ERVIN FELDHEIM

Étude de la stabilité des lois de probabilité

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__187__1_0>

Série A, n° 339
N° d'ordre :
363

THÈSES

PRESENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(Sciences mathematiques)

PAR

M. ERVIN FELDHEIM
LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHEMATIQUES

1re THESE. — Etude de la stabilité des lois de probabilité.

2e THESE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 26 FEV 1937 devant la Commission d'examen.

MM. É. Borel	*President.*
M. Fréchet	*Examinateurs.*
G. Darmois	

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE DE LA VILLE DE SZEGED S. A. (Hongrie)
1937

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . . M. MOLLIARD.

Doyen . . . . *C. MAURAIN, Professeur,* Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	GUILLET.	JANET.
A. FERNBACH.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
A. LEDUC.	FREUNDLER.	MARCHIS
Émile PICARD.	AUGER.	VESSIOT.
Rémy PERRIER.	BLAISE.	PORTIER.
Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	

PROFESSEURS

G. Bertrand . .	T	Chimie biologique.
M. Caullery . .	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. Urbain . . .	T	Chimie générale.
Émile Borel . .	T	Calcul des probabilités et Physique Mathématique.
Jean Perrin . .	T	Chimie physique.
H. Abraham . .	T	Physique
E. Cartan . . .	T	Géométrie supérieure.
M. Molliard . .	T	Physiologie végétale.
L. Lapicque . .	T	Physiologie générale.
A. Cotton . . .	T	Recherches physiques.
J. Drach . . .	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles Fabry .	T	Enseignement de Physique.
Charles Pérez .	T	Zoologie.
Leon Bertrand .	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
E. Rabaud . .	T	Biologie expérimentale.
M. Guichard . .		Chimie minérale.
Paul Montel . .	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
P. Wintrebert .	T	Anatomie et histologie comparées.
L. Blaringhem .	T	Botanique.
O. Duboscq . .	T	Biologie maritime.
G. Julia. . . .	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. Mauguin . .	T	Minéralogie.
A. Michel-Lévy .	T	Pétrographie.
H. Bénard . . .	T	Mécanique expérimentale des fluides
A. Denjoy . . .	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. Lutaud . . .	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène Bloch .	T	Physique théorique et physique céleste.
G. Bruhat . . .		Physique.
E. Darmois . .		Enseignement de Physique.
A. Debierne . .	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. Dufour. . .	T	Physique (P. C. B.).
L. Dunoyer . .		Optique appliquée.
A. Guilliermond	T	Botanique.
M. Javillier . .		Chimie biologique.
L. Joleaud. . .		Paléontologie.
Robert-Lévy . .		Zoologie.
F. Picard . . .		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri Villat . .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. Jacob . . .	T	Géologie.
P. Pascal . . .	T	Chimie minerale.
M. Fréchet. . .	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. Esclangon . .	T	Astronomie.
Mme Ramart-Lucas	T	Chimie organique.
H. Béghin . . .	T	Mécanique physique et expérimentale.
Foch		Mécanique expérimentale des fluides.
Pauthenier. . .		Physique (P. C. B.).
De Broglie. . .	T	Théories physiques.
Chrétien . . .		Optique appliquée.
P. Job		*Chimie générale.*
Labrouste . . .		Physique du Globe.
Prenant. . .		Zoologie.
Villey		Mécanique physique et expérimentale.
Bohn		Zoologie (P. C. B.).
Combes		Botanique (P. C. B.).
Garnier. . . .	T	Mathématiques générales.
Pérès		Mécanique des fluides.
Hackspill . . .		Chimie (P. C. B.).
Laugier		Physiologie générale.
Toussaint . . .		Technique Aéronautique.
M. Curie . . .		Physique (P. C. B.).
G. Ribaud. . .	T	Hautes températures.
Chazy	T	Mécanique rationnelle.
Gault.		Chimie (P. C. B.).
Croze.		Recherches Physiques.
Dupont	T	Théories chimiques.
Lanquine . . .		Géologie.
Valiron. . . .		Mathématiques générales,
Barrabé. . .		Géologie structurale et géologie appliquée
Millot.		Zoologie (P. C. B.).
F. Perrin . . .		Théories physiques.
Vavon		Chimie organique.
G. Darmois . .		Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.

Secrétaire . . . . *A. Pacaud.*

Secrétaire honoraire . . . . . *D. Tombeck.*

A MES PARENTS

A MON FRÈRE

A MONSIEUR PAUL LÉVY

PROFESSEUR À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Témoignage de respectueuse reconnaissance

A MON MAITRE

MONSIEUR GEORGES DARMOIS

PROFESSEUR À LA SORBONNE

Hommage de ma profonde gratitude

Étude de la stabilité des lois de probabilité.

Introduction.

Définitions et historique. L'exemple des lois de Gauss et de Cauchy montre qu'il existe des lois de probabilité jouissant de la propriété suivante: si x_1 et x_2 sont deux variables indépendantes obéissant à la même loi, la variable aléatoire

$$x = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a}$$

(a_1 et a_2 constantes positives quelconques, a fonction de a_1 et a_2) dépendra aussi de cette loi. Ces lois sont dites *stables,* et dépendent de deux paramètres, sans compter celui qui correspond à un changement d'unité.

Rappelons maintenant la définition de ce qu'on appelle *domaine d'attraction.* On dit qu'une loi $\mathfrak{L}$ appartient au domaine d'attraction d'une loi L si n variables aléatoires indépendantes obéissant à la loi $\mathfrak{L}$ ont une somme obéissant à une loi d'un type tendant pour n infini, vers la loi L, c'est-à-dire qu'elle n'en diffère que par un changement d'unité ou par un changement d'unité et d'origine (tendance vers un type donné au „sens restreint“ et au „sens large“). Toutes les lois pour lesquelles les valeurs probables $E\{x\}$ et $E\{x^2\}$ sont finies, appartiennent au domaine d'attraction de la loi de Gauss. Il en existe d'autres, qui doivent vérifier la condition nécessaire, mais non suffisante que $E\{|x|^{2-\varepsilon}\}$ soit borné, quelque petit que soit ε. Par contre cette condition est suffisante, mais non nécessaire pour qu'il y ait au moins convergence intermittente vers la loi de Gauss, c'est-à-dire que la propriété indiquée ne soit vérifiée que pour une suite de valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ indéfiniment croissantes[1]).

[1]) Voir Bibliographie [8], Théorèmes IV et V.

L'exemple de la loi de Cauchy montre qu'il existe des lois stables, autres que la loi de Gauss ; elles ne peuvent être cherchées que parmi celles, pour lesquelles le théorème précédent, appelé „théorème limite du calcul des probabilités“ ou encore plus souvent „loi des grands nombres“ n'est pas applicable. Ces lois ne peuvent donc être que celles pour lesquelles la valeur quadratique moyenne de la variable est infinie. Ce sont alors les grandes valeurs de la variable qui ont une influence décisive au point de vue de la stabilité. On sait d'ailleurs que seules les grandes valeurs des variables aléatoires indépendantes x_ν peuvent empêcher la somme

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

de tendre, pour $n \to \infty$, vers une loi de type de Gauss. Ceci montre aussi que dans notre cas, il ne faut prendre soin que de ces grandes valeurs que nous mettrons en évidence dans la définition constructive des lois stables (§. 3). Cette construction nous montrera qu'une loi stable peut être obtenue par l'addition de variables toutes de même ordre de grandeur, les autres pouvant être négligées.

Si l'on définit la loi par sa fonction caractéristique

$$\varphi(z) = E\{e^{izx}\},$$

la loi stable la plus générale sera donnée par

$$\psi(z) = \log \varphi(z) = -\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + i\frac{z}{|z|}\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Un des paramètres de ces lois, appelé *exposant caractéristique* α lie les trois constantes a, a_1, a_2 de la manière suivante :

$$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha.$$

Cette formule se généralise immédiatement au cas de plusieurs lois composantes :

$$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha.$$

En particulier, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, *le coefficient de réduction* a a une expression simple :

$$a = n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On verra que les lois stables (autres que la loi de Gauss) n'existent que pour

$$0 < \alpha < 2.$$

Pour $\alpha \geqq 2$, on a la loi de Gauss. Pour $\alpha = 1$, on a la loi de Cauchy, ou des lois du même type.

Pour l'autre paramètre β, nous allons trouver la condition

$$|\beta| \leqq 1.$$

Cauchy avait vu déjà en 1853 qu'il existe des fonctions $\psi(z)$ de la forme indiquée (dans le cas où $\beta = 0$), qui satisfont à la propriété de la stabilité, mais il n'avait pas établi que ces fonctions peuvent bien donner des lois de probabilités. C'est seulement depuis 1922 que l'attention est tournée vers ce problème très important de la théorie des probabilités, par des publications presque simultanées de MM. Paul Lévy et Georges Pólya, signalant l'intérêt et la difficulté du problème et le résolvant dans quelques cas.

M. Paul Lévy a donné depuis la solution complète de la question dans une longue série de notes et mémoires, et l'a résolue même par plusieurs méthodes, en relation avec l'étude de questions très générales du calcul des probabilités.

Le but du présent mémoire est, d'une part, de rassembler les résultats relatifs à ce problème, et de donner une théorie aussi complète que possible des lois stables à une variable. Dans une seconde partie, on s'efforcera d'étendre les résultats au cas de lois de probabilités stables à deux variables, et en général, à plusieurs variables.

La méthode qui se prête le mieux pour cette étude systématique nous semble être la première, employée par les fondateurs de cette théorie : celle des fonctions caractéristiques.

Cette méthode permettra aussi de traiter les cas particuliers des lois *semi-stables* et *quasi-stables,* dont les premières diffèrent du cas général en ce que la propriété caractéristique de la stabilité n'est vraie pour elles que pour certaines valeurs du rapport $\frac{a_2}{a_1}$, le second groupe par contre se ramène, comme nous allons le montrer, au cas général.

CHAPITRE I.

Théorie des lois stables à une variable.

§. 1. Recherche des lois stables.

Définissons une loi de probabilité par le logarithme de sa fonction caractéristique:

$$\psi(z) = \log \varphi(z) = \log E\{e^{izx}\};$$

le paramètre z est supposé réel, et

$$|\varphi(z)| \leqq 1,$$

donc $R\psi(z) \leqq 0$, le symbole R désignant la partie réelle. Remarquons encore que $\varphi(0) = 1$ entraîne $\psi(0) = 0$.

Le théorème fondamental de la composition des lois de probabilités indépendantes permet alors d'écrire immédiatement la condition de la stabilité, au moyen de l'équation fonctionnelle

$$\psi(a_1 z) + \psi(a_2 z) = \psi(az), \tag{1}$$

ou, en général

$$\psi(a_1 z) + \psi(a_2 z) + \ldots + \psi(a_n z) = \psi(az) \tag{1'}$$

a étant une fonction des paramètres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Il est facile, par une double dérivation par rapport à a_1 et a_2, de déduire de l'équation fonctionnelle (1) une équation différentielle qui définit la forme de la fonction $\psi(z)$. Mais cette méthode nécessite une discussion de la dépendance entre a et a_1, a_2. Nous indiquerons un raisonnement plus intuitif, qui ne suppose pas a priori l'existence des dérivées des deux premiers ordres de $\psi(z)$.

On ne restreint nullement le problème en supposant, pour la détermination de la forme de la fonction $\psi(z)$, que

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1.$$

On aura alors

(2) $$n\psi(z) = \psi(az)$$
a étant une fonction de l'entier arbitraire n. Adjoignons à (2) la relation
$$N\psi(z) = \psi(Az),$$
correspondant à une autre valeur N de l'entier n. Alors $\lambda = \frac{N}{n}$ est un nombre rationnel quelconque, et

(3) $$\lambda\psi(z) = \psi(\mu z).$$
A cause de la continuité, (3) reste vrai pour λ positif quelconque, et μ est une fonction continue de λ. A deux valeurs de z en progression géométrique de raison arbitrairement voisine de 1 correspondent des valeurs de $\psi(z)$ en progression géométrique. Cela ne peut être possible que si, pour chaque signe de z, $\psi(z)$ est proportionnel à $|z|^\alpha$.

On peut d'ailleurs appliquer, pour l'équation (3), la méthode indiquée ci-dessus. $\mu(\lambda)$ est une fonction continue, qu'on peut supposer dérivable. Dérivons alors les deux membres de (3) par rapport au paramètre λ. Il vient
$$\lambda z \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} \cdot \psi'(\mu z) = \psi(\mu z),$$
d'où, en tenant compte de (3), et en posant $\mu z = v$,
$$\frac{\psi'(v)}{\psi(v)} = \frac{\mu(\lambda)}{\lambda\mu'(\lambda)}\,\frac{1}{v} = \frac{\alpha}{v},$$
et l'intégration montre que $\psi(v)$ est proportionnel à v^α. Pour les différents signes de z, on a donc
$$\psi(z) = -c|z|^\alpha,$$
la constante c pouvant dépendre du signe de z. En outre de la relation $\psi(0) = 0$ déjà indiquée, on a encore $\psi(z) = \overline{\psi(-z)}$ (conjugué de $\psi(-z)$), donc on peut écrire que

(4) $$\psi(z) = -\left(c_0 + i\frac{z}{|z|}c_1\right)|z|^\alpha$$
c_0 étant positif, et α étant l'exposant caractéristique de la loi. On vérifie par une substitution dans l'équation fonctionnelle (1'), que

(5) $$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha.$$

Cette forme de la seconde fonction caractéristique (on a l'habitude d'appeler ainsi le logarithme $\psi(z)$ de la fonction caractéristique) est connue depuis longtemps. Il s'agissait seulement de montrer qu'elle peut bien donner lieu à une loi de probabilité, c'est-à-dire que la densité qu'on en déduit par la formule de Fourier ne soit jamais négative.

Nous avons déjà indiqué que les lois stables autres que la loi de Gauss ne peuvent avoir un exposant caractéristique $\alpha \geqq 2$. En effet, il faut que la valeur quadratique moyenne soit infinie, c'est-à-dire que $\varphi(z) - 1$ ou $\psi(z)$ soit d'un ordre infinitésimal inférieur au second. Désignons par $\varphi_0(z)$ la partie paire de $\varphi(z)$:

$$\varphi_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos zx\, dF(x).$$

On aura

$$\lim_{z=0} \frac{1-\varphi_0(z)}{z^2} = \frac{1}{2} E\{x^2\}.$$

Cette formule reste vraie si $E\{x^2\}$ est infini. D'autre part, elle montre bien que si $1 - \varphi_0(z)$ est de l'ordre inférieur à 2, la valeur moyenne $E\{x^2\}$ sera infinie.

Nous démontrerons plus loin que les lois considérées existent effectivement si

$$|c_1| \leqq c_0 \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}.$$

On peut poser

$$\frac{c_1}{c_0} = \beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2},$$

et les critères d'existence de ces lois sont

$$0 < \alpha < 2, \quad \text{et} \quad |\beta| \leqq 1.$$

La loi sera *réduite* si par un changement d'unité on a ramené c_0 à une valeur déterminée, par exemple à la valeur $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$, $\Gamma(u)$ désignant la fonction eulérienne de seconde espèce.

Nous appellerons loi $L_{\alpha,\beta}$ une loi pour laquelle

$$\psi(z) = -\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + i \frac{z}{|z|} \beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{6}$$

Pour $\beta = 0$, on a les lois symétriques L_α, pour lesquelles

$$\psi(z) = -\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{7}$$

Ces lois comprennent les cas particuliers des lois de Gauss et de Cauchy.

Les valeurs de $\beta \neq 0$ donnent lieu à des lois dissymétriques $L_{\alpha,\beta}$ dont l'existence sera aussi établie dans la suite.

§. 2. **Domaine d'attraction des lois** $L_{\alpha,\beta}$.

La définition du domaine d'attraction des lois donnée dans l'Introduction s'applique aussi aux lois stables.

On appelle *loi* $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ toute loi pour laquelle la fonction $\psi(z)$ est équivalente à l'origine à celle d'une loi du type $L_{\alpha,\beta}$. On aura donc pour une loi $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$

$$\psi(z) = -\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + i\frac{z}{|z|}\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)[1+\omega(z)], \tag{8}$$

la fonction $\omega(z)$ s'annulant avec z. Cette loi, d'après ce qu'on a dit dans le §. précédent, sera aussi réduite.

On appellera *famille normale de lois* $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ *réduites* toute famille de lois réduites, correspondant toutes aux mêmes valeurs de α et β, et à des fonctions $\omega(z)$ majorées, dans un même intervalle $(-\xi, +\xi)$ par une fonction $h(z)$, s'annulant avec z. On peut supposer la fonction $h(z)$ paire et croissant avec z; il suffit, si cette dernière condition n'est pas réalisée, de remplacer $h(z)$ par une valeur plus grande, par exemple le maximum de $h(z')$ quand z' varie de $-z$ à $+z$, cette opération n'ayant pour effet que l'extension de la famille normale définie par cette fonction et le nombre ξ.

Considérons alors n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obéissant à des lois $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ qui appartiennent à une famille normale donnée, et des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que

$$a' < a\eta,$$

a' désignant le plus grand de ces nombres, a étant donné par la formule (5) du §. 1., et η désignant un nombre positif très petit. Alors

la somme

$$\frac{x}{a} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a}$$

obéit à une loi de probabilité différent d'autant moins de $L_{\alpha,\beta}$ *que le nombre* n *est plus grand.*

La fonction $\psi(z)$ relative à $\frac{x}{a}$ est, comme on le vérifie aisément

$$\Psi(z) = \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{a_i z}{a}\right)$$
$$= -\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+i\frac{z}{|z|}\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\alpha}{a^\alpha}\omega_i\left(\frac{a_i z}{a}\right)\right].$$

On a, par définition

$$|\omega_i(z)| \leqq h(z).$$

D'autre part, si z varie dans un intervalle fini $(-Z, +Z)$, il vient un moment, n augmentant, où le rapport $\frac{a'}{a}$, qui tend vers 0, est inférieur à $\frac{\xi}{Z}$. Alors tous les rapports $\frac{a_i z}{a}$ sont compris entre $-\xi$ et $+\xi$, et

$$\left|\omega_i\left(\frac{a_i z}{a}\right)\right| \leqq h\left(\frac{a_i z}{a}\right) \leqq h\left(\frac{a'}{a}Z\right).$$

On en déduit que, dans tout intervalle fini $(-Z, +Z)$, pourvu que $\eta < Z$, on a

$$\left|\Psi(z) + \frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+i\frac{z}{|z|}\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right| \leqq c\,|Z|^\alpha h(\eta Z),$$

c désignant le module du coefficient de $|z|^\alpha$ dans l'expression de $\psi(z)$. Si $\eta \to 0$, $\Psi(z)$ tend vers la limite

$$-\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+i\frac{z}{|z|}\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

et cela uniformément dans tout intervalle fini $(-Z, +Z)$. La variable $\frac{x}{a}$ obéit donc à la limite à une loi tendant vers $L_{\alpha,\beta}$. L'ensemble des lois $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ forme ainsi un *domaine d'attraction* de la loi $L_{\alpha,\beta}$.

Comme nous avons déjà indiqué, les grandes valeurs seules des variables interviennent dans la recherche des lois exceptionnelles, qui résultent de l'addition d'un grand nombre d'erreurs indépendantes, obéissant à une loi n'appartenant pas au domaine d'attraction de la loi de Gauss. C'est l'intervention progressive des grandes valeurs qui définit la nature de la loi limite, mais la somme des valeurs de la variable comprises entre deux limites quelconques a une dispersion négligeable devant la somme totale. La détermination exacte des variables est par suite sans importance. Un changement ne portant que sur les valeurs des variables inférieures en module à une borne arbitrairement grande ne change donc pas le domaine d'attraction auquel se rattache une loi $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$; par un changement ne portant que sur les valeurs de la variable très grandes en module, et de probabilité arbitrairement petite, on peut donc, d'une loi $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable $L_{\alpha,\beta}$ faire une loi $\mathfrak{L}'_{\alpha,\beta}$ appartenant au domaine d'attraction d'une autre loi stable $L'_{\alpha,\beta}$.

Suites équivalentes.

Introduisons maintenant la notion de suite équivalente, due à M. Khintchine. On dit que les suites x_ν et $\overline{x}_\nu$ sont équivalentes, lorsque la probabilité de la relation $x_\nu \neq \overline{x}_\nu$ est le terme général d'une série convergente.

(Cela implique, sauf dans le cas où la suite des x_ν est équivalente à une suite de constantes, que x_ν et $\overline{x}_\nu$ ne soient pas indépendantes.)

Il y a dans ce cas une probabilité égale à l'unité que les deux suites ne diffèrent que par un nombre fini de termes; on peut alors les substituer l'une à l'autre pour toutes les questions dont la solution n'est pas modifiée par le changement d'un nombre fini de termes.

Il en résulte qu'on peut trouver une suite de variables

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \ldots$$

équivalente à la suite des x_ν, mais dépendant des lois $\mathfrak{L}'_1, \mathfrak{L}'_2, \ldots, \mathfrak{L}'_n, \ldots$ du domaine d'attraction de L', tandisque les x_ν dépendent de la loi $\mathfrak{L}$, du domaine d'attraction de L. Alors la somme

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{n} \overline{x}_\nu$$

N étant un facteur convenable, dépend d'une loi résultante tendant vers la loi L, bien que chacune des lois composantes appartienne au domaine d'attraction de L'.

* * *

La convergence des familles $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ vers la loi $L_{\alpha,\beta}$ est assurée dans son domaine d'attraction pourvu, d'une part que le plus grand des termes a_i^α ne constitue qu'une partie très petite de la somme a^α, c'est-à-dire que la plus grande des erreurs partielles $a_i x_i$ n'ait sur la somme X qu'une influence négligeable, d'autre part que l'on n'introduise pas des lois $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ différent de plus en plus de la loi $L_{\alpha,\beta}$, et qui seraient représentées dans un espace idéal, par des points s'éloignant indéfiniment. Disons d'abord quelque mots sur la première de ces conditions. Lorsque nous parlons de la plus grande des erreurs partielles, il faut distinguer le terme de plus grand coefficient a_i, et celui qui, par le hasard du choix des x_i, se trouve être le plus grand. Si ce dernier n'a qu'une influence négligeable sur la somme totale, on aura convergence vers la loi $L_{\alpha,\beta}$. Cette loi $L_{\alpha,\beta}$ joue ici le même rôle que la loi de Gauss pour les lois $\mathfrak{L}_2$, appartenant à une famille normale et telle que le moment $E\{x^2\}$ soit fini.

Espace fonctionnel.

Passons à la notion de l'espace fonctionnel. Une loi $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ y sera représentée par un point M où l'on a plaçé une masse égale à a^α. Il faut supposer qu'on puisse mettre plusieurs masses distinctes en un même point.

Si l'on compose n lois, représentées par des points M_1, $M_2, \ldots, M_n$, et des masses $a_1^\alpha, a_2^\alpha, \ldots, a_n^\alpha$, placées en ces points, la loi résultante sera représentée par une masse a^α, telle que

$$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha$$

résultant de la *composition* des masses précédentes, *égale à leur somme,* et placée en un point M qu'on peut appeler centre de gravité des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Le point O représentant la loi $L_{\alpha,\beta}$ (pour laquelle on a, dans la formule (8) $\omega(z) = 0$), sera appelé *centre* ou *origine* de cet espace. Un point sera plus éloigné qu'un autre point du centre O si la détermination correspondante de $\omega(z)$ est plus grande, au moins pour les petites valeurs de z. Les points pour lesquels les fonctions $\omega(z)$ admettront, au moins dans un intervalle fini $-\xi, +\xi)$ une majorante $h(z)$ qui s'annule avec z, seront considérés comme constituant une *région finie de l'espace.* Cette notion de région finie est la représentation de celle de famille normale.

Le théorème fondamental s'énonce alors de la façon suivante :

La composition d'un grand nombre de masses distinctes conduit à se rapprocher indéfiniment de l'origine, à condition d'une part qu'aucune de ces masses ne constitue une partie appréciable de la masse totale, d'autre part que les points où elles sont placées soient situés dans une région finie.

C'est cette propriété que nous avons exprimée en disant que *la loi* $L_{\alpha,\beta}$ *est une loi stable.*

§. 3. Existence des lois $L_{\alpha,\beta}$.

On peut employer deux méthodes, dues à M. P. Lévy, pour démontrer l'existence des lois stables. L'une est basée sur la notion de *fonction caractéristique,* et fournit une définition constructive, et une définition asymptotique pour les lois en question, l'autre permet de trouver ces mêmes résultats par un procédé élémentaire, indépendant de la fonction caractéristique.

Nous nous proposons, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, d'employer la méthode de la fonction caractéristique, mais en la combinant avec l'autre, de manière à rendre notre exposé aussi simple et aussi complet que possible.

Pour établir l'existence d'une loi $L_{\alpha,\beta}$, il suffit de définir par un procédé quelconque, une loi $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ de son domaine d'attraction. La somme de n erreurs indépendantes obéissant à la loi ainsi définie, divisée par $N = n^{\frac{1}{\alpha}}$, obéit à une loi qui tend pour n infini, vers la loi $L_{\alpha,\beta}$. L'existence de cette loi $L_{\alpha,\beta}$ en résulte évidemment.

Analytiquement, la fonction des probabilités totales (ou fonction de répartition) $F(x)$ relative à la loi $L_{\alpha,\beta}$ est la limite de la fonction $F_n(x)$ obtenue en composant n erreurs obéissant à la loi $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$, leur somme étant divisée par N. Dire que la loi $L_{\alpha,\beta}$ existe, c'est dire que la fonction $F(x)$ ne peut pas décroître quand n croît. Ce résultat, établi pour $F_n(x)$ subsiste à la limite. Mais si l'on suppose seulement l'existence d'une fonction limite $F(x)$, nécessairement monotone, et non-décroissante, il n'est pas sûr qu'elle représente une loi de probabilité. On pourrait concevoir que la variation totale

$$(9) \qquad \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = F(+\infty) - F(-\infty)$$

soit inférieure à l'unité. On dit dans ce cas qu'il y a *condensation à l'infini* (*totale* si $\omega = 0$, *partielle,* si $\omega \neq 0$). Dans ce cas, la convergence de $F_n(x)$ vers $F(x)$ cesse d'être uniforme.

On pourra démontrer par des moyens simples que, dans le cas qui nous occupe, $F(x)$ est bien une fonction de répartition. Mais nous croyons utile de donner un *théorème général sur la limite d'une loi de probabilité,* valable pour tous les cas.

Si l'on définit les lois de probabilité par leur fonction caractéristique, notre problème se réduit au suivant: Il faut démontrer que la fonction caractéristique $\varphi_n(z)$ de la loi qui résulte de la composition de n lois $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ tend, pour $n \to \infty$, vers la fonction caractéristique $\varphi(z)$ de la loi $L_{\alpha,\beta}$, et cela uniformément dans tout intervalle fini $(-Z, +Z)$, comprenant la valeur $z = 0$. Nous supposons seulement l'existence d'une fonction limite $\varphi(z)$ de $\varphi_n(z)$ lorsque $n \to \infty$, sans savoir si $\varphi(z)$ est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité. Nous allons montrer que, dans ces conditions, il ne peut exister une condensation (totale ou partielle) à l'infini, c'est-à-dire qu'on obtient effectivement une loi de probabilité à la limite.

La convergence uniforme des fonctions continues $\varphi_n(z)$ vers $\varphi(z)$ implique la continuité de $\varphi(z)$ dans l'intervalle considéré. La condition $\varphi_n(0) = 1$ subsiste donc à la limite: $\varphi(0) = 1$.

Supposons maintenant que $\omega < 1$. Choisissons un nombre positif

$$\varepsilon < \frac{1 - \omega}{3},$$

et $Z > 0$ assez petit pour que

$$\left| \frac{1}{Z} \int_0^Z \varphi(z)\,dz \right| > 1 - \varepsilon > \omega + 2\varepsilon, \tag{10}$$

puis $X > \dfrac{2}{\varepsilon Z}$, et n assez grand pour que

$$\int_{-X}^{+X} dF(x) = \omega_n < \omega + 2\varepsilon,$$

qui est possible, d'après la définition de ω (formule (9)).

On a

$$\int_0^Z \varphi_n(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^Z e^{izx}\,dz \right) dF_n(x).$$

Or, si $|x| < X$, on a

$$\left| \int_0^Z e^{izx} dz \right| \leqq Z$$

et si $|x| \geqq X$, on a

$$\left| \int_0^Z e^{izx} dz \right| \leqq \frac{2}{|x|},$$

donc

$$\left| \frac{1}{Z} \int_0^Z \varphi_n(z)\, dz \right| \leqq \omega_n + \frac{2(1-\omega_n)}{ZX} \leqq \omega + 2\varepsilon. \tag{11}$$

Cette inégalité, à cause de la convergence uniforme de $\varphi_n(z)$ vers $\varphi(z)$, doit rester vraie à la limite, ce qui est en contradiction avec l'inégalité (10). Le résultat est ainsi démontré[2]).

Les lois infiniment divisibles.

Avant d'entreprendre les recherches sur l'existence des lois stables, donnons l'expression de la fonction

$$\psi(z) = \log E\{e^{izx}\}$$

qui définit une telle loi.

On peut procéder de différentes manières. Nous allons partir de la notion des lois infiniment divisibles, d'une part, parce que c'est une notion très générale qui permet de traiter la théorie des lois stables d'une façon simple, d'autre part, parce que la démonstration de la condition nécessaire et suffisante $|\beta| \leqq 1$ sera basée sur cette notion.

Considérons, dans l'étude de la somme S_n des variables indépendantes x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, une suite de valeurs n_p de n; on obtient pour ces valeurs des lois dont les types tendent vers celui d'une loi $\mathfrak{L}$. Prenons maintenant une autre suite de valeurs n'_p telles que $\frac{n'_p}{n_p}$ ait une limite k. Pour cette seconde suite, on aura des lois de types tendant vers celui de $\mathfrak{L}^k$, en désignant ainsi la loi dont la fonction caractéristique s'obtient en élevant celle de $\mathfrak{L}$ à la puissance k. Cette loi existe, quel que petit que soit k. Elle est caractérisée aussi par le fait que la puissance $\varepsilon\,(\varepsilon > 0$

[2]) Voir Bibliographie [7].

arbitrairement petit) de sa fonction caractéristique est encore une fonction caractéristique.

Ces lois ont été étudiées, dans des cas particuliers, par MM. Bruno de Finetti, et A. Kolmogoroff, et traitées, dans leur généralité, par M. Paul Lévy[3]). Nous exposons ici, bien que cela ne soit nécessaire pour notre objet, les principaux résultats de son travail.

On désigne par t une variable réelle, allant de 0 à $T > 0$, et par $X(t)$ une fonction de cette variable, nulle pour $t = 0$, et choisie pour $t > 0$ de manière que les accroissements ΔX relatifs à des intervalles Δt extérieurs les uns aux autres soient des variables aléatoires indépendantes entre elles. La fonction $X(t)$ est alors nécessairement la somme de quatre termes:

a) une fonction de t indépendant du hasard,

b) la somme d'une infinité dénombrable au plus de termes qui sont les accroissements brusques de $X(t)$ pour des points donnés, et qui dépendent de lois assujetties seulement à ce que la probabilité de leur convergence soit l'unité,

c) un terme dépendant de la loi de Gauss; θ étant une fonction de t, continue et non-décroissante, l'acroissement de ce terme, quand θ augmente de $\Delta\theta$ dépend de la loi de Gauss, sa valeur quadratique moyenne étant $\sqrt{\Delta\theta}$,

d) un terme provenant de l'existence de sauts brusques de $X(t)$ en des points non donnés d'avance, mais dépendant du hasard.

Si la somme de ces sauts est finie, la loi dont dépend $X(t)$ est définie par

$$\log E\{e^{izX(t)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izu} - 1)\, d_u N(u, t). \tag{12}$$

Il peut arriver que la convergence de cette intégrale ne soit assurée que par l'addition de termes indépendants du hasard. On écrit alors

$$\log E\{e^{izX(t)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izu} - 1 - iz\,\omega(u))\, d_u N(u, t). \tag{13}$$

On peut toujours prendre $\omega(u) = \dfrac{u}{1+u^2}$; $N(u, t)$ est une fonction de u non-décroissante de 0 à ∞, et de $-\infty$ à 0, nulle

[3]) Voir Bibliographie [3].

à l'infini, pouvant devenir infinie pour $u=0$. Chaque dérivée $d_u N(u, t)$ est une fonction non-décroissante de t; enfin l'intégrale

$$\int u^2 d_u N(u, t)$$

est finie dans tout intervalle fini.

La possibilité de prendre $\omega(u)=u$ pour tout u dépend de la nature à l'infini de l'intégrale

$$\int u d_u N(u, t)$$

sans avoir à faire attention à la nature à l'origine de cette intégrale.

Par contre, on peut prendre $\omega(u)=0$, pour ne rappeler que le cas le plus simple, où l'intégrale précédente est convergente dans tout intervalle fini (et, en particulier, pour $u=0$).

Nous verrons dans ce qui va suivre comment on peut définir les lois stables en partant de cette notion. Indiquons seulement un théorème très important relatif à ces lois. Si l'on désigne par $\mathfrak{L}(t)$ la loi dont dépend $X(t)$, *cette loi est décomposable d'une façon unique en facteurs élémentaires dépendant de la loi de Gauss et de Poisson.*[4]) Il faut supposer tout de même que $\mathfrak{L}(t)$ varie d'une manière continue avec t. Leurs fonctions caractéristiques sont alors définies par

$$\log \Phi(z) = -a\frac{z^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{izu} - 1 - iz\,\omega(u)]\, dN(u). \tag{14}$$

Définition constructive des lois stables.

1°. *Cas où* $0<\alpha<1$. Considérons la portion $x>x_0>0$ de l'axe réel comme divisée en intervalles élémentaires dx, à chacun desquels on fait correspondre une variable aléatoire u, égale à x dans des cas de probabilité très petite

$$c\,|dx^{-\alpha}| = \frac{c\alpha dx}{x^{\alpha+1}}, \qquad (x>x_0>0) \tag{15}$$

et nulle dans les autres cas. Ces variables sont indépendantes les unes des autres.

Considérons la somme $\bar{S}$ de toutes les variables u non nulles. Si x_0 tend vers zéro, la variable $\bar{S}$ tend vers une limite S (sauf

---

4) Pour la démonstration de ce théorème, consulter le dernier Chap. de [3] c).

dans des cas de probabilité nulle) et la loi dont dépend S est la limite de celle dont dépend $\overline{S}$.

Démontrons que *cette loi limite est une loi stable d'exposant caractéristique α.*

Dans le cas considéré $(0 < \alpha < 1)$, on peut supposer $c = 0$ pour $x < 0$, et, en prenant dans (13)

$$dN(u) = \frac{c\,du}{|u|^{\alpha+1}},$$

il vient

$$\psi(z) = c\alpha \int_0^\infty (e^{izx} - 1) \frac{dx}{x^{\alpha+1}}, \tag{16}$$

le cas où $\omega(x) = 0$ étant réalisé ici. (On peut d'ailleurs déduire cette formule de considérations élémentaires, sans faire usage de la formule (13)). Posons

$$|z|\,x = v,$$

donc

$$\psi(z) = c\alpha |z|^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{iv} - 1}{v^{\alpha+1}} dv.$$

Introduisons maintenant la fonction eulérienne de seconde espèce $\Gamma(x)$. On sait que

$$\Gamma(-\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - P(-x)}{x^{\alpha+1}} dx,$$

$P(-x)$ désignant un polynome (qui peut être nul), introduit pour assurer la convergence de l'intégrale. En général, si l'on désigne par p la partie entière de α, $P(-x)$ représente le polynome de degré p qui est égal aux $p+1$ premiers termes du développement de e^{-x}. Donc pour le cas $0 < \alpha \leqq 1$, $P(-x) = 1$, pour $1 < \alpha < 2$, $P(-x) = 1 - x$.

On voit alors que

$$\psi(z) = c\alpha e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} \Gamma(-\alpha)\, |z|^\alpha.$$

D'autre part, on a, quel que soit α,

$$\Gamma(1-\alpha) = -\alpha\Gamma(-\alpha)$$

et

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

qui donnent

$$\psi(z) = -\frac{\pi c \alpha}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 - i\,\mathrm{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{17}$$

L'expression (17) sera de même forme que (6) si l'on fait

$$\frac{\pi c \alpha}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} = 1, \quad \text{et} \quad \beta = -1.$$

Si l'on définit donc la loi de probabilité élémentaire (15) par la quantité

$$\frac{2}{\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,|dx^{-\alpha}|, \qquad (0 < \alpha < 1)$$

la variable S correspondant, qui est *essentiellement positive,* dépendra de la loi $L_{\alpha,-1}$.

Il est alors très facile de former la loi de probabilité stable $L_{\alpha,\beta}$. Posons, en effet,

$$f(x) = \frac{1-\beta}{2} f_1(x) + \frac{1+\beta}{2} f_1(-x), \tag{18}$$

$f_1(x)$ étant la densité d'une loi continue appartenant au domaine d'attraction de la loi $L_{\alpha,-1}$, et $f_1(-x)$ la densité de la loi correspondant à $L_{\alpha,1}$, dont la fonction caractéristique sera $\varphi_1(-z) = \overline{\varphi_1(z)}$. Ceci fait, on aura pour la loi définie par (18)

$$\psi(z) = \frac{1-\beta}{2}\psi_1(z) + \frac{1+\beta}{2}\overline{\psi_1(z)},$$

$\psi_1(z)$ désignant la valeur

$$-\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 - i\frac{z}{|z|}\mathrm{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

d'où il résulte immédiatement que

$$\psi(z) = -\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + i\frac{z}{|z|}\beta\,\mathrm{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

c'est-à-dire la loi $L_{\alpha,\beta}$, dont l'existence est ainsi démontrée pour $0 < \alpha < 1$, et pour $|\beta| \leqq 1$ (la dernière condition étant nécessaire pour que $f_1(x)$ puisse représenter une fonction des probabilités élémentaires).

Mais la condition relative au paramètre β, savoir que

$$|\beta| \leqq 1$$

est nécessaire et suffisante pour l'existence des lois stables définies par la formule (6), doit être encore démontrée rigoureusement, et nous le ferons dans le §. suivant.

La loi $L_{\alpha,-1}$ a la propriété remarquable déjà signalée que la variable obéissant à cette loi ne peut prendre que des valeurs positives.

Ce résultat s'exprime par la relation

$$(19)\qquad \int_0^\infty e^{-t^\alpha \cos\frac{\pi\alpha}{2}} \cos\left(tx + t^\alpha \sin\frac{\pi\alpha}{2}\right) dt = 0,$$

pour $0 < \alpha < 1$, et $x < 0$,

qu'on peut d'ailleurs vérifier directement[5]).

2⁰. *Cas où* $1 < \alpha < 2$. — Si l'on conserve la définition de $\overline{S}$ donnée dans 1⁰., on ne peut peut plus faire tendre x_0 vers zéro à cause de la divergence de la somme étudiée. Mais si l'on substitue à u la valeur $u - E\{u\}$, et par suite à $\overline{S}$ la quantité $\overline{S} - E\{\overline{S}\}$, la valeur probable $E\{\overline{S}\}$ donnée par

$$E\{\overline{S}\} = \int_{x_0}^\infty x|dx^{-\alpha}| = \alpha\int_{x_0}^\infty x^{-\alpha}dx$$

sera finie. L'expression $\overline{S} - E\{\overline{S}\}$ admettra, pour $x_0 \to 0$, une limite S bien définie, si la série $\sum\limits_u [u - E\{u\}]$ est convergente. Il suffit de considérer les valeurs du u inférieures à un nombre fixe U, et la convergence de la série ci-dessus se réalisera en même temps que celle de l'intégrale

$$\int_0^U x^2|dx^{-\alpha}| = \alpha\int_0^U \frac{dx}{x^{\alpha-1}},$$

ce qui est assuré dans notre cas (puisque $1 < \alpha < 2$). Ce résultat montre d'ailleurs que seules les valeurs de α inférieures à 2 peuvent donner des lois stables, la valeur $\alpha = 2$, correspondant à la loi de Gauss, échappant déjà à la méthode de définition des lois stables.

On peut écrire la fonction caractéristique de la loi limite de S, sans tenir compte des considérations précédentes, par l'application de la formule (13).

Il faut prendre dans ce cas $\omega(x) = x$, et l'on aura ainsi

---

[5]) Voir Note.

$$\psi(z) = c\alpha \int_0^{\infty} (e^{izx} - 1 - izx) \frac{dx}{x^{\alpha+1}}. \tag{20}$$

Le théorème de Cauchy montre que l'intégrale ne change pas si l'on intègre de 0 à $+\infty i$ suivant l'axe imaginaire. On aura alors, en posant $|z|\,x = iv$,

$$\psi(z) = c\alpha e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} |z|^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v} - 1 + v}{v^{\alpha+1}} dv = c\alpha e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} \Gamma(-\alpha)\,|z|^{\alpha}.$$

En tenant compte de la relation indiquée

$$\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha) \sin \pi\alpha = -\pi,$$

on en déduit que

$$\psi(z) = -\frac{c\alpha\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{|z|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - i \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

On obtient encore la loi $L_{\alpha,-1}$, en posant, comme dans 1°.:

$$c = \frac{2}{\pi\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}.$$

On conclut comme dans le premier cas, en utilisant la formule (18) que la loi $L_{\alpha,\beta}$ existe encore pour $|\beta| \leqq 1$.

Il y a tout de même une différence très remarquable avec le cas où $0 < \alpha < 1$: dans ce premier cas, S ne peut prendre que des valeurs positives, donc pour la loi $L_{\alpha,-1}$ (et pour $L_{\alpha,1}$) les valeurs de la variable du même signe sont seules possibles. Si $\alpha > 1$, cette propriété ne subsiste plus. La valeur probable de la variable étant nulle, il est évident que des valeurs des deux signes sont possibles.

3°. *Cas où* $\alpha = 1$. — Dans ce cas $\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}$ est une constante quelconque qu'on peut ramener à zéro par l'addition à S d'une constante convenable. Il suffit alors de considérer le cas symétrique $\beta = 0$, et de montrer l'existence de la loi L_1. La formation de la loi stable correspondant peut se faire par la méthode suivie dans 1°., en associant les valeurs des deux signes de x, égales en valeur absolue. Dans ces conditions, la somme des valeurs $E\{u\}$ ainsi groupées est nulle, $\sum_u u$ est convergente, et sa limite S, pour $x_0 \to 0$, existe et dépend de L_1.

Dans ce cas, (13) donne

$$(21)\quad \psi(z) = c\int_0^\infty (\cos uz - 1)\frac{du}{u^2} = c|z|\int_0^\infty (\cos u - 1)\frac{du}{u^2} = -c\frac{\pi}{2}|z|.$$

C'est la loi de Cauchy, et elle sera réduite si l'on prend pour c la valeur déjà calculée, qui devient ici

$$c = \frac{2}{\pi}.$$

Les lois dissymétriques s'obtiennent à partir de L_1, comme nous l'avons dit tout à l'heure, par addition à S d'une constante choisie convenablement.

Formation asymptotique des lois stables.

Supposons d'abord $0 < \alpha < 1$, et désignons par $\mathfrak{L}_{\alpha,-1}$ la loi dont dépend une variable x, toujours supérieure à 1, chaque intervalle dx, entre 1 et ∞, ayant la probabilité (15). Soient

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

des variables indépendantes les unes des autres, et obéissant à cette loi. Posons

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Nous allons montrer que la loi dont dépend s_n tend pour n infini vers la loi $L_{\alpha,-1}$. La fonction caractéristique de la variable x étant

$$\varphi(z) = c\int_1^\infty e^{izx}|dx^{-\alpha}| = c\alpha\int_1^\infty \frac{e^{izx}}{x^{\alpha+1}}dx,$$

on aura

$$(22)\qquad \psi(z) = c\alpha\int_1^\infty \frac{e^{izx}-1}{x^{\alpha+1}}dx, \quad \text{pour les petites valeurs de } z.$$

D'autre part, le logarithme de la fonction caractéristique de s_n est

$$\psi_n(z) = n\psi\left(\frac{z}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

En faisant sur l'intégrale (22) des transformations déjà employées à plusieurs reprises, et en intégrant suivant une parallèle à l'axe imaginaire, on trouve que

$$\psi_n(z) = c\alpha e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} |z|^\alpha \int\limits_{|z| n^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} \frac{e^u - 1}{u^{\alpha+1}} \, du$$

Si $n \to \infty$, $\psi_n(z)$ tend vers la limite

$$\psi(z) = c\alpha e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} |z|^\alpha \Gamma(-\alpha) = -\frac{\pi c \alpha}{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}} \frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - i \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

c'est-à-dire vers la loi $L_{\alpha,-1}$, qu'on peut rendre réduite en prenant

$$c = \frac{2}{\pi\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \tag{23}$$

Remarquons encore que, contrairement à la variable $\overline{S}$ considérée dans l'autre méthode, qui tendait vers une limite S, la variable s_n n'a pas de limite. C'est sa loi seulement qui tend vers une limite quand n croît indéfiniment.

La même méthode peut s'appliquer à la définition de $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$, avec la seule différence qu'il faut considérer des valeurs de x des deux signes. Ces lois n'existent, rappelons, que pour $|\beta| \leqq 1$.

Dans le *cas où* $\alpha > 1$, il faut, dans la définition de s_n, remplacer x_ν par $x_\nu - E\{x_\nu\}$ On aura alors la nouvelle variable

$$s'_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c\alpha}{\alpha - 1} n^{1-\frac{1}{\alpha}}, \tag{24}$$

pour laquelle

$$\psi'_n(z) = n\psi\left(\frac{z}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) - \frac{ic\alpha z}{\alpha-1} n^{1-\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= c\alpha e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} |z|^\alpha \int\limits_{|z| n^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} \frac{e^{-u} - 1 + u}{u^{\alpha+1}} \, du.$$

Si $1 < \alpha < 2$, et $n \to \infty$,

$$\psi'_n(z) \to \psi(z) = c\alpha e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} \Gamma(-\alpha) |z|^\alpha,$$

qui n'est autre que la loi $L_{\alpha,-1}$. Elle sera réduite si l'on prend pour c la valeur (23).

L'existence des lois stables est donc établie dans tous les cas.

§. 4. Démonstration de la condition nécessaire et suffisante $|\beta| \leqq 1$.

Nous avons vu que la définition des lois $L_{\alpha,\beta}$ n'avait un sens que si l'on supposait $|\beta| \leqq 1$. Mais il faut démontrer rigoureusement que cette condition est non seulement nécessaire mais suffisante pour que la formule (6) définisse une loi stable.

Les cas où $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ (lois de Cauchy et de Gauss) sont banals. Pour $0 < \alpha < 1$, et $1 < \alpha < 2$, nous reproduisons une démonstration qui nous a été communiquée par M. Paul Lévy (lettre du 25. 3. 1936) et qui est basée sur la notion des lois infiniment divisibles, esquissée dans le §. précédent. Remarquons que la loi de Gauss est la seule loi stable qui soit composée de facteurs élémentaires du même type qu'elle même, les autres lois stables étant un produit de facteurs élémentaires dépendant de la loi de Poisson. Ces lois étant indéfiniment divisibles, seront données *uniquement* par la formule

$$\log E\{e^{izx}\} = -a\frac{z^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos uz - 1)\, dg(u), \tag{25}$$

dans le cas symétrique, et par

$$\log E\{e^{izx}\} = -a\frac{z^2}{2} + biz + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{izu} - 1 - iz\omega(u)]\, dg(u), \tag{26}$$

dans le cas dissymétrique. La fonction $g(u)$ désigne ici une fonction non-décroissante, finie pour u infini, peut-être infinie pour $u = 0$, mais telle que $u^2 dg(u)$ soit intégrable (de 0 à 1). Dans (26) on peut toujours prendre

$$\omega(u) = \frac{u}{1+u^2},$$

qu'on peut remplacer dans quelques cas soit par 0, soit par u, pourvu que dans ces conditions l'intégrale conserve un sens.

Si l'on définit alors la loi par la seconde fonction caractéristique $\psi(z)$ égale à l'expression (26), la stabilité entraîne que

$$\psi(cz) = c^\alpha \psi(z) \qquad (c > 0)$$

c'est-à-dire

$$-ac^2\frac{z^2}{2}+bciz+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{e^{izu}-1-\frac{izu}{1+\frac{u^2}{c^2}}\right\}dg\left(\frac{u}{c}\right)$$

$$=-ac^\alpha\frac{z^2}{2}+bc^\alpha iz+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{e^{izu}-1-\frac{izu}{1+\frac{u^2}{c^2}}\right\}c^\alpha\,dg(u).$$

(Si l'on avait une discontinuité au point $u=0$, il faudrait remplacer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}$ par $\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}$, et éliminer la discontinuité.)

La représentation de $\psi(z)$ par la formule (26) étant unique (sauf peut-être pour b et $\omega(u)$), d'après le théorème du §. précédent (p. 17), on voit qu'il faut que

$$dg\left(\frac{u}{c}\right)=c^\alpha dg(u),$$

ce qui permet d'écrire

$$(27)\qquad \begin{cases} g(u)=-k_1u^{-\alpha} & (u>0)\\ g(u)=-k_2|u|^{-\alpha} & (u<0)\end{cases}$$

la constante étant déterminée dans les deux cas de manière que $g(u)$ s'annule à l'infini.

D'après les résultats du §. 3., si $0<\alpha<1$, les lois stables possibles s'obtiennent en combinant les lois pour lesquelles

$$\psi_1(z)=\int_0^\infty(e^{izu}-1)\,d(u^{-\alpha}),$$

et

$$\psi_2(z)=\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1)\,d(|u|^{-\alpha}),$$

ce sont donc les deux lois extrêmes; or, elles correspondent à $\beta=\pm1$.

Pour $1<\alpha<2$, il n'y a pas d'autres lois stables que celles obtenues par la combinaison des deux lois pour lesquelles

$$\psi_1(z)=\int_0^\infty(e^{izu}-1-izu)\,d(u^{-\alpha}),$$

et

$$\psi_2(z)=\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1-izu)\,d(|u|^{-\alpha}).$$

Ce sont encore les lois extrêmes, correspondant aux valeurs $+1$ et -1 de β.

On a donc démontré, dans tous les cas, l'impossibilité des valeurs de β plus grandes en module que l'unité.

On connaît d'autres démonstrations, qui ne supposent pas la connaissance des propriétés des lois infiniment divisibles, mais qui, par contre, sont beaucoup plus compliquées[6]).

§. 5. **Probabilité des grandes valeurs de la variable.**

1°. *Cas où* $\alpha < 1$. — Si X est assez grand, on peut négliger la probabilité que deux des u soient supérieurs à X; la somme des u inférieurs à X a pour valeur probable $\frac{\alpha}{1-\alpha} X^{1-\alpha}$, et est inférieure à X', sauf dans des cas de probabilité au plus égale à $\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{X^{1-\alpha}}{X'}$. La probabilité des grandes valeurs de S est donc asymptotiquement la même que celle des grandes valeurs de u, c'est-à-dire que

$$P\{S > X'\} \sim X'^{-\alpha} \qquad (X' \to \infty).$$

Considérons la variable

$$S = c'S' - c''S'' \qquad (c' > 0,\ c'' > 0),$$

S' et S'' étant deux variables de nature précédente. On sait que $\frac{S}{c}$ suit une loi stable $L_{\alpha,\beta}$, lorsque

$$c^{\alpha} = \frac{c'^{\alpha} - c''^{\alpha}}{\beta}.$$

On voit immédiatement que

$$P\{S > c'X\} \sim P\{S < -c''X\} \sim X^{-\alpha}.$$

2°. Pour le *cas où* $\alpha > 1$ les résultats précédents relatifs aux grandes valeurs de la variable subsistent, mais S est infini, et ses valeurs possibles varient de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour la loi définie par la formule

$$\log E\{e^{izx}\} = -\frac{|z|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + i\frac{z}{|z|}\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

avec $\beta = -1$, la probabilité des valeurs de x supérieures à X est, pour X infiniment grand positif,

[6]) Voir Bibliographie [4].

$$P\{x > X\} \sim \frac{c}{X^\alpha} \qquad \left(c = \frac{2}{\pi\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Introduisons la fonction de répartition $F(x)$. Désignons par

$$\mathfrak{F}(x) = 1 - F(x) + F(-x) \qquad (x > 0)$$

la probabilité que la variable soit, en module, supérieure à x, et bornons-nous, pour simplifier, au cas des lois symétriques. Si $\mathfrak{F}(x)$ est à l'infini de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{x^\alpha}$, la fonction caractéristique $\varphi(z)$ est à l'origine de l'ordre de grandeur de $\mathfrak{F}\left(\frac{1}{z}\right)$, si α n'est pas un entier pair, et de l'ordre de $\log|z|\,\mathfrak{F}\left(\frac{1}{z}\right)$, si α est un entier pair (c'est-à-dire $\alpha = 2$).

Le résultat énoncé de cette manière subsiste si $\mathfrak{F}(x)$ est d'une forme telle que

$$x^{-\alpha}(\log|x|)^\beta,$$

et plus généralement, toutes les fois que $\frac{x\mathfrak{F}'(x)}{\mathfrak{F}(x)}$ tend vers une limite $-\alpha$ (ce qui implique que $x^\alpha \mathfrak{F}(x)$ soit d'un ordre de grandeur compris entre ceux de x^ε et $x^{-\varepsilon}$).

Le cas des fonctions $\mathfrak{F}(x)$ tendant irrégulièrement vers 0 donne plus de difficulté. Si $\mathfrak{F}(x)$ est compris entre deux fonctions auxquelles on peut appliquer le résultat précédent, on peut en tirer certaines conclusions pour $\varphi(z)$, et les irrégularités de $\varphi(z)$ correspondront dans une certaine mesure à celles de $\mathfrak{F}(x)$.

En nous plaçant encore dans le cas symétrique, nous avons

$$1 - \varphi(z) = 4\int_0^\infty \sin^2\frac{zx}{2}\,dF(x) = 4\int_0^{\frac{\pi}{z}} \sin^2\frac{zx}{2}\,dF(x) + 4\int_{\frac{\pi}{z}}^\infty \sin^2\frac{zx}{2}\,dF(x),$$

et, par suite, l'application du théorème de la moyenne donne

$$1 - \varphi(z) = \theta_1 z^2 \int_0^{\frac{\pi}{z}} x^2\,dF(x) + 4\theta_2 \int_{\frac{\pi}{z}}^\infty dF(x),$$

θ_1 étant compris entre $\frac{2}{\pi}$ et 1, et θ_2 entre 0 et 1, généralement très voisin de $\frac{1}{2}$.

On vérifie par cette formule, si $1-F(x)$ est à l'infini de l'ordre de grandeur de $x^{-\alpha}$ $(0<\alpha<2)$, que $1-\varphi(z)$ est à l'origine de l'ordre de grandeur z^{α}. Mais si $\alpha=2$, la première intégrale introduit, comme on l'a déjà indiqué, un terme logarithmique.

§. 6. Composition d'un grand nombre d'erreurs dans le cas de lois qui ne sont pas des lois $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$.

Considérons une loi pour laquelle

$$\psi(z)=-\frac{|z|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{-\beta}[1+\omega(z)], \tag{28}$$

avec $\omega(0)=0$. Ces lois existent d'après le §. précédent. En effet, la fonction des probabilités élémentaires est alors une fonction telle que

$$\frac{1}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}}.$$

Pour la somme de n erreurs obéissant à la loi (28), divisée par un coefficient de réduction N, donné par la relation

$$N^{\alpha}(\log N)^{\beta}=n, \tag{29}$$

on aura une loi limite pour n infini, définie par

$$\psi(z)=-\frac{|z|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

c'est-à-dire la loi L_{α}.

L'introduction du facteur logarithmique change seulement l'ordre de grandeur du coefficient de réduction, mais non la forme de la loi obtenue à la limite.

Les calculs précédents ne seront pas changés si l'on remplace $\log x$ par une fonction $\lambda(x)$ paire, et telle que

$$\frac{x\lambda'(x)}{\lambda(x)}\to 0, \quad \text{pour} \quad x\to\infty.$$

On dit *qu'une telle fonction est à croissance lente et régulière.* On vérifie alors que la loi définie par

$$\psi(z)=-\frac{|z|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\lambda\left(\frac{1}{z}\right) \tag{30}$$

appartient au domaine d'attraction de la loi L_{α}.

Les résultats établis dans le §. 5. permettent d'affirmer que la densité de cette loi continue est équivalente, pour les valeurs infiniment grandes de la variable, à la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi \alpha}{2} \frac{\lambda(x)}{|x|^{\alpha+1}}. \tag{31}$$

Examinons maintenant les différents cas qui peuvent se présenter suivant la valeur de α.

Si $\alpha \geqq 2$, la loi considérée appartient au domaine d'attraction de la loi de Gauss.

Si $\alpha = 0$, on n'a pas une loi continue.

Si $0 < \alpha < 2$, et si la loi de la somme X de n erreurs indépendantes obéissant à la loi (28) tend pour n infini vers une limite, cette loi limite est une loi $L_{\alpha,\beta}$ ou L_α. Mais la limite de la loi de X peut ne pas exister, comme nous allons le voir dans l'étude des lois semi-stables.

Remarquons encore que les lois $L_{\alpha,\beta}$, correspondant à une même valeur de α et aux différentes valeurs possibles de β, forment un groupe, la composition de plusieurs de ces lois donnant une loi résultante de ce groupe. Cela résulte immédiatement de l'addition des fonctions $\psi(z)$ relatives aux lois composantes.

§. 7. **Lois semi-stables.**

Les lois pour lesquelles la relation fonctionnelle (1) n'est vérifiée que pour certaines valeurs du rapport $\frac{a_2}{a_1}$ sont dites *semi-stables*. Par exemple, si $a_2 = a_1$, il existe un nombre positif q tel que

$$2\psi(z) = \psi(qz), \tag{32}$$

d'où

$$\frac{\psi(z)}{z^\alpha} = \frac{\psi(qz)}{(qz)^\alpha},$$

avec

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log q}.$$

Ce rapport ne doit donc pas changer si l'on remplace z par qz: c'est une fonction périodique de $\log z$, de période $\frac{\log 2}{\alpha} = \log q$. Nous pouvons donc poser, pour z positif, par exemple,

$$\psi(z) = -cz^\alpha Q(\log z),$$

$Q(x)$ étant une fonction quelconque (réelle ou complexe), de période égale à $\log q$. En général, $\varphi(z)-1$, ou ce qui revient au même, $\psi(z)$ est à décroissance irrégulière lorsque z est infiniment petit. Nous considérons seulement le cas où $\psi(z)$ est de la forme

$$-|z|^{\alpha}\psi_1(z)$$

$\psi_1(z)$ variant une infinité de fois entre deux nombres positifs. On pourra établir que α est réel et compris entre 0 et 2, que c est positif, et que l'on a $\psi(-z)=\overline{\psi(z)}$. Donc si z est réel,

$$\psi(z)=-c|z|^{\alpha}\left[P_0(\log|z|)+i\frac{z}{|z|}P_1(\log|z|)\right], \tag{33}$$

P_0 et P_1 étant de même période, et

$$|P_1|<P_0\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$$

(condition analogue à celle posée dans le §. 1. au sujet du paramètre β).

Il est évident inversement que si la fonction $\psi(z)$ définissant une loi de probabilité est de la forme (33), cette loi est semi-stable. Mais il n'est pas certain que ces lois existent.

Avant de résoudre cette question de l'existence effective des lois semi-stables, faisons quelques remarques à leur sujet.

Si l'on ajoute n erreurs indépendantes obéissant à une loi pour laquelle $\psi(z)$ est de cette forme (33), leur somme X, divisée par $N=n^{\frac{1}{\alpha}}$, obéit à une loi pour laquelle

$$\begin{aligned}\Psi(z)&=n\psi\left(\frac{z}{N}\right)= \\ &=-c|z|^{\alpha}\left[P_0(\log|z|-\log N)+i\frac{z}{|z|}P_1(\log|z|-\log N)\right].\end{aligned} \tag{34}$$

La forme de la loi obtenue dépend périodiquement de $\log n$. Chaque fois que n double, on retrouve la même forme de loi. On peut le voir en considérant une loi L telle que, x_1 et x_2 obéissant à cette loi, il en soit de même de $\frac{x_1+x_2}{q}$. En considérant $2n$ erreurs dépendant de cette loi et en les groupant deux par deux, on voit que la somme de ces $2n$ erreurs est, au facteur q près, assimilable à la somme de n erreurs seulement obéissant à cette loi. Ainsi, si h est un entier positif quelconque, la somme de 2^h erreurs obéissant à la loi L, divisée par q^h, obéit à la loi L elle-même.

Chaque loi semi-stable L dont la fonction $\psi(z)$ est de la forme (33) a un *domaine d'attraction* formé des lois $\mathfrak{L}$ déduites de la loi L en multipliant $\psi(z)$ par $1+\omega(z)$, $\omega(z)$ s'annulant avec z. Alors la somme X de n erreurs indépendantes obéissant à une telle loi $\mathfrak{L}$, divisée par $N=n^{\frac{1}{\alpha}}$, obéit à une loi que l'on déduit de celle définie par la formule (34), en multipliant $\psi(z)$ par $1+\omega\left(\frac{z}{N}\right)$. Pour $n \to \infty$, ce facteur tend vers l'unité, et est sans influence. Si l'on donne à n les valeurs

$$2, 4, \ldots, 2^h, \ldots$$

on obtient pour $\mathfrak{L}$ des lois dont les types tendent vers celui de la loi L. On exprime ce fait en disant qu'il y a *attraction* vers la loi semi-stable L, et ceci montre qu'une loi semi-stable ne peut pas appartenir au domaine d'attraction d'une loi stable.

L'existence des lois semi-stables, pour le cas $\alpha < 1$, a été établie pour la première fois par M. G. Pólya. Il a montré que la fonction $f(x)$, déduite de (33) au moyen de la relation de réciprocité de Fourier, est positive, quel que soit x. Sa méthode consiste à prouver que, $\psi(z)$ étant supposée paire, $f(x)$ peut se présenter sous la forme d'une série alternée, dont les termes successifs sont de plus en plus petits, et le premier est positif. Il en sera alors de même de $f(x)$. Il faut pour cela que $\psi'(z) < 0$, $\psi''(z) > 0$, qui sont certainement vérifiés si

$$\psi(z) = -|z|^{\alpha}[1+p(\log z)],$$

α étant compris entre 0 et 1, et p étant une fonetion de période $\log q$, qui admet, ainsi que ses deux premières dérivées, une limite supérieure suffisamment petite. Ceci démontre l'existence des lois semi-stables pour le cas indiqué.

Pour le cas général, considérons comme pour les lois stables, une variable aléatoire u, égale à x dans des cas de probabilités

$$g(\log|x|)\,|dx^{-\alpha}| \qquad (x > x_0 > 0)$$

relatives à un intervalle dx, et égale à 0 dans les autres cas. $g(x)$ désigne ici une fonction périodique, de période $\log q$. On ne retrouve la même probabilité, à un facteur constant près, par le changement de x en cx, que si c est une puissance de q, d'exposant entier. Alors la somme de p variables indépendantes les unes des autres, et dépendant d'une telle loi dépendra sensiblement d'une loi du même type si p est voisin d'une puissance de q^α, et cela d'autant plus exactement que $\log p - \alpha h \log q$ (h désignant l'exposant de cette puissance) est plus petit. Quel que soit q, il existe donc des entiers p réalisant cette condition avec autant de précision que l'on veut.

On peut remplacer la probabilité précédente pour chaque intervalle dx par

$$x^{-\alpha} dG(\log x),$$

la fonction $G(x)$ étant non-décroissante, et telle que la différence

$$G(\log qx) - G(\log x)$$

soit constante. On peut ainsi obtenir des lois discontinues pour les u; mais la loi dont dépend la somme S, c'est-à-dire la loi semi-stable étudiée, est toujours continue.

En effectuant les calculs identiques à ceux faits dans le §. 3., on aura, si $0 < \alpha < 2$,

$$\varphi(z) - 1 = -\frac{|z|^\alpha}{\pi} \int_{x_0|z|}^{\infty} \frac{1-\cos\xi}{\xi^{\alpha+1}} g\left(\log \frac{\xi}{|z|}\right) d\xi. \tag{35}$$

Cette différence, et par suite $\psi(z)$ est donc de la forme

$$-\frac{|z|^\alpha}{\pi} P(\log|z|)\,[1+\omega(z)], \quad \text{si} \quad x_0 \to 0 \tag{36}$$

$\omega(z)$ s'annulant avec z, et $P(u)$ désignant la fonction

$$P(u) = \int_0^\infty \frac{1-\cos\xi}{\xi^{\alpha+1}} g(\log\xi - u)\, d\xi. \tag{37}$$

Le raisonnement qui précède peut s'appliquer aisément au cas des lois dissymétriques, à condition de raisonner, si α est compris entre 1 et 2, non sur la différence $\varphi(z)-1$, mais sur l'expression $\varphi(z) - 1 - izE\{x\}$, ou ce qui revient au même, de considérer la variable $x_\nu - E\{x_\nu\}$ au lieu de x_ν.

L'existence des lois semi-stables est ainsi établie, pourvu que la fonction $P(u)$ définie par (37) ne se réduise pas à une constante. Dans ce cas, au lieu d'une loi semi-stable, on obtiendrait une loi stable L_α ou $L_{\alpha,\beta}$.

Pour $0 < \alpha < 1$, on retrouve la propriété déjà signalée des lois $L_{\alpha,-1}$: la fonction des probabilités élémentaires de la loi semi-stable correspondant est nulle pour des valeurs négatives de la variable, c'est-à-dire

$$(38) \qquad \int_0^\infty e^{-z^\alpha P(\log z)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \cos\left[zx + z^\alpha P(\log z)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right] dz = 0,$$

avec $0 < \alpha < 1$, et $x < 0$, $P(u)$ désignant une fonction positive, de période égale à $\log q = \frac{\log 2}{\alpha}$.

L'intérêt de l'étude des lois semi-stables consiste surtout en ce qu'elle montre bien que toute loi de probabilité n'appartient pas nécessairement au domaine d'attraction d'une loi stable.

Pour toute loi, il existe un nombre déterminé α positif ou comme cas limite, nul ou infini, tel que la valeur probable de $|x|^{\alpha'}$ soit finie pour $\alpha' < \alpha$, et infinie pour $\alpha' > \alpha$.

Si $\alpha \geqq 2$, la loi considérée appartient au domaine d'attraction de la loi Gauss.

Si $\alpha = 0$, on n'a pas une loi continue.

Si $0 < \alpha < 2$, la loi considérée peut appartenir au domaine d'attraction soit d'une loi symétrique stable L_α, soit de la loi dissymétrique stable $L_{\alpha,\beta}$, soit d'une loi semi-stable, correspondant à la valeur considérée de α, et dépendant d'une fonction arbitraire.

De toute façon, les circonstances qui peuvent se présenter dépendent uniquement des probabilités des grandes valeurs de la variable.

§. 8. **Les lois quasi-stables.**

Une loi de probabilité est dite *quasi-stable* si x_1 et x_2 étant deux variables indépendantes obéissant à cette loi, et a_1 et a_2 deux constantes positives quelconques, on peut trouver deux autres constantes a et C, fonctions de a_1, a_2 telles que la variable aléatoire

$$(39) \qquad x = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a} - \frac{C}{a}$$

obéisse à cette même loi.

Posons $\psi(z) = \log E\{e^{izx}\}$. Alors la propriété indiquée s'exprime par l'équation fonctionnelle

$$(40) \qquad \psi(az) = \psi(a_1 z) + \psi(a_2 z) - Ciz$$

avec

$$a = a(a_1, a_2), \quad C = C(a_1, a_2).$$

Il est évident que l'on a encore

$$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha.$$

Si l'on introduit alors les notations suivantes

$$az=u,\qquad \frac{a\dfrac{\partial^2 a}{\partial a_1 \partial a_2}}{\dfrac{\partial a}{\partial a_1}\,\dfrac{\partial a}{\partial a_2}}=1-\alpha,\qquad \frac{a\dfrac{\partial^2 C}{\partial a_1 \partial a_2}}{\dfrac{\partial a}{\partial a_1}\,\dfrac{\partial a}{\partial a_2}}=p,$$

on peut déduire de (40) l'équation différentielle

$$u\psi''(u)+(1-\alpha)\psi'(u)+pi=0 \tag{41}$$

Il faut maintenant distinguer deux cas, suivant que α est égal ou non à l'unité.

1°. $\alpha \neq 1$. Posons alors $p=m(1-\alpha)$. (41) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\psi''(u)}{\psi'(u)+mi}=\frac{\alpha-1}{u}, \tag{42}$$

qui s'intègre immédiatement. On trouve

$$\psi(u)=-ku^{\alpha}-miu, \tag{43}$$

qui satisfait à l'équation (40) si

$$m=-\frac{C}{a_1+a_2-a}.$$

Pour le cas général, où on a affaire à n lois composantes, on a

$$\left\{\begin{aligned} a^{\alpha}&=\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha},\\ m&=-\frac{C}{\sum_{k=1}^{n} a_k-a}\end{aligned}\right. \tag{44}$$

et

$$\psi(u)=-\lambda_0|u|^{\alpha}\left[1+i\frac{u}{|u|}\lambda_1\right]+\frac{iCu}{\sum_{k=1}^{n} a_k-a}.$$

On voit donc que si les variables aléatoires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suivent la loi représentée par

$$\psi(z)=-\lambda_0|z|^{\alpha}\left(1+i\frac{z}{|z|}\lambda_1\right)+i\beta z, \tag{45}$$

il en est de même de la variable

$$x=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}{a}-\frac{\beta}{a}\sum_{k=1}^{n} a_k+\beta \tag{46}$$

pourvu que

$$a^{\alpha}=\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}.$$

Cette loi est donc quasi-stable.

On peut transformer l'expression (46) en posant

$$x-\beta=y, \quad \text{et} \quad x_k-\beta=y_k.$$

Alors la variable

$$y=\frac{a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n}{a}$$

suit la même loi que les variables y_k, *ces dernières dépendent donc d'une loi stable.*

2⁰. $\alpha=1$. La loi sera définie dans ce cas par l'équation différentielle

(47) $$u\psi''(u)+pi=0,$$

d'où

$$\psi(u)=-ku-piu\log u+piu.$$

Cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle (40), pourvu que

$$\begin{cases} a=a_1+a_2, \\ p=\dfrac{C}{(a_1+a_2)\log(a_1+a_2)-a_1\log a_1-a_2\log a_2}. \end{cases}$$

En général,

(48) $$\begin{cases} a=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \\ p=\dfrac{C}{a\log a-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\log a_k}. \end{cases}$$

$\left(\text{Si } a_1=a_2=\ldots=a_n, \text{ ces formules donnent } a=na_1, \text{ et } p=\dfrac{C}{a\log n}\right).$

La variable

$$x=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}{a}-\frac{C}{a}$$

suit la même loi que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cette loi étant définie par

(49) $$\psi(z)=-\lambda_0|z|\left(1+i\frac{z}{|z|}\lambda_1\right)-\frac{Ciz\log|z|}{a\log a-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\log a_k}.$$

Si l'on fait

$$C=\beta\left[a\log a-\sum_{k=1}^{n} a_k\log a_k\right],$$

la variable

$$x=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}{a}-\beta\log a+\frac{\beta}{a}\sum_{k=1}^{n}a_k\log a_k$$

suit la même loi que $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *définie par la fonction*

$$\psi(z)=-\lambda_0|z|-\mu iz-\beta iz\log|z|. \tag{50}$$

Si $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, la variable

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\beta\log n$$

suit une loi *quasi-stable,* définie par (50).

Si $n\to\infty$, la variable x admettra une loi limite ayant la propriété suivante: si u_1 et u_2 sont deux variables indépendantes qui obéissent à cette loi, il en sera de même de la variable

$$u=\frac{u_1+u_2}{2}-\log 2.$$

La démonstration de ce fait, au moyen de la formule (50), est tout à fait élémentaire.

On peut encore faire la même transformation que dans 1. Posons

$$x+\beta\log a=y,\quad x_k+\beta\log a_k=y_k.$$

Il en résulte que la variable

$$y=\frac{a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n}{a}$$

suit la même loi que les y_k, qui est par suite une loi stable.

L'existence des lois quasi-stables est donc assurée par l'existence des lois stables.

Pour $\alpha=1$, il suffit par exemple de considérer le segment $(1, \infty)$ de l'axe réel, divisé en intervalles infiniment petits dx, chaque intervalle ayant la probabilité $x^{-2}dx$. On en déduit[7]), que la variable

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\log n$$

tend, pour $n\to\infty$, vers la loi pour laquelle

$$\psi(z)=-\frac{\pi}{2}|z|-iz\log|z|+Aiz\qquad (A=\text{constante})$$

La loi stable symétrique d'exposant caractéristique 1, c'est-à-dire

[7]) Voir [10].

la loi de Cauchy, s'obtient alors comme limite de la loi suivie par la variable

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} x_{\nu}$$

lorsque $n \to \infty$, x_{ν} dépendant de la loi précédente. On démontre qu'on a effectivement

$$\psi_n(z) \to \psi(z) = -\frac{\pi}{2} |z|.$$

* * *

On peut encore parler de lois *quasi semi-stables,* pour lesquelles la relation (39) n'a lieu que pour certanies valeurs de a_1 et a_2.

Il faut ici encore distinguer deux cas:

1⁰. $\alpha = 1$,

$$\psi(z) = -\frac{\pi}{2} |z| P_1(\log|z|) + izP_2(\log|z|) + Aiz \log|z|,$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions périodiques de même période, et de plus

$$P_1 > 0, \ |A| \leqq P_1.$$

2⁰. $\alpha \neq 1$,

$$\psi(z) = -|z|^{\alpha} \left[P_1(\log|z|) + i \frac{z}{|z|} P_2(\log|z|) \right] + Aiz,$$

où il faut encore adjoindre aux conditions précédentes l'inégalité

$$|P_2| \leqq P_1.$$

NOTE.

Démonstration directe de la formule (19).

Il s'agit de démontrer que

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^{\alpha} \cos \frac{\pi \alpha}{2}} \cos \left(tx + t^{\alpha} \sin \frac{\pi \alpha}{2} \right) dt = 0,$$

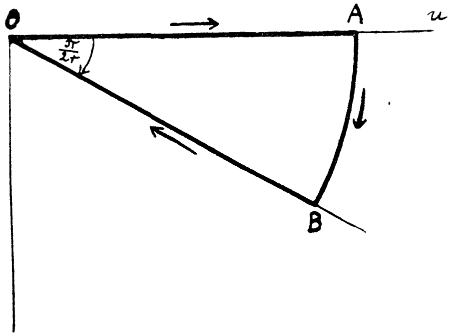
pour $0 < \alpha < 1$, et $x < 0$.

On verra immédiatement que $I(x)$ est la partie réelle de

$$H(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^{\alpha} e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} + itx} dt.$$

Posons $\alpha = \frac{1}{r}$, r étant une quantité positive plus grande que 1. Soit $t^{\alpha} = t^{\frac{1}{r}} = u$, d'où

$$H(x) = r \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u e^{-\frac{\pi i}{2r}} + i x u^r} du.$$



Considérons le contour ci-contre. On a, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{OA} F(u)\, du + \int_{\widehat{AB}} F(z)\, dz = \int_{OB} F(z)\, dz,$$

avec

$$F(z) = r z^{r-1} e^{-z e^{-\frac{\pi i}{2r}} + i x z^r}.$$

Le long de $\widehat{AB}$, $|zF(z)| = rR^r e^{-R\cos\frac{\pi}{2r}}$. Si $R \to \infty$, $|zF(z)| \to 0$, donc il en est de même de $\int_{\widehat{AB}} F(z)\, dz$. Le long de OB, $z = \varrho e^{-\frac{\pi i}{2r}}$, donc $z^r = -i\varrho^r$, et ainsi, si $R \to \infty$

$$\int_{OA} F(u)\, du = H(x) = -ir \int_0^{\infty} \varrho^{r-1} e^{-\varrho + x\varrho^r} d\varrho$$

$r > 1$, et par hypothèse $x < 0$. L'intégrale a donc un sens, et comme nous le voyons, $H(x)$ a sa partie réelle nulle, ce qui démontre l'égalité (19).

CHAPITRE II.

Les lois stables à plusieurs variables.

§. 1. La loi des grands nombres dans le cas de deux variables.

1° Rappelons l'expression de la loi de Gauss à 2 variables. La fonction des probabilités élémentaires de la loi de Gauss réduite est

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)},$$

r étant le coefficient de corrélation. Si l'on définit la fonction caractéristique d'une loi à 2 variables par

$$\varphi(u, v) = E\{e^{i(ux+vy)}\} = \iint e^{i(ux+vy)}\, dF(x, y)$$

$F(x, y)$ étant la fonction de répartition, celle de la loi de Gauss réduite sera égale à

$$\varphi(u, v) = e^{-\frac{1}{2}(u^2+2ruv+v^2)}.$$

Ceci dit, considérons deux variables aléatoires α et β, et soient

$$(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$$

n couples indépendants de valeurs de ces variables, résultats d'expériences indépendantes entre elles, la loi de probabilité ne changeant pas d'une expérience à l'autre. Il s'agit ici d'un problème nouveau, à cause de la corrélation entre α et β. Posons

$$E\{\alpha\} = a,\ E\{\beta\} = b,$$
$$E\{(\alpha-a)^2\} = \sigma_\alpha^2,\ E\{(\beta-b)^2\} = \sigma_\beta^2.$$

Le coefficient de corrélation r sera égal au rapport $\dfrac{E\{(\alpha-a)(\beta-b)\}}{\sigma_\alpha \sigma_\beta}$.

Alors

$$E\{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-na)^2\}=n\sigma_\alpha^2,$$
$$E\{(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n-nb)^2\}=n\sigma_\beta^2.$$

Considérons les variables *réduites*

$$x=\frac{\Sigma(\alpha_i-a)}{\sqrt{n}\,\sigma_\alpha}=\frac{\Sigma\lambda_i}{\sqrt{n}},$$

et

$$y=\frac{\Sigma(\beta_i-b)}{\sqrt{n}\,\sigma_\beta}=\frac{\Sigma\mu_i}{\sqrt{n}},$$

en posant

$$\frac{\alpha_i-a}{\sigma_\alpha}=\lambda_i,\quad \frac{\beta_i-b}{\sigma_\beta}=\mu_i.$$

Désignons par $\varphi(u,v)$ la fonction caractéristique de la loi des deux variables (λ,μ). Celle du couple (x,y) sera alors

$$\Phi(u,v)=\left[\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}},\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

La loi étant réduite, on aura

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right]_{u=v=0}=-1,\quad \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right]_{u=v=0}=-r,\quad \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right]_{u=v=0}=-1,$$

et

$$\iint(ux+vy)^2[1-e^{i(ux+vy)}]\,dF(x,y)$$
$$=u^2+2ruv+v^2+u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}.$$

Si l'on fait

$$\varrho^2=u^2+2ruv+v^2,\quad u=\varrho\xi,\quad v=\varrho\eta$$

(qui donnent $\xi^2+2r\xi\eta+\eta^2=1$), et si $\varphi(u,v)=T(\varrho,\theta)$, il vient

$$\varrho^2\frac{\partial^2 T}{\partial\varrho^2}=u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2},$$

et par suite

$$\varrho^2\iint(\xi x+\eta y)^2[1-e^{i\varrho(\xi x+\eta y)}]\,dF(x,y)=\varrho^2\frac{\partial^2 T}{\partial\varrho^2}+\varrho^2$$

d'où

$$\iint(\xi x+\eta y)^2[1-e^{i\varrho(\xi x+\eta y)}]\,dF(x,y)=\frac{\partial^2 T}{\partial\varrho^2}+1,$$

On peut choisir u et v assez petits pour que cette intégrale soit inférieure à ε. Il suffit pour cela que l'on ait

$$|ux+vy|<\varepsilon$$

parce qu'alors

$$\left|\frac{\partial^2 T}{\partial \varrho^2}+1\right|<\varepsilon\iint(\xi x+\eta y)^2\,dF(x,y)=\varepsilon(\xi^2+2r\xi\eta+\eta^2)=\varepsilon,$$

donc

$$\psi(u,v)=-\frac{\varrho^2}{2}[1+\omega(u,v)]$$

$\omega(u,v)$ s'annulant avec u et v, c'est-à-dire infiniment petit avec ϱ. Pour les variables (x,y), on a

$$\Psi(u,v)=n\,\psi\left(\frac{u}{\sqrt{n}},\frac{v}{\sqrt{n}}\right)=-\frac{u^2+2ruv+v^2}{2}\left[1+\omega\left(\frac{u}{\sqrt{n}},\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Si $n\to\infty$, cette fonction tend vers

$$-\frac{u^2+2ruv+v^2}{2}$$

et *la loi du couple* (x,y) *tend vers la loi de Gauss réduite.*

2°. Etudions maintenant le cas où les lois de probabilité des erreurs partielles ne sont pas les mêmes, mais où l'erreur quadratique moyenne est finie. Prenons le couple de variables

$$\left\{\begin{aligned} X_n&=m_1\xi_1+m_2\xi_2+\ldots+m_h\xi_h+\ldots+m_n\xi_n,\\ Y_n&=n_1\eta_1+n_2\eta_2+\ldots+n_h\eta_h+\ldots+n_n\eta_n\end{aligned}\right.$$

le couple (ξ_h,η_h) obéissant à la loi réduite, dont la 2e fonction caractéristique est $\bar{\psi}_h(u,v)$, m_h et n_h étant les moyennes quadratiques de ξ_h et η_h, M_n et N_n celles de X_n et Y_n:

$$M_n^2=\sum_{h=1}^{n}m_h^2,\qquad N_n^2=\sum_{h=1}^{n}n_h^2.$$

Pour le couple (ξ_h,η_h), on a

$$\psi_h(u,v)=-\frac{u^2m_h^2+2r_hm_hn_h\,uv+v^2n_h^2}{2}[1+\omega_h(um_h,vn_h)],$$

et pour la variable totale (X_n,Y_n),

$$\begin{aligned}\psi(u,v)=&-\frac{1}{2}\left[u^2\sum m_h^2+2uv\sum r_hm_hn_h+v^2\sum n_h^2\right]\\ &-\frac{1}{2}\left[u^2\sum m_h^2\omega_h+2uv\sum r_hm_hn_h\omega_h+v^2\sum n_h^2\omega_h\right].\end{aligned}$$

Pour avoir la fonction $\overline{\psi}(u, v)$ de la loi réduite, il faut remplacer u et v dans la formule précédente par

$$\frac{u}{\sqrt{\Sigma m_h^2}}, \frac{v}{\sqrt{\Sigma n_h^2}}.$$

Donc

$$\overline{\psi}(u, v) = -\frac{1}{2}(u^2 + 2\varrho_n uv + v^2)$$
$$-\frac{1}{2}\left[u^2 \frac{\Sigma m_h^2 \omega_h}{\sqrt{\Sigma m_h^2}} + 2uv \frac{\Sigma r_h m_h n_h \omega_h}{\sqrt{\Sigma m_h^2}\sqrt{\Sigma n_h^2}} + v^2 \frac{\Sigma n_h^2 \omega_h}{\sqrt{\Sigma n_h^2}}\right],$$

où ω_h désigne la fonction

$$\omega_h\left[\frac{u m_h}{\sqrt{\Sigma m_h^2}}, \frac{v n_h}{\sqrt{\Sigma n_h^2}}\right].$$

Désignons par μ_n et ν_n les plus grands des nombres m_h et n_h respectivement. Pour avoir à la limite la loi de Gauss réduite, il faut que

$$\frac{\mu_n}{M_n} \to 0, \quad \frac{\nu_n}{N_n} \to 0, \quad \text{et} \quad \lim \varrho_n \neq \pm 1,$$

et que, étant donné un nombre positif ε, on puisse choisir u et v assez petits pour que

$$|\omega_h(u, v)| < \varepsilon$$

Considérons la loi réduite dont la fonction de répartition est $\overline{F}(x, y)$. Nous dirons que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi x + \eta y)^2 \, d\overline{F}(x, y) = 1$$

est également convergente lorsqu'on peut trouver une région R finie (dépendant de ε), telle que

$$\iint_R (\xi x + \eta y)^2 d\overline{F}(x, y) \geqq 1 - \varepsilon.$$

Alors, en conservant les notations de 1°.,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \varrho^2} + 1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi x + \eta y)^2 [1 - e^{i(ux+vy)}] \, d\overline{F}(x, y).$$

On commet une erreur au plus égale à 2ε en n'intégrant que dans la région R. D'autre part,

$$|1 - e^{i(ux+vy)}| \leqq |ux + vy|,$$

donc

$$\left|\iint\limits_R (\xi x + \eta y)^2 (1 - e^{i(ux+vy)})\, d\bar{F}(x, y)\right|$$

$$< |uX + vY| \iint\limits_R (\xi x + \eta y)^2 d\bar{F}(x, y) \leqq |uX + vY|.$$

Si le point (u, v) reste dans la région R_1, on peut le choisir de façon que

$$|uX + vY| < 2\varepsilon$$

pourvu que

$$(X, Y) \subset R, \quad \text{et} \quad (u, v) \subset R_1.$$

Alors

$$\left|\frac{\partial^2 T}{\partial \varrho^2} + 1\right| \leqq 4\varepsilon,$$

et

$$\left|T - 1 + \frac{\varrho^2}{2}\right| \leqq 2\varepsilon\varrho^2,$$

$T - 1 = \bar{\varphi}(u, v) - 1$ est de l'ordre de $\bar{\psi}(u, v)$, donc

$$\left|\bar{\psi}(u, v) + \frac{\varrho^2}{2}\right| \leqq 3\varepsilon\varrho^2,$$

(car $\bar{\varphi}(u, v) - 1 - \bar{\psi}(u, v)$ est de l'ordre de $\varepsilon\varrho^2$). Si l'on a alors

$$\bar{\psi}(u, v) = -\frac{\varrho^2}{2}[1 + \omega(u, v)].$$

il en résulte que

$$|\omega(u, v)| < 6\varepsilon$$

et *le couple (X, Y) obéira à la limite à la loi de Gauss réduite.*

§. 2. **Recherche des lois stables à deux variables.**

La loi de probabilité à laquelle obéissent les deux couples indépendants de variables (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sera dite stable, lorsque le couple de variables

$$x = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a}, \quad y = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a}$$

suit cette même loi, a_1 et a_2 étant deux paramètres positifs quelconques, et a une fonction de a_1 et a_2.

On définit encore la loi de probabilité, comme dans le cas d'une variable, par le logarithme $\psi(u, v)$ de la fonction caractéristique :

$$\psi(u, v) = \log E\{e^{i(ux+vy)}\}.$$

La stabilité s'exprime alors par l'équation fonctionnelle

(51) $$\psi(a_1 u, a_1 v) + \psi(a_2 u, a_2 v) = \psi(a u, a v).$$

La solution de cette équation peut être trouvée de la manière suivie dans la théorie des lois à une variable. Si l'on admet l'existence des dérivées des deux premiers ordres de $\psi(z)$, on pourra effectuer la dérivation successive par rapport aux paramètres a_1 et a_2 : il en résulte que

$$\frac{\partial^2 \psi(au, av)}{\partial a_1 \partial a_2} = 0.$$

Si l'on introduit les coordonnées polaires $u = \varrho \cos\theta$, $v = \varrho \sin\theta$, et si l'on pose

$$\psi(u, v) = \chi(\varrho, \theta),$$

la propriété de la stabilité s'exprime par la relation

$$\frac{\partial^2 \chi(a\varrho, \theta)}{\partial a_1 \partial a_2} = 0.$$

En supposant que a n'est pas indépendant de a_1 et de a_2, on peut mettre

$$\frac{a \dfrac{\partial^2 a}{\partial a_1 \partial a_2}}{\dfrac{\partial a}{\partial a_1} \dfrac{\partial a}{\partial a_2}} = 1 - \alpha,$$

et on obtient l'équation aux dérivées partielles

(52) $$\xi \frac{\partial^2 \chi(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} = (1 - \alpha) \frac{\partial \chi(\xi, \theta)}{\partial \xi}.$$

L'intégration de cette équation donne

$$\chi(\varrho, \theta) = -K\varrho^{\alpha}.$$

Le facteur K peut dépendre ici de l'argument θ.

On voit l'analogie avec le cas d'une variable. On aurait pu même employer la même méthode pour trouver la forme de $\psi(u, v)$ que dans le §. 1. Chap. I. Considérons en effet, le cas général de n lois composantes, et supposons, pour raison de simplicité,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1.$$

L'équation fonctionnelle (51) prend alors la forme simple

(53) $$n\psi(u, v) = \psi(Nu, Nv) \qquad (N \text{ dépendant de } n)$$

analogue à la relation (2). On n'a qu'à répéter le raisonnement fait p. 11. Si l'on passe aux coordonnées polaires, il vient

$$n\chi(\varrho,\theta)=\chi(N\varrho,\theta)$$

et l'on verra que $\chi(\varrho,\theta)$ est proportionnel à ϱ^α. Il s'agit seulement de préciser le facteur de proportionnalité. En tenant compte des propriétés connues de la fonction $\psi(u,v)$, on pourra mettre la solution de l'équation (52) sous la forme

(54) $$\chi(\varrho,\theta)=-\varrho^\alpha[g_1(\theta)+ig_2(\theta)] \qquad (g_1>0)$$

avec $\varrho>0$ et $0\leqq\theta<2\pi$. Cette fonction doit satisfaire à la relation

$$\chi(\varrho,\theta)=\overline{\chi}(\varrho,\theta+\pi)$$

donc $g_1(\theta)=g_1(\theta+\pi)$ et $g_2(\theta)=-g_2(\theta+\pi)$. On peut aussi écrire, en ne faisant varier θ que de 0 à π:

$$\chi(\varrho,\theta)=-\varrho^\alpha\left[g_1(\theta)+i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}g_2(\theta)\right]$$

en prenant pour $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ deux fonctions de période π. Nous allons voir, dans le §. 4., que les fonctions $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ ne sont pas quelconques, mais sont assujetties à satisfaire à une équation intégrale de première espèce.

La loi réduite L sera donnée par

(55) $$\psi(u,v)=-\frac{\varrho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[g_1(\theta)+i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}g_2(\theta)\right],$$

où $\varrho^2=u^2+v^2$, et où les fonctions $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ satisfont aux conditions ci-dessus.

L'équation (51) sera vérifiée par ces fonctions si

$$a^\alpha=a_1^\alpha+a_2^\alpha.$$

L'exposant caractéristique α de ces lois varie, comme pour le cas d'une variable, de 0 à 2. En effet, nous avons vu dans le §. 1. que toutes les lois pour lesquelles les moments du second ordre sont finis appartiennent au domaine d'attraction de la loi de Gauss. Pour les lois exceptionnelles, que nous cherchons, ces moments doivent être infinis.

Si nous désignons par $\varphi_0(u,v)$ la partie paire de $\varphi(u,v)$, nous verrons que

$$1-\varphi_0(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[1-\cos(ux+vy)]\,dF(x,y),$$

donc

$$\lim_{u=v=0}\frac{1-\varphi_0(u,v)}{u^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2dF(x,y),$$

$$\lim_{u=v=0} \frac{1-\varphi_0(u,v)}{uv} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,dF(x,y),$$

$$\lim_{u=v=0} \frac{1-\varphi_0(u,v)}{v^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\,dF(x,y),$$

c'est-à-dire $\varphi(u,v)-1$, et par suite $\psi(u,v)$ doivent être d'un ordre infinitésimal inférieur à 2.

§. 3. **Domaine d'attraction des lois stables.**

Toutes les notations et définitions étant identiques à celles du §. 2. Chap. I., nous énoncerons seulement les résultats.

On appelle loi $\mathfrak{L}$ toute loi pour laquelle la fonction $\psi(u,v)$ est identique à l'origine à celle d'une loi du type L, donc, en faisant usage de la transformée $\chi(\varrho,\theta)$ de $\psi(u,v)$, pour une loi $\mathfrak{L}$:

$$\chi(\varrho,\theta) = -\frac{\varrho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[g_1(\theta)+i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}g_2(\theta)\right][1+\omega(\varrho)], \tag{56}$$

$\omega(\varrho)$ étant une fonction s'annulant avec ϱ.

On appelle *famille normale de lois $\mathfrak{L}$ réduites* toute famille de lois $\mathfrak{L}$, correspondant aux mêmes valeurs de α, et à des fonctions $\omega(\varrho)$, majorées dans un même intervalle $(0,\tau)$ par une fonction $h(\varrho)$, s'annulant avec ϱ.

Considérons n couples de variables

$$(\xi_1,\eta_1),\ (\xi_2,\eta_2),\ \ldots,\ (\xi_n,\eta_n),$$

obéissant à des lois $\mathfrak{L}$, qui appartiennent à une famille normale; soient donnés n nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et un nombre a tel que

$$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha.$$

Désignons par a' le plus grand des nombres a_k, et soit δ un nombre positif arbitrairement petit, de sorte que $a' < a\delta$.

Le couple de variables

$$\left\{\begin{aligned} \frac{X}{a} &= \frac{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n}{a} \\ \frac{Y}{a} &= \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_n\eta_n}{a} \end{aligned}\right. \tag{57}$$

obéira à une loi pour laquelle

$$\Psi(u, v) = \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{a_k}{a} u, \frac{a_k}{a} v\right),$$

c'est-à-dire

$$(58) \quad \chi(\varrho, \theta) = -\frac{\varrho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[g_1(\theta) + i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} g_2(\theta)\right] \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^\alpha}{a^\alpha}\omega_k\left(\frac{a_k}{a}\varrho\right)\right].$$

Dans un intervalle $(0, R)$, pourvu que $\delta < R$,

$$\left|\chi(\varrho, \theta) + \frac{\varrho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[g_1(\theta) + i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} g_2(\theta)\right]\right| \leqq cR^\alpha h(\delta R)$$

c désignant le module du coefficient de ϱ^α dans l'expression (56). Si $\delta \to 0$, $\chi(\varrho, \theta)$ tend *uniformément* vers la limite

$$-\frac{\varrho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[g_1(\theta) + i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} g_2(\theta)\right],$$

donc le couple $\left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}\right)$ obéit à la limite à une loi tendant vers la loi L. (Pour la démonstration rigoureuse voir le §. 2. Chap. I.)

L'ensemble des lois $\mathfrak{L}$ forme alors *un domaine d'attraction* de la loi L.

Toutes les remarques que nous avons faites sur la grandeur des variables subsistent naturellement pour ce cas.

Nous avons déjà observé, et nous soulignons encore le fait que la théorie des lois stables à deux variables se ramène à celle du cas d'une variable, en introduisant des coordonnées polaires, et en remplaçant ainsi le paramètre z dans $\psi(z)$ par le rayon vecteur ϱ du point (u, v), et, d'autre part, en remplaçant la variable aléatoire x par le rayon vecteur r du point (x, y).

La représentation de ces lois dans un espace fonctionnel faite dans le §. 2. Chap. I. se répète sans changement, parce qu'une rotation d'angle θ ne change pas la distribution relative des points représentatifs des lois $\mathfrak{L}$.

Le théorème fondamental s'énonce alors de la manière suivante: *Les sommes*

$$\frac{X}{a} = \frac{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n}{a}, \quad \frac{Y}{a} = \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_n\eta_n}{a}$$

obéissent à une loi de probabilité différent d'autant moins de L que le nombre n est plus grand.

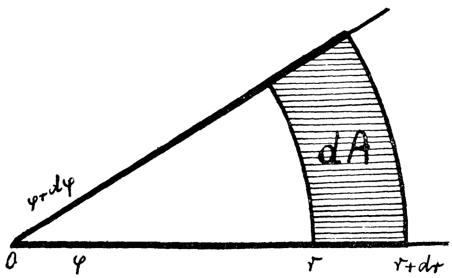
§. 4. Existence des lois *L*.

Toutes les méthodes, par lesquelles on a démontré l'existence des lois stables à une variable, peuvent s'étendre très simplement au cas de plusieurs variables. Nous n'indiquerons que la plus simple, pour montrer ainsi comment elle se ramène à ce cas déjà traité dans le premier Chapitre.

Il faut encore distinguer les cas où α varie de 0 à 1, et de 1 à 2, et traiter à part le cas où $\alpha = 1$.

1⁰. *Cas où* $0 < \alpha < 1$. Plaçons-nous en coordonnées polaires, en posant

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$



Considérons la région où $r > r_0 > 0$, et faisons correspondre à chaque rectangle élémentaire

$$dA = r\,dr\,d\varphi$$

une variable aléatoire z, égale à r dans des cas de probabilité égale à $\frac{c\alpha\,dr}{r^{\alpha+1}}\,dF(\varphi)$, et nulle dans les autres cas, en désignant par $F(\varphi)$ une fonction non-décroissante pour $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Considérons les sommes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ des valeurs non nulles des variables $\xi = z\cos\varphi$, et $\eta = z\sin\varphi$. Si r_0 tend vers 0, le couple de variables $(\overline{X}, \overline{Y})$ tend vers un couple (X, Y) sauf dans des cas de probabilité nulle, et la loi dont dépend le couple de variables (X, Y) est la limite de celle dont dépend le couple $(\overline{X}, \overline{Y})$.

Nous allons démontrer que *cette loi limite du couple* (X, Y) *est une loi stable d'exposant caractéristique* α.

Nous aurons, en désignant par $\varphi(u, v)$ la fonction caractéristique

$$(59) \quad \varphi(u, v) - 1 = c\alpha \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{r_0}^{\infty} \left(e^{ir(u\cos\varphi + v\sin\varphi)} - 1\right) \frac{dr}{r^{\alpha+1}} \right\} dF(\varphi).$$

Si nous posons

$$u = \varrho\cos\theta, \quad v = \varrho\sin\theta$$

$\varphi(u, v) - 1$ sera équivalent à $\chi(\varrho, \theta)$, donc

$$\chi(\varrho, \theta) = c\alpha \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{r_0}^{\infty} (e^{ir\varrho\cos(\theta-\varphi)} - 1) \frac{dr}{r^{\alpha+1}} \right\} dF(\varphi).$$

Posons encore $\theta - \varphi = \omega$; il vient

$$\chi(\varrho, \theta) = c\alpha \int_{\theta}^{\theta-2\pi} d_{\omega} F(\theta - \omega) \int_{r_0}^{\infty} (e^{ir\varrho\cos\omega} - 1) \frac{dr}{r^{\alpha+1}}.$$

Si $r_0 \to 0$, transformons la seconde intégrale, en y faisant

$$r\varrho\,|\cos\omega| = t.$$

Alors elle devient

$$\int_0^{\infty} (e^{ir\varrho\cos\omega} - 1) \frac{dr}{r^{\alpha+1}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{\varrho^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - i\frac{\cos\omega}{|\cos\omega|} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\cos\omega|^{\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\chi(\varrho, \theta) = -\frac{c\alpha\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{\varrho^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\theta}^{\theta-2\pi} \left(1 - i\frac{\cos\omega}{|\cos\omega|} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$
$$|\cos\omega|^{\alpha} d_{\omega} F(\theta - \omega).$$

On peut écrire donc que

$$\chi(\varrho, \theta) = -\frac{c\alpha\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{\varrho^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[g_1(\theta) + i g_2(\theta) \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right],$$

avec

$$g_1(\theta) > 0, \ |g_2(\theta)| \leqq g_1(\theta), \ \varrho > 0, \quad \text{et} \quad 0 \leqq \theta < 2\pi.$$

Il faut en outre que les conditions déjà indiquées

$$g_1(\theta) = g_1(\theta + \pi), \ g_2(\theta) = -g_2(\theta + \pi)$$

soient vérifiées. Si l'on choisit ici

$$c = \frac{2}{\pi\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2},$$

on obtient pour $\chi(\varrho, \theta)$ la forme (55). On peut donc écrire

$$\chi(\varrho, \theta) = -\frac{\varrho^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[g_1(\theta) - i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} g_2(\theta) \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right],$$

avec

$g_1(\theta) = g_1(\theta + \pi)$, $g_2(\theta) = g_2(\theta + \pi)$, et ϱ de signe quelconque.

On voit alors que les fonctions $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ sont liées par la relation

$$(60) \qquad \int_0^{2\pi} G(\theta-\omega)\, dF(\omega) = g_1(\theta) + i g_2(\theta) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2},$$

où

$$(61) \qquad G(\theta) = \left(1 - i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\cos\theta|^\alpha.$$

Si l'on décompose cette relation à sa partie réelle et imaginaire, on aura deux équations définissant les fonctions $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$:

$$g_1(\theta) = \int_0^{2\pi} |\cos(\theta-\omega)|^\alpha \, dF(\omega).$$

et

$$g_2(\theta) = -\int_0^{2\pi} |\cos(\theta-\omega)|^{\alpha-1} \cos(\theta-\omega)\, dF(\omega).$$

On voit sur ces formules que $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ satisfont à toutes les conditions posées ci-dessus, et elles peuvent être calculées explicitement dès que l'on connaît $F(\omega)$. Nous traiterons ici, à titre d'exemple, un cas particulier. Prenons le cas de répartition uniforme, où $dF(\omega) = k\,d\omega$. L'équation (60) devient alors

$$k\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left(1 + i\frac{\cos\omega}{|\cos\omega|} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\cos\omega|^\alpha \, d\omega = g_1(\theta) + i g_2(\theta) \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2},$$

d'où

$$g_1(\theta) = k\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} |\cos\omega|^\alpha \, d\omega$$

et

$$g_2(\theta) = k\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos\omega\, |\cos\omega|^{\alpha-1} \, d\omega.$$

Dans ce cas les fonctions $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ sont des constantes indépendantes de θ. On le voit par exemple en calculant la dérivée de $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ par rapport à θ. On verra facilement que

$$g_1(\theta) = 4k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \omega \, d\omega,$$

et

$$g_2(\theta) = 0.$$

La formule (55) devient alors

$$\chi(\varrho, \theta) = -A \frac{\varrho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

A désignant une constante égale à

$$\frac{c\alpha\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} 4k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \omega \, d\omega.$$

En prenant la valeur habituelle

$$c = \frac{2}{\pi\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2},$$

on peut choisir k de sorte que $A = 1$; on aura une loi de même type que les lois L_α du cas d'une variable.

2°. *Cas où* $1 < \alpha < 2$. En faisant le même raisonnement que pour le cas correspondant de la théorie à une variable, nous voyons qu'il faut remplacer la variable z par $z - E\{z\}$, et les variables X et Y par les variables centrées correspondantes.

Dans ce cas, la fonction caractéristique de la loi limite satisfera, pour $r_0 \to 0$, à l'équation

$$(62) \quad \varphi(u, v) - 1$$
$$= c\alpha \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\infty [e^{ir(u\cos\varphi + v\sin\varphi)} - 1 - ir(u\cos\varphi + v\sin\varphi)] \frac{dr}{r^{\alpha+1}} \right\} dF(\varphi).$$

Donc $\chi(\varrho, \theta)$ est équivalent à

$$c\alpha \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\infty [e^{ir\varrho\cos(\theta-\varphi)} - 1 - ir\varrho\cos(\theta-\varphi)] \frac{dr}{r^{\alpha+1}} \right\} dF(\varphi).$$

Posons $\theta - \varphi = \omega$, $r\varrho|\cos\omega| = t$.

On démontre que

$$\chi(\varrho, \theta) = -\frac{c\alpha\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{\varrho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_\theta^{\theta-2\pi} \left(1 - i\frac{\cos\omega}{|\cos\omega|} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$
$$|\cos\omega|^\alpha d_\omega F(\theta-\omega).$$

Nous retrouvons alors le résultat du cas précédent.

3°. *Cas où* $\alpha = 1$. L'existence de la loi stable d'exposant caractéristique égal à 1 pourrait être démontrée par la même méthode que pour les cas précédents. Mais cette loi, comme généralisation de la loi de Cauchy, est assez intéressante pour nous en occuper un peu plus longuement.

Prenons la loi de probabilité à deux variables pour laquelle la fonction des probabilités élémentaires est donnée de la façon suivante :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{r_0}{2\pi}\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{lorsque } x^2+y^2\geqq r_0^2 \\ 0 \quad , & \text{pour le cas contraire } x^2+y^2<r_0^2, \end{cases}$$

On a pour cette loi

$$\varphi(u,v)-1=\frac{r_0}{2\pi}\iint\limits_{r\geqq r_0}\frac{e^{i(ux+vy)}-1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy, \qquad (x^2+y^2=r^2).$$

Posons

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi;\ u=\varrho\cos\theta,\ v=\varrho\sin\theta.$$

Alors

$$\varphi(u,v)-1=\frac{r_0}{2\pi}\iint\limits_{r\geqq r_0}\frac{e^{ir\varrho\cos(\theta-\varphi)}-1}{r^2}dr\,d\varphi.$$

Si l'on fait encore $r\varrho=z$, $\theta-\varphi=\omega$, il résulte que

$$\varphi(u,v)-1=\frac{r_0}{2\pi}\varrho\int_0^{2\pi}\left\{\int_{\varrho r_0}^{\infty}\frac{e^{iz\cos\omega}-1}{z^2}dz\right\}d\omega,$$

qu'on peut écrire de la manière suivante :

(63) $\varphi(u,v)-1$

$$=\frac{r_0}{2\pi}\varrho\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}\frac{e^{iz\cos\omega}-1}{z^2}dz\right\}d\omega-\frac{r_0}{2\pi}\varrho\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\varrho r_0}\frac{e^{iz\cos\omega}-1}{z^2}dz\right\}d\omega.$$

Le second terme conduit ici à une expression où ϱ figure à un degré plus élevé que dans le premier terme. Or, c'est le terme du plus bas degré qui sera la partie principale de $\psi(u,v)$, et c'est par suite celui qui nous intéresse. Nous pouvons donc négliger le second terme. Il en résulte que la partie principale de $\psi(u,v)$ sera proportionnelle à $\varrho=\sqrt{u^2+v^2}$, et le facteur de proportionnalité est

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{iz\cos\omega}-1}{z^2}dz\,d\omega=c^{te}.$$

Alors

(64) $$\psi(u, v) = -K\sqrt{u^2+v^2}.$$

Considérons maintenant n couples de variables

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

obéissant à la loi donnée par (64). Formons le couple de variables

$$X = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \quad Y = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n},$$

pour lequel

$$\Psi(u, v) = n\psi\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}\right) = n\chi\left(\frac{\varrho}{n}, \theta\right).$$

Si $n \to \infty$, $\Psi(u, v)$ tend exactement vers le premier terme du second membre de (63), et le couple (X, Y) suit à la limite la loi de probabilité (64).

On peut encore mettre la densité de la loi sous une forme qui montre mieux encore qu'elle est une généralisation de la loi de Cauchy[8]). Posons, en effet,

(65) $$f(x, y) = \frac{1}{2\pi k^2} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2+y^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour une loi, dans l'espace à n dimensions, cette densité aura pour expression

(66) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{u-1}k^2} \frac{1}{\left(1+\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{k^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Pour $n=1$, cette formule donne la loi de Cauchy, de densité $\frac{1}{x^2+k^2}$.

On pourra encore prendre la loi de densité

(67) $$f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3+m}{2}}}, \qquad \text{avec } -1 < m < 1$$

pour laquelle on trouve

(68) $$\psi(u, v) = -K'(u^2+v^2)^{\frac{m+1}{2}}.$$

Remarque. — Désignons par

$$dN = \frac{2}{\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{dr\,dF}{r^{\alpha+1}}$$

[8]) Ce résultat a été trouvé aussi par M. G. Kunetz.

la probabilité élémentaire considérée. Si le rapport $r^{\alpha}\dfrac{dN}{d\log r}$, au lieu d'être constant le long d'une demi-droite, est fonction de $\alpha \log r - m\omega$, (ou de $r^{-\alpha} e^{m\omega}$) donc constant sur chaque spirale

$$\alpha \log r - m\omega = c^{te},$$

le rapport $\dfrac{a_2}{a_1}$ peut prendre toutes les valeurs $e^{(i+u)t}$ (t réel). Ces valeurs dépendent d'un paramètre continu, mais les seules valeurs réelles possibles sont les puissances de $e^{-m\pi}$.

§. 5. La loi à corrélation normale.

Nous résumerons ici brièvement la démonstration du théorème suivant:

La classe des lois à corrélation normale est la seule classe finie, stable, et à coefficient de corrélation R différent de ± 1 [9].

Considérons n couples de variables indépendantes (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, satisfaisant tous à une même loi de probabilité appartenant à une classe finie, *stable,* et à coefficient de corrélation R différent de ± 1. Sa fonction des probabilités totales sera désignée par $G(x, y)$, sa fonction caractéristique par $\varphi(u, v)$. On supposera sans restreindre la généralité, que les variables (x_i, y_i) sont centrées, réduites, et de coefficient de corrélation $R = 0$. La classe des lois considérées étant finie, c'est toujours possible.

Formons le couple

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

dont la fonction des probabilités totales est $F(x, y)$, la fonction caractéristique est $\Phi(u, v)$. On a, à cause de la stabilité de la loi $G(x, y)$

$$F(x, y) = \iint\limits_{\substack{a\xi + b\eta < x \\ c\xi + d\eta < y}} d_2 G(\xi, \eta), \tag{69}$$

a, b, c, d étant des constantes convenables, mais nécessairement telles que $ad - bc \neq 0$, et dépendantes de n. Alors

$$\Phi(u, v) = \varphi(au + cv,\ bu + dv). \tag{70}$$

Si $n \to \infty$, on a, d'après un théorème classique,

$$\left| \Phi(u, v) - e^{-\frac{n}{2}(u^2 + v^2)} \right| < \varepsilon \tag{71}$$

[9]) Voir Bibliographie [2].

$\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit.

Posons

$$a = \sqrt{n}\,\alpha, \quad b = \sqrt{n}\,\beta, \quad c = \sqrt{n}\,\gamma, \quad d = \sqrt{n}\,\delta.$$

Il vient de (70) et (71)

$$\left|\varphi(\alpha u + \gamma v, \beta u + \delta v) - e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\right| < \varepsilon. \tag{72}$$

Or, on a, par hypothèse,

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\right]_{u=v=0} = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right]_{u=v=0} = -n, \quad \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v}\right]_{u=v=0} = 0,$$

qui conduisent à

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

Cette substitution étant orthogonale, on déduit de (72) la relation

$$\left|\varphi(u, v) - e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\right| < \varepsilon, \tag{73}$$

ce qui démontre le théorème.

§. 6. Existence des lois stables à plusieurs variables.

L'extension des résultats du §. 4., au cas d'un nombre quelconque de variables se fait immédiatement, par la même méthode que nous y avons employée.

Nous avons vu que le cas de deux variables se ramène à celui d'une seule variable, par l'introduction des coordonnées polaires. En général, considérons un vecteur aléatoire $U = ru$, à n composantes, de longueur r, u désignant le vecteur unitaire. La loi de probabilité à n variables que suivent les variables aléatoires U_1 et U_2 sera dite *stable*, si la variable définie par

$$U = \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2}{a}$$

suivra cette même loi, pourvu que les nombres positifs a, a_1, a_2 soient liés par la relation

$$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha,$$

l'exposant caractéristique α de la loi étant assujetti à la condition

$$0 < \alpha \leqq 2.$$

Le cas $\alpha = 2$ correspond, comme on le sait, à la loi de Gauss dans l'espace à n dimensions.

Si l'on fait encore

$$\psi(Zu) = \log E\{e^{iZU}\}$$

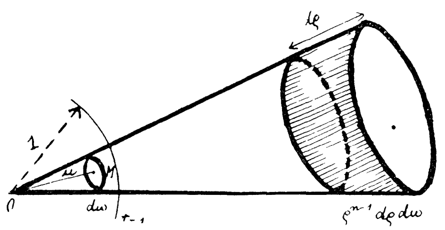
Z désignant un vecteur *non aléatoire,* et $Zu = r' \cos\theta$ étant le produit scalaire du vecteur Z et du vecteur unitaire u, la stabilité s'exprime par la relation

$$\psi(aZu) = \psi(a_1 Zu) + \psi(a_2 Zu). \tag{74}$$

Un calcul tout à fait identique à celui fait dans le §. 4. montre que

$$\psi(Zu) = \psi(r' \cos\theta) = -\frac{r'^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int \left(1 - i \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right) |\cos\theta|^{\alpha} \, d\Phi, \tag{75}$$

en désignant par $d\Phi$ une quantité non négative, élément d'une fonction additive bornée. L'intégration est étendue à la sphère $r=1$. Cette formule est valable pour $0 < \alpha < 1$, et $1 < \alpha < 2$. Pour $\alpha = 1$, il faut enlever le terme imaginaire:



$$\psi = -r' \int |\cos\theta| \, d\Phi,$$

l'intégration étant étendue dans ce cas à la demi-sphère.

L'existence de ces lois peut être mise en évidence d'une manière entièrement analogue à celle utilisée dans la théorie des lois stables à une et deux variables.

A chaque élément de volume $\varrho^{n-1} d\varrho\, d\omega$ faisons correspondre une variable aléatoire dU dont les valeurs possibles sont:
si $\alpha < 1$, 0 et ϱu, avec les probabilités respectives $1 - dN$, dN;
si $\alpha > 1$, il faut retrancher de ces valeurs la valeur probable $\varrho u dN$, donc on aura $-\varrho u dN$ et $\varrho u(1-dN)$, avec les probabilités $1-dN$, dN;
si $\alpha = 1$, il faut grouper deux-à-deux, avec la même probabilité dN, les éléments symétriques par rapport à l'origine. Alors ses valeurs seront
0, $-\varrho u$, ϱu, avec les probabilités $1-2dN$, dN, dN, et il faut prendre, dans les trois cas,

$$dN = \frac{2}{\pi\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \, \frac{d\varrho\, d\Phi}{\varrho^{\alpha+1}}. \tag{76}$$

Sauf dans le cas de la loi de Gauss (pour $\alpha = 2$), ces déterminations de U sont uniques.

La projection de Z sur une direction fixe est un scalaire dépendant d'une loi de probabilité stable d'exposant α. Si $d\Phi$ a la même valeur pour deux éléments symétriques par rapport à l'origine, cette loi est symétrique, de sorte que, à un changement d'échelle près, elle est la même pour toutes les directions.

L'analogie évidente avec le cas d'une seule variable montre que si l'on fait correspondre à chaque élément $d\omega$ de la sphère $r=1$, entourant le point M, extrémité du vecteur unitaire u, une variable aléatoire scalaire X_m telle que

$$\log E\{e^{izX_m}\} = \begin{cases} -\dfrac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1-i\dfrac{z}{|z|}\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right), & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ -\dfrac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{, pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{77}$$

les différents X_m sont indépendants les uns des autres, et la loi stable la plus générale formée avec l'exposant α sera définie par

$$U = \int X_m u (d\Phi)^\beta \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha},\quad \alpha \neq 1\right) \tag{78}$$

l'intégrale étant étendue à toute la sphère $r=1$.

Si $\alpha=1$, cette formule ne définit U qu'à une constante près, et l'intégration ne sera faite que pour la demi-sphère.

On a, en vertu de (78),

$$\frac{2}{\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{dX_m}{X_m^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\frac{d\varrho\, d\Phi}{\varrho^{\alpha+1}} = dN.$$

En général, *la loi stable à n variables n'est autre que la combinaison d'une loi stable à une variable par une expression dépendant d'une fonctionnelle additive bornée.*

* * *

Considérons maintenant quelques cas particuliers[10]).

Si $d\Phi = k\,d\omega$ (répartition uniforme sur la sphère $r=1$), un déplacement quelconque (rotation ou symétrie) ne change rien à la répartition des probabilités. On peut alors prendre pour a_1 et a_2 des valeurs complexes quelconques, et après avoir multiplié U_1 et U_2 par $|a_1|$ et $|a_2|$, faire tourner les vecteurs $|a_1|U_1$, $|a_2|U_2$, d'un angle convenable. a étant choisi de sorte que

$$a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha,$$

l'expression $a_1U_1 + a_2U_2$ sera encore de la forme aU.

Si la répartition admet certaines symétries particulières, ou se reproduit par certaines rotations, le rapport $\dfrac{a_2}{a_1}$ pourra prendre

[10]) Voir [11].

une valeur complexe de module arbitraire, mais d'argument choisi convenablement pour que la propriété de la stabilité soit vérifiée.

Disons encore quelques mots sur l'application de nos résultats aux lois semi-stables pour le cas de n variables.

Les *lois semi-stables* s'obtiennent en supposant qu'il existe une similitude (homothétie, et rotation ou symétrie) sans changement d'origine qui reproduit la répartition définie par $\varrho^\alpha dN$. La même méthode que nous avons employée dans le §. 7. Chap. I. montre qu'il faut introduire des fonctions périodiques de $\log|z|$ et de $\log r'$ (pouvant varier avec la direction $0M$, mais de période constante).

En conservant alors les notations de l'étude précédente, on aura

$$(79)\quad \log E\{e^{izX_m}\} = -\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[P_0(\log|z|) + i\frac{z}{|z|}P_1(\log|z|)\right],$$

$P_0(x)$ et $P_1(x)$ étant des fonctions de même période, et

$$|P_1| \leq P_0 \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}.$$

La probabilité élémentaire correspondante sera

$$(80)\qquad dN = \frac{2}{\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,g(\log\varrho)\,\frac{d\varrho\, d\Phi}{\varrho^{\alpha+1}}.$$

Alors,

$$(81)\quad \log E\{e^{iZU}\}$$
$$= -\frac{r'^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int\left[Q_0(\log r') + i\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}Q_1(\log r')\right]|\cos\theta|^\alpha d\Phi,$$

et le vecteur aléatoire U, obéissant à cette loi semi-stable, se trouve déterminé encore par la formule

$$(82)\qquad U = \int X_m u(d\Phi)^\beta \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right).$$

Bibliographie.

[1] Cauchy, A. L.: Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables. C. R. Acad. Sc. t. 37. (1853) p. 198.

[2] Feldheim, Ervin: Sur la stabilité des lois de probabilité à deux variables. Bulletin da la Soc. Math. de France. t. 64. (1936). p. 209—212.

[3] *a)* de Finetti, Bruno: Le funzioni caratteristiche di legge istantanea. Rendic. Lincei. 12. (1930). p. 278—282.

b) Kolmogoroff, A.: Sulla forma generale di un processo stochastico omogeneo. Rendic. Lincei. 15. (1932). p. 805—8, 866—9.

c) Lévy, Paul: Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa. Se II. t. 3. (1934). §. 9. p. 20—23.

[4] Khintchine, A.—Lévy, P.: C. R. t. 202. (1936). p. 374—6.

[5] Lévy, Paul: Calcul des probabilités. Paris. (1925). Gauthier-Villars. Çhap. VI.

[6] „ „ C. R. t. 174. (1922). p. 855—7.
t. 176. (1923). p. 1118—20, et 1284—6.

[7] „ „ Sur quelques questions du calcul des probabilités. Prac Mat.-Fiz. t. 39. (1931), p. 19—28.

[8] „ „ Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchaînées. Journal de Math. t. 14. (1935). Chap. I. p. 347—359.

[9] „ „ C. R. t. 198. (1934). p. 486—8, 1203—5, 1661—2.

[10] „ „ Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard. Compositio Math. Vol. 3. (1936). p. 286—303. Voir le §. 4.

[11] „ „ C. R. t. 202. (1936). p. 543—5.

[12] Pólya, Georges: Herleitung des Gausschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. Math. Zeitschrift. t. 18. (1923). p. 104—8.

Table des matières.