MOHAMMED-ALI MODJTAHÉDI

Quelques problèmes concernant le mouvement des fluides visqueux

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__209__1_0>

Série A, 1820
N° D'ORDRE :
2686

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Mohammed-Ali MODJTAHÉDI

1re THÈSE. — QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LE MOUVEMENT DES FLUIDES VISQUEUX.

2e THÈSE. — LES SINGULARITÉS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Soutenues le Juillet 1938, devant la Commission d'Examen.

MM. H. VILLAT *Président.*
J. PÉRÈS }
G. DARMOIS } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen............ C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	FREUNDLER.	VESSIOT.	Charles FABRY.
A. FERNBACH.	AUGER.	P. PORTIER.	Léon BERTRAND.
Émile PICARD.	BLAISE.	M. MOLLIARD.	WINTREBERT.
Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	L. LAPICQUE.	O. DUBOSCQ.
GUILLET.	LESPIEAU.	G. BERTRAND.	BOHN.
PÉCHARD.	MARCHIS.	H. ABRAHAM.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN.......	T	Chimie générale.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.
E. CARTAN.......	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON......	T	Recherches physiques.
J. DRACH.........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ...	T	Zoologie.
E. RABAUD......	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.
Paul MONTEL.. ..	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
G. JULIA.........	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN......	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY..	T	Pétrographie.
H. BÉNARD.......	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD..	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
Eugène BLOCH...	T	Physique.
G. BRUHAT.......	T	Physique théorique et Physique Céleste.
E. DARMOIS......	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR.......	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER......		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.
M. JAVILLIER.....	T	Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY.....	T	Physiologie comparée.
F. PICARD...... .		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB........	T	Géologie.
P. PASCAL.......	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET... ..	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON ...	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.......	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER......		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE......	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN........		Optique appliquée.
P. JOB...........		Chimie générale.
LABROUSTE.......		Physique du Globe.
PRENANT...	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY...........		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES..	T	Physiologie végétale.
GARNIER.........	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS...........		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL.......		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.........	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT.......		Technique Aéronautique.
M. CURIE........		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.......	T	Hautes températures.
CHAZY............	T	Mécanique rationnelle.
GAULT...........		Chimie (P. C. B.).
CROZE...........		Recherches physiques.
DUPONT.....	T	Théories chimiques.
LANQUINE.......	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON.........		Mathématiques générales.
BARRABÉ.........		Géologie structurale et Géologie appliquée.
MILLOT...........		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN........		Théories physiques.
VAVON...........		Chimie organique.
G. DARMOIS......		Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
CHATTON.........	T	Biologie maritime.
AUBEL...........		Chimie biologique.
Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL.......		Biologie végétale (P.C.B.).
CABANNES........		Enseignement de Physique.
GRASSÉ..........		Biologie animale (P.C.B.).
PRÉVOST..........		Chimie (P.C.B.).

Secrétaire........................ A. PACAUD.

Secrétaire honoraire.............. D. TOMBECK.

A MON PÈRE

A LA MÉMOIRE DE MA MÈRE

AU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DU GOUVERNEMENT DE L'IRAN

En témoignage de l'aide matérielle
qu'il m'a prodiguée pour la préparation
et l'impression de ce travail.

Je lui en exprime ma vive reconnaissance.

A MON MAITRE

MONSIEUR LE PROFESSEUR HENRI VILLAT

MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage
de ma respectueuse reconnaissance.

A MON MAITRE

MONSIEUR LE PROFESSEUR JOSEPH PÉRÈS

PROFESSEUR A LA SORBONNE

Hommage de mon profond respect
et de ma plus vive reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

QUELQUES PROBLÈMES

CONCERNANT

LE MOUVEMENT DES FLUIDES VISQUEUX

INTRODUCTION.

Le présent travail est consacré à l'étude et à l'exposé de quelques questions concernant le mouvement lent d'un fluide visqueux, que l'on suppose défini par les équations de Stokes.

J'ai d'abord résumé dans le premier chapitre les principaux résultats concernant ces équations. Je rappelle ensuite le problème auquel se rapportent les développements qui suivront : détermination du trouble qu'apporte la présence d'un obstacle dans un courant donné, que j'appellerai courant primitif. J'examine en détail (fin du Chapitre II) le cas de l'obstacle sphérique. On sait que ce cas a été complètement traité par diverses méthodes : soit en généralisant comme l'a fait M. Boggio, la méthode d'Alamansi pour le problème de la sphère élastique, soit par l'emploi des fonctions du type de Green qu'a obtenues M. Oseen. Je développe, à la suggestion de M. Pérès, une autre méthode qui est très directe et s'inspire du procédé si élégant donné par M. P. Lévy pour le cas du problème ordinaire de Dirichlet.

Dans les deux chapitres suivants j'envisage le calcul des efforts sur l'obstacle. Il est important d'obtenir, en vue des applications, des formules définissant ces efforts (résultante et moment) le plus directement possible en fonction des éléments du courant primitif. La plus simple, et la première des formules données dans ce but est celle de Stokes

$$F = 6\pi R\mu U$$

donnant la résistance d'une sphère dans un courant uniforme. M. Faxén a donné ensuite une formule très élégante exprimant les efforts sur une sphère placée dans un courant quelconque, et M. Pérès a donné les formules concernant l'ellipsoïde dans un courant quelconque. La question générale a été envisagée aussi par M. Pérès et, au même moment et d'un point de vue différent, par M. Faxén, à la fin d'un Mémoire où il étudie principalement les équations linéarisées d'Oseen. On aboutit, pour les composantes des efforts, à des intégrales prises à la surface de l'obstacle de type

$$\int_{(S)} (\varphi_1 U_1 + \varphi_2 U_2 + \varphi_3 U_3)\, d\sigma,$$

où les U_j sont les composantes du courant primitif donné et où les coefficients φ_j sont, du point de vue de M. Faxén, des solutions fondamentales d'un certain système d'équations intégrales, M. Pérès faisant dépendre leur détermination de la solution du problème fondamental pour des valeurs particulières des U_j.

Le rapprochement des deux points de vue est aisé, comme je le montre dans le dernier chapitre du présent travail, après avoir repris, dans ses parties essentielles, la méthode des équations intégrales pour résoudre le problème fondamental.

La méthode de M. Pérès est résumée, ainsi que des résultats connexes, dans deux notes aux *Comptes Rendus* qu'il a bien voulu me permettre de développer; c'est l'objet des Chapitres III et IV. On trouvera dans ces chapitres le détail de l'analyse conduisant aux formules générales et aux relations particulières concernant l'obstacle sphérique ou en ellipsoïde et aussi l'étude des relations, données par M. Pérès, entre les coefficients des efforts et certains potentiels de simple couche.

Je dois à mon maître M. le Professeur Pérès l'idée du présent travail au cours duquel il n'a jamais cessé de me prodiguer ses précieux conseils, me guidant dans son accomplissement, avec une telle amabilité que la reconnaissance que je lui en ai ne saurait être passée sous silence.
Je le prie de trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude à mes maîtres :

— De la Faculté des Sciences de Lille dont les enseignements sont la base des connaissances que j'ai pu acquérir;

— De la Faculté des Sciences de Paris;

— Et surtout à M. Henri Villat, Membre de l'Institut, Directeur de l'Institut de Mécanique, en l'assurant de l'excellent souvenir que je garde des trois années de son Cours d'Aérodynamique et d'Hydrodynamique supérieure et en le remerciant de ses encouragements.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX.

Nous rappelons très rapidement les résultats classiques concernant le mouvement d'un fluide visqueux et les simplifications qui amènent aux équations dites de Stokes, sur lesquelles portera notre étude.

1. **Équation des mouvements d'un fluide visqueux.** — Considérons le mouvement d'un fluide par rapport à un système de référence galiléen et désignons par

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3$$

les composantes, sur les axes, de la vitesse de l'élément matériel du fluide qui, à une époque t, a x_1, x_2, x_3 pour coordonnées. Soit, au même instant, l'effort relatif à un élément de surface, de normale orientée n_1, n_2, n_3, s'exerçant sur le fluide situé du côté négatif de la normale. On sait que les composantes de cet effort, rapporté à la surface unité, s'expriment par les formules

$$f_j = n_k N_{jk} \quad (1) \tag{1}$$

où les N_{jk} sont les composantes du tenseur des efforts.

---

(1) Suivant la convention usuelle en calcul tensoriel, nous écrivons

$$f_j = \sum_{k=1} n_k N_{jk} = n_k N_{jk} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

en supprimant le ou les signes de sommation qui portent sur les indices figurant deux fois au second membre; nous ferons ainsi, dans la suite, toutes les fois qu'aucune confusion ne sera possible.

Dans le cas d'un fluide visqueux, de coefficient de viscosité μ, on a

$$N_{jk} = (-p + \lambda\theta)\,\delta_{jk} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{2}$$

avec

$$\theta = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

p est la pression moyenne, λ est une constante et δ_{jk} est égal à un ou zéro suivant que $j = k$ ou $j \neq k$.

Enfin, d'après le principe de d'Alembert, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\rho\left(X_j - \frac{du_j}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k} N_{jk} = 0, \tag{3}$$

où ρ désigne la densité du fluide, X_j les composantes, sur les axes, de la force de masse, rapportée à l'unité de volume, sollicitant le fluide au point considéré, où enfin $\frac{d}{dt}$ est une dérivée totale $\left(\text{on sait que } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Nous joindrons à ces équations l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0. \tag{4}$$

Plaçons-nous dans le cas où le fluide est incompressible

$$\rho = \text{const.},$$

les équations précédentes se réduisent alors à

$$\left\{\begin{aligned} &\rho\left(\frac{du_j}{dt} - X_j\right) = \mu\,\Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j}, \\ &\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ étant l'opérateur dit laplacien.

Les termes dépendant de θ disparaissent, alors, dans les équations (2).

2. Équations d'un mouvement lent ou d'un mouvement à tourbillons négligeables. — On désigne par « mouvements lents » les mouvements pour lesquels on peut considérer comme négligeables, par rapport aux expressions

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t},$$

les combinaisons

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \tag{6}$$

et analogues, celles-ci étant considérées comme du second ordre, tandis que les premières seraient du premier ordre.

Les équations (5) se réduisent alors à

$$\left\{\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} - X_j\right) = \mu\,\Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j}, \\ &\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Les équations du mouvement à tourbillons négligeables s'obtiennent en reprenant les formules (5) et remarquant qu'on a identiquement

$$\begin{aligned} &u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ &= u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + u_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right). \end{aligned}$$

Désignant par

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), \qquad \xi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), \qquad \xi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

les composantes du vecteur tourbillon, nous aurons

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + 2(u_3\xi_2 - u_2\xi_3)$$

et deux formules analogues obtenues par permutation des indices 1, 2, 3.

Admettons que le tourbillon (ξ_1, ξ_2, ξ_3) soit partout négligeable ou, simplement, que son produit vectoriel par la vitesse, qui a les composantes

$$(8) \qquad \xi_2 u_3 - \xi_3 u_2, \quad \xi_3 u_1 - \xi_1 u_3, \quad \xi_1 u_2 - \xi_2 u_1,$$

soit négligeable.

Les formules précédentes permettent de réduire les équations (5) à la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t} - X_i\right) = \mu\,\Delta u_i - \dfrac{\partial q}{\partial x_i}, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

avec

$$q = p + \frac{\rho}{2} u_j^2.$$

Ces équations sont identiques aux équations (7) à cela près, que la pression moyenne p doit être remplacée par l'expression q, dont on a donné la valeur.

Les équations (7) et (9) ont le grand avantage d'être linéaires, mais il convient de ne pas perdre de vue quand on les applique à l'étude d'un mouvement réel, les hypothèses qui y ont conduit. Pour être rigoureux, on aura à vérifier *a posteriori* que les termes tels que (6) ou (8) sont effectivement d'un ordre de grandeur moindre que les termes conservés. On sait que l'on trouve là la solution de certaines difficultés concernant l'application des équations des mouvements lents à des problèmes réels (par exemple l'impossibilité d'une solution pour le mouvement de translation d'un cylindre indéfini).

3. **Les équations de Stokes.** — Supposons que le fluide visqueux incompressible soit en mouvement lent (ou tourbillons négligeables), *permanent* et qu'il n'y ait pas de forces de masse notables. Ce qui correspond à

$$(10) \qquad X_1 = X_2 = X_3 = 0,$$

les fonctions u_j, p étant indépendantes du temps. Alors les équations du mouvement se réduisent à

$$\mu\,\Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{12}$$

c'est à ces équations que nous réservons le nom d'*équations de Stokes* et que nous nous limiterons par la suite.

4. **Solutions fondamentales des équations de Stokes.** — L'application des méthodes générales de la physique mathématique implique la connaissance des solutions fondamentales des équations (11) et (12). Rappelons rapidement comment on les obtient :

Cherchons un système de solutions des (11) et (12), fonctions des coordonnées, x_j, du point M, avec un point singulier P, de coordonnées y_j, et homogènes de degré -1 par rapport aux différences des coordonnées $x_j - y_j$. La fonction p, qui est harmonique, comme il résulte immédiatement des équations (11) et (12), doit être alors homogène et de degré -2. Il est naturel d'essayer par exemple

$$p = -2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}$$

avec

$$r^2 = (x_j - y_j)^2.$$

Alors les équations (11) dans lesquelles nous pouvons, sans restreindre la généralité, prendre $\mu = 1$, nous donnent

$$\Delta u_{j1} = -2\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\,\partial x_j}.$$

Introduisons donc une fonction $\Phi(r)$ telle que

$$u_{j1} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j\,\partial x_1} + \frac{C_j}{r},$$

où les C_j sont les constantes à déterminer.

En portant dans les équations (11), celles-ci seront satisfaites si

$$\Delta\Phi = \frac{2}{r},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} = \frac{2}{r},$$

et, prenant la solution particulière

$$\Phi = r,$$

nous aurons alors

$$u_{j1} = -\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_1} + \frac{C_j}{r}$$

avec, nécessairement, pour satisfaire à l'équation (12),

$$C_1 = 2, \qquad C_2 = C_3 = 0.$$

Nous obtenons ainsi la solution particulière suivante :

$$u_{j1} = \frac{\delta_{j1}}{r} + \frac{(x_j - y_j)(x_1 - y_1)}{r^3}$$

avec

$$p_1 = -2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}.$$

D'une façon générale nous aurons trois systèmes indépendants de solutions particulières

$$u_{jk}(\mathrm{M}) = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^3} \tag{13}$$

avec

$$p_k(\mathrm{M}) = -2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_k}. \tag{14}$$

Ce sont là les solutions fondamentales cherchées.

5. **L'équation de réciprocité.** — Considérons un volume, V, limité par une surface fermée régulière, S, admettant un plan tangent unique en chaque point dont la position varie

d'une manière continue avec le point de contact. Désignons par u_j, p; v_j et $\bar{p}$ deux systèmes de solutions des équations (11) et (12), définies, continues et ayant des dérivées premières et secondes également continues pour tous les points de volume V, (S compris). Formons les intégrales

$$\int_{(V)} v_j\left(\Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) d\tau \quad \text{et} \quad \int_{(V)} u_j\left(\Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}\right) d\tau$$

étendues au volume V (intérieur de la surface S).

D'après les formules de Green et les équations (11) et (12) on aura

$$(15) \quad \int_{(V)} v_j\left(\Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) d\tau = \int_{(S)} v_j\left(\frac{du_j}{dn} - pn_j\right) d\sigma - \int_{(V)} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} d\tau = 0,$$

$$(16) \quad \int_{(V)} u_j\left(\Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}\right) d\tau = \int_{(S)} u_j\left(\frac{dv_j}{dn} - \bar{p}n_j\right) d\sigma - \int_{(V)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} d\tau = 0.$$

les n_j sont les cosinus directeurs de la normale, au point P de la surface S, dirigée vers l'extérieur du volume V.

En retranchant ces deux équations, nous obtenons,

$$(17) \qquad \int_{(S)} v_j\left(\frac{du_j}{dn} - pn_j\right) d\sigma - \int_{(S)} u_j\left(\frac{dv_j}{dn} - \bar{p}n_j\right) d\sigma = 0.$$

D'autre part, nous avons,

$$\int_{(S)} v_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} n_k \, d\sigma = \int_{(V)} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} d\tau,$$

$$\int_{(S)} u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} n_k \, d\sigma = \int_{(V)} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} d\tau;$$

d'où

$$(18) \qquad \int_{(S)} v_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} n_k \, d\sigma - \int_{(S)} u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} n_k \, d\sigma = 0.$$

En ajoutant les deux relations (17) et (18) nous obtenons la formule de réciprocité sous la forme que nous utiliserons

$$(19)\qquad \int_{(S)} v_i\left[n_k\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)-pn_i\right]d\sigma$$
$$-\int_{(S)} u_i\left[n_k\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\bar{p}n_i\right]d\sigma=0.$$

On peut passer, aisément, au cas où les fonctions u_j, p; v_j, $\bar{p}$ sont définies et continues avec leurs dérivées respectives à l'*extérieur* de la surface S. En prenant comme volume V l'espace compris entre la surface S et une sphère Σ de rayon arbitrairement grand, centrée à l'origine des coordonnées, l'analyse précédente montre que le premier membre de (19) est égal à l'expression analogue, calculée sur la sphère. Il arrive souvent que l'intégrale le long de la surface Σ disparaisse parce que les u_i, p; v_i, $\bar{p}$ et leurs dérivées s'annulent assez vite à l'infini. Il en est ainsi évidemment dans le cas où les u_i et v_i s'annulent comme $\frac{1}{R}$; p et $\bar{p}$ et les dérivées premières des u_i, v_i comme $\frac{1}{R^2}$ (R rayon de la sphère Σ). On retombe alors sur la formule (19).

Nous désignons dans la suite par $D_n U_i$ l'opération

$$n_k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)-Pn_i,$$

appliquée à un système de solutions, U_i et P, des équations de Stokes. La formule de réciprocité (19) s'écrit dans ces conditions

$$(19')\qquad \int_{(S)} v_i D_n u_i\, d\sigma-\int_{(S)} u_i D_n v_i\, d\sigma=0.$$

CHAPITRE II.

MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX AUTOUR D'UN OBSTACLE. UN PROBLÈME FONDAMENTAL. SA SOLUTION DANS LE CAS DE LA SPHÈRE.

PREMIÈRE PARTIE.

MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX AUTOUR D'UN OBSTACLE. UN PROBLÈME FONDAMENTAL.

1. **Problème général.** — L'un des problèmes les plus simples que l'on puisse poser à propos des équations de Stokes est le suivant :

Soit un fluide visqueux, indéfini, ou limité à distance finie par les parois Σ, dont le mouvement lent et permanent dépend des équations de Stokes

$$\Delta U_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

U_j, composantes de la vitesse; P la pression moyenne, le coefficient de viscosité est égal à 1.

Nous supposons connues les U_i et P qui définissent le courant que nous appellerons *primitif*.

On introduit dans ce courant primitif un obstacle fixe, limité par la surface régulière S. Il s'agit de déterminer un nouveau mouvement permanent compatible avec la présence de l'obstacle. Les vitesses de ce mouvement seront $U_i + u_i$, la pression $P + p$; les u_i et p, inconnus, qui représentent le trouble apporté au courant primitif par la présence de l'obstacle, sont des intégrales des équations (1) et (2), définies et continues dans le fluide extérieur de S, et qui satisfont à des conditions aux limites qui sont évidemment les suivantes :

1° A la surface de l'obstacle les vitesses $U_j + u_j$ doivent être nulles; les u_j prennent donc les valeurs $- U_j$, déterminées par le courant primitif;

2° Sur les autres parois limitant le courant fluide, les U_j sont nulles et il doit en être de même des u_j;

3° Si le fluide s'éloigne à l'infini il est naturel d'admettre que le trouble dû à la présence de l'obstacle s'évanouit à l'infini. C'est-à-dire que les u_j tendent vers zéro, p tendant vers une constante (que l'on peut prendre nulle). Nous préciserons en admettant que les u_j s'annulent, à l'infini, comme $\frac{1}{R}$, leurs dérivées premières et p comme $\frac{1}{R^2}$, R est la distance du point considéré à l'origine des coordonnées.

Lorsque les parois visées au n° 2 précédent sont assez loin de l'obstacle on peut, en première approximation, n'en pas tenir compte [1]. Les u_j et p vérifient alors les équations de Stokes dans tout l'espace extérieur à S, avec les données aux limites 1° et 3°.

2. **Théorème d'unicité.** — Il ne peut y avoir plusieurs systèmes de solutions distinctes des équations (1) et (2) vérifiant les conditions aux limites 1°, 2°, 3°. Supposons, en effet, qu'il en existe deux tels systèmes $u_j^{(1)}$, $p^{(1)}$ et $u_j^{(2)}$, $p^{(2)}$. Les différences

$$u_j^{(1)} - u_j^{(2)} = u'_j \qquad \text{et} \qquad p^{(1)} - p^{(2)} = p'$$

donneront aussi un système de solutions des équations (1) et (2) telles que les fonctions u'_j deviennent nulles sur les

[1] La solution ainsi obtenue sert souvent de base à des approximations successives.

surfaces limites (S obstacle, Σ autres parois). Or la formule (15) du chapitre précédent,

$$\int_{\mathrm{S\,ext}} v_i\left(\Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) d\tau = \int_{\mathrm{S}+\Sigma} v_i\left(\frac{du_i}{dn} - pn_i\right) d\sigma - \int_{\mathrm{S\,ext}} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\tau = 0,$$

où l'on prend

$$u_i = v_i = u'_j,$$

et où l'on tient compte de ce que les fonctions u'_j sont nulles le long des parois S et Σ, se réduit à

$$\int_{\mathrm{S\,ext}} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\right)^2 d\tau = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \equiv 0$$

identiquement en j et k.

Donc à l'extérieur de la surface S les u'_j sont constantes. Mais sur les parois S et Σ elles sont nulles. Donc les u'_j et p' sont nulles à l'extérieur de la surface S. Par conséquent, il ne peut pas exister deux systèmes de solutions distinctes, $u_j^{(1)}$ et $u_j^{(2)}$, prenant sur la surface S les mêmes valeurs $-\mathrm{U}_j$ et nulles sur parois Σ (à distance finie ou infinie).

DEUXIÈME PARTIE.

LA SOLUTION DU PROBLÈME FONDAMENTAL DANS LE CAS DE LA SPHÈRE.

3. **Le problème ordinaire de Dirichlet.** — Dans ses belles recherches sur la fonction de Green, M. P. Lévy [1] indique incidemment une façon très directe d'obtenir la solution du problème de Dirichlet pour la sphère. Il suffit de remarquer que l'angle solide élémentaire sous lequel, d'un point M,

---

[1] *Cours d'analyse*, t. 2, p. 73.

on voit un élément $d\sigma$ d'aire sphérique, pris au point P, donné par la formule

$$d\alpha = \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

où la normale $\vec{n}$, au point P, est dirigée vers l'intérieur, se réduit à

$$\frac{d\sigma}{2Rr}$$

lorsque M est pris, lui aussi, sur la sphère (rayon R). Dans ces conditions

$$d\beta = \frac{d\sigma}{Rr} - 2\,d\alpha = \left(\frac{1}{Rr} - 2\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma$$

est une fonction harmonique de M, régulière si $M \neq P$ et nulle si M est sur la sphère. L'intégrale de $d\beta$ prise par rapport à P sur toute la sphère donne pour limite $\mp 4\pi$ lorsque M tend, à l'intérieur ou à l'extérieur, vers un point M′ de la sphère et la limite serait au contraire nulle si l'on supprimait dans l'intégrale un domaine, si petit soit-il, entourant M′.

Dans ces conditions il est intuitif que l'intégrale

$$\mp \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left(\frac{1}{Rr} - 2\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) V(P)\, d\sigma \equiv \mp \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} V(P)\, d\beta$$

donnera la solution du problème de Dirichlet (intérieur ou extérieur) pour les valeurs au contour V(P) ; $\frac{d\beta}{d\sigma}$ n'est autre d'ailleurs que la dérivée normale de la fonction de Green.

4. **Le problème fondamental concernant des équations de Stokes.** — Nous allons montrer qu'une méthode toute analogue s'appliquera à la détermination des fonctions φ_k

vérifiant les équations de Stokes

$$(1) \qquad \Delta v_k - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0,$$

et prenant des valeurs données sur une sphère. Les fonctions de Green correspondantes ont été données par M. Oseen [1] en utilisant la méthode des images. M. T. Boggio [2] avait déjà résolu le problème en question en appliquant, dans une analyse très élégante, la méthode de M. Almansi pour le problème de la sphère élastique.

Pour traiter la même question nous partons des expressions de la double couche élastique

$$(3) \qquad d\alpha_{jk} = \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^2} d\alpha \equiv \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^2} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

le coefficient de $d\sigma$ au second membre est le sixième de l'opération D_n, appliquée pour les valeurs y_j, à la solution fondamentale des équations de Stokes

$$t_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r},$$

mais en prenant, puisque les variables sont les y_j, la pression

$$p_j = -2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_j},$$

où x_j sont les coordonnés de M, y_j celles de P, l'élément d'aire $d\sigma$ (normale $\vec{n}$ intérieure) étant pris autour de ce dernier point. Les $d\alpha_{jk}$ sont les composantes d'un tenseur dont les éléments d'une même ligne (j fixé), ou colonne (k fixé), avec la pression

$$\frac{1}{3} \frac{dp_j}{dn} d\sigma \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} \frac{dp_k}{dn} d\sigma$$

---

[1] *Hydrodynamik, Ak. Verlagsges.*, Leipzig, 1927.

[2] *Rend. cir. Mat. di Palermo*, t. 30, 1910, p. 66.

donnent (en fonction de M), un système de solution des équations (1) et (2). Enfin, le point P et l'élément $d\sigma$ étant pris sur une sphère de centre O, de rayon R, il est clair que, lorsque M vient sur cette sphère, l'expression (3) se réduit à

$$(3') \qquad \left(t_{jk} - \frac{\delta_{jk}}{r}\right) \frac{d\sigma}{2R}.$$

La différence

$$(4) \qquad d\beta_{jk} = d\alpha_{jk} - \frac{d\sigma}{2R}\left(t_{jk} - \frac{\delta_{jk}}{r}\right)$$

vérifie évidemment les équations (1), mais non l'équation de continuité (2); la divergence

$$\frac{\partial}{\partial x_j} d\beta_{jk} = \frac{1}{2R} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_k} d\sigma$$

est différente de zéro. Avant de faire jouer aux $d\beta_{jk}$ le rôle du précédent $d\beta$ nous aurons donc à modifier ces expressions en y ajoutant des termes nuls sur la sphère, vérifiant les équations (1), et choisis de façon que (2) se trouve satisfaite. Nous prendrons ces termes de forme

$$(5) \qquad (\rho^2 - R^2) \frac{\partial m_k}{\partial x_j} \frac{d\sigma}{2R},$$

où

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

les m_k étant des fonctions harmoniques du point M et telles que [d'après (2)]

$$2 x_l \frac{\partial m_k}{\partial x_l} - \frac{x_k - y_k}{r^3} = 0,$$

où l comme k et j prend les valeurs 1, 2, 3.

Ce qui peut encore s'écrire

$$2\rho \frac{\partial m_k}{\partial \rho} = \frac{x_k - y_k}{r^3};$$

d'où enfin, si le point M est à l'extérieur de la sphère

$$m_k = -\frac{1}{2}\int_\rho^\infty \frac{x'_k - y_k}{r'^3}\frac{d\rho'}{\rho'};$$

l'intégrale étant prise sur le rayon vecteur OM, décrit, depuis M jusqu'à l'infini par le point M′ (coordonnées x'_j) et où

$$r'^2 = (x'_j - y_j)^2.$$

On a encore

$$(6) \qquad m_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}$$

si l'on pose,

$$(7) \qquad H = -\frac{1}{2}\int_\rho^\infty \frac{1}{r'}\frac{d\rho'}{\rho'}.$$

Nous aurons finalement à envisager les expressions

$$(8) \qquad d\gamma_{jk} = d\beta_{jk} + \frac{d\sigma}{2R}(\rho^2 - R^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial y_k}$$

qui définiront un tenseur dont les éléments d'une même colonne (k fixé) [1]

$$\left[\text{avec la pression } dp_k = -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma + \frac{1}{R}m_k\,d\sigma\right]$$

sont (en fonction de M), un système de solution des équations (1) et (2) et donnant la limite zéro lorsque M tend vers un point M′ de la sphère (P excepté).

On vérifie facilement (ci-dessous, nº 7) que lorsque M, à l'extérieur de la sphère, tend vers M′ on a

$$\int_{(S)} d\gamma_{jk} = -\frac{2\pi}{3}\delta_{jk}.$$

[1] On vérifie plus loin la symétrie des $d\gamma_{jk}$ par rapport aux indices j et k, de sorte qu'on peut prendre aussi les éléments d'une même ligne (j fixé).

Des intégrales telles que

$$\varphi_j(\mathrm{M}) = -\frac{3}{2\pi}\int_{(\mathrm{S})} \mathrm{V}_k(\mathrm{P})\, d\gamma_{jk} \tag{9}$$

étendues à la sphère, définissent les fonctions $\varphi_j(\mathrm{M})$ à l'extérieur de celle-ci, fonctions vérifiant (1) et (2),

$$\left[\text{avec la pression } p = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}\int_{(\mathrm{S})} \mathrm{V}_k(\mathrm{P})\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma - \frac{3}{2\pi \mathrm{R}}\int_{(\mathrm{S})} \mathrm{V}_k(\mathrm{P})\, m_k\, d\sigma\right],$$

et nulles à l'infini. De plus lorsque M tend vers M′ les limites des seconds membres dépendent seulement des $\mathrm{V}_k(\mathrm{M}')$. L'examen du cas simple où les V_k sont des constantes fait immédiatement prévoir que

$$\lim_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}'} \varphi_j(\mathrm{M}) = \delta_{jk}\mathrm{V}_k(\mathrm{M}') = \mathrm{V}_j(\mathrm{M}'), \tag{10}$$

on a ainsi résolu le problème fondamental pour la sphère. On traite facilement, par la même méthode, le cas où les $\varphi_j(\mathrm{M})$ doivent être définies à l'intérieur de la sphère. Nous n'y insisterons pas.

Nous réunissons à la fin de ce chapitre quelques remarques et vérifications concernant la solution précédente.

5. **La fonction** H. — Tout d'abord il est facile d'expliciter la fonction précédente H qui a des expressions très simples en introduisant les angles et les côtés du triangle OMP. En désignant par θ et φ les angles en O et M de ce triangle, on a,

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{1}{r'}\frac{d\rho'}{\rho'} = \frac{1}{2}\int_{\varpi}^{0}\frac{d\varphi}{\mathrm{R}\sin(\theta+\varphi)}; \tag{11}$$

d'où

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2\mathrm{R}}\operatorname{Log}\frac{r+\rho-\mathrm{R}}{r+\rho+\mathrm{R}}.$$

Quand on utilisera cette formule pour le calcul des dérivées de H par rapport aux coordonnées y_j du point P, il faudra ne pas oublier que ces coordonnées figurent dans r et aussi dans R, qui doit être remplacé par

$$\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}.$$

6. **Propriétés de la fonction** H. — D'après la dernière expression qui en a été donnée, la fonction H peut être considérée comme une fonction des trois points M, P, O, dont les distances mutuelles sont

$$\overline{\mathrm{MP}}=r, \qquad \overline{\mathrm{OM}}=\rho, \qquad \overline{\mathrm{OP}}=\mathrm{R}.$$

On vérifiera facilement que c'est une fonction harmonique de chacun des trois points M, P et O. Il suffit d'ailleurs de vérifier l'harmonicité en M; par application du théorème de Lord Kelvin sur l'inversion, on en déduira l'harmonicité en O et en P.

Il est intéressant de noter que la fonction H, considérée comme dépendant du point M, est le potentiel extérieur d'une simple couche électrique, sans action sur un point intérieur et répartie sur un ellipsoïde de révolution, de foyers O et P, d'équation

$$\frac{r+\rho-\mathrm{R}}{r+\rho+\mathrm{R}}=\text{const.}$$

Pour s'en rendre compte il suffit d'identifier la fonction H avec la fonction χ définie plus loin (au n° 5 du Chapitre III)

$$\chi=a_1 a_2 a_3\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a_1^2+s)(a_2^2+s)(a_3^2+s)}},$$

en se plaçant dans le cas de révolution $a_1=a_2$. En supprimant dans χ le facteur $a_1^2 a_3$, puis faisant $a_1=0$ et $a_3=\frac{\mathrm{R}}{2}$, nous obtenons

$$\bar{\chi}=\int_\lambda^\alpha \frac{ds}{s\sqrt{a_3^2+s}}$$

qui nous donne

$$\bar{\chi}=\frac{1}{a_3}\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{a_3^2+\lambda}+a_3}{\sqrt{a_3^2+\lambda}-a_3}.$$

Or, en rapportant l'ellipsoïde à ses axes, λ est défini par

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=1;$$

d'où évidemment,

$$r+\rho=2\sqrt{a_3^2+\lambda},$$

et $\overline{\chi}$ devient

$$\overline{\chi}=\frac{2}{R}\operatorname{Log}\frac{r+\rho+R}{r+\rho-R}$$

ce qui reproduit bien H, à un facteur constant près.

7. **Valeur des intégrales** $\int_{(S)} d\gamma_{lk}$ **quand** M **tend vers** M'. — Des propriétés de H suit immédiatement que

$$m_k=\frac{\partial H}{\partial y_k}$$

est une fonction harmonique et l'on voit aussi que, quand M s'éloigne à l'infini, elle est infiniment petite de l'ordre $\frac{1}{\rho^2}$, ses dérivées de l'ordre $\frac{1}{\rho^3}$, etc.

Pour vérifier d'autre part les valeurs des intégrales $\int_{(S)} d\gamma_k$, écrivons

$$\int_{(S)} d\gamma_{lk}=\int_{(S)} d\alpha_{lk}-\frac{1}{2R}\int_{(S)}\left(t_{lk}-\frac{\delta_{lk}}{r}\right)d\sigma+\frac{\rho^2-R^2}{2R}\int_{(S)}\frac{\partial m_k}{\partial x_l}d\sigma.$$

Nous allons évaluer ces intégrales séparément. D'abord la première,

$$\int_{(S)} d\alpha_{lk}=\int_{(S)}\frac{(x_l-y_l)(x_k-y_k)}{r^2}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma,$$

transformée en intégrale du volume intérieur de la surface S, pour le point M à l'extérieur, nous donne zéro.

La seconde,

$$-\frac{1}{2R}\int_{(S)}\left(t_{lk}-\frac{\delta_{lk}}{r}\right)d\sigma,$$

est un potentiel de simple couche. Elle est donc continue quand le point M vient sur la sphère. Sa valeur sur celle-ci est

$$-\int \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^2}\, d\alpha,$$

l'angle solide $d\alpha$ étant calculé à partir du point M pris sur la sphère.

Or la transformation précédente en intégrale de volume permet de prendre pour domaine d'intégration une demi-sphère centrée en M et du rayon très petit.

Donc l'intégrale deviendra

$$-\int \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{r^2} \frac{d\sigma}{r^2}.$$

étendue à la demi-sphère centrée en M qui, par conséquent, nous donnera

$$-\frac{2}{3}\pi\, \delta_{ik}.$$

Enfin la troisième intégrale,

$$\frac{\rho^2 - R^2}{2R} \int_{(S)} \frac{\partial m_k}{\partial x_i}\, d\sigma,$$

tend évidemment vers zéro. Remplaçons m_k par sa valeur en fonction de H, il suffit évidemment d'établir la propriété pour

$$\frac{\rho^2 - R^2}{4R^2} \int_{(S)} \frac{\partial^2 \operatorname{Log}(r + \rho - R)}{\partial x_i\, \partial y_k}\, d\sigma.$$

Or on vérifie de suite que lorsque M tend vers M′, la quantité sous le signe de l'intégrale est de la forme

$$\frac{K}{r^2},$$

K restant fini et il est facile de se rendre compte que

$$\int \frac{d\sigma}{r^2}$$

ne devient infini, quand M tend vers M′, que comme

$$\mathrm{Log}(\rho - \mathrm{R}),$$

de sorte que son produit par

$$\rho^2 - \mathrm{R}^2$$

tend vers zéro.

Nous avons donc bien en résumé

$$\int_{(\mathrm{S})} d\gamma_{jk} = -\frac{2}{3}\pi\,\delta_{jk}$$

lorsque le point M, extérieur à la sphère, tend vers un point M′ de celle-ci.

8. **Symétrie des** $d\gamma_{jl}$. — La formule (8) peut être écrite

$$d\gamma_{jk} = \left[\frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^2}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2\mathrm{R}r}\right) + \frac{1}{2\mathrm{R}}(\rho^2 - \mathrm{R}^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_k}\right] d\sigma.$$

Or, le triangle OPM donne

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2\mathrm{R}r} = -\frac{\rho^2 - \mathrm{R}^2}{2\mathrm{R}r^3},$$

alors

$$(8') \qquad d\gamma_{jk} = -\frac{1}{2\mathrm{R}}(\rho^2 - \mathrm{R}^2)\left[\frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^5} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_k}\right] d\sigma,$$

cette formule ne met pas en évidence le fait que $d\gamma_{jk}$ est une fonction symétrique des indices j et k. Mais on peut mettre H sous une forme un peu différente et faisant apparaître cette symétrie.

Nous partons, pour cela, de la formule que donne Boggio (1)

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\rho^{-n}\int_0^\infty \rho'^{n-1} m\, d\rho' = \rho^{-n-1}\int_\rho^\infty \rho'^n \frac{\partial m}{\partial x'_j}\, d\rho',$$

(1) *Rendi. cir. Mat. di Palermo*, 2e série, 1910, p. 65.

où l'intégration est prise sur le rayon, allant de M à l'infini et passant par l'origine, où la fonction $m(x'_1, x'_2, x'_3)$ peut être quelconque (sauf la restriction posée plus loin) et où enfin ρ et ρ' sont tels que

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad \rho'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Pour démontrer cette formule nous effectuons la dérivation du premier membre en notant que pour mettre en évidence la façon dont le chemin d'intégration dépend des x_j on doit poser

$$x'_j = \frac{x_j}{\rho}\rho'.$$

En développant la dérivation du premier membre, on aura

$$-n\rho^{-n-2}x_j\int_\rho^\infty \rho'^{n-1} m\,d\rho' - \rho^{-2}x_j m + \rho^{-n}\int_\rho^\infty \rho'^{n-1}\frac{\partial m}{\partial x'_j}\frac{\rho'}{\rho}d\rho'$$
$$+\rho^{-n}\int_\rho^\infty \rho'^{n-1}\frac{\partial m}{\partial x'_j}x_j\rho'\left(-\frac{x_j}{\rho^3}\right)d\rho'.$$

De sorte que notre formule (12) devient

$$\rho^n m + n\int_\rho^\infty \rho'^{n-1} m\,d\rho' + \int_\rho^\infty \rho'^n\frac{\partial m}{\partial\rho'}\,d\rho' = 0$$

ou

$$\rho^n m + \int_\rho^\infty \frac{\partial}{\partial\rho'}(\rho'^n m)\,d\rho' = 0.$$

Ce qui est vérifié si $\rho'^n m$ tend vers zéro pour ρ' tendant vers l'infini.

Appliquons cette formule pour $n = -1$ et $m = \frac{1}{r}$. Nous aurons

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{1}{2}\int_\rho^\infty \frac{x'_k - y_k}{r'^3}\frac{d\rho'}{\rho'}$$
$$= \frac{1}{2}\int_\rho^\infty \frac{\partial}{\partial x'_k}\left(\frac{1}{r'}\right)\frac{d\rho'}{\rho'} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho\int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{r'\rho'^2}\right].$$

Par conséquent la formule (8′) devient

$$(8'') \quad d\gamma_{jk} = -\frac{1}{2R}(\rho^2 - R^2)$$
$$\times \left[\frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j \, dx_k}\left(\rho \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{r'\rho'^2}\right)\right] d\sigma$$

qui montre bien la symétrie des indices j et k.

CHAPITRE III.

ÉVALUATION DIRECTE DES EFFORTS. MÉTHODE DE M. PÉRÈS.
CAS PARTICULIERS OÙ L'OBSTACLE EST UNE SPHÈRE OU UN ELLIPSOÏDE.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉVALUATION DIRECTE DES EFFORTS. MÉTHODE DE M. PÉRÈS.

1. **Calcul des efforts.** — Les composantes élémentaires des efforts appliqués sur un élément $d\sigma$ de la surface S d'un obstacle sont données par

$$dF_l = n_k N_{lk}\, d\sigma, \tag{1}$$

où les n_k sont les composantes du vecteur unitaire, normal à l'élément $d\sigma$ et dirigé vers l'extérieur de la surface S. Alors la résultante des efforts appliqués sur la surface S de l'obstacle aura pour composantes

$$F_l = \int_{(S)} n_k N_{lk}\, d\sigma, \tag{2}$$

où les intégrales sont étendues à la surface S.

Plaçons-nous dans le cas du problème fondamental posé au chapitre précédent : obstacle dans un courant primitif (U_j, P). En faisant dans la formule (2) du Chapitre I le coefficient de viscosité égal à 1 et remarquant que le fluide est incompressible

$$0 = \frac{\partial(U_j + u_j)}{dx_j} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

nous obtenons

$$N_{lk} = -(P+p)\,\delta_{lk} + \frac{\partial(U_l + u_l)}{\partial x_k} + \frac{\partial(U_k + u_k)}{\partial x_l}. \tag{3}$$

Or il est clair que les termes dépendant du mouvement primitif (termes en P et U), donnent des efforts équivalents à zéro [1], et par conséquent, la formule (2) devient

$$(4) \qquad F_l = \int_{(S)} \left[n_k \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) - p n_l \right] d\sigma.$$

2. **Méthode de M. Pérès.** — Il y a intérêt, pour les applications, à obtenir le plus directement les projections des efforts sans passer par l'intermédiaire des solutions u_j, définies avec les conditions aux limités 1 et 2 (n° 1 du Chap. II) et sous forme d'intégrale où ne figurent que les données U_j. *C'est ce qu'il est possible de faire, dans le cas d'un courant primitif remplissant tout l'espace ou dans le cas où les parois limitant le courant peuvent être négligées, par la méthode suivante due à M. Pérès* [2].

Partons de la formule de réciprocité établie au n° 5 du Chapitre I et supposons que les v_k (M), fonctions du point M (coordonnées x_j) situé à l'extérieur de la surface S, prennent sur celle-ci les valeurs

$$v_1(P) = 1, \qquad v_2(P) = 0, \qquad v_3(P) = 0,$$

où P est un point de la surface S (coordonnées y_j). Les $u_j(M)$ deviennent égales aux $-U_j$ quand le point M s'approche

[1] Pour vérifier, par exemple, que la résultante suivante Ox_1 de ces efforts est nulle, on applique la formule de réciprocité [formule (19) du Chapitre I] en prenant

$$u_j = \delta_{j1}, \qquad v_j = U_j,$$

régulières à l'intérieur de l'obstacle, on prendra de même

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = -x_3, \qquad u_3 = x_2, \qquad v_j = U_j,$$

pour prouver que le moment de ces efforts par rapport à Ox_1 est nul. Dans ces conditions, les N_{lk} peuvent être réduits à

$$N_{lk} = -p\delta_{lk} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

[2] *C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 310.

au point P. Dans ces conditions la formule de réciprocité nous donnera

$$F_1 = \int_{(S)} \left[n_k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) - p n_1 \right] d\sigma$$

$$= - \int_{(S)} U_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) - \bar{p} n_j \right] d\sigma.$$

D'une façon générale, pour la détermination des trois composantes, F_l, de la résultante des efforts appliqués par le fluide sur l'obstacle, nous aurons à introduire trois systèmes de solutions indépendantes, $v_k^{F_l}$ (M), des équations de Stokes telles qu'elles prennent sur la surface les valeurs

$$v_k^{F_l}(P) = \delta_{lk}, \tag{5}$$

et nous aurons ainsi

$$F_l = - \int_{(S)} U_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_k^{F_l}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{F_l}}{\partial x_k} \right) - \bar{p}_{F_l} n_j \right] d\sigma. \tag{6}$$

Pour obtenir des formules analogues donnant les composantes, L_l, du moment, par rapport à l'origine des coordonnées, des efforts sur l'obstacle, nous supposons connues les trois systèmes de solutions distinctes, $v_k^{L_l}$ (M), des équations de Stokes qui prennent sur la surface S les valeurs

$$v_k^{L_l}(P) = \sigma_{kl}(P), \tag{5'}$$

où σ_{kl} (P) est le tenseur

$$\begin{Bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{Bmatrix}$$

dont les éléments d'une même ligne (l fixé), ou colonne (k fixé), correspondent respectivement à $k = 1, 2, 3$ ou $l = 1, 2, 3$. La formule de réciprocité nous donne encore

$$L_l = - \int_{(S)} U_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_k^{L_l}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{L_l}}{\partial x_k} \right) - \bar{p}_{L_l} n_j \right] d\sigma. \tag{6'}$$

On voit l'intérêt des expressions précédentes (6) et (6'). La détermination des u_l consiste dans la résolution du problème aux limites extérieur pour la surface S et les équations de Stokes avec des données aux limites tout à fait quelconques $-U_l$; *mais il suffit d'avoir traité ce même problème avec les données particulières* (5) *et* (5') *pour évaluer directement en fonction des* U_l, *les actions du fluide sur l'obstacle.*

En résumé : pour trouver les composantes de la résultante des efforts du fluide sur l'obstacle et celles du moment résultant il suffit de connaître les six systèmes de fonctions $v_k^{Fl}(M)$, $v_k^{Il}(M)$, définies, continues, possédant les dérivées premières également continues à l'extérieur de la surface S, y vérifiant les équations de Stokes, nulles à l'infini et se réduisant sur l'obstacle, respectivement, à l'un des six systèmes de valeurs

$$1,\ 0,\ 0;\ 0,\ 1,\ 0;\ 0,\ 0,\ 1;\ 0,\ -y_3,\ y_2;\ y_3,\ 0,\ -y_1;\ -y_2,\ y_1,\ 0.$$

Nous savons d'ailleurs, d'après le théorème d'unicité (n° 2 du Chapitre II), que chacune de ces conditions aux limites peut être réalisée par un seul système de solutions des équations de Stokes et un seul.

On sait que, pour certaines formes d'obstacles, les fonctions introduites, $v_k^{Fl}(M)$, $v_k^{Ll}(M)$, sont élémentaires. Dans les cas correspondants on pourra calculer, très simplement, les efforts pour un courant primitif quelconque. Il en est ainsi si l'obstacle est une sphère ou un ellipsoïde et c'est à ces cas particuliers que nous consacrons la suite de ce chapitre.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉVALUATION DES EFFORTS EXERCÉS PAR LE FLUIDE SUR UNE SPHÈRE.

Supposons qu'on introduise dans un fluide, dont le mouvement lent et permanent, dépend des équations de Stokes, une sphère fixe, centrée à l'origine des coordonnées et du rayon R.

Les formules fondamentales (6) et (6'), de M. Pérès nous permettent de retrouver pour la résultante des efforts et son moment des expressions données par Faxén, qui sont très simples, mais auxquelles on ne parvient que par des calculs assez longs lorsqu'on veut faire intervenir et expliciter les valeurs des u_l déterminées, soit par séries (Faxén) [1], soit par l'emploi de fonctions de Green (Oseen).

3. **Calcul des composantes F_l des efforts.** — Nous avons résolu (n° 4 du chapitre précédent), le problème fondamental dans le cas de la sphère et nous avons obtenu un système de solution, qui (d'après le n° 8 du chapitre précédent), s'écrit

$$(7)\quad \begin{cases} v_k(M) = \dfrac{3}{4\pi R}(\rho^2 - R^2)\displaystyle\int_{(S)} V_l(P) \\ \qquad\qquad \times\left[\dfrac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}\left(\rho\displaystyle\int_\rho^\infty \dfrac{d\rho'}{r'\rho'^2}\right)\right] d\sigma, \\ p(M) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\displaystyle\int_{(S)} V_l(P)\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \dfrac{3}{2\pi R}\displaystyle\int_{(S)} V_l(P)\, m_k\, d\sigma, \end{cases}$$

des équations de Stokes dont les $v_k(M)$ prennent sur la sphère des valeurs $V_k(P)$ arbitraires.

---

[1] *Ann. der Physik*, 4e série, t. 68, 1922, p. 101 · *Arkiv för mat. Astr. och Fysik*, t. 18, n° 29, 1925. — OSEEN, *Hydrodynamik*, *Ak. Verlagsges*, Leipzig, 1927, p. 111.

Si nous prenons pour $V_j(P)$ l'un des trois systèmes de valeurs

$$1,\ 0,\ 0;\qquad 0,\ 1,\ 0;\qquad 0,\ 0,\ 1;$$

nous obtenons, après un calcul facile, les trois systèmes de solutions bien connus

$$(8)\qquad \begin{cases} v_k^{F_l}(M) = \dfrac{3}{2}\dfrac{R}{\rho}\delta_{kl} - \dfrac{R}{4}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left(3\rho + \dfrac{R^2}{\rho}\right), \\[2ex] \bar{p}_{F_l}(M) = -\dfrac{3}{2}R\dfrac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x_l} \end{cases}$$

avec

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

dont nous avons besoin pour appliquer la formule

$$F_l = -\int_{(S)} U_j\left[n_k\left(\frac{\partial v_k^{F_l}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{F_l}}{\partial x_k}\right) - n_j \bar{p}_{F_l}\right] d\sigma$$

de M. Pérès et évaluer les composantes F_l des efforts. Posons

$$D_n v_j^{F_l}(M) = n_k\left(\frac{\partial v_k^{F_l}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{F_l}}{\partial x_k}\right) - n_j p_{F_l} = n_k D_{jk} - n_j \bar{p}_{F_l},$$

où le premier membre est calculé au point M.

Soient $D_n v_j^{F_l}(P)$ les valeurs des $D_n v_j^{F_l}(M)$ quand le point M vient se confondre au point P de la surface S. Nous aurons alors

$$F_l = -\int_{(S)} U_j D_n v_j^{F_l}(P)\, d\sigma.$$

Pour une sphère, centrée à l'origine des coordonnées et de rayon R nous obtenons, d'après (8),

$$D_{jk} = \frac{3}{2}\frac{R}{\rho^3}x_l\delta_{jk} - \frac{3}{2}\frac{R^3}{\rho^5}(x_l\delta_{jk} + x_j\delta_{kl} + x_k\delta_{jl})$$
$$-\frac{1}{2}\frac{R}{\rho^5}\left(9 - 15\frac{R^2}{\rho^2}\right)x_j x_k x_l$$

et

$$D_n v_j^{F_l}(M) = -\frac{3}{2}\frac{R^3}{\rho^4}\delta_{jl} - \frac{9}{2}\frac{R}{\rho^4}\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)x_j x_l.$$

Quand le point M vient se confondre au point P de la sphère, ρ devient égal au rayon R, nous aurons par conséquent

$$D_n v_j^{F_l}(P) = -\frac{3}{2R}\delta_{jl}$$

et

(9) $$F_l = \frac{3}{2R}\int_{(S)} U_l \, d\sigma.$$

Or la formule de Faxén [1] est

(10) $$F_l = 6\pi R (U_l)_0 + \pi R^3 \left(\frac{\partial P}{\partial x_l}\right)_0,$$

où l'indice zéro indique que les composantes U_l de la vitesse du mouvement primitif et les dérivées de la pression P, correspondante, sont calculées à l'origine des coordonnées (le centre de la sphère).

Pour ramener (9) à la forme (10) nous utiliserons la formule de Green qui, appliquée à deux fonctions U et V régulières dans le domaine limité par une surface S, s'écrit

$$\int_{(S)} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn}\right) d\sigma = \int_{\text{int S}} (U \Delta V - V \Delta U)\, d\tau.$$

Prenons

$$V = \frac{1}{\rho}, \qquad U = U_l,$$

S étant la sphère, du rayon R, centrée à l'origine des coordonnées. Pour tenir compte de la singularité de la fonction V à l'origine, on sait que la formule précédente doit être remplacée par

(11) $$\int_{(S)} \left(U_l \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn} - \frac{1}{\rho}\frac{dU_l}{dn}\right) d\sigma + 4\pi (U_l)_0 = -\int_{\text{int S}} \frac{1}{\rho}\Delta U_l \, d\tau.$$

[1] Oseen, *Hydrodynamik*, p. 112.

Or

$$\int_{(S)} U_l \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn} d\sigma = -\frac{1}{R^2}\int_{(S)} U_l d\sigma.$$

$$\int_{(S)} \frac{1}{\rho}\frac{dU_l}{dn} d\sigma = \frac{1}{R}\int_{\text{int S}} \Delta U_l d\tau = \frac{1}{R}\int_{\text{int S}} \frac{\partial P}{\partial x_l} d\tau.$$

En divisant l'espace intérieur à la sphère par des sphères concentriques, la distance normale de deux d'entre elles est $d\rho$.

Par conséquent

$$\int_{\text{int S}} \frac{\partial P}{\partial x_l} d\tau = \int_0^R d\rho \int_{S(\rho)} \frac{\partial P}{\partial x_l} d\sigma.$$

Mais, d'après les équations de Stokes, la fonction P est harmonique, donc

$$\int_{S(\rho)} \frac{\partial P}{\partial x_l} d\sigma = 4\pi\rho^2\left(\frac{\partial P}{\partial x_l}\right)_0;$$

d'où

$$\int_{(S)} \frac{1}{\rho}\frac{dU_l}{dn} d\sigma = \frac{4}{3}\pi R^2\left(\frac{\partial P}{\partial x_l}\right)_0.$$

Finalement, d'une façon analogue, l'intégrale de volume au second membre de la formule (11) nous donnera

$$-2\pi R^2\left(\frac{\partial P}{\partial x_l}\right)_0,$$

la formule (11) donnant par conséquent

$$\int_{(S)} U_l d\sigma = 4\pi R^2 (U_l)_0 + \frac{2}{3}\pi R^4\left(\frac{\partial P}{\partial x_l}\right)_0;$$

et, d'après la formule (9), nous aurons celle de Faxén

$$F_l = 6\pi R (U_l)_0 + \pi R^3\left(\frac{\partial P}{\partial x_l}\right)_0.$$

4. **Calcul des composantes** L_l **du moment résultant.** — Si nous prenons pour $V_j(P)$, dans les formules (7), l'un des

trois systèmes de valeurs

$$o, \quad -y_3, \quad y_2; \qquad y_3, \quad o, \quad -y_1; \qquad y_2, \quad y_1, \quad o;$$

nous obtenons, après un calcul facile, les trois systèmes de solutions bien connues

$$(12) \qquad \begin{cases} v_k^{L_l}(M) = \dfrac{R^3}{\rho^3}\sigma_{kl}(M), \\ \bar{p}_{L_l}(M) = o \end{cases}$$

des équations de Stokes, nécessaires pour appliquer la formule

$$L_l = -\int_{(S)} U_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_k^{L_l}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{L_l}}{\partial x_k} \right) - n_j \bar{p}_{L_l} \right] d\sigma$$

de M. Pérès et évaluer les composantes L_l du moment résultant. Les $\sigma_{kl}(M)$ sont des éléments du tenseur

$$\begin{Bmatrix} o & -x_3 & x_2 \\ x_3 & o & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & o \end{Bmatrix}$$

dont l ou k restant fixe indique, respectivement, les éléments de chaque ligne ou colonne.

Donc, d'après les notations précédentes et les valeurs (12) des $v_k^{L_l}(M)$ et $\bar{p}_{L_l}$, nous obtenons

$$D_n v_j^{L_l}(M) = n_k D_{jk} = -3\frac{R^3}{\rho^4}\sigma_{jl}(M),$$

puisque

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_k} \equiv o$$

identiquement en j, k et l et qu'on a toujours

$$\sum_{k=1}^{3} x_k \sigma_{kl}(M) = o.$$

Donc nous aurons

$$L_l = -\int_{(S)} U_j D_n v_j^{L_l}(P)\, d\sigma = 3\int_{(S)} U_j \frac{\sigma_{jl}(P)}{R}\, d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$L_1 = 3\int_{(S)} (n_2 U_3 - n_3 U_2)\, d\sigma = 3\int_{S\,\mathrm{int}} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) d\tau$$

$$= 4\pi R^3 \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)_0,$$

puisque l'expression sous signe somme est harmonique.

Par permutation des indices 1, 2 et 3 nous obtenons les composantes L_2 et L_3.

TROISIÈME PARTIE.

ÉVALUATION DES EFFORTS EXERCÉS PAR LE FLUIDE SUR UN ELLIPSOIDE.

Les solutions v_k^{Fl}, v_k^{Ll}, nécessaires pour appliquer les formules (6) et (6′), dans le cas où l'obstacle est un ellipsoïde, ayant ses axes a_1, a_2, a_3 suivant les axes des coordonnées, ont été données par Oberbeck (1) et Edwardes (2). Nous allons retrouver d'abord, en suivant l'analyse de M. Oseen, les formules d'Oberbeck concernant les conditions aux limites

$$v_k^{Fl}(P) = \delta_{lk},$$

et ensuite les solutions $v_k^{Ll}(M)$, correspondant au calcul des composantes du moment résultant, qui prennent sur la surface S de l'ellipsoïde les valeurs

$$v_k^{Ll}(P) = \sigma_{lk}(P).$$

5. **Les formules d'Oberbeck.** — Cherchons les solutions particulières des équations de Stokes, définies, continues à

---

(1) *J. de Crelle*, t. 81, 1876, p. 62. — Oseen, *loc. cit.*, p. 138.

(2) *Quart. Journ. of Mat.*, t. 26, 1893, p. 70.

l'extérieur de l'ellipsoïde d'équation

$$(13) \qquad \sum_{l=1}^{3} \frac{y_l^2}{a_l^2} = 1,$$

prenant sur la surface S les valeurs données $v_k(P)$ et s'annulant à l'infini. Désignons, comme précédemment, par x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point M à l'extérieur de l'ellipsoïde, c'est-à-dire telles que

$$(14) \qquad \sum_{l=1}^{3} \frac{x_l^2}{a_l^2} - 1 > 0.$$

Dans ces conditions l'équation

$$(15) \qquad \sum_{l=1}^{3} \frac{x_l^2}{a_l^2 + \lambda} - 1 = 0,$$

en λ, admet une et une seule racine positive, qui est évidemment une fonction des x_l, nulle quand le point M vient sur la surface de l'ellipsoïde et infinie quand ce point s'éloigne indéfiniment dans une direction quelconque.

Cela posé, considérons les deux fonctions

$$(16) \qquad \Omega(M) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{x_l^2}{a_l^2 + s} - 1 \right) \frac{ds}{w(s)},$$

$$(17) \qquad \chi(M) = a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{w(s)},$$

où l'on pose

$$(18) \qquad w(s) = \sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}.$$

Ces fonctions sont définies, continues dans tout l'espace extérieur à l'ellipsoïde ainsi que leurs dérivées premières et secondes, s'annulent à l'infini et, comme il est bien connu, elles vérifient l'équation de Laplace

$$\Delta\Omega = 0,$$

$$\Delta\chi = 0.$$

Pour le constater, nous posons

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} D &= \sum_{l=1}^{3} \frac{x_l^2}{(a_l^2+\lambda)^2},\\ E(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\operatorname{Log} w(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{a_l^2+\lambda}. \end{aligned}\right.$$

Dérivant l'équation (15), on trouve

$$(20)\qquad D\,\frac{\partial\lambda}{\partial x_l} = \frac{2x_l}{a_l^2+\lambda}.$$

Multiplions les deux membres de cette dernière par $\frac{x_l}{a_l^2+\lambda}$, on trouve alors

$$(21)\qquad \sum_{l=1}^{3}\frac{x_l}{a_l^2+\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x_l} = 2,$$

et élevant au carré les deux membres des équations (20) et les ajoutant, on obtient

$$(22)\qquad D\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_l}\right)^2 = 4,$$

finalement en dérivant (20), par rapport à x_l et remarquant les équations (22) et (20), nous aurons

$$(23)\qquad D\,\Delta\lambda = 4E(\lambda).$$

Cela étant, dérivons maintenant Ω deux fois, par rapport aux x_l

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_l} = 2\pi a_1 a_2 a_3\int_{\lambda}^{\infty}\frac{x_l}{a_l^2+s}\,\frac{ds}{w(s)},$$

$$\Delta\Omega = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_l^2} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \sum_{l=1}^{3}\left[\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{(a_l^2+s)w(s)} - \frac{1}{w(\lambda)}\,\frac{x_l}{a_l^2+\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x_l}\right]$$

qui, d'après (19) et (21), devient

$$\Delta\Omega = 4\pi a_1 a_2 a_3\left[\int_{\lambda}^{\infty}\frac{1}{w(s)}\,\frac{d}{ds}\operatorname{Log} w(s)\,ds - \frac{1}{w(\lambda)}\right] = 0.$$

De même en calculant $\Delta\chi$ nous obtenons

$$\Delta\chi = -a_1 a_2 a_3 \frac{w'(\lambda)}{w^2(\lambda)} \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_l}\right)^2 + \frac{a_1 a_2 a_3}{w(\lambda)} \Delta\lambda \quad (^1)$$

qui, d'après (22) et (23), nous donnera

$$\Delta\chi = 0.$$

Donc les fonctions $\Omega(M)$ et $\chi(M)$ sont harmoniques pour tout point M, à l'extérieur de l'ellipsoïde.

Considérons maintenant les fonctions

$$(24) \qquad v_k(M) = A_l^{(1)}\left(\delta_{lk}\chi - x_l \frac{\partial\chi}{\partial x_k}\right) + A_l^{(2)} \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_k \partial x_l},$$

où les $A_l^{(1)}$ et $A_l^{(2)}$ sont des constantes à déterminer.

Ces fonctions vérifient les équations de Stokes si

$$\Delta v_k(M) = -2A_l^{(1)} \frac{\partial^2\chi}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_k}.$$

D'où

$$(25) \qquad \bar{p} = -2\sum_{l=1}^{3} A_l^{(1)} \frac{\partial\chi}{\partial x_l}.$$

La constante d'intégration étant nulle d'après ce que $\bar{p}$ et χ deviennent nulles à l'infini.

Reste à satisfaire les conditions sur la surface de l'ellipsoïde. Il en faut donc calculer les valeurs limites des $v_k(M)$ quand M tend vers un point P, de cette surface. Or en ce dern· r point nous avons

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_l \partial x_k}\right)_{\lambda=0} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \left\{\int_0^\infty \frac{\delta_{lk}}{(a_l^2+s)w(s)} ds - \frac{x_l}{a_l^2} \frac{1}{w(0)} \frac{\partial\lambda}{\partial x_k}\right\}.$$

---

(1) $w'(\lambda)$ indique $\frac{dw}{d\lambda}$.

Si l'on pose

$$(26)\qquad \begin{cases} P_k = a_1 a_2 a_3 \displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{(a_k^2+s)w(s)}, \\ \chi_0 = \chi_{(\lambda=0)} = a_1 a_2 a_3 \displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{w(s)}, \end{cases}$$

on aura alors

$$v_k(P) = A_k^{(1)}\chi_0 + 2\pi A_k^{(2)} P_k + x_l\left[A_l^{(1)} - 2\pi\frac{A_l^{(2)}}{a_l^2}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}.$$

puisque

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_k} = -\frac{\partial\lambda}{\partial x_k} \qquad \text{pour } \lambda = 0.$$

Les $v_k(P)$ seront des constantes C_k, si l'on a

$$(27)\qquad A_k^{(2)} = \frac{a_k^2}{2\pi} A_k^{(1)}$$

et

$$(28)\qquad A_k^{(1)} = \frac{v_k(P)}{\chi_0 + a_k^2 P_k} = \frac{C_k}{\chi_0 + a_k^2 P_k}.$$

On peut donc choisir les constantes, $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, de manière que les $v_k(M)$ prennent sur l'ellipsoïde des valeurs constantes C_k arbitraires, ce sont les formules d'Oberbeck.

En donnant aux C_k trois systèmes de valeurs

$$1,\ 0,\ 0;\qquad 0,\ 1,\ 0;\qquad 0,\ 0,\ 1;$$

nous obtenons les fonctions $v_k^{F_l}(M)$, solutions des équations de Stokes, nécessaires pour déterminer les composantes F_l, des efforts qui exercent le fluide sur l'ellipsoïde.

6. **Calcul des composantes F_l des efforts.** — Pour déterminer la composante F_1, suivant Ox_1 par exemple, nous devons calculer l'intégrale

$$F_1 = -\int_{S_0} U_l\left[n_k\left(\frac{\partial v_k^{F_1}}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l^{F_1}}{\partial x_k}\right) - n_l \bar{p}_{F_1}\right] d\sigma$$

avec

$$v_k^{F_1}(M) = A_l^{(1)}\left[\delta_{lk}\chi - x_l\frac{\partial\chi}{\partial x_k} + \frac{a_l^2}{2\pi}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_l\,\partial x_k}\right] \qquad (l = 1, 2, 3),$$

et, d'après les conditions aux limites (28), où $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$, nous aurons

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{\chi_0 + a_1^2 P_1},$$
$$A_2^{(1)} = A_3^{(1)} = 0.$$

Posons comme précédemment

$$D_n v_k^{F_1}(M) = n_k\left(\frac{\partial v_k^{F_1}}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l^{F_1}}{\partial x_k}\right) - n_l \bar{p}_{F_1} = n_k D_{lk} - n_l \bar{p}_{F_1}.$$

Nous obtenons alors

$$D_{lk} = 2A_1^{(1)}\left[\frac{a_1^2}{2\pi}\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_1 \partial x_l \partial x_k} - x_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_l \partial x_k}\right]$$

ou encore, en posant $\lambda = 0$ dans les résultats de dérivation, nous aurons

$$D_{lk} = 2A_1^{(1)}\left[\frac{D}{2}\lambda_1\lambda_l\lambda_k - \delta_{l1}\lambda_k - \delta_{k1}\lambda_l\right],$$

où

$$\lambda_l = \frac{\partial\lambda}{\partial x_l}, \qquad \lambda_k = \frac{\partial\lambda}{\partial x_k}.$$

D'autre part, nous avons

$$n_k = \frac{\sqrt{D}}{2}\lambda_k.$$

et

$$\bar{p}_{F_1} = -2A_1^{(1)}\frac{\partial\chi}{\partial x_1}$$

ou

$$\bar{p}_{F_1} = 2A_1^{(1)}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}.$$

Alors en remarquant la relation (22), nous obtenons finalement

$$D_n v_k^{F_1}(P) = -\delta_{1l}A_1^{(1)}\frac{4}{\sqrt{D}}.$$

Par conséquent,

$$F_1 = \frac{4}{\chi_0 + a_1^2 F_1}\int_{(S)}\frac{U_1}{\sqrt{D}}\,d\sigma;$$

d'une façon générale, les composantes F_l des efforts seront données par

$$\text{(29)}\qquad F_l = \frac{4}{\chi_0 + a_l^2 P_l} \int_{(S)} \frac{U_l}{\sqrt{D}}\, d\sigma.$$

Ce sont les formules données par M. Pérès.

7. **Cas particulier.** — Si l'ellipsoïde se réduit à une sphère, on aura

$$a_1 = a_2 = a_3 = R,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4}} = \frac{1}{R},$$

$$\chi_0 + a_l^2 P_l = \frac{8}{3} R^2;$$

d'où

$$F_l = \frac{3}{2R} \int_{(S)} U_l\, d\sigma,$$

déjà obtenues directement.

8. **La détermination des fonctions $v_k^{Ll}(M)$.** — Ces solutions des équations de Stokes doivent prendre sur l'ellipsoïde les valeurs

$$\text{(30)}\qquad v_k^{Ll}(P) = \sigma_{kl}(P),$$

où les $\sigma_{kl}(P)$ sont données par le tenseur

$$\begin{Bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{Bmatrix}$$

dont les éléments chaque ligne (l fixé), ou colonne (k fixé) correspondent respectivement à $k = 1, 2, 3$ ou $l = 1, 2, 3$. Nous partons encore, de la fonction

$$\Omega(x_1, x_2, x_3) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{x_l^2}{a_l^2 + s} - 1 \right) \frac{ds}{w(s)},$$

où

$$w(s) = \sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}.$$

Soient $\Phi_k^{(l)}(x_1, x_2, x_3)$ des fonctions telles que

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1^{L_l}(M) &= \frac{\partial\Phi_2^{(l)}}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi_3^{(l)}}{\partial x_2},\\ v_2^{L_l}(M) &= \frac{\partial\Phi_3^{(l)}}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1^{(l)}}{\partial x_3},\\ v_3^{L_l}(M) &= \frac{\partial\Phi_1^{(l)}}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi_2^{(l)}}{\partial x_1}, \end{aligned}\right.$$

ce qui vérifie bien les équations de Stokes pourvu que les $\Phi_k^{(l)}(M)$ soient biharmoniques et telles que

$$(32)\qquad \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\Phi_k^{(l)}}{\partial x_k} = 0.$$

Prenons

$$(33)\qquad \Phi_k^{(l)}(M) = \left(c_k x_k \frac{\partial\Omega}{\partial x_l} + c_l x_l \frac{\partial\Omega}{\partial x_k}\right)\delta'_{lk} + \left(2 c_l x_l \frac{\partial\Omega}{\partial x_l} - \sum_{i=1}^{3} c_i x_i \frac{\partial\Omega}{\partial x_i}\right)\delta_{lk},$$

où les c sont des constantes à déterminer et δ'_{lk}, contrairement à la notation habituelle de δ_{lk}, est égal à 0 ou 1 si $l = k$ ou $l \neq$ de k.

Les fonctions $\Phi_k^{(l)}(M)$, données par (33), sont bien biharmoniques, puisque Ω est une fonction harmonique. Il reste à choisir les constantes c de façon que les relations (32) et les conditions aux limites soient satisfaites.

Remarquant les significations des δ'_{lk} et δ_{lk}, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\Phi_k^{(l)}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3}\left(c_k \frac{\partial\Omega}{\partial x_l} + c_k x_k \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_l\,\partial x_k}\right)\delta'_{lk} + c_l \frac{\partial\Omega}{\partial x_l} + c_l x_l \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_l^2} - \sum_{j=1}^{3} c_j x_j \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_j\,\partial x_l},$$

qui est identiquement nul si

$$(34)\qquad c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Prenant $l = 1$ dans la relation (33) et éliminant c_1

d'après (34), nous obtenons pour $v_k^{L_1}(M)$, les expressions

$$(35)\quad \begin{cases} v_1^{L_1}(M) = c_2 x_2 \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1\, \partial x_3} - c_3 x_3 \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1\, \partial x_2}, \\ v_2^{L_1}(M) = c_2 x_2 \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2\, \partial x_3} - c_3 x_3 \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2^2} - c_2 \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_3}, \\ v_3^{L_1}(M) = c_2 x_2 \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2} - c_3 x_3 \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2\, \partial x_3} + c_3 \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_2}. \end{cases}$$

D'où, des équations de Stokes résulte que

$$(36)\qquad \bar{p}_{L_1} = 2(c_2 - c_3) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2\, \partial x_3}$$

(convenu de plus que p est nulle à l'infini).

Il reste à choisir les constantes c_2 et c_3 de façon que les $v_k^{L_1}(M)$ vérifient les conditions aux limites (30).

Or, on a sur l'ellipsoïde,

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_l}\right)_{\lambda=0} = 2\pi P_l y_l,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_l\, \partial x_k}\right)_{\lambda=0} = 2\pi\, \delta_{lk} P_l - \frac{4\pi}{D} \frac{y_l}{a_l^2} \frac{y_k}{a_k^2}.$$

D'où quand le point M (de coordonnées x_l), à l'extérieur de l'ellipsoïde, tend vers un point P, (de coordonnées y_l), de la surface, on aura

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} v_1^{L_1}(P) = \dfrac{1}{D} \dfrac{2}{a_1^2} y_1 y_2 y_3 \left(\dfrac{c_3}{a_2^2} - \dfrac{c_2}{a_3^2}\right), \\ \dfrac{1}{2\pi} v_2^{L_1}(P) = \dfrac{1}{D} \dfrac{2}{a_2^2} y_2^2 y_3 \left(\dfrac{c_3}{a_2^2} - \dfrac{c_2}{a_3^2}\right) - y_3(c_2 P_3 + c_3 P_2), \\ \dfrac{1}{2\pi} v_3^{L_1}(P) = \dfrac{1}{D} \dfrac{2}{a_3^2} y_2 y_3^2 \left(\dfrac{c_3}{a_2^2} - \dfrac{c_2}{a_3^2}\right) + y_2(c_2 P_3 + c_3 P_2). \end{cases}$$

Mais nous voulons d'après (30)

$$v_1^{L_1}(P) = 0, \qquad v_2^{L_1}(P) = -y_3, \qquad v_3^{L_1}(P) = y_2.$$

Nous devons donc avoir

$$(38)\qquad \begin{cases} c_2 P_3 + c_3 P_2 = \dfrac{1}{2\pi}, \\ \dfrac{c_2}{a_3^2} - \dfrac{c_3}{a_2^2} = 0. \end{cases}$$

De même si nous prenons $l = 2$ ou $l = 3$, dans la relation (33), nous trouverons les $v_k^{L_2}(M)$ ou $v_k^{L_3}(M)$; dont les constantes c doivent vérifier, respectivement, les conditions

$$(39)\qquad \begin{cases} c_3 P_1 + c_1 P_3 = \dfrac{1}{2\pi}, \\ \dfrac{c_3}{a_1^2} - \dfrac{c_1}{a_3^2} = 0 \end{cases}$$

ou

$$(40)\qquad \begin{cases} c_1 P_2 + c_2 P_1 = \dfrac{1}{2\pi}, \\ \dfrac{c_1}{a_2^2} - \dfrac{c_2}{a_1^2} = 0. \end{cases}$$

Ainsi nous obtenons les fonctions $v_k^{L_l}(M)$, nécessaires [d'après les formules (6')] pour la détermination des composantes L_l du moment résultant des efforts par rapport à l'origine des coordonnées.

9. **Calcul des composantes L_l du moment résultant.** — En particulier pour $l = 1$, nous avons L_1, la projection suivant Ox_1, du moment résultant, donnée par

$$L_1 = -\int_{(S)} U_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_k^{L_1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{L_1}}{\partial x_k} \right) - \bar{p}_{L_1} n_j \right] d\sigma$$

avec $v_k^{L_1}(M)$ données par les formules (35) et (38).

Posons comme précédemment

$$\begin{aligned} D_n v_k^{L_1}(M) &= n_k \left(\frac{\partial v_k^{L_1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{L_1}}{\partial x_k} \right) - n_j \bar{p}_{L_1} \\ &= n_k D_{jk} - n_j \bar{p}_{L_1}, \end{aligned}$$

Mais nous avons sur la surface de l'ellipsoïde

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_l\,\partial x_j\,\partial x_k}\right)_{\lambda=0} = 2\pi\left[\frac{y_l}{a_l^4}\lambda_j\lambda_k + \mathrm{E}\,\frac{y_l}{a_l^2}\lambda_j\lambda_k - \frac{y_l}{a_l^2}\lambda_{jk} - \frac{\delta_{jl}}{a_l^2}\lambda_k - \frac{\delta_{lk}}{a_l^2}\lambda_j\right],$$

où

$$\lambda_{jk} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j\,\partial x_k} \qquad \text{et} \qquad \lambda_j = \frac{\partial\lambda}{\partial x_j}.$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{11} &= -\pi\mathrm{D}^2(c_2 - c_3)\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3,\\
\mathrm{D}_{22} &= -\pi\mathrm{D}^2(c_2 - c_3)\lambda_2^3\lambda_3 + 4\pi\mathrm{D}c_2\lambda_2\lambda_3,\\
\mathrm{D}_{33} &= -\pi\mathrm{D}^2(c_2 - c_3)\lambda_2\lambda_3^3 - 4\pi\mathrm{D}c_3\lambda_2\lambda_3,\\
\mathrm{D}_{12} &= -\pi\mathrm{D}^2(c_2 - c_3)\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + 2\pi\mathrm{D}c_2\lambda_1\lambda_3,\\
\mathrm{D}_{13} &= -\pi\mathrm{D}^2(c_2 - c_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 - 2\pi\mathrm{D}c_3\lambda_1\lambda_2,\\
\mathrm{D}_{23} &= -\pi\mathrm{D}^2(c_2 - c_3)\lambda_2^2\lambda_3^2 + 2\pi\mathrm{D}c_2\lambda_3^2 - 2\pi\mathrm{D}c_3\lambda_2^2,
\end{aligned}$$

et, d'après (36),

$$\bar{p}_{\mathrm{L}_1} = -2\pi(c_2 - c_3)\mathrm{D}\lambda_2\lambda_3.$$

Les cosinus directeurs de la normale à un point P de la surface de l'ellipsoïde, dirigée vers l'extérieur, sont donnés par

$$n_k = \frac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2}\lambda_k.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_n v_1^{\mathrm{L}_1}(\mathrm{P}) &= n_1\mathrm{D}_{11} + n_2\mathrm{D}_{12} + n_3\mathrm{D}_{13} - \bar{p}_{\mathrm{L}_1}n_1 = 0,\\
\mathrm{D}_n v_2^{\mathrm{L}_1}(\mathrm{P}) &= n_1\mathrm{D}_{21} + n_2\mathrm{D}_{22} + n_3\mathrm{D}_{23} - \bar{p}_{\mathrm{L}_1}n_2 = 8\pi c_2 n_3,\\
\mathrm{D}_n v_3^{\mathrm{L}_1}(\mathrm{P}) &= n_1\mathrm{D}_{31} + n_2\mathrm{D}_{32} + n_3\mathrm{D}_{33} - \bar{p}_{\mathrm{L}_1}n_3 = -8\pi c_3 n_2
\end{aligned}$$

et, enfin,

$$\mathrm{L}_1 = 8\pi\int_{(\mathrm{S})}(\mathrm{U}_3 n_2 c_3 - \mathrm{U}_2 n_3 c_2)\,d\sigma,$$

où les c_2 et c_3 sont données par les équations (38). De la même façon, nous obtenons les autres formules de M. Pérès

$$\mathrm{L}_2 = 8\pi\int_{(\mathrm{S})}(\mathrm{U}_1 n_3 c_1 - \mathrm{U}_3 n_1 c_3)\,d\sigma,$$

c_1 et c_3 vérifiant les équations (39) et

$$L_3 = 8\pi \int_{(S)} (U_2 n_1 c_2 - U_1 n_2 c_1)\, d\sigma$$

avec les équations (40) qui déterminent c_1 et c_2.

10. **Cas particuliers :** *Premier cas.* — L'ellipsoïde se réduit à une sphère du rayon R, on a alors

$$a_1 = a_2 = a_3 = R,$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{2}{3}.$$

Les équations (38) donnent

$$c_2 = c_3 = \frac{3}{8\pi}.$$

D'où l'expression précédente

$$L_1 = 3 \int_{(S)} (U_3 n_2 - U_2 n_3)\, d\sigma.$$

Deuxième cas. — Ellipsoïde quelconque, mais, dans un fluide animé d'une rotation d'ensemble autour de Ox_1. On a alors

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = -\omega y_3 \qquad \text{et} \qquad U_3 = \omega y_2,$$

où ω est la vitesse instantanée de rotation.

On aura le moment (qui se réduit d'ailleurs à la composante suivant Ox_1)

$$L_1 = 8\pi \int_{(S)} (c_3 y_2 n_2 + c_2 y_3 n_3)\, \omega\, d\sigma = \frac{32}{3} \pi^2 \omega (c_2 + c_3) a_1 a_2 a_3.$$

Or nous avons vu que

$$\frac{c_2}{a_3^2} = \frac{c_3}{a_2^2} = \frac{1}{2\pi(a_3^2 P_3 + a_2^2 P_2)};$$

d'où

$$L_1 = \frac{16}{3} \pi\omega \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2^2 P_2 + a_3^2 P_3} a_1 a_2 a_3.$$

Un calcul direct et assez long avait donné à Edwardes [1] une expression analogue, mais avec un coefficient 32 au lieu de 16.

---

[1] *Motion of a viscosis liquid in which an ellipsoid is constrained to rotate about a principal axes* (*Quart. Journ. of Math.*, t. 26, 1893, p. 77).

CHAPITRE IV.

SIMPLES COUCHES RATTACHÉES AUX FORMULES QUI DONNENT LES COMPOSANTES DES EFFORTS ET CELLES DU MOMENT RÉSULTANT DANS LE CAS D'UN OBSTACLE DE FORME QUELCONQUE.

Nous développons, dans ce chapitre, les formules obtenues par M. Pérès [1], qui rattache la détermination des composantes F_i et L_i à celle des densités de simples couches électriques.

A cet effet nous avons besoin de généraliser la formule de réciprocité (établie au nº 5 du Chapitre I) au cas où les fonctions u_i, toujours définies et continues ainsi que leurs dérivées à l'extérieur de la surface S de l'obstacle, ne satisfont pas à l'équation de continuité : la divergence des u_j n'est pas nulle.

1. **La formule de réciprocité généralisée.** — Transformons en intégrale de volume étendue à l'extérieur de la surface S, les intégrales

$$\int_{(S)} v_i\left[n_k\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_i}+\frac{\partial u_i}{\partial y_k}\right)-pn_i\right]d\sigma-\int_{(S)} u_i\left[n_k\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_i}+\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right)-\bar{p}n_i\right]d\sigma,$$

la normale $\vec{n}$, au point P, de coordonnées y_j, de la surface S est dirigée vers l'extérieur de la surface.

Supposant que les v_j et $\overline{p}$ vérifient les équations de Stokes, u_j, p satisfaisant seulement aux

$$\Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 188, p. 440.

mais avec

$$\theta = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \neq 0.$$

Ces fonctions sont nulles à l'infini comme il est spécifié au n° 5 du Chapitre I.

Nous obtenons

$$-\int_{S\,\mathrm{ext}} \left(v_j \frac{\partial \theta}{\partial y_j} + \bar{p}\,\theta \right) d\tau.$$

L'intégrale de volume, d'élément $d\tau$, étendue à l'espace extérieur, peut être écrite

$$-\int_{S\,\mathrm{ext}} \frac{\partial}{\partial y_j}(v_j \theta)\, d\tau - \int_{S\,\mathrm{ext}} \bar{p}\,\theta\, d\tau,$$

or, la première est

$$\int_{(S)} n_j v_j \theta\, d\sigma.$$

D'où la formule de réciprocité généralisée

$$(1)\quad \int_{(S)} v_j \left[n_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \right) - n_j p \right] d\sigma$$
$$- \int_{(S)} u_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_k} \right) - n_j \bar{p} \right] d\sigma = \int_{(S)} n_j v_j \theta\, d\sigma - \int_{S\,\mathrm{ext}} \bar{p}\,\theta\, d\tau.$$

2. **Les simples couches rattachées à la formule** F_1. — Nous avons trouvé, pour la projection de la résultante des efforts, sur l'axe Ox_1, exercés par le fluide visqueux incompressible, en mouvement lent et permanent, sur l'ellipsoïde fixe, l'expression

$$F_1 = \frac{4}{\chi_0 + a_1^2 P_1} \int_{(S)} \frac{U_1}{\sqrt{D}}\, d\sigma.$$

Il y figure, $\frac{1}{\sqrt{D}}$, la densite d'une simple couche en équilibre (sans action sur un point intérieur), sur l'ellipsoïde. Recherchons la généralisation de la formule obtenue pour un obstacle de forme quelconque.

Nous avons vu que

$$F_1 = -\int_{(S)} U_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_j^{F_1}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j^{F_1}}{\partial x_j} \right) - \bar{p}_{F_1} n_j \right] d\sigma,$$

les $v_k^{F_1}$ (M) et $\bar{p}_{F_1}$, solutions des équations de Stokes, vérifient, sur la surface S de l'obstacle, les conditions

$$(2) \qquad v_1^{F_1}(P) = 1, \qquad v_2^{F_1}(P) = 0, \qquad v_3^{F_1}(P) = 0.$$

Posons

$$D_n v_j^{F_1}(M) = n_k \left(\frac{\partial v_j^{F_1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{F_1}}{\partial x_k} \right) - n_j \bar{p} = \chi_j^{F_1}(M),$$

$\chi_j^{F_1}$ est la force unitaire agissant sur un élément de surface dans le mouvement de vitesse $v_k^{F_1}$. Les $D_n v_k^{F_1}$ sont donc les composantes d'un vecteur. La composante F_1 des efforts, suivant Ox_1, s'écrit avec les notations

$$F_1 = -\int_{(S)} U_j \chi_j^{F_1}(P) d\sigma.$$

Prenons $\chi_j^{F_1}(P)$ pour densité d'une simple couche, répartie sur la surface S. Le potentiel correspondant à un point M^0, de coordonnées x_1^0, x_2^0, x_3^0, *intérieur à la surface* S, sera

$$X_j^{F_1}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_j^{F_1}(P)}{r_0} d\sigma,$$

r_0 est la distance de deux points P et M^0.

La force dérivant de ce potentiel sera

$$X_{jk}^{F_1}(M^0) = \int_{(S)} \chi_j^{F_1}(P) \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{dy_k} d\sigma.$$

3. **Propriétés des composantes $X_{jk}^{F_1}$ (M^0) des forces et potentiels correspondants $X_j^{F_1}$ (M^0).** — Nous allons montrer que :

1° les $X_{jk}^{F_1}$ sont symétriques par rapport aux indices j et k;

2° on a toujours

$$X_{11}^{F_1} + X_{22}^{F_1} + X_{33}^{F_1} = 0.$$

Ce sont des conditions qui vérifient les dérivées secondes d'une fonction harmonique. Nous constaterons effectivement que : 3° les potentiels $X_j^{F_1}(M^0)$, pour tout point M^0, à l'intérieur de la surface S de l'obstacle, sont les dérivées partielles d'une même fonction harmonique.

Démonstration. — 1° Pour montrer que les $X_{jk}^{F_1}$ sont symétriques par rapport aux indices j et k, nous appliquerons la formule de réciprocité

$$(3) \qquad \int_{(S)} v_j\left[n_k\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_k}+\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right)-pn_j\right]d\sigma = \int_{(S)} u_j\left[n_k\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_k}\right)-n_j\bar{p}\right]d\sigma$$

au cas où

$$u_1=0, \qquad u_2=-\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_3}, \qquad u_3=\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_2}, \qquad p=0,$$

qui vérifient bien les équations de Stokes et où les v_j satisfont aux conditions *aux* limites (2). Alors, on aura,

$$\int_{(S)} n_k\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_k}\right)d\sigma=\int_{(S)}\left(\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_2}\chi_3^{F_1}-\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_3}\chi_2^{F_1}\right)d\sigma=X_{32}^{F_1}-X_{23}^{F_1}.$$

Le premier membre se réduit à

$$\int_{(S)}\left(-n_2\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial y_1\,\partial y_3}+n_3\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial y_1\,\partial y_2}\right)d\sigma,$$

dont la divergence est nulle. De sorte que l'on peut prendre cette intégrale sur une sphère de rayon très grand et l'on trouve zéro. Donc

$$X_{32}^{F_1}=X_{23}^{F_1}.$$

Remarquons, en passant, que si nous avions pris le point M^0 à l'extérieur, nous aurions eu à envisager des intégrales prises le long d'une sphère entourant M^0 et il n'y aurait rien eu d'analogue à ce qui précède.

Prenons maintenant

$$u_1 = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_2}, \qquad u_2 = -\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_1}, \qquad u_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad p = 0,$$

et appliquons à nouveau la formule (3). Il viendra

$$\int_{(S)} n_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_k} \right) d\sigma = \int_{(S)} \left(\chi_1^{F_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_2} - \chi_2^{F_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_1} \right) d\sigma = X_{12}^{F_1} - X_{21}^{F_1}.$$

Le premier membre a sous signe l'intégration

$$2 n_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + n_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right) + n_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_3} \right),$$

dont la divergence est nulle et l'intégrale étendue sur la surface d'une sphère de rayon r_0 est nulle puisque la quantité sous signe somme, $\frac{3y_2}{r_0^4}$, est une fonction impaire en y_2. Donc

$$X_{12}^{F_1} = X_{21}^{F_1}.$$

De même, un calcul analogue prouve que

$$X_{13}^{F_1} = X_{31}^{F_1}.$$

2° On a toujours

$$X_{11}^{F_1} + X_{22}^{F_1} + X_{33}^{F_1} = 0.$$

En effet, prenons

$$u_1 = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_1}, \qquad u_2 = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_2}, \qquad u_3 = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_3} \qquad \text{et} \qquad p = 0.$$

La formule (3) nous donnera

$$X_{11}^{F_1} + X_{22}^{F_1} + X_{33}^{F_1} = \int_S n_k \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_1} \right) d\sigma.$$

La divergence de l'expression sous le signe d'intégration, au second membre, est nulle et l'on trouve l'intégrale

$$\int \frac{4y_1}{r_0^4} d\sigma$$

étendue à la surface d'une sphère, centrée à l'origine de coordonnée et du rayon r_0 qui est bien nulle.

3° Pour démontrer la troisième partie de l'énoncé, nous nous servirons de la formule de réciprocité généralisée (1), en supposant que les φ_k(M) prennent sur la surface S les valeurs (2). Par conséquent, la formule devient

$$(1') \quad \int_{(S)} u_j \chi_j^{F_1} d\sigma = \int_{(S)} \left[n_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_k} \right) - p n_1 \right] d\sigma - \int_{(S)} n_1 \theta \, d\sigma + \int_{S\,\text{ext}} \bar{p} \theta \, d\sigma.$$

Appliquons cette formule aux cas où les u_j prennent l'un des systèmes de valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} u_1 = \dfrac{1}{r_0}, & u_2 = 0, & u_3 = 0, \\ u_1 = 0, & u_2 = \dfrac{1}{r_0}, & u_3 = 0, \\ u_1 = 0, & u_2 = 0, & u_3 = \dfrac{1}{r_0}, \end{array}$$

p restant toujours nul. Nous obtenons alors respectivement

$$X_1^{F_1}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_1^{F_1}(P)}{r_0} d\sigma = \int_{(S)} \frac{d\frac{1}{r_0}}{dn} d\sigma + \int_{S\,\text{ext}} \bar{p}_{F_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_1} d\tau,$$

$$X_2^{F_1}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_2^{F_1}(P)}{r_0} d\sigma = \int_{S\,\text{ext}} \bar{p}_{F_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_2} d\tau,$$

$$X_3^{F_1}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_3^{F_1}(P)}{r_0} d\sigma = \int_{S\,\text{ext}} \bar{p}_{F_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_3} d\tau.$$

Ainsi, nous pouvons les mettre sous la forme

$$(4) \qquad X_j^{F_1}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_j^{F_1}(P)}{r_0} d\sigma = -4\pi \delta_{1j} + \int_{S\,\text{ext}} \bar{p}_{F_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_k} d\tau,$$

c'est la formule de M. Pérès [1].

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 440.

Dans cette formule les potentiels $X_j^{F_1}$ sont calculés au point M^0 (coordonnées x_1^0, x_2^0, x_3^0), à l'intérieur de la surface S; l'intégrale de volume, d'élément $d\tau$ calculé au point P de la surface, s'étend à l'espace extérieur.

Sous cette forme il est bien évident que les $X_j^{F_1}(M^0)$ sont les dérivées partielles d'une même fonction *harmonique* à l'intérieur de S et dont l'expression pourrait être écrite

$$-4\pi x_1^0 - \int_{S\text{ ext.}} \bar{p}_{F_1} \frac{d\tau}{r_0},$$

si l'intégrale avait un sens. Pour éviter toute difficulté relative au champ d'intégration infini nous prendrons pour fonction harmonique en question

$$-4\pi x_1^0 - \int \bar{p}_{F_1} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right) d\tau,$$

R étant la distance de l'élément d'intégration $d\tau$ à l'origine.

En posant

$$\Theta^{F_1}(M^0) = \int_{S\text{ ext.}} \bar{p}_{F_1} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right) d\tau, \tag{5}$$

nous aurons alors

$$X_j^{F_1}(M^0) = -4\pi\delta_{1j} - \frac{\partial\Theta^{F_1}}{\partial x_j^0}. \tag{6}$$

Dès lors, toutes les fois que $X_2^{F_1}$, $X_3^{F_1}$ (par exemple), seront nulles, Θ sera une fonction linéaire de la seule variable x_1^0 et $\chi_1^{F_1}$ sera, par suite, la densité d'une simple couche sans action en un point intérieur. C'est ce qui arrive dans le cas de l'ellipsoïde.

On obtient de même des relations analogues pour les $X_j^{F_2}$, $X_j^{F_3}$.

4. **Simples couches rattachées à la formule qui donne L_1.** — Nous avons vu que la composante du moment résultant des efforts suivant Ox_1, est donnée par

$$L_1 = -\int_{(S)} U_j \left[n_k \left(\frac{\partial v_k^{L_1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{L_1}}{\partial x_k} \right) - n_j \bar{p}_{L_1} \right] d\sigma.$$

Nous posons, d'une façon analogue à ce qui précède

$$D_n v_k^{L_1} = n_k\left(\frac{\partial v_k^{L_1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{L_1}}{\partial x_k}\right) - n_j \bar{p}_{L_1} = \chi_j^{L_1}(M),$$

et nous prenons les $\chi_j^{L_1}(P)$ pour les densités des simples couches

$$X_j^{L_1}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_j^{L_1}(P)}{r_0} d\sigma.$$

Nous aurons alors

$$L_1 = -\int_{(S)} U_j \chi_j^{L_1}(P)\, d\sigma.$$

5. **Propriétés des potentiels** $X_j^{L_1}(M^0)$. — On peut établir à leur sujet des formules assez analogues à celles qui concernent les $X_j^{F_1}(M^0)$ et où apparaissent aussi, pour les évaluer en tout point M^0, intérieur de la surface S de l'obstable, les dérivées partielles d'une même fonction harmonique. En effet, partons encore de la formule de réciprocité généralisée (1), où nous posons que les $v_k(M)$ prennent, sur la surface S, les valeurs

$$v_1(P) = 0, \qquad v_2(P) = -y_3 \qquad \text{et} \qquad v_3(P) = y_2.$$

Si nous prenons pour u_j l'un des trois systèmes de valeurs

$$\begin{array}{lll} u_1 = \dfrac{1}{r_0}, & u_2 = 0, & u_3 = 0, \\ u_1 = 0, & u_2 = \dfrac{1}{r_0}, & u_3 = 0, \\ u_1 = 0, & u_2 = 0, & u_3 = \dfrac{1}{r_0}, \end{array}$$

et les p correspondants soient toujours nuls. Nous obtenons respectivement

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1^{L_1}(M^0) &= \int_{S\,\text{ext.}} \bar{p}_{L_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_1} d\tau, \\ X_2^{L_1}(M^0) &= 4\pi x_3^0 + \int_{S\,\text{ext.}} \bar{p}_{L_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_2} d\tau, \\ X_3^{L_1}(M^0) &= -4\pi x_2^0 + \int_{S\,\text{ext.}} \bar{p}_{L_1} \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y_3} d\tau. \end{aligned} \right.$$

En définitive, nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} X_1^{L_1}(M^0) = \dfrac{\partial \Theta^{L_1}}{\partial x_1^0}, \\ X_2^{L_1}(M^0) = 4\pi x_3^0 - \dfrac{\partial \Theta^{L_1}}{\partial x_2^0}, \\ X_3^{L_1}(M^0) = -4\pi x_2^0 - \dfrac{\partial \Theta^{L_1}}{\partial x_3^0}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(9)\quad \Theta^{L_1}(M^0) = \int_{S\,\mathrm{ext}} \bar{p}_{L_1}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right) d\tau,$$

on obtient de même des relations analogues pour les $X_j^{L_2}$ et $X_j^{L_3}$.

En résumé la détermination des composantes

$$F_l = -\int_{(S)} U_j \chi_j^{F_l}(P)\, d\sigma$$

des efforts et celles du moment résultant

$$L_l = -\int_{(S)} U_j \chi_j^{F_l}(P)\, d\sigma$$

peut être reliée à celle des densités de simples couches

$$X_j^{F_l}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_j^{F_l}(P)}{r_0}\, d\sigma = -4\pi\delta_{jl} - \frac{\partial \Theta^{F_l}}{\partial x_j^0},$$

$$X_j^{L_l}(M^0) = \int_{(S)} \frac{\chi_j^{L_l}(P)}{r_0}\, d\sigma = -4\pi\sigma_{jl}(M^0) - \frac{\partial \Theta^{L_l}}{\partial x_j^0},$$

où δ_{jl} est égal à un ou zéro suivant que $j = l$ ou $j \neq l$; les $\sigma_{jl}(M^0)$, pour $l = 1$, 2 et 3, sont respectivement :

$$0,\ -x_3^0,\ x_2^0; \qquad x_3^0,\ 0,\ -x_1^0; \qquad -x_2^0,\ x_1^0,\ 0;$$

et enfin les fonctions

$$\Theta^{F_l}(M^0) = \int_{S\,\mathrm{ext}} \bar{p}_{F_l}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right) d\tau, \qquad \Theta^{L_l}(M^0) = \int_{S\,\mathrm{ext}} \bar{p}_{L_l}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right) d\tau$$

sont harmoniques pour tout point M^0 à l'intérieur de la surface S.

CHAPITRE V.

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE FREDHOLM AUX ÉQUATIONS DE STOKES. RELATION AVEC LES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

Au Chapitre II nous avons posé le problème fondamental : *Détermination des fonctions* u_k *et* p, *vérifiant les équations de Stokes, régulières à l'extérieur d'un obstacle* S, *nulles à l'infini et les* u_k *prenant à la surface* S *des valeurs assignées* $-U_k$ (*valeurs définies par un courant primitif, régulières à l'intérieur de* S).

Nous avons indiqué une méthode de résolution dans le cas où S est une sphère.

Pour résoudre le même problème en général, on peut employer la méthode de Fredholm (1). A la fin d'un Mémoire consacré à l'application de la méthode en question aux équations linéarisées d'Oseen, M. Faxén revient sur le cas des équations de Stokes (2) pour le calcul des efforts. Il aboutit à des formules du même type que celles de M. Pérès tirées de l'application du principe de réciprocité :

$$F_l = -\int_{(S)} U_j \chi_j^{F_l}\, d\sigma, \tag{1}$$

$$L_l = -\int_{(S)} U_j \chi_j^{L_l}\, d\sigma; \tag{2}$$

(1) Cette méthode se déduit immédiatement du cas des équations de l'élasticité, cas envisagé par Fredholm lui-même (*Arkiv f. math. Astr. of Fysik*, t. 2, nº 28, 1906). Elle a été faite par Odqvist : *Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssgkeiten; Dissertation*, Stockholm, 1928.

(2) *Fredholmsche Integralgleichungen zu der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten.*

les coefficients des U_j étant certaines solutions fondamentales des équations intégrales obtenues.

Le rapprochement des deux points de vue est intéressant et nous le ferons pour terminer, après avoir rappelé comment le problème fondamental se ramène à des équations intégrales.

1. **Définition et propriétés des simples et doubles couches hydrodynamiques.** — Nous introduisons, conformément aux notations de Faxén [1], les simples couches hydrodynamiques

$$(3)\qquad \begin{cases} V_j(M) = 2\displaystyle\int_{(S)} t_{jk}(M, P)\psi_k(P)\,d\sigma_P, \\ p_\nu(M) = 2\displaystyle\int_{(S)} p_k(M, P)\psi_k(P)\,d\sigma_P, \end{cases}$$

et les doubles couches hydrodynamiques

$$(4)\qquad \begin{cases} W_j(M) = 2\displaystyle\int_{(S)} \left[\left(\frac{\partial t_{jk}}{\partial y_l} + \frac{\partial t_{jl}}{\partial y_k}\right) n_l + p_j n_k\right] \varphi_k(P)\,d\sigma_P, \\ p_w(M) = 4\displaystyle\int_{(S)} \frac{dp_k(M, P)}{dn}\,\varphi_k(P)\,d\sigma_P. \end{cases}$$

où les fonctions ψ_k et φ_k, *a priori* arbitraires, représentent les densités. Les intégrales sont prises sur une surface S fermée ou non, dont P, de coordonnée y_j, est un point quelconque. Les n_j sont les cosinus directeurs de la normale orientée à S au point P où l'on calcule l'élément d'aire $d\sigma_P$. Enfin, les t_{jk} et p_j sont les solutions fondamentales des équations de Stokes, données par les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} t_{jk} = \dfrac{1}{8\pi}\left[\dfrac{\delta_{jk}}{r} + \dfrac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^3}\right], \\ p_j = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_j}, \end{cases}$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 10 et 19.

avec

$$r^2 = (x_j - y_j)^2,$$

les x_j sont les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace.

Ces formules définissent donc les fonctions V_j, p_v, W_j et p_w du point M, certainement régulières, tant que M n'appartient pas à la surface S, satisfaisant évidemment en dehors de S aux équations de Stokes et devenant nulles à l'infini.

Désignons par les indices i et e leurs valeurs ou celles de leurs dérivées prises d'un côté ou l'autre de la surface S dont la normale positive est supposée orientée dans le sens (e, i).

A partir des formules analogues pour le potentiel newtonien on vérifie facilement que, pour la double couche hydrodynamique, on a des discontinuités définies par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} W_j^i(M') - W_j^e(M') = 2\varphi_j(M'), \\ W_j^i(M') + W_j^e(M') = 2\displaystyle\int_{(S)} K_{jk}(M', P)\varphi_k(P)\, d\sigma_P, \end{cases}$$

où l'on pose

$$(7)\qquad K_{jk}(M', P) = 2\left[\left(\frac{\partial t_{jk}}{\partial y_l} + \frac{\partial t_{jl}}{\partial y_k}\right)n_l + p_j n_k\right]$$

$$= \frac{3}{2\pi}\,\frac{(x'_j - y_j)(x'_k - y_k)}{r^2}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn},$$

le second membre étant calculé au point M′ de S.

La simple couche est continue à la traversée de la surface S, mais posant comme précédemment

$$(8)\qquad D_\nu V_j = \nu_l\left(\frac{\partial V_j}{\partial x'_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x'_j}\right) - p_v \nu_j,$$

les ν_j étant les cosinus directeurs de la normale, au point M′, de coordonnées x'_j, de la surface S, orientée, comme $\vec{n}$, dans le sens (e, i), on vérifie que

$$(9)\qquad \begin{cases} (D_\nu V_j)^e - (D_\nu V_j)^i = 2\psi_j(M'), \\ (D_\nu V_j)^e + (D_\nu V_j)^i = 2\displaystyle\int_{(S)} K_{kj}(P, M')\,\psi_k(P)\,d\sigma_P \end{cases}$$

avec

$$(10)\qquad K_{kj}(P, M') = 2\left[\left(\frac{\partial t_{jk}}{\partial x'_l} + \frac{\partial t_{jl}}{\partial x'_k}\right)\nu_l - p_j\nu_k\right]$$

$$= \frac{3}{2\pi}\,\frac{(x'_j - y_j)(x'_k - y_k)}{r^2}\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}.$$

Dans la suite, nous supposons que S est une surface fermée régulière, i et e désignant l'intérieur et l'extérieur de cette surface.

Les équations (9) et (6) entraînent

$$(11)\qquad \psi_j(M') + \lambda\int_{(S)} K_{kj}(P, M')\psi_k(P)\,d\sigma_P = f_j,$$

$$(12)\qquad \varphi_j(M') + \lambda\int_{(S)} K_{jk}(M', P)\varphi_k(P) = g_j,$$

où l'on pose

$$(13)\qquad f_j = \frac{1+\lambda}{2}(D_\nu V_j)^e + \frac{\lambda-1}{2}(D_\nu V_j)^i,$$

$$(14)\qquad g_j = \frac{1+\lambda}{2}(W_j)^i + \frac{\lambda-1}{2}(W_j)^e.$$

Les équations (11) et (12) sont des systèmes d'équations intégrales de Fredholm associées par rapport aux inconnues respectives ψ_j et φ_j; leur résolution fera connaître, éventuellement, les simples et doubles couches (3) et (4) satisfaisant sur S à des données aux limites (13) et (14).

2. **Résultats sur les valeurs fondamentales de** λ. — On sait que cette étude peut se faire soit sur le système (11), soit sur le système associé (12).

Une valeur de λ est fondamentale quand l'un ou l'autre de ces systèmes, rendu homogène en supprimant les f_j ou g_j au second membre a, pour cette valeur de λ, des solutions non identiquement nulles. Les deux systèmes ont d'ailleurs le même nombre de solutions fondamentales indépendantes.

Nous examinerons d'abord la question préliminaire suivante : peut-il arriver qu'une simple couche (3) donne des fonctions $V_j(M)$ identiquement nulles dans tout l'espace, pour des valeurs non identiquement nulles des densités ψ_j. La pression p correspondante sera évidemment nulle à l'extérieur de S, elle sera constante à l'intérieur; soit c sa valeur.

Dans ces conditions, la première des formules (9), où l'on remarque que $(D_\nu V_j)^e$ est nul, $(D_\nu V_j)^i$ se réduisant à $-c\nu_j$, montre que, nécessairement, on a

$$\psi_j(M') = \frac{c}{2}\nu_j.$$

Inversement d'ailleurs, une simple couche ayant la densité précédente répondra à la question. D'une part,

$$p = \frac{c}{2\pi}\int_{(S)} \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma_P$$

donne zéro à l'extérieur de S et c à l'intérieur. D'autre part, on a alors

$$V_j = c\int_{(S)} t_{jk}(M, P)\, n_k\, d\sigma_P,$$

qui se transforme en une intégrale de volume identiquement nulle, puisque

$$\frac{\partial}{\partial x_k} t_{jk} \equiv 0.$$

Si donc M est extérieur à S, $V_j(M)$ est nul. Si M est intérieur à S, l'intégrale précédente peut être remplacée par l'intégrale analogue prise sur une sphère de centre M et du rayon arbitrairement petit; cela fait encore zéro, puisque les t_{jk} ne deviennent infiniment grands que d'ordre $\frac{1}{r}$.

C'est donc dans le seul cas de densités

$$\psi_j(M') = \frac{c}{2}\nu_j. \tag{15}$$

que l'on peut avoir des $V_j(M)$ identiquement nulles, avec, d'ailleurs, de part et d'autre de S,

$$\begin{cases} (D_\nu V_j)^e = 0, \\ (D_\nu V_j)^i = -c\nu_j. \end{cases} \tag{16}$$

Abordons maintenant l'étude des valeurs fondamentales de λ; pour une telle valeur, l'équation (11) *sans second membre*, doit avoir des solutions ψ_j non nulles définissant des fonctions $V_j(P)$ et p_ν.

Vérifiant évidemment

$$2f_j \equiv (D_\nu V_j)^e(\lambda+1) + (D_\nu V_j)^i(\lambda-1) = 0. \tag{17}$$

Multiplions cette équation par V_j et intégrons sur la surface S. Nous aurons

$$(\lambda+1)\int_{(S)} V_j(D_\nu V_j)^e d\sigma + (\lambda-1)\int_{(S)} V_j(D_\nu V_j)^i d\sigma = 0. \tag{18}$$

Or, puisque les V_j vérifient les équations de Stokes, la transformation des intégrales de surface en intégrales de volume nous donne

$$\int_{(S)} V_j(D_\nu V_j)^e d\sigma = \frac{1}{2}\int_{S\,\text{ext}} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right)^2 d\tau,$$

$$\int_{(S)} V_j(D_\nu V_j)^i d\sigma = -\frac{1}{2}\int_{S\,\text{int}} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right)^2 d\tau.$$

D'où la relation (18) devient

$$(\lambda+1)\int_{S\,\text{ext}} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right)^2 d\tau + (1-\lambda)\int_{S\,\text{int}} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right)^2 d\tau = 0. \tag{18'}$$

Si le produit

$$(1+\lambda)(1-\lambda)$$

est positif, c'est-à-dire si

$$-1 < \lambda < +1$$

les intégrales doivent disparaître identiquement et l'on a nécessairement

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \equiv 0$$

identiquement en j et k dans tout l'espace. Donc V_1, par exemple, ne dépend que de x_2 et x_3; de même V_2 ne dépend que de x_3 et x_1; et enfin V_3 ne dépend que de x_1 et x_2.

D'où

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Alors V_1 dépend au premier degré de x_2 et x_3. Nous obtenons, par suite,

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_1 &= C_4 + C_2 x_3 - C_3 x_2, \\ V_2 &= C_5 + C_3 x_1 - C_1 x_3, \\ V_3 &= C_6 + C_1 x_2 - C_2 x_1. \end{aligned} \right.$$

De telles relations sont impossibles avec des valeurs non nulles des constantes C, puisque les V_j doivent s'annuler à l'infini.

D'autre part, toujours pour

$$-1 < \lambda < +1,$$

il est impossible que l'on se trouve dans le cas où les ψ_j non toutes nulles donnent des V_j identiquement nulles, puisque les conditions correspondantes (16) sont en contradiction avec (17). Nous pouvons donc conclure que les équations de Fredholm envisagées n'ont pas de valeurs fondamentales λ comprises entre -1 et $+1$.

Au contraire, $\lambda = +1$ et $\lambda = -1$ sont des valeurs fondamentales.

Pour la première, il est clair que l'on pourra prendre, pour solution fondamentale de l'équation homogène (11),

$$\psi_j(M') = \frac{c}{2} \nu_j,$$

puisque les conditions correspondantes (16) entraînent bien (17) pour $\lambda = 1$.

La solution fondamentale ainsi mise en évidence est d'ailleurs la seule. On s'en rend compte en reprenant le raisonnement précédent, (18'), écrit pour $\lambda = 1$, entraîne

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \equiv 0.$$

Mais uniquement à l'extérieur de l'obstacle. Il s'ensuit, pour les $V_j(M)$ la forme (19) dans la région en question, les constantes C doivent être identiquement nulles. Les $V_j(M)$ sont identiquement nuls à l'extérieur de S. Comme ils sont continus à la traversée de S, ils sont définis à l'intérieur par des valeurs nulles à entrée frontière. Donc, identiquement nuls (*cf.* théorème d'unicité). Les densités correspondantes sont donc (n° 2) forcément proportionnelles aux ν_j.

3. **La valeur fondamentale** $\lambda = -1$. — En reprenant toujours le même mode de raisonnement, il apparaît immédiatement que des solutions ψ_j des équations (11), homogènes (avec $\lambda = -1$) donneront une simple couche vérifiant

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \equiv 0,$$

mais, cette fois, à l'intérieur de S. Il en résulte, pour les valeurs de $V_j(M)$, les formules précédentes

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_1 &= C_4 + C_2 x_3 - C_3 x_2, \\ V_2 &= C_5 + C_3 x_1 - C_1 x_3, \\ V_3 &= C_6 + C_1 x_2 - C_2 x_1, \end{aligned} \right.$$

avec six constantes arbitraires. Cela ne nous permet pas encore d'affirmer que $\lambda = -1$ est valeur fondamentale, puisque nous ne savons pas encore si l'on peut trouver des densités ψ_j de simples couches prenant dans S les valeurs (19).

Mais nous pouvons de même conclure que, si $\lambda = -1$ est une valeur fondamentale, la solution de l'équation homogène correspondante dépendra, tout au plus, de six constantes arbitraires.

Pour que ce résultat apparaisse entièrement justifié, il est utile de préciser que les densités d'une simple couche, solutions de (11) homogène, sont bien déterminées par les valeurs des V_j à l'intérieur de S. Si, en effet, deux systèmes différents, de densités donnaient les mêmes valeurs des V_j à l'intérieur, leurs différences donneront des V_j nuls identiquement dans tout l'espace. Ce qui ne peut avoir lieu (nº 2) que pour les valeurs

$$\frac{c}{2}\nu_j$$

de ces différences, avec

$$(D_\nu V_j)^i = -c\nu_j,$$

mais les premiers membres doivent être nuls, de sorte que c est forcément nul.

Nous établirons que $\lambda = -1$ est bien valeur fondamentale, avec exactement les six constantes arbitraires dans les fonctions fondamentales correspondantes, en portant notre attention sur l'équation homogène déduite de (12), inconnues φ_j.

Nous démontrerons, en effet que cette équation, qui s'écrit

$$(20) \qquad \varphi_j(M') - \int_{(S)} K_{jk}(P, M')\varphi_k(P)\, d\sigma_P = 0,$$

pour $\lambda = -1$ a six solutions linéaires distinctes. M. Faxén indique [1] qu'on pourra prendre précisément

$$\varphi_j(P) = \sigma_j(P),$$

où les $\sigma_j(P)$ représentent l'un des six systèmes de valeurs

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 1,\ 0,\ 0;\quad 0,\ 1,\ 0;\quad 0,\ 0,\ 1; \\ 0,\ -y_3,\ y_2,\ y_3,\ 0,\ -y_1;\quad -y_2,\ y_1,\ 0. \end{array} \right.$$

[1] *Loc. cit.*, p. 23.

Nous allons retrouver ces solutions en remarquant que l'équation (20) est obtenue en supposant

$$g_j = \frac{1+\lambda}{2}(W_j)^i + \frac{\lambda - 1}{2}(W_j)^e = 0,$$

qui, pour $\lambda = -1$ se réduit à

$$(W_j)^e = 0.$$

Or, pour le point M à l'infini, les W_j sont nulles. Nous avons donc à chercher des valeurs de φ_j qui rendent les W_j nulles pour tout point M à l'extérieur de la surface S et, d'après (20), égales aux $\varphi_j(M')$ quand le point M est au point M′ de la surface.

Mais les fonctions

$$W_j(M) = 2\int_{(S)} \left[\left(\frac{\partial t_{jk}}{\partial y_l} + \frac{\partial t_{jl}}{\partial y_k} \right) n_l + p_j n_k \right] \varphi_k(P)\, d\sigma_P$$

s'écriront encore, en remplaçant les t_{jk}, p_j par leurs valeurs

$$(22) \qquad W_j(M) = \frac{3}{2\pi}\int_{(S)} \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^2} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \varphi_k(P)\, d\sigma_P.$$

Puisque nous ne recherchons que des solutions particulières, nous pouvons toujours admettre que les $\varphi_k(P)$ sont définies non seulement sur S, mais à l'intérieur et à l'extérieur, avec des dérivées partielles régulières. L'intégrale au second membre calculée, pour un point M extérieur à S, sera nulle si

$$\frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)(x_l - y_l)}{r^5} \varphi_k(P) \right] \equiv 0$$

ou

$$\frac{(x_k - y_k)(x_l - y_l)}{r^5} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l} \equiv 0$$

identiquement en k et l.

D'où l'on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_3} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_3} = 0.$$

Or, nous avons vu, au n° 2 du présent chapitre, que ces équations admettent bien comme solutions particulières

$$\varphi_j = \sigma_j.$$

Dans ces conditions, l'intégrale au second membre de l'équation (22) est indépendante du contour d'intégration et elle est bien nulle pour tout point M à l'extérieur. Pour le point M′ sur la surface S, nous obtenons

$$W_j(M') = \varphi_k(M')\,\delta_{jk} = \varphi_j(M').$$

La vérification est ainsi complète.

On peut affirmer, dès lors, l'existence de six simples couches, de densités respectives

$$\psi_j^{(m)} \qquad (m = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

solutions de l'équation homogène (11) et donnant, pour les V_j correspondantes à l'intérieur de S, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
m &= 1, & V_j^{(1)}(P) &\equiv (1, 0, 0),\\
m &= 2, & V_j^{(2)}(P) &\equiv (0, 1, 0),\\
m &= 3, & V_j^{(3)}(P) &\equiv (0, 0, 1),\\
m &= 4, & V_j^{(4)}(P) &\equiv (0, -y_3, y_2),\\
m &= 5, & V_j^{(5)}(P) &\equiv (y_3, 0, -y_1),\\
m &= 6, & V_j^{(6)}(P) &\equiv (-y_2, y_1, 0).
\end{aligned}$$

Chacune de ces simples couches étant d'ailleurs bien déterminées comme on le verra en reprenant des raisonnements déjà faits (l'indétermination ne pourrait concerner que les densités proportionnelles aux n_j qui ne vérifient pas les équations homogènes pour $\lambda = -1$).

4. **Retour aux formules concernant les efforts.** — Il est maintenant facile de revenir au calcul des efforts et de montrer comment s'introduisent dans le calcul les densités précédentes $\psi_j^{(m)}$. Prenons par exemple $\psi_j^{(1)}$ qui donne des $V_j^{(1)}(M)$ égaux à (1, 0, 0) à l'intérieur de S, donc sur S et qui s'identifient par suite nécessairement à l'extérieur de S avec les composantes de l'écoulement $\varphi_j^{F_1}$.

Or, la première des relations (9), appliquée en notant que

$$(D_\nu V_j^{(1)})^i = 0,$$

$$(D_\nu V_j^{(1)})^e = (D_\nu \varphi_j^{F_1})^e = -\chi_j^{F_1}$$

(le signe — tenant compte de ce que, dans ce chapitre, la normale à S est orientée vers l'intérieur), donnera

$$\chi_j^{F_1} = -2\psi_j^{(1)}$$

et, de même,

$$(23) \qquad \begin{cases} \chi_j^{F_l} = -2\psi_j^{(l)} & (l = 1, 2, 3), \\ \chi_j^{L_l} = -2\psi_j^{(3+l)} & (l = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Les coefficients des U_j, *dans les formules de M. Pérès donnant les efforts, apparaissent donc bien comme solutions fondamentales des équations intégrales* (11). C'est le fait fondamental indiqué au début du présent chapitre.

5. **Remarque concernant les fonctions Θ.** — Nous avons obtenu, au Chapitre IV, les formules

$$(24) \qquad \int_{(S)} \frac{\chi_j(P)}{r_0}\, d\sigma_P = -4\pi\sigma_j(M^0) - \frac{\partial\Theta}{\partial x_j^0},$$

où

$$\Theta(\mathrm{M}^0) = \int_{\mathrm{S\ ext.}} \bar{p}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right) d\tau, \tag{25}$$

formules concernant chacune des fonctions $\chi_j^{\mathrm{F}_l}$, $\chi_j^{\mathrm{L}_l}$ avec les valeurs correspondantes des σ_j et de $\bar{p}$.

Or, nous venons de prouver que

$$\chi_j(\mathrm{P}) = -2\psi_j(\mathrm{P}).$$

Donc la formule (24) devient

$$2\int_{(\mathrm{S})} \psi_j(\mathrm{P}) \frac{d\sigma_{\mathrm{P}}}{r_0} = 4\pi\sigma_j(\mathrm{M}^0) + \frac{\partial\Theta}{\partial x_j^0}. \tag{24'}$$

Mais on a

$$\sigma_j(\mathrm{M}^0) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\mathrm{S})} \left[\frac{\delta_{jk}}{r_0} + \frac{(x_j^0 - y_j)(x_k^0 - y_k)}{r_0^3}\right] \psi_k(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}.$$

D'où (24′) nous donnera

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x_j^0} = \int_{(\mathrm{S})} \left[\frac{\delta_{jk}}{r_0} - \frac{(x_j^0 - y_j)(x_k^0 - y_k)}{r_0^3}\right] \psi_k(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}},$$

c'est-à-dire

$$\Theta(\mathrm{M}^0) = \int_{(\mathrm{S})} \frac{x_k^0 - y_k}{r_0} \psi_k(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}. \tag{25'}$$

Sous cette forme il n'apparaît pas comme évident que Θ soit une fonction harmonique pour tout point M^0 à l'intérieur de la surface S. Mais en calculant $\Delta\Theta$, nous trouvons

$$\Delta\Theta = -2\int_{(\mathrm{S})} \frac{x_k^0 - y_k}{r_0^3} \psi_k(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}.$$

Or, le second membre est égal à $-4\pi p_j$.

Donc on aura

$$\Delta\Theta = -4\pi p_v.$$

Mais p_v est nulle à l'intérieur de la surface S. Par conséquent, la fonction Θ, représentée sous deux formes différentes (25) et (25'), est bien harmonique pour tout point M^0 à l'intérieur de la surface S.

Vu et approuvé :

Paris, le 11 juin 1938.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 11 juin 1938.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.

BIBLIOGRAPHIE.

AMOROSO, *Integrazione delle equazioni del moto lento di un fluido viscoso* (*Atti. R. Accad. del Lincei*, t. 21, 2ᵉ semestre, 1912, p. 501-580).

BOUSSINESQ, *Théorie de la chaleur*, t. II.

BOGGIO, *Sul moto stazionario lento di una sfera in un fluido viscoso* (*Rendi. del circolo matematico di Palermo*, t. 30, 1910).

EDWARDES, *Motion of a viscosis liquid in which an ellipsoïde is constrained to rotate about a principal axes* (*Quart. Journ. of mat.*, t. 26, 1893).

FAXÈN, *Fredholmsche Integralgleichungen zu der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten* (*Arkiv. för mat. Astr. och Fysik*, 23 janvier 1929).

FREDHOLM, *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* (*Arkiv. för mat. Astr. of Fysik*, t. 2, nº 28, 1906).

GAY, *Mouvement lent varié d'un solide en liquide visqueux* (*Thèse*, 1930).

LAMB, *Hydrodynamics*.

OBERBECK, *über stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung* (*Journ. de Crelle*, t. 81, 1876).

ODQVIST, *Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten* (*Dissertation*, Stockholm, 1928).

OSEEN, *Hydrodynamik* (*Ak. Verlagsges*, Leipzig, 1927).

PÉRÈS, *Action d'un fluide visqueux sur un obstacle*; *cas de l'ellipsoïde*; *démonstration de formules de Faxèn* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 310 et 440).

THÉODORESCO, *Sur l'emploi de conditions globales en mécanique* (*Annali di Matematico*, serie 4, t. 11, 1932).

VILLAT, *Leçons sur l'Hydrodynamique* (Gauthier-Villars, édit., Paris).

ZORETTI, *L'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux. Sur la translation uniforme d'un corps de révolution* (*Bull. de la Société math. de France*, t. 28, 1910).

TABLE DES MATIÈRES.

IIe PARTIE.

Évaluation des efforts exercés par le fluide sur une sphère.