TCHENG TCHOU-YUN

Sur les inégalités différentielles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__163__1_0>

N° D'ORDRE :
20

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE CAEN
(Mention : Sciences mathématiques)

PAR

TCHENG TCHOU-YUN (程 楚 潤)

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

1re THÈSE. — Sur les inégalités différentielles.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté : sur l'équation de la chaleur.

Soutenues le juillet 1934, devant la Commission d'examen.

MM. ZORETTI, *Président.*
JANET, LE ROUX, *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1934

UNIVERSITÉ DE CAEN

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen : M. Blanc (✻, I. ✿).

Assesseur : M. Zoretti (I. ✿).

Doyen honoraire et Professeur honoraire : M. Bigot (✻, I. ✿, C^r de Saint-Sava). Correspondant de l'Institut.

Professeur honoraire : M. Maurain (O. ✻, I. ✿), Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

M. Zoretti (I. ✿), Professeur (*Mécanique*).

M. Blanc (✻, I. ✿), professeur (*Physique et Minéralogie*).

M. L. Mercier (✻, I. ✿), professeur (*Zoologie et Physiologie animale*).

M. Chauvenet (I. ✿), professeur (*Chimie*).

M. Janet (✻, I. ✿), professeur (*Calcul différentiel et intégral*).

M. le D^r Choux (✻, ✠, I. ✿), professeur (*Botanique*).

M. Dangeard, professeur (*Géologie et Paléontologie*).

M. Audigé (✻, ✠, I. ✿, ❀), professeur (*Zoologie*).

M. le D^r Bouygues (✻, I. ✿, O. ❀), professeur (*Botanique*).

M. Quelet (✠, A. ✿), maître de conférences (*Chimie*).

M. Le Roux (I. ✿), maître de conférences (*Physique*).

Secrétaire : M. Roux (I. ✿, ❀, ✠).

A MON MAITRE

MONSIEUR MAURICE JANET

Faible témoignage de ma bien
vive gratitude et de mon
affectueuse reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES.

INTRODUCTION.

Entre une fonction et ses dérivées existent, sous certaines hypothèses très générales, des relations d'inégalité d'espèces diverses sur lesquelles s'est dirigée dans ces dernières années l'attention de plusieurs mathématiciens. Certaines de ces relations par exemple font intervenir les bornes supérieures. D'autres s'expriment à l'aide de signes d'intégration. Nous nous sommes proposé de rassembler ici les résultats les plus caractéristiques, et d'essayer d'indiquer comment on peut en obtenir de nouveaux.

Dans le premier Chapitre, nous nous occupons des inégalités entre les bornes supérieures d'une fonction et de sa dérivée première ou de ses deux premières dérivées; mais il ne figure pas de signe d'intégration dans ces inégalités.

Les méthodes appliquées par nous sont tout à fait analogues à celles que MM. Hadamard ([1]), Landau ([2]) et Carleman ([3]) ont appliquées dans leurs travaux.

([1]) Cf. *Comptes rendus des séances de la Soc. math. de France*, 1914.

([2]) Cf. *Proc. London math. Soc.*, 13, 1914.

([3]) Cf. Carleman, *Leçons sur les fonctions quasi-analytiques*, Chap. II.

Dans le deuxième Chapitre, nous étudions les inégalités où figure un signe d'intégrale simple. De telles inégalités se sont introduites naturellement dans certains problèmes simples d'extréma d'intégrales, autrement dit dans ce que l'on appelle le calcul des variations. MM. Bliss (1), Hardy, Littlewood (2), etc. ont donné des résultats de ce genre.

Nous indiquons un résultat nouveau analogue à l'un de ceux de MM. Hardy et Littlewood, mais où nous faisons intervenir la dérivée seconde.

Nous avons rappelé quelques résultats donnés par plusieurs auteurs sur les dérivées d'ordre supérieur.

Dans le dernier Chapitre, nous nous occupons d'exposer des inégalités faisant intervenir des intégrales multiples.

Nous rappelons des propriétés classiques qui intervienent en particulier dans la théorie des membranes vibrantes et des milieux vibrants à trois dimensions.

Nous utilisons une idée que M. Carleman (3) avait appliquée à la théorie des fonctions de variable complexe, et nous obtenons une inégalité relative aux fonctions harmoniques dans l'espace.

Enfin nous avons rassemblé sous le titre « Bibliographie » l'indication des principaux articles parus, à notre connaissance, sur le sujet ainsi que des Ouvrages fondamentaux où se trouvent utilisés les résultats qui nous intéressent.

En terminant cette Introduction, nous nous permettons d'adresser l'expression de notre respectueuse gratitude à M. le professeur Janet, qui nous a donné des conseils très précieux pour les recherches exposées dans ce travail.

---

(1) Cf. *Journal London math. Soc.*, 5, 1930, p. 40.

(2) Cf. *The Quarterly Journal of math.*, 3, 1932, p. 241.

(3) Cf. *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 196, 1933, p. 995.

CHAPITRE I.

INÉGALITÉS SANS SIGNE D'INTÉGRATION..

1. *Soit $f(x)$ une fonction ayant une dérivée continue dans un intervalle de longueur l. Supposons que, pour une extrémité (a) de l'intervalle, $f(x)$ soit nulle. Soient* M_0, M_1 *les bornes supérieures de* $|f(x)|$, $|f'(x)|$ *dans l'intervalle, on a*

$$M_0 \leqq l M_1.$$

En effet

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt;$$

d'où

$$|f(x)| \leqq l M_1,$$

il suffit alors de choisir x de manière que $|f(x)|$ y soit égal à M_0.

2. **Théorème de M. Hadamard.** — *Soit $f(x)$ une fonction continue ainsi que ses dérivées première et seconde dans un intervalle de longueur l. Soient* M_0, M_1, M_2 *les bornes supérieures de* $|f(x)|$, $|f'(x)|$, $|f''(x)|$, *on a*

$$M_1 \leqq \frac{2}{l} M_0 + \frac{l}{2} M_2.$$

En effet, x étant une valeur arbitrairement choisie de l'intervalle (a, b), on a

$$f(a) - f(x) = (a - x) f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2} f''(\xi_1) \qquad (a < \xi_1 < x),$$

$$f(b) - f(x) = (b - x) f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2} f''(\xi_2) \qquad (x < \xi_2 < b).$$

On en tire, en retranchant membre à membre,

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{(a - x)^2}{2(b - a)} f''(\xi_1) - \frac{(b - x)^2}{2(b - a)} f''(\xi_2).$$

Choisissons le point x de manière que $|f'(x)|$ y soit égal à son maximum M_1, et remarquons que, pour toute valeur de x de l'intervalle (a, b), on a

$$(a - x)^2 + (b - x)^2 \leqq (a - b)^2.$$

Nous trouvons l'inégalité énoncée

$$M_1 \leqq \frac{2}{l} M_0 + \frac{l}{2} M_2.$$

Corollaire. — Soit $f(x)$ une fonction continue ainsi que ses dérivées première et seconde dans un intervalle s'étendant à l'infini d'un côté $(a, +\infty)$. Soient M_0, M_1, M_2 les bornes supérieures de $|f(x)|$, $|f'(x)|$ et de $|f''(x)|$; choisissons l arbitrairement; dans les intervalles

$$(a, a + l), \quad (a + l, a + 2l), \quad \ldots$$

les bornes supérieures de $|f(x)|$, $|f''(x)|$ sont au plus égales à M_0, M_2, on a donc, dans chacun de ces intervalles,

$$M_1 \leqq \frac{2}{l} M_0 + \frac{l}{2} M_2.$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit l, il est naturel de l'écrire avec la valeur la plus avantageuse de l, à savoir celle qui rend minimum le deuxième membre de l'inégalité précédente $l = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, on obtient ainsi

$$M_1 \leqq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Remarques pour le cas d'un intervalle fini [1] :

---

(1) LANDAU, *Proc. London math. Soc.*, vol. 13, p. 43.

Supposons $l \geqq 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, on pourra appliquer le théorème aux intervalles

$$\left(a,\, a+2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right),\quad \left(a+2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}},\, a+4\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right),\quad \cdots$$

et obtenir la limite la plus avantageuse

$$M_1 \leqq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

1° *Si l'on suppose* $l \geqq 2\sqrt{\frac{M_0}{M_1}}$, *sans rien savoir d'autre sur* l, *on ne peut remplacer la borne supérieure donnée pour* M_1 $\left(\textit{à savoir } 2\sqrt{M_0 M_2}\right)$ *par une autre plus avantageuse.*

Voici en effet un exemple de fonction définie dans un intervalle de longueur $2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, et pour laquelle la dérivée première atteint la valeur $2\sqrt{M_0 M_2}$.

Prenons, en effet, l'intervalle $\left(-\sqrt{\frac{M_0}{M_2}},\, +\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)$ et posons

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(M_2 x^2 + 2\sqrt{M_0 M_2}\,x - M_0\right);$$

alors

$$f'(x) = M_2 x + \sqrt{M_0 M_2} = M_2\left(x + \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) \geqq 0$$

et

$$f''(x) = M_2.$$

D'autre part,

$$f\left(-\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) = -M_0,\qquad f\left(+\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) = +M_0,$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) = 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

2° *Soit* p *une longueur inférieure à* $2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, *si peu d'ailleurs que ce soit. Si l'on suppose* $l > p$, *sans rien savoir d'autre sur* l, *la borne supérieure* M_1 *n'est pas nécessairement inférieure ou égale à* $2\sqrt{M_0 M_2}$.

Voici en effet un exemple de fonction définie dans l'intervalle $\left(-\frac{p}{2}, +\frac{p}{2}\right)$ pour laquelle

$$\left|f'\left(-\frac{p}{2}\right)\right| > 2\sqrt{M_0 M_2};$$

$$f(x) = \frac{M_2}{2}x^2 - 2\frac{M_0}{p}x - \frac{M_2}{8}p^2,$$

$$f'(x) = M_2 x - 2\frac{M_0}{p} = M_2\left[x - \frac{p}{2} + \left(p - 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)\frac{p + 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}{2p}\right] < 0,$$

$$f''(x) = M_2.$$

Le signe de la dérivée première est en évidence, car $x - \frac{p}{2}$ et $p - 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ sont négatifs. La fonction $f(x)$ décroît de

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) = M_0$$

à

$$f\left(+\frac{p}{2}\right) = -M_0,$$

et la valeur de $f'\left(-\frac{p}{2}\right)$ est

$$f'\left(-\frac{p}{2}\right) = -\left(\frac{M_2 p}{2} + \frac{2M_0}{p}\right) = -2\sqrt{M_0 M_2} - \frac{M_2}{2p}\left(p - 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)^2,$$

dont la valeur absolue dépasse $2\sqrt{M_0 M_2}$ de la quantité

$$\frac{M_2}{2p}\left(p - 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)^2.$$

3. **Sur la valeur numérique de la dérivée première au milieu m de l'intervalle (a, b).** — L'inégalité démontrée plus haut donne dans ce cas

$$f'(m) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{b - a}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

et, par suite,

$$|f'(m)| \leqq \frac{2M_0}{l} + \frac{lM_2}{4}.$$

Corollaire. — Soit $f(x)$ une fonction continue ainsi que ses dérivées première et seconde pour toute valeur de x. Tout point pouvant être considéré comme milieu d'un intervalle où l'on peut appliquer la formule précédente. On aura, en désignant par M_1 la borne supérieure de $|f'(x)|$,

$$M_1 \leqq \frac{2M_0}{l} + \frac{lM_2}{4}.$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit l, il est naturel de l'écrire avec la valeur la plus avantageuse de l à savoir celle qui rend minimum le second membre

$$l = 2\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}},$$

on obtient ainsi

$$M_1 \leqq \sqrt{2M_0M_1}.$$

Le raisonnement même montre que si dans un intervalle fini

$$|f(x)| \leqq M_0, \qquad |f''(x)| \leqq M_2$$

et si la longueur de l'intervalle est supérieure ou égale à $2\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, on a, au milieu m de l'intervalle,

$$|f'(m)| \leqq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Appliquons ce résultat à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si*

$$\limsup_{x \to +\infty} |f(x)| \leqq M_0$$

et

$$\limsup_{x \to +\infty} |f''(x)| \leqq M_2,$$

on a

$$\limsup_{x \to +\infty} |f'(x)| \leqq \sqrt{2M_0M_2}.$$

ε étant une constante positive arbitraire, posons

$$g(x) = \frac{f(x)}{1+\varepsilon}.$$

Nous avons, à partir d'un certain $x_1(\varepsilon)$,

$$|g(x)| \leqq M_0, \qquad |g''(x)| \leqq M_2$$

et par suite, à partir de $x_1(\varepsilon) + \sqrt{2}\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$,

$$|g'(x)| \leqq \sqrt{2 M_0 M_2},$$

ce qui montre que

$$\limsup_{x \to +\infty} |f'(x)| \leqq (1+\varepsilon)\sqrt{2 M_0 M_2}.$$

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\limsup_{x \to +\infty} |f'(x)| \leqq \sqrt{2 M_0 M_2}.$$

On peut donner des théorèmes analogues aux précédents sans faire intervenir la dérivée seconde. C'est ainsi qu'au théorème de M. Hadamard correspond le suivant :

Supposons que dans un intervalle de longueur l, on ait

$$|f(x)| \leqq M_0$$

et

$$\left|\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}\right| \leqq M_2,$$

quels que soient les nombres x, y de l'intervalle.

On a

$$M_1 \leqq \frac{2}{l} M_0 + \frac{l}{2} M_2.$$

L'égalité

$$f(x)-f(a)-(x-a)f'(x) = \int_a^x [f'(t)-f'(x)]\,dt$$

donne en effet

$$|f(x)-f(a)-(x-a)f'(x)| < M_2 \left|\int_a^x |t-x|\,dt\right| = M_2 \frac{(a-x)^2}{2}.$$

ainsi

$$f(x)-f(a)-(x-a)f'(x) = \theta_1 M_2 \frac{(a-x)^2}{2} \qquad (-1 < \theta_1 < +1),$$

et de même

$$f(x)-f(b)-(x-b)f'(x)=\theta_2 M_2 \frac{(b-x)^2}{2} \qquad (-1<\theta_2<+1)$$

et, en retranchant membre à membre,

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+\left[\theta_2 M_2 \frac{(b-x)^2}{2}-\theta_1 M_2 \frac{(a-x)^2}{2}\right]\frac{1}{b-a}.$$

En choisissant x de manière que $|f'(x)|$ y soit égal à son maximum et en remarquant que pour toute valeur de x de l'intervalle (a, b), on a

$$(a-x)^2+(b-x)^2 \leqq (a-b)^2.$$

On trouve l'inégalité énoncée.

4. **Fonctions de plusieurs variables.** — Considérons une fonction $u(x, y)$ ayant des dérivées première et seconde continues dans tout le plan et désignons par m_0, m_1, m_2 les bornes supérieures de

$$|u|, \quad \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}, \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|.$$

Soit $G(r, \theta; \rho, \varphi)$ la fonction de Green (en coordonnées polaires) qui correspond au cercle $r=R$. D'après une formule connue

$$u(r, \theta)=-\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} u(R, \varphi)\, d\varphi$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} G(r, \theta; \rho, \varphi)\, \Delta u . \rho\, d\varphi,$$

d'où, en dérivant par rapport à r et faisant $r=0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=0}=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi-\theta)\, u(R, \varphi)\, d\varphi$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2}\cos(\varphi-\theta)\, \Delta u\, d\varphi,$$

d'où

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=0}\right| \leqq \frac{4}{\pi}\left(\frac{m_0}{R} + \frac{m_2 R}{3}\right);$$

et, en prenant pour R la valeur la plus avantageuse à savoir $\sqrt{\frac{3m_0}{m_2}}$,

$$m_1 \leqq \frac{8}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{m_0 m_2}.$$

Si l'on faisait intervenir les bornes supérieures M_0, M_1, M_2 de

$$|u|, \quad |u_x + u_y|, \qquad |u_{x^2} + 2u_{xy} + u_{y^2}|,$$

l'application des raisonnements indiqués plus haut pour une variable donnerait

$$M_1 \leqq \sqrt{2}\sqrt{M_0 M_2}.$$

CHAPITRE II.

INÉGALITÉS AVEC SIGNES D'INTÉGRALES SIMPLES.

A. — Dérivées premières.

5. Théorème I. — *Considérons une fonction y de la variable x, continue et définie ainsi que sa dérivée première dans l'intervalle (a, b), et s'annulant aux deux extrémités de cet intervalle, on a*

$$\frac{\int_a^b y'^2\,dx}{\int_a^b y'\,dx} \geqq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2,$$

le signe $=$ n'étant obtenu que pour les fonctions

$$y = \mathrm{C}\sin\pi\frac{x-a}{b-a}.$$

Considérons, en effet, l'intégrale

$$\mathrm{J}(y) = \int_a^b (y'^2 - k^2 y^2)\,dx,$$

où $a < b$ et où k est une constante positive.

On a l'identité

$$y'^2 - k^2y^2 = [y' - ky\cot k(x-\xi)]^2 + \frac{d}{dx}[ky^2\cot k(x-\xi)].$$

Si $k < \frac{\pi}{b-a}$, ce qui revient à dire $b - \frac{\pi}{k} < a$, choisissons ξ entre les deux nombres $b - \frac{\pi}{k}$ et a. Dans l'intervalle (a, b), la fonction $\cot k(x-\xi)$ reste continue, et pour toute fonction y s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$, on peut écrire

$$\mathrm{J}(y) = \int_a^b [y' - ky \cot k(x-\xi)]^2 \, dx,$$

quantité visiblement > 0.

Autrement dit, pour toute fonction de cette espèce,

$$\frac{\int_a^b y'^2 \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx} > k^2,$$

dès que

$$k^2 < \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2$$

et, par suite,

$$\frac{\int_a^b y'^2 \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx} \geqq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2.$$

Pour obtenir l'égalité, on doit évidemment prendre pour y une extrémale du problème de calcul des variations relatif à

$$\int_a^b \left[y'^2 - \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 y^2\right] dx,$$

par suite, il n'y a égalité que pour les fonctions

$$y = \mathrm{C} \sin \pi \frac{x-a}{b-a}.$$

6. La fonction que l'on est amené à faire intervenir ainsi est précisément celle qui apparaît lorsque l'on cherche le son fonda-

mental que donne une corde vibrante homogène fixe à ses deux extrémités.

Une corde AB de longueur l, étant fixée à ses deux extrémités, si on l'écarte de sa position d'équilibre, le déplacement u normal à la corde d'un point d'abscisse x, à l'instant t, est une fonction des variables x et t que vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

α^2 étant une constante positive (rapport de la tension de la corde à sa densité linéaire).

Les vibrations « propres » d'un système vibrant (à n paramètres) sont celles des vibrations du système qui sont telles que les rapports mutuels des variations de ces paramètres soient indépendants du temps. C'est ce qui conduit ici (système à une infinité de paramètres) à rechercher les solutions de la forme

$$\mathrm{U}(x, t) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t),$$

où $\mathrm{X}(x)$ est une fonction de x seule et $\mathrm{T}(t)$ une fonction de t seule.

En portant dans l'équation précédente, on obtient

$$\alpha^2 \frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)} = \frac{\mathrm{T}''(t)}{\mathrm{T}(t)},$$

et, par suite, la valeur commune de ces rapports doit se réduire à une constante K, qui doit visiblement être négative. T sera une fonction sinusoïdale du temps; si nous introduisons la période θ de cette fonction, nous devrons écrire la valeur de K sous la forme $-\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2$. D'où pour X l'équation

$$\mathrm{X}'' + \left(\frac{2\pi}{\theta\alpha}\right)^2 \mathrm{X} = 0.$$

Pour que cette équation admette une intégrale s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$, $\frac{2\pi}{\theta\alpha}$ doit être de la forme $\frac{n\pi}{b-a}$, n étant un nombre entier.

Dans le cas où $n = 1$, X se réduit à $\sin \pi \frac{x-a}{b-a}$ qui fournit précisément le minimum du rapport

$$\frac{\int_a^b y'^2 \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx},$$

parmi toutes les fonctions qui s'annulent pour a et pour b.

Le calcul que l'on vient de faire donne la hauteur du son fondamental émis par une corde homogène vibrante, puisqu'il donne la période θ grâce à la formule

$$\frac{2\pi}{\theta\alpha} = \frac{\pi}{b-a}$$

et par suite, en remplaçant α par sa valeur,

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{F}}},$$

où M est la masse, l la longueur et F la tension.

7. Théorème II. — *Soit une fonction y continue ainsi que sa dérivée première dans l'intervalle fermé (a, b); supposons $y = 0$ pour $x = b$, on a*

$$\frac{\int_a^b (x-a) y'^2 \, dx}{\int_a^b (x-a)\, y^2 \, dx} \geqq \left(\frac{u}{b-a}\right)^2,$$

où u désigne la plus petite racine positive de la fonction

$$\mathrm{J}_0(x) \equiv 1 - \frac{x^2}{2^2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2.4\ldots 2n)^2} + \ldots;$$

l'égalité étant réalisée pour les fonctions

$$y = c\,\mathrm{J}_0\left(u \frac{x-a}{b-a}\right)$$

et pour celles-là seulement.

On a l'identité

$$(y'^2 - k^2 y^2)(x-a) = \left[y' - k\frac{J'_0[k(x-a)]}{J_0[k(x-a)]}y\right]^2 (x-a)$$
$$+ \frac{d}{dx}\left[ky^2(x-a)\frac{J'_0[k(x-a)]}{J_0[k(x-a)]}\right].$$

Si $k < \frac{u}{b-a}$, la fonction $\frac{J'_0[k(x-a)]}{J_0[k(x-a)]}$ est continue dans l'intervalle (a, b) et l'on voit que, pour toute fonction y nulle pour $x=b$, on a

$$\int_a^b (y'^2 - k^2 y^2)(x-a)\,dx \geqq 0$$

ou

$$\frac{\int_a^b y'^2(x-a)\,dx}{\int_a^b y^2(x-a)\,dx} \geqq k^2.$$

Cela étant vrai pour tout $k < \frac{u}{b-a}$, on a

$$\frac{\int_a^b y'^2(x-a)\,dx}{\int_a^b y^2(x-a)\,dx} \geqq \left(\frac{u}{b-a}\right)^2,$$

on ne peut avoir le signe $=$ que pour une extrémale relative à

$$\int_a^b \left[y'^2 - \left(\frac{u}{b-a}\right)^2 y^2\right](x-a)\,dx;$$

l'équation d'Euler est

$$(x-a)y'' + y' + \left(\frac{u}{b-a}\right)^2 (x-a)y = 0;$$

les seules solutions qui restent finies pour $x = a$ sont

$$y = c\,J_0\left[u\frac{x-a}{b-a}\right].$$

Une intégration par parties montre d'ailleurs bien que l'égalité est alors réalisée.

LEMME. — *Supposons une fonction y ayant dans l'intervalle (a, b) une dérivée dont le carré est intégrable. Si la fonction y s'annule pour $x = a$, $\frac{y}{\sqrt{x-a}}$ tend vers zéro quand x tend vers a.*

En effet

$$y^2(x) = \left[\int_a^x y'(t)\,dt\right]^2 \leqq \int_a^x dt \int_a^x y'^2\,dt,$$

ainsi

$$\frac{|y(x)|}{\sqrt{x-a}} \leqq \sqrt{\int_a^x y'^2\,dt},$$

ce qui tend vers zéro quand x tend vers a.

On a l'identité

$$y'^2 + p(p-1)\frac{y^2}{(x-a)^2} = \left(y' - p\frac{y}{x-a}\right)^2 + p\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x-a}\right).$$

D'où l'on tire sans qu'il y ait aucune difficulté du fait des dénominateurs

$$\int_a^b \left[y'^2 + p(p-1)\frac{y^2}{(x-a)^2}\right] dx = \int_a^b \left[y' - p\frac{y}{x-a}\right]^2 + p\left[\frac{y^2}{x-a}\right]_a^b.$$

D'où l'on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME III [1] :

$$\int_a^b \left[y'^2 + p(p-1)\frac{y^2}{(x-a)^2}\right] dx \geqq p\frac{h^2}{b-a},$$

si l'on suppose que la fonction y prend pour a et b respectivement les valeurs 0 et h. Le signe égal ne peut être obtenu que pour une extré-

---

(1) Dû à MM. Hardy et Littlewood. Mais ces auteurs l'énoncent avec des notations moins commodes, semble-t-il, et seulement dans le cas $\frac{1}{2} \leqq p \leqq 1$.

male, c'est-à-dire une fonction satisfaisant à l'équation

$$y'' - p(p-1)\frac{y}{(x-a)^2} = 0,$$

dont la solution générale est

$$C_1(x-a)^p + C_2(x-a)^{1-p}.$$

Supposons $p > \frac{1}{2}$. Pour que le carré de la dérivée soit intégrable, nous devons nous borner à $C_1(x-a)^p$.

Écrivons $C_1(b-a)^p = h$, la fonction

$$y = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^p$$

est la seule de la famille considérée pour laquelle on ait le signe d'égalité.

Exemples :

1° Si $p = \frac{2}{3}$, on a

$$\int_a^b \left(y'^2 - \frac{2}{9}\frac{y^2}{(x-a)^2}\right)dx \geqq \frac{2}{3}\frac{h^2}{b-a}$$

avec égalité seulement pour $y = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{2}{3}}$.

2° $p = 1$, égalité banale,

$$\int_v^b y'^2\,dx \geqq \frac{h^2}{b-a}$$

avec égalité seulement pour $y = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$.

3° $p = 2$,

$$\int_a^b \left[y'^2 + 2\frac{y^2}{(x-a)^2}\right]dx \geqq 2\left(\frac{h^2}{b-a}\right)$$

avec égalité seulement pour $y = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2$.

4° En faisant enfin $p = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\int_a^b \left[y'^2 - \frac{1}{4}\frac{y^2}{(x-a)^2}\right] dx > \frac{1}{2}\frac{h^2}{b-a},$$

mais l'égalité n'est ici jamais réalisée.

8. Théorème IV. — *Soit une fonction y ayant dans l'intervalle (a, b) une dérivée dont le carré soit intégrable. Si y s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$, on a*

$$\frac{\displaystyle\int_a^b y'^2\,dx}{\displaystyle\int_a^b \frac{y^2}{(x-a)(b-x)}} \geqq 2,$$

le signe $=$ étant obtenu pour les fonctions

$$y = C(x-a)(b-x),$$

et pour celles-là seulement.

On a l'identité

$$y'^2 - \frac{2}{(x-a)(b-x)}y^2 = \left[y' - \frac{a+b-2x}{(x-a)(b-x)}y\right]^2 + \frac{d}{dx}\left[\frac{a+b-2x}{(x-a)(b-x)}y^2\right]$$

qui nous montre que pour toutes les fonctions y considérées

$$\int_a^b \left[y'^2 - \frac{2}{(x-a)(b-x)}y^2\right] dx \geqq 0.$$

Aucune difficulté ne provient des limites, car, d'après les hypothèses faites et le lemme précédemment démontré, $\frac{y}{\sqrt{x-a}}$ tend vers zéro quand x tend vers a; et de même $\frac{y}{\sqrt{b-x}} \to 0$ quand x tend vers b.

Il ne peut y avoir égalité que pour une extrémale relative à l'intégrale

$$\int_a^b \left[y'^2 - \frac{2}{(x-a)(b-x)} y^2 \right] dx;$$

autrement dit pour une intégrale de l'équation

$$y'' + \frac{2}{(x-a)(b-x)} y = 0.$$

La solution générale de cette équation [1] est

$$y = (x-a)(b-x)\left[C_1 + C_2 \left(\frac{2}{b-a} \mathrm{L} \frac{x-a}{b-x} + \frac{2x-(a+b)}{(x-a)(b-x)} \right) \right].$$

Les seules fonctions de cette famille qui s'annulent pour $x = a$ et pour $x = b$ sont

$$y = c(x-a)(b-x),$$

et pour ces fonctions il y a effectivement égalité.

On voit l'intérêt qu'il y a à écrire les formules pour un intervalle quelconque (a, b). Dans le cas présent, à l'inverse de ce qui se passait dans les précédents, le minimum est purement numérique (indépendant de l'intervalle).

B. — Dérivées d'ordre supérieur.

9. *Considérons une fonction y continue ainsi que ses dérivées première et seconde dans l'intervalle (a, b). Supposons que les fonctions y et y' s'annulent pour $x = a$ et pour $x = b$, on a*

$$\frac{\int_a^b y''^2 \, dx}{\int_a^b y'^2 \, dx} \geqq \left(\frac{2\pi}{b-a} \right)^2,$$

(1) L'article de MM. Hardy et Littlewood contient ici une légère erreur.

le signe égal étant effectivement obtenu pour les fonctions

$$\left(C \sin^2 \pi \frac{x-a}{b-a}\right),$$

et pour celles-là seulement.

Plus généralement, si la fonction y est continue ainsi que ses n premières dérivées, et si l'on suppose que $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ s'annulent pour $x = a$ et pour $x = b$, on a

$$\frac{\int_a^b (y^{(n)})^2 \, dx}{\int_a^b (y^{(n-1)})^2 \, dx} \geqq \left(\frac{2 u_n}{b-a}\right)^2,$$

le signe $=$ étant effectivement obtenu pour certaines fonctions simples que l'on peut préciser, le nombre u_n étant le plus petit zéro positif de la fonction de Bessel d'ordre $n - \frac{3}{2}$; on peut dire encore en supposant $n \geqq 3$ que u_n est la plus petite racine positive de l'équation obtenue en egalant tang$x$ à la réduite d'ordre $n - 2$ de son développement en fraction continue (*Voir* M. Janet, *Bulletin des Sc. Math.*, 1931).

Sans reproduire la démonstration de ce résultat, remarquons seulement que pour $n = 2$, il donne le suivant :

Si la fonction continue z, admettant une dérivée continue [1], prend la même valeur aux deux extrémités de l'intervalle (a, b), on a

$$\int_a^b z'^2(x) \, dx \geqq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \left[\int_b^b z^2(x) \, dx - \frac{\left(\int_a^b z(x) \, dx\right)^2}{b-a}\right],$$

appelée ordinairement *inégalité de Wirtinger*.

Il est intéressant d'en noter au passage une application remarquablement simple.

---

(1) Sauf peut-être en un nombre fini de points en chacun desquels sa valeur à droite et sa valeur à gauche existent.

Soit une courbe plane fermée, définie comme l'enveloppe d'une droite,

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p(\alpha).$$

L'inégalité précédente devient

$$\left[\int_0^{2\pi} p(\alpha)\,d\alpha\right]^2 \geqq 2\pi \int_0^{2\pi} [p^2(\alpha) - p'^2(\alpha)]\,d\alpha.$$

Cela n'est autre que l'inégalité isopérimétrique classique

$$L^2 \geqq 4\pi S,$$

où L désigne la longueur de la courbe, S la surface intérieure à cette courbe.

10. Voici maintenant un résultat nouveau, faisant intervenir une dérivée seconde. Il est à rapprocher d'un résultat de MM. Hardy et Littlewood indiqué plus haut.

Théorème. — *Soit y une fonction de x continue ainsi que ses dérivées première et seconde dans l'intervalle (a, b); si la quantité $\dfrac{y}{(x-a)^2(b-x)^2}$ reste finie ainsi que ses dérivées première et seconde dans l'intervalle, on a*

$$\frac{\displaystyle\int_a^b y'^2\,dx}{\displaystyle\int_a^b \frac{y^2}{(x-a)^2(b-x)^2}} \geqq 24,$$

le signe égal n'étant obtenu que pour les fonctions

$$y = c(x-a)^2(b-x)^2.$$

Remarquons d'abord l'identité

$$\begin{aligned}[(uv)'']^2 - k\frac{(uv)^2}{v} &= [v^2 u''^2 + 2(v'^2 - 2vv'')u'^2 + v(v^{(4)} - k)u^2] \\ &\quad + \frac{d}{dz}[(v'v'' - vv''')u^2 + 2vv''uu' + 2vv'u'^2],\end{aligned}$$

où u, v sont deux fonctions et k est une constante quelconque.

Appliquons cette identité au cas où $v=(x-a)^2(b-x)^2$ et où $k=24$; on obtient, en posant $uv=y$, intégrant de a à b et tenant compte des égalités $v=v'=0$ aux limites

$$\int_a^b \left[y''^2 - \frac{24}{(x-a)^2(b-x)^2}y'^2\right]dx$$
$$=\int_a^b [(x-a)^4(b-x)^4 u''^2 + 16(x-a)^3(b-x)^3 u'^2]\,dx.$$

L'intégrale du premier membre est positive et ne peut s'annuler que si $u'\equiv 0$, c'est ce qui démontre le théorème.

11. Voici des résultats d'un caractère un peu différent :

Soit une fonction y de x continue ainsi que ses deux premières dérivées; il est évident que si le produit yy' s'annule aux deux extrémités d'un intervalle, on a pour cet intervalle

$$\int y'^2\,dx = -\int yy'\,dx,$$

et par suite d'après l'inégalité de Schwarz.

$$\frac{\int y^2\,dx \int y''^2\,dx}{\left(\int y'^2\,dx\right)^2} \geqq 1.$$

Supposons que pour l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ les intégrales

$$J_0=\int y^2\,dx \qquad \text{et} \qquad J_2=\int y''^2\,dx$$

convergent. Il est aisé de voir [1] que yy' tendent vers zéro quand x tend vers ∞, et que

$$J_1=\int y'^2\,dx$$

[1] *Cf.* Hardy, *Quarterly Journal of Math.*, Vol. 3, 1932, p. 241.

converge aussi. On a alors

$$\frac{J_0 J_2}{J_1^2} > 1,$$

1 est l'écritable borne inférieure de la quantité $\frac{J_0 J_2}{J_1^2}$ (comme le montre l'exemple de Hardy : $y = \sin x$ pour $|x| \leqq n\pi$, $y = 0$ pour $|x| > n\pi$, avec une légère modification pour assurer l'existence, et la continuité en tout point, de la fonction (y'').

12. Il est remarquable (et c'est encore un résultat donné par Hardy et Littlewood dans l'article indiqué) que, pour l'intervalle $(0, +\infty)$, la borne inferieure du rapport $\frac{J_0 J_2}{J_1^2}$ est toute différente, à savoir $\frac{1}{4}$.

Les extrémales du problème de calcul des variations relatif à

$$\int_0^{+\infty} (y''^2 - y'^2 + y^2)\, dx$$

sont données par

$$y^{4} + y'' + y = 0.$$

Celles des solutions de cette équation différentielle qui s'annulent pour $x = +\infty$ sont

$$y = C e^{-x \cos \frac{\pi}{3}} \sin\left(x \sin \frac{\pi}{3} - \varphi\right).$$

Elles coupent « transversalement » l'axe $y = 0$ si y'' et $y' + y'''$ s'annulent pour $x = 0$ ce qui conduit à la détermination de $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Une fois ces fonctions découvertes, on démontre rigoureusement (*voir* article cité) qu'elles sont les seules à annuler

$$\int_0^{+\infty} (y''^2 - y'^2 + y^2)\, dx$$

et que pour toute autre fonction (satisfaisant toujours aux conditions : y'^2, y''^2 intégrables), cette intégrale est positive.

Un changement de variable $x = aX$ et l'application de l'inégalité de Schwarz conduisent alors immédiatement au résultat annoncé

$$\frac{J_0 J_2}{J_1^2} \geqq \frac{1}{4}$$

avec égalité seulement pour

$$y = C e^{-x \cos \frac{\pi}{2}} \sin \left(x \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

CHAPITRE III.

INÉGALITÉS AVEC SIGNES D'INTÉGRALES MULTIPLES.

13. *Soit* (D) *un domaine plan limité par les droites* $x = a$, $x = \mathrm{A}$; $y = b$, $y = \mathrm{B}$. *Considérons une fonction* $u(x, y)$ *définie et continue ainsi que ses dérivées partielles* u_x, u_y *dans* (D), *et s'annulant sur le contour de* (D). *On a*

$$\frac{\displaystyle\iint_{(\mathrm{D})} (u_x'^2 + u_y'^2)\, dx\, dy}{\displaystyle\iint_{(\mathrm{D})} u^2\, dx\, dy} \geqq \pi^2 \left[\frac{1}{(\mathrm{A} - a)^2} + \frac{1}{(\mathrm{B} - b)^2}\right],$$

le signe $=$ *étant obtenu pour les fonctions*

$$\mathrm{C} \sin \pi \frac{x - a}{\mathrm{A} - a} \sin \frac{y - b}{\mathrm{B} - b},$$

et pour celles-là seulement.

Utilisons l'identité

$$u_x'^2 - \lambda^2 u^2 = [u_x' - \lambda u \cot \lambda (x - \xi)]^2 + \lambda \frac{d}{dx} [u^2 \cot \lambda (x - \xi)].$$

Choisissons ξ de manière que

$$\xi < a, \qquad \xi + \frac{\pi}{\lambda} > \mathrm{A},$$

ce qui est possible à condition que

$$\lambda \leqq \frac{\pi}{A-a}.$$

Nous obtenons si u s'annule sur le contour

$$\iint_{(D)} (u_x'^2 - \lambda u^2)\, dx\, dy \geqq 0.$$

On voit de même que

$$\iint_{(D)} (u_y'^2 - \mu^2 u^2)\, dx\, dy \geqq 0,$$

à condition que

$$\mu \leqq \frac{\pi}{B-b}.$$

D'où la conclusion

$$\iint_{D)} [x_x'^2 + u_y'^2 - (\lambda^2 + \mu^2) u^2]\, dx\, dy \geqq 0,$$

dès que

$$\lambda \leqq \frac{\pi}{A-a} \qquad \text{et} \qquad \mu \leqq \frac{\pi}{B-b}$$

et par suite

$$\iint_{(D)} \left\{ (u_x'^2 + u_y'^2) - \pi^2 \left[\frac{1}{(A-a)^2} + \frac{1}{(B-b)^2} \right] u^2 \right\} dx\, dy \geqq 0.$$

Le signe $=$ ne peut d'ailleurs être obtenu que pour une solution de l'équation d'Euler relative à l'intégrale précédente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \pi^2 \left[\frac{1}{(A-a)^2} + \frac{1}{(B-b)^2} \right] u = 0.$$

Il l'est effectivement pour ces solutions

$$C \sin \pi \frac{x-a}{A-a} \sin \pi \frac{y-b}{B-b}.$$

Ce sont justement les fonctions qui interviennent lorsqu'on recherche le son fondamental d'une membrane vibrante de forme rectangulaire.

14. *De même si $u(x, y, z)$ s'annule sur la frontière du domaine limitant un parallélépipède rectangle $x = a$, $x = A$; $y = b$, $y = B$; $z = c$, $z = C$,*

$$\frac{\iiint (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)\,dx\,dy\,dz}{\iiint u^2\,dx\,dy\,dz} \geqq \pi^2\left[\frac{1}{(A-a)^2} + \frac{1}{(B-b)^2} + \frac{1}{(C-c)^2}\right],$$

le signe égal étant obtenu pour les fonctions

$$C \sin\pi\frac{x-a}{A-a}\sin\pi\frac{y-b}{B-b}\sin\pi\frac{z-c}{C-c},$$

et pour celles-là seulement.

Démonstration analogue à la précédente.

15. **Généralisation d'un résultat de M. Carleman.** — Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique régulière dans un domaine (D) limité : 1° par deux plans parallèles au plan $z = 0$; 2° un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz et ayant pour base une courbe fermée C limitant une aire A; et s'annulant sur toute la surface du cylindre. Soit $2R$ le maximum de la distance mutuelle de deux points de C. Posons

$$\varphi(z) = \iint_A u^2(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Nous allons démontrer que l'on a

$$\varphi''(z) \geqq \frac{1}{2}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{\pi^2}{R^2}\varphi(z).$$

On a, en effet, en dérivant sous le signe $\int\int$,

$$\varphi'(z) = 2\iint_A u\,u'_z\,dx\,dy,$$

$$\varphi''(z) = 2\iint_A (u'^2_z + u\,u''_{z^2})\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_A [u'^2_z - u(u''_{x^2} + u''_{y^2})]\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_A (u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z)\,dx\,dy + \int_{C\ \text{direct}} u(u'_y\,dx - u'_x\,dy).$$

Mais l'intégrale curviligne qui apparaît ici est nulle en raison de l'hypothèse $u = 0$, sur le contour, quelle que soit z.

D'autre part la formule de Schwarz montre que l'on a

$$\varphi'^2(z) \leqq 4\iint_A u^2\,dx\,dy \iint_A u'^2_z\,dx\,dy,$$

autrement dit

$$\iint_A u'^2_z\,dx\,dy \geqq \frac{\varphi'^2(z)}{4\,\varphi(z)}.$$

Le théorème vu précédemment montre d'ailleurs que

$$\iint_A (u'^2_x + u'^2_y)\,dx\,dy \geqq \frac{\pi^2}{2\,R^2}\varphi(z).$$

Utilisons ces deux inégalités dans l'expression de φ''. Nous obtenons

$$\varphi''(z) \geqq \frac{\varphi'^2(z)}{2\,\varphi(z)} + \frac{\pi^2}{R^2}\varphi(z).$$

16. La détermination du minimum λ de l'intégrale

$$\frac{\iint (x'^2_x + u'^2_y)\,dx\,dy}{\iint u^2\,dx\,dy}$$

pour une fonction $u(x, y)$ s'annulant sur tout le contour d'un domaine plan D revient en réalité à la détermination de la plus petite valeur positive λ, telle que l'équation

$$u''_{x^2}+u''_{y^2}+\lambda u=0$$

ait une solution nulle sur le contour de D.

Nous avons examiné le cas du rectangle; le cas du cercle de rayon R ferait intervenir le plus petit zéro positif λ de la fonction de Bessel

$$J_0(\sqrt{\lambda}R)\equiv 1-\frac{\lambda R^2}{2^2}+\frac{\lambda^2 R^4}{(2.4)^2}-\frac{\lambda^2 R^6}{(2.4.6)^2}+\ldots=0.$$

17. Considérons ici le cas analogue pour l'espace, c'est-à-dire le cas d'une sphère de rayon R, et indiquons comment on peut arriver rapidement à la valeur cherchée.

Cherchons dans quel cas l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\lambda u=0$$

admet une solution s'annulant sur la surface de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de cette sphère, et ne dépendant que de la distance r au centre.

Il faut chercher dans quel cas l'équation différentielle ordinaire

$$u''+\frac{2}{r}u'+\lambda u=0$$

admet une solution nulle pour $r=R$ et finie pour $r=0$.

Les fonctions

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{\lambda}r} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{\lambda}r}$$

sont deux solutions de l'équation précédente linéairement indépendante. Les seules solutions qui restent finies pour $r = 0$ sont :

$$C \frac{\sin(\sqrt{\lambda} r)}{\sqrt{\lambda} r}.$$

La plus petite valeur de λ telle que $\sin(\sqrt{\lambda} R) = 0$ est évidemment

$$\lambda = \frac{\pi^2}{R^2}.$$

Une fois cette valeur découverte, il resterait à démontrer, comme nous l'avons fait plus haut pour d'autres cas, qu'elle donne effectivement le minimum du rapport

$$\frac{\iiint (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_S u^2\, dx\, dy\, dz}$$

pour les fonctions u qui s'annulent sur la surface de la sphère de rayon R à l'intérieur de laquelle sont prises les deux intégrales.

Remarque. — Voici une généralisation que suggère la question précédente en ce qui concerne les valeurs singulières.

Soit à chercher les valeurs de λ telles que l'équation

$$\Delta^n u + \lambda \Delta^{n-1} u = 0$$

ou

$$\Delta^{n-1}(\Delta u + \lambda u) = 0$$

ait une solution régulière ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $2n$ à l'intérieur de la sphère de rayon 1, ne dépendant que de la distance r au centre, et s'annulant, ainsi que ses dérivées normales jusqu'à l'ordre $n - 1$ compris, sur la surface de la sphère.

Posons

$$\Delta u + \lambda u = v;$$

la fonction u (et par suite v) étant supposée fonction de r seul, l'équation proposée s'écrit :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)^{(n-1)} v=0.$$

Or

$$\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rw).$$

D'où

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)^{(n-2)} v=\frac{a}{r}+b;$$

mais puisque le premier membre est supposé régulier, le second se réduit à b, d'où

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)^{(n-3)} v=b\frac{r^2}{6}+c+\frac{d}{r};$$

mais puisque le premier membre est supposé régulier, le second se réduit à $\frac{br^2}{b}+c$, ainsi de suite.

Finalement on voit que v doit être un polynome de degré $2(n-2)$ en r n'ayant que des termes de degrés pairs; autrement dit un polynome de degré $n-2$ en r^2.

D'autre part en supposant $n \geqq 3$, nous voyons que v s'annule pour $r=1$ ainsi que ses $n-3$ premières dérivées; v n'est donc autre à un facteur constant près que le polynome

$$(r^2-1)^{n-2}.$$

On est donc amené à rechercher pour quelles valeurs λ l'équation

$$\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\lambda u=C(r^2-1)^{n-2}$$

a une solution nulle pour $r=1$ ainsi que sa dérivée première, solution qui reste finie pour $r=0$.

Posons $r\sqrt{\lambda}=\rho$; l'équation devient

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho}+u=k(\rho^2-\lambda)^{n-2}.$$

La solution de cette équation différentielle qui s'annule ainsi que sa dérivée première pour $\rho = \sqrt{\lambda}$ est, d'après un résultat général dû à Cauchy,

$$\lambda \int_{\sqrt{\lambda}}^{\rho} \left[A(t) \frac{\cos\rho}{\rho} + B(t) \frac{\sin\rho}{\rho} \right] (t^2 - \lambda)^{n-2}\, dt,$$

$A(t)\frac{\cos\rho}{\rho} + B(t)\frac{\sin\rho}{\rho}$ s'annulant pour $\rho = t$, sa dérivée par rapport à ρ étant égale à 1 pour $\rho = t$; ce qui donne

$$\begin{aligned} A(t) &= -t\sin t, \\ B(t) &= t\cos t. \end{aligned}$$

Des deux quantités

$$-\int_{\sqrt{\lambda}}^{0} t\sin t \frac{\cos\rho}{\rho} (t^2 - \lambda)^{n-2}\, dt,$$

$$\int_{\sqrt{\lambda}}^{\rho} t\cos t \frac{\sin\rho}{\rho} (t^2 - \lambda)^{n-2}\, dt,$$

la seconde reste finie quand ρ tend vers zéro.

Il n'en est de même de la première que si

$$\int_{\sqrt{\lambda}}^{0} t\sin t (t^2 - \lambda)^{n-2}\, dt = 0.$$

Telle est l'équation en λ demandée. Elle s'écrit encore

$$\int_0^1 (1 - t^2)^{n-1} \cos(t\sqrt{\lambda})\, dt = 0$$

ou

$$A_{n-1}(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

en posant

$$A_0(x) = \sin x,$$

$$A_n(x) = \int_0^x t\, A_{n-1}(t)\, dt,$$

ce qui donne

$$A_1(x) = \sin x - x\cos x,$$
$$A_{n+1}(x) - (2n+1)A_n(x) + x^2 A_{n-1}(x) = 0$$

ou bien encore

$$J_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

en adoptant la notation des « fonctions de Bessel »

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}.$$

La formule démontrée ici pour $n \leqq 3$ est d'ailleurs vraie aussi, et facile à vérifier pour les valeurs $n = 1$, $n = 2$.

On voit que le résultat est remarquablement simple, et fourni même par des fonctions élémentaires.

CONCLUSION.

Nous espérons avoir donné par les exemples précédents une idée des inégalités différentielles qui se présentent le plus naturellement en Analyse.

Nous avons présenté certains faits d'une manière un peu plus générale que les auteurs qui les ont rencontrés les premiers. Nous avons exposé quelques résultats qui nous semblent nouveaux. Nous avons indiqué à l'occasion quelques remarques un peu en dehors de notre sujet même parce qu'elles nous semblaient intéressantes en elles-mêmes.

On pourrait évidemment rattacher bien d'autres considérations au sujet précédent. La bibliographie qui termine notre modeste travail pourra peut-être rendre quelques services.

Vu et permis d'imprimer :

Caen, le 7 juin 1934.

LE RECTEUR,

L. MAIGRON.

Vu et approuvé :

Caen, le 7 juin 1934.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

A. BLANC.

BIBLIOGRAPHIE.

1. E. Picard. — *a. Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique* (Paris, *Cahiers scientifiques*, fasc. I, 1928).

b. Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles (Paris, *Cahiers scientifiques*, fasc. V, 1930).

c. Traité d'analyse (t. III, 2e édition, Chap. VI, 1926).

2. J. Hadamard. — *a. Leçons sur le calcul des variations* (Paris, Hermann, 1910).

b. Article (*Comptes rendus des séances de la Soc. Math. de France*, 1914).

3. E. Goursat. — *Cours d'analyse mathématique* (t. III, Chap. XXX-XXXIV, Paris, 1927).

4. C. Hermite. — *Œuvres* (t. III, Paris, 1896).

5. Darboux. — *Leçons sur la théorie des surfaces* (t. II et III. Paris, 1896).

6. T. Carleman. — *a. Leçons sur les fonctions quasi-analytiques* (Paris, 1926).

b. Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques (Paris, *Comptes rendus Acad. Sc.*, **196**, 1933, p. 995).

7. M. A. Hurwitz. — *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. **19**, 1902, p. 357).

8. M. Janet. — *a. Sur la méthode de Legendre-Jacobi-Clebsch et quelques-unes de ses applications* (*Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. LIII, 1929).

b. Les valeurs moyennes des carrés de deux dérivées d'ordres *consécutifs, et le développement en fraction continue de* tang$x$ (*Bulletin des Sc. Math.*, 2e série, t. LV, 1931).

c. Sur le rapport des valeurs moyennes des carrés de deux dérivées d'ordres consécutifs (*Comptes rendus Ac. Sc.*, **188**, 1929, p. 681).

d. Sur une suite de fonctions considérée par Hermite et son application à un problème du calcul de variations (*Comptes rendus Ac. Sc.*, **190**, 1930, p. 32).

e. Sur le minimum du rapport de certaines intégrales (*Comptes rendus Ac. Sc.*, **193**, 1931, p. 977).

f. Détermination explicite de certains minima dans des problèmes sans conditions aux limites (*Comptes rendus Acad. Sc.*, **194**, 1932, p. 2109).

9. L. Tonelli. — *Fondamenti di Calcolo delle variazioni* (t. I et II, Bologne, 1923).

10. G. Cimmino. — *Articoli* (*Bolletino dell'unione Mathematica Italiana*, t. 8 et 9, 1929 et 1930).

11. A. Kneser. — *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig, 1925).

12. B. Riemann. — *Der partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (Braunschweig, 1876).

13. W. Blaschke. — *Kreis und Kugel* (Leipzig, 1916).

14. R. Courant und D. Hilbert. — *Methoden der mathematischen Physik I* (Berlin, 1931).

15. D. Hilbert. — *Grundzäge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Leipzig und Berlin, 1912).

16. E. Landau. — *Einige Ungleichungen für zweimal differentüerbare Funktionen* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. **13**, p. 43).

17. A. R. Forsyth. — *Calculus of variations* (London, 1927).

18. K. Grandjot. — *On some identities relating to Hardy's convergence theorem* (*Journal London Math. Soc.*, vol. 3, 1928, p. 114).

19. J. W. Rayleigh. — *The theory of sound* (vol. I et II, London, 1894).

20. O. Bolza. — *Lectures on the Calculus of variations* (1904).

21. G. H. Hardy and J. E. Littlewood. — *a. Noter on the theory of*

series (XII) : *On certain inequalities Connected with the Calculus of variations* (*Journal London Math. Soc.*, vol. 5, 1930, p. 34).

b. Some integral inequalities connected with the Calculus of variations (*The Quarterly Journal of Math.*, Oxford series, vol. 3, 1932, p. 241).

22. G. A. Bliss. — *a. Calculus of variations* (Chicago, 1224).

b. An integral inequality (*Journal London Math. Soc.*, vol. 5, 1934, p. 40).

ERRATA

Page 2, ligne 11, *au lieu de* ordre supérieur, *lire* ordres supérieurs.

Page 5, ligne 4, *au lieu de* limite la plus avantageuse, *lire* limite plus avantageuse.

Page 7, ligne 4, *au lieu de* précédente. On, *lire* précédente, on.

Page 9, ligne 11, *au lieu de* dérivées première et seconde, *lire* dérivées premières et secondes.

Page 11, ligne 8, *au lieu de* $\dfrac{\int_a^b y'^2\,dx}{\int_a^b y'\,dx}$, *lire* $\dfrac{\int_a^b y'^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}$

Page 13, ligne 1, *au lieu de* fixe, *lire* fixée; ligne 6, *au lieu de* que, *lire* qui.

Page 18, ligne 7, ajouter dx après $\dfrac{y^2}{(x-a)(b-x)}$.

Page 21, ligne 18,

au lieu de $\dfrac{\int_a y'^2\,dx}{\int_a^b \frac{y^2}{(x-a)^2(b-x)^2}}$, *lire* $\dfrac{\int_a^b y''^2\,dx}{\int_a^b \frac{y^2}{(x-a)^2(b-x)^2}\,dx}$.

Page 22, ligne 13, *au lieu de* $-\int yy'\,dx$, *lire* $-\int yy''\,dx$.

Page 22, ligne 4, à partir du bas, *au lieu de* tendent, *lire* tend.

Page 23, ligne 3, *au lieu de l'écritable, lire la véritable.*

Page 24, ligne 5, *au lieu de* $e^{-x\cos\frac{\pi}{2}}$, *lire* $e^{-r\cos\frac{\pi}{3}}$.

Page 26, ligne 10, *au lieu de* x'^2_x *lire* u'^2_x.

Page 27, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(3)}{\varphi(3)}$, *lire* $\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'^2(z)}{\varphi(z)}$.

Page 28, ligne 5, *au lieu de* $\int_{c\ \text{direct}}$, *lire* $2\int_{c\ \text{direct}}$

Page 28, avant dernière ligne, *au lieu de* x'^2_x, *lire* u'^2_x.

Page 30, ligne 1, *au lieu de* indépendante, *lire* indépendantes.

Page 31, ligne 4, *au lieu de* $\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}(r\omega)$, *lire* $\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left[(r\omega)\left(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}(r\omega)\right)\right]$; ligne 11, *au lieu de* $\frac{br^2}{b}$, *lire* $\frac{br^2}{6}$.

Page 33, ligne 5, *au lieu de* $n \leqq 3$, *lire* $n \geqq 3$.

Page 38 :

12. RIEMANN. ., *au lieu de* Der partielle, *lire* Die partielle.
13. D. HILBERT..., *au lieu de* Grundzäge, *lire* Grundzüge.
16. E. LANDAU..., *au lieu de* differentüerbare, *lire* differentierbare.
21. HARDY et LITTLERWOOD..., *au lieu de* Noter, *lire* Notes,

TABLE DES MATIÈRES.