LOUIS COUFFIGNAL

Sur l'analyse mécanique. Application aux machines à calculer et aux calculs de la mécanique céleste

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__199__1_0>

Série A, 1772
N° D'ORDRE :
2638

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Louis COUFFIGNAL
Professeur d'Analyse et Mécanique à l'École Navale
(Élèves Ingénieurs Mécaniciens)
Lauréat de l'Office National des Recherches Scientifiques et des Inventions

1re THÈSE. — SUR L'ANALYSE MÉCANIQUE. — APPLICATION AUX MACHINES A CALCULER ET AUX CALCULS DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

2e THÈSE. — LE COLORIAGE DES CARTES.

Soutenues le 10 Janvier 1938, devant la Commission d'Examen.

MM. CARTAN, *Président.*
ESCLANGON, VILLEY } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-EDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire.....	M. MOLLIARD.
Doyen..............	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	FREUNDLER.	VESSIOT.	Charles FABRY.
A. FERNBACH.	AUGER.	P. PORTIER.	Léon BERTRAND.
Émile PICARD.	BLAISE.	M. MOLLIARD.	WINTREBERT.
Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	L. LAPICQUE.	O. DUBOSCQ.
GUILLET.	LESPIEAU.	G. BERTRAND.	BOHN.
PÉCHARD.	MARCHIS.	H. ABRAHAM.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN.......	T	Chimie générale.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.
E. CARTAN.......	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON.......	T	Recherches physiques.
J. DRACH.........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ...	T	Zoologie.
E. RABAUD.......	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.
Paul MONTEL.....	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
G. JULIA.........	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN......	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY..	T	Pétrographie.
H. BÉNARD.......	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD.......	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH...	T	Physique.
G. BRUHAT.......		Physique.
E. DARMOIS......	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR.......	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER......		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.
M. JAVILLIER.....	T	Chimie biologique.
L. JOLEAUD.......		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY.....	T	Physiologie comparée.
F. PICARD........		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT....	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB........	T	Géologie.
P. PASCAL.......	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET......	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON...	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.......	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH............		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER......		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE......	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN........		Optique appliquée.
P. JOB...........		Chimie générale.
LABROUSTE.......		Physique du globe.
PRENANT.........	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY..........		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES.........	T	Physiologie végétale.
GARNIER.........	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS...........		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL.......		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.........	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT.......		Technique Aéronautique.
M. CURIE........		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.......	T	Hautes températures.
CHAZY...........	T	Mécanique rationnelle.
GAULT...........		Chimie (P. C. B.).
CROZE...........		Recherches. Physiques.
DUPONT..........	T	Théories chimiques.
LANQUINE........	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON.........		Mathématiques générales.
BARRABÉ.........		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT..........		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN.......		Théories physiques.
VAVON...........		Chimie organique.
G. DARMOIS......		Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
CHATTON.........	T	Biologie maritime.
AUBEL...........		Chimie biologique.
J. BOURCART.....		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL.......		Biologie végétale (P.C.B.).
CABANNES.......		Enseignement de Physique.
GRASSÉ.........		Biologie animale (P.C.B.).
PRÉVOST.........		Chimie (P.C.B.).

Secrétaire........................ A. PACAUD.

Secrétaire honoraire.............. D. TOMBECK.

A MESSIEURS M. D'OCAGNE ET E. ESCLANGON

MEMBRES DE L'INSTITUT

Hommage de respectueuse gratitude.

A MES MAÎTRES

MESSIEURS

R. GOSSE

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE

ET

E. COTTON

MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT

Hommage affectueux et reconnaissant.

A MA FEMME

Nous tenons à exprimer nos remercîments à l'*Office National des Recherches Scientifiques et des Inventions*, en la personne du regretté *A. Auclair*, qui, dès 1929, a bien voulu nous guider pour la réalisation de notre premier projet de machine à calculer, ainsi qu'à la Société « *L'Outillage R. B. V.* » qui assure, sous notre direction, l'étude technique de nos machines, et au *Cabinet Weismann*, qui a exécuté la plupart des dessins figurant dans le présent travail et que la Maison *Gauthier-Villars* a reproduits avec l'habileté et le soin qui lui sont coutumiers.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR L'ANALYSE MÉCANIQUE.

APPLICATION AUX MACHINES A CALCULER ET AUX CALCULS DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

INTRODUCTION.

Dans une étude antérieure, nous avons esquissé un tableau d'ensemble des machines à calculer, et nous avons montré que certaines qualités manquaient encore à ces dernières pour qu'elles puissent être employées avec profit dans les calculs savants. Le développement des remarques que nous avons faites alors, ainsi que l'application des machines à calculer à divers problèmes, que nous avons étudiée par nous-même ou à laquelle nous avons collaboré, nous a conduit à des considérations d'ordre très général sur la réalisation des calculs au moyen de machines à calculer, et même sur la réalisation d'un travail de nature quelconque au moyen de machines appropriées à ce travail.

« C'est, disions-nous en conclusion de cette première étude, dans une adaptation réciproque des méthodes de calcul aux machines et des machines aux méthodes de calcul que l'on doit voir la loi du développement du calcul mécanique. »

Nous nous proposons maintenant de justifier cette proposition par l'étude plus approfondie de l'application des machines à calculer aux calculs de la Mécanique céleste.

Pour pouvoir comparer de façon objective les moyens que possèdent les machines actuelles et même pour pouvoir définir ceux que devrait posséder une machine propre à l'exécution de ces calculs, il était d'abord nécessaire de ramener, en quelque sorte, à une commune mesure, les propriétés diverses et souvent purement qualitatives des machines à calculer. Les notions de puissance, de fonction mécanique et de formule fonctionnelle d'une machine à calculer, dont la définition et l'étude occupent le Chapitre II, nous paraissent répondre à cette nécessité (le Chapitre I est consacré à un bref historique des machines à calculer d'usage courant).

Les considérations développées dans ce chapitre se prêtent à une généralisation très extensive, et les notions fondamentales que nous venons d'énumérer sont applicables à une classe quelconque de machines. C'est donc l'analyse de toutes les machines qui devient ainsi possible, permettant de comparer leurs aptitudes à atteindre le but pour lequel elles ont été construites. Nous envisageons donc de poursuivre méthodiquement cette analyse, que nous proposons d'appeler l'Analyse mécanique descriptive, et, dans le Chapitre III, nous esquissons les traits de cette nouvelle discipline, en nous efforçant de situer la place qu'elle nous paraît devoir occuper dans l'ensemble des Sciences. Nous pensons que, des études des classes particulières de machines qui en constitueront les premiers matériaux, il se dégagera, par la suite, des lois générales relatives à l'exécution mécanique des travaux que se propose l'homme, et nous avons formulé une proposition qui, déjà vérifiée dans le calcul mécanique, nous paraît devoir figurer parmi les plus importantes de ces lois.

Parmi les applications de ces lois générales, dont l'étude constituera l'Analyse mécanique abstraite, la recherche des fonctions mécaniques nécessaires à la réalisation d'un travail donné nous paraît devoir occuper une place prépondérante. De même que le Chapitre II constitue un premier exemple d'Analyse descriptive, le Chapitre IV constitue un exemple d'une telle recherche, que nous proposons d'appeler l'Analyse mécanique préfactive, car elle est préalable à la construction d'une machine, le travail donné étant, dans cet exemple, l'exécution des calculs de la Mécanique céleste.

La définition générale d'une machine que nous avons été conduit à proposer, et qui diffère sensiblement de celles qui ont été adoptées jusqu'à présent, nous a permis de porter sur un nouveau terrain la comparaison de l'exécution mécanique et de l'exécution manuelle de ces calculs.

Nous pensons avoir mis en évidence que c'est l'exécution coordonnée de l'ensemble de calculs nécessaires à la réalisation d'un même système de relations que l'on doit considérer comme le véritable problème posé au calculateur, et non l'exécution isolée et successive des diverses opérations arithmétiques qui interviennent dans ces calculs. C'est ce même problème que doit résoudre une machine à calculer pour pouvoir être comparée à un calculateur.

La possibilité, établie dans le Chapitre V, de construire à cet effet des machines nettement supérieures à l'homme, tant par la sécurité des calculs qu'elles effectuent que par leur rapidité, nous paraît justifier le point de vue que nous avons adopté.

Enfin, de même qu'après Neper les calculs de la Mécanique céleste ont été systématiquement aménagés en vue de l'emploi des logarithmes, de même l'existence de telles machines et leur adoption comme instrument usuel de calcul entraîneraient une transformation des formules de résolution des problèmes de la Mécanique céleste. Dans le Chapitre VI, nous donnons quelques exemples simples de cette transformation.

CHAPITRE I.

BREF HISTORIQUE DU CALCUL MÉCANIQUE.

1. Le caractère le plus frappant du développement des machines à calculer qui ont connu quelque diffusion est certainement leur application à peu près exclusive aux calculs commerciaux; l'histoire des machines à calculer est donc celle de leur adaptation de plus en plus parfaite à ce type de calcul.

2. Depuis Pascal qui, en 1642, imagina les éléments fondamentaux de toute machine à additionner [1, 2] (1), jusqu'à Felt qui, en 1885, construisit la première machine moderne [1], presque tous les chercheurs, s'ignorant les uns les autres, redécouvrirent pour leur propre compte les mécanismes imaginés par Pascal, ou

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie.

des mécanismes équivalents dans leur conception, leur réalisation technique et leurs résultats. Ce sont :

un *chiffreur*, groupe d'organes sur lesquels sont inscrits, chiffre par chiffre, dans le système décimal ou un système d'unités usuelles, les nombres à additionner,

un *reporteur*, effectuant l'addition de une unité sur l'organe d'ordre décimal $n + 1$ chaque fois que dix unités ont été inscrites sur l'organe d'ordre décimal n,

un *viseur*, permettant de lire le nombre marqué par le chiffreur,

un *inscripteur à stylet*, semblable à un manipulateur de téléphone automatique, permettant d'inscrire un nombre sur le chiffreur. C'est grâce au reporteur que ces machines, réduisant une addition à la seule inscription des données, sont véritablement *automatiques*.

L'ensemble d'un chiffreur et d'un reporteur a reçu le nom de *totalisateur*.

3. Pendant la même période progressaient aussi, indépendamment des machines précédentes, les machines à multiplier. La première, imaginée par Leibniz [1], en 1671, en vue de perfectionner la machine de Pascal [3], fut réinventée en 1820 par Thomas, de Colmar [1]. Sûre et robuste, eu égard aux efforts qu'elle était appelée à supporter à cette époque, la machine de Thomas fut la seule machine à multiplier d'usage courant jusqu'à 1875 où apparut la machine d'Odhner. Ces machines, ainsi qu'une centaine d'autres qui en sont dérivées, effectuent la multiplication par répétition de l'addition du multiplicande. Elles comportent :

un organe nouveau, *l'entraîneur*, sur lequel le multiplicande est représenté par un changement de forme de l'entraîneur lui-même, modification provoquée par un *inscripteur*,

un *totalisateur*, sur lequel peut agir l'entraîneur modifié, au cours d'un mouvement qui lui est imposé par un *moteur*,

un *compteur* du nombre des facteurs égaux au multiplicande, additionnés au cours du mouvement de l'entraîneur.

Ces machines, dont de nombreux types sont encore en usage, ne sont pas automatiques, car l'opérateur doit surveiller l'action du moteur de manière à l'interrompre à l'instant où le nombre de facteurs égaux au multiplicande, additionnés par la machine, devient égal au multiplicateur. C'est Tchebichef qui, en 1882, imagina la première machine à multiplier automatique [1] : le multiplicande et le multiplicateur sont inscrits sur deux inscripteurs distincts, le moteur (une manivelle mue à la main) est ensuite mis en marche; la machine effectue le calcul sans autre intervention du calculateur et s'arrête quand l'opération est terminée. Lorsque apparut cette machine, l'avantage de l'automaticité passa inaperçu; il en fut de même lorsque Boutet, en 1927, inventa une nouvelle machine à multiplier automatique. Très peu de temps plus tard, cependant, en Allemagne et en Amérique, était reconnu l'intérêt de telles machines, qui, depuis 1930, ont connu une diffusion considérable.

4. Tandis que les machines à multiplier, devenues automatiques à une date très récente, n'ont pu encore recevoir des perfectionnements qui exigeaient l'automaticité, les machines à additionner, au contraire, automatiques dès l'origine, furent pourvues par Felt, en 1885, de l'organe qui, ajoutant la rapidité d'inscription des nombres à la rapidité d'exécution des calculs due à l'automaticité, ouvrait la voie à de plus considérables perfectionnements. Ces perfectionnements ininterrompus ont eu pour objet d'adapter de mieux en mieux les additionneuses à l'exécution rapide des travaux comptables les plus divers.

L'inscripteur de la machine de Felt, toujours en usage, est un clavier comportant, pour chaque ordre décimal, une rangée de neuf touches numérotées de 1 à 9 : quand on abaisse, puis laisse remonter une touche, le nombre qu'elle représente s'ajoute au nombre déjà marqué par le chiffreur du totalisateur. Le caractère nouveau, et d'importance capitale, de cette machine était de permettre l'inscription simultanée de tous les chiffres d'un nombre.

En 1888 [4], Burroughs imaginait une additionneuse analogue à la machine de Felt, mais dans laquelle le nombre représenté par une touche n'entre pas dans le totalisateur au moment même où la touche est abaissée, mais seulement au moment où, toutes les touches voulues ayant été abaissées puis contrôlées, le moteur est mis en marche; ce moteur fait tourner, en outre, des secteurs portant des caractères d'imprimerie, de manière à aligner, parallèlement à une génératrice d'un cylindre porte-papier, les caractères des chiffres du nombre marqué par le clavier ou par le chiffreur du totalisateur, puis il déclenche la frappe de ces caractères contre le cylindre : ainsi était réalisée pour la première fois l'impression des nombres et de leur somme.

La machine de Burroughs peut établir des documents comportant des lignes et des colonnes de nombres entre lesquels doivent être effectuées des additions par colonne et des additions par ligne; mais elle ne permet par l'inscription d'un texte formé de mots du langage ordinaire. Pour obvier à cet inconvénient, Wahl [4] imaginait, en 1907, d'adapter des totalisateurs à une machine à écrire, de telle manière que, en s'abaissant, une touche du clavier de cette dernière, marquée d'un certain chiffre, fasse entrer dans le totalisateur le nombre représenté par ce chiffre et par son rang décimal, et imprime ce chiffre sur le cylindre porte-papier; le résultat du calcul, lu sur le viseur du totalisateur, est imprimé au moyen du même clavier, et, selon qu'il est bien ou mal recopié, il est possible ou non d'imprimer un signe spécial, appelé *étoile de contrôle*.

Enfin, en 1911 [4], Ellis réunissait sur un même bâti une machine du type Burroughs et une machine à écrire.

Les machines de Burroughs, de Wahl et d'Ellis ont été des types de familles auxquelles appartiennent encore toutes les additionneuses d'usage courant. Leur caractère commun est de pouvoir imprimer les données et les résultats des opérations, ce qui leur permet d'établir elles-mêmes des documents comptables. En outre, ces machines deviennent de plus en plus automatiques, au prix, bien entendu, d'une complexité croissante.

5. Ce dernier caractère se manifeste surtout dans deux types de machines, dont l'emploi généralisé ou même l'invention datent de moins de dix ans : les machines à statistique et les machines synchronisées.

Dans les premières, imaginées en 1891 par Hollerith pour les travaux de recensement de la ville de New-York [4] et devenues depuis de véritables machines comptables, une batterie d'additionneuses imprimantes, montées sur le même bâti, sont mues simultanément par un asservissement, déclenché par des perforations préalablement effectuées dans des cartes en bristol léger et qui représentent, par leur position à la surface des cartes, les nombres à faire intervenir dans les opérations et la nature elle-même de ces opérations. Deux appareils, une perforatrice qui traduit les données en perforations et une trieuse qui groupe les cartes par catégories, préparent le travail de la machine principale. De telles machines peuvent répéter, à la cadence de 150 opérations par minute, jusqu'à dix additions simultanées.

Dans les machines du second type, les machines synchronisées, plusieurs machines distinctes, et même, généralement, de construction différente, sont mises en marche simultanément par des dispositifs électromécaniques qui constituent une véritable télécommande : c'est ainsi que le clavier d'une additionneuse peut télécommander le clavier d'une multiplieuse et celui d'une perforatrice.

6. Dans l'histoire des machines à calculer actuellement en usage, on peut donc distinguer deux périodes principales : des origines (1642) à 1910 environ, les efforts s'attachent à la découverte de mécanismes calculateurs destinés à la réalisation même des opérations arithmétiques; de 1910 à 1930 environ, c'est le perfectionnement des organes auxiliaires des mécanismes calculateurs qui est l'objet des principales recherches. Dans la première période les travaux sont du domaine de la cinématique appliquée, dans la seconde ils dépendent de la technique comptable.

Nous ne terminerons pas ce bref historique sans rappeler que c'est à M. d'Ocagne qu'a été due la première étude d'ensemble des machines à calculer, méthodiquement ordonnée suivant une classification rationnelle. Cette étude a fait l'objet de conférences données en février et mars 1893 au Conservatoire des Arts et Métiers avant de prendre, en 1894, la forme d'un livre intitulé *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, d'abord complété puis définitivement mis au point en deux autres éditions (1905 et 1928).

CHAPITRE II.

ANALYSE DES MACHINES A CALCULER. NOTION DE PUISSANCE. FORMULE FONCTIONNELLE.

7. Pour pouvoir préciser quel rôle les machines à calculer peuvent remplir dans l'exécution d'un ensemble de calculs, quelle que soit leur nature, et pour pouvoir choisir parmi elles la mieux appropriée à ce travail, il est nécessaire de savoir quelles opérations une machine quelconque est capable d'effectuer.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'analyser, de ce point de vue, les machines à calculer actuellement en usage, afin d'établir une méthode systématique de comparaison de ces machines qui permettra d'apprécier exactement quels services elles peuvent rendre dans l'exécution de calculs de toute nature.

8. Pour permettre cette comparaison, nous attacherons à chaque machine une notion abstraite, que nous appellerons sa *puissance*. Par ce terme, nous entendons l'ensemble des opérations distinctes et des combinaisons distinctes, d'opérations qu'une machine à calculer est capable d'effectuer.

Il semble *a priori* que l'on pourrait représenter la puissance d'une machine par une formule algébrique, la plus générale dont la machine soit capable de calculer la valeur numérique; mais on s'aperçoit vite qu'il n'en est rien, car, d'une part, il arrive souvent que les formules dont une machine peut calculer la valeur numérique ne sont pas toutes des cas particuliers d'une seule et même formule dont la valeur numérique puisse être calculée par la machine; et, d'autre part, certaines opérations, la plupart non arithmétiques, mais cependant indispensables à l'exécution d'un calcul, et qui, en calcul manuel, sont incluses dans un ensemble d'autres opérations et, en quelque sorte, virtuelles, deviennent, en calcul mécanique, aussi importantes et parfois plus difficiles à réaliser que l'opération arithmétique elle-même. Il en est ainsi de deux opérations dont l'utilité est manifeste quel que soit le mécanisme calculateur : l'impression et l'effaçage. En calcul manuel, l'écriture des nombres au fur et à mesure qu'ils interviennent est une opération matérielle qui fait partie intégrante de la mise en œuvre des règles de l'opération arithmétique, sauf, bien entendu, le cas très exceptionnel où l'opération arithmétique peut s'effectuer mentalement; en calcul mécanique, l'impression des nombres exige des dispositifs spéciaux, où figurent en particulier des caractères d'imprimerie, et qui sont par conséquent complètement indépendants des mécanismes calculateurs. Quant à l'effaçage des nombres à la fin d'une opération, s'il n'existe pas en calcul manuel, il est nécessaire en calcul mécanique, un même organe calculateur pouvant être appelé à effectuer successivement un grand nombre d'opérations.

Pour pouvoir caractériser, de façon précise, la puissance d'une machine à calculer donnée, nous sommes donc conduit à faire l'analyse des opérations, arithmétiques et autres, qu'une machine quelconque pourrait logiquement être appelée à exécuter et, par suite, celle des dispositifs qu'elle pourrait être appelée à comporter. Nous appellerons chacune de ces opérations une *fonction mécanique*, et l'ensemble des dispositifs correspondants un *organe*. Une fonction mécanique peut être composée d'un ensemble de fonctions mécaniques successives ou simultanées : nous appellerons ces dernières les *fonctions composantes* de la première, que nous appellerons la *fonction résultante*. Puis, ces diverses fonctions mécaniques étant classées, nous proposerons, pour les représenter ainsi que leurs relations mutuelles, un symbolisme approprié, qui permettra aussi de représenter symboliquement la puissance d'une machine à calculer par une formule assez comparable aux formules développées de la chimie organique, formule que nous appellerons la *formule fonctionnelle* d'une machine à calculer.

Comme cette formule exprimera tous les moyens mis en œuvre dans une machine, et, par suite, toutes les ressources de cette dernière, nous pourrons dire qu'*une machine est plus puissante qu'une autre si la formule fonctionnelle de la seconde est un cas particulier de celle de la première*. Grâce à cette règle de comparaison, la puissance d'une machine pourra remplir le rôle que nous lui avons assigné.

9. Soit une opération arithmétique quelconque à réaliser mécaniquement. Elle doit être exécutée à partir de certaines données, suivant des règles arithmétiques déterminées qui caractérisent sa nature; elle donne un résultat. La machine remplit donc nécessairement les deux fonctions que voici : d'une part, recevoir les données. de l'autre, fournir le résultat. Nous appellerons la première fonction *l'inscription*, la seconde le *résultat*. En outre, comme une machine à calculer peut généralement exécuter diverses opérations auxquelles correspondent des organes différents, il faut pouvoir la disposer en vue de l'opération considérée : nous appellerons cette fonction la *commande*. Quant aux fonctions des organes qui effectuent les opérations arithmétiques elles-mêmes, elles sont définies par la nature de ces opérations; elles diffèrent donc essentiellement de l'inscription, de la commande et du résultat qui dépendent de la manière dont le calculateur intervient dans le travail exécuté par la machine; par suite, il est rationnel de grouper ces trois dernières fonctions dans une même catégorie, celle des fonctions *relatives*, cette épithète rappelant que ces fonctions établissent des relations entre la machine et le calculateur, les autres fonctions étant groupées dans une autre catégorie, celle des fonctions *opératives*, destinées à l'exécution des opérations arithmétiques elles-mêmes.

Nous étudierons successivement ces diverses fonctions.

A. — FONCTIONS RELATIVES.

10. Inscription. — L'inscription d'un nombre devant nécessairement laisser une trace matérielle dans la machine et s'effectuant en outre, dans toute machine à calculer, chiffre par chiffre, l'inscription de tout chiffre d'un nombre exige le déplacement d'un organe correspondant à ce chiffre.

Nous appellerons *inscripteur* l'ensemble des organes destinés à l'inscription des différents chiffres d'un nombre donné.

Si l'inscripteur comporte :

a. une seule pièce mobile, dont la position marque la valeur du nombre inscrit, nous l'appellerons un *inscripteur à cotes*, l'organe mobile portera le nom *d'index*; un tel inscripteur est homéocinétique à une aiguille mobile devant un cadran gradué;

b. une pièce mobile par ordre décimal, dont la position marque le chiffre du nombre inscrit appartenant à cet ordre décimal, nous l'appellerons un *inscripteur à leviers*; chaque organe mobile est appelé un *levier*;

c. une pièce mobile pour chacun des dix chiffres de 0 à 9 dans dans chaque ordre décimal, nous l'appellerons un *clavier complet*; chaque organe est appelé une *touche*;

d. une pièce mobile pour chacun des dix chiffres de 0 à 9, ces pièces agissant successivement dans les différents ordres décimaux, nous l'appellerons un *clavier réduit*; chaque organe mobile est encore appelé une *touche*.

Du point de vue du rythme d'inscription des chiffres d'un nombre, nous classerons les inscripteurs en deux catégories :

inscripteurs rythmiques, où l'inscription d'un chiffre ne peut se faire que lorsque l'action de l'inscripteur déterminée par le chiffre précédemment inscrit est achevée, ce qui oblige le calculateur à suivre le rythme de la machine;

inscripteurs indifférents, qui n'entrent en action que lorsque l'inscription de tous les chiffres du nombre est effectuée, ce qui laisse au calculateur toute liberté quant à l'ordre et au rythme d'inscription de ces chiffres (en particulier, sur un clavier complet, qui appartient à cette catégorie, tous les chiffres peuvent être inscrits simultanément).

S'il y a lieu, nous appliquerons les mêmes épithètes aux fonctions elles-mêmes, correspondant aux organes que nous venons de classer.

11. **Résultat.** — *A priori*, deux manières différentes de recueillir les résultats peuvent être envisagées : les résultats peuvent être lus par l'opérateur, ou bien ils peuvent être imprimés par la machine elle-même. Nous dirons que la machine possède : dans le premier cas, la *fonction lecture*, dans le second cas, la *fonction impression*; les organes qui remplissent ces fonctions porteront respectivement les noms de *viseur* et d'*imprimeuse*.

12. Selon la manière dont se fait la lecture du nombre que fait apparaître le viseur, cet organe se range dans l'une des catégories suivantes, analogues aux catégories d'inscripteurs que nous avons déjà définies.

Si le viseur comporte :

a. deux pièces en déplacement relatif à un paramètre, la valeur du paramètre, marquée par l'une des pièces sur une graduation portée par l'autre, étant cotée par les valeurs du résultat à lire, nous l'appellerons *viseur à cotes*;

b. une pièce mobile par ordre décimal, sur laquelle sont incrits les chiffres de 0 à 9, et qui fait apparaître sous une lucarne fixe celui de ces chiffres qui appartient à la figuration décimale du résultat à lire, nous l'appellerons *viseur à tambours*, ou simplement *viseur*; (la graduation de 0 à 9 peut être remplacée par une graduation régulière de 10^n à 10^{n+p}, ayant $k.10^n$ pour échelon, n, p, k, étant entiers);

c. une pièce mobile pour chacun des dix chiffres de 0 à 9 dans chaque ordre décimal, sur laquelle est écrit le chiffre auquel elle est attribuée, celle de ces pièces sur laquelle est écrit le chiffre qui appartient à la figuration décimale du résultat à lire étant seule actionnée (par exemple pour faire apparaître ce chiffre derrière une lucarne), nous l'appellerons *viseur à voyants*; (la graduation de 0 à 9 peut être remplacée par une graduation telle que celle qui est décrite entre parenthèses à l'alinéa précédent);

d. un ensemble de pièces faisant apparaître successivement les chiffres de la figuration décimale du résultat à lire, nous l'appellerons *viseur successif*.

13. La fonction impression peut être réalisée de façons très diverses. Afin de comprendre sous le terme de *impression* toutes les représentations matérielles de nombres, par exemple des représentations aussi différentes que celles qui résultent du travail d'une linotype, de celui d'une perforatrice de cartes de machines à statistique ou de celui d'une machine à gaufrer les ouvrages pour aveugles, nous donnerons à ce terme le sens le plus extensif possible, et nous dirons qu'une machine à calculer possède la fonction impression si elle peut présenter les résultats des calculs qu'elle effectue sous la forme d'un objet matériel qui permette, suivant des règles appropriées, la lecture de ces résultats après qu'un effaçage les a fait disparaître des chiffreurs de la machine. Nous appellerons *document* cet objet matériel, et *support* du document cet objet tel qu'il se présente avant l'impression.

14. Du point de vue de l'utilisation ultérieure des documents, nous dirons :

a. qu'une machine possède *l'impression simple* ou bien est *imprimante*, si les documents qu'elle établit permettent ultérieurement la lecture des résultats, mais ne sont pas l'outil d'un procédé quelconque de reproduction;

b. qu'une machine possède *l'impression typographique*, ou bien est *typographiante*, si les documents qu'elle établit permettent la reproduction des résultats à un nombre d'exemplaires non imposé par la structure de l'imprimeuse de la machine à calculer;

c. qu'une machine possède *l'impression mécanographique*, ou bien est *mécanographiante*, si les documents qu'elle établit permettent l'inscription des résultats sur une seconde machine à calculer sans autre intervention du calculateur que l'introduction dans la seconde machine de ces documents eux-mêmes.

15. La classification précédente est fondée sur le mode d'utilisation des documents imprimés par une machine à calculer. L'analyse de l'exécution de ces documents fait apparaître les composantes fondamentales de la fonction impression. La réalisation de cette dernière exige, en effet, un organe disposant des caractères (caractères ou matrices d'imprimerie, poinçons, etc.) de manière que leur forme et leur position relative représentent les nombres à imprimer, et un organe plaçant le support du document à établir dans une position telle, relativement aux caractères, que les nombres s'impriment sur le support à la place qui leur est réservée. Nous appellerons les fonctions exercées : par le premier organe la *composition*, par le second la *tabulation*.

16. Nous distinguerons deux modes de composition :

la *composition simultanée*, dans laquelle tous les caractères d'un nombre ou d'un groupe de nombres sont choisis et mis en place, puis imprimés simultanément sur le support du document;

et la *composition successive*, dans laquelle les caractères d'un nombre ou d'un groupe de nombres sont choisis, mis en place et imprimés l'un après l'autre sur le support du document.

L'organe du premier mode de composition sera appelé *bloc imprimant*, l'organe du second, *corbeille de caractères*, ou simplement *corbeille*. La principale différence entre ces deux modes de composition consiste en ce que les nombres que peut imprimer un bloc imprimant ont un nombre de chiffres limité, quelles que soient les dimensions du support du document, tandis que la corbeille n'est pas soumise à cette limitation.

17. Les caractères étant composés, pour les amener à la place qui leur est réservée sur le support du document, un déplacement à deux paramètres est suffisant : on ne sait en effet réaliser l'impression qu'en un point d'une surface matérielle, et, d'aucune façon, dans la profondeur d'un volume.

Dans ce déplacement, c'est en général le support du document qui est mobile; la position des caractères après composition est alors absolument fixe. Nous appellerons donc :

tabulation, la fonction par laquelle le support se déplace de manière à présenter aux caractères composés, dont la position est fixe, la place où ils doivent être imprimés;

et, par différence :

contre-tabulation, la fonction par laquelle les caractères composés se déplacent de manière à se présenter à la place du support où ils doivent être imprimés, le support étant fixe;

bi-tabulation, la fonction par laquelle les caractères et le support se déplacent simultanément de manière que le second présente aux premiers la place où ils doivent être imprimés.

Généralisant la terminologie relative aux machines à écrire, nous appellerons :

tabulation horizontale, ou simplement *tabulation*, le déplacement du support suivant l'un des paramètres;

tabulation verticale, ou *interlignage*, le déplacement du support suivant l'autre paramètre.

Nous distinguerons les deux sens possibles de chacun de ces déplacements par les termes :

tabulation avant, ou simplement *tabulation*, employé pour désigner le déplacement de tabulation horizontale qui consiste à amener un point du support d'un point où l'impression n'était pas encore possible à un autre point où le fonctionnement normal de la machine rend possible l'impression ;

et *tabulation arrière*, ou *retour arrière*, employé pour désigner le déplacement de tabulation horizontale de sens contraire au précédent ;

interlignage descendant, ou simplement *interlignage*, employé pour désigner le déplacement de tabulation verticale qui consiste à amener un point du support d'un point où l'impression n'était pas encore possible à un autre point où le fonctionnement normal de la machine rend possible l'impression :

et *interlignage ascendant*, ou *rétrograde*, employé pour désigner le déplacement de tabulation verticale de sens contraire au précédent.

18. Enfin, il est d'observation courante qu'un document numérique n'est intelligible que si certaines indications en langage ordinaire éclairent le sens des nombres qui en constituent la partie essentielle.

Une machine à calculer capable d'imprimer les résultats des calculs peut donc être encore insuffisante pour établir un document présentant ces résultats sous une forme utilisable. Nous sommes donc amené à préciser l'extension de la fonction impression, et nous distinguerons :

l'impression numérique, qui consiste, pour une machine à calculer, à imprimer seulement les résultats numériques de ses calculs ;

l'impression alpha-numérique, qui consiste à imprimer les résultats numériques ainsi qu'un texte formé de lettres de l'alphabet ;

l'impression alpha-numérique abrégée, qui consiste à imprimer les résultats numériques ainsi que des indications abrégées en lettres ou signes conventionnels, choisies dans une liste établie à l'avance et propre à cette machine.

En général, une machine alpha-numérique possède un inscripteur des lettres de l'alphabet; elle peut, cependant, recevoir l'indication des lettres qu'elle imprime d'un document établi par une machine mécanographiante possédant elle-même un tel inscripteur.

Nous appellerons cet inscripteur *l'inscripteur alphabétique*; s'il est nécessaire, nous appellerons, par opposition, l'inscripteur déjà défini *inscripteur numérique*; si l'inscripteur alphabétique est un clavier, nous le distinguerons des autres claviers que peut comporter la machine en l'appelant *clavier alphabétique*; et si les touches-chiffres de ce clavier sont aussi les touches d'un clavier réduit constituant un inscripteur numérique, nous l'appellerons *clavier alpha-numérique*.

19. L'analyse précédente est relative à la manière dont les résultats sont mis en évidence par une machine à calculer. Il y a lieu de considérer également la place de ces résultats dans l'ensemble des calculs. En effet, dans un ensemble de calculs de quelque importance, où nécessairement les opérations sont successives, il est souvent indispensable de connaître les résultats de certaines de ces opérations, bien qu'ils ne soient pas ceux de l'ensemble. Il faut donc savoir quels sont, parmi ces résultats, que nous appellerons *résultats intermédiaires*, ceux que peut fournir une machine donnée, et, corrélativement, déterminer quelles fonctions possède une machine capable de fournir des résultats intermédiaires.

Afin de pouvoir donner à la question précédente la généralité et la précision nécessaires, nous appellerons :

chaîne arithmétique, un ensemble d'opérations O_1, O_2, ..., O_i, ..., O_n, ..., ordonnées de manière que l'opération O_i utilise le résultat de l'ensemble des opérations O_1, O_2, ..., O_{i-1};

complexe arithmétique, une chaîne arithmétique C dont les données sont les résultats d'autres chaînes C_1, C_2, ..., C_n, ces dernières pouvant éventuellement se réduire à une seule opération, et nous dirons que le complexe est *composé* ou *résulte* des chaînes C_1, C_2, ..., C_n, et que la chaîne C est la *chaîne terminale* du complexe. Si certaines des chaînes C_1, C_2, ..., C_n sont elles-même les chaînes terminales d'autres complexes, ces derniers seront appelés *complexes composants* du complexe qui résulte des chaînes C_1, C_2, ..., C_n.

De façon analogue, nous dirons qu'une machine est :

simple, si elle ne peut faire que des opérations isolées — mais qui peuvent être de nature différente — ou tout au plus la chaîne formée par la somme des résultats d'opérations identiques $\left(\text{par exemple, } \Sigma ab, \sum\frac{a}{b}, \frac{ab}{c}\right)$;

complexe, si elle peut faire un complexe arithmétique.

Ces définitions données, la question précédente se pose comme suit : dans une chaîne ou un complexe arithmétique, on peut désirer connaître soit seulement le résultat de la chaîne ou du complexe, soit, en outre de ce résultat, ceux des diverses opérations de la chaîne ou du complexe, ou seulement ceux de certaines de ces opérations.

Dans une machine à calculer, une opération arithmétique d'une nature déterminée est effectuée nécessairement par un organe approprié. Par suite, une machine capable d'effectuer une chaîne arithmétique C dont les opérations élémentaires sont O_1, O_2, ..., O_n, et de faire apparaître le résultat de chacune des opérations O_1, O_2, ..., O_n doit comporter un ou plusieurs organes Ω propres à effectuer successivement les opérations O_1, O_2, ..., O_n, et un organe Ω_c propre à effectuer la chaîne C; mais elle doit aussi comporter un organe Ω_t propre à faire passer le résultat d'une opération O du chiffreur de l'organe Ω sur lequel figure ce résultat dans un chiffreur de l'organe Ω_c. D'une manière générale, nous appellerons *transfert* la fonction mécanique de l'organe Ω_t, c'est-à-dire la fonction qui consiste à faire passer un nombre d'un chiffreur dans un autre, et *transcripteur* l'organe Ω_t lui-même.

De même, une machine capable d'effectuer un complexe doit comporter des organes capables d'effectuer les chaînes C_1,

$C_2, \ldots, C_n$ dont se compose le complexe, et un organe capable d'effectuer, à partir des résultats des chaînes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, la chaîne résultante C; dans le cas fréquent où les chaînes C_1, $C_2, \ldots, C_n$, C sont de même nature, il y a avantage, du point de vue mécanique, à ne munir la machine que d'un seul organe calculateur Ω, auquel on adjoint des chiffreurs sur lesquels les résultats des chaînes $C_1, C_2, \ldots C_i, \ldots$, successivement calculés par Ω, sont conservés jusqu'au moment où s'effectue le calcul de la chaîne C : nous appellerons ces chiffreurs *chiffreurs de réserve*, et la fonction qu'ils remplissent la fonction *réserve*. Il est clair, d'ailleurs, que la fonction réserve peut être remplie par un chiffreur quelconque d'un organe calculateur, pendant le temps où cet organe n'a pas à intervenir dans les calculs.

Quand un résultat ne doit pas être introduit dans un nouveau calcul, il est logique, si le calculateur peut en prendre connaissance, de ne pas le conserver; la mise en évidence d'un résultat, par lecture ou impression, peut donc, rationnellement, se combiner avec l'effaçage de ce résultat sur le chiffreur où il figurait. Généralisant une terminologie empruntée aux machines à additionner, nous distinguerons donc, relativement au résultat, deux nouvelles fonctions mécaniques :

la fonction *total*, qui fait apparaître un résultat par lecture ou impression, et, simultanément, l'efface du chiffreur où il figure;

la fonction *sous-total*, qui fait apparaître un résultat par lecture ou impression, sans l'effacer du chiffreur où il figure.

Précisons par un exemple les notions que nous venons d'exposer. Une additionneuse comportant un totalisateur peut faire l'opération $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Si elle est imprimante, elle possède la fonction transfert du totalisateur à l'imprimeuse. Dans ce cas, si l'on veut imprimer seulement la somme S_n, il suffit que la machine possède la fonction total : le nombre S_n est effacé du totalisateur au cours de son transfert de cet organe à l'imprimeuse; si l'on veut imprimer les sommes $S_p = \sum_{i=1}^{p} a_i$, où p est inférieur à n, la machine doit posséder, en outre, la fonction sous-total : les nombres S_p sont transférés du totalisateur dans l'imprimeuse sans être effacés du totalisateur.

20. Commande. — L'analyse précédente a mis en évidence la multiplicité des fonctions que peut posséder une machine à calculer, c'est-à-dire des opérations — le mot étant pris dans le sens extensif que nous lui avons attribué — qu'elle peut exécuter. Généralisant la définition déjà donnée (9) [1] de la commande de la machine, nous dirons que cette fonction est celle qui permet au calculateur de choisir, parmi toutes les opérations réalisables par la machine. celles qu'il désire faire effectuer par cette dernière.

Nous appellerons *organes de commande* l'ensemble des organes qui permettent au calculateur d'effectuer la commande de la machine. Ils peuvent être groupés en deux catégories, analogues à celles dans lesquelles nous avons classé les inscripteurs :

a. leviers de commande, dont les diverses positions commandent différentes fonctions;

b. touches de commande — appelées *barres* lorsqu'elles sont très allongées — qui dans une position sont inactives, et dans une autre commandent une fonction.

Nous appellerons *clavier de commande* l'ensemble des leviers et des touches de commande.

21. Modes d'une fonction relative. — Les fonctions mécaniques que nous avons définies jusqu'à présent sont destinées à établir des relations entre la machine et le calculateur (9).

Suivant la manière dont ce dernier agit sur les organes de l'une de ces fonctions, nous dirons que celle-ci est manuelle, asservie ou documentaire :

a. manuelle, si le calculateur agit lui-même, directement, sur les organes opérateurs, et fournit toute l'énergie nécessaire à leur déplacement et à la réalisation de l'opération;

---

[1] Les nombres entre parenthèses renvoient aux paragraphes du texte.

b. asservie, si le calculateur agit, au moment d'effectuer une opération, sur des organes propres à disposer les organes opérateurs en vue de cette opération, puis déclenche la mise en marche de ces derniers ;

c. documentaire, si le calculateur n'intervient pas au moment d'effectuer une opération, mais antérieurement à tout calcul, ou, du moins, à toutes les opérations d'un même ensemble de calculs, pour préparer un objet matériel qui déclenchera au moment voulu l'exécution de cette opération en dehors de son intervention.

Pour rappeler que cet objet est généralement établi par une ou plusieurs machines de la classe des machines à calculer, et pour rappeler aussi son mode d'action, nous l'appellerons *document mécanique ;* cette épithète le distinguera des autres documents (13); s'il y a lieu, nous préciserons son rôle par les termes : document *d'inscription*, document *de commande.*

Nous dirons que le *mode* d'une fonction relative est la *manœuvre*, l'*asservissement* ou la *documentation* selon que cette fonction est manuelle, asservie ou documentaire. Ajoutons qu'une fonction relative peut admettre l'un des modes précédents, tandis que ses composantes en admettent un autre.

B. — FONCTIONS OPÉRATIVES.

22. Nous avons défini les *fonctions opératives* comme les fonctions nécessaires à l'exécution des opérations arithmétiques elles-mêmes (9). Or, certaines fonctions déjà rencontrées comme composantes de fonctions relatives peuvent être aussi composantes de fonctions opératives : c'est ainsi que la fonction sous-total doit être considérée comme une fonction relative quand elle sert à imprimer un résultat partiel, mais au contraire comme une fonction opérative quand elle sert à transférer dans un organe calculateur un nombre qui a été conservé en vue de son utilisation dans un nouveau calcul. Nous aurons donc à distinguer des autres, dans une fonction opérative donnée, les composantes qui ne peuvent pas appartenir à une fonction relative : nous les appellerons *fonctions opératives pures.* Ce sont ces fonctions que nous nous proposons

d'étudier maintenant. Nous les classerons d'après la nature des opérations arithmétiques qu'elles permettent d'effectuer.

23. **Chiffrage. Capacité.** — La plus simple des opérations arithmétiques que puisse être appelé à effectuer un organe d'une machine à calculer est de marquer un nombre : nous appellerons *chiffrage* la fonction mécanique correspondante. Pour qu'un organe puisse marquer un nombre déterminé, N, il faut que le nombre de chiffres des nombres que l'on peut inscrire sur les chiffreurs de cet organe soit au moins égal au nombre de chiffres du nombre N; mais il ne suffit pas qu'il en soit ainsi, car il pourrait arriver que le déplacement de la virgule, au cours de l'exécution de certaines chaînes arithmétiques, fasse sortir d'un chiffreur les chiffres exacts d'un résultat (*Cf.* n° 60, D). Nous ne développerons pas, pour le moment, les conséquences de cette remarque et nous nous bornerons à définir la notion qui permet de les préciser : nous appellerons *capacité* d'un chiffreur ou d'un organe dont fait partie ce chiffreur le nombre maximun de chiffres significatifs que peut comporter la représentation décimale d'un nombre marqué par ce chiffreur.

24. **Addition.** — L'addition mécanique se réduit à l'inscription des termes de la somme sur un totalisateur. La fonction de cet organe suffit donc à l'exécution d'une addition : nous l'appellerons la *fonction addition*.

25 **Soustraction.** — Pour retrancher mécaniquement un nombre d'un chiffre, b, d'un autre nombre d'un chiffre, a, supérieur à b, nous savons [1,17] qu'il suffit d'inscrire a sur la roue des unités d'un chiffreur — nous dirons que, dans cette opération, la roue *avance* — puis de faire tourner cette roue, en sens contraire, de b — unités — nous dirons alors qu'elle *recule*. Mais si a est inférieur à b, ce qui peut se produire si a et b sont les chiffres de même ordre décimal de deux nombres A et B de plus d'un chiffre, la roue, en reculant, dépasse la position marquant le chiffre 0; son mouvement terminé, elle marque la différence $(10+a)-b$; le nombre figuré sur le chiffreur du totalisateur n'est exact que si la dizaine implicitement ajoutée à a au cours du recul de la roue, est

retranchée par ailleurs des dizaines du nombre A. Selon qu'un totalisateur peut, ou non, effectuer cette dernière opération, nous dirons qu'il est *réversible* ou *irréversible*, et, dans le premier cas, nous dirons qu'il possède la fonction *soustraction*.

Il est d'usage assez courant d'appeler cette fonction soustraction *directe*, mais il n'y a pas lieu de conserver cette dernière épithète, car la méthode indirecte, dite *des compléments*, qui permet toujours au calculateur d'effectuer une soustraction au moyen d'un totalisateur irréversible, résulte d'une opération intellectuelle faite par le calculateur lui-même, et non du fonctionnement de la machine; ce n'est donc pas une fonction mécanique, dont il y ait lieu de distinguer la fonction soustraction que nous venons de définir. (La méthode des compléments consiste à remplacer l'expression $a-b$ par l'expression $a+(10^n-b)-10^n$, n étant la capacité du totalisateur : l'addition mécanique de a et de (10^n-b) est possible; quant à la soustraction de 10^n elle s'effectuerait, s'il existait une roue d'ordre décimal $n+1$, en faisant reculer cette roue d'une unité; comme une telle roue n'existe pas, il n'y a pas lieu d'effectuer la soustraction correspondante : le nombre figuré sur les roues existantes du totalisateur est donc la différence cherchée. Quelle que soit la simplicité de la règle de formation du complément d'un nombre, l'application de cette règle est une opération intellectuelle, et l'on ne peut dire alors que la soustraction soit effectuée par la machine à additionner).

Mais on conçoit que le terme soustractif, figuré par le calculateur sur l'inscripteur de la machine, puisse être remplacé mécaniquement par son complément, au cours de son transfert de l'inscripteur au totalisateur. Généralisant le sens d'un mot anglais devenu d'usage courant dans la terminologie des machines comptables, nous appellerons *overdraft* la fonction par laquelle, au cours d'un transfert, un nombre est remplacé par son complément. Cette fonction est toujours une composante d'une autre fonction; dans le cas considéré, elle est une composante de l'inscription. L'organe qui réalise l'overdraft peut donc être soit un organe indépendant qui complète, au moment voulu, les organes des diverses fonctions résultantes, soit une partie de l'organe qui réalise une fonction résultante; par suite, il ne possède pas une individualité suffisante pour qu'il y ait lieu de le désigner d'un terme particulier; si besoin était, nous le désignerions du même nom que la fonction elle-même.

Lorsqu'une machine comportant un seul totalisateur possède l'inscription avec overdraft, elle possède, par-là même, la fonction soustraction, même si le totalisateur n'est pas réversible. La fonction soustraction n'est donc pas nécessairement liée à la présence d'un totalisateur réversible.

26. Si l'on effectue sur un totalisateur l'inscription d'un terme additif a, puis d'un terme soustractif b, supérieur à a, le totalisateur figure le complément m_c du module m de $a - b$, quel que soit le mode de réalisation de la soustraction.

En particulier, l'inscription d'un terme soustractif m sur un totalisateur réversible qui est au zéro fait apparaître le complément m_c de ce terme, et si la machine possède la lecture ou l'impression avec overdraft, cette fonction, en fournissant le complément de m_c, redonne le nombre m. La transformation algébrique d'un nombre en son opposé a donc toujours pour traduction mécanique la transformation d'un nombre en son complément; mais, pour que la seconde transformation soit équivalente à la première, il faut en outre que l'indication du signe soit conservée sur un organe particulier, car, sur un totalisateur réversible, rien ne distingue l'effet de l'inscription du nombre $-m$, sous la forme de l'inscription du module sur l'inscripteur et du signe sur l'organe de commande de l'overdraft, de l'effet de l'inscription du nombre m_c sur l'inscripteur; et, de même, l'impression avec overdraft fait apparaître, après inscription du nombre $-m$, le module m de ce nombre et non le nombre lui-même.

Il résulte de cette analyse qu'une additionneuse peut opérer sur des nombres relatifs (positifs, négatifs ou nuls), à condition que l'on considère un nombre positif comme identique à son module m, et un nombre négatif comme l'ensemble d'un signe — et du complément m_c de son module; dans ce dernier cas, l'indication matérielle du signe — se produit soit à l'inscription du nombre complémentaire, soit, si le totalisateur est réversible, lorsque la roue d'ordre décimal le plus élevé dépasse, en reculant, la position o et cesse lorsque, le totalisateur étant réversible ou non, cette roue, tournant en sens contraire, dépasse de nouveau la position o. Notons, à titre de renseignement, que l'indication matérielle du signe — consiste, habituellement, dans le tintement d'une sonnette pour les machines à viseur, et le blocage de l'organe de la fonction Total pour les machines à imprimeuse. Quel que soit le mode de réalisation du dispositif marquant le signe —, nous dirons qu'une additionneuse capable de tenir compte mécaniquement du signe d'un nombre possède la fonction *somme algébrique*.

27. Multiplication. — Nous avons déjà noté la présence, dans les machines destinées à effectuer la multiplication par itération de l'addition du multiplicande, d'un organe particulier, appelé *entraîneur*, capable de conserver le multiplicande sous une forme matérielle qui permette d'en effectuer le transfert à un totalisateur autant de fois qu'il est nécessaire; il est clair, cependant, qu'une additionneuse comportant un totalisateur, un inscripteur asservi et un mécanisme de transfert de l'inscripteur au totalisateur peut aussi effectuer une multiplication par addition répétée du multiplicande; ce n'est donc pas dans l'itération du multiplicande que réside le véritable rôle de l'entraîneur. Or, les machines à entraîneur possèdent toutes un ou plusieurs totalisateurs montés sur un organe, appelé *chariot*, mobile par rapport à l'entraîneur, et dont le rôle est de présenter successivement aux roues de l'entraîneur marquant les chiffres d'ordres décimaux o, 1, 2, ..., p du multiplicande, les roues d'ordres o, 1, 2, ..., p, puis 1, 2, 3, ..., $p+1$, ..., puis k, $1+k$, $2+k$, ..., $p+k$ du totalisateur, de telle sorte que, si $\overline{a_k \ldots a_1 a_0}$ est la figuration décimale du multiplicateur, il suffise, pour obtenir le produit, d'effectuer $a_0 + a_1 + \ldots + a_k - 1$ itérations de l'addition du multiplicande, au lieu des

$$a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \ldots + 10^k a_k - 1$$

itérations imposées par la définition de la multiplication, et qui seraient nécessaires avec une machine du genre de l'additionneuse considérée précédemment. Le rôle de l'entraîneur est donc, essentiellement, de pouvoir, par combinaison avec le chariot, rendre la multiplication rapide. Plus généralement, nous dirons que tout organe capable de former un produit en moins de temps que ne l'exigerait l'itération de l'addition du multiplicande, conformément à la définition arithmétique de la multiplication, possède la fonction *multiplication*; nous appellerons un tel organe le *multiplieur*. L'entraîneur déjà défini est donc une espèce particulière de multiplieur; c'est celle qui se rencontre sur toutes les machines à multiplier d'usage courant.

Pour une multiplication déterminée, le fonctionnement du multiplieur est réglé par la valeur du multiplicateur, c'est-à-dire, mécaniquement, par la figuration décimale de ce dernier; une machine peut comporter un organe effectuant ce réglage après inscription des chiffres du multiplicateur; nous appellerons cet organe le *distributeur du produit*, et la fonction correspondante la *distribution*.

28. **Division.** — Des définitions d'un entraîneur (27) et d'un totalisateur réversible (25) il résulte qu'une machine possédant ces deux organes peut effectuer une division par soustractions répétées du diviseur.

L'opération peut être exécutée soit automatiquement, après inscription du dividende et du diviseur, soit par commande manuelle ou asservie; elle est alors facilitée par l'avertissement, généralement sonore, que le chiffre en cours de détermination dans un certain ordre décimal est devenu trop fort : après correction de ce chiffre, on peut passer à l'ordre décimal immédiatement inférieur. Nous dirons que la machine possède, dans le premier cas, la fonction *division*, dans le second cas, la fonction *sous-division*.

Le quotient est nécessairement formé sur un chiffreur différent de ceux du totalisateur et de l'entraîneur, sur lesquels sont figurés respectivement le dividende et le diviseur; on appelle généralement ce chiffreur le *compteur*. En outre, ce dernier marque, accessoirement, à la fin d'une multiplication, le multiplicateur effectivement inscrit sur la machine, en vue du postcontrôle de ce nombre; toutefois cet organe peut aussi se rencontrer dans les machines ne faisant pas la division.

On pourrait envisager, logiquement, d'autres fonctions opératives. Nous nous bornerons, pour le moment, aux précédentes qui, seules, existent dans les machines actuelles et qui suffisent d'ailleurs pour mettre en évidence la portée du symbolisme que nous avons en vue.

C. — FONCTIONS DE SÉCURITÉ.

29. Une dernière catégorie de fonctions reste à étudier, dont l'importance est considérable, car elles ont pour but, bien que ne l'atteignant pas toujours, d'assurer l'exactitude des résultats fournis par une machine à calculer.

Nous n'examinerons pas en détail les fonctions destinées à empêcher les manœuvres dont les effets combinés seraient néfastes au bon fonctionnement de la machine. Nous les grouperons en une fonction générale : *la sécurité mécanique.* Il reste à examiner l'influence de l'intervention du calculateur lui-même. A ce sujet, nous nous bornerons, pour le moment, à rappeler la classification des modes d'inscription et de commande que nous avons déjà proposée [15], et nous dirons que l'inscription ou la commande sont :

1° *immédiates*, si l'organe sur lequel ces fonctions doivent s'exercer est actionné en même temps que l'organe d'inscription ou de commande, et si ce dernier reprend aussitôt après son état initial sans qu'aucune trace reste de l'action qu'il a subie;

2° *postcontrôlées*, si l'action du calculateur est instantanément efficace, comme dans le cas précédent, mais si une trace reste de l'inscription ou de la commande effectuées, permettant de contrôler ultérieurement l'exactitude des manœuvres;

3° *précontrôlées*, si elles sont seulement préparées par l'organe qui leur est propre et ne deviennent effectives qu'après la manœuvre d'une commande supplémentaire de mise en marche, de manière que le calculateur puisse s'assurer, par avance, que les organes de préparation ont été disposés correctement;

4° *documentaires*, si elles sont effectuées par un document et non par l'opérateur lui-même.

De même, nous dirons que l'inscription ou la commande possèdent la fonction composante *immédiateté*, *postcontrôle* ou *précontrôle* si elles sont immédiates, postcontrôlées ou précontrôlées, et que le *postcontrôle* ou le *précontrôle* sont *mécaniques* s'ils consistent en la mise en action d'un organe avertisseur, chaque fois qu'une erreur a été commise.

Enfin, le précontrôle n'a d'utilité que s'il est complété par un organe de correction des erreurs; nous appellerons fonction *correction* la fonction correspondante. Cette fonction est une composante du précontrôle. Un organe de correction particulièrement important se rencontre dans le clavier complet, appelé *clavier flexible*, tel que la dépression d'une touche relève toute autre touche du même ordre décimal déjà abaissée.

30. Les fonctions que nous venons de définir se présentent donc comme des fonctions composantes de la fonction sécurité; comme elles particularisent certains modes de réalisation de l'inscription ou de la commande, et que la fonction sécurité est elle-même une composante de ces dernières fonctions, nous appellerons l'immédiateté, le postcontrôle et le précontrôle *composantes modatives* de l'inscription ou de la commande.

D. — NOTATION SYMBOLIQUE DES FONCTIONS MÉCANIQUES.

31. Nous représenterons les diverses fonctions mécaniques que nous avons déjà rencontrées et celles que nous considérerons ultérieurement au moyen d'un symbolisme qui permette de faire apparaître leur relations mutuelles. Nous adopterons les règles suivantes :

1° Les fonctions qui ne sont les composantes d'aucune autre sont appelées *fonctions principales*. Une fonction principale est représentée par une lettre majuscule des alphabets romain ou grec.

2° Les fonctions composantes d'une fonction, qui ne sont composantes d'aucune autre composante de cette même fonction sont appelées *composantes premières*, ou du *premier ordre*, de cette fonction; les composantes premières d'une composante première d'une fonction sont appelées *composantes secondes*, ou du *second ordre*, de cette dernière, et ainsi de suite. Chaque composante d'une fonction, d'ordre consécutif à cette dernière, est représentée, sauf exceptions expliquées aux paragraphes suivants, par une lettre minuscule des alphabets romain ou grec, écrite soit en indice du symbole de cette fonction, soit le long d'un cercle ou d'un arc de cercle entourant complètement ou partiellement le symbole de cette fonction, de telle manière que la subordination des indices exprime la subordination des fonctions. Pour simplifier, les symboles des composantes premières d'une fonction principale peuvent être écrits à la suite, et non en indice, du symbole de cette fonction.

3° Le tableau ci-dessous énumère les symboles des fonctions considérées aux paragraphes 1° et 2°.

Inscription par inscripteur à cotes : I.
» par inscripteur à leviers : L.
» par inscripteur à clavier complet : C.
» par inscripteur à clavier réduit : R.
» rythmique : *r*.
» indifférente : absence de symbole.
» alphabétique par clavier alphabétique : *a*.
» alphabétique par clavier alphanumérique : (*an*).
» alphabétique abrégée : (*aa*).
Lecture : V.
» par viseur : absence de symbole.
» par viseur à cotes : *c*.
» par viseur à voyants : *v*.
» par viseur successif : *s*.
Impression : P.
» simple : *s*.
» typographique : *t*, éventuellement accompagné du nom abrégé du mode d'impression : stencil, stéréotypie, etc.
» mécanographique : *d*, éventuellement accompagné du nom abrégé du mode d'inscription : cartes, électrophotolecture, etc.
» simultanée : *b*.
» successive : *c*.
Tabulation : τ.
» verticale descendante : *m*.
» verticale ascendante : *d*.
» horizontale avant : *a*.
» horizontale arrière : *r*.
» horizontale arrière en fin de ligne : ρ
Addition : A.
Addition et soustraction : Σ.

Somme algébrique : σ.
Multiplication : M.
Multiplication par entraîneur : e.
Distribution : D.
Division : Δ.
Sous-division : s.
Commande : W.
Total : T.
Sous-total : S.
Modes des fonctions relatives :
manœuvre : μ.
asservissement : α.
documentation : δ.
Composantes modatives de sécurité :
immédiateté : i.
précontrôle : ϖ.
précontrôle par clavier flexible : f.
précontrôle par touche correction : c.
postcontrôle : p.
pré ou postcontrôle mécaniques : μ (en indice de ϖ ou p).
documentation : δ.

4° La fonction transfert est indiquée par une flèche ayant pour origine le symbole du chiffreur duquel un nombre est transféré et pour extrémité le symbole du chiffreur dans lequel ce nombre est transféré. Si le transfert est possible dans les deux sens le trait de liaison porte une double flèche.

Le symbole du mode de la fonction transfert est écrit au-dessus ou à droite du trait de transfert, à l'exception du symbole δ qui est sous-entendu lorsque le seul mode du transfert est la documentation.

5° La fonction Total est indiquée par la lettre T placée à la suite du symbole du chiffreur auquel elle s'applique.

6° La capacité de chaque chiffreur est écrite en exposant du symbole de ce chiffreur.

7° Lorsque la machine comporte plusieurs organes similaires, le numéro de chaque organe est écrit *au-dessous* du symbole de l'organe.

31. En principe, les symboles des fonctions inscription et résultat sont écrits sur une même ligne horizontale; les symboles

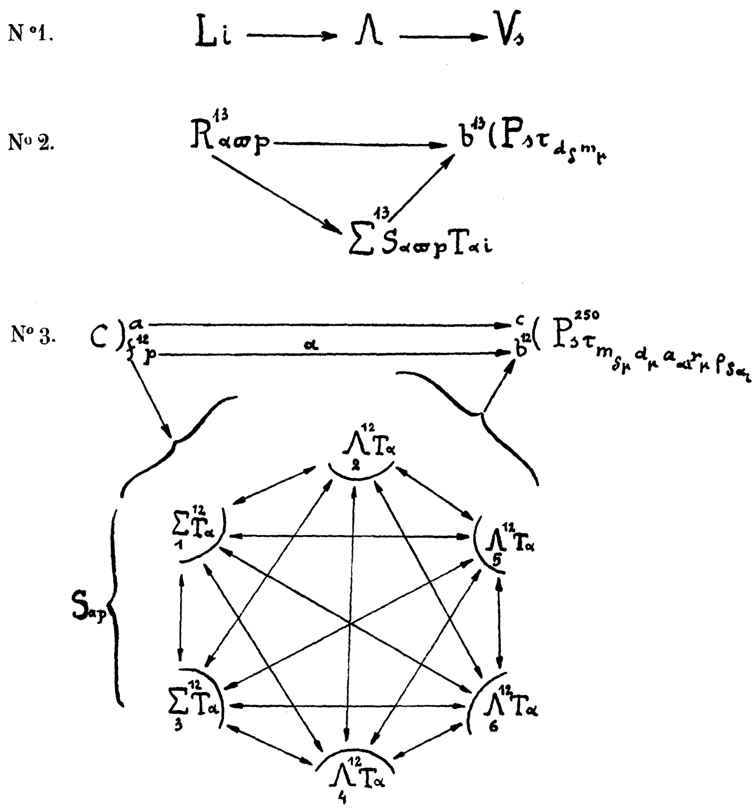


Fig. 1.

1, *Additionneuse de Pascal.*
2, *Additionneuse moderne.*
3, *Additionneuse moderne.*

1. — **Un inscripteur à levier à action immédiate** (Li) **actionne automatiquement un totalisateur** (Λ) **qui, lui-même, actionne automatiquement un viseur sur lequel les chiffres du résultat apparaissent successivement** (Vs).

2. — Un clavier réduit (R), asservi (α), ce qui assure le précontrôle (ϖ), actionne simultanément un bloc imprimant (b), ce qui assure le postcontrôle (p) et un totalisateur réversible (Σ). Le totalisateur possède la fonction Sous-Total (S), par touche asservie (α) avec précontrôle (ϖ), ce Sous-Total étant postcontrôlé (par l'impression du signe —). Il possède aussi la fonction Total par touche asservie immédiate ($T\alpha i$). L'impression est simple (Ps) et ne comporte que l'interlignage : interlignage descendant automatique (d_δ), ascendant manuel (m_μ).

La comparaison visuelle des formules 1 et 2 met en relief les progrès de la seconde machine sur la machine de Pascal, dont elle est une descendante.

3. — Machine comptable la plus rapide et la plus complète, à notre connaissance. Nous n'en détaillerons pas la formule.

N° 1.

N° 2.

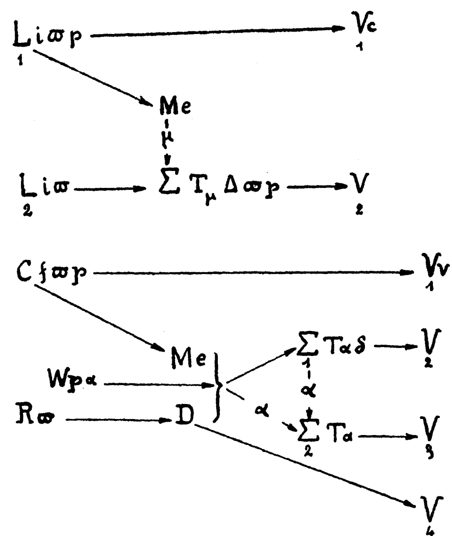


Fig. 2.

1, *Arithmomètre Thomas.*
2, *Multiplieuse moderne.*

1. — Un inscripteur à leviers ($L i \varpi p$) à action immédiate, précontrôlé et postcontrôlé par le maintien en position des leviers, jouant le rôle de viseur à côtes $\left(Vc_1\right)$, agit automatiquement sur un entraîneur (Me). Le nombre marqué par ce dernier est transféré manuellement (μ) dans un totalisateur réversible (Σ), et le nombre marqué par celui-ci est transféré automatiquement dans un viseur $\left(V_2\right)$. L'inscripteur L_2 permet l'inscription directe d'un nombre sur Σ (en particulier l'inscription d'un dividende).

2. — La comparaison des formules 1 et 2 met en évidence les perfectionnements apportés à la machine de Thomas. Les deux premières lignes de la formule 2 reproduisent sensiblement la formule 1. On voit qu'il a été ajouté à la machine de Thomas : d'une part, la commande asservie ($Wp\alpha$) et la distribution (D) avec inscription du multiplicateur par clavier réduit précontrôlé ($R\varpi$), et d'autre part un second totalisateur $\left(\Sigma_2\right)$ qui peut recevoir un nombre, soit de l'entraîneur, soit du totalisateur Σ_1, à la volonté du calculateur, puisque ces transferts sont asservis ($- \alpha \rightarrow$).

L'ensemble des formules des figures 1 et 2 montre nettement de combien les progrès des additionneuses sont supérieurs à ceux des multiplieuses.

Remarque. — Notons encore que, conformément à notre point de vue, les formules précédentes ne donnent aucune indication sur la structure mécanique elle-même des organes des machines.

des fonctions opératives sont écrits suivant une disposition qui permette de faire apparaître clairement leurs relations mutuelles et leurs relations avec les autres fonctions.

A titre d'exemple, nous donnons dans les figures 1 et 2 la formule fonctionnelle de machines de types caractéristiques, et leur traduction en langage ordinaire.

CHAPITRE III.

L'ANALYSE MÉCANIQUE. SES CARACTÈRES ET SES DÉVELOPPEMENTS POSSIBLES.

32. L'analyse que nous avons exposée au cours du chapitre précédent peut être faite, non seulement pour les machines à calculer, mais pour une catégorie quelconque de machines analogues entre elles. A l'étude des machines, et aussi des travaux qui peuvent être exécutés par des machines, étude faite du point de vue où nous nous sommes placé, nous proposons de donner le nom d'*Analyse mécanique*; cette étude, commencée dans le chapitre précédent, et que nous nous proposons de développer plus complètement dans des publications ultérieures, est étroitement liée à celle de la Mécanique; mais nous pensons qu'elle peut s'élever à un degré d'abstraction suffisant pour que l'on s'abstienne *a priori* de la considérer comme une partie de la Mécanique appliquée.

33. Il pourrait sembler que les propriétés des machines que nous avons examinées précédemment aient déjà été étudiées dans la Théorie des Mécanismes, qui s'attache à comparer les diverses réalisations matérielles des mouvements dont l'étude abstraite fait l'objet de la Cinématique, et qui parvient ainsi à une classification des organes des machines d'après leurs relations mutuelles.

Kœnigs [5] a exposé comme suit l'objet de la Théorie des Mécanismes :

« Le machinisme est une véritable zoologie artificielle où le créateur est l'homme lui-même, guidé par une large et mystérieuse intuition.

» Cela est si vrai que, comme la zoologie, son étude a commencé par n'être qu'une simple nomenclature, ainsi qu'en témoignent les écrits les plus anciens jusqu'au traité de Leupolden; jusqu'à cette époque, les recueils de machines ne présentent que des descriptions plus ou moins détaillées sans aucun souci de rapprocher les uns des autres les engins qui s'y trouvent décrits.

» ... L'ère des classifications fut ensuite ouverte par Monge, Hachette, Lanz et Betancourt, Laboulaye, Belanger, et... Willis et Haton de La Goupillière poursuivirent le même objet avec d'autres moyens.

» Pour compléter l'évolution, il reste donc à créer, pour le machinisme, l'analogue de l'anatomie comparée et de la physiologie, autrement dit, il reste à porter son étude sur le terrain de l'analyse rationnelle. »

Il est certain que le rapprochement des machines et des êtres organisés devait s'imposer dès que le nombre d'individus distincts compris dans le terme général de *machine* fut devenu suffisant pour que se fît sentir le besoin d'une classification rationnelle de ces individus; et, près de 15 ans avant Kœnigs, M. d'Ocagne employait déjà le terme d'*anatomie comparée des machines à calculer* dans un Ouvrage qui a été pour nous une initiation et une base [1]. Mais si les machines et les êtres organisés présentent des analogies, ils présentent aussi de profondes différences.

Comme toutes les sciences de la nature, la zoologie étudie des êtres extérieurs à l'homme. Ce dernier peut les observer, les décrire, les comparer; il peut aussi les utiliser et même, en quelque mesure, les modifier; mais, dans ce cas, il doit respecter le jeu des lois fondamentales que la nature a imposées, en dehors de lui, à chacun de ces êtres au moment de son apparition ou dans les phases successives de son développement. Les machines, au contraire, sont tout entières l'œuvre de l'homme; bien que, dans leur construction et leur fonctionnement, il doive respecter les lois de la nature, l'homme peut imposer à ses machines une structure particulière, *en harmonie avec le but qu'il leur a assigné*. Voici donc où se marque la différence essentielle entre la machine et l'être naturel : la machine est créée par l'homme en vue d'un but déterminé, tandis que l'être de la nature, si son existence est soumise à une finalité, l'homme l'ignore.

Pour comprendre complètement la machine, il est donc essentiel, et par suite nous considérerons comme fondamental, de ne pas séparer l'étude des mécanismes qui composent une machine particulière de l'étude du but que cette dernière doit atteindre; c'est-à-dire, plus généralement encore, de ne point étudier une machine isolément, mais seulement en tenant compte de ses relations avec l'homme, des influences qu'elle reçoit de lui et des influences qu'elle exerce sur des êtres qui dépendent de lui; c'est dans cet esprit que nous avons fait, dans le chapitre précédent, l'analyse des machines à calculer, et que nous envisageons de poursuivre le développement de l'Analyse mécanique.

34. C'est aussi dans cet esprit, semble-t-il, que Monge avait déjà abordé l'étude systématique des mécanismes :

« Les forces de la nature, dit-il, qui sont à la disposition de l'homme, ont trois éléments distincts, la masse, la vitesse, la direction du mouvement. Rarement, dans ces forces, les trois éléments dont il s'agit ont les qualités qui conviennent au but que l'on se propose et les machines ont pour objet principal de convertir les forces dont on peut disposer, en d'autres dans lesquelles ces éléments soient de nature à produire l'effet désiré. Chaque machine est composée de plusieurs parties élémentaires dont chacune a un but particulier, et ce but peut être atteint de plusieurs manières différentes, suivant les circonstances. L'énumération complète de toutes les manières dont on peut changer les éléments des forces, et la description des moyens différents de produire le même changement dans des circonstances différentes, doivent offrir aux artistes les plus grandes ressources pour les travaux de tous les genres [6]. »

Si l'on n'oublie pas que Monge envisage seulement la *description* des mécanismes, dont il fait une partie de son cours de Stéréotomie, c'est-à-dire une application de la Géométrie descriptive, on peut, pensons-nous, pénétrer sa pensée et l'exprimer fidèlement avec une terminologie différente en disant que les divers organes d'une machine sont déterminés par leur fonction mécanique, et que, par suite, une classification des mécanismes, pour être utile, doit grouper dans la même catégorie les mécanismes qui remplissent la même fonction.

Le point de vue précédent a été abandonné par Willis [7] et Haton de la Goupillière [8]; Reuleaux [9] et Kœnigs [5] s'en sont écartés plus encore. L'intention de ces auteurs était de donner à l'étude des mécanismes une base *scientifique*, ce terme s'opposant presque pour eux au terme d'*utilisable*. La méthode de classification de Monge, dit Haton de la Goupillière, « ne paraît présenter qu'un seul avantage véritable, c'est qu'elle constitue une sorte de dictionnaire où l'on peut aller chercher l'organe dont on devra se servir pour opérer une transmission de nature déterminée. Mais quel est le mécanicien vraiment digne de ce nom qui pour la composition d'une machine devra feuilleter un pareil répertoire? La classification n'est ici réellement utile que pour l'étude et l'exposition didactique, et à ce titre elle doit par-dessus tout grouper les analogies fondamentales [9] ».

Nous ne nous attarderons pas à réfuter ces arguments. Pour justifier l'utilité d'un dictionnaire de la nature de celui qu'envisageait Monge, il suffira de rappeler, par exemple, que plus de deux cents dispositifs ont été proposés pour réaliser cette fonction de sécurité si élémentaire : éviter le desserrage d'un écrou. Mais cet exemple fait ressortir aussi que le catalogue de mécanismes envisagé par Monge, et établi pour la première fois par Lanz et Betancourt [10], appartient plutôt à la technologie de la construction des machines qu'à la Mécanique proprement dite.

Plus importante nous paraît la remarque suivante, qui ne semble pas encore avoir été faite : il est un autre point de vue, où s'était placé Monge, et dont ne s'est écarté aucun des auteurs qui, après lui, ont traité de la Théorie des Mécanismes. Après avoir défini les éléments des machines comme les moyens par lesquels on change la direction des mouvements, Monge expose ce point de vue comme suit :

« On sent que les machines les plus compliquées ne sont que les résultats des combinaisons de quelques-uns de ces moyens individuels, dont il faudra faire en sorte que l'énumération soit complète [11]. »

Tous, après lui, ont eu pour but de dresser une liste *complète* des *moyens* et combinaisons de moyens mis en œuvre dans les machines; et, l'ingéniosité des hommes ayant accru sans trêve ces moyens et leurs combinaisons, il en est résulté, tantôt que le sens du terme *machine* a été restreint de façon excessive afin de limiter à un nombre raisonnable la liste des éléments étudiés, tantôt que la liste des combinaisons de mécanismes considérées comme élémentaires a été trop considérablement allongée afin d'embrasser un plus grand nombre de machines; et c'est ainsi que Reuleaux est conduit à représenter une courroie passant sur deux poulies par une formule composée de 37 symboles abstraits élémentaires [1] dont aucun n'évoque ni une courroie, ni une poulie [9]. Dans un cas analogue. H. Poincaré demandait aux Logisticiens à qui et à quoi pourrait bien servir une théorie qui employait 27 équations à démontrer que 1 est un nombre, en prenant pour hypothèse qu' « une relation a lieu entre *deux* termes » [12].

C'est donc, à notre avis, pour avoir abandonné ce point de vue essentiel qu'une machine ou un organe de machine sont créés par l'homme pour atteindre un but précis et bien déterminé, que l'on a édifié, après Monge, des Théories des Mécanismes qui, aussi infécondes que la Logistique, ne peuvent ni expliquer simplement les machines existantes, ni aider à en construire de nouvelles.

35. La notion de fonction mécanique remonte donc, vraisemblablement, à Monge. Mais celui-ci et ses continuateurs ont cru que toutes les fonctions mécaniques étaient réalisables par la combinaison d'un nombre relativement faible d'éléments, et ont cherché un système d'éléments et de lois de combinaisons de ces éléments capable de représenter toutes les fonctions mécaniques.

---

(1) Voici cette formule :

$$T_p^{\pm} \ \ldots \cong \angle \ldots, \ \ T_p^{\mp}, \ \ R^{+} \ldots \mid \ldots C^{+} = C^{-} \ldots \parallel \ldots C^{-} = C^{+} \ldots \mid \ldots R^{+}.$$

Les premiers symboles, jusqu'à la virgule, se traduisent ainsi :

Un organe de traction prismatique (T_p) qui s'enroule et se déroule en même temps ($\pm$) et qui est identique ($\cong$) à un autre organe de traction prismatique qui se déroule et s'enroule en même temps ($T_p^{\mp}$), ces deux organes étant rectilignes et non parallèles ($\angle$).

$T_p^{\pm} \ldots \cong \angle \ldots T_p^{\mp}$ veut donc dire *courroie*.

Le reste de la formule décrit les poulies et leur support selon le même procédé.

Reuleaux exprime très nettement cette conception :

« La Science des machines, dit-il, doit être fondée sur la déduction [9]. »

De plus, après que, sous l'influence d'Ampère [16], la Cinématique eût été constituée en un corps de doctrine indépendant, l'on en vint à ne considérer comme appartenant à une machine que des pièces mobiles, ou celles qui supportent ces dernières. C'est encore Reuleaux qui énonce avec le plus de précision la définition d'une machine répondant à cette conception :

« Une machine est un assemblage de corps résistants, disposés de manière à obliger les forces mécaniques naturelles à agir en donnant lieu à des mouvements déterminés. »

Quelle signification donner alors à *l'étude d'une machine simple à l'état de repos*, étude dans laquelle on admet que l'on peut, sans le modifier en rien du point de vue de la Mécanique rationnelle, ajouter des liaisons à un système en équilibre, c'est-à-dire faire perdre à une machine simple, au repos, la faculté de mouvement qui, seule, fait d'elle une machine?

Nous pensons, au contraire, que les fonctions mécaniques et, plus encore, les organes capables de les remplir sont nombreux et divers comme les motifs et les buts de l'activité de l'homme. Renonçant à en dresser un tableau définitif, nous proposerons à l'Analyse mécanique le double problème que voici :

Désignant du nom de *machine* tout ensemble d'êtres inanimés ou même, exceptionnellement, animés, capable de remplacer l'homme dans l'exécution d'un ensemble d'opérations — ce dernier terme étant pris dans le sens le plus extensif — proposé par l'homme, et du nom de *fonction mécanique* l'une quelconque des opérations que peut exécuter une machine ou un organe de machine :

1° *On considère toutes les machines qui tendent au même but comme formant une même classe, et l'on se propose de chercher quelles fonctions mécaniques elles possèdent, et quels organes ont été imaginés pour remplir ces fonctions.*

2° *On considère l'un des buts, bien déterminé, de l'activité* *humaine, et l'on se propose de chercher s'il existe un ensemble de fonctions mécaniques, et lesquelles, dont la réalisation matérielle constituerait une machine capable d'atteindre ce but.*

Nous proposons de donner, à l'étude de la première question, le nom d'*Analyse mécanique descriptive*, à l'étude de la seconde le nom d'*Analyse mécanique préfactive* (1).

Il serait prématuré de vouloir, dès à présent, tracer un plan détaillé de ces nouvelles disciplines, car l'Analyse descriptive, tout au moins, doit être considérée plutôt comme une science d'observation que comme une science déductive; c'est donc au cours de son développement qu'elle trouvera sa forme définitive. On peut néanmoins prévoir certaines des voies dans lesquelles l'Analyse mécanique doit naturellement s'engager, et certains des résultats que l'on peut en attendre.

36. Il est évidemment possible de représenter par un symbolisme cohérent les fonctions mécaniques des machines d'une classe quelconque et d'établir des formules fonctionnelles pour les divers types de machines d'une même classe : ce sera le premier objet de l'Analyse mécanique descriptive. Le rapprochement de ces formules fonctionnelles permettra une comparaison et une classification détaillée des machines d'une classe donnée, classification rationnelle parce qu'elle mettra en évidence les moyens dont est pourvu chaque type de machines et la manière plus ou moins parfaite dont ces machines atteignent le but qui leur a été assigné. Le rapprochement des formules fonctionnelles de machines de classes différentes fera apparaître ensuite des fonctions communes à plusieurs classes, et conduira vraisemblablement à une classification d'ensemble des fonctions mécaniques : par exemple, il ressort déjà de la définition même d'une machine que la distinction faite, à propos des machines à calculer, entre fonctions opératives, néces-

(1) Cette dernière épithète a été choisie de manière à rappeler le rôle que cette partie de l'Analyse mécanique nous paraît appelée à jouer dans la construction des machines.

Il nous paraît superflu d'attirer l'attention sur la différence entre les deux objets d'étude que nous proposons et ceux que Reuleaux désigne des noms d'Analyse descriptive et Synthèse cinématique.

saires à l'exécution des opérations elles-mêmes, et fonctions relatives, concernant les rapports entre cette machine et l'homme qui l'utilise, est absolument générale; de même une fonction relative quelconque peut admettre un ou plusieurs des modes que nous avons définis (21).

37. De ce tableau systématique des fonctions mécaniques il se dégagera, lorsque ce tableau sera complet, une vue d'ensemble des diverses activités où la machine a, jusqu'à présent, remplacé l'homme, et même, pensons-nous, une théorie générale des fonctions mécaniques, théorie qui constituera l'*Analyse mécanique abstraite*, dont un objectif important sera sans doute d'établir un critérium des opérations exécutables par la machine, par opposition à celles que l'homme seul pourrait effectuer.

C'est à l'Analyse mécanique abstraite que nous rattacherions la proposition suivante, que nous avons énoncée [15] au sujet de certains types de machines à calculer, et qui nous paraît générale, bien que nous n'ayons pu encore la justifier logiquement ni réunir, en dehors du Calcul mécanique, suffisamment de témoignages de son exactitude pour la considérer comme une loi d'origine expérimentale : *pour atteindre un but déterminé, il correspond à un ensemble de moyens donnés un mode opératoire et une suite d'opérations optima.* C'est pour avoir méconnu ce principe que, fréquemment, on n'a pas obtenu dans une technique les perfectionnements espérés, quand on s'est borné à substituer, dans un ensemble ordonné d'opérations, de nouveaux moyens à ceux qui étaient antérieurement mis en œuvre, sans modifier corrélativement cet ensemble d'opérations (1); et c'est au contraire l'appli-

(1) Rappelons, par exemple, que le premier mécanisme de commande à distance des usines hydroélectriques consistait à substituer à un ingénieur un *robot* supporté par des jambes montées sur patins à roulettes et muni de bras et de mains, et qui, actionné par des électro-aimants à l'appel d'un signal sonore modulé, se déplaçait devant le tableau de commande et en manœuvrait les leviers.

Tout le mécanisme relatif aux mouvements du robot est superflu, puisque le but à atteindre est seulement de faire correspondre chaque levier de commande à une modulation déterminée du signal sonore, et que le robot comporte nécessairement les dispositifs électromécaniques qui suffisent à atteindre ce but : c'est évidemment l'idée préconçue que l'écoute d'un signal et la manœuvre d'un cation systématique de ce principe qui nous a conduit à adopter, en calcul mécanique, des règles d'opérations parfois très différentes de celles du calcul manuel, ainsi que nous l'exposerons au Chapitre V, où nous en montrerons aussi les multiples avantages.

L'Analyse générale qui, dans certains travaux modernes, a déjà revêtu d'une forme nouvelle la Théorie des Propositions [13, 14], pourrait sans doute aussi fournir le cadre de la Théorie des Fonctions mécaniques que nous envisageons. C'est par allusion aux développements de cette nature dont l'Analyse mécanique peut être l'objet que nous demandions, au début de ce chapitre, de ne pas la considérer *a priori* comme une partie de la Mécanique appliquée; l'Analyse mécanique abstraite, théorie de la réalisation au moyen de machines des opérations conçues et voulues par l'homme, aura des tenants étroits avec les arts appliqués et même avec certaines sciences morales, en particulier la Psychophysique et l'Organisation du travail, et, par suite, ne pourra pas être considérée comme une simple application de la Mécanique rationnelle.

38. L'Analyse mécanique descriptive fournira encore un cadre rationnel à un tableau des organes remplissant une fonction donnée, analogue au tableau complet des mécanismes, envisagé par Monge. Mais un tel tableau présentera les mécanismes par ensembles ordonnés suivant leur fréquence d'emploi, ou suivant certaines de leurs qualités : robustesse, légèreté, rapidité, etc., d'une façon qui, pour un moment donné, pourra être à la fois complète et méthodique; et cela, non seulement du point de vue de l'Analyse mécanique, mais aussi de celui de la Mécanique appliquée, car les organes qui remplissent une même fonction ont nécessairement des propriétés mécaniques communes : l'étude de ces dernières doit, rationnellement, se développer en une nouvelle Théorie des Mécanismes reposant sur la Théorie des Fonctions mécaniques; on possède déjà, d'ailleurs, des théories générales pour les engrenages, les régulateurs, les turbo-machines, etc.

---

levier correspondant à ce signal sont des opérations intellectuelles, donc essentiellement humaines, qui a conduit à choisir tout d'abord un mécanisme qui se substitue à l'homme en l'imitant le plus exactement possible.

Cette remarque fait ressortir également l'intérêt du problème général que nous avons proposé à l'Analyse mécanique abstraite.

Du point de vue didactique, cette théorie, ne cherchant pas à imposer à son objet une forme préconçue, aura l'avantage de pouvoir se perfectionner et de rester constamment à jour, offrant de façon permanente une image exacte de la réalité.

Du point de vue pratique — un exemple très simple a déjà montré qu'elle ne méritait pas les critiques de Haton de la Goupillière — son intérêt sera celui qu'envisageait Monge : fournir pour chaque fonction mécanique une liste complète et ordonnée des organes qui peuvent remplir cette fonction; elle sera donc pour le technicien un précieux instrument de travail, qui interviendra dans l'établissement d'un projet de machine destinée à un objet précis, dès que l'Analyse mécanique préfactive de cet objet aura déterminé les formules fonctionnelles possibles pour une telle machine, et qui permettra de déterminer aisément et rapidement s'il existe déjà des organes remplissant les fonctions dont les symboles sont contenus dans ces formules, ou s'il faut en construire de particuliers à certaines de ces fonctions.

39. L'Analyse mécanique préfactive semble, en effet, pour le moment tout au moins, devoir être surtout une science appliquée. Elle constituera la première phase de l'étude d'un projet de machine; et d'ailleurs, dès maintenant, elle est toujours effectuée, empiriquement, d'une façon à peu près inconsciente et fort incomplète. Mais les principes directeurs qu'elle pourra recevoir de l'Analyse mécanique abstraite, ou même, seulement, d'une Analyse descriptive approfondie des machines de la même classe que la machine projetée, la rendront particulièrement efficace, parce que méthodique et complète.

40. Nous pensons avoir montré, dans l'ensemble de cette étude, comment l'Analyse descriptive pourra expliquer les machines construites jusqu'à présent, et même, vraisemblablement, permettra d'en établir une théorie abstraite, et pourquoi la connaissance de l'Analyse préfactive qui, sous sa forme définitive et parfaite, constituera l'application de cette théorie à la construction de nouvelles machines, deviendra sans doute fondamentale pour l'art de l'ingénieur; il nous semble donc que l'Analyse mécanique, à la fois

explicative et constructive, peut être considérée comme une véritable science dont l'étude mérite d'être développée.

Le chapitre précédent constituait un exemple d'Analyse descriptive qui nous a permis de dégager les traits caractéristiques de l'Analyse mécanique. Dans le Chapitre IV, nous nous proposons, pour donner un exemple d'Analyse mécanique préfactive, d'étudier les calculs de la Mécanique céleste, en vue de chercher les formules fonctionnelles de machines capables d'effectuer ces calculs. Dans le Chapitre V, nous montrerons la possibilité de construire de telles machines. Il ressortira, pensons-nous, de cette étude, que c'est pour n'avoir point fait une Analyse mécanique assez poussée de ces calculs et des machines à calculer, tant existantes que projetées jusqu'à présent, que l'on n'a pu encore doter la Mécanique céleste d'un instrument de calcul numérique à la mesure des besoins qu'ont fait naître ou que font pressentir les développements théoriques de cette science.

CHAPITRE IV.

ANALYSE MÉCANIQUE PRÉFACTIVE DES CALCULS DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

41. De toutes les sciences appliquées, la Mécanique céleste est celle qui fait le plus appel aux théories mathématiques; ces dernières ont, presque toutes, été nécessaires au progrès de cette science, et nombre d'entre elles ont été créées ou développées pour y contribuer. Nous pouvons donc admettre pour tenir compte des développements futurs de cette science que, dans les calculs de la Mécanique céleste, les nombres, données ou résultats, peuvent être engagés dans une relation mathématique entièrement arbitraire : c'est là un premier caractère fondamental de ces calculs.

Mais, malgré ses rapports très étroits avec les Mathématiques, la Mécanique céleste reste néanmoins une science de la nature : les symboles et les théories ne sont pour elle qu'un moyen de représenter, de coordonner et d'expliquer des faits observés afin de prévoir des faits de l'avenir. Les nombres qui interviennent dans les calculs de cette science, et que nous appellerons, pour abréger, les nombres de la Mécanique céleste, sont donc, pour la plupart, les mesures de grandeurs; ceux qui font exception, en très petit nombre, sont des nombres abstraits : e, π, etc., qui figurent toujours parmi les données. En outre, les opérations de mesure exécutées dans les Observatoires sont parmi les plus précises que l'on sache effectuer. Cette nature expérimentale des résultats et de la plupart des données, ainsi que la grande précision des mesures qui déterminent ces dernières, constituent un second caractère fondamental des calculs de la Mécanique céleste.

Ces deux caractères suffisent à déterminer les conditions d'application à ces calculs des machines et procédés du Calcul mécanique. Ils font ressortir tout d'abord la complexité des calculs que peut exiger la résolution numérique d'un problème posé par la Mécanique céleste, et, par suite, la durée considérable que peuvent nécessiter ces calculs. Le souci de réduire cette durée est donc primordial, et c'est la rapidité de travail que possèdent communément les machines que l'on est d'abord conduit à demander aux machines à calculer; il est clair, d'ailleurs, que c'est des mécanismes calculateurs eux-mêmes que dépend cette rapidité, qui se trouve ainsi étroitement liée à la manière dont s'exécutent les calculs. Mais on sait aussi que, en réalité, le calculateur le plus rapide est moins celui qui calcule le plus vite que celui qui commet le moins d'erreurs. La sécurité des calculs est donc aussi importante que leur rapidité d'exécution. Dans l'analyse que nous nous proposons de faire, et dont la conclusion pourra s'exprimer par les formules fonctionnelles de machines capables de répondre aux besoins de la Mécanique céleste, nous nous placerons successivement à ces deux points de vue.

A. — ÉTUDE DE LA RAPIDITÉ.

42. On sait, d'une part, que par un changement d'unités approprié on peut toujours faire en sorte que la mesure *expérimentale* d'une grandeur — nous entendons par-là le nombre obtenu à la suite d'un ensemble d'opérations de mesure — soit un nombre

entier, et, d'autre part, que pour toutes les grandeurs définies dans l'Astronomie l'erreur relative la plus faible que l'on soit parvenu à atteindre dans la mesure de chacune de ces grandeurs est toujours sensiblement la même : la mesure d'une grandeur peut donc être considérée comme un entier connu avec une marge relative [1] inférieure à une limite constante ρ. Quant aux nombres abstraits, il est rationnel de limiter le nombre des chiffres de leur représentation de telle manière que ces nombres aient sensiblement la même marge relative que les mesures de grandeurs. Les nombres de la Mécanique céleste peuvent donc être considérés comme des entiers dont le nombre de chiffres est inférieur à une limite qui est sensiblement la même quelles que soient la nature et l'origine de ces nombres.

Il résulte également de la théorie des erreurs qu'il est sans intérêt de conserver, dans un calcul, tous les chiffres significatifs des données dont la marge relative est beaucoup plus faible que celle des autres données : les nombres qui interviennent dans un même système de relations ont donc sensiblement le même nombre de chiffres.

Enfin, ainsi que nous l'avons fait remarquer au précédent numéro, dans presque tous les calculs de la Mécanique céleste, et au moins dans les plus précis, qui, du point de vue de la technique du calcul numérique lui-même, sont aussi les plus difficiles, les marges relatives sont aussi voisines que possible de leur minimum. Par conséquent, si un chiffreur a une capacité appropriée à la représentation numérique du résultat des opérations de mesure les plus précises que l'on sache effectuer, non seulement il aura une capacité suffisante pour marquer le résultat d'opérations de mesure moins précises, ce qui est aisé à voir, mais encore cette capacité ne sera pas très grande par rapport à celle qui serait le mieux appropriée à ce dernier résultat : ce chiffreur présentera donc sensiblement les mêmes avantages dans les deux cas. Par suite, dans un ensemble quelconque de calculs, on est assuré, par

---

[1] Pour abréger, nous adopterons la terminologie proposée par M. Meinrath (*Bull. de l'Assoc. des Prof. de Math.*, n° 52, p. 32) et nous appellerons *marge* (absolue ou relative) d'un nombre une limite supérieure de l'erreur (absolue ou relative) commise sur ce nombre.

un changement d'unités approprié, de pouvoir inscrire tous les nombres sur un même type de chiffreur, de manière également avantageuse. Ce chiffreur peut être caractérisé par une capacité lui permettant de marquer le résultat des opérations de mesure les plus précises que l'on sache effectuer; nous l'appellerons le chiffreur *normal*. Les moyens actuels de la science conduisent à prendre pour chiffreur normal un chiffreur décimal de capacité 15.

La représentation des nombres de la Mécanique céleste peut donc se faire mécaniquement de façon simple et commode.

43. Étudions maintenant l'exécution des calculs eux-mêmes.

Nous avons vu que les machines à calculer peuvent effectuer les quatre opérations fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division des entiers. Or, ces opérations sont aussi les seules que tout calculateur sache effectuer sans aucun secours matériel (tables numériques ou graphiques, instruments, etc.), mais seulement au moyen d'éléments : règles d'opérations ou résultats numériques simples, qu'il puisse conserver dans sa mémoire sans être doué de facultés spéciales et anormales. Nous pourrons donc admettre, dans une première analyse, que l'on peut substituer une machine au calculateur pour effectuer les opérations fondamentales.

Le problème qui se pose dès lors est la recherche des méthodes au moyen desquelles tous les calculs peuvent se ramener à ces opérations, c'est-à-dire, suivant la terminologie que nous avons proposée, à des complexes arithmétiques (19); nous appellerons *arithmétisation* d'un ensemble de relations toute méthode permettant de remplacer les fonctions qui figurent dans cet ensemble par des complexes arithmétiques. Cet énoncé nous suffira provisoirement; nous le préciserons bientôt.

44. On peut calculer, sans aucun secours matériel, par application de règles d'opérations relativement simples, la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre, c'est-à-dire, si A désigne ce nombre : $A^{\frac{1}{2}}$ et $A^{\frac{1}{3}}$. L'itération de ces opérations permet de calculer $A^{\frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{3^\beta}}$, α et β étant entiers. Un tel nombre peut être choisi pour valeur de l'une des variables dont dépend une fraction rationnelle arbitraire, fonction dont la valeur numérique peut être calculée au moyen des opérations arithmétiques élémentaires; il en est de même, par conséquent, d'une puissance d'exposant $\frac{1}{2^\alpha 3^\beta}$ de cette fonction. Enfin, comme A peut être lui-même le résultat de la chaîne d'opérations précédente, on peut dire : le complexe le plus complet que l'on puisse effectuer sans aucun secours matériel est une puissance d'exposant $\frac{1}{2^\alpha 3^\beta}$ (α et β étant entiers) d'une fraction rationnelle dont les variables sont des puissances, d'exposant $\frac{1}{2^{\alpha'} 3^{\beta'}}$ (α' et β' étant entiers), soit des données, soit des résultats d'autres complexes du même type. Nous appellerons ce complexe le *complexe maximum*.

Une fonction autre qu'un complexe maximum étant donnée, il n'existe pas de complexe maximum prenant la même valeur que cette fonction pour toutes les valeurs des variables. Remplacer une fonction f par un complexe arithmétique C n'est donc possible, rigoureusement, que pour un nombre limité ou, au plus, pour une infinité dénombrable de valeurs des variables. Mais, tenant compte que les nombres de la Mécanique céleste sont toujours des valeurs approchées, nous poserons le problème de l'arithmétisation d'une fonction sous son véritable jour si nous demandons de remplacer la fonction f par un complexe arithmétique C, dont la valeur, pour un système de valeurs des données, diffère de la valeur de la fonction f pour ce même système de valeur des données, d'un nombre inférieur en module à une certaine limite μ. Nous appellerons ce problème le problème de l'*approximation arithmétique*, le complexe C *complexe approchant la fonction f*, le nombre μ *marge d'approximation* de la fonction f par le complexe C pour le système de valeurs des données considéré.

45. Nous n'envisagerons pas, pour le moment, l'étude mathématique de ce problème, nous bornant à rappeler qu'il a reçu une solution dans des cas très nombreux où la fonction f présente certaines propriétés de continuité ; parmi les plus importants, figurent les approximations par polynomes, par séries entières ou par séries de polynomes.

Dans ces derniers cas, l'approximation possède une propriété qui, généralisée, peut s'énoncer comme suit : pour une fonction f et une marge d'approximation μ données, il peut exister un domaine D d'un hyperespace dont la nature dépend de la structure de la fonction f, et un complexe d'approximation C tels que l'on puisse effectuer une subdivision Σ du domaine D en domaines δ_i qui le remplissent sans lacune ni superposition, de manière que la différence entre la valeur de la fonction f pour un point quelconque d'un domaine quelconque δ_i et la valeur du complexe C pour un autre point, également quelconque, de ce même domaine δ_i, soit inférieure au nombre μ.

S'il suffit, d'après la nature des phénomènes physiques représentés par la fonction f, de connaître la valeur de f avec une marge μ, la valeur de cette fonction pour un point quelconque de l'un des domaines δ_i peut être remplacée par la valeur du complexe C pour un point M_i choisi à l'avance dans le domaine δ_i.

Si l'on établit alors une correspondance graphique Γ entre une représentation des domaines δ_i, ordonnés d'une manière qui permette de retrouver aisément l'un de ces domaines, et une représentation des valeurs C_i du complexe C pour les points M_i, le calcul de la valeur $f(M)$ de la fonction f pour un point quelconque M du domaine D se réduit à chercher le domaine δ_i dans lequel se trouve le point M, et à lire en correspondance avec ce domaine le nombre C_i. Nous appellerons *représentation documentaire* de la fonction f l'ensemble de la représentation des domaines δ_i, de la représentation des nombres C_i et de la correspondance Γ. Parmi les représentations documentaires courantes citons, à titre d'exemple : les tables numériques, les nomogrammes, les instruments nomomécaniques.

Il est clair que le calcul de la valeur numérique d'une fonction est presque toujours beaucoup plus rapide au moyen d'une représentation documentaire que d'un complexe d'approximation. Mais l'établissement d'une représentation documentaire d'une fonction donnée exige le calcul d'un nombre considérable de valeurs particulières de cette fonction, nombre d'autant plus considérable que la marge d'approximation est plus faible. On ne peut donc, du point de vue de la pratique des calculs, envisager une représentation documentaire que pour les fonctions dont le calcul se présente assez souvent pour justifier, par l'économie de temps et d'efforts qu'apporte l'emploi de cette représentation, le travail exigé par l'établissement de cette dernière. Cette remarque conduit à mettre à part, dans l'ensemble des fonctions arithmétisables, celles qui sont fréquemment les composantes d'autres fonctions, et qu'il est par suite avantageux de représenter par un document : nous les appellerons *fonctions élémentaires*.

La notion de fonction élémentaire est nécessairement relative.

D'une part, une fonction déterminée peut intervenir très fréquemment dans les calculs d'une partie de la Mécanique céleste, et guère ou même nullement dans les calculs d'une autre partie de cette science : il apparaît donc, *a priori*, que chaque calculateur est conduit à faire choix, parmi les fonctions dont il est appelé à effectuer le calcul, de celles qu'il considérera comme élémentaires et qu'il cherchera, par suite, à introduire le plus souvent possible dans la composition des fonctions dont la structure est imposée par la nature des phénomènes dont elles expriment la loi. Cette remarque fait ressortir l'intérêt d'une étude systématique des calculs de la Mécanique céleste en vue de réduire au minimum indispensable le nombre des fonctions élémentaires.

D'autre part, une fonction peut souvent être approchée par plusieurs complexes n'ayant pas pour arguments le même groupe de fonctions; le choix du complexe d'approximation et des fonctions que l'on considère comme élémentaires dépend nécessairement de la durée du calcul de ce complexe, étant admis que, dans ce calcul, les fonctions élémentaires choisies sont représentées par un document; il dépend aussi, dans le cas où ces fonctions n'interviennent pas dans d'autres calculs, de la durée d'établissement de leur représentation documentaire.

La recherche d'une réduction du nombre des fonctions élémentaires ne peut donc être abordée in abstracto, *et être séparée de l'étude des moyens employés pour effectuer le calcul des complexes arithmétiques dont les fonctions élémentaires conservées seraient des arguments.*

Comme, enfin, la notion de fonction élémentaire ne peut se rapporter qu'à un ensemble nombreux de calculs, l'analyse que nous venons de faire relativement au type de calculs le plus simple, le calcul d'une fonction, a suffi à faire apparaître cet important résultat que *la comparaison, du point de vue de la rapidité, de plusieurs méthodes ou procédés de calcul ne peut avoir de sens que si ces méthodes ou procédés s'appliquent à un ensemble nombreux d'opérations mathématiques, et non à une seule opération ou un groupe minime d'opérations de cet ensemble.*

Un exemple précis illustrera l'application de cette proposition. Parmi les complexes arithmétiques approchant les fonctions qui se présentent dans la Mécanique céleste, les polynômes sont de beaucoup les plus fréquents; ils proviennent en général d'une interpolation polynomiale, ou d'une série entière ou trigonométrique.

Or, dans un polynome, le nombre des multiplications est très supérieur au nombre des additions et, de plus, ces dernières opérations sont beaucoup plus faciles que les premières : tout procédé de calcul apportant une simplification notable de la multiplication doit donc, *a priori*, être présumé avantageux. Les logarithmes constituent l'un de ces procédés; les machines à multiplier en constituent un autre.

Si l'on compare le calcul du produit de deux nombres par ces deux procédés, une machine à multiplier automatique est beaucoup plus rapide qu'une table de logarithmes dès que le nombre des chiffres des facteurs est supérieur à 4 — ce qui est fréquent dans les calculs de la Mécanique céleste — car les calculs d'interpolation sont alors assez longs; de plus, la machine à multiplier supprime presque entièrement l'effort du calculateur.

Mais le calcul logarithmique reprend l'avantage sur la machine à multiplier, même automatique, dès que l'on compare l'application de ces deux procédés au calcul d'un monome de plus de quatre facteurs : en effet, si l'on opère avec une machine, chacun des produits successifs doit être reporté sur le clavier du multiplicande, avec un décalage convenable par rapport au viseur sur lequel il est lu, pour éviter que les chiffres représentant la partie utile du produit ne sortent des chiffreurs par suite du déplacement de la virgule; un nouveau facteur doit ensuite être inscrit sur un autre clavier, puis la machine mise en marche. Un tel ensemble de manœuvres demande un effort intellectuel presque ininterrompu, de telle sorte que l'on ne peut plus dire que la machine réduise considérablement l'effort du calculateur au cours de l'exécution du calcul; seulement ce dernier est accéléré. Si l'on opère à l'aide des logarithmes, l'effort du calculateur est encore ininterrompu, mais comme il consiste, de même qu'avec une machine, en lecture et recopiage de nombres, il reste comparable au précédent, et la durée du calcul peut être nettement plus brève parce que l'addition des logarithmes de tous les facteurs ramène à une opération unique et très rapide la succession de multiplications que comporte le calcul d'un monome, d'après sa définition.

Si l'on compare enfin l'exécution mécanique et l'exécution logarithmique de l'ensemble de calculs relatifs à un problème entier, par exemple la détermination d'une orbite képlérienne par trois observations, le calcul logarithmique est de beaucoup le plus avantageux du fait que les logarithmes d'addition permettent de calculer un polynome en prenant comme données les logarithmes des nombres, et sans calcul d'antilogarithmes.

Il n'est donc pas possible de conserver l'hypothèse faite au début de cette analyse : substituer une machine à un calculateur pour l'exécution des opérations fondamentales. *C'est dans l'exécution d'un complexe arithmétique qu'il faut imposer à la machine de pouvoir se substituer au calculateur, de telle manière qu'elle joue le même rôle que ce dernier par rapport au calcul à effectuer.*

46. Le calcul de la valeur numérique d'une fonction, que nous avons seul examiné jusqu'à présent, est fondamental dans tous les calculs numériques. Le calcul d'une intégrale définie s'y ramène immédiatement, tant par la méthode des primitives que par les diverses méthodes substituant à l'intégrale une somme d'un nombre fini de termes. Toutes les déterminations de nombres ou résolutions de problèmes par la méthode des approximations successives s'y ramènent aussi. Mais cette dernière méthode fait intervenir une opération arithmétique particulière, tellement simple, en calcul manuel, que sa présence paraît être restée inaperçue, bien qu'elle se reproduise si fréquemment qu'elle doive être considérée, dans la pratique des calculs, comme aussi fondamentale que le calcul d'une fonction : c'est la *comparaison* de deux nombres. La

fréquence du signe d'inégalité dans la théorie des calculs approchés et des approximations successives est déjà l'indice de celle de l'opération comparaison; mais cette dernière doit être effectuée aussi dans nombre de cas où elle n'est pas symbolisée : comparaison à zéro du résultat d'une substitution, comparaison d'un nombre à des nombres ronds voisins, comparaison de la marge des valeurs approchées successives d'un nombre à la marge imposée à ce nombre, etc. La comparaison de deux nombres est aussi le fondement des règles de la division des entiers et de l'extraction arithmétique des racines carrée et cubique de sentiers.

Dans tous les calculs où la comparaison de deux nombres est une opération nécessaire, cette opération a pour but de déterminer, dans un ensemble de résultats possibles, celui qui doit être retenu. Nous sommes donc conduit à établir une classification nouvelle des complexes résultant de l'arithmétisation des calculs; nous appellerons :

complexe progressif, un complexe d'opérations tel que les résultats de toutes les chaînes du complexe sont les données de complexes partiels ou de la chaîne terminale du complexe;

complexe sélectif, un complexe tel que les résultats de certaines chaînes seulement sont les données de complexes partiels ou de la chaîne terminale du complexe.

Il est donc rationnel, *a priori*, de considérer comme un progrès la substitution d'un complexe progressif à un complexe sélectif, pour l'exécution d'un calcul donné. Mais l'impossibilité d'obtenir la plupart des résultats autrement que par approximations successives donne aux complexes sélectifs une place prépondérante dans l'ensemble des calculs de la Mécanique céleste. Il suffit, pour apprécier cette prépondérance, de remarquer que le complexe progressif le plus complet est un polynome, c'est-à-dire la plus simple de toutes les fonctions, et que l'emploi d'une représentation documentaire pour le calcul d'une fonction, c'est-à-dire la manière la plus simple d'effectuer ce calcul, est une opération sélective.

47. L'analyse des calculs de la Mécanique céleste, *du point de vue de leur rapidité d'exécution*, nous conduit donc à cette première conclusion :

d'une part, la comparaison entre la machine et l'homme n'est rationnelle que si elle est faite au sujet d'un ensemble nombreux de calculs;

d'autre part, ces calculs sont constitués par des complexes dont les complexes composants sont surtout des complexes sélectifs.

Si l'on veut substituer une machine à un calculateur, de telle manière qu'elle joue le même rôle que ce dernier par rapport au calcul à effectuer, il faut donc imposer à cette machine les deux conditions suivantes :

1° pouvoir effectuer toutes les opérations d'un complexe quelconque après inscription des données, et sans autre intervention du calculateur;

2° pouvoir effectuer la comparaison de deux nombres.

48. La seconde condition est satisfaite si la machine possède une fonction mécanique particulière, définie par cette condition même, et que nous appellerons la *comparaison;* l'organe correspondant portera le nom de *comparateur*.

49. D'après les définitions que nous avons déjà données (Chap. II), une machine remplira la première condition si :

a. elle peut effectuer le transfert d'un nombre d'un chiffreur quelconque à un autre chiffreur également quelconque;

b. elle peut effectuer sans intervention du calculateur la suite d'opérations dans lesquelles sont engagés les données et les résultats intermédiaires;

c. elle possède suffisamment de chiffreurs de réserve pour pouvoir conserver, jusqu'au moment du calcul de la chaîne terminale du complexe, les résultats de toutes les chaînes ou de tous les complexes composants.

La condition *a* est satisfaite si la machine possède la fonction transfert pour chacun des couples de chiffreurs qu'elle comporte; la condition *b* est satisfaite si la machine possède la fonction commande documentaire, tout au moins pour les opérations entre résultats intermédiaires. L'ensemble de ces fonctions constitue une fonction mécanique plus générale que nous appellerons la fonction *enchaînement*.

La condition c ne peut être vérifiée par une machine déterminée pour un complexe absolument quelconque, car, si N représente le nombre des chiffreurs de réserve, on peut toujours construire un complexe exigeant la mise en réserve de $N+1$ nombres, et que, par suite, la machine ne pourra pas calculer : il suffit pour cela que chacune des chaînes composantes de ce complexe ait pour données un même ensemble de $N+1$ nombres.

Une propriété d'importance capitale d'une machine à calculer destinée aux calculs savants est donc le nombre de ses chiffreurs de réserve. Nous l'appellerons la *complexité* de la machine.

Mais ce nombre ne suffit pas à caractériser le complexe le plus général qu'une machine donnée puisse effectuer, car il dépend non seulement de ce complexe mais aussi du nombre et de la nature des résultats intermédiaires que l'on désire connaître; il suffit pour s'en convaincre de remarquer que l'expression $S=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ ne peut être calculée avec lecture des produits $a_i b_i$ que par une machine à multiplier possédant un chiffreur sur lequel la somme $S_p=\sum_{i=1}^{p} a_i b_i$ est mise en réserve pendant le calcul de $a_{p+1} b_{p+1}$.

Or, en général, dans un ensemble de calculs où les mêmes données conduisent à plusieurs résultats également importants, par exemple dans la résolution d'un système d'équations à plusieurs inconnues, ces divers résultats ne sont pas obtenus simultanément, certains d'entre eux étant fonctions des autres; ces derniers jouent alors le rôle de résultats intermédiaires par rapport aux premiers : la machine doit donc pouvoir fournir certains résultats intermédiaires. Comme l'on ne peut pas fixer *a priori* quelle place occuperont ces résultats dans les divers complexes que la machine pourra être appelée à calculer. et, par suite, quels chiffreurs les marqueront, il faut que soit possible la lecture ou l'impression du nombre marqué par n'importe quel chiffreur : on peut connaître dès lors tous les résultats intermédiaires.

Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que la machine possède la fonction lecture ou impression *générale*. Nous imposerons cette fonction à la machine dont nous cherchons une formule fonctionnelle.

Pour mettre en évidence les relations entre la complexité d'une machine et les formules dont elle peut calculer la valeur numérique, nous donnerons quelques exemples de complexes correspondant aux complexités successives, en supposant que l'impression générale est réalisée (1).

Complexité 0 : $\frac{\Sigma a}{b}$, $\frac{ab}{c}$.

Complexité 1 : $\frac{\Sigma ab}{c}$, $a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$.

Complexité 2 : $\Sigma a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, $\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_p}$.

Complexité 3 : complexe maximum.

Le tableau précédent met nettement en évidence qu'une machine de complexité relativement faible est néanmoins capable de calculer des formules algébriques compliquées, et que, par suite, la construction d'une machine remplissant les conditions du paragraphe 45, dernier alinéa, reste dans les moyens actuels de la technique (2).

B. — ÉTUDE DE LA SÉCURITÉ.

50. La considération de la rapidité d'exécution des calculs nous a suffi jusqu'à présent pour dégager certains caractères d'une machine propre à l'exécution des calculs de la Mécanique céleste. Mais nous avons vu (41) que la *sécurité* d'exécution des calculs ne lui est pas moins nécessaire : étudions maintenant à quelles

(1) Nous supposons également que la machine possède la fonction enchaînement.

(2) Notons dès maintenant, à titre d'indication. que la machine décrite au chapitre V, section A, est de complexité 8, et que la machine décrite au même chapitre, section B, est de complexité illimitée (*Voir* chapitre VI, section C).

conditions cette fonction sera remplie. La définition de ses composantes résultera de l'étude des erreurs de calcul qui sont possibles en Calcul mécanique.

51. Dans un travail précédent [15], nous avons proposé une classification des erreurs qui peuvent se produire au cours de l'exécution mécanique d'un ensemble de calculs donné. Nous la prendrons pour base de l'analyse qui va suivre.

Nous avons appelé :

erreurs de données, les erreurs que peut commettre le calculateur en effectuant l'inscription des nombres donnés et la commande de la machine;

erreurs d'enchaînement, les erreurs qui peuvent se produire lorsque le calculateur doit lire certains résultats intermédiaires sur la machine et les inscrire ensuite sur un inscripteur, les erreurs risquant de se produire au cours de cette inscription et des commandes qui peuvent l'accompagner;

erreurs de résultat, les erreurs que peut commettre le calculateur en lisant les résultats sur des viseurs, puis en les recopiant.

52. Les erreurs de résultat sont complètement évitées par une machine imprimante, pourvu qu'aucun incident de fonctionnement de l'imprimeuse ne produise d'erreurs de calcul, erreurs que nous qualifierons de *mécaniques*. Nous imposerons donc à la machine envisagée la fonction *impression*.

53. Puisque cette machine doit posséder la fonction enchaînement, toutes les erreurs d'enchaînement seront supprimées, pourvu que la machine ait une puissance suffisante pour calculer le complexe donné, et sous réserve qu'il ne se produise pas d'erreurs mécaniques.

54. Les erreurs de données semblent pouvoir être évitées si l'inscription et la commande sont soit précontrôlées, soit documentaires.

Dans le cas du précontrôle, le calculateur a la faculté de s'assurer que ses manœuvres d'inscription ou de commande sont correctes avant de les rendre effectives. Mais il est bien connu que si, ayant inscrit un nombre, on le relit aussitôt, on le relit fréquemment tel qu'on avait l'intention de l'inscrire et non tel qu'on l'a effectivement inscrit : l'inscription précontrôlée ne suffit pas à éviter *toutes* les erreurs de données.

L'inscription et la commande documentaires ne laissent subsister que des erreurs dues au fonctionnement des organes d'inscription ou de commande, c'est-à-dire des erreurs mécaniques; mais, pour l'établissement du document, le calculateur lui-même a dû effectuer, en général sur une autre machine, des opérations d'inscription et de commande dont la meilleure garantie d'exactitude est le précontrôle.

Il n'est donc pas possible d'affirmer que les résultats fournis par une machine à calculer sont toujours exacts, bien que, surtout dans le cas où la machine possède inscription et commande documentaires, l'on soit assuré que les erreurs sont très peu nombreuses.

Par suite, les problèmes suivants restent posés :

1° éviter les erreurs par avance;
2° sinon, les déceler après que les calculs ont été terminés;
3° les corriger.

A. Nous appellerons *contrôle lointain* toute méthode résolvant le second problème.

S'il est possible d'engager les mêmes données dans de nouveaux calculs dont les résultats présentent avec les résultats du premier une relation connue, la non-vérification de cette relation sera l'indice d'une erreur dans l'un au moins des deux calculs : nous appellerons ce mode de contrôle un *contrôle mathématique*. Si un tel contrôle n'est pas possible, on est contraint de faire au moins deux fois les mêmes calculs et de comparer les résultats obtenus : nous appellerons ce mode de contrôle *contrôle par répétition*.

Le contrôle mathématique est particulièrement avantageux lorsque le second calcul présente un intérêt par lui-même et ne sert pas seulement à contrôler le premier; nous dirons alors que le calcul considéré admet un *contrôle mathématique utile*.

Lorsqu'il n'en est pas ainsi — et nous dirons alors que le calcul admet seulement un *contrôle mathématique parasite* — le contrôle mathématique reste néanmoins plus avantageux que le contrôle par répétition : le premier, en effet, engage les mêmes nombres dans deux suites d'opérations différentes, tandis que le second les engage dans deux suites d'opérations identiques : dans ce dernier cas, les mêmes organes étant actionnés dans le même ordre, les mêmes erreurs risquent de se reproduire.

Le véritable avantage du contrôle mathématique est donc de faire travailler la machine différemment dans les deux calculs que l'on compare. Les résultats du premier calcul peuvent dès lors être considérés comme les instruments de contrôle du fonctionnement de la machine au cours du second calcul, le premier calcul ne servant qu'à préparer ces instruments de contrôle.

Mais comme l'on peut admettre, par suite de la rareté des erreurs mécaniques, que si une machine est en bon état de fonctionnement au début et à la fin d'une période de travail elle a fonctionné correctement pendant toute cette période, pourvu que cette dernière soit assez courte, l'on peut borner le contrôle du fonctionnement de la machine à faire exécuter par celle-ci, au début et à la fin de chaque période de travail, un calcul dont le résultat soit connu d'avance; ce calcul peut même être aménagé de manière à faire fonctionner tous les organes de la machine dans les conditions les plus défavorables, et fournir ainsi un contrôle complet et sévère de ce fonctionnement. Il est donc possible, soit de prévenir les erreurs mécaniques, soit de les déceler après exécution des calculs, au moyen d'un calcul périodique de contrôle que nous appellerons *contrôle périodique*. Comme une machine possédant l'inscription et la commande documentaires ne peut commettre que des erreurs mécaniques, le contrôle périodique suffit presque toujours à assurer l'exactitude des calculs effectués par une telle machine, et, dans les autres cas, très exceptionnels, il décèle la possibilité d'erreurs.

Une machine possédant, outre les fonctions déjà énoncées dans ce chapitre, *l'inscription et la commande documentaires*, *se révèle donc comme très supérieure au calculateur*, puisqu'elle peut éviter la double exécution de tous les calculs qui n'admettent pas de contrôle mathématique utile; or, un examen rapide, et que d'ailleurs nous ne détaillerons pas, montre que presque tous les calculs de la Mécanique céleste n'admettent pas ce contrôle. Nous ferons par suite comporter à la machine dont nous cherchons une formule fonctionnelle l'impression et la commande documentaires.

B. Nous avons supposé, dans le paragraphe précédent (54, A), que les documents d'inscription et de commande étaient exempts d'erreurs ; le contrôle de leur exécution est donc particulièrement important. Il l'est d'autant plus que les opérations portées sur un même document sont plus nombreuses. Il l'est aussi parce que ces documents, pour pouvoir agir mécaniquement, doivent en général être imprimés par changement de la forme de leur support et que, par suite, les corrections d'erreurs d'impression commises sont d'exécution difficile ou coûteuse. Il faut donc considérer comme très important de parvenir à éviter ces erreurs, c'est-à-dire de renforcer le précontrôle au point qu'il ne laisse possibles que les erreurs mécaniques de l'organe d'inscription, erreurs que l'on peut déceler, comme précédemment, par des contrôles périodiques, dès l'instant qu'elles restent les seules possibles.

Nous appellerons un tel précontrôle *précontrôle parfait;* la réalisation de cette fonction nous paraît la meilleure solution que l'on puisse apporter au premier problème. Nous considérerons cette fonction comme nécessaire à la machine projetée, ou du moins à la partie de cette machine qui effectue l'impression des documents d'inscription et de commande.

C. Quant à la correction des erreurs de calcul, elle est grandement simplifiée par les fonctions dont nous avons déjà admis la nécessité. En effet, les erreurs étant très rares, et étant localisées par le contrôle périodique dans des groupes de calculs précis, il suffit, pour assurer l'exactitude de ces calculs, de les recommencer après avoir remis la machine en ordre de marche. Au surplus, l'impression de tous les résultats partiels permettra de trouver aisément les nombres erronés, si on le juge utile.

C. — ÉTUDE DE QUELQUES QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES.

55. Au cours de ce chapitre, nous avons laissé toute leur généralité aux nombres qui interviennent dans les formules mathématiques soumises au calculateur, c'est-à-dire que nous avons implicitement supposé que ces nombres sont positifs, négatifs ou nuls.

La fonction somme algébrique, déjà définie au numéro 26, permet à une machine de tenir compte automatiquement des signes des termes d'une somme dans un complexe dont les opérations élémentaires sont des additions et des soustractions. Mais une machine qui doit pouvoir faire la multiplication et la division et posséder la fonction enchaînement doit aussi pouvoir tenir compte des signes des facteurs. Nous appellerons *calcul des signes* la fonction qui consiste, pour une machine à calculer, à pouvoir déterminer le signe d'un nombre, quel que soit le complexe arithmétique dont il est le résultat. La machine à calculer dont nous cherchons une formule fonctionnelle doit posséder cette fonction.

56. Pour terminer cette analyse, un point reste encore à examiner. Nous avons déjà remarqué que le calcul de la valeur numérique d'une fonction, fondement de tout calcul numérique, devait pratiquement être remplacé par le calcul d'un complexe arithmétique, mais que, pour les fonctions élémentaires, le calcul de ce complexe pouvait lui-même être remplacé par une représentation documentaire. La machine que nous envisageons calculera-t-elle une fonction élémentaire par son complexe ou par sa représentation documentaire ?

Dans le premier cas, les fonctions mécaniques déjà prévues suffisent au calcul d'une fonction élémentaire, mais deux inconvénients apparaissent :

a. calculer, par exemple, le nombre $\cos x$ par son développement en série (ou tout complexe arithmétique équivalent) chaque fois qu'il revient dans les calculs nuirait considérablement à la rapidité de la machine, tant ce nombre est fréquent;

b. une fonction *f* ne pouvant pas, en général, être approchée par le même complexe arithmétique dans tout son domaine d'existence, il serait nécessaire, pour que la machine conserve la fonction enchaînement, qu'elle puisse, lorsque des résultats partiels seraient les arguments d'une fonction telle que *f*, déterminer automatiquement le complexe d'approximation de la fonction correspondant à ces valeurs des arguments.

Le premier inconvénient ne semble pas tout d'abord évitable. Le second disparaît si la machine conserve, sous forme de documents de commande, les complexes d'approximation des fonctions élémentaires. puisque, grâce à la fonction comparaison, elle peut choisir le complexe approprié aux valeurs des arguments. Mais il est aussi simple que la machine conserve, sous forme de document, une table de ces fonctions élémentaires au lieu de leurs complexes d'approximation, et, dans ce cas, l'inconvénient *a* disparaît, puisque le calcul de la fonction se réduit à la lecture de la table de cette fonction.

Nous ferons donc comporter à la machine des représentations documentaires des fonctions élémentaires, que nous appellerons des *tables mécaniques*.

57. Le travail et le coût d'établissement de ces tables confère alors une importance très grande au problème, déjà rencontré (45), de la réduction du nombre des fonctions élémentaires, et, comme la solution de ce problème dépend, ainsi que nous l'avons montré, des méthodes et instruments de calcul que l'on se propose de mettre en œuvre, la réalisation des calculs de la Mécanique céleste au moyen de machines à calculer exige non seulement de construire une machine possédant les fonctions et qualités que nous avons définies au cours de ce chapitre, mais encore *de transformer les formules de résolution des problèmes étudiés par cette science, en vue de leur exécution mécanique*. Remarquons d'ailleurs que ce problème est de même nature que celui qui s'est posé après que Neper eut inventé les logarithmes; de même que, depuis lors, la résolution des problèmes de la Mécanique céleste est dirigée vers l'emploi du calcul logarithmique, au point que les nombres y sont très généralement donnés par leur logarithme et non par leur valeur propre, de même, l'adoption du Calcul mécanique comme moyen de calcul fondamental conduirait les Astronomes à diriger désormais la résolution des problèmes de la Mécanique céleste vers l'emploi de machines à calculer.

Une telle modification dans l'esprit des calculs de cette science serait assurément profonde : elle serait néanmoins pleinement justifiée s'il était établi que des machines à calculer peuvent être construites, qui accroissent considérablement la rapidité ou la sécurité de ces calculs.

Nous pensons avoir montré, au cours de ce chapitre, qu'une machine remplirait ces conditions si elle possédait les fonctions suivantes :

Multiplication, division, calcul des signes.
Enchaînement.
Comparaison.
Impression générale.
Inscription et commande documentaires.
Tables mécaniques.
Précontrôle parfait de la préparation des documents d'impression et de commande.

Nous décrirons, dans le chapitre suivant, les dispositifs essentiels des deux types de machines que nous avons été conduit à imaginer successivement, en vue de réaliser les fonctions énumérées ci-dessus.

La machine du premier type paraît être la plus complète que l'on puisse construire, et non pas seulement concevoir, sur la base des mécanismes de calcul utilisés jusqu'à présent : chiffreurs à roues dentées, entraîneur, etc. Néanmoins, elle ne peut réaliser avec toute la généralité nécessaire à l'exécution des calculs de la Mécanique céleste les fonctions comparaison, tables mécaniques et précontrôle parfait. C'est pourquoi nous avons dû faire appel, par la suite, à des mécanismes dont le principe même diffère profondément de celui des machines actuelles, ces mécanismes utilisant, pour représenter les nombres qui interviennent dans les calculs, le système de numération binaire et non, comme il est d'usage, le système décimal. Mais le choix d'un nouveau système de numération a nécessité une fonction nouvelle : la traduction d'un nombre du système décimal (ou sexagésimal) dans le système binaire, et inversement.

La figure 3 représente la formule fonctionnelle d'une machine binaire possédant toutes les fonctions dont nous avons établi la nécessité (1). Le tableau ci-dessous précise le sens des symboles nouveaux qui se rencontrent dans cette figure :

Chiffreur de réserve : R,
Chiffreur commun : R_c.

Comparaison : Γ.
Comparaison des signes : σ.
Clavier décimal : *d*.
» binaire : ***b***.
» sexagésimal : ***s***.
Tables mécaniques : $\boldsymbol{\Theta}$.
Documentation permanente : δ_e.
Précontrôle parfait : φ.
Traduction : $\mathfrak{T}$.
» binaire-décimale : (*bd*).
» décimale-binaire : (*db*).
» sexagésimale-binaire : (*sb*).
» binaire-sexagésimale : (*bs*).

Cette formule met nettement en évidence que, dans la machine considérée, le transfert d'un nombre d'un chiffreur à un autre s'effectue, presque toujours, par l'intermédiaire du chiffreur R_c; on pourrait concevoir qu'il en soit autrement, et, par exemple, qu'un nombre puisse être transféré directement d'un chiffreur dans un autre, comme c'est le cas pour la machine dont la formule fonctionnelle est représentée figure 1, n° 3.

Ces remarques montrent que la formule fonctionnelle qui peut résumer les résultats de l'Analyse préfactive d'un travail donné n'est pas unique. La structure mécanique des dispositifs adoptés pour réaliser les fonctions que doit posséder la machine projetée peut influer sur les relations qui existent entre ces fonctions,

(1) Nous avons représenté sur la même figure, en bas, à droite, la formule fonctionnelle de la machine proposée par M. Comrie pour certains calculs de la Mécanique céleste [26].

et même, parfois, nécessiter des fonctions nouvelles. Les diverses formules fonctionnelles auxquelles conduit l'Analyse préfactive représentent donc un ensemble de conditions nécessaires que la machine doit remplir; l'étude de la réalisation matérielle de machines répondant à ces formules permet ensuite de préciser, parmi ces dernières, celle qui doit être retenue, ou qui, complétée, représentera un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour que la machine atteigne le but qui lui est assigné.

Ainsi, bien que l'Analyse préfactive ne suffise pas à déterminer tous les caractères d'une machine propre à exécuter un travail donné, elle permet de préciser les voies dans lesquelles doivent s'engager les recherches techniques, et hors desquelles aucun heureux résultat ne peut être escompté.

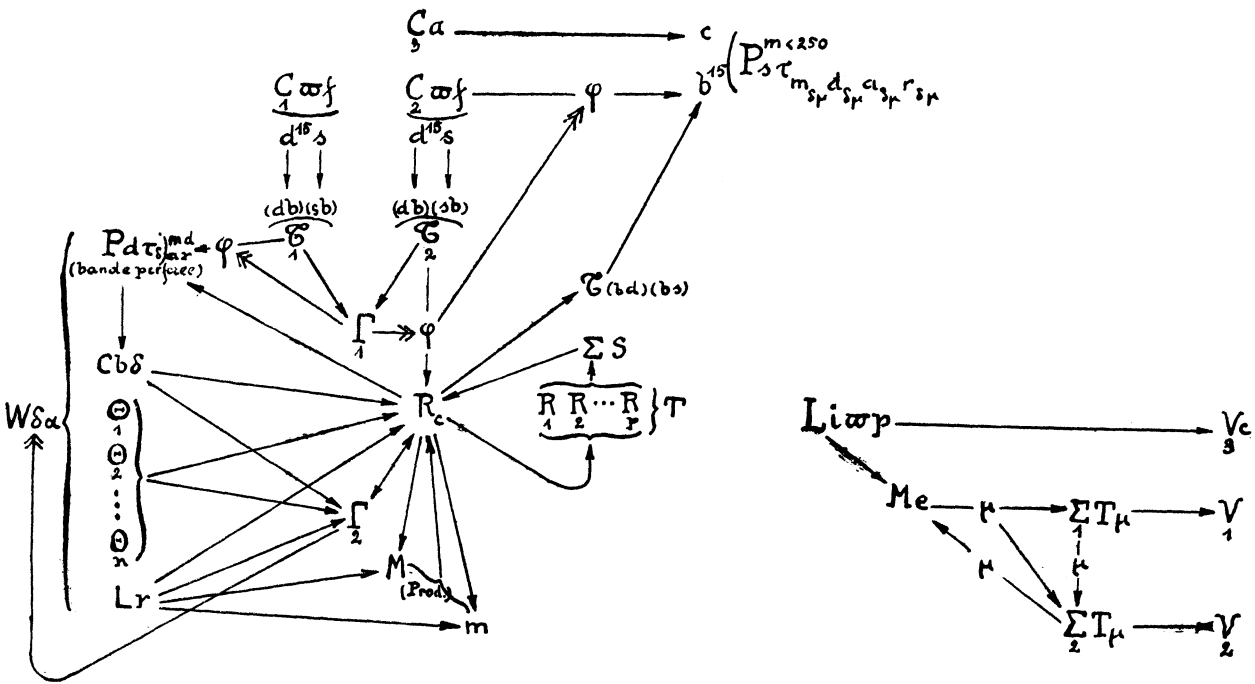


Fig. 3. — *Formule fonctionnelle d'une machine à calculer propre aux calculs de la Mécanique céleste.*

Deux claviers flexibles $\left(\underset{1}{\mathrm{C}}, \underset{2}{\mathrm{C}}\right)$ permettent l'inscription d'un même nombre, décimal ou sexagésimal (*d*, *s*), qui est aussitôt traduit dans le système binaire $\left(\underset{1}{\varpi}, \underset{2}{\varpi}\right)$; les nombres ainsi inscrits sont comparés $\left(\underset{1}{\Gamma}\right)$ et leur inscription sur le chiffreur commun (R_c), leur impression typographique (P*b*) et leur impression mécanographique (P*d*) ne s'effectuent que s'ils sont égaux; ainsi se réalise le précontrôle parfait (φ). Un clavier binaire documentaire (C*b* δ) (bande perforée), des tables mécaniques (Θ), en nombre variable, et un inscripteur rythmique (L*r*) peuvent également inscrire des nombres sur R_c. Ils peuvent aussi les inscrire sur un comparateur $\left(\underset{2}{\Gamma}\right)$, ainsi que R_c; le résultat de la comparaison peut agir sur la commande automatique (Wδ) de la machine (cette commande est également asservie pour laisser possible l'intervention du calculateur au cours des opérations). Les chiffreurs R_c et L*r* peuvent aussi inscrire des nombres sur les chiffreurs (M, *m*) de la multiplieuse, et le produit s'inscrit sur R_c. Enfin R_c peut transférer un nombre dans des chiffreurs de réserve (R), en nombre variable, et ces derniers peuvent transférer ce nombre dans un totalisateur faisant la soustraction (Σ), la somme s'inscrivant sur R_c. Le chiffreur commun R_c permet donc le transfert d'un nombre d'un organe calculateur quelconque à un autre organe calculateur, également quelconque. L'impression des résultats se fait sur P*d* ou P*b*, avec, pour ce dernier, traduction par ϖ. Un clavier alphabétique $\left(\underset{3}{\mathrm{C}}a\right)$ permet l'impression d'un *texte littéral*.

CHAPITRE V.

DESCRIPTION DE MACHINES PROPRES AUX CALCULS DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

58. Les machines à calculer les plus complètes parmi celles qui sont d'usage courant ont pour formules fonctionnelles les formules 3 de la figure 1, et 2 de la figure 2. Pour remplir les conditions dont nous avons montré la nécessité dans le chapitre précédent, il manque aux deux machines correspondant à ces formules les fonctions calcul des signes, inscription documentaire, enchaînement, tables numériques, et, en outre, à la première la fonction multiplication, à la seconde une complexité suffisante pour l'exécution des calculs de la Mécanique céleste.

A. — MACHINE DÉCIMALE.

59. Depuis 1929, nous avons étudié une machine à calculer, dont la forme la plus récente [17] peut être décrite très sommairement comme résultant de l'adjonction à une machine de formule analogue à la formule 3, fig. 1, des mécanismes nécessaires à la multiplication automatique et aux fonctions calcul des signes et enchaîne-

ment. Nous en décrirons les parties les plus caractéristiques pour mettre en évidence la nature des problèmes qu'elle a posés; les raisons pour lesquelles nous avons eu recours, par la suite, à des mécanismes de type essentiellement différent (65 et suivants) dans l'étude des machines destinées à des calculs plus complexes que les calculs comptables apparaîtront ainsi, pensons-nous, de façon nette.

60. La fonction *enchaînement* résulte de deux composantes : le transfert d'un nombre d'un chiffreur quelconque dans un autre chiffreur également quelconque et la commande documentaire (49).

A. La machine, dont la figure 4 donne une vue d'ensemble, comporte un chiffreur dans chacun des organes suivants :

inscripteur (clavier complet), dont une seule touche est représentée en 4;

bloc imprimant, représenté en 110;

entraîneur, représenté en 51;

distributeur du produit, représenté en 58 et 59;

totalisateur des produits, représenté en 431;

organes de réserve, constitués, en vue d'accélérer les calculs, par des totalisateurs, que nous appellerons, pour les distinguer du précédent, *totalisateurs de réserve*. Ces totalisateurs sont groupés par deux de part et d'autre d'un reporteur commun, représenté en 450; l'un des chiffreurs porte le n° 426, les autres sont homologues du précédent dans les ensembles d'organes identiques à l'ensemble des organes n^{os} 426, 503, 421, 431, 479.

B. Le transfert entre les totalisateurs de réserve, l'inscripteur et le bloc imprimant est assuré, dans chaque ordre décimal, par une barre, 505, qui peut recevoir une translation horizontale dans le plan de la figure; au cours de cette translation, la barre peut être reliée aux chiffreurs des totalisateurs de réserve par une denture; pour cette raison, nous l'appellerons une *crémaillère;* l'amplitude de sa translation est réglée par la valeur du chiffre marqué soit par une touche de l'inscripteur, soit par la roue de même ordre

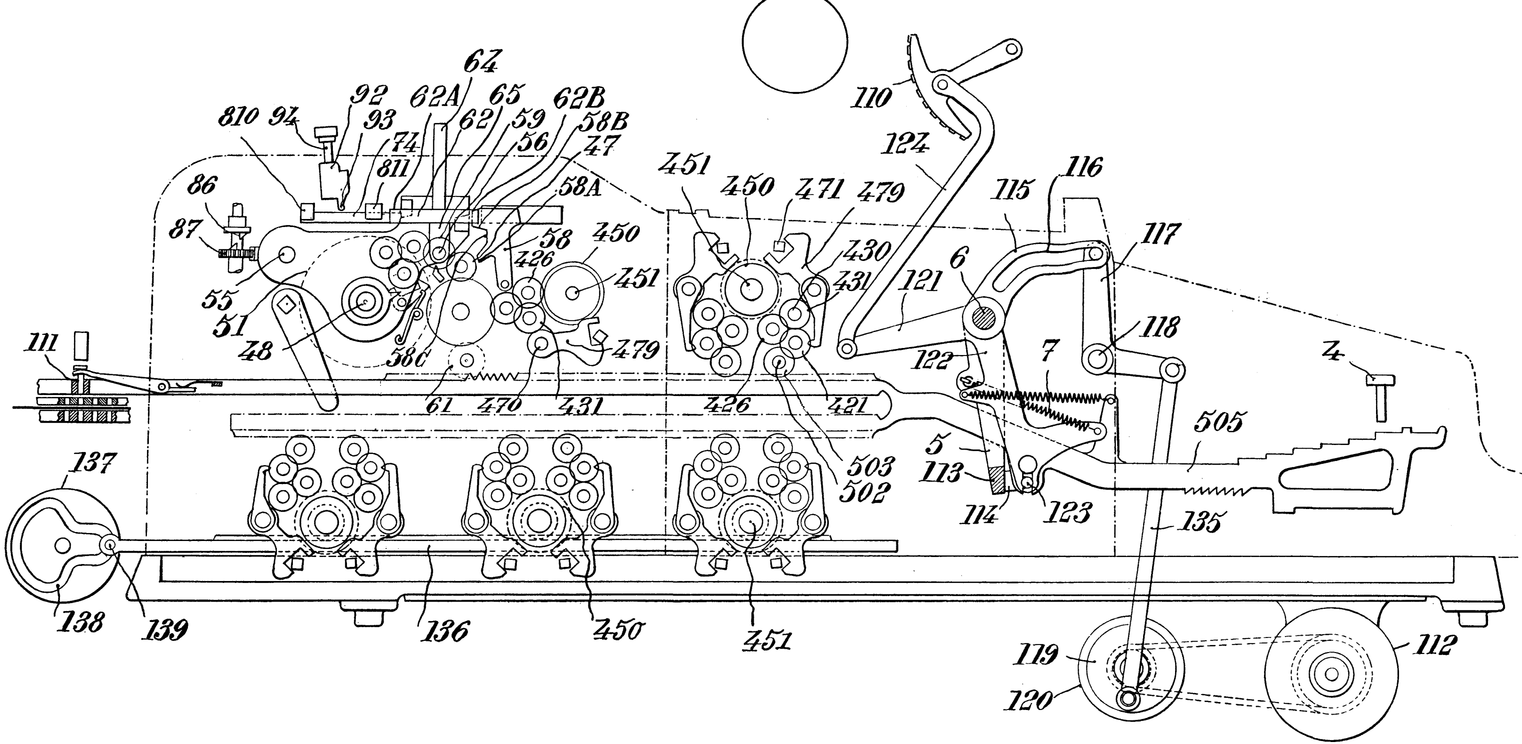


Fig. 4. — *Vue d'ensemble d'une réalisation de la machine décimale.*

Une multiplieuse automatique (comportant un entraîneur 48, un totaliseur réversible 426, 431, 450, un distributeur 47, 58, 62, un régulateur des virgules 64, 94) et huit chiffreurs de réserve 430, 431, 421, groupés deux par deux de part et d'autre d'un reporteur commun 450, 451, peuvent être mis en relation par une crémaillère 505 et des pignons baladeurs 61, 503, qui, conjointement à une chaîne à cames horizontale (non représentée), placée au niveau du socle de la machine, réalisent la fonction enchaînement. Les organes précédents sont ceux des fonctions opératives. Les fonctions relatives sont réalisées par : un clavier complet agissant sur la crémaillère et dont une seule touche 4 est représentée, une imprimeuse actionnée par la crémaillère et effectuant l'impression simple par bloc imprimant 110 et l'impression mécanographique par perforation de cartes 111, la chaîne à cames assurant la commande automatique de l'impression, enfin un clavier alphabétique (non représenté, et placé à droite et au-dessous du clavier complet).

décimal que la crémaillère appartenant à celui des chiffreurs dont le nombre est transféré dans d'autres chiffreurs ([1]). Les crémaillères constituent donc dans leur ensemble un véritable chiffreur. Elles sont mises en relation avec les roues d'un totalisateur de réserve déterminé, par les pignons 503 déplaçables en translation parallèlement à leur axe ([2]).

C. Le transfert entre l'entraîneur, le distributeur du produit, le totalisateur des produits et la crémaillère est assuré, dans chaque ordre décimal, par les roues 60 et 61 (*fig.* 4 et 5).

Nous avons donné à l'ensemble de ces roues le nom de *transcripteur* [17, 18]. Chacun des trains de roues 60 et 61 peut recevoir un déplacement de translation parallèle à son axe; le train 60 peut occuper trois positions A, C, E, et le train 61, deux positions; les différentes combinaisons des positions des éléments du transcripteur et des positions, fixes, du disque d'inscription des multiplicandes sur l'entraîneur 46^1, de la denture de transfert du multiplicande au totalisateur 49, du totalisateur 421, du distributeur du produit 47, et de la crémaillère 505 sont telles que l'on peut effectuer entre ces organes les liaisons suivantes :

a. crémaillère et disque 46^1, pour l'inscription ou l'effaçage du multiplicande;

b. crémaillère et distributeur, pour l'inscription du multiplicateur ou l'effaçage du quotient;

c. crémaillère et totalisateur, pour l'inscription d'un nombre (en particulier le dividende) ou l'effaçage d'un nombre (en particulier le produit);

d. denture 49 et totalisateur, pour l'addition de multiples du multiplicande ou la soustraction de multiples du diviseur;

e. totalisateur et disque 46^1, par exemple, pour faire jouer à un produit le rôle de multiplicande dans une nouvelle opération, ce

---

([1]) Suivant l'expression adoptée dans le langage technique, nous dirons que ce chiffreur est *vidé* au cours du transfert et, de même, qu'un chiffreur qui marque zéro est *vide*.

([2]) Les mécanismes d'inscription, d'impression et de transfert décrits dans cet alinéa sont inspirés de la machine d'Ellis, dont la crémaillère rectiligne se prête fort avantageusement à l'accroissement du nombre des chiffreurs de réserve et à la commande par chaîne à cames (61).

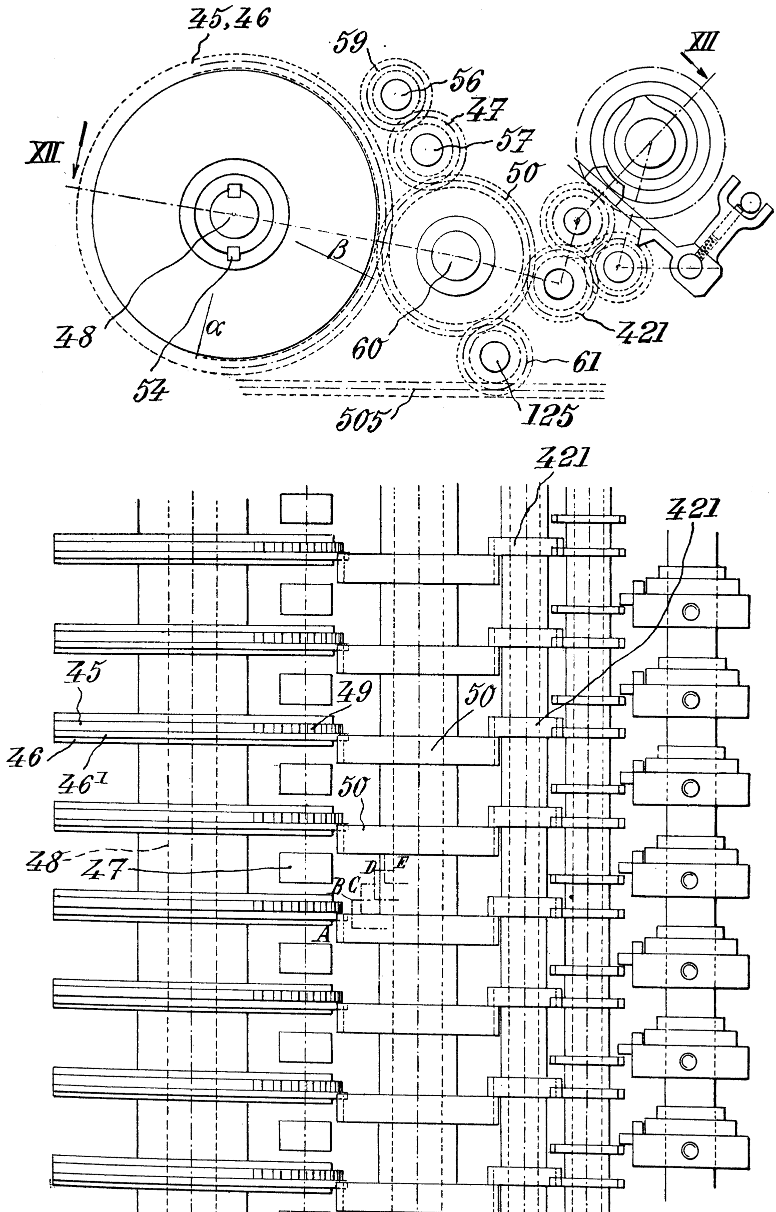


Fig. 5. — *Vue d'ensemble du transcripteur de la multiplieuse.*

La multiplieuse comporte les chiffreurs suivants : disque d'inscription 46^1 de l'entraîneur, dents saillantes 49 de ce dernier, roue 421 du totalisateur, roue 47 du distributeur (qui peuvent tourner sans glisser), crémaillère 505 (qui ne peut se déplacer que parallèlement à elle-même). Le pignon baladeur 50 peut occuper trois positions A, C, E, et le pignon baladeur 61 deux positions : en prise ou non avec la crémaillère. Les diverses combinaisons de positions des baladeurs permettent de mettre en relation deux quelconques des chiffreurs de la multiplieuse.

que nous appellerons, pour abréger, *transformer* le produit *en* multiplicande;

f. totalisateur et distributeur, par exemple, pour transformer le quotient en dividende ([1]).

D. Le transfert des produits et des quotients soulève une difficulté particulière.

Les nombres inscrits sur le clavier se présentent en effet, généralement, sous la forme de nombres décimaux; le transfert d'un nombre d'un totalisateur de réserve à un autre totalisateur s'effectue correctement par le jeu des crémaillères, pourvu que les unités soient constamment marquées par la même rangée de touches de l'inscripteur; nous dirons alors que la virgule garde la même place sur le clavier et les chiffreurs, et que cette place est sa *place normale*; cette place est aussi celle de la virgule du multiplicande et du multiplicateur; mais, si la multiplication s'effectue, comme sur la plupart des machines à multiplier, à partir de l'ordre décimal le plus faible, conformément à la règle usuelle en calcul manuel, la virgule du produit est déplacée, et le transfert de ce produit dans un totalisateur de réserve marquant déjà un nombre donne une somme erronée; il en est de même si la multiplication s'effectue à partir de l'ordre décimal le plus élevé : il est donc indispensable que la machine ramène la virgule du produit à une place invariable. Nous avons déjà donné à cette fonction le nom de *régulation des virgules* et à l'organe correspondant celui de *régulateur* (ou régleur) *des virgules* [17].

Nous réalisons cette fonction par les moyens suivants :

a. le totalisateur des produits est fixe, tandis que l'entraîneur, porté par le chariot, est mobile (*Cf.* 27);

b. la position d'arrêt de l'entraîneur est celle où la virgule du chiffreur du multiplicande occupe sa place normale;

c. le régulateur des virgules commande les opérations successives suivantes : déplacement du chariot, tel que la virgule occupe

---

([1]) L'entraîneur est du type Odhner, le seul qui n'exige que des déplacements plans; les autres mécanismes décrits dans ce paragraphe et dans les suivants sont nouveaux; toutefois, dans l'étude du distributeur, nous avons retrouvé, sans le savoir, le principe du distributeur de Tchebichef, appliqué, d'ailleurs, sur toutes les machines automatiques actuelles.

la place correspondant à l'ordre décimal le plus élevé possible du totalisateur, déplacement du chariot en sens contraire, réglé par le distributeur du produit au fur et à mesure que s'effectue la multiplication, enfin retour du chariot en position d'arrêt.

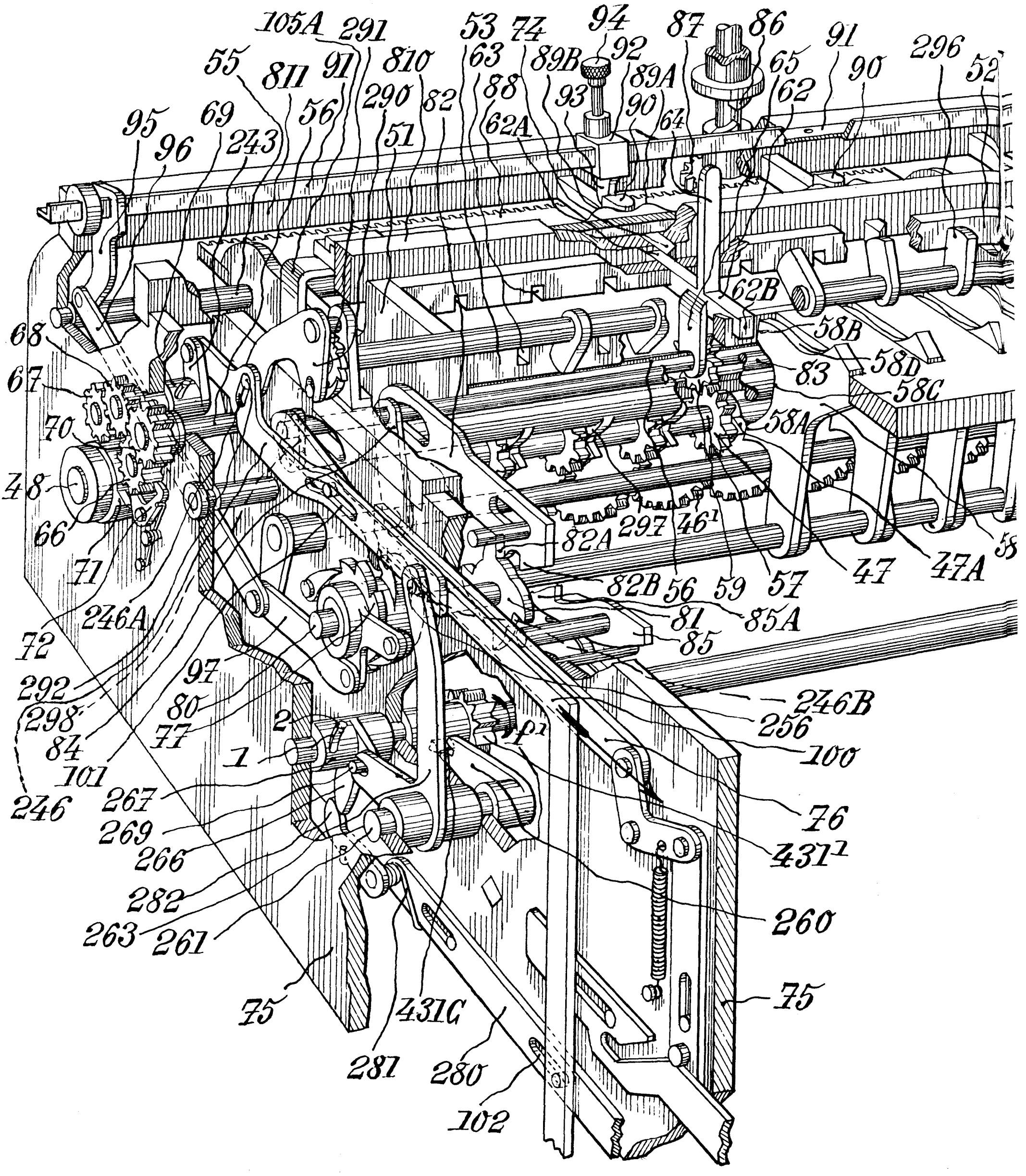
De la sorte, lorsque, au cours de la multiplication, l'entraîneur repasse par sa position d'arrêt, la virgule du multiplicande est à la place normale des virgules, et, par suite, il en est de même de celle du produit. De plus, le régulateur des virgules permet de négliger systématiquement les derniers chiffres à droite du produit, qui sont généralement inexacts puisque la marge relative du produit est la somme des marges relatives des facteurs : il suffit pour cela de supprimer les roues du totalisateur d'ordre décimal supérieur à un rang n, déterminé par la nature des calculs. Afin de laisser à la valeur du nombre n une liberté suffisante, la place normale de la virgule (bouton 94 et loquet 74) est réglable ainsi que la place de la virgule du multiplicande (levier 64).

Le régulateur des virgules et les organes de la multiplication et de la division automatiques, opérations qui s'effectuent suivant le même principe que dans les machines à multiplier automatiques d'usage courant [1, 15, 17], sont représentés sur la figure 6.

61. La documentation (21) est appliquée non seulement aux commandes des opérations intermédiaires, comme il suffirait pour la fonction enchaînement, mais à toutes les commandes. Elle est réalisée par les organes représentés sur la figure 7.

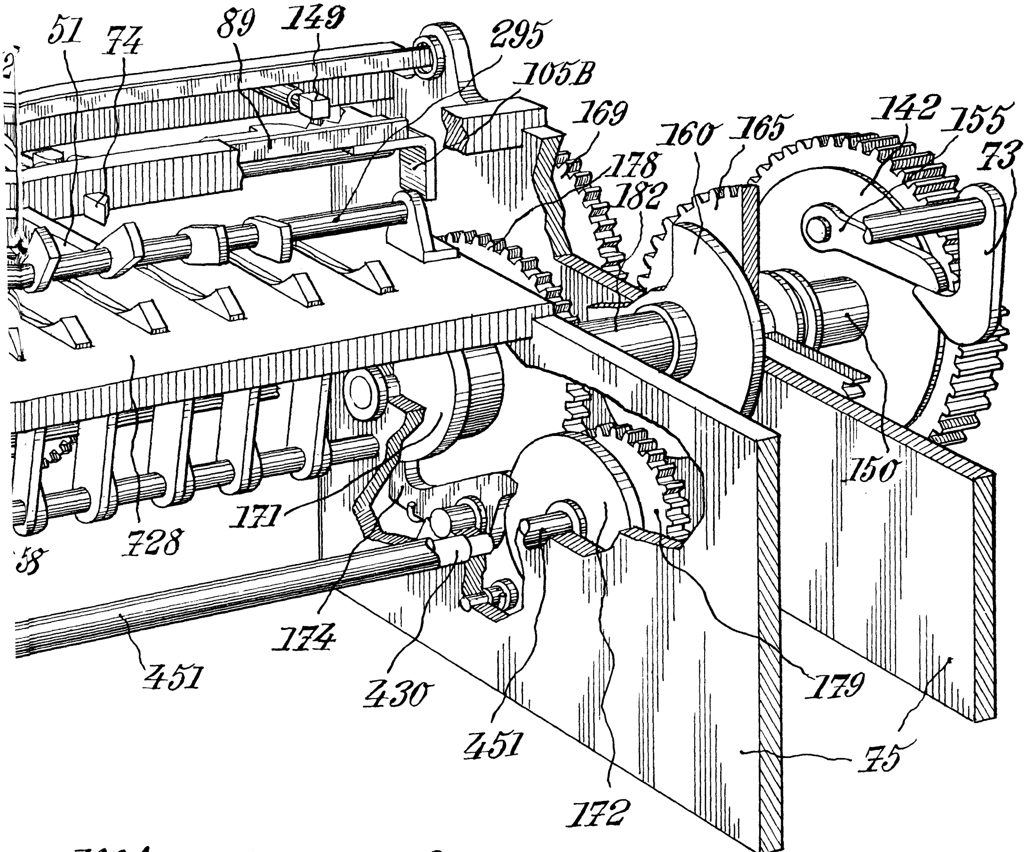
Le document de commande est constitué par une *chaîne à cames* composée de chaînons 21, qui porte, en des points appropriés, des bossages 22A, 22B, ..., 22E et qui roule sur des galets 25. Chaque bossage bascule au passage un levier 26, et il est aisé de déterminer la position des bossages sur la chaîne de manière que, pour chacune des positions successives de cette dernière, les leviers basculés soient ceux qui commandent les opérations successives que doit exécuter la machine. Le basculage des leviers 26 assure, par des renvois de mouvement appropriés, la commande des organes correspondants.

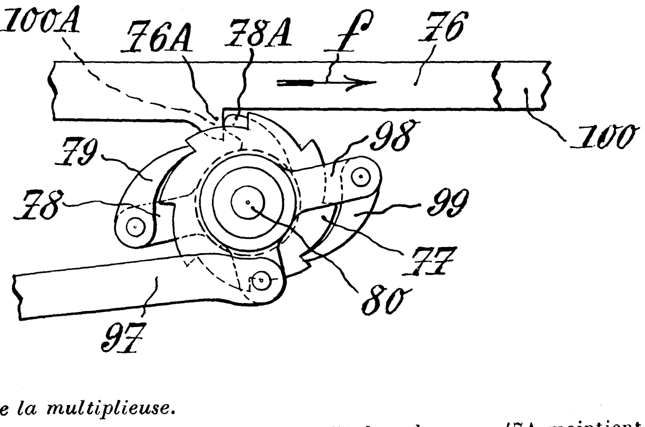
La commande documentaire est complétée par une commande



[Fig. 6. — *Vue perspective*

Chaque chiffre du multiplicande est représenté par le nombre de dents en saillie sur les roues 46^1. Le distri roues marquent zéro; après inscription du multiplicateur sur ces roues, les leviers 58 sont reculés pour solidaire du chariot 51 de l'entraîneur. Le régulateur des virgules est constitué par celui des loquets 74 qui du multiplicande, les cornières 89, 91. Des renvois de mouvement, non tous représentés, permettent les normale. Le levier de commande de la multiplication relève les leviers 58 pour permettre le libre mouvem de ce chariot. En fin de course, ce dernier accroche la cornière 89 par 105 A, et aussi, par la came 89 A, l'arbre 80, par l'intermédiaire de 93, 91, 95, 96, 97, 77; cet arbre — qui, par les cames qu'il porte, consti les leviers 58. Le chariot se déplace ensuite vers la droite; il est arrêté par chacun des leviers 58, et m l'intermédiaire de 59, 56, 70, 66, 71, cette dernière pièce étant solidaire de l'arbre 48 de l'entraîneur; lors se déplacer jusqu'au levier 58 suivant. (On remarque que les unités du multiplicande sont inscrites à chariot accroche la cornière 89 par 105 B et ainsi libère les loquets 74 et fait avancer d'un pas l'arbre 80, la butée 62 A, ce qui fait encore avancer d'un pas l'arbre 80, et arrête le retour arrière. Les pièces dont principe classique, à faire constater par la machine que, dans l'ordre décimal où elle opère, elle a retra une unité du quotient, puis déplacer l'entraîneur jusqu'à l'ordre décimal suivant, où elle recommence la s





ve de la multiplieuse.

tributeur est constitué par les roues 47 dont la came 47A maintient en avant le levier 58 lorsque ces ur toutes les roues qui ne marquent pas zéro; leur bec 58 B est alors sur le chemin de la butée 62 B qui peut agir sur le doigt 93 marquant la place normale de la virgule, la butée 62 A qui marque la virgule s opérations ci-après. A l'arrêt, 62 A bute sur 74, ce qui met la virgule du multiplicande en position vement du chariot de l'entraîneur, et déclenche le retour arrière 86, 88 (mouvement de droite à gauche) , repousse les loquets 74, qui gêneraient le mouvement du chariot vers la droite, et fait avancer d'un pas stitue l'essentiel du document de commande de la multiplication — arrête le retour arrière et libère met alors l'entraîneur en rotation; à chaque tour, l'entraîneur fait reculer d'une dent la roue 57, par orsque 57 revient à zéro, la came 47 A avance le levier 58, ce qui permet au chariot de l'entraîneur de à la place normale des unités, lorsque l'entraîneur repasse par sa position d'arrêt). En fin de course, le 80, ce qui déclenche le retour arrière. En arrivant en position d'arrêt, le chariot pousse le loquet 74 par nt les numéros sont compris entre 200 et 300 servent à la division automatique, qui consiste, suivant le ranché le diviseur une fois de trop, lui faire ajouter une fois le diviseur au reste partiel et retrancher a soustraction itérée du diviseur.

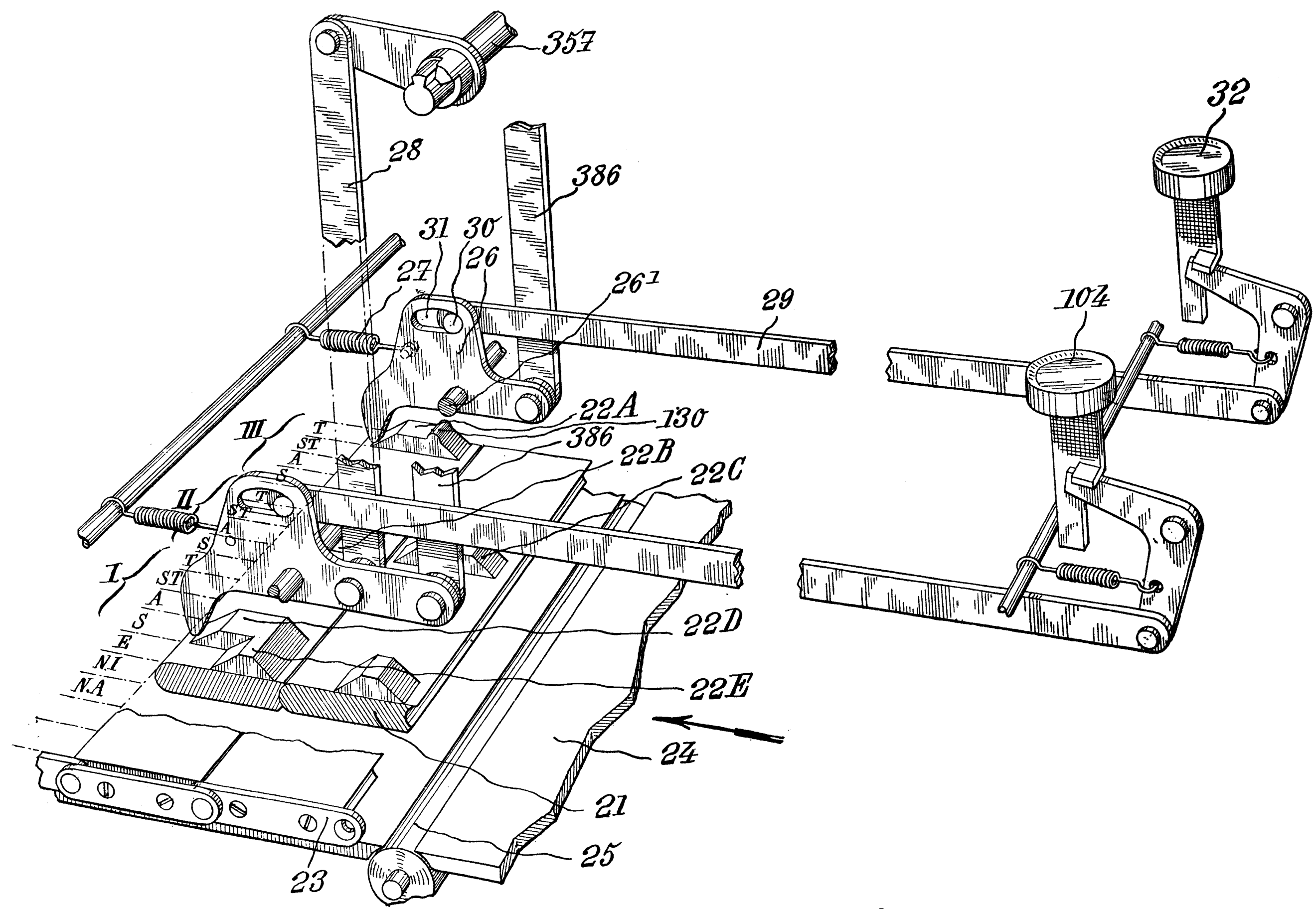


Fig. 7. — *Schéma perspectif de la commande.*

Toutes les commandes se ramènent à une traction vers le bas des tringles verticales telles que 28 ou 386. Ce mouvement : ou bien met en position les organes, ou bien prépare leur mise en position par le moteur. Il peut être exécuté par les touches 104 ou 32, et constitue alors, dans le premier cas une commande manuelle, dans le second une commande asservie. Il peut aussi être exécuté par la chaîne à cames 23, dont les chaînons 21 portent des bossages 22, qui, au passage des cames sous les becs des leviers 26, basculent ces leviers; la commande est alors documentaire.

asservie, constituée, très simplement, par un clavier dont les touches 32 ou 104 commandent les leviers 26.

62. La fonction *calcul des signes* résulte de plusieurs fonctions qui sont composantes, non seulement de cette fonction, mais encore de certaines autres.

Nous avons vu qu'un nombre négatif, obtenu comme résultat d'une soustraction, est remplacé en calcul mécanique par son complément, qu'il y a lieu de faire accompagner d'une représentation matérielle du signe — (26). Comme ce nombre doit être imprimé, puisque la machine possède la fonction impression générale, cette dernière fonction doit avoir la fonction overdraft pour composante. On peut dès lors, pour transférer ce nombre dans un autre totalisateur, soit, sans mettre en jeu l'overdraft, transférer le complément du module du nombre en disposant ce dernier totalisateur pour l'addition ou la soustraction selon que le nombre négatif doit être ajouté ou retranché dans ce totalisateur, soit, en faisant jouer l'overdraft, transférer le module du nombre, en permutant les commandes d'addition et de soustraction; on peut procéder de même si le nombre négatif doit être transféré dans l'entraîneur pour jouer le rôle de multiplicande, puisque le transfert itéré de ce multiplicande au totalisateur des produits ne diffère pas du transfert d'un nombre d'un totalisateur quelconque dans ce totalisateur en vue d'une addition ; mais on ne le peut plus si le nombre négatif doit être transféré dans le distributeur du produit, parce que, dans une machine à calculer à entraîneur, chaque chiffre du multiplicande est représenté par un ensemble de dents d'une même roue, que par suite le multiplicateur est le nombre de tels ensembles dont la somme matérialise le produit cherché, et que le résultat d'un dénombrement est essentiellement un nombre positif : il faut nécessairement, dans ce dernier cas, effectuer le transfert avec overdraft. Si, dans un complexe de calculs, on réservait le transfert avec overdraft au cas où le nombre négatif entre dans le chiffreur du distributeur du produit, on serait contraint, en vue du cas où ce nombre devrait être transféré en même temps dans d'autres chiffreurs, de munir la machine d'un organe qui lui permette de distinguer la nature du chiffreur dans lequel le nombre est transféré, et de commander successivement les deux transferts nécessaires : cette suite d'opérations s'insérerait entre deux opérations commandées par la chaîne à cames, et l'organe qui la commanderait devrait aussi pouvoir suspendre le déplacement de cette chaîne : une telle solution nous a paru compliquée et peu systématique ; de plus, la fonction impression générale exigeant le transfert avec overdraft d'un chiffreur dans l'imprimeuse après chaque opération arithmétique dont le résultat est négatif, il nous a paru rationnel d'utiliser aussi l'overdraft pour les autres transferts.

Mais si l'overdraft consistait, comme dans les quelques machines actuelles qui le possèdent, à transférer le nombre négatif dans un totalisateur auxiliaire, disposé pour la soustraction, transfert que nous qualifierons de *soustractif*, puis à le transférer de nouveau dans les chiffreurs voulus, la durée d'un transfert avec overdraft serait double de celle d'un transfert sans overdraft ; et comme, dans les calculs de la Mécanique céleste, les nombres négatifs sont, *a priori*, aussi nombreux que les nombres positifs, et les transferts très fréquents, la durée totale des calculs serait considérablement accrue. Nous avons donc cherché à réduire la durée de l'overdraft.

63. L'overdraft et l'effaçage ont en commun certains organes. Pour effacer un chiffre a marqué sur une roue de chiffreur, il suffit de faire reculer la roue jusqu'à zéro. A cet effet, on place une butée fixe sur le chemin d'une came portée par la roue, dans une position telle que cette dernière soit au zéro lorsque la came touche un certain côté de la butée. Pour faire tourner la roue d'un nombre d'unités égal au complément à 9 du chiffre a, on peut la faire avancer jusqu'à ce qu'elle marque 9; il suffit pour cela, la butée et la came étant disposées de manière que la somme de leurs épaisseurs soit égale à la longueur représentant une unité, de faire avancer la roue jusqu'à ce que la came touche l'autre côté de la butée. Mais si l'on opère de même pour tous les chiffres du nombre, le nombre transféré est trop faible d'une unité de l'ordre décimal le plus faible, puisque le chiffre de cet ordre décimal doit être complété à 10 et non à 9 : il faut donc ajouter une unité à ce nombre. Nous avons réalisé l'addition rapide de cette unité en rendant le reporteur complètement indépendant des autres parties du totalisateur auquel il appartient — et *a fortiori* de l'entraîneur

— ce qui permet de l'alléger et de le faire tourner très vite, et aussi de commander son mouvement indépendamment de celui du totalisateur.

L'overdraft résulte alors des opérations suivantes :

1° lorsque le nombre marqué par un totalisateur devient négatif, l'overdraft est armé ; inversement, si le nombre devient positif, l'overdraft est désarmé ;

2° lorsque l'overdraft d'un totalisateur est armé, la commande de la fonction Total ou Sous-Total, pour ce totalisateur, a pour effet :

a. de mettre ce totalisateur en soustraction et de commander, à partir de l'ordre décimal — $(p+1)$ qui suit le dernier ordre décimal — p marqué par la machine, un report, que nous appellerons *report supplémentaire*, l'ordre — $(p+1)$ étant matérialisé seulement par le mécanisme de report de cet ordre dans l'ordre décimal — p;

b. de permuter les commandes d'addition et de soustraction dans tous les autres totalisateurs ;

c. de commander l'impression d'un signe particulier accompagnant le nombre pour marquer que ce dernier est négatif ;

3° le reporteur fait alors un tour, ce qui retranche une unité dans l'ordre — p ;

4° la fonction Total ou Sous-Total s'accomplit, ce qui fait *avancer* les roues juqu'aux butées, puisque, le totalisateur étant en soustraction, le sens de rotation des roues est inversé ; chaque roue tourne alors, dans le sens additif, d'un nombre de dents égal au complément à 9 du chiffre qu'elle porte; par suite, c'est le complément du complément du module du nombre, c'est-à-dire le module lui-même, qui est transféré, s'il y a lieu, dans les autres chiffreurs, et, comme les fonctions addition et soustraction des totalisateurs sont permutées, ce nombre joue bien, dans les additions où il intervient, le rôle de nombre négatif qui est le sien ;

5° le totalisateur est alors mis en addition, et le report supplémentaire est commandé ;

6° le reporteur fait un tour, ce qui ajoute une unité dans l'ordre — p.

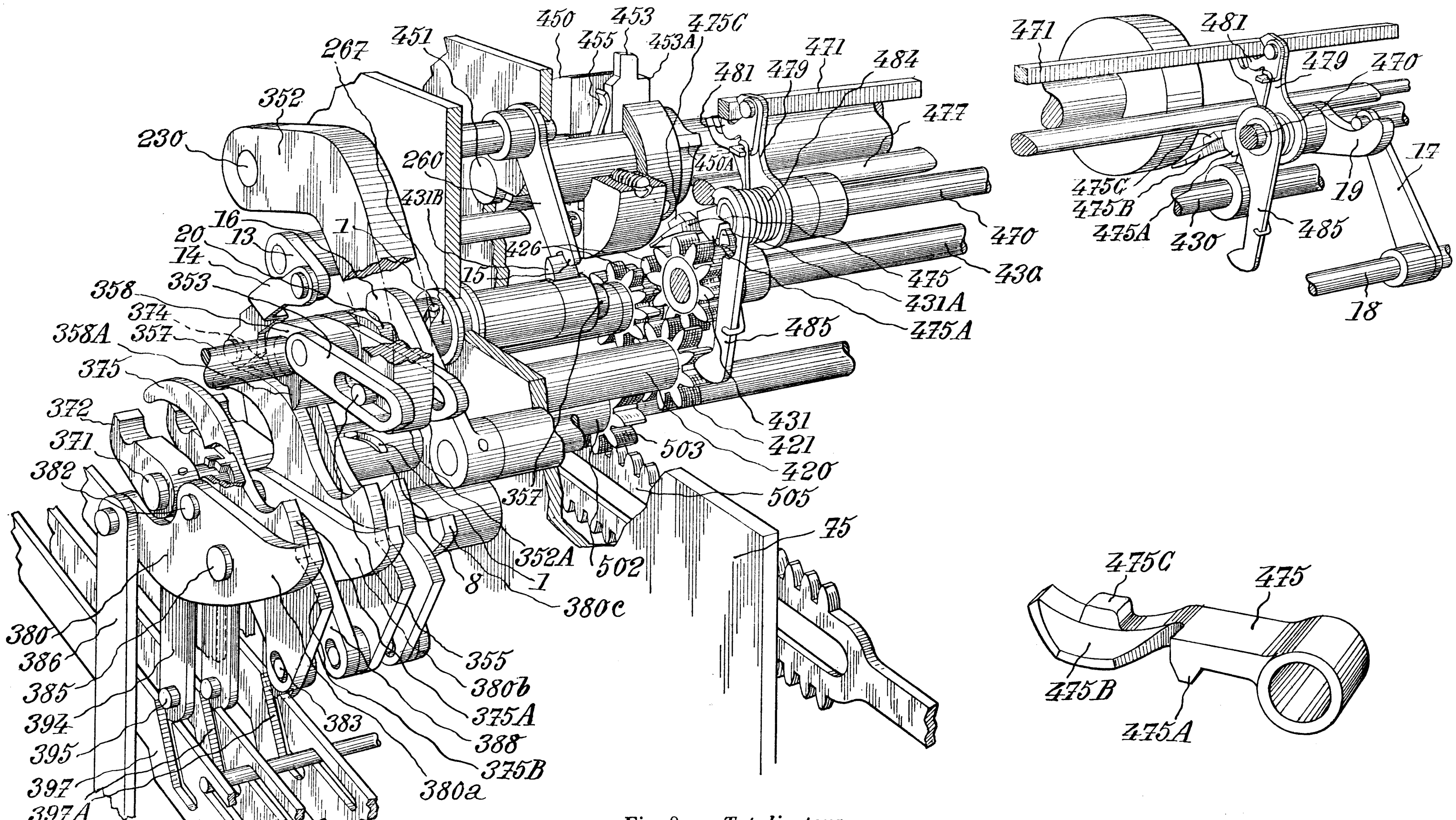


Fig. 8. — *Totalisateur.*

Le totalisateur comporte pour chaque ordre décimal : une roue de chiffreur 431, une roue de transmission 421, un baladeur formé de deux roues solidaires 426, permettant, par le changement du sens relatif de rotation des roues 421 et 431, de passer de l'addition à la soustraction, un reporteur du type Odhner à dent basculante 453, guidée par une tête de cheval 475 elle-même mise en position active par la came 431 A (solidaire de la roue 431), lorsque le chiffre marqué par la roue 431 passe par la valeur zéro, un cliquet 485 maintenant en position correcte les roues du totalisateur. La roue baladeuse 503 relie, pendant un transfert, la roue 421 et la crémaillère 505. Ces dispositifs assurent l'indépendance complète des organes des diverses fonctions, et, par suite, la possibilité d'enchaîner ces dernières dans un ordre arbitraire. Les fonctions inscription, total, sous-total et overdraft sont réalisées par l'élément de report représenté à droite en haut de la figure, et par les dispositifs situés à gauche du flasque 75. Ces derniers agissent les uns sur les autres par simple contact, pour permettre l'exécution des fonctions inscription, total et sous-total, quel que soit le signe du nombre

Les opérations 5° et 6° sont nécessaires parce que, si la fonction commandée est la fonction Total, les roues du totalisateur ayant toutes été ramenées à 9, il faut ajouter une unité dans l'ordre — *p* pour qu'elles marquent zéro, et si la fonction commandée est la fonction Sous-Total, les roues du totalisateur ayant été ramenées au chiffre qu'elles marquaient avant l'opération 4°, il faut ajouter l'unité d'ordre — *p* retranchée par l'opération 3°, pour retrouver le nombre primitivement marqué par le chiffreur.

En résumé, bien que, lorsqu'un nombre N est négatif, le nombre naturellement marqué par le chiffreur qui le porte soit le complément de son module, dans notre overdraft, le nombre effectivement inscrit sur d'autres chiffreurs au cours du transfert du nombre N est le module de ce nombre, inscrit en soustraction si le nombre N est additif, en addition au contraire s'il est soustractif.

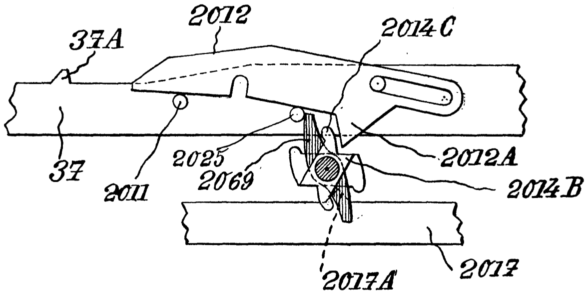
L'overdraft, tel que nous venons de le décrire, suffit au calcul rapide des signes dans un complexe comportant seulement des additions et des soustractions. La figure 8 représente un totalisateur muni d'un overdraft.

64. Le calcul des signes dans la multiplication et la division s'effectue à l'aide d'un organe que nous avons appelé *overdraft complet* [17].

A. Les signes des nombres marqués par le distributeur du produit et l'entraîneur sont eux-mêmes marqués respectivement (*fig.* 9) par un arbre 2010 et un arbre 3010; quand ces derniers occupent la position représentée sur la figure, le signe de ces nombres est +, quand ils ont *avancé* de 120° (sens de la flèche) le signe est —; comme les cames qu'ils portent sont symétriques pour leur axe, le signe qu'ils marquent n'est pas modifié s'ils avancent de 180°.

B. Le transfert d'un nombre négatif d'un totalisateur de réserve ou de l'inscripteur à un chiffreur quelconque s'accompagne d'un déplacement de droite à gauche de la barre 37.

Ce déplacement, d'une part permute l'effet des commandes addition et soustraction dans tous les totalisateurs (*Cf. fig.* 10), de l'autre fait avancer de 60° les arbres 2010 et 3010 en agissant sur les cames 2014 A et 3014 A au moyen de dents telles que 2012 A.



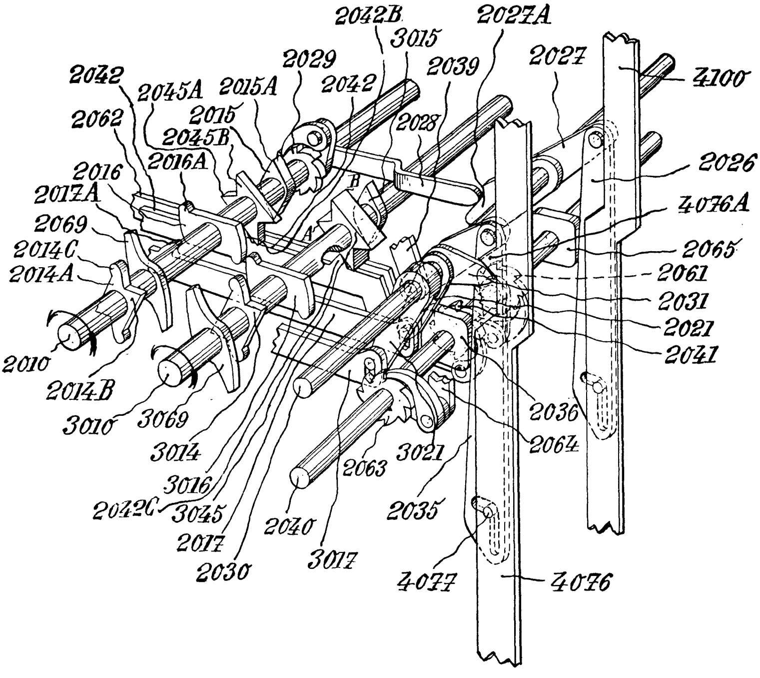


Fig. 9. — *Overdraft complet.*

Cet organe effectue le calcul des signes dans la multiplication et la division. Il est établi de telle manière que, quels que soient les signes des nombres inscrits sur l'entraîneur, le distributeur ou le totalisateur, quel que soit le chiffreur d'où ces nombres proviennent, et quelle que soit l'opération, inscription, multiplication, division ou effaçage, dans laquelle ces nombres sont engagés, leur signe se marque correctement, et sous la forme qui permet leur combinaison correcte avec le signe des nombres inscrits ensuite pour une nouvelle opération. L'overdraft complet est l'organe essentiel du calcul mécanique des nombres relatifs (positifs négatifs ou nul).

Si le nombre n'est transféré ni dans le distributeur du produit ni dans l'entraîneur, la barre 37, en reprenant sa position initiale après le transfert, ramène aussi en position initiale les arbres 2010 et 3010 en agissant sur la came 2014 B et la came analogue portée par l'arbre 3010.

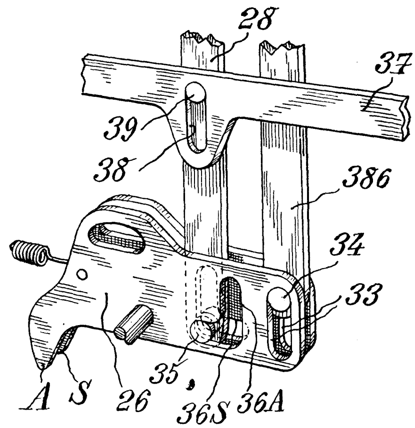


Fig. 10. — *Commande de la fonction somme algébrique.*

Un dispositif tel que celui que représente la figure est attribué à chaque totalisateur (*fig.* 8). La tringle 385, lorsqu'elle est tirée vers le bas, commande l'inscription d'un nombre dans le totalisateur; la tringle 28 commande de même le passage de la roue 426 (*fig.* 8) de la position d'addition à la position de soustraction. Le signe — est marqué par la traction de droite à gauche de la barre 37, qui fait glisser dans les coulisses d'équerre 36 A et 36 S le bouton 35, solidaire de 28. Quand le bouton est à droite, la tringle 28 est actionnée seulement par le bec S qui commande la soustraction; quand il est à gauche (cas de la figure), cette tringle est actionnée par le bec A de l'addition, et non par le bec S; l'inscription du signe — permute donc les commandes d'addition et de soustraction, comme l'exige la substitution de ce signe au signe + dans une somme algébrique.

Si le nombre est transféré dans le distributeur du produit, la commande de l'inscription dans le chiffreur de cet organe fait de nouveau avancer de 60° l'arbre 2010 en agissant sur la came 2014 A de la même manière que la barre 37; l'arbre 2010 ayant avancé de 120°, le signe — est marqué, et il le reste après le retour de la barre 37 en position initiale, car la came 2014 B se trouve alors au-dessous de la dent 2012 A.

Le signe — d'un nombre marqué par l'entraîneur se marque de façon analogue grâce à la came 3014.

C. Si l'un des facteurs du produit est négatif, le produit des modules des facteurs, formé par l'action combinée de l'entraîneur et du distributeur du produit, doit entrer en soustraction dans le totalisateur des produits.

La multiplication est déclenchée par la traction de haut en bas de la barre 4076. Cette barre peut mettre le totalisateur du produit en soustraction en faisant tourner l'arbre 2030 au moyen du balancier 2035, lorsque ce balancier est poussé vers la droite, le bouton 4077, solidaire de la barre 4076, étant alors dans le fond de la coulisse en équerre du balancier. Lorsque les arbres 2010 ou 3010 passent du signe + au signe —, les cames 2045 A ou 3045 A poussent la barre 2042 de gauche à droite au moyen des dents 2042 B ou 2042 C, et font ainsi tourner de 45° la came carrée 2036 au moyen d'une roue à rochet 2041. Par conséquent, selon que le nombre des facteurs négatifs est un ou deux, la came carrée 2036 s'appuie contre le balancier 2035 par un plat ou un bossage, et, par suite, ce balancier est, ou non, en position de commande de la soustraction.

D. Si, des deux nombres marqués par le totalisateur des produits et par l'entraîneur, l'un est négatif, le quotient du premier par le second est négatif, et, comme son module est marqué par le chiffreur du distributeur du produit, l'arbre 2010 doit marquer le signe —.

La barre de commande de la division 4100 fait avancer l'arbre 2010 de 120° au moyen de la roue à rochet 2029, commandée par les pièces 2028, 2027 A, 2027 et le balancier 2026, dont l'actionnement par la barre 4100 et le réglage par la came carrée 2065 sont analogues à ceux du balancier 2035. La came 2065 est solidaire de l'arbre 2040 (tandis que la came 2036 est folle) qui tourne de 45° sous l'action des roues à rochet 2063 et 2061 commandées respectivement par le dispositif qui arme l'overdraft du totalisateur des produits et par la barre 2062, actionnée par la came 3045 A lorsque le nombre marqué par l'entraîneur est négatif.

E. Enfin, l'action des arbres 2010 et 3010 doit cesser lorsqu'on efface les nombres dont ces arbres marquent le signe.

Si l'arbre 2010 marque le signe —, la came 2016 A, ayant avancé de 120°, se trouve dans le plan vertical contenant l'axe de l'arbre 2010. Si l'effaçage du nombre marqué par le distributeur du produit est ensuite effectué, la barre 2017 est déplacée de gauche à droite au cours de cette opération, et, au moyen de la dent 2017 A, elle entraîne la came 2016 A, qui fait avancer l'arbre 2010 de 60°; cet arbre, ayant avancé au total de 180°, a donc repris sa position initiale, marquant le signe +.

En même temps :

a. la came 2069 pousse la barre 37 de droite à gauche par l'intermédiaire du bouton 2025, ce qui met en soustraction tous les totalisateurs et, en particulier, ceux dans lesquels le nombre pourrait être transféré;

b. la came 2036 tourne de 45° grâce aux cames 2045 B et 3045 B, ce qui permute plat et bossage de cette came.

L'effaçage du nombre marqué par l'entraîneur produit un effet analogue sur l'arbre 3010, lorsque ce dernier marque le signe —, ainsi que sur la barre 37 et les cames 2036 et 2065.

Enfin lorsque l'overdraft du totalisateur des produits se désarme, il fait aussi tourner de 45° la came 2065.

F. Remarquons encore que l'effaçage a lieu :

normalement, pour le distributeur du produit, dans le transfert d'un quotient du chiffreur de ce distributeur dans un autre chiffreur, et, pour l'entraîneur, lorsque sont terminées toutes les multiplications dont le multiplicande est le nombre marqué par l'entraîneur;

anormalement, pour corriger une erreur.

B. — MACHINE BINAIRE.

65. La machine à calculer que nous venons de décrire pourrait aisément recevoir l'inscription documentaire par cartes perforées, seule réalisation de l'inscription documentaire actuellement connue. Nous avons envisagé ce mode d'inscription pour certaines applications de cette machine aux calculs commerciaux, mais pour les

calculs savants, il nous paraît insuffisant. En effet, les cartes sur lesquelles sont inscrites les données sous forme de perforations sont des documents distincts mais non indépendants : ils doivent être introduits dans la machine dans un certain ordre, et c'est le calculateur qui accomplit cette opération : la sécurité que nous avons attribuée à l'inscription documentaire n'est donc pas atteinte dans l'inscription par cartes perforées. En outre, dans ce cas, la fonction comparaison ne s'exerce mécaniquement que lorsqu'elle consiste soit à déceler, dans une suite non décroissante de nombres où des nombres de rangs consécutifs peuvent être égaux, l'inégalité de deux nombres de rangs consécutifs, soit à chercher, dans une suite de nombres de valeurs quelconques, ceux qui ont une valeur donnée; l'accomplissement mécanique de cette fonction est limitée à des cas trop restreints pour les besoins de la Mécanique céleste. Enfin l'établissement de tables mécaniques se heurte à de grandes difficultés et ne paraît pas réalisable dans les conditions de rapidité et d'automaticité que nous avons reconnu nécessaires.

Nous avons été conduit à imaginer des dispositifs de calcul tout différents, par la remarque suivante que nous avons faite d'abord pour un type ancien et très particulier de machines [15, p. 11, 12], et dont nous avons reconnu ensuite l'exactitude pour la plupart des machines à calculer. Nous pensons qu'elle est de portée générale et la considérons, avons-nous déjà dit (36), comme une proposition d'Analyse mécanique abstraite; dans le cas du calcul mécanique, elle peut s'énoncer ainsi : *les dispositifs les plus favorables au calcul mécanique ne sont pas, en général, ceux qui fonctionnent en application des règles du calcul manuel.* Dès l'instant où nous avons été convaincu de l'exactitude de cette proposition, il s'imposait de comparer *toutes* les règles d'opérations de l'arithmétique à leurs réalisations mécaniques.

66. **Numération.** — La première de ces règles, la règle de la numération, marque déjà profondément cette opposition.

A. La numération a pour but, en calcul manuel, de représenter, le plus simplement possible, un nombre quelconque de la suite naturelle; en calcul mécanique, l'organe de la représentation des nombres doit pouvoir représenter un nombre quelconque d'une suite limitée; il contient donc, en quelque sorte en puissance, tous les nombres de cette suite.

D'un point de vue plus concret, cette différence se présente comme suit : tandis que, en calcul manuel, les chiffres successivement inscrits sur une feuille de papier pour représenter un nombre prennent leur rang décimal au cours de leur inscription même, en calcul mécanique, il est nécessaire de matérialiser, d'une part les ordres décimaux dans lesquels des chiffres peuvent être marqués par un chiffreur, et d'autre part les chiffres différents qui peuvent être marqués dans chaque ordre décimal.

Dans un clavier complet, par exemple, il correspond à chaque ordre décimal une rangée de 9 touches — le zéro étant inutile puisqu'il est sans action sur les chiffreurs et sert seulement à marquer le passage à l'ordre décimal suivant de la pièce (main du calculateur ou organe mécanique) qui effectue l'inscription, de même que, dans la représentation écrite du nombre, il marque seulement l'absence de chiffre significatif dans l'ordre décimal où il figure. Dans un clavier réduit, qui comporte seulement les dix touches de 0 à 9, les touches de 1 à 9 peuvent agir successivement dans les divers ordres décimaux, généralement matérialisés par des roues portées par un chariot, appelé *chariot intermédiaire*, qui présente successivement celles-ci à l'action des touches, et la touche zéro a pour seul effet de provoquer le déplacement du chariot intermédiaire.

L'inscription mécanique d'un nombre comporte donc bien, quoique de façon plus ou moins apparente, deux opérations distinctes : l'inscription de l'ordre décimal de chaque chiffre significatif, et l'inscription de ce chiffre significatif lui-même.

B. Or, ces deux opérations se confondent, *mécaniquement*, si l'on représente les nombres dans le système de numération binaire. En effet, ce système ne comportant qu'un seul chiffre significatif, le chiffre 1, une même action mécanique suffit à indiquer qu'il faut inscrire un chiffre significatif dans un certain ordre décimal et quel est ce chiffre significatif. Cet avantage d'un clavier binaire sur un clavier décimal apparaît de façon plus frappante encore si l'on remarque que, les seuls chiffres différents du système binaire étant o et 1, on peut les représenter par les deux termes d'une alternative. Par exemple, une touche abaissée représente 1, la même touche relevée représente o. Dans un clavier décimal, une touche abaissée représente bien un chiffre, mais la même touche relevée représente l'absence de ce chiffre, et non un autre chiffre; il en est ainsi même pour la touche particulière du chiffre o.

Une alternative dont les deux termes sont particulièrement aisés à utiliser mécaniquement est celle qui est constituée par la présence ou l'absence d'un courant électrique dans un circuit. C'est ce mode de représentation des chiffres o et 1 que nous adopterons, en principe, de préférence à tout autre dans les mécanismes calculateurs.

Un chiffreur de capacité binaire n (nous sous-entendrons désormais le mot binaire, sauf risque de confusion) sera donc un ensemble de n éléments de circuit électrique attribués, chacun, à un ordre binaire déterminé; l'inscription du chiffre d'ordre n d'un nombre consistera, par exemple, à fermer le circuit si ce chiffre est 1, à le laisser ouvert si ce chiffre est o.

C. Comme le nombre de chiffres nécessaires pour représenter un nombre donné n dans un système de numération de base a est la partie entière $E_a(n)$ de $1 + \log_a n$, et que $\log_a n$ varie en sens contraire de a, il faut, pour représenter un nombre, plus de chiffres dans le système binaire que dans le système décimal. On pourrait donc penser qu'un chiffreur binaire est plus compliqué qu'un chiffreur décimal de même capacité décimale. Il n'en est rien, et l'on peut montrer que, au contraire, le chiffreur binaire comporte moins d'organes que le chiffreur décimal, en supposant que les organes des deux chiffreurs jouent des rôles analogues.

1° D'un point de vue général, cherchons d'abord deux limites du rapport $\rho = \frac{E_a(n)}{E_b(n)}$. Nous définirons un entier p_α fonction d'un autre entier α par la relation suivante, où nous supposons $a < b$,

$$(1) \qquad a^{p_\alpha} < b^\alpha < a^{p_\alpha+1}.$$

Lorsque n croît de b^α à $b^{\alpha+1}$, le rapport ρ croît de $\rho' = \frac{p_\alpha + 1}{\alpha + 1}$ à $\rho'' = \frac{p_{\alpha+1} + 1}{\alpha + 1}$.

Or, de la relation (1) il résulte, en posant

$$\mu = \log_a b,$$
$$q_b = \alpha + 1,$$
$$(2) \qquad p_\alpha < \alpha\mu < p_\alpha + 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$p_\alpha + 1 + \mu - 1 < \mu(\alpha + 1) < p_\alpha + 1 + \mu,$$

et donne

$$\rho' + \frac{\mu - 1}{\alpha + 1} < \mu < \rho' + \frac{\mu}{\alpha + 1},$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad \mu\left(1 - \frac{1}{q_b}\right) < \rho' < \mu - \frac{\mu - 1}{q_b}.$$

Si l'on remplace α par $\alpha + 1$, dans la relation (2), on trouve

$$p_{\alpha+1} < \mu(\alpha + 1) < p_{\alpha+1} + 1,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \mu < \rho'' < \mu + \frac{1}{q_b}.$$

De (3) et (4) il résulte, ρ étant compris entre ρ' et ρ'',

$$(5) \qquad \mu\left(1 - \frac{1}{q_b}\right) < \rho < \mu + \frac{1}{q_b}.$$

On peut remarquer que q_b est le nombre de chiffres du nombre n dans le système de base b. Ce nombre croît avec n ; μ, au contraire, ne dépend que de a et b : le rapport ρ reste donc compris entre deux limites voisines du nombre μ, et il tend vers μ quand le nombre n croît indéfiniment.

Pour $a = 2$ et $b = 10$, μ est sensiblement égal à $\frac{10}{3}$; on peut donc énoncer : le rapport du nombre de chiffres de la représentation binaire d'un nombre au nombre de chiffres de sa représentation décimale est compris entre $\frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ et $\frac{10}{3} + \frac{1}{q}$, q désignant le nombre des chiffres de la représentation décimale de ce nombre; ce rapport est sensiblement égal à $\frac{10}{3}$ dès que le nombre considéré atteint les valeurs usuelles dans les calculs savants.

2° Cherchons maintenant le nombre des organes nécessaires à un chiffreur construit dans le système de numération de base a, pour représenter les nombres de o à n. Ce chiffreur comporte $E_a(n)$ ordres de numération, et, dans chaque ordre de numération, soit a organes pour les chiffres de o à $a - 1$, soit seulement $a - 1$ organes pour les chiffres de 1 à $a - 1$ dans le cas où le chiffreur fonctionne comme un clavier complet. Le nombre des organes est donc, selon le cas, aE_a ou $(a - 1)E_a$. Or, on vérifie aisément que ces derniers nombres, considérés comme fonctions de a, varient dans le même sens que les fonctions $y_1 = a(1 + \log_a n)$ et $y_2 = (a - 1)(1 + \log_a n)$ et que les valeurs entières de a qui rendent ces dernières fonctions minima sont 2, pour la seconde, et, pour la première, 2 ou 3 selon que n est inférieur ou supérieur à 800 [1].

Par conséquent, un chiffreur comporte le nombre minimum d'organes lorsqu'il opère dans le système binaire, et cela, en toute rigueur s'il fonctionne comme un clavier complet, et dans les autres cas pourvu que les nombres à représenter restent inférieurs à 800, le système ternaire se trouvant le plus avantageux pour les nombres supérieurs à 800.

En particulier, le rapport $\rho_1 = \dfrac{y_1(2)}{y_1(10)} = \dfrac{2E_2(n)}{10E_{10}(n)}$ est compris, d'après le calcul de 1°, entre $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ et $\frac{2}{3} + \frac{1}{5q}$; dès que q est supérieur à 2, le rapport ρ_1 est certainement inférieur à 1. De même le rapport $\rho_2 = \dfrac{y_2(2)}{y_2(10)} = \dfrac{E_2(n)}{9E_{10}(n)}$ est compris entre $\frac{10}{27}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ et

---

(1) La dérivée de $y_1 = a(1 + \log_a n) = a\left(1 + \dfrac{\mathcal{L}n}{\mathcal{L}a}\right)$ est

$$\frac{1}{(\mathcal{L}a)^2}[(\mathcal{L}a)^2 + \mathcal{L}n\,\mathcal{L}a - \mathcal{L}n];$$

elle passe du signe — au signe + pour a_1 tel que

$$\mathcal{L}a_1 = \frac{\mathcal{L}n}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{\mathcal{L}n}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\mathcal{L}n} + \frac{2}{(\mathcal{L}n)^2} + \dots;$$

a_l est donc voisin de e.

La dérivée de $y_2 = y_1 - \left(1 + \dfrac{\mathcal{L}n}{\mathcal{L}a}\right)$ est égale à $y_1' + \dfrac{\mathcal{L}n}{a(\mathcal{L}n)^2}$; elle est donc positive pour toute valeur de a qui rend y_1' positive : la valeur de a qui rend minimum y_2 est donc au plus égale à celle qui rend minimum y_1. L'étude de $y_l(a) - y_1(2)$ pour les premières valeurs entières de a, montre très simplement que pour $a > 4$, $y_1(a)$ est supérieur à $y_1(2)$, et que $y_1(3)$ est supérieur à $y_1(2)$ si $n < 800$; on voit de même que $y_2(a)$ est supérieur à $y_2(2)$ quel que soit a.

$\frac{10}{27} + \frac{1}{9q}$; pour les valeurs usuelles de $q (5 < 9 < 15)$, ce nombre est inférieur à 0,4. Ajoutons que les avantages du système binaire exposés au paragraphe précédent disparaissent pour un chiffreur binaire ne fonctionnant pas comme un clavier complet, car les touches 0 et 1 deviennent alors nécessaires; le cas à retenir est donc celui des chiffreurs binaires électriques que nous avons envisagé : c'est alors le rapport ρ_2 qui exprime la réduction du nombre des organes que permet l'adoption du système binaire.

Il résulte donc de cette analyse que le système binaire joint aux avantages capitaux résultant des remarques exposées au paragraphe B, l'avantage, important lui aussi, de n'exiger qu'un nombre d'organes très inférieur à celui qu'exigerait le système décimal pour l'exécution mécanique des mêmes calculs

D. Nous montrerons, dans les paragraphes suivants, comment un tel chiffreur se prête à une réalisation particulièrement aisée de toutes les opérations arithmétiques. On peut remarquer déjà que, la définition d'une machine à calculer binaire consistant en tableaux de connexions électriques, la construction de cette machine est du domaine d'une technique éprouvée et ne soulève aucune difficulté pratique.

67. **Inscription documentaire.** — On sait déjà commander la fermeture ou l'ouverture d'un circuit au moyen de perforations d'une feuille de carton ou de tôle. L'emploi du système binaire permet de percer sur une même ligne d'écriture toutes les perforations relatives à un même nombre. Comme une perforation rectangulaire de 1^{mm} et 2^{mm} de côtés suffit à déclencher l'ouverture ou la fermeture du circuit et que 1^{mm} de distance entre deux perforations suffit à assurer la résistance mécanique de la feuille, on peut inscrire sur une même bande de dimensions acceptables tous les nombres d'une table numérique usuelle, et *a fortiori* toutes les données d'un problème; *la numération binaire permet donc de lever les difficultés que comporte dans la numération décimale l'inscription documentaire par cartes perforées.*

Indiquons, par exemple, qu'une table contenant les sinus, cosinus et tangentes naturels des arcs de seconde en seconde de 0 à 45°

constituerait un rouleau de 75^{cm} de diamètre et 60^{cm} de longueur, environ.

68. **Comparaison.** — La comparaison de deux nombres peut se faire chiffre par chiffre de l'ordre binaire le plus élevé à l'ordre binaire le plus faible. La figure 11 représente un schéma de connexions réalisant cette comparaison.

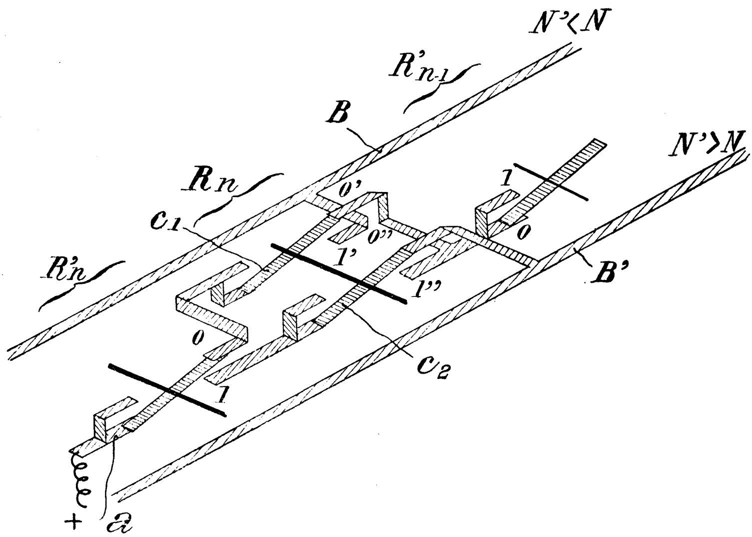


Fig. 11. — *Schéma d'un comparateur.*

Deux commutateurs R'_n et R_n marquent les chiffres du même ordre binaire n des deux nombres N' et N dont on veut comparer les valeurs. Les connexions électriques sont telles que le courant sort par la barre B, par la barre B' ou par une barre B'' placée après le commutateur R_0 d'ordre binaire zéro (et non représentée), selon que N' est supérieur, inférieur ou égal à N. Le fonctionnement de cet appareil est instantané.

Le comparateur est l'élément fondamental des tables mécaniques, du dispositif de précontrôle parfait et de l'application automatique de la méthode des approximations successives.

R'_n et R_n sont deux commutateurs représentant les chiffres d'ordre n, respectivement des nombres N' et N que l'on se propose de comparer. Le courant, arrivant dans R'_n en a, passe dans les circuits C_1 ou C_2 selon que R'_n marque 0 ou 1. Dans le premier cas il passe dans R'_{n-1} ou dans le circuit B selon que R_n marque 0 ou 1, et dans le second cas il passe dans le circuit B' ou dans R'_{n-1}

selon que R_n marque 0 ou 1. Donc, le courant passe dans les circuits B, B′, ou dans le commutateur marquant le chiffre d'ordre $n-1$ de N′, selon que N′ est inférieur à N, supérieur à N, ou que les chiffres de rang n de ces nombres sont égaux. Dans ce dernier cas, la comparaison des chiffres d'ordre $n-1$ se poursuit de la même manière; si les chiffres des ordres successifs sont tous égaux, le courant sort du commutateur R_0 par un conducteur B″.

Un comparateur constitué comme il vient d'être expliqué possède donc les propriétés suivantes :

1° son *action* est *instantanée*, car les circuits sont constitués au cours même de l'inscription des nombres : le courant est donc dirigé vers l'une des barres B, B′, B″, dès que les deux nombres sont inscrits;

2° le *résultat* de la *comparaison* est *mécanographique* (**14**) puisqu'il est marqué par la disposition des circuits électriques, et peut par suite être utilisé pour mettre en action d'autres organes d'une machine à calculer.

69. Tables mécaniques. — La combinaison d'un comparateur et d'un document d'inscription binaire (**67**) peut constituer une table mécanique.

En principe, la table porte, sur une même ligne, une valeur de l'argument et les valeurs des diverses fonctions élémentaires de cet argument. Les lignes successives de la table passent sous des balais, distribués en groupes qui correspondent, le premier à l'argument x, les autres aux diverses fonctions f_1, f_2, ..., f_p figurant dans la table. Les balais du premier groupe et les circuits du chiffreur qui marque la valeur x_0 de l'argument pour laquelle on désire connaître les valeurs des fonctions peuvent être reliés aux chiffreurs d'un comparateur dont les circuits de résultat commandent soit le déroulement de la table dans le sens des arguments croissants ou dans le sens inverse, soit l'arrêt du déroulement, selon que la valeur x de l'argument marquée par les balais est soit inférieure ou supérieure, soit égale à x_0. Il suffit, pour réaliser le calcul mécanique des fonctions f_1, f_2, ..., f_p, de mettre les groupes de balais correspondant à ces fonctions en relation avec les chiffreurs appropriés de la machine.

Une telle table mécanique permet également le calcul des fonctions φ_i, inverses des fonctions f_i, et des fonctions $F_{i,j}=f_j(\varphi_i)$; il suffit de relier : au comparateur les balais de la fonction f_i, et au chiffreur de l'organe calculateur approprié soit les balais de x, pour le calcul de φ_i, soit les balais de f_j, pour le calcul de $F_{i,j}$.

70. **Précontrôle parfait.** — Nous avons déjà reconnu la nécessité d'un précontrôle assez rigoureux pour ne laisser possibles que les erreurs mécaniques de l'organe d'inscription (54, C).

La méthode employée pour le précontrôle des cartes perforées consiste à faire passer les cartes, après perforation, dans un appareil de contrôle sur le clavier duquel un calculateur répète l'inscription des nombres représentés sur la carte; l'appareil signale toute discordance entre les nombres déjà inscrits sous forme de perforations et les nombres inscrits par le calculateur. Toute carte mal perforée est détruite et remplacée par une carte perforée correctement. Cette méthode assure l'exactitude des cartes conservées et constitue par conséquent, pour ces dernières, un précontrôle parfait.

Mais elle est insuffisante pour le précontrôle des documents d'inscription binaires pour lesquels, ainsi qu'il résulte de la description de ces documents donnée au n° 68, la correction d'une perforation erronée entraînerait la destruction d'un document entier. Mais notre comparateur permet d'appliquer à ces documents le contrôle par double inscription sous une forme qui évite mécaniquement toute perforation erronée : chaque nombre est inscrit, par un premier calculateur, au moyen d'un clavier qui fait saillir les poinçons correspondant aux perforations qui représenteront ce nombre, mais n'effectue pas ces perforations; simultanément, ce même nombre est inscrit par un second calculateur, au moyen d'un autre clavier qui forme comparateur avec le premier; la commande de la perforation ne devient effective que si le comparateur marque l'égalité des deux nombres inscrits; le précontrôle parfait est donc assuré, pourvu que l'on admette, comme d'usage, que si deux opérations donnent des résultats identiques les données ont été correctement inscrites dans les deux cas.

71. Signe d'un nombre. Comparaison des signes. — La comparaison mécanique d'un nombre N à zéro donne le signe de ce nombre sous forme mécanographique, le courant passant par le circuit B (68) ou par le circuit B′ selon que N est positif ou négatif. Un nombre nul jouant toujours un rôle spécial, le cas où N est nul peut être mis à part. Les signes d'un nombre sont ainsi les deux termes d'une alternative : ils peuvent donc se représenter par les nombres 0 et 1 dans le système binaire. Un comparateur permet dès lors de chercher le signe d'un produit de deux facteurs, pourvu que l'on réunisse les circuits B et B′ qui marquent, l'un que le premier nombre est supérieur au second, l'autre la relation contraire.

72. Résolution d'une équation. — Si $C(x \mid a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est un complexe d'approximation (44) d'une fonction $f(x \mid a_1, a_2, \ldots, a_p)$, pour une marge μ et un domaine Δ, $C'(x \mid a_1, \ldots, a_p)$ le complexe d'approximation de la dérivée $f'(x \mid a_1, \ldots, a_p)$ de la fonction f par rapport à x, pour la même marge et le même domaine, on peut chercher une racine de l'équation $f = 0$ (où x est l'inconnue et les a des constantes), intérieure au domaine Δ, par approximations successives, en itérant les opérations suivantes :

1° calculer les valeurs C_i et C'_i de C et C′ pour une valeur x_i de x;

2° chercher les signes de C_i et C'_i;

3° choisir une valeur x_{i+1} de x inférieure ou supérieure à x_i, selon que C_i et C'_i sont de même signe ou de signes contraires.

Si nous admettons provisoirement que l'on peut construire, dans le système binaire, une machine capable d'effectuer le calcul d'un complexe, les opérations 1°, 2° et la comparaison des signes de C_i et de C'_i peuvent s'effectuer automatiquement.

Convenons alors de choisir les valeurs x_i de la manière suivante :

a. La capacité du chiffreur qui marque la valeur de x étant n, on prend $x_1 = 2^n$.

b. D'une manière générale, si x_i a pour figuration binaire $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_{n-i+1} 100 \ldots 0}$, où les a sont égaux à 0 ou 1, on prend, si x_i est trop fort,

$$x_{i+1} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_{n-i+1} 010 \ldots 0},$$

si x_i est trop faible,

$$x_{i+1} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_{n-i+1} 110 \ldots 0}.$$

On peut réaliser très simplement un mécanisme effectuant automatiquement ces opérations : des cames, disposées en hélice sur un arbre tournant, donnent le courant aux circuits des ordres binaires successifs et décroissants du chiffreur qui marque la variable x_i, par l'intermédiaire d'un dispositif à enclenchement dont l'effet, retardé, ne devient définitif que si le courant sort du comparateur des signes de C_i et C'_i par le circuit qui marque que x_i est trop faible. Cet organe constitue un inscripteur rythmique (10) documentaire.

Grâce au comparateur et à cet inscripteur, la résolution d'une équation à une variable peut être effectuée automatiquement par notre machine à calculer binaire, pourvu que la fonction dont on cherche le zéro admette une dérivée.

En particulier, la recherche d'un quotient, d'une racine carrée ou d'une racine cubique revient à la résolution des équations :

$$ax - b = 0,$$
$$x^2 - a = 0,$$
$$x^3 - a = 0.$$

La figure 13 représente un schéma de connexions d'une machine à multiplier et diviser de capacité binaire 5. Le comparateur est schématisé en 30 et l'inscripteur rythmique en 37.

Remarquons encore que la méthode de calcul précédente est celle à laquelle conduit la définition même du quotient entier, de la racine carrée entière ou de la racine cubique entière. Cette méthode a été appliquée à la recherche du quotient dans la machine électromagnétique de Torrès y Quevedo [19]. Cette machine calculait dans le système décimal. Le rapprochement de l'ingénieux mécanisme que dut imaginer Torrès pour la comparaison à un dividende partiel du produit du diviseur par la partie correspondante du quotient, et des dispositifs que nous venons de décrire nous paraît mettre en évidence la supériorité du système binaire sur le système décimal dans le calcul mécanique.

73. Addition. — Les seuls chiffres du système binaire étant o et 1, la totalisation des unités d'un même ordre h de nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dont on cherche la somme S revient au dénombrement de ceux de ces nombres dont la figuration binaire comporte le chiffre 1 dans l'ordre h.

Or, un nombre entier pouvant jouer un rôle cardinal ou un rôle ordinal, il est possible d'envisager deux espèces de représentation matérielle d'un tel nombre. Nous allons montrer que, dans le système binaire, c'est une représentation ordinale des entiers qui est la plus favorable à l'addition mécanique (1).

A. Les chiffres 1 de l'ordre h des figurations binaires des

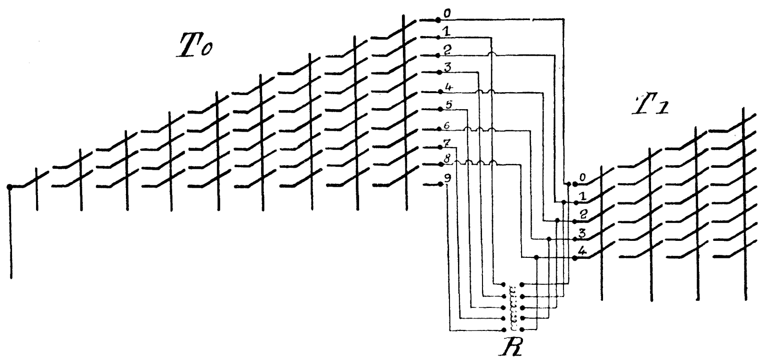


Fig. 12. — *Triangle d'addition.*

L'ensemble des commutateurs représentés en T_0 et T_1 par des traits verticaux assure la totalisation des unités du même ordre binaire des différents termes d'une somme, ainsi que le report des retenues d'un ordre au suivant. Le fonctionnement de cet appareil est quasi instantané.

Le totalisateur binaire, ensemble des triangles d'addition des divers ordres, est l'élément fondamental des dispositifs de traduction d'un nombre du système binaire dans un autre système de numération, ou inversement, et du dispositif de multiplication.

nombres $a_0, \ldots, a_n$ étant représentés chacun par la fermeture,

(1) H. Genaille a déjà utilisé une telle représentation dans ses réglettes d'addition et de multiplication [1].

ou plus généralement par une modification d'un circuit électrique, nous avons construit un système de connexions qui fait apparaître le courant dans un élément appartenant à un ensemble préalablement ordonné, et dont le rang est la somme des unités d'ordre h des nombres $a_0, \ldots, a_n$.

La figure 12 représente un schéma de telles connexions. Les traits verticaux en T_0 ou T_1 représentent des commutateurs affectés aux nombres $a_0, a_1, \ldots$; chacun d'eux porte un jeu de lames, schématisées par des traits obliques, qui peuvent recevoir le courant de plots, schématisés par des traits horizontaux, et l'envoyer à d'autres plots situés, chacun, soit plus haut que le plot d'arrivée du courant si le commutateur marque zéro, soit sur la même horizontale que ce dernier plot si le commutateur marque 1. On voit aisément que celui des plots numérotés par lequel sort le courant a pour rang le nombre des commutateurs qui marquent 1.

Nous appellerons ce dispositif un *triangle d'addition.*

Pour assurer les reports, on ajoute à chacun des commutateurs du triangle d'addition d'ordre $h+1$ des lames dites *supplémentaires*, en nombre égal à la partie entière $E\left(\frac{p}{2}\right)$ de $\frac{p}{2}$, p étant le rang du plot de sortie du triangle d'ordre h dont le rang est le plus élevé; on numérote ces lames à partir de 1 dans le même sens que les plots de sortie du triangle d'ordre $h+1$, le nombre de ces derniers devenant ainsi $n+1+E\left(\frac{p}{2}\right)$; puis on réunit les plots de sortie de rangs $2k$ et $2k+1$ $\left[0 \leq k \leq E\left(\frac{p}{2}\right)\right]$ du triangle d'ordre h à la lame supplémentaire de rang k du premier commutateur du triangle d'ordre $h+1$, en plaçant en série dans le circuit issu du plot de rang $2k+1$ un enroulement d'un électro-aimant R à $E\left(\frac{p}{2}\right)$ enroulements. De la sorte, si la somme S_h des unités d'ordre h provenant des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et des unités d'ordre h provenant du report de l'ordre $h-1$ à l'ordre h est $2k$ ou $2k+1$, le courant passe dans la lame de rang k du premier commutateur d'ordre $h+1$ et ajoute k unités de report aux unités d'ordre $h+1$ provenant des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$; et de plus, si la somme S_h est $2k+1$, l'électro-aimant R est excité, ce qui marque le chiffre 1 dans l'ordre h de la représentation binaire du nombre S.

Nous appellerons *chiffreur total* le chiffreur constitué par les électro-aimants R, *totalisateur binaire* l'organe constitué par les triangles d'addition des ordres successifs et le chiffreur total.

B. Un totalisateur binaire possède les propriétés suivantes :

1° Son *action* est *extrêmement rapide*, car :

a. les circuits sont constitués au cours même de l'inscription des termes de la somme;

b. tous les termes de la somme peuvent être inscrits simultanément.

2° Le *résultat* de l'*addition* est *mécanographique*, puisqu'il est marqué par la disposition des armatures des électro-aimants du chiffreur total.

C. Il est aisé de comparer la rapidité d'un totalisateur binaire à celle d'un totaliseur décimal de même capacité décimale c.

La capacité décimale de ces totalisateurs étant c, le circuit totalisateur peut contenir p électro-aimants en série $[p = E_2(10^c)]$; si τ désigne la durée de fonctionnement d'un électro-aimant, la durée de fonctionnement du totalisateur, en supposant que tous les électro-aimants soient identiques, ce qui est rationnel, est $\lambda^2\tau$ lorsque le nombre des électro-aimants excités est λ.

Dans un ensemble nombreux d'additions, on peut admettre, si la capacité du totalisateur n'est pas notablement supérieure au nombre des chiffres des termes de la somme, que le nombre des chiffres 1 figurant dans le résultat d'une addition prend toutes les valeurs possibles de 0 à p avec une égale probabilité. On peut admettre encore, γ désignant la complexité (49) de l'additionneuse, que les additions de 2, 3, ..., γ termes sont en nombre égal si la complexité du totalisateur n'est pas notablement supérieure au nombre des termes des sommes effectuées.

Si n désigne le nombre de termes figurant dans les additions effectuées, le nombre des sommes de λ chiffres est $\dfrac{n}{p\frac{\gamma+2}{2}}$, et la durée de ces additions est

$$T_2 = \frac{2n\tau}{p(\gamma+2)} \sum_{\lambda=1}^{p} \lambda^2 = \frac{n(p+1)(2p+1)}{3(\gamma+2)}\tau.$$

Si θ désigne la durée d'une addition dans un totalisateur décimal, où toutes les opérations ont même durée, la durée des additions est

$$T_{10} = n\theta.$$

Le quotient

$$\rho_a = \frac{T_2}{T_{10}} = \frac{(p+1)(2p+1)}{3(\gamma+2)}\frac{\tau}{\theta}$$

exprime le rapport de la durée moyenne d'une addition dans le système binaire à sa durée dans le système décimal.

Par exemple, pour $c = 15$, la vitesse des additionneuses décimales est de 120 opérations par minute; donc $\theta = 0{,}5$. D'autre part, nous avons expérimenté un électro-aimant pour lequel $\tau = 0{,}005$ seconde. Nous pouvons prendre enfin $\gamma = 20$, le nombre des sommes de 20 termes étant relativement fréquent dans les calculs de la Mécanique céleste. Par suite,

$$\rho_a = \frac{46 \times 91}{3 \times 22} \cdot \frac{0{,}005}{0{,}5} = \frac{41}{66} \# \frac{2}{3}.$$

Pour les mêmes valeurs de τ et θ qui, étant des constantes déterminées par la construction même des organes, ne peuvent guère varier, certaines valeurs de γ en fonction de c, pour ρ_a égal à 1, sont données par le tableau suivant :

c.	γ.
5	0
7	2
10	6
12	9
15	15

Ce tableau montre, en particulier, que *notre totalisateur binaire est supérieur à un totalisateur décimal quel que soit le nombre de termes de la somme, si le nombre des chiffres de la représentation décimale de la somme n'est pas supérieur à 7.*

D. Un totalisateur binaire construit sur le modèle d'un totalisateur décimal, c'est-à-dire dont les chiffreurs seraient constitués par des roues ou des réglettes, serait plus compliqué et plus lent qu'un totalisateur décimal de même capacité décimale. En effet, comme il est pratiquement impossible de tailler des roues de moins de six dents, les chiffreurs binaires seraient formés de roues d'au moins six dents groupées deux par deux pour représenter les chiffres 0 et 1. Si c est la capacité décimale du totalisateur, ces chiffreurs binaires devraient comporter p roues en moyenne : ils seraient donc plus compliqués que les chiffreurs décimaux. Ils devraient comporter aussi p organes de report, et, comme les reports s'effectuent successivement d'un ordre (décimal ou binaire) à l'ordre immédiatement supérieur, la durée de fonctionnement du totalisateur binaire serait supérieure à celle du totalisateur décimal.

E. Nous allons examiner les diverses applications de notre totalisateur binaire, autres que l'addition : la multiplication, le calcul des signes, la traduction d'un nombre du système décimal dans le système binaire et inversement.

74. **Multiplication.** — Neper a montré [21] que le produit de deux nombres représentés dans le système binaire peut s'obtenir ainsi : on écrit l'un des nombres de manière que ses chiffres successifs se trouvent sur les verticales successives d'un quadrillage, et l'autre nombre de manière que ses chiffres successifs se trouvent sur les horizontales successives du même quadrillage; on écrit ensuite le chiffre 1 au croisement de toute verticale et de toute horizontale en tête desquelles se trouve le chiffre 1, et le chiffre 0 à tous les autres croisements de verticales et d'horizontales; on obtient le produit en totalisant les unités qui se trouvent sur une même diagonale, les diagonales successives étant d'ordres binaires 0, 1, 2, ...

Nous avions retrouvé cette règle [20] au moment où M. d'Ocagne a signalé la trouvaille de M. Malassis [22] (1), et l'avions mise en œuvre dans la réalisation mécanique de la multiplication.

---

(1) Nous avons trouvé depuis que E. Lucas [23] avait déjà signalé comme une curiosité la « multiplication par le damier » de Neper.

A. Nous considérons actuellement comme la plus simple la réalisation que voici ([1]) :

L'un des facteurs du produit est représenté par un jeu de barres parallèles B_1 qui peuvent occuper deux positions marquant respectivement les chiffres 0 et 1. L'autre facteur est représenté par un jeu de barres B_2 parallèles entre elles et au plan des précédentes, mais perpendiculaires à ces dernières, et qui peuvent occuper deux positions marquant respectivement les chiffres 0 et 1. Au croisement de deux barres et perpendiculairement à celles-ci, se trouve un arbre qui, muni de lames, constitue un commutateur d'un totalisateur binaire, les connexions établies entre les commutateurs situés sur une même diagonale étant celles d'un triangle d'addition, et les connexions établies entre les triangles d'addition ainsi construits et un ensemble d'électro-aimants R qui constitue un chiffreur binaire étant celles d'un totalisateur binaire. Les deux positions d'un commutateur sont réglées par la position des barres B_1 et B_2 au croisement desquelles se trouve ce commutateur, au moyen d'un enclenchement qui ne fait marquer 1 au commutateur que si les deux barres B_1 et B_2 marquent elles-mêmes 1.

Nous avons appelé cet organe un *losange de multiplication.*

B. Cet organe possède les propriétés suivantes :

1° Son *action* est *extrêmement* rapide, car :

a. les circuits déterminant le produit sont constitués au cours même de l'inscription des facteurs;

b. les deux facteurs peuvent être inscrits simultanément.

2° Le *résultat* de la *multiplication* est *mécanographique*, puisqu'il est marqué par la position des armatures des électro-aimants du chiffreur R.

C. Évaluons, comme précédemment, le rapport de la durée

([1]) Le dispositif représenté sur la figure 13 ne diffère de cette réalisation que par le mode de commande des commutateurs, qui est électromécanique et non purement mécanique comme dans le dispositif décrit dans le texte.

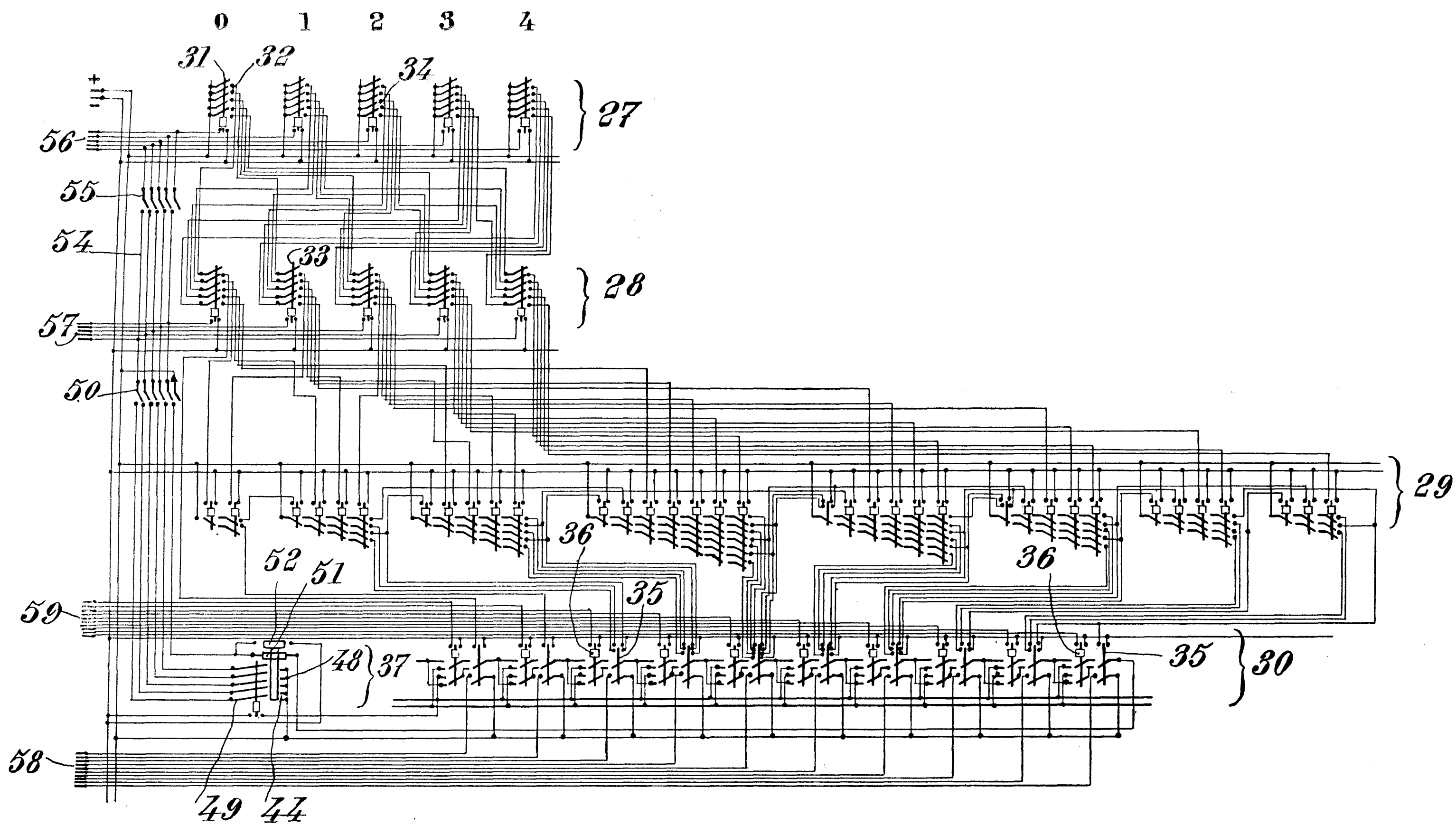


Fig. 13. — *Schéma d'un dispositif de multiplication et de division automatiques.*

Les facteurs d'un produit, inscrits sur les chiffreurs 56, 57, se combinent dans les organes 27, 28, qui constituent le losange de multiplication, pour actionner les commutateurs des divers ordres du totalisateur binaire 29. Le produit est marqué par l'ensemble des commutateurs tels que 35, et peut être recueilli sur les circuits 58, qui constituent un chiffreur binaire. Dans une division, les commutateurs 35 forment un comparateur 30 avec les commutateurs tels que 36, actionnés par les circuits du chiffreur 59 sur lequel est inscrit le dividende. L'inscripteur rythmique 37 inscrit sur 27 les chiffres successifs du quotient; le produit du quotient partiel ainsi formé par le diviseur, inscrit sur 28, est comparé au multiplicande, et le quotient partiel est complété ou modifié selon le résultat de cette comparaison d'une multiplication dans le système binaire à sa durée moyenne dans le système décimal, pour des chiffreurs de même capacité décimale c.

Une multiplication binaire se réduisant à une seule addition, la durée de n multiplications se calcule comme au numéro précédent; elle est égale à

$$T'_2 = \frac{n(p+1)(2p+1)}{6}\tau.$$

Pour une machine décimale à entraîneur [1], le nombre de tours de l'entraîneur que nécessite une multiplication est égal à la somme des chiffres du multiplicateur. Il est rationnel d'admettre que la probabilité est la même que le multiplicateur ait 1, 2, ..., c chiffres. Le nombre des multiplicateurs de i chiffres ($i<c$) est donc $\frac{n}{c}$. On peut encore admettre que la probabilité est la même que les chiffres d'un multiplicateur de i chiffres soient 0, 1, ... 9. La somme des chiffres des $\frac{n}{c}$ multiplicateurs de i chiffres est donc $\frac{5ni}{c}$. Par suite, la durée de la rotation de l'entraîneur au cours de n multiplications est

$$\theta \sum_{i=0}^{c} \frac{5ni}{c} = \frac{5n(c+1)}{2}\theta.$$

La durée des déplacements du chariot est $nc\theta$. Par suite, la durée de n multiplications est

$$T'_{10} = \frac{5n(c+1)}{2}\theta + nc\theta = \frac{n(7c+5)}{2}\theta.$$

Le quotient

$$\rho_m = \frac{T'_2}{T'_{10}} = \frac{(p+1)(2p+1)}{3(7c+5)}\frac{\tau}{\theta}$$

exprime, comme précédemment, le rapport de la durée moyenne d'une multiplication dans le système binaire à sa durée moyenne dans le système décimal.

---

[1] Les machines à entraîneur sont les plus robustes des multiplieuses et les seules qui soient vraiment d'usage courant; c'est pourquoi nous les prenons pour terme de comparaison, de préférence aux multiplieuses de la famille de la machine de Léon Bollée [1], bien que ces dernières soient plus rapides que les machines à entraîneur.

La vitesse de rotation de l'entraîneur d'une machine à multiplier est de 240 tours par minute; pour $\tau = 0{,}005$, le tableau suivant donne certaines valeurs de ρ_m en fonction de c :

c.	ρ_m.
5	0,10
7	0,16
10	0,21
12	0,25
15	0,31

Ce tableau montre que *la multiplication, dans le système binaire, est toujours beaucoup plus rapide que dans le système décimal.*

75. **Somme algébrique.** — Nous avons déjà montré (71) que notre comparateur permettait de déterminer aisément et instantanément le signe d'un produit de deux facteurs. Il reste à étudier la détermination du signe d'une somme algébrique.

Nous avons vu (26) que les nombres négatifs sont généralement représentés, en calcul mécanique, par leur complément et une indication matérielle de leur signe, et que ce mode de représentation est nécessaire pour les totalisateurs irréversibles; notre totalisateur binaire appartient à cette dernière catégorie; il doit donc être complété par des organes d'overdraft et de calcul du signe de la somme.

Nous ne décrirons pas l'overdraft, qui, constitué par un levier muni d'une articulation mobile permettant de faire agir ce dernier soit comme un levier du premier genre, soit comme un levier du second genre, est de réalisation très simple [20].

Nous examinerons avec plus de détails la *question, nouvelle en Calcul mécanique, que pose le calcul des signes, pour un totalisateur où tous les termes d'une addition sont inscrits simultanément.* L'inscription simultanée de tous les termes ne permet plus, en effet, de marquer le changement du signe du nombre au passage de l'élément du chiffreur d'ordre le plus élevé par la valeur zéro. Mais nous allons montrer que l'on peut trouver le signe de la somme d'un nombre quelconque de termes par la considération des reports qui devraient s'effectuer de l'ordre le plus élevé du chiffreur à des ordres plus élevés encore.

En effet, lorsqu'on remplace par son complément un terme soustractif de module a, on effectue en réalité l'addition de $2^q - a$ (q désignant la capacité du totalisateur) au lieu de la soustraction de a. Si les termes soustractifs sont au nombre de k, et si b désigne l'un quelconque des termes additifs, on remplace donc la somme algébrique

$$S = \Sigma b - \Sigma a,$$

par la somme

$$S' = k2^q + \Sigma b - \Sigma a.$$

Par suite, S est positif, négatif ou nul selon que S′ est supérieur, inférieur ou égal à $k2^q$.

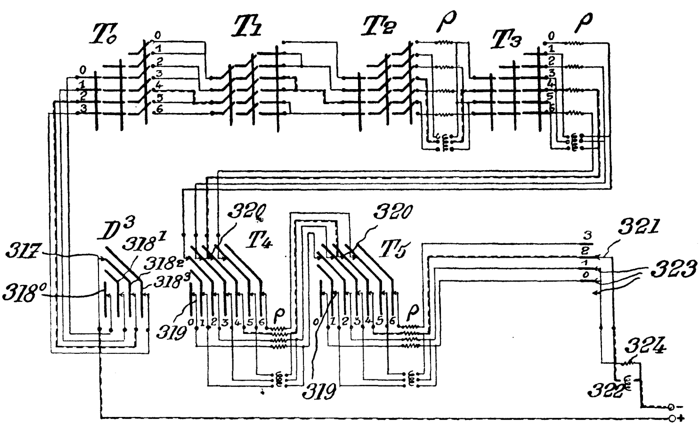


Fig. 14. — *Schéma d'un calculateur de signes.*

Les triangles d'addition $T_0, \ldots, T_3$ peuvent additionner simultanément trois nombres de quatre chiffres. Les traits forts 318 schématisent des règles conductrices portées par un cadre, mobile sous les balais 317, 319, 320, 321, 323, qui sont fixes; pour chaque nombre négatif inscrit sur le totalisateur, ce cadre avance d'un pas; il en résulte, d'une part que le rang du plot d'arrivée du courant dans T_0 augmente de 1, et d'autre part que le plot de sortie du courant est en face de 321 ou de 323, selon que le nombre est positif ou négatif.

La ligne en trait coupé montre le cheminement du courant pour le calcul de la somme algébrique 1011 — 011 — 101.

Si le totalisateur est prolongé par les triangles d'addition nécessaires à l'inscription du nombre $\gamma 2^q$, γ désignant la complexité du totalisateur, le nombre S′ est marqué par les électro-aimants du chiffreur total du totalisateur, et par des électro-aimants affectés aux ordres q, $q+1$, ... que nous appellerons les *électro-aimants du* *signe*. D'autre part, pour former le nombre $2^q - a$, on peut permuter les chiffres 0 et 1 de la figuration binaire de a et ajouter une unité d'ordre 0 au nombre formé. Si l'on effectue la somme k de ces unités au moyen d'un totalisateur auxiliaire, on peut considérer les électro-aimants du chiffreur total de ce dernier comme représentant, soit des unités d'ordres 0, 1, 2, ..., soit des unités d'ordres q, $q+1$, $q+2$, ..., et l'on peut faire commander par ces électro-aimants, d'une part, en vue de l'addition du nombre k, des commutateurs connectés avec les triangles d'addition d'ordres 0, 1, 2, ... comme le sont les autres commutateurs des mêmes ordres, et d'autre part, en vue de la comparaison de S' et de $k2^q$, des commutateurs constituant avec les commutateurs commandés par les électro-aimants du signe les couples d'ordres les plus élevés d'un comparateur.

L'ensemble formé par l'overdraft et le comparateur particulier que nous venons de décrire réalise donc la fonction somme algébrique; nous l'appellerons un *calculateur de signes* (*fig.* 14). Son action a pour durée celle d'un totalisateur de capacité 1 et de complexité égale au nombre des termes qui peuvent devenir négatifs : elle est donc extrêmement rapide.

76. **Traduction.** — Les fonctions de traduction d'un nombre du système décimal dans le système binaire et inversement sont une conséquence de l'emploi du système binaire : elles sont donc propres à notre machine. Nous appellerons *traducteurs* les organes de ces fonctions : le *traducteur décimal-binaire* permet de passer du système décimal au système binaire; le *traducteur binaire-décimal* permet le passage inverse.

La traduction d'un nombre d'un système dans l'autre s'effectue très simplement grâce à l'inscription simultanée de tous les termes d'une somme, que permet notre totalisateur binaire. Pour exposer, par exemple, le principe du traducteur décimal-binaire, supposons que l'inscription d'un nombre dans le système décimal — nous dirons brièvement l'*inscription décimale* du nombre, et, de même, dans le système binaire, l'*inscription binaire* — s'effectue au moyen d'un clavier complet asservi. A chaque ordre décimal est attribuée une barre qui peut s'avancer d'une longueur variable, réglée par la position de la touche que l'on abaisse dans cet ordre décimal. Cette barre porte un jeu de contacts électriques qui glissent sur des plots, attribués, chacun, à l'un des ordres binaires dans lesquels la figuration binaire des nombres représentés par les diverses touches de cet ordre décimal peut comporter le chiffre 1.

Les connexions électriques qui relient les plots du même ordre binaire sont celles d'un triangle d'addition et les triangles d'addition des divers ordres sont connectés de manière à former un totalisateur binaire. Enfin, la forme des plots est telle que, lorsque la barre a pris la position correspondant à une touche déterminée, les circuits sont disposés pour l'addition du nombre 1 dans chacun des ordres binaires où la figuration du nombre représenté par cette touche contient le chiffre 1. Lorsque toutes les touches décimales représentant un nombre ont été abaissées, les barres sont mises simultanément en position par le moteur; par suite, en même temps, les circuits du totalisateur binaire se disposent pour la totalisation des nombres représentés par chacune des touches abaissées; la somme de ces nombres, c'est-à-dire le nombre inscrit sur le clavier, se marque donc sur le chiffreur total binaire presque instantanément.

Pour évaluer de façon plus précise la durée de la traduction, remarquons que l'on peut adopter, pour les connexions du totalisateur binaire, la disposition particulière qui consiste à faire passer chaque fil de report du triangle d'addition d'ordre h dans des électro-aimants actionnant des commutateurs supplémentaires dans les triangles d'addition d'ordres $h+1$, $h+2$, ... [20]. En tenant compte que le nombre de commutateurs des triangles d'addition décroît avec h pour les grandes valeurs de h, et que l'électro-aimant de rang le plus élevé est toujours d'ordre $p\,[p = \mathrm{E}_2(10^c)]$ pour l'inscription binaire d'un nombre de capacité décimale c, on trouve que la durée de l'action du traducteur est au plus

$$\mathrm{T}''_b = p\tau,$$

τ désignant la durée de fonctionnement d'un électro-aimant de report. Comme l'armature d'un électro-aimant de report est plus chargée que celle des autres électro-aimants, puisqu'elle porte quelques lames de contact, il paraît difficile de réduire τ à moins de 0,01 seconde ; le tableau suivant :

c.	T''_b.
5..........	0,17
7..........	0,24
10..........	0,34
12..........	0,40
15..........	0,50

montre que, néanmoins, jusqu'aux nombres de 12 chiffres, la durée de la traduction ne dépasse pas la somme des durées du retour des barres de commande à leur position initiale et du fonctionnement de l'imprimeuse, c'est-à-dire que la traduction ne ralentit pas le rythme de l'inscription sur une machine à clavier complet du type courant.

La traduction d'un nombre du système binaire dans le système décimal s'effectue de manière analogue à celle qui vient d'être décrite.

Il est clair que l'on peut établir, sur le même principe, des traducteurs permettant le passage d'un système d'unités quelconques à un système où ne figure qu'une unité sans sous-multiple, la mesure de la grandeur à laquelle s'appliquent ces deux systèmes d'unités étant figurée dans le système binaire ; on peut, par exemple, transformer la mesure d'un arc exprimée par des degrés, minutes et secondes, en secondes ou en parties du rayon ; ou encore la mesure d'une longueur exprimée par des pieds, pouces et lignes, en lignes.

77. **Schéma d'ensemble d'une machine à calculer propre aux calculs de la Mécanique céleste.** — Nous envisageons comme suit la réalisation de principe d'une machine à calculer destinée aux calculs de la Mécanique céleste (*fig.* 15).

A. Nous décrirons d'abord succinctement les organes que comporterait cette machine.

1° *Un chiffreur commun* est constitué par des électro-aimants E_1 dont l'armature permet ou non, suivant que sa position marque le chiffre 1 ou le chiffre 0, l'accrochage de barres parallèles B_1, affectées aux ordres binaires successifs, par les crochets C_1 qui leur correspondent.

2° Un totalisateur binaire T est constitué par des commutateurs disposés aux croisements d'un quadrillage, de telle manière que les commutateurs d'une même rangée R_i, perpendiculaire à la direction des barres B_1, représentent les chiffres des ordres binaires

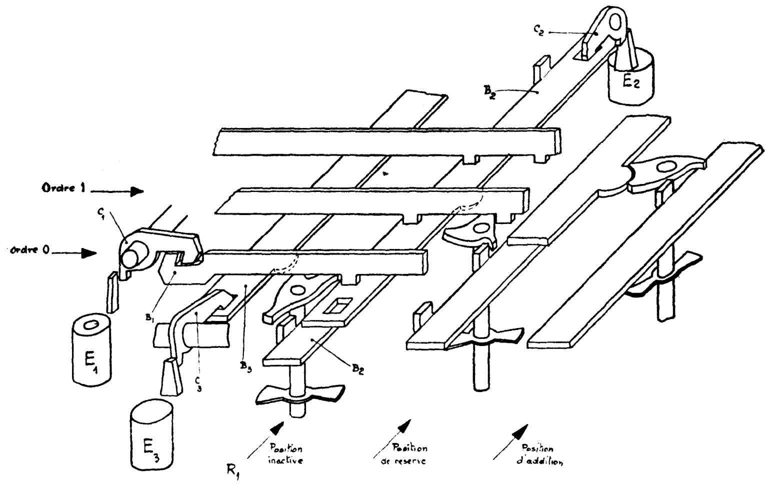


Fig. 15. — *Schéma d'ensemble d'une machine binaire.*

Les barres parallèles B_1, en nombre égal à la capacité binaire de la machine, constituent le chiffreur commun. Les rangées de commutateurs telles que R_1 perpendiculaires à ces barres, constituent les chiffreurs de la machine; leurs lames peuvent être connectées en triangle d'addition, en comparateur, etc. Selon que les électro-aimants E_1 sont excités ou non, les barres B_1 sont ou non tirées vers la gauche par les crochets C_1, marquant les chiffres 1 ou 0. Elles font ainsi passer à la position de réserve tous les commutateurs qui étaient en position inactive; mais seuls restent en position de réserve ceux dont la barre B_2 est tirée vers l'arrière. Les nombres inscrits sont engagés dans une opération lorsque la barre B_3 est tirée vers l'avant.

successifs d'un même terme, et constituent par suite le chiffreur sur lequel ce terme est inscrit, et que les commutateurs d'une même colonne C_h, parallèle à la direction des barres B_1, soient ceux d'un même triangle d'addition.

3° Les commutateurs peuvent tourner sous l'action d'un double enclenchement constitué par :

a. un levier *l*, coaxial à chaque commutateur, et qui peut occuper trois positions : une position inactive, une position de réserve, une position de totalisation;

b. les barres B_1 qui servent à faire passer les leviers tels que l de la position inactive à la position de réserve;

c. des barres B_2, B_3, affectées par paire à chaque chiffreur, et qui servent, la première à maintenir les leviers l dans la position de réserve et à les libérer de cette position, la deuxième à amener les leviers l de la position de réserve à la position de totalisation; ces barres sont mises en mouvement par un embrayage déclenché par des électro-aimants de commande E_2, E_3.

4° Un overdraft commandé par un électro-aimant E_4 est adjoint à chaque chiffreur; il est complété par un électro-aimant indicateur de signes, propre à chaque chiffreur, et un calculateur de signes tel que celui qui est décrit au n° 75.

5° Les plots de sortie du totalisateur peuvent être reliés directement à des électro-aimants constituant l'un des chiffreurs Γ' d'un comparateur dont l'autre chiffreur Γ'' est constitué par un second jeu d'électro-aimants actionnés, suivant les besoins, par divers organes; documents d'inscription, tables mécaniques, etc.; les circuits de sortie de ce comparateur peuvent être connectés aux organes de commande par des électro-aimants de commande E_c.

6° Un losange de multiplication est disposé de manière que les barres M_1, M_2 d'inscription des facteurs soient inclinées à 45° sur la direction des barres B_1 ; les barres M_1, M_2 sont tirées par deux barres communes P_1, P_2 auxquelles elles sont reliées par des ressorts, de telle manière que les barres M_1 et M_2 puissent rester immobiles dans le cas où elles sont retenues par les leviers λ analogues aux leviers l. Il est adjoint à ce losange de multiplication un comparateur de signes [71].

7° Un traducteur binaire-décimal T_d est formé de commutateurs commandés par une barre B_d et un électro-aimant de commande E_d. Ses fils de sortie sont connectés à des électro-aimants qui commandent les touches d'un clavier complet décimal, ce clavier commandant lui-même une imprimeuse.

8° Les électro-aimants du chiffreur commun peuvent être connectés au totalisateur ou au losange de multiplication de manière à leur servir de chiffreur total.

9° Des tables numériques $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_p$, le document d'inscription et le document de commande sont constitués par des rouleaux ou des bandes de métal ou de carton perforés. Chaque rouleau peut être remplacé par plusieurs rouleaux montés sur des dérouleurs séparés, par exemple pour permettre d'intercaler l'itération d'une suite d'opérations dans une suite d'opérations non itérées, ou pour permettre de connecter le comparateur aux balais de lecture de la partie d'une table mécanique qui se rapporte aux valeurs de l'argument voisines de la valeur donnée.

10° Un inscripteur rythmique commandé par le comparateur Γ peut inscrire des nombres, comme il a été indiqué au n° 72, sur le chiffreur commun ou sur les chiffreurs du losange de multiplication.

11° Un appareil constitué par un inscripteur décimal, un traducteur décimal-binaire et une imprimeuse perfore les supports des documents d'inscription et de commande; nous l'appellerons la *perforatrice*. Il peut être indépendant du reste de la machine ou en être solidaire.

B. Voici quel serait, dans ses traits les plus caractéristiques, le fonctionnement de cette machine :

1° Tous les nombres, données et résultats, sont d'abord inscrits sur le chiffreur commun, qui actionne les barres B_1 et permet ainsi le transfert de ces nombres dans l'un quelconque des chiffreurs de la machine. Le chiffreur commun et les barres B_1 constituent donc le transcripteur, organe de la fonction Enchaînement.

2° Si l'on tire une barre de réserve B_2 en même temps que B_1, le nombre est transféré dans le chiffreur qui correspond à cette barre : il est ainsi mis en réserve. Lorsque la barre B_1 est libérée, le nombre est effacé.

L'ensemble des barres B_2 et des leviers l remplit donc les fonctions Réserve et Total.

3° Si l'on tire une barre de totalisation B_3 d'un chiffreur après la mise en réserve d'un nombre sur ce chiffreur, les commutateurs correspondants sont actionnés, et ce nombre entre dans le totalisateur. Si le totalisateur est vide, ce nombre est transféré, suivant la commande effectuée, dans le chiffreur commun, ou dans le chiffreur Γ' du comparateur : il peut ensuite, dans le premier cas être transféré dans un autre chiffreur, dans le second être comparé à un autre nombre — en particulier dans le calcul de la racine d'une équation ou le calcul d'une fonction mise sous forme de table mécanique. Si d'autres nombres sont déjà dans le totalisateur, le nouveau nombre s'ajoute aux précédents; la somme se forme sur le chiffreur commun.

Lorsque la barre B_3 est libérée, le nombre revient en réserve. L'ensemble des barres B_3 et des commutateurs remplit donc les fonctions Addition et Sous-Total.

4° On peut transférer de façon analogue un nombre du losange de multiplication dans le chiffreur commun ou dans le traducteur binaire-décimal.

Dans le premier cas, le nombre est marqué par le chiffreur commun, dans le second, sa figuration décimale est marquée par le chiffreur décimal commandant l'imprimeuse.

78. Sans entrer dans des détails plus complets, nous pensons avoir montré qu'il est possible de construire une machine à calculer capable, sans intervention aucune du calculateur, d'exécuter une suite quelconque de calculs, de mettre en réserve les résultats intermédiaires, de lire mécaniquement une table d'une fonction, et d'imprimer tous les nombres que marquent ses chiffreurs ; nous pensons même que, eu égard à sa puissance, une telle machine peut être considérée comme d'une grande simplicité.

Pour en établir la formule fonctionnelle, nous remarquerons encore que, les liaisons entre les divers organes de la machine étant toutes électriques, la construction de cette dernière ne se heurte à aucun des assujettissements de nature géométrique ou cinématique que l'on rencontre dans une machine purement mécanique où tous les mouvements sont provoqués ou guidés par des actions de contact : le nombre des organes d'une même fonction est donc, théoriquement, illimité et, pratiquement, très élevé.

Nous représenterons de tels ensembles d'organes similaires par des points de suspension placés entre deux symboles identiques, représentant la fonction que remplit chacun des organes de ces ensembles. Lorsque le nombre des organes d'un même ensemble est donné, nous l'écrirons dans un cercle interrompant la ligne de points.

La figure 3 représente la formule fonctionnelle de cette machine.

CHAPITRE VI.

QUELQUES EXEMPLES D'EXÉCUTION MÉCANIQUE DE CALCULS DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

A. — CALCUL DES COORDONNÉES ÉQUATORIALES D'UNE ÉTOILE EN FONCTION DE SES COORDONNÉES RECTILIGNES DANS UN CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE.

79. M. I. Lagarde a montré [24] que les coordonnées équatoriales α, δ, d'une étoile, les coordonnées équatoriales $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, du centre du cliché, et les coordonnées rectilignes corrigées X_0, Y_0, de cette étoile sur ce cliché sont liées par les relations

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}(\alpha - \mathcal{A}) = X_0 \sec(\mathcal{D} + y) \cos y \sin 1',$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tang}\delta = \cos(\alpha - \mathcal{A}) \operatorname{tang}(\mathcal{D} + y),$$

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tang} y = Y_0 \sin 1',$$

X_0 et Y_0 se déduisant des coordonnées rectilignes X, Y, qui figurent dans le catalogue photographique, par des relations de la forme

$$\text{(4)} \qquad X_0 = K(X + AX + BY + C),$$

$$\text{(5)} \qquad Y_0 = K(Y + A'X + B'Y + C'),$$

où K, A, B, C, A$'$, B$'$, C$'$ sont des constantes propres à ce catalogue.

80. Nous envisageons le calcul mécanique de α et δ en fonction de X, Y, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, de la façon suivante :

Un document de commande et une table mécanique B_c des constantes du catalogue sont établis, en vue de tous les calculs analogues, sous la forme d'une bande perforée. Au moment d'exécuter un calcul particulier, le calculateur confie les données X, Y, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, à deux opératrices qui les inscrivent avec précontrôle parfait (54, C et 70) sur une bande B_d. Les opérations mécaniques se déroulent ensuite comme suit, M, m, R_i désignant les chiffreurs de multiplicande, de multiplicateur et de réserve de rang i, et $T\{f(x)\}$ une table mécanique de la fonction $f(x)$:

1. Transfert de X de la bande B_d à M et R_1, simultanément.
2. Transfert de A de la bande B_c à m.
3. Multiplication. Inscription de AX sur R_2.
4. Transfert de A′ de la bande B_c à m.
5. Multiplication. Inscription de A′X sur R_3.
6. Transfert de Y de B_d à M et R_4, simultanément.
7. Transfert de B de B_c à m.
8. Multiplication. Inscription de BY sur R_5.
9. Transfert de B′ de B_c à m.
10. Multiplication. Inscription de B′Y sur R_6.
11. Transfert de C de B_c à R_7.
12. Transfert de C′ de B_c à R_8.
13. Transfert de K de B_c à M.
14. Mise en totalisation de R_1, R_2, R_5, R_7. Inscription de la somme sur m.
15. Multiplication. Inscription de X_0, sur R_1.
16. Mise en totalisation de R_3, R_4, R_6, R_8. Inscription de la somme sur m.
17. Multiplication. Inscription de Y_0, sur m.
18. Transfert de $\sin 1'$ de B_c à M.
19. Multiplication. Inscription de $\operatorname{tang} y$ sur Γ′.
20. Connexion de Γ″ et de $T\{\operatorname{tang} x\}$: calcul de y.

    Simultanément :

    20, *a*. Transfert de X_0 de R_1 à m.

    20, *b*. Multiplication. Inscription de $X_0 \sin 1'$ sur M.
21. Transfert de y de T à R_1.
22. Transfert de $\mathcal{D}$ de B_d à R_2.
23. Transfert de $\cos y$ de $T\{\cos x\}$ à m.
24. Mise en totalisation de R_1 et R_2. Inscription de $\mathcal{D}+y$ sur Γ′.
25. Connexion de Γ″ et de $T\{x\}$: calcul de $\sec(\mathcal{D}+y)$ et $\operatorname{tang}(\mathcal{D}+y)$.

    Simultanément :

    25, *a*. Multiplication. Inscription de $X_0 \cos y \sin 1'$ sur M.
26. Transfert de $\sec(\mathcal{D}+y)$ de T à m.
27. Multiplication. Inscription de $\operatorname{tang}(\alpha-\mathcal{A})$ sur R_1.
28. Transfert de $\mathcal{A}$ de B_d à R_2.

29. Transfert de $\tang(\mathcal{D} + y)$ de T à M.
30. Transfert de $\tang(\alpha - \mathcal{A})$ de R_1 à Γ'.
31. Connexion de Γ'' et de T $\{\tang x\}$: calcul de $(\alpha - \mathcal{A})$ et de $\cos(\alpha - \mathcal{A})$.
32. Transfert de $\alpha - \mathcal{A}$ de T à R_1.
33. Mise en totalisation de R_1 et de R_2. Inscription de α sur P : impression de α.
34. Transfert de $\cos(\alpha - \mathcal{A})$ de T à m.
35. Multiplication. Inscription de $\tang \delta$ sur Γ'.
36. Connexion de Γ'' et de T $\{\tang x\}$: calcul de δ.
37. Transfert de δ de T à P : impression de δ.

81. — Pour faciliter la comparaison des aménagements des calculs en vue, l'un du calcul mécanique et l'autre du calcul manuel, nous avons, dans le tableau ci-dessous, rapproché les deux suites correspondantes des résultats intermédiaires. La première est déduite du Mémoire précité de M. I. Lagarde.

A. — *Tableau comparatif.*

	Calcul manuel.		Calcul mécanique.
			A
Données.	$\mathcal{A}$	Document permanent B_c.	A'
	B		B
	C		B'
	X		C
	$\mathcal{D}$		C'
	A'		K
	B'		$\sin 1'$
	C'	Document temporaire B_d.	X
	Y		Y
	K		$\mathcal{A}$
			$\mathcal{D}$
	X		X
	AX		AX
	BY		A'X
	$X_0 : K$		Y
	X_0		BY
	Y		B'Y
	A'X		C
	B'Y		$X_0 : K$
	$Y_0 : K$		X_0
	Y_0		C'
	$f_1(Y_0)$(Table I)		$Y_0 : K$
	y		Y_0
	y''		$Y_0 \sin 1'$

$\mathcal{D}+y$	$X_0 \sin 1'$
$\log X_0$	y } simultanément
$\log\sec(\mathcal{D}+y)$	$\cos y$ } (Tab. Mécan.)
$f_2(y)$ (Table II)	$X_0 \cos y \sin 1'$
$t=\log\operatorname{tang}(\alpha-\mathcal{A})$	$\mathcal{D}+y$
$f_3(t)$ (Table III)	$\sec(\mathcal{D}+y)$ } simultanément
$\log(\alpha-\mathcal{A})$	$\operatorname{tang}(\mathcal{D}+y)$ } (Tab. Mécan.)
$(\alpha-\mathcal{A})$	$\operatorname{tang}(\alpha-\mathcal{A})$
α	$\mathcal{A}$
$\log\operatorname{tang}(\mathcal{D}+y)$	$\alpha-\mathcal{A}$ } simultanément
$\log\cos(\alpha-\mathcal{A})$	$\cos(\alpha-\mathcal{A})$ } (Tab. Mécan.)
$\log\operatorname{tang}\delta$	α
δ	$\operatorname{tang}\delta$
	δ

B. Dans le calcul manuel, les fonctions élémentaires sont $x - \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{\sin 1'}$, $\log\cos x \sin 1' + 10$, $B(A)$ avec $B = \log\frac{x}{\operatorname{tang} x}$ et $A = \log\operatorname{tang} x$, $\log x$, $\log\cos x$, $\log\operatorname{tang} x$. Dans le calcul mécanique les fonctions élémentaires sont $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{tang} x$; leur nombre est sensiblement plus réduit et elles sont toutes de type courant.

C. Il est possible d'évaluer de façon assez approchée la durée des opérations en calcul mécanique.

1° Nous pouvons admettre pour les mouvements des organes mus par le moteur de la machine la fréquence de deux mouvements par seconde, qui est courante dans les machines à calculer. Les opérations d'inscription et de transfert durent donc 0,5 seconde; les additions et multiplications ont une durée inférieure à 3 secondes (73 et 74), puisque la représentation décimale des nombres qui interviennent dans le calcul n'a pas plus de 8 chiffres. Les opérations d'effaçage et de mise en connexion d'un chiffreur et d'une table mécanique peuvent s'effectuer en même temps que d'autres opérations : leur durée n'intervient donc pas dans l'évaluation de la durée du calcul; il en est de même de certains transferts, inscriptions, additions et multiplications qui s'effectuent en même temps que des lectures de tables mécaniques. Le calcul comporte donc 20 inscriptions ou transferts et 13 additions ou multiplications, successifs, dont la durée est inférieure à 49 secondes.

2° La lecture d'une table mécanique peut être rendue très rapide par divers procédés.

a. On peut diviser cette table en tables partielles analogues aux feuillets d'une table imprimée, et déterminer, au moyen des chiffres d'ordres les plus élevés de la figuration binaire de la valeur donnée de l'argument, dans quelle table partielle se trouve cette valeur.

b. On peut encore dérouler la table à grande vitesse pour déterminer au moyen d'un premier balai la région dans laquelle se trouve l'argument, puis, au moyen d'un second balai mis en action pendant la période de freinage, arrêter la table sur la valeur exacte de l'argument.

c. On peut enfin effectuer mécaniquement un calcul d'interpolation par parties proportionnelles, dont la durée est de l'ordre d'une seconde.

Par exemple, une table trigonométrique de seconde en seconde d'arc, de 0 à 45°, contenant 162000 nombres, peut être répartie en 20 tables de 8000 nombres, qui peuvent être lus à raison de 4000 par minute suivant le procédé indiqué en *b*; le calcul d'une ligne trigonométrique d'un arc donné avec une marge de 0,01 seconde pourra donc s'effectuer en 1,5 minute en moyenne, et en moins de 3 minutes dans le cas le plus défavorable où la table doit être parcourue en entier.

Dans le calcul que nous considérons, figurent 4 lectures de tables trigonométriques mécaniques, dont la durée est, en moyenne, de 6 minutes.

3° La durée totale du calcul est donc en moyenne de 7 minutes. En tenant compte que le contrôle périodique de la machine (54, B) permet d'éviter de refaire le calcul pour le vérifier, la durée du calcul mécanique est nettement inférieure à celle du calcul manuel.

Remarquons que, dans le cas où le calcul précédent devrait être fréquemment répété, il pourrait y avoir intérêt à traduire mécaniquement des tables analogues aux tables I, II, III de M. I. Lagarde.

Remarquons encore que, dans le cas où la machine serait employée au calcul des coordonnées équatoriales des étoiles d'un même cliché en vue de l'édition d'un catalogue d'étoiles, on pourrait, d'une part ranger les données dans un ordre tel que les nombres à lire sur les tables mécaniques varient lentement, ce qui rendrait la lecture des tables mécaniques, et par suite le calcul des coordonnées de chaque étoile, extrêmement rapide, et d'autre part stéréotyper les résultats, ce qui réduirait à très peu le travail de correction des épreuves.

B. — DÉTERMINATION D'UNE ORBITE KÉPLÉRIENNE PAR DEUX POSITIONS QUELCONQUES.

82. Le but de ce chapitre étant de mettre en évidence la nature des transformations des méthodes de résolution des problèmes auxquelles conduirait l'emploi du Calcul mécanique, et non de faire une étude complète de ces transformations, étude qui dépasserait le cadre du présent travail, nous nous bornerons dans cet exemple à étudier la résolution mécanique de la détermination d'une orbite Képlérienne par deux observations, en considérant ce calcul comme une partie du problème courant de la détermination d'une telle orbite par trois, ou plus de trois observations.

Nous prendrons pour base la méthode exposée par Andoyer [25].

83. On désigne par x_1, y_1, z_1, r_1, v_1, u_1 les coordonnées héliocentriques, le rayon vecteur, l'anomalie vraie, et l'anomalie excentrique à l'instant t_1, par les mêmes lettres affectées de l'indice 2, les valeurs de ces grandeurs à l'instant t_2, et par p, e, a, i, Ω le paramètre, l'excentricité, le demi-grand axe, l'inclinaison de l'orbite et la longitude du nœud ascendant.

Si l'on pose

$$s = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1), \tag{1}$$

on peut écrire les relations

$$\left\{\begin{aligned} s\sin i \sin\Omega &= y_1 z_2 - y_2 z_1, \\ s\sin i \cos\Omega &= x_1 z_2 - x_2 z_1, \\ s\cos i \quad &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} e\cos v_1 &= \frac{p}{r_1} - 1,\\ e\cos v_2 &= \frac{p}{r_2} - 1,\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{\frac{r_1}{a}}\sin\frac{v_1}{2} &= \sqrt{1+e}\sin\frac{u_1}{2},\\ \sqrt{\frac{r_1}{a}}\cos\frac{v_1}{2} &= \sqrt{1-e}\cos\frac{u_1}{2},\\ \sqrt{\frac{r_2}{a}}\sin\frac{v_2}{2} &= \sqrt{1+e}\sin\frac{u_2}{2},\\ \sqrt{\frac{r_2}{a}}\cos\frac{v_2}{2} &= \sqrt{1-e}\cos\frac{u_2}{2},\end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \tau = k(t_2 - t_1) = a^{\frac{3}{2}}\left(u_2 - u_1 - 2e\sin\frac{u_2 - u_1}{2}\cos\frac{u_2 + u_1}{2}\right).$$

Les données étant x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2, on se propose de calculer a, p, e, i, Ω.

84. Les relations (2) donnent Ω, i, s.

Il résulte des relations (4)

$$(6)\qquad \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{v_2 - v_1}{2} = a\sqrt{1-e^2}\sin\frac{u_2 - u_1}{2},$$

$$(7)\qquad \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2 - v_1}{2} = a\left(\cos\frac{u_2 - u_1}{2} - e\cos\frac{u_1 + u_2}{2}\right),$$

$$(8)\qquad r_1 + r_2 = 2a\left(1 - e\cos\frac{u_2 - u_1}{2}\cos\frac{u_1 + u_2}{2}\right).$$

L'élimination de $e\cos\frac{u_1 + u_2}{2}$, entre les équations (5), (7), (8), donne, en posant

$$(9)\qquad \xi = \frac{u_2 - u_1}{2},$$

les équations

$$(10)\qquad r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2 - v_1}{2}\cos\xi - 2a\sin^2\xi = 0,$$

$$(11)\qquad (r_1 + r_2)\sin\xi - \tau\cos\xi\, a^{-\frac{1}{2}} + 2a(\xi\cos\xi - \sin\xi) = 0.$$

L'élimination de a donne ensuite, en posant

$$(12) \qquad \mu = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2} \cos\frac{v_2 - v_1}{2}, \qquad \nu = \frac{2\tau^2}{(r_1 + r_2)^3},$$

une équation en ξ

$$(13) \quad f(\xi) = [\xi(1 - \mu\cos\xi) + \sin\xi(\mu - \cos\xi)]^2(1 - \mu\cos\xi) - \nu\sin^6\xi = 0.$$

La dérivée de $f(\xi)$ se calcule aisément

$$(14) \quad \begin{aligned} f'(\xi) = \sin\xi\,\{ \mu[\xi(1 - \mu\cos\xi) + \sin\xi(\mu - \cos\xi)]^2 \\ + 2(1 - \mu\cos\xi)(\mu\xi + 2\sin\xi)[\xi(1 - \mu\cos\xi) + \sin\xi(\mu - \cos\xi)] \\ - 6\,\nu\sin^4\xi\cos\xi\,\}. \end{aligned}$$

L'équation (13) peut donc être résolue mécaniquement par le procédé exposé au n° 72. Le nombre ξ étant ainsi déterminé, les équations (10), (1) et (6) donnent successivement

$$(15) \qquad a = \frac{r_1 + r_2}{2\xi}\,\frac{1 - \mu\cos\xi}{\sin^2\xi},$$

$$(16) \qquad e = \sqrt{1 - \frac{r_1 r_2}{a^2}\,\frac{\sin^2\frac{v_2 - v_1}{2}}{\sin^2\xi}}.$$

Le calcul de p peut se faire par la formule

$$(17) \qquad p = a(1 - e^2).$$

85. Le tableau comparatif suivant, que nous limiterons au calcul de a, e, p, fait apparaître la différence entre les deux suites d'opérations relatives, l'une au calcul manuel selon la méthode d'Andoyer, l'autre au calcul mécanique.

Calcul manuel.	Calcul mécanique.

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

$$s = \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (y_1 x_2 - y_2 x_1)^2}$$

$$v_2 - v_1 = \operatorname{arc\,sin}\frac{s}{r_1 r_2}$$

Calcul manuel.

$$m = \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{v_2 - v_1}{2},$$

Approximations successives.

$$\left\{\begin{aligned} g &= \frac{\tau}{1 + \frac{g^2 \beta^3}{2m^3} \sec^{\frac{3}{5}} \xi}, \\ \cos \xi &= \frac{r_1 + r_2}{2m} - \frac{g^2}{4m^3}, \\ \beta &= \mathrm{F}(\xi) \text{ sur tables spéciales}, \end{aligned}\right.$$

$$a = \frac{g^2}{4 r_1 r_2} \sec \frac{v_2 - v_1}{2} \cos \xi,$$

$$p = \frac{s^2}{g^2},$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p^2}{a}}.$$

Calcul mécanique.

$$\mu = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2} \cos \frac{v_2 - v_1}{2},$$

$$\nu = \frac{2\tau^2}{(r_1 + r_2)^3},$$

Approximations successives.

$$\left\{\begin{matrix} f(\xi) \\ f'(\xi) \end{matrix}\right\} \text{ pour } f(\xi) = 0,$$

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \, \frac{1 - \mu \cos \xi}{\sin^2 \xi},$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{r_1 r_2 \sin^2 \frac{v_2 - v_1}{2}}{a^2 \sin^2 \beta}},$$

$$p = a(1 - e^2).$$

86. Le tableau ci-dessous énumère les résultats intermédiaires successivement obtenus dans l'exécution mécanique du calcul précédent. Les lectures de tables mécaniques sont marquées par la lettre T entre parenthèses : (T). Les opérations itérantes : division, racine carrée, résolution d'équation, etc., sont marquées par une accolade; le nombre d'itérations des opérations d'une même accolade est égal à la capacité binaire de la machine.

1, 2, 3	x_1^2, y_1^2, z_1^2.
4	r_1^2.
{ 5	r_1 (racine carrée).
6, 7, 8	x_2^2, y_2^2, z_2^2.
9	r_2^2.
{ 10	r_2 (racine carrée).
11 à 16	$x_1 y_2$, $x_1 z_2$, $y_1 x_2$, $y_1 z_2$, $z_1 y_2$, $z_1 x_2$.
17 à 19	$(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2$, $(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2$, $(z_1 x_2 - x_1 z_2)^2$.
20	s^2.
{ 21	s (racine carrée).
22	$r_1 r_2$.
{ 23	$\sin(v_2 - v_1)$ (quotient).
(T) 24	$v_2 - v_1$.
(T) 25	$\cos \frac{v_2 - v_1}{2}$, $\sin \frac{v_2 - v_1}{2}$.
{ 26	$\sqrt{r_1 r_2}$.

27, 28	$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{v_2 - v_1}{2}$, $\sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{v_2 - v_1}{2}$.
29	$\frac{r_1 + r_2}{2}$.
30	μ (quotient).
31	$t_2 - t_1$.
32	τ.
33	τ^2.
34	$(r_1 + r_2)^2$.
35	$\frac{(r_1 + r_2)^3}{2}$.
36	ν (quotient).
(T) 37	$\cos\xi$, $\sin\xi$.
38	$\mu \cos\xi$.
39	$(\mu - \cos\xi)\sin\xi$.
40	$\mu\xi$.
41	$\xi(1 - \mu\cos\xi)$.
42	$A = [\xi(1 - \mu\cos\xi) + \sin\xi(\mu - \cos\xi)](1 - \mu\cos\xi)$.
43	$B = A[\xi(1 - \mu\cos\xi) + \sin\xi(\mu - \cos\xi)]$.
44	$C = [\xi(1 - \mu\cos\xi) + \sin\xi(\mu - \cos\xi)]^2$.
45	$D = C\mu$.
46	$\sin^2\xi$.
47	$\sin^4\xi$.
48	$\nu\sin^4\xi$.
49	$\nu\sin^6\xi$.
50	$6\nu\sin^6\xi$.
51	$E = 6\nu\sin^4\xi\cos\xi$.
52	$f(\xi) = B - \nu\sin^6\xi$.
53	$F = A(\mu\xi + 2\sin\xi)$.
54	$f'(\xi) = \sin\xi(D + F - E)$.
55	$\frac{r_1 + r_2}{2}(1 - \mu\cos\xi)$.
56	a (quotient).
57	$r_1 r_2 \sin^2 \frac{v_2 - v_1}{2}$.
58	a^2.
59	$a^2\sin^2\xi$.
60	$\dfrac{r_1 r_2 \sin^2 \frac{v_2 - v_1}{2}}{a^2 \sin^2\xi}$ (quotient).
61	e^2.
62	e (racine carrée).
63	p.

1° Les opérations **4**, **9**, **20**, **29**, **31** sont des additions.

2° Les opérations **1** à **3**, **6** à **8**, **11** à **19**, **22**, **27**, **28**, **32** à **35**, **55**, **57** à **59**, **61**, **63** comprennent deux transferts et une multiplication.

3° Les opérations **5**, **10**, **21**, **23**, **26**, **30**, **36**, **56**, **60**, **62** comprennent p groupes d'une inscription et d'une multiplication $[p = \mathrm{E}_2(10^c)]$.

4° Les opérations **24** et **25** ont la durée indiquée au n° **81**, C, 2°. (Il en est de même de l'ensemble des itérations de l'opération **37**, car la variation de ξ étant monotone, la table mécanique n'est parcourue que dans un sens et une seule fois.)

La durée de cette partie du calcul peut donc être décomptée comme suit, en supposant, à titre d'exemple, que les nombres ont 10 chiffres dans le système décimal :

	m	s
1° 5 opérations de 0,5 seconde............	0	3
2° 26 opérations de 1 seconde...............	0	26
3° $p \times 10$ opérations de 1,5 seconde.........	8	30
4° 2 opérations de 3 minutes...............	6	00
	14	59

On évaluerait de même la durée des opérations itérées **30** à **48**; on trouverait : 14 minutes.

En tenant compte de l'inscription des données, des manipulations de documents et de la mise en marche de la machine, il nous paraît que la durée du calcul doit rester inférieure à 40 minutes.

C. — MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

87. L'application de la méthode des moindres carrés à un système de n équations linéaires, dont les inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ sont en nombre inférieur à n,

$$(1) \quad a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^j x_j + \ldots + a_i^p x_p = l_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

peut s'effectuer comme suit :

1° p_i étant le poids de l'équation de rang i, multiplier par $\sqrt{p_i}$ les deux membres de cette équation;

2° diviser tous les nombres a_i^j de même indice supérieur j par le module A_j de celui d'entre eux qui a le plus grand module; procéder de même pour les nombres l_i et L analogues à a_i^j et A_j;

3° former les équations normales

$$(2)\qquad [a^i a^1.o]\,x_1 + [a^i a^2.o]\,x_2 + \ldots + [a^i a^p.o]\,x_p = [a^i l.o],$$

au moyen de la formule

$$[a^i a^j.o] = \sum_k a_k^i a_k^j.$$

4° former les systèmes successifs, dont ν marque le rang

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} [a^{\nu+1} a^{\nu+1}.\nu]\,x_{\nu+1} + [a^{\nu+1} a^{\nu+2}.\nu]\,x_{\nu+2} + \ldots \\ \quad + [a^{\nu+1} a^j.\nu]\,x_j + \ldots = [a^{\nu+1} l.\nu], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a^i a^j.\nu]\,x_j + \ldots\ldots\ldots = [a^i l.\nu] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

au moyen de la formule

$$(4)\qquad [a^i a^j.\nu] = [a^i a^j.\nu - 1] - \frac{[a^\nu a^i.\nu - 1][a^\nu a^j.\nu - 1]}{[a^\nu a^\nu.\nu - 1]}.$$

5° Calculer les x_j par les formules

$$(5)\qquad x_j = \frac{[a^j l.j-1]}{[a^j a^j.j-1]} - \frac{[a^j a^{j+1}.j-1]}{[a^j a^j.j-1]}\,x_{j+1} - \ldots - \frac{[a^j a^p.j-1]}{[a^j a^j.j-1]}\,x_p.$$

6° Calculer les résidus

$$(6)\qquad k_i = l_i - \Sigma\, a_i^j\, x_j.$$

7° Calculer l'erreur moyenne des observations de poids 1

$$(7)\qquad m = \mathrm{L}\sqrt{\frac{[kk]}{n-p}}.$$

8° Calculer, pour les valeurs 1, 2, ..., p de j, les nombres $[a^i l.\nu]_\mu$ au moyen des formules (4) où l'on fait $[a^j l.o] = 1$ et $[a^i l.o] = 0$ pour $i \neq j$, puis les nombres $(a^j a^j)$ au moyen des formules (5) en remplaçant $[a^j l.j - 1]$ par $[a^j l.j - 1]_\mu$ et x_{j+h} par $(a^j a^{j+h})$.

9° Calculer les erreurs moyennes des inconnues au moyen de la formule

$$\mu_j = \frac{mL}{A} \sqrt{(a^j a^j)}. \tag{8}$$

88. Les opérations précédentes sont très simples, mais, d'une part, le nombre des résultats intermédiaires à mettre en réserve exige une complexité (49) égale à $(n+1)p$, nombre qui peut être élevé, et, d'autre part, si l'on voulait conserver tous les nombres sur des chiffreurs de réserve du type décrit au n° 77, A et B, le document de commande assurant la répartition des résultats intermédiaires entre ces chiffreurs, puis leur reprise correcte, pourrait devenir assez compliqué.

Le dispositif que voici nous paraît préférable : la perforatrice (77, A, 12°) et les balais de lecture des données sur le document d'inscription sont disposés de manière que la même bande, servant de support à un document d'inscription binaire, puisse passer sous les poinçons de l'imprimeuse avant de passer sous les balais de lecture; l'imprimeuse et l'inscripteur documentaire possèdent en outre la tabulation avant et arrière et l'interlignage ascendant et descendant, de manière à permettre l'impression et la lecture de nombres disposés sur le document en lignes et colonnes; enfin, le document de commande est composé de plusieurs documents C_1, C_2, C_3, ..., relatifs, chacun, à l'un des groupes d'opérations itérées, et le document d'inscription porte quelques perforations commandant le passage d'un groupe à un autre.

Les données, qui sont les coefficients et les poids des équations, sont disposées sur le document d'inscription en un tableau $\mathfrak{T}_0$ de lignes et colonnes, chaque ligne comprenant la racine carrée du poids suivie des coefficients a_i^j, dans l'ordre des j croissants.

1° Le document C_1 commande successivement, pour chaque ligne de rang i : l'inscription de $\sqrt{p_i}$ comme multiplicande, puis, pour chaque a_i^j, la tabulation avant, l'inscription de ce coefficient comme multiplicateur, l'impression du produit par perforation de la partie encore vierge du document d'inscription, dans la colonne de rang j, enfin, après la tabulation relative à a_i^p, le retour arrière et l'interlignage.

Lorsque la dernière ligne du tableau $\mathfrak{T}_0$ est passée, les résultats forment un tableau $\mathfrak{T}_1$ analogue à $\mathfrak{T}_0$.

2° Le document C_2 commande successivement, pour chaque colonne de rang j : la comparaison de chaque a_i^j au suivant, l'effaçage du plus petit des deux, l'interlignage descendant, puis, après l'interlignage relatif au dernier a_i^j, l'interlignage ascendant, le calcul de l'inverse du seul coefficient restant, la multiplication de cet inverse par chacun des autres coefficients et l'impression du produit correspondant, enfin, après l'impression du dernier produit, l'interlignage ascendant et la tabulation avant.

Lorsque la dernière colonne du tableau $\mathfrak{T}_1$ est passée, les résultats forment un tableau $\mathfrak{T}_2$ analogue à $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_0$.

3° Les documents C_3, C_4, C_5, C_6 commandent, de façon analogue, l'établissement successif du tableau $\mathfrak{T}_3$ des $[a^i a^j . \text{o}]$, du tableau $\mathfrak{T}_4$ des $[a^i a^j . \nu]$ et des $[a^i l . \nu]_\mu$, du tableau $\mathfrak{T}_5$ des x_j et des $(a^j a^j)$, du tableau $\mathfrak{T}_6$ des k_i et des μ_j.

89. On peut évaluer la durée approximative du calcul, tel que nous venons de l'exposer.

Pour abréger, nous limiterons cette évaluation au calcul des x_j.

1° *Tableau* $\mathfrak{T}_1$. — Ce calcul comporte, pour chaque ligne, le transfert de $\sqrt{p_i}$ du tableau $\mathfrak{T}_0$ au chiffreur du multiplicande M, puis, pour chaque produit $\sqrt{p_i} a_i^j$, une tabulation avant, le transfert de a_i^j du tableau $\mathfrak{T}_0$ au chiffreur du multiplicateur m, la multiplication de $\sqrt{p_i}$ par a_i^j et l'impression du résultat. La tabulation consécutive au transfert de a_i^j peut être exécutée en même temps que la multiplication de $\sqrt{p_i}$ par a_i^j, et l'impression du produit $\sqrt{p_i} a_i^j$ en même temps que le transfert de a_i^{j+1} ; en admettant pour un transfert ou une tabulation avant la durée courante de 0,5 seconde et en donnant à c et τ la même signification que précédemment (73, C et 74, C), la durée du calcul des produits $\sqrt{p_i} a_i^j (j = 1, 2, \ldots, p)$ et de $\sqrt{p_i} l_i$ est donc

$$1 + (p+1)(0,5 + \theta_c),$$

où θ_c désigne la durée moyenne $\frac{(3c+1)(6c+1)}{6}\tau$ de la multiplication de deux nombres de capacité décimale c (74, C) [1].

La vitesse moyenne du retour arrière est de 50^{mm} par seconde; les tableaux $\mathfrak{T}$ étant lus, en général, ligne par ligne, il y a avantage, pour réduire la longueur des lignes, à écrire l'un au-dessous de l'autre les chiffres d'un même nombre. Le tableau le plus large $\mathfrak{T}_4$ comportant les p nombres $[a^i a^j.\nu]$ et les p nombres $[a^i a^j.\nu]_\mu$, la largeur du document d'inscription est de $2p_m.3$ mm, d'après les dimensions indiquées au n° 67 et en désignant par p_m la valeur maxima de p; la durée du retour arrière est donc de $\frac{6p_m}{50}$ seconde. La longueur d'une ligne d'écriture est $3c.2$ mm; la durée de l'interlignage est donc $\frac{6c}{50}$ seconde.

Comme tabulation et interlignage sont simultanés, et que c est généralement supérieur à p, nous admettrons, pour simplifier ce calcul qui ne saurait être qu'approximatif, que c est toujours supérieur à p_m et que la durée du changement de ligne est $\frac{3c}{25}$ seconde.

La durée du calcul d'une ligne du tableau $\mathfrak{T}_1$ est donc

$$1 + 0{,}12c + (p+1)(0{,}5 + \theta_c),$$

et la durée de l'établissement du tableau est, en secondes,

$$t_1 = n[1 + 0{,}12c + (p+1)(0{,}5 + \theta_c)].$$

2° *Tableau* $\mathfrak{T}_2$. — La comparaison des a_i^j d'une même colonne exige, pour chacun d'eux, un transfert de durée 0,5 seconde et un interlignage de durée $\frac{3c}{25}$ seconde; l'effaçage du coefficient non conservé pouvant s'effectuer en même temps que l'interlignage, la durée de toutes ces opérations est $n(0{,}5 + 0{,}12c)$ secondes. Ces opérations sont suivies d'un interlignage rétrograde, dont la durée est $n \times 0{,}12c$ secondes.

---

[1] Dans l'évaluation de θ_c nous avons admis que la capacité binaire était le triple de la capacité décimale; on aurait un peu plus de précision en remplaçant $3c$ par $\frac{10}{3}c$, dans l'expression de θ_c ainsi que dans l'expression de T_x.

Le calcul de $\frac{1}{A_j}$ demande deux transferts, $3c$ inscriptions rythmiques et $3c$ multiplications : sa durée est $0,5(3c+2)+3c\theta_c$ secondes; elle est inférieure à la durée de l'interlignage précédent si n est supérieur à $25(0,5+\theta_c)$, condition satisfaite, en général; le calcul de $\frac{1}{A_j}$ peut donc être effectué en même temps que l'interlignage. La durée des multiplications de $\frac{1}{A_j}$ par les a_i^j de la colonne de rang j, se calcule comme au numéro précédent; elle est égale à $n(0,5+0,12c)$ secondes, si l'on tient compte que interlignage et multiplication sont simultanés. Ces opérations sont suivies d'un interlignage rétrograde, dont la durée est $0,12nc$ secondes.

La durée du calcul d'une colonne du tableau $\mathfrak{T}_2$ est donc $2n(0,5+0,24c)$ secondes et la durée de l'établissement du tableau $\mathfrak{T}_2$ est, en secondes,

$$t_2 = 2n(p+1)(0,5+0,24c).$$

3° *Tableau* $\mathfrak{T}_3$. — Le calcul d'un produit $a_i^j a_i^k$ exige : le transfert de a_i^j de $\mathfrak{T}_2$ à M, la tabulation de la colonne j à la colonne k, le transfert de a_i^k de $\mathfrak{T}_2$ à m, le retour arrière à la colonne j et l'interlignage qui s'effectuent en même temps que la multiplication; enfin, l'inscription du produit sur un chiffreur de réserve R_i : la durée de ce calcul est $1+0,5(k-j)+\theta_c$ secondes, car θ_c est supérieur à $0,12c$ dès que c est supérieur à 6. Le calcul d'une somme $[a^j a^k]$ comprend le calcul des n produits $a_i^j a_i^k$, une addition de durée θ_c, et une tabulation rétrograde de durée $0,12nc$ supérieure à celle de l'addition. La durée du calcul de $[a^j a^k]$ est donc $n[1+0,12c+\theta_c+0,5(k-j)]$ secondes.

Le tableau $\mathfrak{T}_3$ comprend $p+1$ lignes respectivement de $p+1$, p, ..., 1 termes, soit, au total, $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ termes. La durée du calcul de ce tableau est donc, en secondes,

$$\begin{aligned} t_3 &= n\left[\frac{(p+1)(p+2)}{2}(1+\theta_c+0,12c)+\sum_{j=1}^{p+1}\sum_{k=j}^{p+1}(k-j)\right] \\ &= \frac{n(p+1)(p+2)}{12}[2p+0,72c+6(1+\theta_c)]. \end{aligned}$$

4° *Tableau* $\mathfrak{T}_4$. — Le calcul du tableau des coefficients $[a^i a^j.\nu]$, pour une valeur de ν, comprend :

a. le calcul de l'inverse $I_{\nu-1}$ de $[a^\nu a^\nu.\nu-1]$, de durée $0,5(3c+2)+3c\theta_c$, déjà calculée au 2°;

b. le transfert de chaque coefficient $[a^\nu a^i.\nu-1]$ de $\mathfrak{T}_3$ à m, la multiplication de ce nombre par $I_{\nu-1}$, l'inscription du produit sur un chiffreur de réserve R_j, la tabulation à la colonne suivante qui a lieu en même temps que la multiplication, la durée totale de ces opérations étant $(p+1-\nu)(0,5+\theta_c)$, enfin le retour arrière, de durée $0,12c$ secondes;

c. pour chaque colonne de rang j, le transfert du nombre $\dfrac{[a^\nu a^j.\nu-1]}{I_{\nu-1}}$ de R_j à M, puis, pour chacun des coefficients $[a^\nu a^i.\nu-1]$ de cette colonne, l'interlignage, de durée $0,12c$ secondes, la multiplication de $[a^\nu a^i.\nu-1]$ par $\dfrac{[a^\nu a^j.\nu-1]}{I_{\nu-1}}$, de durée $0,5+\theta_c$, l'addition de $[a^i a^j.\nu-1]$ au produit, de durée $0,5+\theta_c$, enfin l'interlignage rétrograde avec tabulation simultanée, de durée $0,12(j-\nu)c$ secondes.

Les opérations c durent, pour la colonne j,

$$(j-\nu)(0,5+\theta_c+0,12c)+0,5 \text{ secondes},$$

en remarquant qu'une multiplication et un interlignage sont simultanés; j pouvant varier de ν à $p+1$, la durée totale des opérations c est

$$\frac{(p-\nu+1)(p-\nu+2)}{2}(0,5+\theta_c+0,12_c)+0,5(p-\nu+1).$$

La durée des calculs relatifs au tableau des $[a^i a^j.\nu]$ pour une valeur de ν est donc

$$\begin{aligned} t_{4,\nu} &= 1+3c(0,5+\theta_c)+0,5(p-\nu+1) \\ &+\frac{(p-\nu+1)(p-\nu+4)}{2}(0,5+\theta_c+0,12c). \end{aligned}$$

Comme ν peut varier de 1 à $p+1$, on trouve enfin pour durée du calcul du tableau $\mathfrak{T}_4$

$$t_4=(p+1)\left[1+3c(0,5+\theta_c)+\frac{p}{4}+\frac{p^2+4p-2}{12}(0,5+\theta_c+0,12c)\right].$$

5° *Tableau* $\mathfrak{T}_5$. — Le calcul de x_j comprend :

a. le calcul des produits $[a^j a^{j+1}.j-1]x_{j+1}$ qui exigent, chacun, deux transferts et une multiplication, et dont la durée est $1+\theta_c$;

b. le calcul de la somme de ces produits et de $[a^j l.j-1]$, de durée $0,5+\theta_c$;

c. le produit de cette somme par l'inverse de $[a^j a^j.j-1]$ déjà calculé ; la durée de cette opération est $(0,5+\theta_c)$.

La durée du calcul de x_j est donc

$$(p-j-1)(1+\theta_c)+2(0,5+\theta_c),$$

et la durée du calcul du tableau $\mathfrak{T}_5$, pour j variant de 1 à p, est

$$t_5=\frac{(p+1)(p+2)}{2}(1+\theta_c)+2p(0,5+\theta_c).$$

6° La durée du calcul des x_j est donc, en secondes,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_x=\sum_{i=1}^{p} t_i=(p+1)\Bigg\{&\frac{(0,5+\theta_c)}{12}\left[6n(p+4)+p^2+10p+36c-\frac{2}{p+1}\right]\\&+0,01\,c\left[n\left(p+10+\frac{12}{p+1}\right)+p^2+4p-2\right]\\&+\frac{1}{12}\left[n\left(p+14+\frac{12}{p+1}\right)+3(p+4)\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Par exemple, pour la résolution d'un système de 20 équations à 9 inconnues, les calculs étant faits avec 8 chiffres significatifs,

$$n=20,\quad p=9,\quad c=8,\quad \theta_c=1,2.$$

Par suite,

$$\mathrm{T}_x=1^{\mathrm{h}}5^{\mathrm{m}}\ \text{environ}.$$

90. Dans les exemples précédents d'exécution de calculs de la Mécanique céleste au moyen du calcul mécanique, nous avons cherché à mettre en relief les traits de cette méthode de calcul qui nous paraissent les plus caractéristiques.

Dans le premier exemple, le calcul mécanique a pu suivre, de plus près que le calcul manuel, les formules théoriques de résolution du problème, et réduire ainsi le nombre des fonctions élémentaires.

Dans le second exemple, il a permis de remplacer la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues au moyen d'approximations successives (n° 85, équations en g et ξ) par la résolution de l'équation $f(\xi) = o$ qui se présente *naturellement* au cours des calculs, mais qui, en calcul manuel, serait très pénible à résoudre, l'enchevêtrement des additions et des multiplications ne permettant pas l'emploi des logarithmes.

Cet exemple, où, dans la méthode d'Andoyer, le calcul manuel est systématiquement conduit vers l'emploi d'une table particulière (la table V), nous paraît mettre nettement en évidence le souci de réduction du nombre des fonctions élémentaires, que nous avons déjà remarqué (Chap, IV, n° 45). Le calcul mécanique permet de réduire plus encore le nombre des fonctions élémentaires; il permet ainsi, et nous pensons que ce caractère est de portée très générale, d'épargner au calculateur non seulement l'effort d'exécution du calcul numérique lui-même mais encore l'effort, souvent considérable, et la fine intuition nécessaires pour ramener dans les voies qui aboutissent à des calculs numériques praticables des recherches dont les développements théoriques ne suivent pas naturellement de telles voies.

Le troisième exemple montre quelle importance peut atteindre la réduction de durée de certains calculs, grâce au calcul mécanique.

D'un autre point de vue, l'on peut remarquer que, dans le second exemple, les formules de résolution des équations ont été adaptées aux moyens de la machine à calculer, tandis que, dans le troisième, c'est un mode particulier de fonctionnement de la machine qui permet d'exécuter simplement les calculs, dont l'aménagement n'a pas subi de modification appréciable.

Ces deux derniers exemples concrétisent, en quelque sorte, les conclusions auxquelles nous sommes déjà parvenu au sujet de l'exécution mécanique des calculs de la Mécanique céleste : il ne faut pas espérer apporter d'amélioration sensible aux travaux des calculateurs par l'emploi des machines d'usage courant, parce que ces machines ont été conçues pour l'exécution des calculs comptables et bancaires; il ne s'oppose aucune difficulté technique à la construction de machines à calculer spécialement adaptées aux calculs de la Mécanique céleste, ainsi que nous pensons l'avoir montré dans les Chapitres IV et V; enfin, les caractères définitifs d'une telle machine ne pourraient être arrêtés qu'après une étude assez complète des modifications que devraient subir elles-mêmes les méthodes de résolution des problèmes de la Mécanique céleste pour s'adapter au calcul mécanique. Cette étude, dont le développement dépasserait le cadre du présent travail, conduirait très généralement, pensons-nous, à une simplification des calculs actuellement pratiqués; elle aurait pour conséquence, après l'équipement mécanique des bureaux de calcul, de débarrasser les calculateurs de la partie la plus pénible et la plus fastidieuse de leur travail, d'accélérer considérablement l'exécution de ce travail, et de permettre d'envisager l'exécution de certains calculs considérés jusqu'à présent comme impraticables.

BIBLIOGRAPHIE.

1. M. d'Ocagne. — *Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, 3e édition. Paris, 1928.
2. Grande Encyclopédie. — Article *Arithmomètre*.
3. Jaucourt. — *Vie de Leibniz*. Paris, 1760.
4. Martin. — *Die Rechenmaschinen und ihre Entwicklungs geschichte*, Pappenheim, 1925.
5. Koenigs. — *Introduction à une théorie nouvelle des Mécanismes*. Paris, 1905.
6. Monge. — Programme de Cours de Stéréotomie (*Journal de l'École Polytechnique*, 1er Cahier).
7. Willis. — *Theory of Mécanisms*.
8. Haton de la Goupillière. — *Traité des mécanismes*. Paris, 1864.
9. Reuleaux. — *Cinématique*, trad. Paris, 1877.
10. Lanz et Betancourt. — *Essai sur la composition des machines*. Paris, 1840.
11. Monge. — Cité par Hachette dans « Programme du cours élémentaire de machines », pour l'an 1808 (*Journal de l'École Polytechnique*, 1808).
12. H. Poincaré. — *Science et Méthode*. Paris, 1908.
13. Bouligand. — Sur les conditions de variance des propositions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, p. 1509).

14. BOULIGAND. — *La causalité des théories mathématiques.* Paris, 1934.
15. L. COUFFIGNAL. — *Les machines à calculer. Leurs principes. Leur évolution.* Paris, 1933.
16. AMPÈRE. — *Essai sur la philosophie des Sciences.* Paris, 1856.
17. L. COUFFIGNAL. — *Perfectionnements apportés aux machines à calculer* (Brevets d'invention), 1930 et 1936.
18. L. COUFFIGNAL. — Sur une nouvelle machine à calculer (*C. R. Acad. Sc.*, t. 191, p. 934).
19. TORRES Y QUEVEDO. — *Bulletin de la Société pour l'Encouragement à l'Industrie nationale*, t. 132, p. 188.
20. L. COUFFIGNAL. — *Perfectionnements aux appareils comportant une représentation matérielle de nombres, notamment à ceux fonctionnant électriquement* (Brevet d'invention), 1936.
21. NEPER. — *Rhabdologie.* Edimbourg, 1617.
22. M. D'OCAGNE. — Observations relatives à la Note de M. R. Valtat (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, p. 1745).
23. E. LUCAS. — *L'Arithmétique amusante.* Paris, 1895.
24. I. LAGARDE. — *Formules et tables pour facililiter l'emploi des catalogues photographiques en coordonnées rectilignes.*
25. H. ANDOYER. — *Cours de Mécanique Céleste.* Paris, 1923.
26. COMRIE. — On the application of the Brunswiga-Dupla calculating-machine to double summation with finite difference (*Monthly Notices of R. A. S.*, March, 1928).

Nota. — La bibliographie ci-dessus est limitée aux ouvrages auxquels nous nous référons directement dans le texte.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 décembre 1937.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 décembre 1937.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.

TABLE DES MATIÈRES.