontrer que les $\{p\}'$ de l'hyperplan $[2p]'$ qui coupent $[2p - 1]'$ suivant les éléments $\{p - 1\}'$ de A forment une cellule ouverte.

Les nombres $a'_0, a'_1, \cdots, a'_{2i}$ sont des nombres de la suite $0, 1, \cdots, p - 1$; désignons par $b'_0, b'_1, \cdots, b'_j$ les autres nombres de cette suite. Considérons sur Q_{2p-2} une génératrice $[p - 1]''_0$ qui coupe $[p - 1]'_0$ suivant une variété $[j]$. Nous choisissons $[p - 1]''_0$ de telle façon que $[j]$ appartienne à la variété fondamentale de Schubert de symbole $[b'_0, b'_1, \cdots, b'_j]$ définie à l'aide de variétés de la suite (2). Nous supposons que $[j]$ occupe une position générale dans $[b'_0, b'_1, \cdots, b'_j]$. Les variétés $[p - 1]'_0$ et $[p - 1]''_0$ sont des génératrices de Q_{2p-2} qui n'appartiennent pas au même système, car leur intersection est à $j = p - 1 - (2i + 1)$ dimensions. Soit $\{p - 1\}'$ un élément quelconque de la cellule ouverte A. Montrons que $\{p - 1\}'$ n'a pas de point commun avec $[p - 1]''_0$. On voit d'abord que $\{p - 1\}'$ n'a pas de point commun avec $[j]$; sinon $\{p - 1\}'$ appartiendrait à une des variétés-frontières de la cellule A. Soit $[2p - 2 - j]$ la variété conjuguée de $[j]$ par rapport à la quadrique Q_{2p-2}. Les variétés $[2p - 2 - j]$ et $\{p - 1\}'$ ne peuvent pas appartenir à un même hyperplan de l'espace $[2p - 1]'$, comme leurs variétés conjuguées n'ont pas de point commun. Donc l'intersection de $[2p - 2 - j]$ et $\{p - 1\}'$ est à $p - 2 - j = 2i$ dimensions; c'est précisément l'intersection de $\{p - 1\}'$ avec $[p - 1]'_0$. La variété $[p - 1]''_0$ appartient à $[2p - 2 - j]$. Il en résulte bien que $\{p - 1\}$ et $[p - 1]''_0$ n'ont pas de point commun.

Soit $[p]''_0$ une variété contenue dans $[2p]'$ et coupant $[2p - 1]'$ suivant $[p - 1]''_0$. Soit $\{p\}'$ une variété plane à p dimensions contenue dans $[2p]'$ et coupant $[2p - 1]'$ suivant $\{p - 1\}'$. L'intersection de $\{p\}'$ avec $[p]''_0$ est un point non situé sur $[p - 1]''_0$. Par conséquent, la variété des $\{p\}'$ est homéomorphe au produit topologique de la cellule ouverte A par la cellule ouverte $[p]''_0 - [p - 1]''_0$. Par projection stéréographique de centre $[0]$, il lui correspond sur Q_{2p} une variété d'éléments $\{k\}$ qui forme bien une cellule algébrique ouverte. On voit facilement que la frontière de cette cellule est formée par les variétés indiquées dans l'énoncé du lemme.

Si $a_0 = 0$, on vérifie le lemme en remarquant que la variété des génératrices $\{p\}$ de Q_{2p} qui passent par le point $[0]$ correspond d'une façon biunivoque à la variété des génératrices $\{p - 1\}$ de Q_{2p-2}.

Nous dirons que les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot \cdot]$ *sont les variétés fondamentales de* V. *En vertu du lemme, elles subdivisent* V *en cellules algébriques complexes. Elles forment donc les bases d'homologie pour les dimensions paires. Les nombres de Betti pour les dimensions impaires sont nuls, et il n'y a pas de coefficients de torsion.*

Donnons explicitement les bases d'homologie pour la variété V engendrée par les génératrices $\{3\}$ d'une quadrique Q_6.

$[3, \cdot, \cdot, \cdot]$	$R_{12} = 1$
$[2, \cdot, \cdot, \cdot]$	$R_{10} = 1$
$[1, \cdot, \cdot, \cdot]$	$R_8 = 1$
$[0, \cdot, \cdot, \cdot]$ $[1, 2, 3, \cdot]$	$R_6 = 2$
$[0, 2, 3, \cdot]$	$R_4 = 1$
$[0, 1, 3, \cdot]$	$R_2 = 1$
$[0, 1, 2, \cdot]$	$R_0 = 1$

On reconnait que V a la même dimension et les mêmes constantes topologiques que Q_6. V et Q_6 sont effectivement homéomorphes. On connait, en effet, une correspondance biunivoque entre les points de la quadrique Q_6 et ses génératrices de l'un des deux systèmes de génératrices à 3 dimensions.[30]

Remarquons qu'on pourrait remplacer les symboles $[a_0, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ par des symboles légèrement différents. Soit $[p]_1$ une génératrice de Q_{2p} coupant $[p]_0$ suivant la variété $[p-1]$ de la suite (1). $[p]_0$ et $[p]_1$ sont des génératrices de systèmes différents. Considérons la suite de variétés planes:

$$(1)' \qquad [p]_1 \supset [p-1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

Si $\{p\}$ est un élément de V, son intersection avec $[p]_1$ est nulle ou a un nombre impair de dimensions. Prenons $2i$ variétés appartenant à la suite (1)': $[a_0] \subset [a_1] \subset \cdots \subset [a_{2i-1}]$. Le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i-1}, \cdot, \cdot\cdot]$ représentera la variété des éléments $\{p\}$ qui coupent $[a_s]$ suivant une variété à s dimensions. La variété V elle-même serait ainsi représentée par $[\cdot, \ , \cdots]$, où figurent seulement $p+1$ points. Nous dirons qu'un symbole est de *première* ou de *seconde* espèce, suivant qu'il contient $2i+1$ ou $2i$ nombres. Toute variété fondamentale est représentée par un symbole de première espèce et par un symbole de seconde espèce. Ces deux symboles contiennent les mêmes nombres inférieurs à p; le nombre p figure toujours dans l'un des symboles et ne figure pas dans l'autre. Par exemple, $[0, 2, 3, \cdot, \cdot]$ et $[0, 2, 3, 4, \cdot]$ représentent la même variété; de même $[1, 3, 4, \cdot, \cdot]$ et $[1, 3, \cdot, \cdot, \cdot]$ représentent la même variété. Le lemme s'énonce de la même façon quand on emploie des symboles de seconde espèce.

La dimension complexe de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ est égale à $\dfrac{p(p+1)}{2} - (p-a_0) - (p-a_1) - \cdots - (p-a_s)$. En effet, cette expression diminue d'une unité quand on remplace un des nombres a_j par $a_j - 1$ ou quand on remplace deux points qui suivent a_s par $p-1$ et p. D'autre part elle prend toutes les valeurs entières de $p(p+1)/2$ à 0. Remarquons qu'on peut associer à toute variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ telle que les nombres $a_0, a_1, \cdots, a_s, b_0, b_1, \cdots, b_t$ soient, à l'ordre près, les nombres de

[30] Ceci est lié à l'existence d'un parallélisme absolu dans l'espace elliptique réel à 7 dimensions. Voir: F. Vaney, *a*.

la suite $0, 1, \cdots, p$. Les deux variétés sont de dimensions complémentaires et les deux symboles seront dits *symboles associés.*

Démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Etant données deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires, leur indice de Kronecker est égal à* 1 *lorsqu'elles sont représentées par deux symboles associés; sinon il est égal à zéro.*

Soient $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ deux symboles associés, le premier étant de première espèce. Considérons les variétés planes de la suite (1) ainsi que leurs variétés conjuguées par rapport à Q_{2p}; soit $[2p - k]$ la variété conjugée de $[k]$. Nous avons alors une suite de variétés planes:

$$(3) \qquad [2p + 1] \supset [2p] \supset \cdots \supset [p]_0 \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [0].$$

Montrons que les éléments $\{p\}$ de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ appartiennent à la variété fondamentale de Schubert définie par le symbole

$$[a_0, a_1, \cdots, a_s, n - b_t, \cdots, n - b_1, n - b_0]$$

à l'aide de $p + 1$ variétés de la suite (3); nous avons posé $n = 2p + 1$. En effet, comme un tel élément $\{p\}$ coupe $[a_i]$ suivant une variété à i dimensions, il coupe la variété conjuguée $[2p - a_i]$ suivant une variété à $\varphi(i)$ dimensions, où $\varphi(i) = p - a_i + i$. On a: $\varphi(i) - \varphi(i + 1) = a_{i+1} - a_i - 1$. La différence $\varphi(j) - \varphi(i)$ indique combien des nombres $b_0, b_1, \cdots, b_t$ sont compris entre a_j et a_i. Si dans le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ tous les nombres de a_j à a_i sont des nombres consécutifs, on a $\varphi(i) = \varphi(j)$. Soit a_i un nombre du symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ tel que $a_i + 1$ soit égal à un nombre $b_{i'}$ du symbole $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$. L'élément $\{p\}$ coupe $[n - b_{i'}]$ suivant une variété à $\varphi(i)$ dimensions. Remarquons que $\varphi(i) = p - (a_i - i) = p - i'$. Il en résulte bien que $\{p\}$ fait partie de la variété fondamentale de Schubert de symbole

$$[a_0, a_1, \cdots, a_s, n - b_t, \cdots, n - b_1, n - b_0].$$

De même les éléments $\{p\}$ de la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ font partie d'une variété de Schubert de symbole $[b_0, b_1, \cdots, b_t, n - a_s, \cdots, n - a_1, n - a_0]$. Si $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ est de seconde espèce, il faut considérer à la place de la suite (3) l'ensemble des variétés de la suite (1)' et de leurs conjuguées par rapport à Q_{2p}. En déplaçant la génératrice $[p]_0$, nous pouvons donner à la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ une position générale par rapport à la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$. Ces deux variétés sont alors contenues dans deux variétés de Schubert qui ont un élément commun. On reconnait que cet élément commun appartient à Q_{2p}. Donc l'indice de Kronecker des deux variétés associées est bien égal à 1.

Soit $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot\cdot]$ une autre variété fondamentale dont la dimension est complémentaire à celle de $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$. Nous supposons que les variétés planes qui servent à définir $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot\cdot]$ appartiennent à une suite $[p]' \supset [p - 1]' \supset \cdots \supset [0]'$, où $[p]'$ est une génératrice qui n'a pas de point commun avec $[p]_0$. Si $r + s > p - 1$, les deux variétés

$[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot \cdot]$ et $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot \cdot]$ n'ont pas d'élément commun; sinon $[a_s]$ et $[c_r]'$ auraient un point commun, ce qui est impossible. Supposons $s + r \leqq p - 1$; d'où $r \leqq t$. Comme $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot \cdot]$ et $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot \cdot]$ ont la même dimension, on a:

$$p - b_0 + p - b_1 + \cdots + p - b_t = p - c_0 + p - c_1 + \cdots + p - c_r.$$

Au moins un des nombres $c_0, c_1, \cdots, c_r$ est donc inférieur au nombre de même rang de la suite $b_0, b_1, \cdots, b_t$; soit $c_i < b_i$. Alors les variétés $[n - b_i]$ et $[c_i]'$ n'ont pas de point commun. Donc les variétés $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot \cdot]$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_s, n - b_t, \cdots, n - b_1, n - b_0]$ n'ont pas d'élément commun.

Du théorème ainsi démontré il résulte que tout cycle Γ_{2k} de la variété V s'exprime par une homologie de la forme:

$$\Gamma_{2k} \sim \Sigma\, (b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot \cdot)\, [a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot \cdot],$$

où $(b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot \cdot]$ est l'indice de Kronecker de Γ_{2k} avec la variété fondamentale associée à $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot \cdot]$.

16. **L'espace des variétés planes à p dimensions qui appartiennent à un complexe linéaire non dégénéré d'un espace projectif à $2p + 1$ dimensions complexes.** Soit C un complexe linéaire de droites défini dans l'espace projectif complexe $[2p + 1]$. Nous supposons que C est non dégénéré. Les droites de C qui passent par un point M remplissent un hyperplan $[2p]$, qui est appelé hyperplan conjugué de M. A une variété $[i]$ est associée une variété conjuguée $[2p - i]$; c'est la variété commune à tous les hyperplans conjugués des points de $[i]$. Si $i < p$, il y a des variétés $[i]$ qui sont contenues dans leurs variétés conjuguées. Nous disons qu'une telle *variété* $[i]$ *appartient au complexe*; toute droite de $[i]$ est alors une droite du complexe. Une variété $[p]$ qui appartient au complexe est confondue avec sa conjuguée. Soit V la variété des $[p]$ qui appartiennent au complexe. Les propriétés de V ressemblent à celles de la variété des génératrices à p dimensions d'une quadrique Q_{2p}.[31] Désignons par $\{p\}$ un élément quelconque de V et soit $[p]_0$ un élément particulier de V. Nous allons démontrer le lemme suivant:

LEMME I. *La variété V devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en enlève tous les $\{p\}$ qui rencontrent $[p]_0$.*

La démonstration se fait de nouveau par induction. Soit O un point de $[p]_0$ et soit $[2p]_0$ l'hyperplan conjugué de O. $[2p]_0$ contient $[p]_0$. Tout $\{p\}$ qui ne rencontre pas $[p]_0$ coupe $[2p]_0$ suivant une variété $\{p - 1\}$ qui ne rencontre pas $[p]_0$. Soit $\{p + 1\}$ la variété conjuguée de $\{p - 1\}$. Les éléments $\{p\}$ qui passent par $\{p - 1\}$ sont les variétés planes à p dimensions qui passent par $\{p - 1\}$ et qui sont contenues dans $\{p + 1\}$. Considérons une variété $[p - 1]_0$ contenue dans $[p]_0$ et ne passant pas par O. La variété $[p + 1]_0$, conjuguée de

[31] Pour les propriétés classiques d'un complexe linéaire, voir C. Segre, *a*.

$[p-1]_0$, coupe $[2p]_0$ suivant $[p]_0$. $\{p+1\}$ et $[p+1]_0$ se coupent suivant une droite passant par O. Tout élément $\{p\}$ passant par $\{p-1\}$ coupe $[p+1]_0$ suivant un point et correspond ainsi d'une façon biunivoque à une variété $[p]'$ passant par $[p-1]_0$ et contenue dans $[p+1]_0$. Les éléments $\{p\}$ qui passent par $[p-1\}$ engendrent une cellule ouverte lorsqu'on enlève l'élément qui passe par O. Le lemme sera donc démontré quand on aura montré que les variétés $\{p-1\}$ qui ne rencontrent pas $[p]_0$ forment une cellule ouverte.

Considérons dans $[2p]_0$ une variété $[2p-1]_0$ qui coupe $[p]_0$ suivant $[p-1]_0$. Les droites du complexe C qui sont contenues dans $[2p-1]_0$ engendrent un complexe linéaire non dégénéré C'. Par projection centrale de centre O, toute variété $\{p-1\}$ dans $[2p]_0$ qui appartient au complexe C et qui ne rencontre pas $[p]_0$ se projette sur $[2p-1]_0$ suivant une variété $\{p-1\}'$ qui appartient au complexe C' et qui ne rencontre pas $[p-1]_0$. Par hypothèse, les variétés $\{p-1\}'$ engendrent une cellule algébrique ouverte. Les variétés $\{p-1\}$ qui se projettent suivant une variété $\{p-1\}'$ donnée et qui ne passent pas par O engendrent une cellule ouverte. On peut les mettre en correspondance biunivoque avec les variétés $[2p-1]$ qui sont déterminées par $\{p-1\}$ et $[p-1]_0$. Donc les $\{p-1\}$ qui ne rencontrent pas $[p]_0$ engendrent bien une cellule ouverte.

Le lemme se démontre directement pour $p = 1$ en appliquant les réflexions précédentes; il est donc prouvé quel que soit p.

Considérons dans $[p]_0$ une suite de variétés planes:

$$[p]_0 \supset [p-1]_0 \supset \cdots \supset [1]_0 \supset [0]_0.$$

Le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$, où $0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_s \leqq p$, représentera la variété des éléments $\{p\}$ de V qui coupent $[a_i]_0$ suivant une variété à i dimensions. On a ajouté $p - s$ points à la suite de a_s, pour indiquer que l'élément générateur est à p dimensions.

LEMME II. *La variété* $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ *devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en enlève l'ensemble des variétés représentées par les symboles qu'on obtient en diminuant d'une unité un des nombres du symbole donné ou en écrivant le nombre p à la suite de* a_s, *si* $a_s < p$. *Tout symbole qui n'a pas de sens est remplacé par zéro.*

Nous raisonnons de nouveau par induction par rapport à p. Le lemme se vérifie immédiatement pour $p = 1$. Soit $[2p]'$ une variété plane qui coupe $[a_0]_0$ suivant $[a_0 - 1]_0$ et les variétés $[a_0 + 1]_0, [a_0 + 2]_0, \cdots, [p]_0$ suivant des variétés $[a_0]', [a_0 + 1]', \cdots, [p-1]'$. Considérons un élément général $\{p\}$ de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$. Il est déterminé par un point M de $[a_0]_0$ et une variété $\{p-1\}$ contenue dans $[2p]'$. Nous supposons que M n'appartient pas à $[a_0 - 1]_0$. L'hyperplan conjugué de M coupe $[2p]'$ suivant une variété $[2p-1]'$. Les droites du complexe C qui sont contenues dans $[2p-1]'$ engendrent un complexe linéaire C'. La variété $\{p-1\}$ appartient au complexe C' et engendre, pour un point M donné, la variété de symbole

$$[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_s - 1, \cdot, \cdot\cdot]'$$

définie à l'aide des variétés $[a_1 - 1]'$, $[a_2 - 1]'$, $\cdots$, $[a_s - 1]'$. Par hypothèse on peut appliquer le lemme à la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_s - 1, \cdot, \cdot\cdot]'$. Faisons décrire à M la cellule ouverte $[a_0]_0 - [a_0 - 1]_0$. A deux points M_1 et M_2 correspondent deux hyperplans conjugués qui coupent $[2p]'$ suivant des variétés $[2p - 1]_1'$ et $[2p - 1]_2'$. Celles-ci ne contiennent pas le pôle I de l'hyperplan $[2p]'$. Les variétés $\{p - 1\}$ dans $[2p - 1]_1'$ et $[2p - 1]_2'$ peuvent être mises en correspondance biunivoque par projection centrale de centre I. La variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ dont on a enlevé les éléments qui rencontrent $[a_0 - 1]_0$ est donc le produit topologique de $[a_0]_0 - [a_0 - 1]_0$ par la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_s - 1, \cdot, \cdot\cdot]'$. Le lemme résulte de cette propriété.

Nous dirons encore que les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ *sont les variétés fondamentales de* V. *Elles subdivisent* V *en cellules algébriques et forment par suite les bases d'homologie.*

La dimension complexe de V est $(p + 1)(p + 2)/2$. En raisonnant comme au §15, on trouve que la dimension complexe de $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ est

$$\frac{(p + 1)(p + 2)}{2} - (p + 1 - a_0) - (p + 1 - a_1) - \cdots - (p + 1 - a_s).$$

Soient $b_0, b_1, \cdots, b_t$ les nombres de la suite $0, 1, \cdots, p$ qui ne figurent pas parmi la suite $a_0, a_1, \cdots, a_s$. La variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ sera dite *associée* à $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$. Deux variétés associées sont de dimensions complémentaires. On montre comme au §15 que *l'indice de Kronecker de deux variétés associées est égal à* 1. *Si deux variétés de dimensions complémentaires ne sont pas des variétés associées, leur indice de Kronecker est nul.* Par conséquent tout cycle Γ_{2k} s'exprime par une homologie de la forme:

$$\Gamma_{2k} \sim \Sigma(b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot)[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot],$$

les notations étant les mêmes qu'au §15.

Il y a une analogie frappante entre la variété des génératrices $\{p + 1\}$ d'une quadrique Q_{2p+2} et la variété des éléments $\{p\}$ appartenant à un complexe linéaire de l'espace $[2p + 1]$. Dans les deux cas, toute variété fondamentale est définie par un ensemble d'entiers $(a_0, a_1, \cdots, a_s)$ tels que $0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_s \leqq p$; le nombre $p + 1$ qui peut figurer dans les symboles des variétés fondamentales du premier cas ne joue pas un rôle essentiel. Les invariants topologiques ordinaires (nombres de Betti, coefficients de torsion, groupe de Poincaré) sont les mêmes. Cependant les deux variétés ne sont pas homéomorphes. Soit, en effet, le cas $p = 1$. La variété des génératrices $\{2\}$ d'une quadrique Q_4 est homéomorphe à l'espace projectif [3]. La variété des droites d'un complexe linéaire de [3] est homéomorphe à une quadrique Q_3. On voit facilement que les variétés [3] et Q_3 ne sont pas homéomorphes. Il suffit de considérer dans les deux cas l'intersection avec lui-même du cycle de base à 2 dimensions complexes.

17. Application de la méthode des invariants intégraux. Il est intéressant de retrouver certains des résultats précédents par la méthode des invariants intégraux[32] du §5.

Considérons la quadrique Q_{2p} d'équation:

$$(1) \qquad x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p = 0.$$

Soit $\{p\}_0$ la génératrice $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$. Les génératrices $\{p\}$ voisines de $\{p\}_0$ sont représentées par:

$$x_i = \sum_j a_{ij} y_j, \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

La variété V des génératrices $\{p\}$ de même système que $\{p\}_0$ est transformée transitivement par le groupe projectif G qui laisse invariantes la quadrique (1) et les relations $y_i = \bar{x}_i$. G est équivalent au groupe orthogonal à paramètres réels et à $2p + 2$ variables. Le groupe d'isotropie g relatif à l'élément-origine $\{p\}_0$ est défini par:

$$(g) \qquad \begin{aligned} (x') &= (a)(x) \\ (y') &= (\bar{a})(y) \end{aligned} \qquad (a)(\bar{a})^* = 1$$

V peut être considéré comme l'espace riemannien symétrique défini par G et g, la symétrie par rapport à l'élément $\{p\}_0$ étant définie par:

$$(x') = -(x), \qquad (y') = (y).$$

Le groupe linéaire d'isotropie γ opère sur des variables complexes ω_{ij} et sur les variables complexes conjuguées $\bar{\omega}_{ij}$. On a $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$. Les ω_{ij} se transforment comme les formes extérieures $[x_i\, x_j]$, en supposant que les variables $x_0, x_1, \cdots, x_p$ subissent les transformations du groupe unitaire $(x') = (a)\,(x)$, où $(a)\,(\bar{a})^* = 1$. Aux transformations unimodulaires de ce dernier groupe correspond un groupe linéaire γ'' opérant sur les ω_{ij}. On est de nouveau conduit à décomposer en groupes irréductibles le groupe γ_s'' qui opère sur les formes extérieures $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$. En répétant les raisonnements du §7, on obtient facilement les variables dominantes de ces groupes irréductibles. Considérons le tableau des variables ω_{ij} qui s'obtient en gardant dans la matrice (ω_{ij}) seulement les éléments placés au-dessus de la diagonale principale. Etant donné un ensemble d'entiers $l_0, l_1, \cdots, l_k$ tels que $p \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k > 0$ et tels que $l_0 + l_1 + \cdots + l_k = s$, prenons les l_0 premiers éléments de la première ligne du tableau des ω_{ij}, puis les l_1 premiers éléments de la seconde ligne, etc. Le produit extérieur de tous ces éléments, $[\omega_{01}\,\omega_{02} \cdots \omega_{0l_0}\,\omega_{12}\,\omega_{13} \cdots]$, est une des variables dominantes cherchées. Toute variable dominante s'obtient ainsi. Donc:

[32] Pour ce qui concerne les quadriques complexes, voir E. Cartan, *g*.

THÉORÈME. *Le nombre d'invariants intégraux de degré 2s, ou le nombre de Betti R_{2s}, est égal au nombre d'ensembles d'entiers $(l_0, l_1, \cdots, l_k)$ tels que:*

$$p \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k \geqq 0, \qquad l_0 + l_1 + \cdots + l_k = s.$$

Considérons de même le complexe linéaire défini par l'équation:

$$[x_0 y_0] + [x_1 y_1] + \cdots + [x_p y_p] = 0. \tag{2}$$

La variété $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$ est une variété $\{p\}_0$ appartenant au complexe linéaire. Soit $\{p\}$ une variété quelconque appartenant au complexe linéaire. Les variétés $\{p\}$ voisines de $\{p\}_0$ sont représentées par:

$$x_i = \sum_j a_{ij} y_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

La variété W engendrée par les $\{p\}$ est transformée transitivement par le groupe linéaire G qui laisse invariants le premier membre de l'équation (2) ainsi que la forme d'Hermite $\sum_i x_i \bar{x}_i + \sum_i y_i \bar{y}_i$. Le sous-groupe g qui laisse invariant $\{p\}_0$ est de nouveau défini par:

$$(x') = (a)(x), \qquad (y') = (\bar{a})(y), \qquad (a)(\bar{a})^* = 1.$$

Le groupe linéaire d'isotropie γ opère sur des variables complexes ω_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$ telles que $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. ω_{ij} est transformé comme le produit $x_i x_j$ lorsque les variables x_i subissent les transformations du groupe $(x') = (a)(x)$, où $(a)(\bar{a})^* = 1$. On peut encore considérer le tableau des ω_{ij} obtenu en supprimant dans la matrice (ω_{ij}) les éléments placés *au-dessous* de la diagonale principale. On trouvera par la même règle les variables dominantes appartenant aux groupes γ_s'' et on a le même théorème que dans le cas précédent, les entiers $(l_0, l_1, \cdots, l_k)$ satisfaisant maintenant aux conditions: $p + 1 \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k \geqq 0$, $l_0 + l_1 + \cdots + l_k = s$.

V. Les propriétés topologiques d'une classe de variétés ayant comme élément générateur une figure formée de plusieurs variétés planes

18. **Définitions et propriétés générales.** Les raisonnements des paragraphes précédents peuvent s'appliquer à une classe étendue de variétés algébriques qu'on peut considérer comme des généralisations des variétés de Grassmann. L'exemple le plus simple est fourni par la variété des éléments linéaires de l'espace projectif complexe $[n]$, en appelant élément linéaire l'ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point. On peut considérer plus généralement l'ensemble d'une variété $[\alpha]$ et d'une variété $[\beta]$, où l'on suppose $\alpha < \beta$ et $[\alpha] \subset [\beta]$. Cette figure peut être prise comme élément générateur d'une variété et sera représentée par le symbole $\{\alpha, \beta\}$. Ainsi un élément linéaire est représenté par $\{0, 1\}$. On peut encore considérer des variétés ayant comme élément générateur la figure formée par $k + 1$ variétés $[\alpha_0], [\alpha_1], \cdots, [\alpha_k]$ telles que:

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k; \qquad [\alpha_0] \subset [\alpha_1] \subset \cdots \subset [\alpha_k] \subset [n].$$

Un tel élément générateur sera représenté par $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$. Remarquons que chaque élément $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ définit aussi une variété fondamentale de Schubert.

Soit V la variété de tous les éléments $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ contenus dans $[n]$, les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ étant des nombres donnés. D'après le théorème fondamental de la géométrie projective, il existe une transformation homographique de $[n]$ qui transforme un élément arbitraire $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}_1$ en un autre élément arbitraire $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}_2$. La variété V est donc transformée transitivement par le groupe projectif de $[n]$. En raisonnant comme dans le cas des variétés de Grassmann, on montre que V est aussi transformée transitivement par le groupe hermitien elliptique. V définit donc encore un espace homogène clos ayant pour groupe de structure le groupe hermitien elliptique. Mais cet espace homogène n'est pas symétrique.

La dimension complexe de V est égale à

$$(\alpha_0 + 1)(\alpha_1 - \alpha_0) + (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_k + 1)(n - \alpha_k).$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré de V s'obtient encore en appliquant le théorème de M. S. Lefschetz. Une homographie générale de $[n]$ laisse fixes les $n + 1$ sommets d'un simplexe non dégénéré. Le nombre d'éléments $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ qui sont fixes par l'homographie est égal à

$$\binom{n+1}{\alpha_k + 1}\binom{\alpha_k + 1}{\alpha_{k+1} + 1}\cdots\binom{\alpha_1 + 1}{\alpha_0 + 1}.$$

Ce nombre est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré, car en vertu du théorème démontré à la fin du §7, chaque élément fixe doit être compté avec une multiplicité égale à 1.

19. **La variété des éléments $\{\alpha, \beta\}$ de $[n]$.** La variété de tous les éléments (α, β) de $[n]$ est une variété algébrique V contenue dans le produit topologique de la variété des éléments $\{\alpha\}$ par la variété des éléments $\{\beta\}$ de $[n]$. Considérons de nouveau une suite de variétés planes $[n - 1], [n - 2], \cdots, [1], [0]$ telles que:

$$(1) \qquad [n] \supset [n-1] \supset [n-2] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

Elles déterminent les variétés fondamentales $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$ engendrées par des éléments $\{\alpha\}$ et les variétés fondamentales $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$ engendrées par des éléments $\{\beta\}$. Le symbole $\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha \\ b_0, b_1, \cdots, b_\alpha, \cdots, b_\beta \end{bmatrix}$ représentera la variété des éléments $\{\alpha, \beta\}$ définis par l'ensemble d'un $\{\alpha\}$ appartenant à $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$ et d'un $\{\beta\}$ appartenant à $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$. Pour que $\{\alpha\}$ et $\{\beta\}$ puissent être des éléments généraux des variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$, il faut et il suffit que tout nombre a_i soit égal à un nombre b_j dont l'indice j est supérieur ou égal à i. Lorsque cette condition est satisfaite, le symbole considéré sera dit irréductible et représentera une variété irréductible que nous appellerons *variété fondamentale.* Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, le symbole est réductible et représente, en général, la somme de plusieurs variétés fondamentales. Soit, en effet, a_i le premier nombre de la première ligne du symbole qui ne figure pas parmi les nombres b_j de la deuxième ligne. Supposons a_i compris entre b_j et b_{j+1} et soit $\{\alpha, \beta\}$ un élément de la variété défini par le symbole donné. Si l'intersection de $[a_i]$ et de $\{\alpha\}$ ne se trouve pas entièrement dans $[b_j]$, la variété $\{\beta\}$ coupera $[a_i]$ suivant une variété $[j + 1]$. Ceci montre qu'on peut remplacer le symbole donné par la somme des deux symboles obtenus en remplaçant soit a_i par b_j, soit b_{j+1} par a_i. Cependant lorsque $b_j = a_{i-1}$, il faudra remplacer a_i par b_j et diminuer d'une unité un ou plusieurs des nombres qui précèdent a_i. Ainsi $\begin{bmatrix} 2, 3 & \\ 0, 2, 4 \end{bmatrix}$ doit être remplacé par $\begin{bmatrix} 2, 3 & \\ 0, 2, 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1, 2 & \\ 0, 2, 4 \end{bmatrix}$. Si les symboles obtenus ne sont pas irréductibles, on applique la même opération jusqu'à ce qu'on arrive à une somme de symboles irréductibles.

Nous allons montrer que les variétés fondamentales fournissent une subdivision de V en cellules algébriques. Pour éviter des longueurs, nous supposerons que V est la variété des éléments $\{1, 6\}$ de l'espace $[n]$; on reconnaîtra immédiatement que le raisonnement est général. Soit $\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ le symbole d'une variété fondamentale F Nous choisissons dans $[n]$ une variété $[n - 2]'$ qui ne rencontre pas les droites générales de $[a_0, a_1]$. Il faudra donc que $[n - 2]'$ coupe $[a_0]$ suivant $[a_0 - 1]$ et $[a_1]$ suivant une variété $[a_1 - 2]'$ qui n'appartient pas à la suite (1) mais qui est contenue dans $[a_1 - 1]$. Alors $[n - 2]'$ contient $[b_0]$ et coupe les variétés $[b_2]$, $[b_3]$, $[b_5]$, $[b_6]$ suivant des variétés $[b_2 - 1]'$, $[b_3 - 1]'$, $[b_5 - 2]'$, $[b_6 - 2]'$. Soit $\{1, 6\}$ un élément de la variété F. Il est composé d'une droite $\{1\}$ et d'une variété $\{6\}$. Nous supposons que la droite $\{1\}$ n'appartient pas à $[a_0, a_1 - 1] + [a_0 - 1, a_1]$. Il s'en suit que $\{1\}$ ne rencontre pas la variété $[n - 2]'$. L'intersection de $\{6\}$ et de $[n - 2]'$ sera une variété $\{4\}$ qui appartient à la variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ définie à l'aide de $[b_0]$, $[b_2 - 1]'$, $[b_3 - 1]'$, $[b_5 - 2]'$, $[b_6 - 2]'$. Réciproquement, l'ensemble d'une droite $\{1\}$ appartenant à $[a_0, a_1] - [a_0, a_1 - 1] - [a_0 - 1, a_1]$ et d'un élément $\{4\}$ de la variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ détermine un élément $\{1, 6\}$ appartenant à la variété F. Donc si l'on enlève de F les éléments $\{1, 6\}$ dont la droite $\{1\}$ appartient à $[a_0, a_1 - 1] + [a_0 - 1, a_1]$, on obtient une variété qui est le produit topologique de la cellule ouverte $[a_0, a_1] - [a_0, a_1 - 1] - [a_0 - 1, a_1]$ et de la variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$. Pour faire de cette dernière variété une cellule ouverte, il faut en enlever des variétés ayant pour symboles $[b_0 - 1, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$, $[b_0, b_2 - 2, \cdots]'$, $\cdots$, $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 3, b_6 - 2]'$, $\cdots$. Les variétés planes qui servent à définir ces symboles sont les intersections des variétés de la suite (1) avec la variété $[n - 2]'$. Les éléments $\{6\}$ qu'on a enlevés de cette façon sont les éléments des variétés représentées par les symboles obtenus à partir de $[b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6]$ en diminuant d'une unité un des nombres b_0, b_2, b_3, b_5, b_6. Une circonstance exceptionnelle se présente lorsque $b_2 - 1 = a_0$ ou $b_5 - 1 = a_1$.

Si $b_2 - 2 = b_0$, on n'a pas à considérer le symbole obtenu en remplaçant b_2 par $b_2 - 1$. Mais si $b_2 - 1 > b_0 + 1$, il faut remplacer a_0 et b_2 par $a_0 - 1$ et a_0. Ce qui précède permet d'énoncer, pour tous les cas, la règle suivante:

La variété fondamentale F de symbole $\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ *devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en enlève les variétés représentées par les symboles qui se déduisent du symbole de F en diminuant d'une unité un des nombres de la première ou de la deuxième ligne. On ne garde que les symboles qui ont un sens et on les décompose en symboles irréductibles.*

On reconnait que notre raisonnement est tout à fait général; la même règle s'applique donc dans le cas des variétés fondamentales engendrées par un élément $\{\alpha, \beta\}$ quelconque. Par conséquent:

Les variétés fondamentales $\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, b_1, \cdots\cdots, & b_\beta \end{bmatrix}$ *subdivisent la variété V en cellules algébriques et fournissent les bases d'homologie. Il n'y a pas de coefficients de torsion et les nombres de Betti* R_{2s+1} *sont nuls.*

M. E. Cartan a bien voulu m'indiquer une autre manière de représenter les variétés fondamentales et de définir les cellules algébriques correspondantes. D'après ce qui précède, on voit que la dimension complexe de la variété $\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, b_1, \cdots\cdots, & b_\beta \end{bmatrix}$ est égale à $\sum_i (a_i - i) + \sum_j (b_j - j)$, où $i = 0, 1, \cdots, \alpha$, tandis que j ne prend que les valeurs des indices des nombres b_λ qui ne figurent pas dans la première ligne du symbole. La variété est complètement définie par l'ensemble des nombres $(a_i - i)$ et $(b_j - j)$, c'est-à-dire par $\beta + 1$ nombres entiers dont les $\alpha + 1$ premiers ne dépassent pas $n - \alpha$ et sont rangés par ordre non décroissant, tandis que les $\beta - \alpha$ nombres suivants ne dépassent pas $n - \beta$ et sont rangés par ordre non décroissant. Ainsi la variété $\begin{bmatrix} 2, 4 & \\ 1, 2, 3, 4, 6 \end{bmatrix}$ serait définie par le système d'entiers $(2, 3 \mid 1, 1, 2)$; sa dimension est égale à 9. La cellule ouverte correspondante est définie de la façon suivante: Considérons les sommets $A_0, A_1, \cdots, A_n$ d'un simplexe de référence, les $p + 1$ premiers points définissant la variété $[p]$ de la suite (1). Formons le tableau suivant:

$A_0A_1A_2$	$2 + 1$ points
$A_0A_1A_3A_4$	$3 + 1$ points
A_0A_1	$1 + 1$ points
A_0A_3	$1 + 1$ points
$A_0A_5A_6$	$2 + 1$ points.

Dans chaque ligne nous évitons d'écrire les derniers points des lignes précédentes. La droite de l'élément $\{1, 4\}$ qui engendre la cellule ouverte est définie par les points $A_2 + (A_0A_1)$ et $A_4 + (A_0A_1A_3)$. La variété $\{4\}$ correspondante est définie par les points précédents plus les trois points $A_1 + (A_0)$, $A_3 + (A_0)$ et $A_6 + (A_0A_5)$. Ici $(A_iA_jA_k)$ représente une combinaison linéaire à coefficients arbitraires des points A_i, A_j, A_k. Les derniers indices des différentes lignes du tableau sont les nombres qui composent le symbole $\begin{bmatrix} 2, 4 & \\ 1, 2, 3, 4, 6 \end{bmatrix}$.

Il est facile d'obtenir *l'indice de Kronecker de deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires.* Soient

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, b_1, \cdots, b_\alpha, \cdots, b_\beta \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a'_0, a'_1, \cdots, a'_\alpha & \\ b'_0, b'_1, \cdots, b'_\alpha, \cdots, b'_\beta \end{bmatrix}$$

les symboles irréductibles des deux variétés considérées. Donnons à la deuxième variété une position générale par rapport à la première; c'est-à-dire nous supposons que les variétés $[b'_i]$ qui servent à définir la deuxième variété fondamentale ont une position générale par rapport aux variétés $[b_j]$ qui servent à définir la première. Pour qu'il y ait un élément $\{\alpha, \beta\}$ commun aux deux variétés il faut qu'on ait, d'après un raisonnement déjà fait à propros des variétés de Grassmann:

$$a_0 + a'_\alpha \geqq n, \qquad a_1 + a'_{\alpha-1} \geqq n, \cdots, a_\alpha + a'_0 \geqq n$$

$$b_0 + b'_\beta \geqq n, \qquad b_1 + b'_{\beta-1} \geqq n, \cdots, b_\beta + b'_0 \geqq n.$$

En particulier, si la deuxième variété fondamentale a pour symbole

$$\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_1, n - b_0 \end{bmatrix},$$

il y a un élément et un seul commun aux deux variétés. Les nombres a'_j et b'_j devront être supérieurs ou égaux aux nombres correspondants dans le symbole $\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_1, n - b_0 \end{bmatrix}$. Or quand on a deux variétés fondamentales F_1 et F_2, définies à l'aide des variétés planes de la suite (1), F_1 est contenu dans F_2 lorsque les nombres du symbole irréductible de F_2 sont supérieurs ou égaux aux nombres correspondants du symbole irréductible de F_1. Dans ces conditions, les deux variétés F_1 et F_2 ne peuvent avoir des dimensions égales que lorsque leurs symboles irréductibles sont identiques. Donc le symbole d'une variété fondamentale ayant un indice de Kronecker non nul par rapport à $\begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta \end{bmatrix}$ ne peut être que $\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, n - b_0 \end{bmatrix}$.

Montrons que:

$$\begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, n - b_0 \end{bmatrix} = 1.$$

Pour cela nous considérons seulement l'exemple des variétés:

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix} \text{et} \begin{bmatrix} n - a_1, n - a_0 & \\ n - b_6, n - b_5, n - a_1, n - b_3, n - b_2, n - a_0, n - b_0 \end{bmatrix}.$$

On verra que le raisonnement est général. Nous avons considéré une variété $[n - 2]'$ coupant $[a_0]$ suivant $[a_0 - 1]$ et $[a_1]$ suivant une variété $[a_1 - 2]'$ contenue dans $[a_1 - 1]$. La variété des éléments $\{1, 6\}$ de $\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]'$ est alors le produit topologique de $[a_0, a_1] - [a_0 - 1, a_1] - [a_0, a_1 - 1]$ par une variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ définie dans $[n - 2]'$. Nous pouvons aussi considérer une variété $[n - 2]''$ coupant $[n - a_1]$ suivant $[n - a_1 - 1]$ et $[n - a_0]$ suivant une variété $[n - a_0 - 2]''$ contenue dans $[n - a_0 - 1]$. Alors la variété des éléments $\{1, 6\}$ de $\begin{bmatrix} n - a_1, n - a_0 & \\ n - b_6, n - b_5, n - a_1, n - b_3, n - b_2, n - a_0, n - b_0 \end{bmatrix}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]''$ est le produit topologique de

$$[n - a_1, n - a_0] - [n - a_1 - 1, n - a_0] - [n - a_1, n - a_0 - 1]$$

par une variété $[n - b_6, n - b_5, n - b_3 - 1, n - b_2 - 1, n - b_0 - 2]''$ définie dans $[n - 2]''$. Par une transformation homographique, nous pouvons amener $\begin{bmatrix} n - a_1, n - a_0 & \\ n - b_6, n - b_5, n - a_1, n - b_3, n - b_2, n - a_0, n - b_0 \end{bmatrix}$ en une position générale par rapport à $\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ de telle façon que $[n - 2]''$ vienne en coïncidence avec $[n - 2]'$. Nous indiquons par un indice inférieur égal à 1 tout ce qui se rapporte à la variété qu'on a déplacée. Nous pouvons supposer que les variétés $[n - a_1 - 1]$ et $[n - a_0 - 2]''$ viennent en coincidence avec des variétés $[n - a_1 - 1]_1$ et $[n - a_0 - 2]_1''$ de $[n - 2]'$ telles que $[a_0 - 1]$ et $[n - a_0 - 2]_1''$ ne se rencontrent pas et telles que $[a_1 - 2]'$ et $[n - a_1 - 1]_1$ ne se rencontrent pas. Alors les deux variétés fondamentales considérées ne peuvent avoir aucun élément d'intersection $\{1, 6\}$ dont la droite $\{1\}$ rencontre $[n - 2]'$. En ce qui concerne l'indice de Kronecker des deux variétés, il suffit donc d'en considérer les parties engendrées par des éléments $\{1, 6\}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]'$. Les deux variétés dont il faut chercher l'indice de Kronecker sont donc le produit topologique de $[a_0, a_1] - [a_0 - 1, a_1] - [a_0, a_1 - 1]$ par $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ et le produit topologique de

$$[n - a_1, n - a_0]_1 - [n - a_1 - 1, n - a_0]_1 - [n - a_1, n - a_0 - 1]_1$$

par $$[n - b_6, n - b_5, n - b_3 - 1, n - b_2 - 1, n - b_0 - 2]_1''.$$

La variété totale des éléments $\{1, 6\}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]'$ est le produit topologique de la variété des droites qui ne rencontrent pas $[n - 2]'$ par la variété des $\{4\}$ de $[n - 2]'$. De tout cela il résulte que l'indice de Kronecker cherché est égal à $+1$, car l'indice de Kronecker de $[a_0, a_1]$ avec $[n - a_1, n - a_0]_1$ est égal à $+1$ et l'indice de Kronecker de $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ avec $[n - b_6, n - b_5, n - b_3 - 1, n - b_2 - 1, n - b_0 - 2]_1''$ est égal à $+1$.

Soit Γ_{2s} un cycle sur V de dimension $2s$. On aura l'homologie:

$$\Gamma_{2s} \sim \sum \begin{pmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, & n - b_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, \cdots\cdots, & b_\beta \end{bmatrix},$$

le facteur $\begin{pmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_0 \end{pmatrix}$ étant l'indice de Kronecker de Γ_{2s} et de $\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_0 \end{bmatrix}$. *Ceci résout en même temps le problème des caractéristiques de Schubert et donne le nombre d'intersections de deux cycles quelconques de dimensions complémentaires.*

20. **La variété des éléments** $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ **contenus dans** $[n]$. Considérons le cas d'un élément générateur $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ composé de trois variétés planes $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$. Soit V la variété de tous les éléments $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de $[n]$. Considérons de nouveau une suite de variétés planes $[n - 1], \cdots, [1], [0]$ telles que:

$$[n] \supset [n-1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0]. \tag{1}$$

En prenant dans cette suite $\alpha + 1$ variétés $[a_i]$, $\beta + 1$ variétés $[b_j]$ et $\gamma + 1$ variétés $[c_k]$, le symbole

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha \\ b_0, b_1, \cdots\cdots, b_\beta \\ c_0, c_1, \cdots\cdots\cdots, c_\gamma \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_\alpha \leqq n \\ 0 \leqq b_0 < b_1 < \cdots < b_\beta \leqq n \\ 0 \leqq c_0 < c_1 < \cdots < c_\gamma \leqq n \end{matrix} \tag{2}$$

représentera la variété des éléments $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ composés d'un élément $\{\alpha\}$ appartenant à $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$, d'un élément $\{\beta\}$ appartenant à $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$ et d'un élément $\{\gamma\}$ appartenant à $[c_0, c_1, \cdots, c_\gamma]$. Pour que les éléments $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ et $\{\gamma\}$ qui composent l'élément général $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de la variété (2) soient des éléments généraux de leurs variétés respectives, il faut et il suffit que tout nombre a_i soit égal à un nombre b_j, où $i \leqq j$, et que tout nombre b_j soit égal à un nombre c_k, où $j \leqq k$. Lorsque ces conditions sont satisfaites, le symbole (2) sera dit irréductible et la variété qu'il définit sera appelée variété fondamentale. Cette variété fondamentale moins le lieu de ses éléments singuliers est transformée transitivement par un groupe projectif continu, un élément $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ étant dit singulier lorsqu'un de ses éléments composants, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, est singulier dans sa variété respective. Les variétés fondamentales sont par suite des variétés algébriques irréductibles. Lorsqu'un symbole n'est pas irréductible, on peut le remplacer par un ou plusieurs symboles irréductibles en procédant selon les indications du paragraphe précédent.

Considérons dans V toutes les variétés fondamentales qu'on peut définir à l'aide des variétés planes de la suite (1). Elles définissent une subdivision de V en cellules algébriques. On a, en effet, la règle suivante:

Si (2) *est le symbole irréductible d'une variété fondamentale, on considère tous les symboles qu'on peut en déduire en diminuant d'une unité un des nombres* a_i, b_j *ou* c_k. *On décompose les symboles ainsi obtenus en symboles irréductibles. La variété fondamentale* (2) *devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en* *enlève l'ensemble des variétés fondamentales représentées par ces symboles irréductibles.*

Pour prouver la règle, il suffit de remarquer que la variété qui reste, après l'enlèvement de ces variétés-frontières, est le produit topologique d'une cellule algébrique engendrée par des éléments $\{\alpha, \beta\}$ et d'une cellule algébrique engendrée par des éléments $\{\gamma - \beta - 1\}$ d'une certaine variété $[n - \beta - 1]'$. En ce qui concerne *l'indice de Kronecker de deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires,* on montre encore que:

$$\begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha & & \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta & & \\ c_0, \cdots\cdots\cdots, c_\gamma & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, n - b_0 \\ n - c_\gamma, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, n - c_0 \end{bmatrix} = 1$$

Si les symboles de deux variétés fondamentales ne se correspondent pas de cette façon, l'indice de Kronecker correspondant est nul. Donc si Γ_{2s} est un cycle sur V, on a l'homologie:

$$\Gamma_{2s} \sim \Sigma \begin{pmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, n - b_0 \\ n - c_\gamma, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, n - c_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta \\ c_0, \cdots\cdots\cdots, c_\gamma \end{bmatrix},$$

les notations étant analogues à celles des paragraphes précédents. Ceci résout en même temps le problème des caractéristiques de Schubert.

Il est bien clair qu'on a des résultats tout à fait analogues dans le cas de la variété des éléments $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ contenus dans $[n]$.

A titre d'exemple, donnons les bases d'homologie de la variété des éléments $\{0, 1, 2\}$ contenus dans [3].

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \qquad R_{12} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \qquad R_{10} = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1,2 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \qquad R_8 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0,2 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_6 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_4 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_0 = 1$$

La somme des nombres de Betti est toujours égale à la valeur de la caractéristique d'Euler-Poincaré qui a été déterminée au §18.

21. **Remarque sur la topologie du groupe de la geométrie hermitienne elliptique.** Les variétés de Grassmann et les variétés plus générales qu'on vient d'étudier sont transformées transitivement par le groupe hermitien elliptique G et peuvent donc être considérées comme des espaces de décomposition de la variété de G. Il ne semble pas facile de subdiviser la variété de G en cellules et de déterminer de cette façon les invariants topologiques de G.[33] Cependant on arrive à une représentation assez concrète de cette variété en considérant la variété V des éléments $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ de l'espace projectif $[n]$. Nous supposons que G est le groupe projectif de $[n]$ qui laisse invariante la forme d'Hermite $x_0 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_1 + \cdots + x_n \bar{x}_n$. Nous prenons comme élément-origine de V l'élément $\{0, 1, \cdots, n-1\}_0$ composé des variétés $[\alpha]$ d'équations $x_k = 0$ pour $k > \alpha$, α étant un des nombres $0, 1, \cdots, n-1$. Le sous-groupe g qui laisse invariant l'élément-origine a pour équations:

$$x_k' = e^{i\varphi_k} x_k \qquad (k = 0, 1, \cdots, n). \tag{1}$$

La variété de g est homéomorphe à un tore à n dimensions (produit topologique de n cercles).

La topologie de V est connue. A chaque point de V correspond dans G une variété homéomorphe à un tore à n dimensions. A un domaine suffisamment petit de V correspond dans G le produit topologique de ce domaine par le tore à n dimensions. G n'est pas intégralement le produit topologique de V par le tore à n dimensions; car s'il en était ainsi, le groupe de Poincaré de G serait infini. Or M. E. Cartan a démontré[34] que le groupe de Poincaré de G est le groupe cyclique d'ordre $n + 1$, le groupe simplement connexe $\bar{G}$ localement isomorphe à G étant le groupe linéaire unimodulaire de la forme d'Hermite $x_0 \bar{x}_0 + \cdots + x_n \bar{x}_n$.

A l'aide des résultats du §2, nous pouvons vérifier que V est simplement

[33] Une formule théorique pour le calcul des nombres de Betti a été donnée par M. E. Cartan, *b*, p. 218–222.

[34] Voir E. Cartan, *d*.

connexe. A g correspond, en effet, dans $\bar{G}$ un groupe connexe $\bar{g}$ également homéomorphe à un tore à n dimensions. Il en résulte que toutes les variétés algébriques considérées jusqu'ici sont simplement connexes, car, après un choix convenable de l'élément-origine, leurs groupes d'isotropie, qui sont connexes, contiennent toujours le groupe d'isotropie g de V.

La variété V peut aussi être considérée comme un espace de décomposition du groupe $\bar{G}$, à tout point de V correspondant encore dans $\bar{G}$ un tore à n dimensions.

22. **Remarques finales.** Toutes les variétés algébriques que nous avons étudiées dans ce mémoire sont des variétés rationnelles. Chacune d'elles constitue, en effet, une cellule algébrique dont l'intérieur admet une représentation birationnelle et biunivoque sur l'espace euclidien tout entier. Il est probable que certaines des propriétés topologiques rencontrées sont des propriétés communes à toutes les variétés rationnelles. En particulier, il serait intéressant de savoir si pour toute variété rationnelle sans singularités les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls et s'il n'y a pas de coefficients de torsion. On démontre facilement que *toute variété rationnelle sans singularités est simplement connexe.* D'une façon plus générale:

Deux variétés algébriques sans singularités qui se correspondent par une transformation birationnelle ont des groupes de Poincaré isomorphes.

Ceci résulte du fait que l'ensemble des points fondamentaux (c'est-à-dire des points dont chacun correspond à une infinité de points) constitue une variété dont la dimension complexe est inférieure à $d - 1$, d étant la dimension complexe des variétés données.

Il faudrait aussi étudier la topologie des *nappes réelles* des variétés de Grassmann et de leurs généralisations. On a immédiatement une subdivision de ces variétés en cellules algébriques réelles. Les variétés analogues aux variétés fondamentales introduites ici fournissent les bases pour l'homologie (mod 2). Pour certains cas il est facile de déterminer les nombres de Betti et les coefficients de torsion. Nous développerons ces résultats dans un autre article.

La méthode que nous avons employée permet d'étudier encore d'autres variétés algébriques. Elle conduit a des solutions simples et rigoureuses de certains problèmes de géométrie énumérative. Elle s'applique en particulier à la variété des coniques ou des quadriques de l'espace projectif $[n]$.