FRÉDÉRIC ROGER

Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__200__1_0>

SÉRIE A, Nº 1768

Nº D'ORDRE:

2634.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. **FRÉDÉRIC ROGER**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

1RE THÈSE

LES PROPRIÉTÉS TANGENTIELLES DES ENSEMBLES EUCLIDIENS DE POINTS

2E THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

SOUTENUES LE 14 JAN. 1938 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. EMILE **BOREL**, PRÉSIDENT

PAUL **MONTEL**, ARNAUD **DENJOY**, EXAMINATEURS

UPPSALA 1937

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen honoraire	M. MOLLIARD.	
Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*,	Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	BLAISE.	G. BERTRAND.
A. FERNBACH.	DANGEARD.	ABRAHAM.
Émile PICARD.	LESPIEAU.	Ch. FABRY.
Léon BRILLOUIN.	MARCHIS.	Léon BERTRAND.
GUILLET.	VESSIOT.	WINTREBERT.
PÉCHARD.	PORTIER.	DUBOSCQ.
FREUNDLER.	MOLLIARD.	BOHN.
AUGER.	LAPICQUE.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
Émile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN	T	Chimie physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON	T	Recherches physiques.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ	T	Zoologie.
E. RABAUD	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD		Chimie minérale.
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM	T	Botanique.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.
H. BÉNARD	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugene BLOCH	T	Physique.
G. BRUHAT		Physique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique.
M. JAVILLIER	T	Chimie biologique.
L. JOLEAUD		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY	T	Physiologie comparée.
F. PICARD		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques.
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON		Mathématiques générales.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN		Téories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL		Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES		Enseignement de Physique.
GRASSE		Biologie animale (P. C. B.).
PREVOST		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire . . . . A. PACAUD.
Secrétaire honoraire . . . . D. TOMBECK.

LES PROPRIETES TANGENTIELLES DES ENSEMBLES EUCLIDIENS DE POINTS.

PAR

FRÉDÉRIC ROGER

à PARIS.

Introduction.

Dans le remarquable *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, première partie de son grand travail *Sur la dérivation et son calcul inverse*[1], M. Arnaud Denjoy a obtenu des résultats d'une simplicité inattendue. En voici l'essentiel d'après l'Auteur lui-même

»Considérons la courbe C d'équation $y = f(x)$. En un de ses points M, figurons les angles dérivés (contingents de M Bouligand) A (à droite), A' (à gauche) de sommet commun M, formés par les positions limites de la demi-droite MM' quand $M'(x', y')$ décrivant C tend vers $M(x' > x$ pour A, $x' < x$ pour $A')$. En un point M particulier les angles A et A' peuvent être quelconques, mais si on néglige ce qui se passe sur un ensemble de mesure nulle, il ne reste de possible que les trois cas suivants (effectivement réalisables tous trois):

ou bien A et A' se réduisent respectivement à deux demi-droites inclinées se prolongeant (dérivée bilatérale finie).

ou bien A et A' sont adjacents et supplémentaires, le côté commun étant parallèle à $O y$ (dans le sens positif ou dans le sens négatif) (un dérivé bilatéral fini, les deux autres dérivés infinis de signe contraire)

[1] Premiere partie *Memoire sur les nombres derives des fonctions continues*, **Journal de Mathematiques pures et appliquees**, (7) **1**, 1915, 105—240.

Deuxieme partie *Sur les fonctions derivées sommables*, Bulletin de la Societe Mathématique de France, **43**, 1915, 161—248.

Troisieme partie *Memoire sur la totalisation des nombres derives non sommables*, Annales scientifiques de l Ecole Normale Superieure, (3) **33**, 1916, 127—222 et (3) **34**, 1917, 181—238 ou bien A et A' valent chacun deux droits, ils sont adjacents suivant Oy (dérivés bilatéraux $+\infty$ et $-\infty$).»

(Extrait de la *Notice sur les Travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy*, Paris, Hermann, 1934, p. 14).

Si l'on porte plus spécialement l'attention sur les droites passant par M dont une demi-droite appartient à l'angle dérivé A et l'autre à A' (droites représentatives des nombres dérivés bilatéraux), en un point M non exceptionnel, ou bien ces droites forment la totalité du plan (3ieme cas de M. Denjoy), ou bien il n'y en a qu'une D (2ieme et 1er cas); dans cette dernière éventualité les demi-droites qui appartiennent à A ou A' sans qu'il en soit ainsi de leurs opposées, ou bien forment un demi-plan limité à D (2ieme cas), ou bien n'existent pas (1er cas: la courbe C admet D pour tangente en M); et si l'on veut bien convenir que toute droite à distance r d'un point O »touche» aussi bien le cercle de centre O et de rayon r que la circonférence de ce cercle, on peut dire que D, accompagnée ou non d'un demi-plan, est la tangente à C en M en un sens élargi. Ainsi, sauf en des points qui se projettent parallèlement à Oy (par exemple sur Ox) en un ensemble de mesure nulle, en l'un de ses points M, sous la seule condition qu'il y passe une droite qui ne soit pas, par chacune de ses deux demi-droites, position limite de demi-sécantes MM', la courbe C admet une tangente au sens large D (droite unique dont les deux demi-droites sont positions limites de demi-sécantes), en dehors de laquelle les positions limites de demi-sécantes, s'il en existe, forment un demi-plan limité à elle; enfin cette tangente au sens large est inclinée sur Oy.

Rattacher ces propriétés tangentielles des courbes représentatives de fonctions continues d'une variable à celles des ensembles de points tout à fait arbitraires d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, tel est l'objet du présent travail. En un point d'un tel ensemble, sauf en certains dont je précise la rareté, sous la seule condition qu'on y puisse mener une variété linéaire dont aucune droite passant par lui ne soit, par chacune de ses deux demi-droites, position limite de demi-sécantes[1], j'établis l'existence d'une variété linéaire complémentaire, faisceau des droites dont les deux demi-droites sont positions limites de demi-sécantes, et je montre qu'en dehors de cette variété linéaire tangente en un sens élargi, les positions limites de demi-sécantes, s'il en existe, se répartissent en demi-variétés linéaires à une dimension de plus qu'elle et

[1] Le lecteur est prié de faire une figure pour l'espace à trois dimensions dans le cas où cette variété linéaire est 1°) une droite 2°) un plan.

limitées à elle, dont aucun couple ne forme une variété linéaire complète; enfin j'étudie la rareté en projection à partir d'un point fixe, des points où la variété linéaire tangente au sens large passe par le point fixe. *Ainsi, la notion de tangente et de plan tangent, plus généralement de variété linéaire tangente, n'est pas spéciale aux courbes et surfaces, ou variétés: convenablement élargie, elle se révèle comme étant de toute première importance pour les ensembles euclidiens de points les plus généraux. Il s'y joint la notion de système de demi-variétés linéaires à une dimension de plus que la variété linéaire tangente au sens large et limitées à elle, dont aucun couple ne forme de variété linéaire complète.* D'ailleurs une telle notion se rencontre dès les éléments quand, au lieu de considérer les courbes et surfaces dans leur totalité, on envisage ce qui se passe aux points frontières de leurs portions.

Comme applications de ces propriétés, j'insiste sur le cas de l'*espace à trois dimensions*, puis je donne un *critère de dérivabilité* presque partout d'une fonction complexe arbitraire de variable complexe. surtout j'étudie comment une *fonction arbitraire* dont l'argument est un point d'un espace euclidien mais la fonction un être de nature beaucoup plus générale. *atteint en un point ses limites.*

Les principaux résultats de ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences en deux Notes insérées aux *Comptes-Rendus* des séances (12 Novembre 1935, **201**, 871, pour le caractère linéaire de la répartition des positions limites de demi-sécantes — voir aussi *C. R.* **202**, 377 —[1]; 27 Avril 1936, **202**, 1403, pour les applications — voir aussi *C. R.* **203**, 1311 —). Dans cette étude il n'est question que de contact du premier ordre; les contacts d'ordre supérieur feront l'objet d'une autre étude qui, pareillement à la première, tire son origine et le plus souvent l'esprit de ses méthodes des profonds travaux de M. Denjoy. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma grande reconnaissance pour le bienveillant intérêt et les précieux conseils dont je lui reste si redevable.

CHAPITRE I.

Notions préliminaires.

Section 1: **Faisceau dérivé.**

Plaçons-nous dans l'espace euclidien $[E]$ à n dimensions. **Un point M est** *point d'accumulation* d'un ensemble E de points si tout ensemble ouvert conte-

[1] Depuis lors M. S. SAKS a publié aux *Fundamenta Mathematicae* (**26**, 1936, 234—240) un intéressant Article donnant pour le plan des résultats analogues à ceux que j'avais indiqués.

nant M contient au moins un point de E différent de M. Il suffit d'ailleurs qu'il en soit ainsi des *sphères* ouvertes S_i à n dimensions d'une *famille dénombrable partout dense.* Afin de caractériser en un point M les directions dans lesquelles s'accumule un ensemble E, je dirai qu'une demi-droite $M\varDelta$ est *rayon d'accumulation* de E en M si, quel que soit le faisceau ouvert de demi-droites issues de M contenant $M\varDelta$, la partie de E qui s'y trouve admet M pour point d'accumulation. Ici encore il suffit qu'il en soit ainsi des *demi-cônes* ouverts de révolution $\varGamma_j(M)$ à n dimensions de sommet M, déduits par la *translation* $\overrightarrow{OM}$ de ceux d'une *famille dénombrable partout dense* autour du point O arbitrairement fixé. Autrement dit $M\varDelta$ est rayon d'accumulation de E en M si, quels que soient S_i contenant M et $\varGamma_j(M)$ contenant $M\varDelta$, l'intersection $S_i \wedge \varGamma_j(M) \wedge E$ n'est pas vide. Dans le cas contraire, on peut trouver un couple d'indices i_0, j_0 (et d'ailleurs une infinité) tel que S_{i_0} contienne M, $\varGamma_{j_0}(M)$ contienne $M\varDelta$, et vérifient $S_{i_0} \wedge \varGamma_{j_0}(M) \wedge E = 0$; d'où résulte qu'aucune demi-droite de $\varGamma_{j_0}(M)$ ne peut être rayon d'accumulation et qu'aucun point d'accumulation de E ne peut appartenir à l'ensemble ouvert $S_{i_0} \wedge \varGamma_{j_0}(M)$.

Dès lors, *en un même point M, les rayons d'accumulation d'un ensemble E forment un faisceau fermé de demi-droites issues de M, $\varPhi_E(M)$, le même pour l'ensemble que pour sa fermeture.* Malgré tout le parti qu'en a déjà tiré M. Bouligand sous le nom de »contingent», je préfère, tant par analogie avec l'expression d'ensemble dérivé que par extension de la notion d'angle dérivé, introduite dès 1915 par M. Denjoy, l'appeler *faisceau dérivé de l'ensemble E au point M.* C'est manifestement une généralisation de la *tangente à une courbe* et du *plan tangent à une surface* quand on les considère comme faisceau des positions limites de demi-sécantes. Mais il est bon de remarquer que le *contact* avec l'ensemble d'un rayon intérieur au faisceau dérivé, s'il en existe, ne peut être rompu par une variation arbitrairement faible de l'orientation de ce rayon.

Considérons un faisceau fermé $\varPhi(M)$ de demi-droites issues de M, *étrangères* au faisceau dérivé $\varPhi_E(M)$. A chacune d'elles on peut faire correspondre un couple i_0, j_0 et, d'après un théorème de MM. Borel et Lebesgue, recouvrir $\varPhi(M)$ au moyen d'un nombre *fini* de $\varGamma_{j_0}(M)$, auquel correspond un nombre fini de S_{i_0} qui, ayant en commun M, ont en commun une sphère $S_{i'_0}$: $S_{i'_0} \wedge \sum_{(j)_0} \varGamma_j(M) \wedge E = 0$, la sommation étant étendue à la combinaison $(j)_0$ des indices j_0 en nombre fini correspondant au recouvrement de $\varPhi(M)$. Par suite $\varPhi(M) \wedge E$ n'admet pas M pour point d'accumulation. Cette propriété, *qui fait du faisceau dérivé un véritable* *diagramme d'existence locale de l'ensemble,* n'a déjà plus lieu dans l'espace de Hilbert. C'est ce qui me fait, au moins provisoirement, limiter le champ du faisceau dérivé aux espaces euclidiens à un nombre quelconque mais *fini* de dimensions. En particulier le faisceau dérivé, dont la définition ne permet l'existence qu'aux points d'accumulation de l'ensemble, *existe effectivement en chaque point d'accumulation.*[1]

Ainsi les points M de la fermeture $\overline{E}$ en chacun desquels on peut attacher un faisceau fermé de demi droites issues de M, $\Phi(M)$ (arbitrairement variable d'un point M à l'autre) qui soit étranger au faisceau dérivé $\Phi_F(M)$, se répartissent en au plus une infinité *dénombrable* d'ensembles caractérisés chacun par un indice i_0 et une combinaison finie $(j)_0$ tels que S_{i_0} contienne M, $\sum_{(j)_0} \Gamma_j(M)$ recouvre $\Phi(M)$, et vérifient $S_{i_0} \wedge \sum_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge E = 0$ Un tel ensemble fait partie de l'ensemble E_0 inclus dans $S_{i_0} \wedge \overline{E}$ et vérifiant, en chacun de ses points M, $S_{i_0} \wedge \sum_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge$ $\wedge E = 0$. E_0 est *fermé* car il en est ainsi de l'ensemble de tous les points M de l'espace qui vérifient cette dernière relation. En effet, pour un point M' du complémentaire, E possède un point dans $S_{i_0} \wedge \sum_{(j)_0} \Gamma_j(M')$, donc à distance positive d de la frontière de l'ensemble ouvert $\sum_{(j)_0} \Gamma_j(M')$, et tout point distant de M' de moins de d appartient encore à ce complémentaire qui, par suite, est ouvert. De plus, des relations que vérifie E_0 résulte $\sum_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge E_0 = 0$; en sorte que, $\Gamma_j^1(M)$ désignant l'opposé par le sommet de $\Gamma_j(M)$, la réciprocité entre les points M de E_0 ne permet pas $\sum_{(j)_0} \Gamma_j^1(M) \wedge E_0 \neq 0$. Par suite, non seulement $\Phi(M)$ mais encore son *opposé* $\Phi^1(M)$ est étranger au faisceau dérivé $\Phi_{\Gamma_0}(M)$. Ce qui conduit à accorder aux rayons d'accumulation de E en M dont les opposés ne sont plus rayons d'accumulation, une importance moindre qu'aux autres. Ces derniers forment un faisceau fermé de droites passant par M, intersection de $\Phi_E(M)$ et de son opposé $\Phi_E^1(M)$, que j'appellerai *partie bilatérale du faisceau*

[1] Au contraire, dans l'espace de Hilbert, la suite de points dont le p^{ieme} est sur le p^{ieme} axe de coordonnees, à la distance $1/p$ de l origine, admet ce dernier point pour point d'accumulation sans y admettre aucun rayon d accumulation.

dérivé de l'ensemble E au point M.[1] $F(M)$ étant un faisceau fermé de droites passant par M, *étranger* à cette partie bilatérale, le faisceau fermé de demi-droites $\Phi(M) = F(M) \wedge \Phi_E^1(M)$ est étranger au faisceau dérivé $\Phi_E(M)$; par suite son opposé $\Phi^1(M) = F(M) \wedge \Phi_E(M)$ est étranger au faisceau dérivé $\Phi_{E_0}(M)$ considéré plus haut, lequel est inclus dans $\Phi_{\bar{E}}(M)$ identique à $\Phi_E(M)$; donc $F(M)$ est étranger à $\Phi_{E_0}(M)$.

Théorème I. — *Etant donné un ensemble de points dans un espace euclidien, les points M de sa fermeture en chacun desquels on peut attacher un faisceau fermé de droites passant par M, $F(M)$ (arbitrairement variable d'un point M à l'autre) qui soit étranger à la partie bilatérale du faisceau dérivé de l'ensemble en M, se répartissent sur au plus une infinité dénombrable d'ensembles fermés dont le faisceau dérivé propre, en chaque point M, est en entier étranger à $F(M)$.*

En particulier *les points de la fermeture où le faisceau dérivé de l'ensemble n'a pas de partie bilatérale forment un ensemble au plus dénombrable* car il en est ainsi des ensembles composés de points isolés.

Section 2: Variétés lipschitziennes.

Portons plus spécialement l'attention sur le cas où le faisceau $F(M)$ est une *variété linéaire* $L(M)$ à $n-p$ dimensions. Les ensembles du théorème I étant rangés en une suite, soit k_0 l'indice de celui qui contient un tel point M: $L(M)$ est étranger au faisceau dérivé $\Phi_{E_{k_0}}(M)$. On peut alors trouver un indice i_0 et une combinaison finie $(j)_0$ tels que S_{i_0} contienne M, $\sum_{(j)_0} \Gamma_j(M)$ recouvre $L(M)$, et vérifient $S_{i_0} \wedge \sum_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge E_{k_0} = 0$. D'après les valeurs de ces différents indices, les points M en question se répartissent en au plus une infinité *dénombrable* d'ensembles. Celui E_0 qui correspond aux valeurs précédentes, du fait qu'il appartient à $S_{i_0} \wedge E_{k_0}$, vérifie, en chacun de ses points M, $\sum_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge E_0 = 0$.

[1] Dans le cas ou l'ensemble E est *ordonné*, en ce sens qu'entre deux quelconques de ses points il existe une relation d'ordre asymétrique (M' postérieur à M entraine M antérieur à M') et transitive (M' postérieur à M, M'' posterieur à M' entrainent M'' posterieur à M), on peut définir en un point M le *faisceau dérivé postérieur* (*ou antérieur*) comme le faisceau dérivé ordinaire de l'ensemble des points de E postérieurs (ou antérieurs) à M et le *faisceau dérivé bilatéral* comme le faisceau des droites dont une demi-droite appartient au faisceau dérivé postérieur et l'autre au faisceau dérivé antérieur et faire jouer à ce faisceau dérivé bilatéral le rôle que va jouer dans le cas général la partie bilaterale du faisceau dérive.

M_0 désignant un point particulier de E_0 et ω la distance angulaire de $L(M_0)$ à la frontière de $\sum\limits_{(\gamma)_0} \Gamma_\gamma(M_0)$, toute sécante MM' à l'ensemble E_0 fait avec $L(M_0)$ un angle au moins égal à ω. La correspondance de E_0 à sa projection e_0 faite parallèlement à $L(M_0)$ sur une variété linéaire orthogonale et complémentaire $[e]$, définit alors une *fonction géométrique uniforme* $M = f(m)$ *vérifiant une condition de Lipschitz* $MM' \leq \frac{1}{\sin\omega}\, m\, m'$.

Dans un système d'axes rectangulaires dont les p premiers sont pris dans $[e]$, les $n-p$ dernières coordonnées d'un point M de E_0 sont des *fonctions numériques réelles* des p premières, ou plus brièvement du point m, vérifiant *a fortiori* la condition de Lipschitz $|x_\gamma(m') - x_\gamma(m)| \leq m\, m'/\sin\omega$ $(\gamma = p+1,\ p+2, \ldots, n)$. Il est possible d'*en prolonger la définition* hors de e_0 tout en leur conservant cette propriété. En effet, pour chaque valeur de γ, en un point μ de $[e]$ étranger à e_0, quels que soient les points m et m' de e_0, les segments (fermés) de $\mu\, x_\gamma$ relatifs à chacun d'eux, respectivement définis par $x_\gamma(m) \pm \mu\, m/\sin\omega$ et $x_\gamma(m') \pm \mu\, m'/\sin\omega$, ont en commun au moins un point car sinon $|x_\gamma(m') - x_\gamma(m)|$ serait supérieur à $(\mu\, m + \mu\, m')/\sin\omega$ donc à $m\, m'/\sin\omega$, d'où résulte que les segments analogues relatifs à chacun des points de e_0 ont en commun au moins un point, dont on peut prendre la coordonnée pour $x_\gamma(\mu)$. Dès lors, étant donnée une *suite partout dense* de points de $[e]$, sur ceux qui n'appartiennent pas à e_0 et en les y adjoignant au fur et à mesure, on peut de proche en proche prolonger chacune des $n-p$ fonctions $x_\gamma(m)$. Le prolongement s'achève partout ailleurs *par continuité*. L'ensemble représentatif de ce système de fonctions correspond alors d'une manière univoque et continue dans les deux sens, à la variété linéaire $[e]$ à p dimensions; c'est la définition même d'une *variété à p dimensions* (courbe, surface pour $p = 1, 2$, quand $n = 3$). Et cette variété vérifie la condition de Lipschitz $MM' \leq \frac{\sqrt{n-p}}{\sin\omega}\, m\, m'$.

Théorème II (*1ière partie*). — *Etant donné un ensemble de points dans l'espace euclidien à n dimensions, les points M de sa fermeture en chacun desquels on peut mener une variété linéaire à $n-p$ dimensions (arbitrairement variable d'un point M à l'autre) qui soit étrangère à la partie bilatérale du faisceau dérivé de l'ensemble en M, se répartissent sur au plus une infinite dénombrable de variétés lipschitziennes à p dimensions.*[1]

[1] Le lecteur est prie d envisager les cas particuliers $n=3$, $p=2$ et $n=3$, $p=1$.

Section 3: **Mesure p-dimensionnelle dans l'espace euclidien à n dimensions.**

Plaçons-nous d'abord dans un espace $[\mathfrak{E}]$ assujetti à la seule condition qu'il y existe une *mesure extérieure* (au sens de M. Carathéodory), c'est-à-dire une fonction numérique réelle non négative (éventuellement infinie) et non constante $\mu(\mathfrak{E})$, définie pour tout ensemble $\mathfrak{E}$ d'éléments de $[\mathfrak{E}]$, vérifiant la condition:

$$\text{quand } \mathfrak{E} < \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{E}_k, \qquad \mu(\mathfrak{E}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{E}_k).$$

Avec M. Carathéodory[1], appelons *mesurable-μ* (de mesure $\mu(\mathfrak{E})$ en supprimant le mot extérieur) tout ensemble $\mathfrak{E}$ qui possède la propriété:

$$\text{pour tout ensemble } \mathfrak{A} \text{ de } \mathfrak{E}, \qquad \mu(\mathfrak{A}) = \mu(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{E}) + \mu(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}\mathfrak{E}),$$

$\mathfrak{C}$ désignant le complémentaire par rapport à $[\mathfrak{E}]$. On démontre alors que la *famille* des ensembles mesurables-μ contient, en même temps que deux ensembles, leur différence, et en même temps que des ensembles en au plus une infinité dénombrable, leur réunion (par suite aussi leur intersection), ainsi que les ensembles annulant μ (et par suite leurs sous-ensembles); et que, sur cette famille, la fonction d'ensemble $\mu(\mathfrak{E})$ jouit de l'*additivité complète:*

quand les $\mathfrak{E}_k$, deux à deux disjoints, sont mesurables-μ,

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{E}_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{E}_k).$$

Cette manière d'introduire une mesure est légitime. En effet, soit *a priori* une *mesure* dans l'espace $[\mathfrak{E}]$, c'est-à-dire une fonction numérique réelle non négative, non constamment nulle ou infinie et complètement additive $m(\mathfrak{E}^*)$, définie pour les ensembles $\mathfrak{E}^*$ (dits *mesurables*) d'une *famille* contenant en même temps que deux ensembles, leur différence, et en même temps que des ensembles en au plus une infinité dénombrable, leur réunion, ainsi que tout sous-ensemble d'ensemble annulant m. La fonction d'ensemble $m(\mathfrak{E})$ définie pour tout ensemble $\mathfrak{E}$ de $[\mathfrak{E}]$ comme la borne inférieure des mesures $m(\mathfrak{E}^*)$ des ensembles mesurables $\mathfrak{E}^*$ contenant $\mathfrak{E}$, ou $+\infty$ quand il n'existe pas de tels ensembles, présente tous les caractères d'une mesure

[1] Cf. C. Carathéodory, *Über das lineare Mass von Punktmengen — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, **1914**, 404—426.

Voir aussi R. de Possel, *Notion générale de mesure et d'intégrale*, Séminaire de Mathématiques de M. Julia, 2, 1934—1935, A.

extérieure; et l'on démontre que tout ensemble mesurable donné $\mathfrak{E}^*$ (pour lequel évidemment $m = m$) possède la propriété de M. Carathéodory relativement à cette mesure extérieure m.

Particularisons maintenant l'espace $[\mathfrak{E}]$ en le supposant *métrisable*, c'est-à-dire où l'on peut introduire une *distance*. fonction numérique réelle non négative et symétrique de deux éléments quelconques de $[\mathfrak{E}]$, nulle dans le seul cas de l'identité de ces deux éléments et satisfaisant à l'inégalité du triangle. Et imposons à la mesure extérieure μ cette *nouvelle condition de M. Carathéodory* (additivité pour deux ensembles à distance positive):

(C_1) quand distance $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) > 0, \qquad \mu(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2) = \mu(\mathfrak{E}_1) + \mu(\mathfrak{E}_2)$.

Alors, fait extrêmement important qui, entre autre, a permis l'introduction par M. Haar d'une mesure dans les groupes, on démontre que *tout ensemble fermé de* $[\mathfrak{E}]$ *est mesurable-*μ, par suite aussi *tout ensemble de M. Borel.*

Prenons enfin pour espace $[\mathfrak{E}]$ l'espace euclidien $[E]$ à n dimensions et appelons, avec M. Kolmogoroff[1], *image non dilatée* d'un ensemble E de points, un ensemble e tel que chaque point de E ait un correspondant unique dans e, la distance de deux points quelconques de E n'étant pas inférieure à celle de leurs correspondants (par exemple une projection orthogonale e de E sur une variété linéaire). Il est naturel d'imposer encore à μ cette *condition de M. Kolmogoroff:*

(C_2) pour toute image non dilatée e de E, $\qquad \mu(e) \leq \mu(E)$;

qui entraîne en particulier l'invariance de μ par rapport au groupe des déplacements. Dès lors, j'appellerai *mesure p-dimensionnelle extérieure dans l'espace euclidien E à n dimensions*, toute mesure extérieure dans $[E]$, vérifiant (C_1) et (C_2), de valeur 1 sur un carré unité U (de côté égal à l'unité de longueur) d'une variété linéaire à p dimensions de $[E]$. On démontre qu'une telle mesure p-dimensionelle extérieure μ prend, sur chaque ensemble de M. Borel[2], une valeur comprise entre celles de deux mesures p-dimensionnelles extrêmes: la *mesure supérieure* et la *mesure inférieure* (qu'il ne faut pas confondre avec la mesure extérieure et la mesure intérieure, ici égales pour chaque μ puisqu'un ensemble de M. Borel est mesurable-μ, la mesure intérieure $m(E)$ étant définie comme la borne supérieure des mesures des ensembles mesurables-μ contenus dans E).

Parmi les mesures p-dimensionnelles extérieures au sens ainsi précisé figure la *mesure de M. Carathéodory* dont voici la construction: on enferme l'ensemble

---

[1] Cf. A. KOLMOGOROFF, *Beiträge zur Masstheorie*, Mathematische Annalen, **107**, 1933, 351—366.

[2] La demonstration de M. Kolmogoroff *loc. cit.* est même relative aux ensembles analytiques; mais la considération des ensembles de M. Borel nous suffit pour la suite.

E dans un système au plus dénombrable de sphéres à n dimensions; on forme la somme de la série dont les termes sont les mesures élémentaires des sections centrales à p dimensions de ces sphères; et l'on prend pour $\mu(E)$ la plus petite limite de cette somme quand le plus grand diamètre des sphères du système tend vers zéro. Quant à la *mesure supérieure de M. Kolmogoroff*, on peut l'obtenir en prenant la borne inférieure des mesures extérieures de M. Lebesgue, dans une variété linéaire à p dimensions de $[E]$, des ensembles de cette variété dont E est une image non dilatée, ou $+\infty$ quand il n'existe pas de tels ensembles. De plus, pour tout ensemble de M. Borel rentrant dans le premier cas, on démontre l'égalité des mesures supérieure et inférieure, donc l'*unicité de la mesure p-dimensionnelle.*

En particulier, considérons une *variété lipschitzienne V à p dimensions:* elle correspond à sa projection orthogonale sur une variété linéaire convenable $[e]$ à p dimensions, par une fonction géométrique uniforme $M = f(m)$ vérifiant une condition de Lipschitz $MM' \leq K \, . \, mm'$. Tout ensemble E de V est image non dilatée d'un ensemble semblable, dans le rapport K, à la projection de E sur $[e]$. D'où résulte que toute portion fermée et bornée de V admet une mesure p-dimensionnelle *unique et finie* et que tout ensemble de M. Borel de V, dont la projection sur $[e]$ (qui est encore un ensemble de M. Borel) a sa mesure de MM. Borel et Lebesgue nulle, admet une mesure p dimensionnelle *unique et nulle.* Du fait que toute mesure p-dimensionnelle d'un tel ensemble est nulle, résulte qu'il en est de même de chacun de ses *sous-ensembles*, que ce soit ou non un ensemble de M. Borel.

CHAPITRE II.

Caractère linéaire du faisceau dérivé.

Section 1: Variété linéaire tangente au sens strict.

Poursuivons, dans l'espace euclidien $[E]$ à n dimensions, l'étude des points M de la fermeture d'un ensemble E en chacun desquels on peut mener une *variété linéaire* $L(M)$ à $n-p$ dimensions qui soit *étrangère à la partie bilatérale* du faisceau dérivé $\Phi_E(M)$. D'après le théorème I. ces points M se répartissent sur au plus une infinité dénombrable d'ensembles fermés E_0 tels qu'en chacun de ces points qui appartiennent à E_0, le faisceau dérivé $\Phi_{E_0}(M)$ soit en entier étranger à $L(M)$. Aussi est-ce par l'examen du cas particulier où $L(M)$ est étranger à la *totalité* de $\Phi_E(M)$ que nous allons aborder l'étude du cas général. A cet effet, prenant $L(M)$ en quelque sorte pour *pivot*, cherchons la distribution des rayons de $\Phi_E(M)$ dans chaque variété linéaire $L^*(M)$ passant par $L(M)$ et d'une dimension de plus. D'après le théorème II (1[ière] partie), les points M où une $L^*(M)$ ne contient pas au moins une droite passant par M qui appartienne à $\Phi_E(M)$, se répartissent sur au plus une infinité dénombrable de variétés lipschitziennes à $p-1$ dimensions; et la rareté des points M où une $L^*(M)$ contient d'autres rayons de $\Phi_E(M)$ que deux rayons en prolongation l'un de l'autre résulte du lemme suivant:

Lemme 1. — *Etant donné un ensemble E de points dans l'espace euclidien à n dimensions, les points M en chacun desquels on peut mener une variété linéaire $L(M)$ à $n-p$ dimensions qui soit étrangère au faisceau dérivé $\Phi_E(M)$ et une demi-variété linéaire $\Delta(M)$ à $n-p+1$ dimensions, limitée à $L(M)$, qui contienne deux rayons $M\Delta$ et $M\Delta'$ de $\Phi_E(M)$, forment un ensemble de mesure p-dimensionnelle unique et nulle.*[1]

En un tel point M, la distance angulaire de $L(M)$ et $\Phi_E(M)$, celle de $M\Delta$ et $M\Delta'$ sont positives: $\{\omega_l\}$ désignant une suite qui tend vers zéro, on peut trouver un indice l_0 tel que ω_{l_0} soit inférieur à chacune d'elles. Le voisinage angulaire fermé de $L(M)$ d'angle ω_{l_0} et de sommet M est alors étranger à $\Phi_E(M)$: nous savons trouver un indice i_0 et une combinaison finie $(j)_0$ tels que S_{i_0} contienne M, $\sum_{(j)_0} \Gamma_j(M)$ recouvre ce voisinage angulaire de $L(M)$, et vérifient $S_{i_0} \wedge \sum_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge E = 0$. Enfin, θ étant un angle qui ne dépend que de ω_{l_0} suivant une loi ultérieurement précisée, on peut trouver deux indices j_0 et j'_0 tels que $\Gamma_{j_0}(M)$ et $\Gamma_{j'_0}(M)$, d'ouverture au plus égale à θ, contiennent respectivement $M\Delta$ et $M\Delta'$. D'après les valeurs de ces différents indices, les points M du lemme se répartissent en au plus une infinité *dénombrable* d'ensembles.

Celui qui correspond aux valeurs précédentes fait partie de l'ensemble E_0 inclus dans S_{i_0} et vérifiant en chacun de ses points M (E_{i_0} désignant $S_{i_0} \wedge E$) $\sum_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge E_{i_0} = 0$, $S_i \wedge \Gamma_{j_0}(M) \wedge E_{i_0} \neq 0$ pour une infinité de S_i contenant M et $S_i \wedge \Gamma_{j'_0}(M) \wedge E_{i_0} \neq 0$ pour une autre infinité. La première relation, avons-

[1] Le lecteur est encore prié d'envisager les cas particuliers $n=3$, $p=2$ et $n=3$, $p=1$.

nous vu, définit un ensemble fermé; chacune des deux autres, où l'on fixe la valeur de l'indice i, un ensemble ouvert; donc, pour une infinité de valeurs de i, une limite complète au sens de M. Borel d'ensembles ouverts. De plus, de chacune des deux dernières relations résulte que tout point M de E_0 est point d'accumulation de E_{i_0} en sorte que la première exige $\sum_{(J)_0} \Gamma_J(M) \wedge E_0 = 0$. M_0 étant un point particulier du lemme appartenant à E_0, $\sum_{(J)_0} \Gamma_J(M_0)$ recouvre le voisinage d'angle ω_{l_0} de $L(M_0)$: pour tout point M de E_0 et tout point N de E_0 ou de E_{i_0}, MN fait avec $L(M_0)$ un angle supérieur à ω_{l_0}. Ainsi *l'ensemble du lemme se répartit sur au plus une infinité dénombrable d'ensembles de M. Borel (de classe 2 au plus) situés chacun sur une variété lipschitzienne à p dimensions.* D'après ce que nous savons de la mesure p-dimensionnelle de tels ensembles, il suffit alors de démontrer que pour chacun d'eux E_0, la projection e_0 faite parallèlement à $L(M_0)$ sur une variété linéaire $[e]$ orthogonale et complémentaire, est de mesure de MM. Borel et Lebesgue nulle.

Supposant au contraire cette mesure *positive,* il résulte d'une propriété qui est à la base de l'évaluation des intégrales multiples donnée par M. Lebesgue et étendue par M. Fubini qu'il existe une infinité de droites de $[e]$, parallèles à la demi-droite δ d'intersection de $[e]$ par $\Delta(M_0)$, sur chacune desquelles e_0 est de mesure *linéaire* positive.[1] Une seule d nous suffit. Sur tout intervalle de d où e_0 est de mesure positive, la théorie de la mesure (ici linéaire) de M. Lebesgue permet d'enfermer le complémentaire de e_0 sur d dans un système d'intervalles (ouverts) disjoints dont la somme des longeurs soit inférieure à la longueur de l'intervalle initial: les points de d étrangers à chacun des intervalles du système forment un ensemble (linéaire) *fermé* f_0 inclus dans e_0 et de mesure positive.

Dans un système d'axes rectangulaires dont le premier est pris sur d (dans le sens de δ) et les $p-1$ suivants dans $[e]$, la demi-droite $M_0\Delta_0$ qui, appartenant à $\Phi_E(M_0)$, fait avec $L(M_0)$ un angle supérieur à ω_{l_0} (dont nous pouvons maintenant supprimer l'indice l_0 sans crainte d'ambiguïté) a des cosinus directeurs $a_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $a_1 > \sin\omega$, $a_{\beta'} = 0$, $(\beta' = 2, 3, \ldots, p)$, $|a_\gamma| < \cos\omega$ $(\gamma = p+1, p+2, \ldots, n)$. Ceux $a_\alpha + \eta_\alpha$ de toute demi-droite de $\Gamma_{J_0}(M_0)$ (d'ouverture au plus θ et contenant $M_0\Delta_0$) vérifient $\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(a_\alpha + \eta_\alpha) > \cos\theta$; d'où, en tenant compte de

[1] Cf. S. Saks, *Theorie de l'intégrale,* Monografje Matematyczne, 2, Warzawa, 1933, p. 73.

$$\sum a_\alpha^2 = \sum (a_\alpha + \eta_\alpha)^2 = 1, \quad \sum \eta_\alpha^2 < 2(1 - \cos\theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2};$$

et $|\eta_\alpha| < 2 \sin \frac{\theta}{2}$ En introduisant les paramètres directeurs respectifs λ_α et $\lambda_\alpha + \varepsilon_\alpha$ tels que $\lambda_1 = 1$ et $\varepsilon_1 = 0$ (auquel cas $\lambda_{\beta'} = 0$, $|\lambda_\gamma| < \operatorname{cotg} \omega$), on a

$$\varepsilon_{\alpha'} = \frac{a_{\alpha'} + \eta_{\alpha'}}{a_1 + \eta_1} - \frac{a_{\alpha'}}{a_1} = \frac{\eta_{\alpha'}}{a_1 + \eta_1} \qquad (\alpha' = 2, 3, \ldots, n).$$

Si donc on impose à θ la première condition $\sin\omega - 2\sin\frac{\theta}{2} > 0$, il vient

$$|\varepsilon_{\alpha'}| < \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin\omega - 2\sin\frac{\theta}{2}}$$

(quantité que nous poserons égale à ε).

D'autre part, à deux points m et m' de f_0 correspondent dans E_0 deux points $M(x_\alpha)$ et $M'(x'_\alpha)$ tels que $x_1 < x'_1$ (quitte à échanger les noms des deux points), $x_{\beta'} = x'_{\beta'} = 0$. Aussi près de M que l'on veut, on peut trouver dans $\Gamma_{j_0}(M)$ un point $N(y_\alpha)$ de E_{i_0}: en même temps que $x_1 < y_1 < x'_1$, on a $\left|\frac{y_{\alpha'} - x_{\alpha'}}{y_1 - x_1} - \lambda_{\alpha'}\right| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|y_{\beta'}| < \varepsilon(y_1 - x_1)$ et $|(y_\gamma - x_\gamma) - \lambda_\gamma(y_1 - x_1)| < \varepsilon(y_1 - x_1)$. Soit m^1 le point de f_0 d'abscisse au moins égale à y_1 et la plus faible possible, il lui correspond dans E_0 le point $M^1(x_\alpha^1)$ tel que $y_1 \leq x_1^1 \leq x'_1$, $x_{\beta'}^1 = 0$. La droite M^1N fait avec $L(M_0)$ un angle supérieur à ω:

$$\sum_{\gamma=p+1}^{n} (x_\gamma^1 - y_\gamma)^2 < \operatorname{cotg}^2 \omega \sum_{\beta=1}^{p} (x_\beta^1 - y_\beta)^2.$$

Nous pouvons alors évaluer

$$|(x_\gamma^1 - x_\gamma) - \lambda_\gamma(x_1^1 - x_1)| \leq |x_\gamma^1 - y_\gamma| + |\lambda_\gamma|(x_1^1 - y_1) + |(y_\gamma - x_\gamma) - \lambda_\gamma(y_1 - x_1)|$$

$$< \operatorname{cotg}\omega \sqrt{(x_1^1 - y_1)^2 + \sum_{\beta'=2}^{p} y_{\beta'}^2} + \operatorname{cotg}\omega\,(x_1^1 - y_1) + \varepsilon(y_1 - x_1)$$

$$< \varepsilon(1 + \sqrt{p - 1} \operatorname{cotg}\omega)(y_1 - x_1) + 2(x_1^1 - y_1)\operatorname{cotg}\omega.$$

Par suite, quel que soit le couple $m m'$ de points de $f_0(x_1 < x'_1)$, on peut trouver un point m^1 de $f_0(x_1 < x_1^1 \leq x'_1)$ qui soit *associé* à m selon les inégalités

$$|(x_\gamma^1 - x_\gamma) - \lambda_\gamma(x_1^1 - x_1)|$$
$$\leq \varepsilon(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\omega)(x_1^1 - x_1) + 2\,[(x_1^1 - x_1) - \operatorname{mes}_{f_0}(x_1, x_1^1)]\operatorname{cotg}\omega$$

($\gamma = p+1,\ p+2, \ldots, n$), où $\operatorname{mes}_{f_0}(x_1, x_1^1)$ désigne la mesure linéaire de la partie de f_0 située sur l'intervalle $m m^1$.

Les points de f_0 situés sur le segment (fermé) $m^1 m'$ et associés à m forment un ensemble *fermé* d'après la continuité des $n-p$ dernières coordonnées, en fonction de la première, des points de la variété lipschitzienne à p dimensions sur laquelle est situé E_0. Si m' n'en faisait pas partie, entre son *dernier point* m'' (exclu) et m' (inclus), on pourrait trouver un point de f_0 associé à m'', donc aussi à m d'après l'additivité des inégalités, contrairement à la définition de m''. Par suite, quel que soit le couple $m m'$ de points de f_0, pour $\gamma = p+1, p+2, \ldots, n$, on a

$$\left|\frac{x'_\gamma - x_\gamma}{x'_1 - x_1} - \lambda_\gamma\right| \leq \varepsilon(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\omega) + 2\,[1 - \operatorname{ep}_{f_0}(x_1, x'_1)]\operatorname{cotg}\omega,$$

où $\operatorname{ep}_{f_0}(x_1, x'_1)$, quotient de la mesure de f_0 sur l'intervalle $m m'$ par la longueur de cet intervalle. est ce que M. Denjoy appelle l'*épaisseur moyenne* de l'ensemble f_0 sur l'intervalle $m m'$ (réservant le terme de *densité* au point de vue topologique de Baire: ensemble non dense, dense, partout dense sur le continu, sur un ensemble parfait, sur tout ensemble parfait). On définit l'*épaisseur en un point* comme la limite, quand elle existe, de l'épaisseur moyenne sur un intervalle évanescent contenant ce point.

C'est un théorème fondamental de M. Lebesgue que les points d'un ensemble où l'épaisseur de celui-ci n'est pas 1 forment un ensemble de mesure nulle.[1] Comme f_0 est de mesure positive, on peut trouver des points où son épaisseur est 1; donc, quel que soit le choix ultérieur de ε, des intervalles $m m'$ où son épaisseur moyenne diffère de 1 de moins de $\frac{\varepsilon}{2}(\operatorname{tg}\omega + \sqrt{p-1})$. Pour un tel intervalle, on a

$$\left|\frac{x'_\gamma - x_\gamma}{x'_1 - x_1} - \lambda_\gamma\right| \leq 2\,\varepsilon(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\omega);$$

[1] Cf. H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, Collection de M. Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1904, p. 124.

et aussi

$$\left|\frac{x'_\gamma - x_\gamma}{x'_1 - x_1} - \lambda'_\gamma\right| \leq 2\,\varepsilon\,(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\,\omega)$$

car $M_0 \varDelta_0$ et $M_0 \varDelta'_0$, ainsi que $\Gamma_{y_0}(M)$ et $\Gamma_{y'_0}(M)$, jouent *le même rôle* par rapport à l'ensemble fermé f_0. Par suite, pour $\gamma = p+1, p+2, \ldots, n$,

$$|\lambda'_\gamma - \lambda_\gamma| \leq 4\,\varepsilon\,(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\,\omega).$$

Or, dans le triangle formé par $M_0 \varDelta_0$ et $M_0 \varDelta'_0$, l'angle en M_0 étant désigné par V,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (\lambda'_\alpha - \lambda_\alpha)^2 = \sum \lambda_\alpha^2 + \sum \lambda'^2_\alpha - 2\sqrt{\sum \lambda_\alpha^2}\,\sqrt{\sum \lambda'^2_\alpha}\cos V;$$

soit encore

$$2\sqrt{\sum \lambda_\alpha^2}\cdot\sqrt{\sum \lambda'^2_\alpha}\,(1 - \cos V) = \sum (\lambda'_\alpha - \lambda_\alpha)^2 - \left(\sqrt{\sum \lambda'^2_\alpha} - \sqrt{\sum \lambda^2_\alpha}\right)^2.$$

Et comme $\lambda_1 = \lambda'_1 = 1$, $\lambda_{\beta'} = \lambda'_{\beta'} = 0$,

$$4\sin^2\frac{V}{2} \leq \sum_{\alpha=1}^{n} (\lambda'_\alpha - \lambda_\alpha)^2 = \sum_{\gamma=p+1}^{n} |\lambda'_\gamma - \lambda_\gamma|^2$$

$$\leq 16\,(n-p)\,\varepsilon^2 (1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\,\omega)^2;$$

soit

$$\sin\frac{V}{2} \leq 2\,\varepsilon\,(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\,\omega)\sqrt{n-p}.$$

Si donc on impose à θ la nouvelle condition

$$\sin\frac{\omega}{2} > 2\,\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\omega - 2\sin\frac{\theta}{2}}\,(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\,\omega)\sqrt{n-p},$$

soit

$$\sin\frac{\theta}{2} < \frac{\sin\omega\sin\frac{\omega}{2}}{2\sin\frac{\omega}{2} + 4\,(1 + \sqrt{p-1}\,\operatorname{cotg}\,\omega)\sqrt{n-p}}$$

$\left(\text{qui d'ailleurs entraîne la condition déjà rencontrée } \sin\frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\sin\omega\right)$, il y a *contradiction* avec $V > \omega$, ce qui établit le lemme

Dès lors, sauf en des points dont l'ensemble est de mesure p-dimensionnelle unique et nulle, en chaque point M de la fermeture $\overline{E}$ où l'on peut mener une variété linéaire $L(M)$ à $n-p$ dimensions qui soit étrangère à la totalité du faisceau dérivé $\Phi_E(M)$, dans toute variété linéaire $L^*(M)$ passant par $L(M)$ et d'une dimension de plus, $\Phi_E(M)$ possède deux rayons et deux seulement qui se prolongent en une droite D passant par M. D'où résulte qu'*en un point M non exceptionnel, $\Phi_F(M)$ coïncide avec sa partie bilatérale,* car tout rayon de $\Phi_E(M)$ définit avec $L(M)$ une $L^*(M)$; ensuite que *ce faisceau dérivé est une variété linéaire*, nécessairement à p dimensions, puisqu'étrangère à $L(M)$ à $n-p$ dimensions et coupée suivant une droite par chaque $L^*(M)$. Si $\Phi_E(M)$, en effet, n'était pas une variété linéaire, on pourrait trouver deux droites D_1 et D_2 passant par M qui appartiennent à $\Phi_F(M)$ et dont la variété linéaire à deux dimensions contienne une droite D_0 passant par M étrangère à $\Phi_E(M)$. D_0, étrangère à $L(M)$ en tout point M non exceptionnel, définirait avec $L(M)$ une variété linéaire $L^*(M)$ dont l'intersection avec $\Phi_F(M)$ serait une droite D distincte de D_0. La variété linéaire à deux dimensions définie par D et D_0, donc contenue dans $L^*(M)$, couperait $L(M)$ suivant une droite D'. Toute variété linéaire $L'(M)$ à $n-p$ dimensions définie par D_0 et une variété linéaire à $n-p-1$ dimensions de $L(M)$ complémentaire de D', serait étrangère à $\Phi_E(M)$ puisque contenue dans $L^*(M)$ sans contenir D. Et la variété linéaire $L^{*\prime}(M)$ à $n-p+1$ dimensions passant par $L'(M)$ et contenant D_1 contiendrait aussi D_2 puisque D_0 est dans $L'(M)$, contrairement à ce que nous savons des points M non exceptionnels.

Théorème II *(2^ème partie, cas particulier). — Etant donné un ensemble de points dans l'espace euclidien à n dimensions, en chaque point de sa fermeture où l'on peut mener une variété linéaire à $n-p$ dimensions qui soit étrangère à la totalité du faisceau dérivé de l'ensemble en ce point, ce faisceau dérivé se réduit à une variété linéaire à p dimensions (la variété linéaire à p dimensions tangente au sens ordinaire), sauf en des points dont l'ensemble est de mesure p-dimensionnelle unique et nulle.*

En particulier, les points M d'une *variété lipschitzienne à p dimensions* où celle-ci n'admet pas une *variété linéaire tangente à p dimensions* forment un ensemble de mesure p-dimensionnelle unique et nulle, ce qui justifie la dénomination d'*ensemble exceptionnel pour p dimensions* que nous lui donnerons dans la suite[1], plus généralement, que nous donnerons à toute partie de la réunion d'au plus une infinité dénombrable de tels ensembles.

[1] Entre autre, toute variété lipschitzienne à moins de p dimensions, à titre de variété lipschitzienne à p dimensions particulière n'admettant en aucun point de variété linéaire tangente à p dimensions, sera considérée comme ensemble exceptionnel pour p dimensions.

Section 2: Variété linéaire tangente au sens large.

Etant donné un ensemble E de points dans l'espace euclidien à n dimensions, nous savons que les points M de sa fermeture en chacun desquels on peut mener une variété linéaire $L(M)$ à $n-p$ dimensions qui soit étrangère à la partie bilatérale du faisceau dérivé $\Phi_E(M)$, se répartissent sur au plus une *infinité dénombrable de variétés lipschitziennes* V_k à p dimensions (théorème II, 1ière partie) et que, sauf aux points d'un ensemble *exceptionnel* pour p dimensions, en chacun de ces points M qui appartiennent à V_k, celle-ci admet une *variété linéaire tangente* $T(M)$ à p dimensions (théorème II, 2ième partie, cas particulier). En ces points, la variété linéaire $T(M)$ étant prise pour *pivot,* la distribution des rayons de $\Phi_E(M)$ dans chaque variété linéaire passant par $T(M)$ et d'une dimension de plus résulte du lemme suivant:

Lemme 2. — *Ceux de ces points* M *en chacun desquels on peut mener une demi-variété linéaire ouverte* $\Theta(M)$ *à* $p+1$ *dimensions, limitée à* $T(M)$, *qui contienne deux demi-droites* $M\Delta$ *et* $M\Delta'$, *la première étrangère, la seconde agrégée au faisceau dérivé* $\Phi_E(M)$, *forment un ensemble exceptionnel pour* p *dimensions.*[1]

Les points M du lemme se répartissent en au plus une infinité *dénombrable* d'ensembles E_0 caractérisés chacun d'abord par un indice k_0 tel que V_{k_0} contienne M et par deux indices i_0 et j_0 tels que S_{i_0} contienne M, $\Gamma_{j_0}(M)$ (étranger à $T(M)$ qui ne contient pas $M\Delta$) contienne $M\Delta$, et vérifient $S_{i_0} \wedge \Gamma_{j_0}(M) \wedge E=0$. $\Gamma^1_{j_0}(M)$ désignant l'opposé par le sommet de $\Gamma_{j_0}(M)$, la *réciprocité* entre les points de E_0 et ceux de $E_{i_0}=S_{i_0} \wedge E$ entraîne, en tout point N de ce dernier, $\Gamma^1_{j_0}(N) \wedge E_0=0$. N' étant un point de $M\Delta'$, $\Gamma^1_{j_0}(N')$ découpe dans $T(M)$ un *domaine elliptique* (E) à p dimensions qui, parallèlement à la variété linéaire L_{k_0} à $n-p$ dimensions avec laquelle toute sécante de V_{k_0} fait un angle au moins égal à une certaine valeur ω, se projette sur une variété linéaire $[e]$ orthogonale et complémentaire, en un domaine de même nature (e). Ce domaine (e) varie *continûment* quand on fait pivoter la variété linéaire $T(M)$ autour du point M et quand on fait varier le sommet N du demi-cône $\Gamma^1_{j_0}(N)$. Aussi peut-on trouver deux angles ε et η tels que, pour toute variété linéaire T à p dimensions faisant avec $T(M)$ un angle (maximum de la distance angulaire avec $T(M)$ d'une droite de T) moindre que ε et pour tout sommet N distant de N' de moins de $MN' \sin\eta$, les domaines

[1] Le lecteur est toujours prié d'envisager les cas particuliers $n=3$, $p=2$ et $n=3$, $p=1$.

elliptiques (e) correspondants aient *en commun une sphère* à p dimensions de $[e]$ (dont nous désignerons le rayon par r, et par d, la distance du centre à la projection m de M). Quand N' décrit MA', auquel cas N appartient au demi-cône de révolution à n dimensions de demi-axe MA' et d'ouverture 2η, une *homothétie* de centre M permet de conserver le rapport $\frac{r}{d}\cdot$ $\{\theta_l\}$ étant une suite qui tend vers zéro, nous ferons encore dépendre l'ensemble E_0 d'un indice l_0 tel que $\varepsilon \geq \theta_{l_0}$; enfin d'un indice i'_0 et d'une combinaison finie $(j)_0$ tels que $S_{i'_0}$ contienne M, $\sum\limits_{(j)_0} \Gamma_j(M)$ recouvre le complémentaire du voisinage angulaire ouvert de $T(M)$ c'est-à-dire de $\Phi_{V_{k_0}}(M)$, d'angle θ_{l_0} et de sommet M, et vérifient $S_{i'_0} \wedge \sum\limits_{(j)_0} \Gamma_j(M) \wedge V_{k_0} = 0$. Il résulte alors des conditions imposées à E_0 qu'*en chacun de ses points M et aussi près de lui que l'on veut, on peut trouver des points N de E auxquels correspondent des sphères de $[e]$ ne contenant aucun point de la projection e_0 de E_0, dont le quotient du rayon r par la distance d du centre à la projection m de M ne tend pas vers zéro avec d.* Et il suffit de démontrer qu'un tel ensemble E_0 est un ensemble *exceptionnel* pour p dimensions.

En effet, prenons un système d'axes rectangulaires dont les p premiers appartiennent à $[e]$ et faisons correspondre à tout point $M(x_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n)$ de la variété lipschitzienne V_{k_0} (dont nous pouvons maintenant supprimer l'indice k_0), un point $N(y_\alpha)$ tel que $y_{\alpha'} = x_{\alpha'}$ $(\alpha' = 1, 2, \ldots, n-1)$, $y_n = x_n + \varrho \operatorname{cotg} \theta$ où ϱ désigne la distance (qui peut être nulle) de la projection m de M à l'ensemble e_0. A deux points $M(x_\alpha)$ et $M'(x'_\alpha)$ de V, qui par suite vérifient

$$\sum_{\gamma=p+1}^{n} (x'_\gamma - x_\gamma)^2 \leq \operatorname{cotg}^2 \omega \sum_{\beta=1}^{p} (x'_\beta - x_\beta)^2 = \delta^2 \operatorname{cotg}^2 \omega,$$

où δ désigne la distance mm', correspondent les points $N(y_\alpha)$ et $N'(y'_\alpha)$ tels que

$$y'_{\alpha'} - y_{\alpha'} = x'_{\alpha'} - x_{\alpha'}, \quad y'_n - y_n = x'_n - x_n + (\varrho' - \varrho) \operatorname{cotg} \theta.$$

Or la définition de la distance d'un point à un ensemble exige $\varrho \leq \delta + \varrho'$, $\varrho' \leq \delta + \varrho$. D'où $|y'_n - y_n| \leq \delta \operatorname{cotg} \omega + \delta \operatorname{cotg} \theta$; et

$$\sum_{\gamma=p+1}^{n} (y'_\gamma - y_\gamma)^2 \leq \delta^2 \operatorname{cotg}^2 \omega + \delta^2 (\operatorname{cotg} \omega + \operatorname{cotg} \theta)^2$$

$$= [\operatorname{cotg}^2 \omega + (\operatorname{cotg} \omega + \operatorname{cotg} \theta)^2] \sum_{\beta=1}^{p} (y'_\beta - y_\beta)^2.$$

Ainsi la fonction géométrique $N = g(m)$, partout définie sur $[e]$, vérifie une condition de Lipschitz: N décrit une *variété lipschitzienne* W à p dimensions. Si E_0, qui appartient à V et W, n'était pas exceptionnel pour p dimensions, il contiendrait des points M en chacun desquels V et W admettraient chacune une *variété linéaire tangente* à p dimensions, nécessairement *confondues* car le faisceau dérivé $\Phi_{E_0}(M)$ qui appartient à chacune d'elles ne peut être enfermé, en un point M non exceptionnel, dans une variété linéaire à moins de p dimensions (théorème II, 1ière partie). Mais cela n'est *pas possible* car au centre m' d'une sphère de $[e]$ vide de points de e_0, se projettent M' et N' tels que $M'N' \geq r \operatorname{cotg} \theta$; en sorte que, aussi près de M que l'on veut et pour une direction $M'N'$ orthogonale à $[e]$ dont la limite, par conséquent, n'est pas tangente en M à V ni W, il existe des couples $M'N'$ tels que $\frac{M'N'}{m m'}$, ne tende pas vers zéro avec $m m' = d$.

De ce lemme résulte que, sauf en des points dont l'ensemble est exceptionnel pour p dimensions, en chaque point M de E où l'on peut mener une variété linéaire $L(M)$ à $n-p$ dimensions qui soit étrangère à la partie bilatérale du faisceau dérivé $\Phi_E(M)$, celle-ci *coïncide* avec la variété linéaire $T(M)$ à p dimensions; car, s'il existait une droite passant par M qui appartienne à cette partie bilatérale sans appartenir à $T(M)$, la variété linéaire à $p+1$ dimensions qu'elle déterminerait avec $T(M)$ appartiendrait en entier à $\Phi_L(M)$ donc à sa partie bilatérale qui ne pourrait être étrangère à $L(M)$; et s'il existait une droite passant par M qui appartienne à $T(M)$ sans appartenir à la partie bilatérale, contenue dans $T(M)$, de $\Phi_E(M)$, la variété linéaire à $n-p+1$ dimensions qu'elle déterminerait avec $L(M)$ serait étrangère à cette partie bilatérale, ce qui ne peut avoir lieu (théorème II, 1ière partie) qu'aux points M d'au plus une infinité dénombrable de variétés lipschitziennes à $p-1$ dimensions. Ainsi, *en un tel point M non exceptionnel, le faisceau des droites qui sont bilatéralement rayons d'accumulation de l'ensemble E en M est une variété linéaire $T(M)$ à p dimensions;* de plus, s'il existe en dehors de $T(M)$ des rayons d'accumulation de E en M, ils se répartissent en *demi variétés linéaires* $\Theta(M)$ à $p+1$ dimensions limitées à $T(M)$; ce qui conduit à appeler *ensembles tangentiellement exceptionnels pour p dimensions*, les ensembles jusqu'ici qualifiés simplement d'exceptionnels. Dans le seul cas où $T(M)$ est la *totalité* du faisceau dérivé, c'est la *variété linéaire à p dimensions tangente au sens ordinaire;* mais dans tous les cas où $T(M)$ est la *partie bilatérale* du faisceau dérivé, elle peut être considérée comme la *variété linéaire à p dimensions tangente en un sens élargi.* Un tel *contact* avec l'ensemble de la variété linéaire à p dimensions tangente au sens large est rompu par tout pivotement de la variété linéaire.

Théorème II *(énoncé général). — Etant donné un ensemble de points dans l'espace euclidien à n dimensions, les points de sa fermeture en chacun desquels on peut mener une variété linéaire à $n-p$ dimensions qui soit étrangère à la partie bilatérale du faisceau dérivé de l'ensemble en ce point, se répartissent sur au plus une infinité dénombrable de variétés lipschitziennes à p dimensions (en particulier de mesure p-dimensionnelle unique et finie).*

En chacun de ces points, sauf en ceux d'un ensemble tangentiellement exceptionnel pour p dimensions[1] *(en particulier de mesure p-dimensionnelle unique et nulle), la partie bilatérale du faisceau dérivé de l'ensemble se réduit à une variété linéaire à p dimensions (la variété linéaire à p dimensions tangente au sens large) en dehors de laquelle éventuellement le faisceau dérivé en entier se compose d'un système de demi-variétés linéaires à $p+1$ dimensions limitées à elle, dont aucun couple ne forme de variété linéaire complète.*

Section 3: Variétés linéaires tangentes passant par un point fixe.

Toujours dans l'espace euclidien $[E]$ à n dimensions, proposons-nous d'étudier *comment se projettent,* à partir d'un point fixe O, sur une variété linéaire $[e]$ à $n-1$ dimensions ne contenant pas O, *les points M où un ensemble E de points admet une variété linéaire à p dimensions tangente au sens large $T(M)$ qui passe par le point fixe O.* D'après le théorème II, ces points M se répartissent sur au plus une infinité dénombrable de variétés lipschitziennes V_k à p dimensions et, sauf aux points d'un ensemble tangentiellement exceptionnel pour p dimensions, en un tel point M appartenant à V_k, le faisceau dérivé $\Phi_{V_k}(M)$ coïncide avec $T(M)$. Ce qui ramène, ici encore, le problème général au même problème pour les seules *variétés lipschitziennes* à p dimensions. Grâce à une *transformation*

[1] Réunion d'au plus une infinité dénombrable d'ensembles où une variété lipschitzienne à p dimensions n'admet pas de variété linéaire à p dimensions tangente au sens strict.

homographique (qui manifestement transforme le faisceau dérivé d'un ensemble en celui de l'ensemble transformé) conservant $[e]$ et transformant O dans le point à l'infini de la direction D orthogonale à $[e]$, il est permis de se placer dans ce dernier cas où le langage est plus commode.

Les points M d'une variété lipschitzienne V à p dimensions où celle-ci admet une variété linéaire à p dimensions tangente au sens strict $T(M)$ qui soit parallèle à D, se répartissent en au plus une infinité *dénombrable* d'ensembles E_0 caractérisés chacun par un indice i_0 tel que S_{i_0} contienne M et (m désignant la projection orthogonale de M sur $[e]$, $t(m)$ la trace de $T(M)$ dans $[e]$ et $\gamma_j(m)$ les demi-cônes de révolution à $n-1$ dimensions de $[e]$ d'une famille analogue à celle des $\Gamma_j(M)$ dans l'espace euclidien $[E]$) une combinaison finie $(j)_0$ telle que $\sum_{(j)_0} \gamma_j(m)$ recouvre $t(m)$, les $\gamma_j(m)$ étant d'ouverture au plus égale à un angle aigu donné ω $\left(\text{par exemple } \omega = \frac{\pi}{4}\right)$. M_0 étant un point particulier de E_0, prenons un système d'axes rectangulaires d'origine m_0, dont le dernier soit parallèle à D (auquel cas les $n-1$ premiers sont dans $[e]$), les $p-1$ précédents étant dans $t(m_0)$. En un point $M(x_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n)$ de E_0, $t(m)$ faisant avec $t(m_0)$ un angle moindre que ω et $T(M)$ étant parallèle à D, $T(M)$ c'est à dire $\Phi_V(M)$ est étranger à la région angulaire fermée définie par

$$\sum_{\gamma'=n-p+1}^{n-1} (X_{\gamma'} - x_{\gamma'})^2 \leq \operatorname{cotg}^2 \omega \sum_{\beta=1}^{n-p} (X_\beta - x_\beta)^2$$

et

$$(X_n - x_n)^2 \leq \operatorname{cotg}^2 \varepsilon \sum_{\alpha'-1}^{n-1} (X_{\alpha'} - x_{\alpha'})^2$$

quelque faible que soit ε.[1]

Il en résulte qu'en ce point $M(x_\alpha)$, *à tout angle aigu* ε on peut faire correspondre une *distance* r (fonction non décroissante de ε) telle que, pour aucun point $M'(x'_\alpha)$ de V, on n'ait simultanément

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x'_\alpha - x_\alpha)^2 < r^2, \quad \sum_{\gamma'=n-p+1}^{n-1} (x'_{\gamma'} - x_{\gamma'})^2 < \operatorname{cotg}^2 \omega \sum_{\beta=1}^{n-p} (x'_\beta - x_\beta)^2,$$

$$(x'_n - x_n)^2 < \operatorname{cotg}^2 \varepsilon \sum_{\alpha'=1}^{n-1} (x'_{\alpha'} - x_{\alpha'})^2.$$

---

[1] Le lecteur est prié de faire des figures dans les cas particuliers $n = 3$, $p = 2$ ou 1 et de suivre sur ces figures les raisonnements ultérieurs.

ε_0 étant choisi une fois pour toutes $\left(\text{par exemple } \varepsilon_0 = \frac{\pi}{4}\right)$ et $\{r_k\}$ désignant une suite qui tend en décroissant vers zéro, E_0 se présente comme la limite pour k infini d'ensembles non décroissants en chaque point $M(x_\alpha)$ de l'un desquels $r(\varepsilon_0) \geq r_k$. Puis, ε inférieur à ε_0 ayant une valeur ultérieurement fixée, ce dernier ensemble se présente à son tour comme la limite pour k' infini d'ensembles non décroissants en chaque point $M(x_\alpha)$ de l'un desquels, outre $r(\varepsilon_0) \geq r_k$, on a $r(\varepsilon) \geq r_{k'}$.

Un tel ensemble appartient à l'ensemble $E_{k,k'}$ de tous les points $M(x_\alpha)$ de $\bar{S}_{i_0} \wedge V$ tels que, pour chacun des deux couples ε_0, r_k et ε, $r_{k'}$, les inégalités respectives définissent *deux domaines* (ouverts) qui ne contiennent ni l'un ni l'autre de points $M'(x'_\alpha)$ de V. Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans le but d'établir que les ensembles du théorème I sont fermés montre que $E_{k,k'}$ est *fermé*. Comme il est borné (inclus dans S_{i_0}), sa projection $e_{k,k'}$ sur $[e]$ est aussi fermée. La réunion de ces projections non décroissantes avec chaque indice, qui n'est autre alors que $\lim\limits_{k\infty} e_k$ où $e_k = \lim\limits_{k'\infty} e_{k,k'}$, et qui contient la projection e_0 dont nous nous proposons l'étude, est image non dilatée de l'ensemble de V dont elle est la projection, lui-même image non dilatée d'un ensemble appartenant à une variété linéaire à p dimensions; en sorte que, d'après la théorie de M. Kolmogoroff, *cette réunion au plus dénombrable d'ensembles fermés admet une mesure p-dimensionnelle unique.*

En ne considérant des deux domaines relatifs à un point M de $E_{k,k'}$ que la partie pour laquelle $|x'_n - x_n| < r_{k'} \cos \varepsilon_0$, les deux conditions

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x'_\alpha - x_\alpha)^2 < r_{k'}^2 \quad \text{et} \quad (x'_n - x_n)^2 < \operatorname{cotg}^2 \varepsilon_0 \sum_{\alpha'=1}^{n-1} (x'_{\alpha'} - x_{\alpha'})^2$$

sont *complémentaires* en ce sens que l'une est vérifiée dès que l'autre ne l'est pas. Par suite le domaine défini par la nouvelle condition $|x'_n - x_n| < r_{k'} \cos \varepsilon_0$, les deux conditions respectivement plus larges que les précédentes

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x'_\alpha - x_\alpha)^2 < r_k^2, \quad (x'_n - x_n)^2 < \operatorname{cotg}^2 \varepsilon \sum_{\alpha'=1}^{n-1} (x'_{\alpha'} - x_{\alpha'})^2$$

et la condition commune

$$\sum_{\gamma'=n-p+1}^{n-1} (x'_{\gamma'} - x_{\gamma'})^2 < \operatorname{cotg}^2 \omega \sum_{\beta=1}^{n-p} (x'_\beta - x_\beta)^2$$

appartient à la réunion des deux domaines initiaux. Il en est de même des domaines suivants de plus en plus restreints·

$$|x'_n - x_n| < h \leq r_{k'} \cos \varepsilon_0, \quad r_k^2 \sin^2 \varepsilon_0 > \sum_{\alpha'=1}^{n-1} (x'_{\alpha'} - x_{\alpha'})^2 > h^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon,$$

$$\sum_{\gamma'=n-p+1}^{n-1} (x'_{\gamma'} - x_{\gamma'})^2 < \operatorname{cotg}^2 \omega \sum_{\beta=1}^{n-p} (x'_\beta - x_\beta)^2;$$

$$|x'_n - x_n| < h \leq r_{k'} \cos \varepsilon_0, \quad \sum_{\gamma'=n-p+1}^{n-1} (x'_{\gamma'} - x_{\gamma'})^2 < h^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon \operatorname{cotg}^2 \omega,$$

$$h^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon < \sum_{\beta=1}^{n-p} (x'_\beta - x_\beta)^2 < r_k^2 \sin^2 \varepsilon_0 \sin^2 \omega;$$

$$|x'_n - x_n| < h \leq r_{k'} \cos \varepsilon_0, \quad |x'_{\gamma'} - x_{\gamma'}| < \frac{h}{\sqrt{p-1}} \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{cotg} \omega,$$

$$|x'_\beta - x_\beta| < \frac{r_k}{\sqrt{n-p}} \sin \varepsilon_0 \sin \omega,$$

avec pour au moins un β $\quad |x'_{\beta_0} - x_{\beta_0}| > h \operatorname{tg} \varepsilon$.

Dès lors, dans un *parallélépipède* d'arêtes parallèles aux axes et de dimensions $\frac{r_k}{\sqrt{n-p}} \sin \varepsilon_0 \sin \omega$ suivant les $O x_\beta$ $(\beta = 1, 2, \ldots, n-p)$, $\frac{h}{\sqrt{p-1}} \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{cotg} \omega$ suivant les $O x_{\gamma'}$ $(\gamma' = n-p+1, n-p+2, \ldots, n-1)$, h suivant $O x_n$, s'il existe un point de $E_{k,k'}$, les autres sont contenus dans un parallélépipède analogue mais dont les dimensions suivant les $O x_\beta$ sont $h \operatorname{tg} \varepsilon$ δ désignant le diamètre de S_{i_0} augmenté de la plus grande des dimensions du premier parallélépipède, par *juxtaposition* de ceux-ci, S_{i_0} peut être recouvert par un nombre N d'entre eux au plus égal à

$$\left(\delta \Big/ \frac{r_k}{\sqrt{n-p}} \sin \varepsilon_0 \sin \omega\right)^{n-p} \left(\delta \Big/ \frac{h}{\sqrt{p-1}} \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{cotg} \omega\right)^{p-1} (\delta / h).$$

C'est dire qu'on peut *enfermer* la projection $e_{k,k'}$ dans un nombre fini N de sphères à $n-1$ dimensions de $[e]$ de diamètre

$$d = \sqrt{(n-p) h^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + (p-1) \frac{h^2}{p-1} \operatorname{tg}^2 \varepsilon \operatorname{cotg}^2 \omega} = h \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{(n-p) + \operatorname{cotg}^2 \omega}$$

arbitrairement faible avec h, de manière que $N d^p$ soit au plus égal à

$$\frac{(n-p)^{\frac{n-p}{2}}(p-1)^{\frac{p-1}{2}}\left[(n-p)+\cot^2\omega\right]^{\frac{p}{2}}\delta^n}{\sin^{n-p}\varepsilon_0\sin^{n-p}\omega\cot^{p-1}\omega}\times\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r_k^{n-p}}.$$

L'indice k étant fixé, on peut alors choisir ε de manière que $e_{k,k'}$ ait, quel que soit k', sa mesure p-dimensionelle de M. Carathéodory, donc sa mesure p-dimensionelle unique, *aussi faible que l'on veut:* ce qui ne permet pas à sa limite e_k qu'il atteint sans décroître quand k' augmente indéfiniment, d'avoir sa mesure p-dimensionnelle unique *positive*.

Théorème III. — *Dans l'espace euclidien à n dimensions, les points où un ensemble de points admet une variété linéaire à p dimensions tangente au sens large qui passe par un point fixe, forment un ensemble projectivement rare pour p dimensions à partir du point fixe*[1] *(en particulier dont la projection à partir du point fixe sur toute variété linéaire à $n-1$ dimensions ne le contenant pas est de mesure p-dimensionnelle unique et nulle).*

CHAPITRE III.

Applications.

Section 1: Point de vue géométrique.

Illustrons d'un exemple le *caractère linéaire de la partie bilatérale du faisceau dérivé et demi-linéaire éventuel du faisceau dérivé en entier* que le théorème II met en évidence. Dans l'espace euclidien à trois dimensions, considérons la *frontière F d'une réunion de sphères ouvertes dont aucune, ni aucune limite ne soit de rayon nul.* L'adjonction des sphères limites ne modifie pas la frontière F et permet de dire qu'en chacun de ses points M passe au moins une sphère S. Comme F n'a aucun point à l'intérieur de S, son faisceau dérivé $\Phi_F(M)$ n'a aucune demi-droite du côté du plan tangent T à S en M où se trouve S. En s'appuyant sur le fait qu'aucune sphère S n'est de rayon nul, on démontre aisément que l'existence, hors de T, d'une demi-droite de $\Phi_F(M)$ entraîne celle, en M, d'une sphère autre que S; et que l'existence, dans T, d'une demi-droite $M\Delta$

[1] Réunion d'au plus une infinité dénombrable d'ensembles ou une variété lipschitzienne à p dimensions n'admet pas de variété linéaire à p dimensions tangente au sens strict ou en admet une qui passe par le point fixe.

étrangère à $\Phi_F(M)$ entraîne celle, en M, d'une sphère autre que S, où pénètre $M\Delta$. Dès lors:

a) En M ne passe qu'*une* sphère S (cas général) ou que des sphères tangentes entre elles: le faisceau dérivé $\Phi_F(M)$ coïncide avec le *plan tangent* T à S en M.

b) En M ne passent que *deux* sphères non tangentes ou que des sphères tangentes à une même droite D: selon la disposition de leurs grands cercles dans le plan perpendiculaire à D en M, $\Phi_F(M)$ comprend les deux faces d'un dièdre, provenant en quelque sorte du repliement suivant D du plan T par suite du dédoublement de la sphère S; ou bien, ce repliement devenant complet, $\Phi_F(M)$ devient un demi-plan limité à D; ou même $\Phi_F(M)$ se réduit à D. Dans ces trois cas, D est la *tangente* à F en M au sens élargi de droite unique ayant avec F un *contact bilatéral*.

c) En M passent au moins *trois* sphères non tangentes à une même droite: $\Phi_F(M)$ comprend les trois faces d'un trièdre, ou la surface d'un demi-cône *strictement convexe:* il peut se réduire à un secteur plan d'angle inférieur à π, à une demi-droite, ou même à néant (dans le cas d'un point frontière isolé).

Le théorème II nous apprend, pour $p = 2$, que les points de F se répartissent sur au plus une *infinité dénombrable de surfaces lipschitziennes* (en particulier quarrables) et que ceux où F n'admet pas de *plan tangent* (ici au sens ordinaire) forment un ensemble tangentiellement exceptionnel pour deux dimensions (en particulier de surface nulle); puis, pour $p = 1$, que ces points (b) et (c) plus précisément se répartissent sur au plus une *infinité dénombrable de courbes lipschitziennes* (en particulier rectifiables) et que ceux d'entre eux où F n'admet pas de *tangente au sens large* (éventuellement accompagnée de *demi-plans*) forment un ensemble tangentiellement exceptionnel pour une dimension (en particulier de longueur nulle); enfin, pour $p = 0$, que ces derniers points (c) plus précisément forment un ensemble au plus *dénombrable.*

Toujours dans l'espace euclidien à trois dimensions, abordons maintenant l'étude d'un *ensemble de points E tout à fait arbitraire;* et pour mettre en lumière la simplicité des résultats du théorème II, envisageons en même temps un *simplexe à trois dimensions* (tétraèdre plein en tant que volume, tétraèdre creux en tant que surface latérale). Au point de vue tangentiel, l'ensemble E se comporte en gros comme un *volume:* en un point de sa fermeture, son faisceau dérivé comprend la *totalité de l'espace* autour du point considéré (points intérieurs du tétraèdre plein), sauf en des points qui se répartissent sur au plus une *infinité dénombrable* *de surfaces lipschitziennes* (points frontières du tétraèdre plein). En ces points, l'ensemble E se comporte en gros comme un *volume sur une surface frontière régulière* ou comme une *surface régulière*[1]: son faisceau dérivé comprend un *plan* comme partie bilatérale et un *demi-espace* limité à lui (points intérieurs des faces du tétraèdre plein) ou *rien en dehors* de lui (points intérieurs des faces du tétraèdre creux), sauf en des points qui forment un ensemble tangentiellement exceptionnel pour deux dimensions, en particulier dont la *surface* est unique et *nulle* (points des arêtes du tétraèdre plein ou creux). Dans le second cas seulement, en tant que totalité du faisceau dérivé, le plan mis en évidence est le *plan tangent* au sens ordinaire, mais dans les deux cas, en tant que partie bilatérale du faisceau dérivé, il peut être considéré comme le plan tangent au sens *élargi* où tout plan à distance r d'un point O »touche» la sphère de centre O et de rayon r qu elle soit pleine ou creuse. Un tel *contact* avec l ensemble du *plan tangent au sens large* est rompu par tout pivotement du plan.

Quant à l'ensemble *exceptionnel*, s'il renferme l'ensemble des points de la fermeture de E en chacun desquels on peut mener un plan qui soit étranger à la partie bilatérale du faisceau dérivé, contrairement à l'exemple de la frontière F (et du tétraèdre plein ou creux), il ne coïncide généralement pas avec lui. On sait en effet construire, à la suite de M. Denjoy (exemple II, p. 171 du Mémoire cité sur les nombres dérivés), une fonction continue $y = f(x)$ qui admet, sur un ensemble parfait de valeurs de x (nécessairement de mesure nulle), $+\infty$ pour nombre dérivé supérieur droit et 0 pour chacun des trois autres nombres dérivés extrêmes. Le *cylindre* de génératrices parallèles à Oz ayant pour *directrice* la courbe d'équations $y = f(x)$, $z = 0$ admet alors dans son ensemble tangentiellement exceptionnel pour deux dimensions une infinité *non dénombrable* de génératrices. Or, si l'on sait d'un premier système de courbes rectifiables deux à deux disjointes que tous les points se répartissent sur un second système de courbes rectifiables, celui ci au plus dénombrable, toute courbe du premier système est telle qu'au moins une courbe du second ait avec elle une intersection de longueur positive; et comme sur une courbe rectifiable, des ensembles deux à deux disjoints de longueur positive sont au plus en infinité dénombrable (car sur tout arc de longueur finie l, il y en a au plus N de longueur au moins égale à l/N), le premier système est aussi au plus *dénombrable*. Ainsi les points M de la

[1] Par surface »reguliere», j'entends une surface ayant un plan tangent au point considere. Au contraire, du point de vue tangentiel ou nous nous sommes places, le cylindre ayant pour section droite la courbe de Peano qui remplit un carre, se comporte en gros comme un volume.

fermeture de E en chacun desquels on peut mener un plan dont aucune droite passant par M n'appartienne, par chacune de ses deux demi-droites, au faisceau dérivé de E en M, points qui se répartissent sur au plus une *infinité dénombrable de courbes lipschitziennes,* et par suite rectifiables, ne forment en général qu'une *faible partie* de l'ensemble tangentiellement exceptionnel pour deux dimensions.

Il est néanmoins intéressant de savoir qu'en ces points l'ensemble E se comporte en gros comme un *faisceau de volumes ou de surfaces sur une courbe frontière régulière,* ou simplement comme une *courbe régulière*[1]: son faisceau dérivé comprend une *droite* comme partie bilatérale et un *système de demi-plans* l'admettant pour pivot, dont aucun couple ne forme de plan (points intérieurs des arêtes du tétraèdre plein ou creux) ou *rien en dehors* d'elle (points intérieurs d'une arête considérée en elle-même), sauf en des points qui forment un ensemble tangentiellement exceptionnel pour une dimension, en particulier dont la *longueur* est unique et *nulle* (sommets du tétraèdre plein ou creux, ou de l'arête). Ici encore dans le second cas seulement, en tant que totalité du faisceau dérivé, la droite mise en évidence est la *tangente* au sens ordinaire; mais dans les deux cas, en tant que partie bilatérale du faisceau dérivé, elle peut être considérée comme la tangente au sens *élargi* de droite unique ayant avec l'ensemble un *contact bilatéral* Ce contact bilatéral de la *tangente au sens large* est rompu par tout pivotement de la droite.

Enfin les points de la fermeture de E où le faisceau dérivé de cet ensemble n'a *pas de partie bilatérale* forment un ensemble au plus *dénombrable.* Toutefois, contrairement à l'exemple de la frontière F (et du tétraèdre plein ou creux, ou de l'arête), ce n'est en général qu'une *faible partie* de l'ensemble tangentiellement exceptionnel pour une dimension, comme le montre l'exemple de la *courbe* d'équation $y=f(x)$ précédemment considérée, pour laquelle ce dernier ensemble contient un ensemble *parfait.*

Les points où l'ensemble E admet un *plan tangent au sens large* qui passe par un *point fixe* forment ce que l'on peut appeler le *contour apparent* à partir du point fixe, dans l'espace, de l'ensemble E. D'après le théorème III, c'est un ensemble projectivement rare pour deux dimensions à partir du point fixe: en particulier *le contour apparent en projection est de surface nulle.* De même, les points où E admet une *tangente au sens large* qui passe par un *point fixe* forment un ensemble projectivement rare pour une dimension à partir du point fixe, dont

[1] Ici encore une courbe est »regulière» quand elle admet une tangente. On peut former des courbes irrégulieres dont le comportement tangentiel est en gros celui d'un volume.

en particulier la projection à partir de ce point sur tout plan ne le contenant pas est de *longueur* unique et *nulle*.

Mais il convient de se garder d'une généralisation hâtive au cas où la projection serait faite, non d'un point sur un plan, mais d'une droite sur une droite, comme le montre l'exemple d'une *surface dont le plan tangent est parallèle à xOy en des points dont la cote z peut acquérir toute valeur:* non seulement l'ensemble des projections sur Oz n'est pas de longueur nulle, mais c'est même la totalité de Oz. Etant donné sur cet axe un ensemble parfait P de mesure nulle, on sait en effet construire, à la suite de M. Denjoy (exemple I, p. 167 du Mémoire cité sur les nombres dérivés), une fonction continue croissante $x = f(z)$ qui admet pour dérivée $+\infty$ en chaque point z de P; en ces points, la fonction inverse $z = \varphi(x)$ admet pour dérivée 0. Et la surface de translation d'équation $z = \varphi(x) + \psi(y)$, où $\psi(y)$ désigne une fonction analogue à $\varphi(x)$ mais relative à un autre ensemble parfait Q de mesure nulle de Oz, admet un plan tangent parallèle à xOy en tout point pour lequel $\varphi(x)$ appartient à P et $\psi(y)$ à Q. Or il est bien facile de construire sur Oz deux ensembles parfaits P et Q de mesure nulle tels que la somme d'une valeur de P et d'une valeur de Q décrive la totalité de Oz. Il suffit par exemple, dans le segment $(0, 1)$ puis ailleurs par translations entières, de prendre pour P l'ensemble parfait discontinu de Cantor obtenu en retranchant indéfiniment le tiers médian des intervalles que l'on rencontre, et pour Q l'ensemble analogue mais où l'on retranche le tiers supérieur, puisque tout développement dans le système de base $1/3$ est la somme de deux autres qui ne renferment, le premier que des 0 et 2, le second que des 0 et 1.

Section 2: **Propriétés différentielles des fonctions.**

Etant donnée une *fonction réelle tout à fait arbitraire* (même multiforme) d'une ou plusieurs variables réelles, les propriétés tangentielles de l'ensemble représentatif dans un espace cartésien à une dimension de plus qu'il n'y a de variables, entraînent pour la fonction des *propriétés différentielles* du premier ordre. Je préfère garder aux énoncés leur *forme géométrique*, non sans faire toutefois cette remarque qu'en un point de discontinuité, les valeurs de la fonction qui ne tendent pas vers la valeur au point considéré, donnent naissance, quand le point variable tend vers ce point, à des demi-droites limites parallèles à l'axe sur lequel sont portées les valeurs de la fonction, qui n'appartiennent pas au faisceau dérivé de l'ensemble représentatif.

Dans le cas au contraire d'une *fonction complexe* de variable complexe $Z=f(z)$, entendue comme la combinaison $Z = X(x, y) + i\, Y(x, y)$ de deux fonctions réelles arbitraires, uniformes pour simplifier le langage dans un certain domaine D, des deux variables réelles composantes de la variable complexe $z = x + iy$, la traduction d'ailleurs fort simple me semble intéressante à faire. En un point z de D, les limites du rapport $\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\Delta X + i \Delta Y}{\Delta x + i \Delta y}$ de l'accroissement de la fonction à celui de la variable quand ce dernier tend indifféremment vers zéro forment un ensemble fermé. Lorsque cet ensemble n'est pas la totalité du plan complexe, on peut trouver une valeur étrangère $\alpha + i\beta$. Et dans l'espace cartésien à quatre dimensions $[x, y, X, Y]$, l'ensemble représentatif de la fonction $Z = f(z)$ admet au point correspondant $M(x, y, X, Y)$ un faisceau dérivé étranger à la variété linéaire à deux dimensions dont les équations (réelles) expriment $\frac{(X'-X)+i(Y'-Y)}{(x'-x)+i(y'-y)} = \alpha + i\beta$. Dès lors en un tel point, sauf en ceux d'un ensemble de surface nulle dans l'espace, donc *a fortiori* en projection sur le plan $[z]$, ce faisceau dérivé se réduit à une variété linéaire à deux dimensions. Si de ses équations, on ne pouvait tirer $X' - X$ et $Y' - Y$ en fonction de $x' - x$ et $y' - y$, c'est qu'existerait au moins une combinaison linéaire ne renfermant que $x' - x$ et $y' - y$; mais alors, pour toute direction du plan $[z]$ n'annulant pas cette combinaison, l'un au moins des rapports $\frac{\Delta X}{\Delta z}$ ou $\frac{\Delta Y}{\Delta z}$ tendrait vers l'infini avec $\frac{1}{\Delta z}$; et dans l'espace cartésien à trois dimensions $[x, y, U]$, l'ensemble représentatif de la fonction $X(x, y)$ ou $Y(x, y)$ correspondante admettrait un plan tangent parallèle à l'axe des valeurs $U = X$ ou Y, ce qui ne peut avoir lieu qu'en des points du plan $[z]$ formant un ensemble de surface nulle. Par suite en un point non exceptionnel, chacune des deux fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ admet une *différentielle totale*.

Théorème. — *Etant donnée une fonction complexe d'une variable complexe, supposée seulement uniforme dans un certain domaine du plan complexe, en chaque point de ce domaine, sauf en ceux d'un ensemble de surface nulle, où le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable n'a pas pour limite toutes les valeurs complexes quand ce dernier accroissement tend indifféremment vers zéro, ce rapport admet, dans chaque direction autour du point, une limite unique fonction homographique de la pente de la direction.*[1]

[1] Autrement dit, entre la *totalité du plan complexe* et une *circonférence de cercle* (éventuellement reduite a un point) il ne peut y avoir d'intermédiaire pour l'ensemble figuratif des limites

Au voisinage d'un tel point, la transformation $Z = f(z)$ fait correspondre à des *cercles* infiniment petits du plan $[z]$ centrés en ce point, non des cercles du plan $[Z]$ comme le ferait une fonction dérivable, mais des *ellipses*. Et si, outre le fait de ne pas avoir pour limites toutes les valeurs complexes, on impose au rapport des accroissements d'avoir la même limite dans deux directions différentes (non nécessairement rectangulaires), on obtient *une condition nécessaire et suffisante d'existence, à une surface nulle près, de la dérivée de la fonction.*

Section 3: **Limites d'une fonction en un point.**

Jusqu'ici, dans l'espace euclidien $[E]$ à n dimensions, les ensembles E de points ont été pris *individuellement*. Considérons maintenant une *famille* de tels ensembles dont le *paramètre* soit élément d'un espace $[\mathfrak{E}]$ assujetti à la seule condition qu'il y existe un *système dénombrable de voisinages* $\mathfrak{V}_k$ tels que tout élément $\mathfrak{M}$ de $[\mathfrak{E}]$ appartienne à l'un au moins d'entre eux et que tout élément $\mathfrak{M}$ de $[\mathfrak{E}]$ appartenant à deux d'entre eux appartienne à un troisième entièrement contenu dans l'intersection des deux premiers. En prenant pour »*ensembles ouverts*» de $[\mathfrak{E}]$ toutes les réunions de voisinages $\mathfrak{V}_k$, ces ensembles vérifient:

I. — Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert;

II. — L'intersection de deux ensembles ouverts est un ensemble ouvert;

et définissent la *topologie* de $[\mathfrak{E}]$.[1] En particulier, étant donné un ensemble $\mathfrak{E}$ d'éléments de $[\mathfrak{E}]$, $\mathfrak{M}$ en est *élément d'accumulation* si tout ensemble ouvert contenant $\mathfrak{M}$ contient au moins un élément de $[\mathfrak{E}]$ différent de $\mathfrak{M}$; et il suffit qu'il en soit ainsi des voisinages $\mathfrak{V}_k$. Pareillement, au moyen des ensembles ouverts, et même des voisinages, on définit l'intérieur, l'extérieur et la frontière de l'ensemble $\mathfrak{E}$.

Inversement tout espace *topologique* (c'est-à-dire où est définie une famille d'ensembles dits *ouverts*) satisfaisant aux axiomes I (de M. Sierpinski) et II ainsi qu'au deuxième axiome de dénombrabilité D_2 de M. Hausdorff (ce que M. Fréchet exprime en disant que l'espace est parfaitement séparable et qui postule l'existence d'un système dénombrable de voisinages définissant la même topologie que la famille des ensembles ouverts) est un espace $[\mathfrak{E}]$. En particulier il en est ainsi de tout espace *métrisable* (c'est-à-dire où l'on peut introduire une *distance*)

---

du rapport des deux accroissements qu'en des points z du domaine dont l'ensemble est de *surface nulle*.

[1] Cf. R. DE POSSEL, *Espaces topologiques*, Seminaire de Mathematiques de M. Julia, **3**, 1935—1936, A.

et contenant un ensemble *dénombrable partout dense* d'éléments (espace $(\mathfrak{D})$ séparable de M. Fréchet). C'est dire qu'en dehors de l'espace euclidien $[E]$ (où l'on peut prendre pour voisinages $\mathfrak{V}_k$ les sphères S_i du début), les champs fonctionnels les plus importants, comme l'espace des polynomes, l'espace des fonctions entières complexes, l'espace des fonctions continues, l'espace des fonctions dont la dérivée $p^{\text{ième}}$ est continue, l'espace des fonctions de carré sommable (applicable sur l'espace de Hilbert), l'espace des fonctions mesurables, l'espace des courbes continues, l'espace des surfaces continues, l'espace des séries absolument convergentes, l'espace des séries convergentes, etc. . . .[1] sont autant d espaces $[\mathfrak{E}]$ dans lesquels on peut prendre le paramètre $\mathfrak{M}$ fixant dans la famille l'ensemble E.

De même qu'à cet élément $\mathfrak{M}$ correspond un ensemble E de la famille, de même inversement, à chaque point M de l'un des E, on peut faire correspondre l'ensemble $\mathfrak{E}$ des paramètres $\mathfrak{M}$ des ensembles E contenant M. C'est, en un sens élargi, une *fonction*» $\mathfrak{F}(M)$ dont l'*argument* est un point M de l'espace euclidien $[E]$, l'*être fonction* étant un ensemble $\mathfrak{E}$ d'éléments de l'espace topologique $[\mathfrak{E}]$. Dès lors famille d'ensembles euclidiens de points dont le paramètre décrit un espace topologique et »fonction de point», appartenant à cet espace, sont deux manières d'envisager une *même correspondance* entre points de l'espace euclidien et éléments de l'espace topologique. Partant de *couples* ainsi formés d'un point M et d'un élément $\mathfrak{M}$, je définirai les *couples limites* $(M_0, \mathfrak{M}_0)$ comme tels que toute sphère S_i contenant M_0 et tout voisinage $\mathfrak{V}_k$ contenant $\mathfrak{M}_0$ contiennent respectivement le point et l'élément d'un couple $(M, \mathfrak{M})$. Afin de pouvoir considérer les $\mathfrak{M}_0$ correspondant à un même M_0 comme les *limites*» de la fonction $\mathfrak{F}(M)$ quand M tend vers M_0, je n'imposerai pas à $\mathfrak{M}$ d'être différent de $\mathfrak{M}_0$, quitte à faire rentrer dans ces limites, n'imposant pas à M, par symétrie, d'être différent de M_0, les »*valeurs*» $\mathfrak{F}(M_0)$ et leurs éléments d'accumulation au sens de la topologie de $[\mathfrak{E}]$. Inversement les M_0 correspondant à un même $\mathfrak{M}_0$ sont les points communs, pour toutes les valeurs k' de l'indice k telles que $\mathfrak{V}_{k'}$ contienne $\mathfrak{M}_0$, aux fermetures des réunions $E_{k'}$ des ensembles E dont le paramètre $\mathfrak{M}$ appartient à $\mathfrak{V}_{k'}$. Et le faisceau commun aux faisceaux dérivés en un tel point M_0 de ces ensembles $E_{k'}$ se présente comme le faisceau des demi-droites de $[E]$ issues de M_0 *tangentiellement* auxquelles en M_0 la limite $\mathfrak{M}_0$ est atteinte par $\mathfrak{F}(M)$, faisceau que nous désignerons par $\Phi_{\mathfrak{F}}(M_0, \mathfrak{M}_0)$.

Dans cette étude de la manière dont $\mathfrak{F}(M)$ atteint en M_0 ses limites, il n'y a pas lieu de restreindre la définition de la fonction à un ensemble E de $[E]$

[1] Cf. M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, Collection de M. Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

car il revient au même de dire que $\mathfrak{F}$ n'existe pas hors de E ou de dire que c'est un élément $\mathfrak{M}^*$ étranger à $[\mathfrak{E}]$, qu'on adjoint à titre d'élément n'appartenant qu'au voisinage $\mathfrak{V}^*$ formé de lui seul, de manière à constituer un espace $[\mathfrak{E}^*]$ où il reste isolé. En particulier, revenant à un seul ensemble E de $[E]$, on peut envisager la propriété $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(M)$ d'appartenir à E: la considération de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^*$ revient à celle de la *fonction caractéristique* $\varphi(M)$ égale à 1 sur E, à 0 en dehors; et le faisceau $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$ ou $\Phi_{\varphi}(M, 1)$ n'est autre alors que le faisceau dérivé $\Phi_E(M)$.

Montrons que le faisceau $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$ ne peut être étranger à un faisceau fermé $\Phi(M)$ de demi-droites issues de M, sans qu'il en soit ainsi de l'un au moins des faisceaux dérivés $\Phi_{E_{k'}}(M)$ tels que $\mathfrak{V}_{k'}$ contienne $\mathfrak{M}$. C'est là une extension d'un résultat classique sur les *ensembles fermés emboîtés*[1] au cas de *semi-emboîtement* qu'entraîne la propriété des voisinages $\mathfrak{V}_k$. La démonstration en est analogue. Supposons que $\Phi(M)$ contienne des rayons de chaque $\Phi_{E_{k'}}(M)$. Ayant partagé $\Phi(M)$ en deux parties, on reconnaît que l'une au moins d'entre elles jouit de la même propriété; car on pourrait sinon trouver deux indices k'_1 et k'_2 tels que l'une des parties soit étrangère à $\Phi_{F_{k'_1}}(M)$ et l'autre à $\Phi_{E_{k'_2}}(M)$; $\mathfrak{V}_{k'_1}$ et $\mathfrak{V}_{k'_2}$ ayant en commun $\mathfrak{M}$ auraient en commun $\mathfrak{V}_{k'_3}$ contenant $\mathfrak{M}$; $E_{k'_1}$ et $E_{k'_2}$ contiendraient $E_{k'_3}$; $\Phi_{F_{k'_1}}(M)$ et $\Phi_{E_{k'_2}}(M)$ contiendraient $\Phi_{E_{k'_3}}(M)$ qui n'aurait alors de rayon dans aucune des deux parties de $\Phi(M)$, contrairement à l'hypothèse. Cette *dichotomie* peut être répétée de manière que les parties de $\Phi(M)$ contenant des rayons de chaque $\Phi_{E_{k'}}(M)$ s'emboîtent et ne possèdent qu'une demi-droite limite, laquelle appartient à $\Phi(M)$ et à tous les $\Phi_{E_{k'}}(M)$ puisque ces faisceaux sont fermés.

Supposons alors qu'en un point M, pour au moins une limite $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{F}$ en M, on puisse mener une variété linéaire $L(M)$ à $n - p$ dimensions qui soit étrangère à la partie bilatérale du faisceau $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$. De ce que la partie bilatérale d'un faisceau est l'intersection de ce faisceau et de son opposé résulte, grâce au théorème précédent sur les faisceaux fermés semi-emboîtés, qu'on peut trouver un indice k_1 tel que $\mathfrak{V}_{k_1}$ contienne $\mathfrak{M}$ (par suite E_{k_1} contienne M) et $L(M)$ soit étrangère à la partie bilatérale du faisceau dérivé $\Phi_{E_{k_1}}(M)$. Dès lors d'après le théorème II, les points tels que M se répartissent sur au plus une infinité dénombrable de variétés lipschitziennes à p dimensions et, sauf en des points M dont

[1] Cf. René Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Collection de M. Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1905, p. 64.

l'ensemble est tangentiellement exceptionnel pour p dimensions, la partie bilatérale de $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$ se réduit comme celle de $\Phi_{E_{k_1}}(M)$ à une variété linéaire $T(M)$ à p dimensions. De plus, quand une demi-droite $M\Delta$ est étrangère à $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$, on peut trouver un indice k_2 tel que $\mathfrak{V}_{k_2}$ contienne $\mathfrak{M}$ et $M\Delta$ soit étrangère à $\Phi_{E_{k_2}}(M)$ donc à $\Phi_{E_{k_3}}(M)$ pour $\mathfrak{V}_{k_3}$ contenant $\mathfrak{M}$ et contenu dans $\mathfrak{V}_{k_1} \wedge \mathfrak{V}_{k_2}$; et comme la partie bilatérale de $\Phi_{E_{k_3}}(M)$, contenant celle de $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$ et contenu dans celle de $\Phi_{E_{k_1}}(M)$, coïncide ainsi qu'elles deux avec $T(M)$, toute la demi-variété linéaire ouverte $\Theta(M)$ à $p + 1$ dimensions limitée à $T(M)$ et contenant $M\Delta$ est étrangère à $\Phi_{E_{k_3}}(M)$ donc à $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$. Enfin en même temps que la partie bilatérale de $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$ se réduit à une variété linéaire à p dimensions qui passe par un point fixe, elle coïncide, en un point M non exeptionnel, avec la variété linéaire à p dimensions tangente au sens large à un certain ensemble E_{k_1}. En sorte que *le faisceau des demi-droites tangentiellement auxquelles en un point, une fonction $\mathfrak{F}$ atteint l'une de ses limites, jouit exactement des mêmes propriétés que le faisceau dérivé d'un ensemble en un point.*

Mais il y a plus. Supposons qu'en un point M, pour deux limites $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ de $\mathfrak{F}$ en M, on puisse mener deux variétés linéaires $L_1(M)$ et $L_2(M)$, d'un même nombre $n-p$ de dimensions, qui soient respectivement étrangères aux parties bilatérales des faisceaux $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M}_1)$ et $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M}_2)$. Ces points M se répartissent sur au plus une infinité dénombrable d'ensembles E_0 caractérisés chacun par deux indices k_1 et k_2 tels que $\mathfrak{V}_{k_1}$ contienne $\mathfrak{M}_1$ (par suite $\bar{E}_{k_1}$ contienne M) et $L_1(M)$ soit étrangère à la partie bilatérale de $\Phi_{E_{k_1}}(M)$, $\mathfrak{V}_{k_2}$ contienne $\mathfrak{M}_2$ (par suite E_{k_2} contienne M) et $L_2(M)$ soit étrangère à la partie bilatérale de $\Phi_{E_{k_2}}(M)$. Sauf en des points M dont l'ensemble est tangentiellement exceptionnel pour p dimensions, chacun des trois ensembles E_{k_1}, E_{k_2}, E_0 (inclus dans $\bar{E}_{k_1} \wedge \bar{E}_{k_2}$) admet une variété linéaire à p dimensions tangente au sens large, la même pour les trois ensembles puisque la dernière doit être contenue dans chacune des deux premières. D'où résulte que *la variéte linéaire à p dimensions à aquelle se réduit la partie bilatérale du faisceau $\Phi_{\mathfrak{F}}(M, \mathfrak{M})$ est la même, en un point M non exceptionnel, pour toutes les limites $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{F}$ en M qui donnent lieu à une telle réduction.*

Théorème IV.[1] — *Etant donnée une fonction $\mathfrak{F}(M)$, définie en tout point M de*

[1] Observons que le théoreme IV, obtenu à partir des théoremes II et III, les englobe: nous avons déjà remarqué, en effet, qu'en un point M les demi droites tangentiellement à chacune desquelles la fonction carctéristique $\varphi(M)$ d'un ensemble E (égale à 1 sur E, à 0 en dehors) atteint la limite 1, ne sont autres que les rayons d'accumulation de E en M.

l'espace euclidien à n dimensions comme un ensemble arbitraire d'éléments d'un espace topologique vérifiant les axiomes I-II-D_2, les points M en chacun desquels, pour au moins une limite de $\mathfrak{F}$ en M, on peut mener une variété linéaire à $n-p$ dimensions dont aucune droite passant par M ne permette à $\mathfrak{F}$ d'atteindre cette limite en M tangentiellement à chacune de ses deux demi-droites, se répartissent sur au plus une infinité dénombrable de variétés lipschitziennes à p dimensions (en particulier de mesure p-dimensionnelle unique et finie).

En chacun de ces points M, sauf en ceux d'un ensemble tangentiellement exceptionnel pour p dimensions[1] *(en particulier de mesure p-dimensionnelle unique et nulle), pour toutes les limites de $\mathfrak{F}$ en M à chacune desquelles on peut ainsi associer une variété linéaire à $n-p$ dimensions, il existe une même variété linéaire à p dimensions, faisceau des droites tangentiellement à chaque demi-droite desquelles en M la fonction $\mathfrak{F}$ atteint l'une quelconque de ces limites; et s'il existe en dehors une demi-droite tangentiellement à laquelle en M $\mathfrak{F}$ atteint l'une au moins de ces limites, $\mathfrak{F}$ atteint aussi cette limite tangentiellement à chaque demi-droite de la demi-variété linéaire à $p+1$ dimensions contenant la première demi-droite et limitée à la variété linéaire remarquable à p dimensions, et ne l'atteint tangentiellement à aucune demi-droite de la demi variété linéaire (ouverte) opposée.*

Les points M où la variété linéaire remarquable à p dimensions passe par un point fixe, forment un ensemble projectivement rare pour p dimensions à partir du point fixe[2] *(en particulier dont la projection à partir du point fixe sur toute variété linéaire à $n-1$ dimensions ne le contenant pas est de mesure p-dimensionnelle unique et nulle).*

Illustrons ceci d'un exemple dans le cas où $n=2$: M étant un point d'un plan $[P]$, prenons successivement pour $\mathfrak{F}(M)$ un point d'une droite $[\mathfrak{D}]$, un point d'un plan $[\mathfrak{P}]$, un point de l'espace de Hilbert $[\mathfrak{H}]$. Ce qui correspond respectivement à une *fonction réelle de deux variables réelles*, à une *fonction complexe d'une variable complexe*, à une *fonction de carré sommable* dont il n'y a pas lieu de préciser par rapport à quelles variables ni dans quel champ on intègre mais que l'on considère comme un être (défini dans ce champ à un ensemble de mesure nulle près) *dépendant de deux paramètres réels* (les coordonnées de M dans $[P]$). En un point M_0 de $[P]$, on sait déterminer les limites de $\mathfrak{F}(M)$ quand M tend

[1] Réunion d'au plus une infinité dénombrable d'ensembles ou une variété lipschitzienne à p dimensions n'admet pas de variété linéaire à p dimensions tangente au sens strict.

[2] Réunion d'au plus une infinité dénombrable d'ensembles ou une variété lipschitzienne à p dimensions n'admet pas de variété linéaire à p dimensions tangente au sens strict ou en admet une qui passe par le point fixe.

vers M_0, qu'il s'agisse de *limites réelles*, de *limites complexes* ou de *limites fortes* dans l'espace de Hilbert; puis, pour chacune de ces limites, les demi-droites $M_0\varDelta$ de $[P]$ *tangentiellement* à chacune desquelles on peut trouver une succession de points M qui tendent vers M_0 et sur lesquels $\mathfrak{F}(M)$ atteint en M_0 cette limite.

Sur la manière dont une telle fonction $\mathfrak{F}$ (qui n'est supposée uniforme que pour simplifier le langage) atteint en un point M ses limites, voici ce que nous apprend le théorème IV

1°) Les points M du plan $[P]$ en chacun desquels l'une au moins des limites n'est pas atteinte par $\mathfrak{F}$ en M tangentiellement à chacune des demi droites de $[P]$ issues de M, se répartissent sur au plus une *infinité dénombrable de courbes lipschitziennes* (en particulier rectifiables).

2°) En chacun de ces points M, sauf en ceux d'un ensemble tangentiellement exceptionnel pour une dimension (en particulier dont la *longueur* est unique et *nulle*), il existe une *droite remarquable* D, la seule tangentiellement à laquelle en M des deux côtés $\mathfrak{F}$ atteint chacune de ses limites

3°) De plus, dès qu'une limite est atteinte par $\mathfrak{F}$ en M tangentiellement à une demi-droite hors de D, elle l'est aussi tangentiellement à chaque demi-droite du *demi-plan* limité à D où se trouve la première et ne l'est tangentiellement à aucune demi-droite du demi-plan (ouvert) opposé.

4°) Les points M où la *droite remarquable* D passe par un *point fixe*, forment un ensemble projectivement rare pour une dimension à partir du point fixe (en particulier dont la projection à partir du point fixe sur toute droite de $[P]$ ne le contenant pas est de *mesure nulle*).

5°) Les points M du plan $[P]$ en chacun desquels l'une au moins des limites de $\mathfrak{F}$ (ou la valeur $\mathfrak{F}(M)$ elle-même) ne peut être atteinte en M tangentiellement à aucune droite des deux côtés, forment un ensemble au plus *dénombrable*.

En particulier si l'on prend pour fonction $\mathfrak{F}(M)$ la fonction caractéristique de la courbe C qui représente dans le plan $[P]$ la fonction continue $y=f(x)$ et si l'on porte l'attention sur la limite 1 de $\mathfrak{F}$ en M, le point fixe étant pris à l'infini dans la direction de Oy, on retrouve le théorème de M. Denjoy sous la forme géométrique rappelée au début.