

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

HENRI ROURE

**Recherches sur le calcul des perturbations générales des petites planètes**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1939

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1939\\_\\_223\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__223__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SÉRIE A, N° 1880

N° d'ORDRE.

2747

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**Henri ROURE**

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — RECHERCHES SUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS GÉNÉRALES DES  
PETITES PLANÈTES

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Soutenues le

devant la Commission d'Examen

---

MM. ESCLANGON, *President*

CHAZY }  
LAMBERT } *Examineurs*

---

MARSEILLE

IMPRIMERIE NOUVELLE (ASSOCIATION OUVRIÈRE)

118-120, rue Sainte

1939

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

*Doyen honoraire*..... M. MOLLIARD.

*Doyen* ..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

*Professeurs honoraires*

H. LEBESGUE.	BLAISE.	G. BERTRAND.
Emile PICARD.	DANGEARD.	ABRAHAM.
Léon BRILLOUIN.	LESPIAU.	Ch. FABRY.
GUILLET.	MARCHIS.	Léon BERTRAND.
PÉCHARD.	VESSIOT.	WINTREBERT.
FREUNDLER.	PORTIER.	DUBOSQ.
AUGER.	MOLLIARD.	BOHN.
	LAPICQUE.	RABAUD.

## PROFESSEURS :

M. CAULLERY.....	<b>T</b> Zoologie (Evolution des êtres organisés).	FOCH .....	Mécanique expérimentale des fluides.
Emile BOREL.....	<b>T</b> Calcul des probabilités et Physique mathématique.	FAUTHENIER .....	Physique (P. C. B.).
Jean PERRIN.....	<b>T</b> Chimie physique.	De BROGLIE.....	<b>T</b> Théories physiques.
E. CARTAN.....	<b>T</b> Géométrie supérieure.	CHRÉTIEN .....	Optique appliquée.
A. COTTON.....	<b>T</b> Recherches physiques.	P. JOB.....	Chimie générale.
J. DRACH.....	<b>T</b> Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LABROUSTE .....	Physique du Globe.
Charles PÉREZ.....	<b>T</b> Zoologie.	FRENANT .....	<b>T</b> Anatomie et Histologie comparées.
M. GUICHARD.....	<b>T</b> Analyse et mesures chimiques.	VILLEY .....	Mécanique physique et expérimentale.
Paul MONTEL.....	<b>T</b> Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	COMBES .....	<b>T</b> Physiologie végétale.
L. BLARINGHEM.....	<b>T</b> Botanique.	GARNIER .....	<b>T</b> Mathématiques générales.
G. JULIA.....	<b>T</b> Mécanisme analytique et Mécanique céleste.	PÉRÈS .....	Mécanique théorique des fluides
C. MAUGUIN.....	<b>T</b> Minéralogie.	HACKSPIEL .....	<b>T</b> Chimie minérale.
A. MICHEL-LÉVY....	<b>T</b> Pétrographie.	LAUGIER .....	<b>T</b> Physiologie générale.
A. DENJOY.....	<b>T</b> Application de l'analyse à la Géométrie.	TOUSSAINT .....	Technique Aéronautique.
L. LUTAUD.....	<b>T</b> Géographie physique et géologie dynamique.	M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).
Eugène BLOCH.....	<b>T</b> Physique.	G. RIBAUD.....	<b>T</b> Hautes températures.
G. BRUHAT.....	<b>T</b> Physique théorique et physique céleste.	CHAZY .....	<b>T</b> Mécanique rationnelle.
E. DARMOIS.....	<b>T</b> Enseignement de Physique.	GAULT .....	Chimie (P. C. B.).
A. DEBIERNE.....	<b>T</b> Physique Générale et Radioactivité.	CROZE .....	Recherches physiques.
A. DUFOUR.....	<b>T</b> Physique (P. C. B.).	DUPONT .....	<b>T</b> Théories chimiques.
L. DUNOYER.....	Optique appliquée.	LANQUINE .....	<b>T</b> Géologie structurale et Géologie appliquée.
A. GUILLIERMOND...	<b>T</b> Botanique.	VALTRON .....	Mathématiques générales.
M. JAVILLIER.....	<b>T</b> Chimie biologique.	BARRABE .....	Géologie structurale et Géologie appliquée.
ROBERT-LÉVY .....	<b>T</b> Physiologie comparée.	MILLOT .....	Biologie animale (P. C. B.).
F. PICARD.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).	F. PERRIN.....	Théories physiques.
Henri VILLAT.....	<b>T</b> Mécanisme des fluides et applications.	VAVON .....	Chimie organique.
Ch. JACOB.....	<b>T</b> Géologie.	C. DARMOIS.....	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
P. PASCAL.....	<b>T</b> Chimie générale.	CHATTON .....	<b>T</b> Biologie maritime.
M. FRÉCHET.....	<b>T</b> Calcul différentiel et Calcul intégral.	AUBEL .....	Chimie biologique.
E. ESCLANGON.....	<b>T</b> Astronomie.	Jacques BURCART...	Géographie physique et Géologie dynamique.
M <sup>me</sup> RAMART-LUCAS..	<b>T</b> Chimie organique.	M <sup>me</sup> JOLIOT-CURIE...	Physique générale et Radioactivité.
H. BÉGHIN.....	<b>T</b> Mécanique physique et expérimentale.	PIANTEFOL .....	Biologie végétale (P. C. B.).
		CABANNES .....	Enseignement de Physique.
		GRASSÉ .....	Biologie animale (P. C. B.).
		FRÉVOST .....	Chimie (P. C. B.).
		BOULIGAND .....	Mathématiques.

*Secrétaire* ..... A. PACAUD.

*Secrétaire honoraire*..... D. TOMBECK.

A LA MÉMOIRE DE MES PARENTS

**A MONSIEUR JEAN BOSLER**

Directeur de l'Observatoire de Marseille  
Correspondant de l'Institut  
et du Bureau des Longitudes

*Hommage respectueux et reconnaissant.*



# PREMIÈRE THÈSE

---

## Recherches sur le calcul des perturbations générales des petites Planètes

---

### AVANT - PROPOS

---

1. — Dès la découverte des premiers astéroïdes, le problème du calcul de leurs trajectoires s'est posé.

On ne connaissait alors que la méthode de calcul utilisée par Laplace pour les grosses planètes, méthode qui permettait de former des tables du mouvement de chaque astéroïde. Malheureusement, les calculs étaient longs et onéreux car il fallait, pour chaque cas particulier, calculer le développement en série de la fonction perturbatrice, travail fort long.

Cela n'avait pas une importance très grande tant que le nombre des astéroïdes découverts était restreint ; mais, à partir du moment où leur recherche systématique fut entreprise et que les découvertes se multiplièrent, il devint impossible de faire de chacun d'eux une théorie complète. Il était néanmoins nécessaire de calculer des éphémérides de recherche pour les retrouver aux oppositions suivantes, et ce résultat fut obtenu en utilisant la méthode remarquable que Gauss avait imaginé pour le calcul d'une orbite elliptique au moyen de trois observations complètes, ou de quatre observations pour le cas où l'orbite est presque confondue avec le plan de l'Ecliptique. A vrai dire, Laplace avait, lui aussi, donné une méthode pour le même objet, méthode qui permet l'emploi d'un nombre quelconque d'observations, mais elle est restée longtemps dans l'oubli et c'est la méthode de Gauss qui a été utilisée plus souvent.

On pouvait alors calculer rapidement une orbite approchée et former ainsi des éphémérides de recherche pour retrouver les astéroïdes aux oppositions suivantes. Malheureusement, on s'est aperçu bientôt de l'insuffisance du procédé car, après un nombre d'oppositions souvent très restreint, les différences O-C devenaient trop fortes et il fallait songer à corriger les éléments elliptiques trouvés. Cette correction ne pouvait s'opérer qu'après le calcul des perturbations causées par l'attraction des planètes principales, en particulier de Jupiter. On retombait donc sur la difficulté initiale.

2. — Plusieurs chercheurs parmi lesquels nous pouvons citer : Gauss, Encke, Hansen, Tietjen, Oppolzer, Louis Fabry, M. Renaux et nous-mêmes, ont proposé alors des méthodes différentielles de correction portant, les unes sur les éléments elliptiques eux-mêmes ; d'autres sur les coordonnées rectangulaires de l'astéroïde ; ou enfin, pour une troisième catégorie, sur des éléments judicieusement choisis de manière à simplifier le plus possible les calculs nécessaires à la correction.

Un progres serieux avait été réalisé, mais ces méthodes permettaient seulement d'obtenir des éléments représentant les observations pendant un nombre d'oppositions assez grand et il n'était pas possible de prévoir a longue échéance

3 — Avec l'espoir de résoudre le problème définitivement, Hansen publia une méthode dérivée de celle qu'il avait appliquée a la théorie de la Lune avec succès. Son principe reposait toujours sur le développement des inégalités suivant les puissances des masses, mais il réduisait le nombre des éléments dont il fallait calculer les perturbations a trois, d'où progres sur la méthode de Laplace. Malheureusement, cet avantage est compensé en partie par la longueur et la complication des calculs numériques,

Leverrier, lui aussi, s'était occupé de la question et les formules qu'il avait publiées dans les Annales de l'Observatoire de Paris en vue de la théorie des grosses planètes, pouvaient s'appliquer aux astéroïdes d'inclinaison faible. Il avait prévu le cas des inclinaisons fortes, et avait indiqué comment devait s'opérer alors le développement de la fonction perturbatrice. Il avait ensuite imaginé une méthode numérique pour le calcul séparé des grandes inégalités périodiques, méthode appliquée par lui a Pallas et c'est au sujet de ce mémoire que Cauchy inventa la méthode remarquable qui porte son nom.

Plus tard, et toujours pour rendre possible l'application des formules de Leverrier, Lisseiand, reprenant les indications données au tome I des Annales de l'Observatoire, a effectué complètement le développement de la fonction perturbatrice dans le cas de fortes inclinaisons et a étudié le cas de Pallas troublée par Jupiter.

Gylden est entré en lice, lui aussi, et a proposé une méthode très originale qui peut s'appliquer tout aussi bien aux grosses planètes. Alors que jusqu'à ce moment, tous les auteurs avaient pris le temps comme variable indépendante, Gylden prit la longitude vraie comme avait fait Laplace dans sa théorie de la Lune, et il chercha les développements en séries d'éléments judicieusement choisis et du temps en fonction de la longitude vraie. De plus, il chercha a tenir compte dès la première approximation des perturbations séculaires et des inégalités a très longue période de manière a obtenir des orbites utilisables pendant très longtemps sans correction. Sa méthode permet d'obtenir des développements d'où les termes séculaires sont exclus.

Malheureusement, si les développements de Laplace, Leverrier, et Hansen étaient convergents, il n'en était pas de même pour ceux de Gylden car Henri Poincaré a démontré que ces séries ne sont pas absolument convergentes.

Quoiqu'il en soit, théoriquement, le problème posé au début de la découverte des astéroïdes était résolu, mais pratiquement le nombre toujours croissant d'astres découverts chaque année empêchait d'aborder même pour un petit nombre d'entre eux une étude complète et l'établissement de tables (Leveau, qui a fait la théorie de Vesta par la méthode de Hansen, n'a pas mis moins de vingt ans pour la terminer).

4 — C'est alors que M. Karl Bohlín eut l'idée de traiter les astéroïdes par groupes. Son idée est la suivante: si nous appelons  $\mu$  le rapport des moyens mouvements de la planète troublante et de l'astéroïde, et que nous désignons par  $\mu_0$  un nombre rationnel voisin de  $\mu$ , nous pouvons poser

$$\mu = \mu_0 (1 - w)$$

$w$  étant une petite quantité. Si maintenant, nous introduisons cette valeur de  $\mu$  dans les formules, nous pourrions développer les inégalités par rapport aux puissances de  $w$ , les coefficients de celles-ci étant des fonctions de  $\mu_0$  seul, par conséquent de nombres absolus. Le problème sera donc ramené, pour tous les astéroïdes pour lesquels le nombre  $\mu_0$  pourra être utilisé, a l'étude d'une planète idéale correspondant a  $\mu_0$ . Les calculs fondamentaux ne devront donc être effectués qu'une fois pour tout un groupe d'astéroïdes, et, pour chacun d'eux en particulier, les perturbations générales s'obtiendront par l'adjonction de termes complémentaires ayant pour facteurs les différentes puissances de  $w$ .

M. Bohlín a utilisé les formules de Hansen, mais il a effectué le développement de la fonction perturbatrice en suivant les idées de Gylden.

On voit facilement que, pour appliquer sa méthode, il faut dresser des tables pour chaque nombre  $\mu_0$  utilisé, tables qui donneront les valeurs numériques des coefficients pour la fonction perturbatrice et ses dérivées. Une fois ces tables dressées, pour chaque astéroïde rentrant dans le groupe étudié, le tableau des perturbations générales s'obtiendra avec des calculs réduits au minimum.

Cette méthode réalise un progrès très sérieux et des tables ont été dressées pour plusieurs groupes d'astéroïdes.

5. — Nous nous sommes occupé nous mêmes de ce problème et, comme conséquence de nos recherches sur le mouvement de Pluton, nous avons été amené à penser que l'idée fondamentale de Bohlin pour l'étude des astéroïdes par groupes pourrait être appliquée à la méthode employée par nous pour Pluton, méthode qui est une adaptation de celle que Hill et Brown ont utilisée pour édifier la théorie de la Lune.

L'idée directrice de nos recherches était qu'il importait de simplifier autant que faire se peut le calcul des éphémérides des petites planètes et que pour cela, la méthode de Hill-Brown devait conduire à un résultat intéressant puisqu'elle permet d'obtenir les coordonnées rectangulaires ou polaires de l'astre étudié sans être obligé de calculer tout d'abord les perturbations des éléments. Connaissant pour chaque astéroïde l'expression générale de ses coordonnées perturbées, il est ensuite aisé de calculer une éphéméride en donnant au temps des valeurs équidistantes, et le seul problème à résoudre est alors la détermination des constantes d'intégration qui correspondent à cet astéroïde, détermination qui se fera au moyen des observations qu'on possède déjà.

Nous avons ainsi été conduit à reprendre la méthode de Hill-Brown et à l'adapter à l'étude du mouvement d'un astéroïde. Nous avons fait cette exposition en deux temps.

Nous nous sommes inspiré, pour la première partie, du mémoire de Hill : "Researches on the Lunar Theory," (*Amer. Jour. Mat.* Vol. I) et aussi des mémoires de Brown : "Theory of the Motion of the Moon", publiés dans les "Memoirs of the Royal Astronomical Society. Vol. IV". Nous avons aussi utilisé l'idée exprimée par Poincaré dans ses leçons de Mécanique Céleste, Théorie de la Lune, page 32, d'après laquelle les coefficients des séries qui représentent la solution périodique sont solutions d'un système d'équations différentielles linéaires du second ordre à une variable indépendante et deux fonctions inconnues. La méthode des coefficients indéterminés nous a ensuite permis de réduire le problème à la résolution d'un système d'équations algébriques du premier degré à deux inconnues pour chaque groupe de coefficients, les seconds membres dans chaque système d'équations, dépendant des coefficients déjà calculés.

Pour la seconde partie de l'exposition, nous nous sommes inspiré des mémoires de Brown et aussi des mémoires d'Andoyer sur la théorie de la Lune (*Mémoires de l'Institut*, Tome 58, 1<sup>er</sup> Mémoire, page 4, 2<sup>e</sup> Mémoire, page 3) mémoires auxquels nous avons emprunté les notations principales.

Nous avons ensuite étudié la convergence des séries qui représentent la solution périodique trouvée

Il fallait introduire maintenant la conception fondamentale de Bohlin en supposant que le rapport des moyens mouvements  $n'$  de la planète troublante et  $n$  de l'astéroïde pouvait être mis sous la forme :

$$\frac{n'}{n} = \mu_0 (1 - w)$$

où  $\mu_0$  représente un nombre rationnel simple, et fixe pour tout le groupe d'astéroïde et  $w$  un nombre, en général petit, qui, dans le groupe, caractérise l'astéroïde. En fait, il fallait opérer les développements en séries suivant les puissances de  $w$ , les coefficients des différentes puissances de  $w$  étant des séries trigonométriques procédant suivant les sinus ou cosinus de certaines combinaisons des arguments fondamentaux dont le principal est la différence entre la longitude moyenne de l'astéroïde et la longitude moyenne de la planète troublante, différence qui est multipliée par une fonction des paramètres.

Pour mener à bien cette tâche, nous avons dû reprendre les développements trouvés précédemment. Les coefficients de ces développements sont des fonctions de certaines quantités fondamentales qui ont été déterminées dans la recherche de la solution périodique et l'étude de ces développements nous a amené à cette conclusion que tout problème se ramène à développer selon les puissances de  $w$  ces quantités fondamentales. Or, celles-ci sont des fonctions d'un paramètre que nous avons appelé  $m$  et dont la valeur est :

$$m = \frac{n'}{n - n'}$$



( $n$  et  $n'$  représentent les moyens mouvements de l'asteroïde et de la planète troublante) et elles sont développées en séries procédant suivant les puissances de  $m$ . Or,  $m$  peut être écrit en fonction de  $w$  sous la forme

$$m = \frac{m_0 (1 - w)}{1 - m_0 w}$$

ou :

$$m_0 = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0}$$

et le problème est ramené pour une part, au développement des diverses puissances de  $m$  suivant les puissances de  $w$ , et pour l'autre, à des multiplications algébriques pour le développement de chaque coefficient dans les différentes séries qui interviennent dans la solution.

Nous avons ainsi obtenu pour représenter les coordonnées rectangulaires ou polaires de l'asteroïde, des séries où les coefficients des puissances de  $w$  sont des fonctions de  $\mu_0$  qui est un nombre absolu. Les coefficients seront donc des nombres absolus valables pour tous les asteroïdes du même groupe et, pour les appliquer à l'un d'eux, il suffira de calculer la valeur de  $w$  correspondante et les angles dont la combinaison formera les arguments qui entrent sous les signes sinus ou cosinus. On formera ainsi les séries qui représenteront les coordonnées, soit rectangulaires, soit polaires, de l'asteroïde sous forme générale et, pour les rendre propres au calcul d'une éphéméride, il n'y aura plus qu'à les comparer à quelques observations pour déterminer les constantes d'intégration.

Tel est, dans son ensemble, le problème que nous nous étions proposé et que nous avons résolu.

La suite de notre travail comporte un retour à l'exposition de la méthode de Hill-Brown faite au commencement. En effet, nous avons bien intégré les équations différentielles obtenues en deuxième approximation, en tenant compte de la solution périodique trouvée et nous avons trouvé la forme générale des coefficients, mais nous n'avons pas mis ceux-ci sous une forme appropriée au calcul effectif. C'est pour combler cette lacune que nous avons entrepris la troisième partie de notre travail dans laquelle nous donnons, non seulement les développements effectifs des coefficients en question, mais les développements de toutes les fonctions auxiliaires que l'on rencontre au cours des calculs et dans le développement de la fonction perturbatrice. Nous donnons aussi le développement de cette dernière jusques et y compris les termes du cinquième ordre.

En résumé, notre travail se divise de la façon suivante

#### PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER — Exposition de la méthode de Hill-Brown adaptée aux asteroïdes et recherche de la solution périodique

CHAPITRE II. — Convergence des séries qui représentent la solution périodique

CHAPITRE III — Extension de la solution au cas où l'on considère la première puissance de l'excentricité ou de l'inclinaison et méthode générale de résolution pour les approximations suivantes.

#### DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER — Introduction de la conception fondamentale de Bohlín et son extension aux séries qui représentent la solution périodique

CHAPITRE II — Extension aux séries qui se rapportent à la deuxième approximation et aux approximations suivantes.

#### TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER — Développement de la fonction perturbatrice et des fonctions auxiliaires

CHAPITRE II — Expression en vue des calculs des coefficients des séries qui représentent la deuxième approximation.

Pendant tout le temps qu'a duré ce travail M. Jean Bosler, directeur de l'Observatoire de Marseille, n'a cessé de nous prodiguer ses encouragements — nous lui en exprimons ici toute notre reconnaissance.

# PREMIÈRE PARTIE

## MÉTHODE DE HILL-BROWN

### CHAPITRE PREMIER

#### Adaptation de la méthode au cas des petites Planètes

6. — Prenons comme plan fondamental le plan de l'écliptique à une époque donnée. Soient trois axes de coordonnées rectangulaires fixes SXYZ ayant pour origine le centre du Soleil et disposés comme il suit : l'axe SX et l'axe SY sont dans l'écliptique et SX passe par le point vernal, SY faisant avec lui l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  ; SZ est perpendiculaire au plan de l'écliptique et il est dirigé vers le pôle boréal. Nous désignerons par :  $X', Y', Z', r', M'$ , les coordonnées rectangulaires, le rayon vecteur et la masse de la planète troublante ; par  $X, Y, Z, r, M$ , les coordonnées rectangulaires, le rayon vecteur et la masse de la petite planète étudiée ; par  $M_0$  la masse du Soleil. Si nous désignons par  $\Delta$  la distance de la planète troublante à la petite planète et par  $f$  la constante de l'attraction, nous savons que le mouvement relatif par rapport au centre du Soleil de la petite planète est le même que celui d'un point de masse égale à l'unité soumise à l'action de la fonction de forces :

$$(1) \quad U = f \frac{M_0 + M}{r} + f M' \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} \right]$$

où l'on a comme on sait :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2 \\ r'^2 &= X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \end{aligned}$$

La force vive de la petite planète aura donc pour expression :

$$(2) \quad 2T = \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dY}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{dt} \right)^2$$

Considérons maintenant un système d'axes tournants définis de la façon suivante : l'axe  $SZ_1$  coïncide avec SZ ;  $SX_1$  et  $SY_1$  sont dans le plan de l'écliptique et sont orientés de la même manière que SX et SY, et  $SX_1$  fera avec SX un angle que nous appellerons  $N'$  et qui sera égal à la longitude moyenne de la planète troublante. Nous savons que,  $n'$  étant le moyen mouvement de la planète troublante,  $N'$  aura, en fonction du temps, pour expression :

$$N' = n' t + \lambda'_0$$

Nous avons, d'autre part, entre les coordonnées  $X, Y, Z$  et  $X_1, Y_1, Z_1$ , les relations :

$$(3) \quad \begin{cases} X = X_1 \cos N' - Y_1 \sin N' \\ Y = X_1 \sin N' + Y_1 \cos N' \\ Z = Z_1 \end{cases}$$

En tenant compte de ce que l'on a :

$$\frac{dN'}{dt} = n'$$

et des relations (3), l'expression de la force vive prend la forme :

$$(4) \quad 2T = \left(\frac{dX_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ_1}{dt}\right)^2 + 2n'X_1 \frac{dY_1}{dt} - 2n'Y_1 \frac{dX_1}{dt} + n'^2 (X_1^2 + Y_1^2)$$

Quant à la fonction des forces, nous savons que son expression en fonction des variables nouvelles sera la même qu'en fonction des anciennes.

Si nous formons maintenant les équations de Lagrange, nous obtiendrons, pour définir le mouvement relatif de la petite planète par rapport au système d'axes tournants, le système d'équations :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 X_1}{dt^2} - 2n' \frac{dY_1}{dt} - n'^2 X_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} \\ \frac{d^2 Y_1}{dt^2} + 2n' \frac{dX_1}{dt} - n'^2 Y_1 = \frac{\partial U}{\partial Y_1} \\ \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Z_1} \end{cases}$$

Nous allons introduire maintenant, d'après Hill-Brown, des quantités complexes et transformer le système que nous venons d'obtenir. Nous poserons pour cela :

$$(6) \quad ax = X_1 + iY_1 \quad ay = X_1 - iY_1 \quad az = iZ$$

$a$  étant une constante qui sera définie plus loin.

L'introduction des variables  $x, y, z$  dans les relations (3) nous donnera  $X, Y, Z$ , en fonction de  $x, y, z$  et  $N'$  sous la forme :

$$(7) \quad X = \frac{a}{2} (xe^{iN'} + ye^{-iN'}) \quad , \quad Y = \frac{a}{2i} (xe^{iN'} - ye^{-iN'}) \quad , \quad Z = \frac{az}{i}$$

Désignons maintenant par  $N$  la longitude moyenne de la petite planète et par  $n$  son moyen mouvement ; nous aurons, comme on le sait :

$$N = nt + \lambda$$

Prenons comme variable indépendante au lieu du temps la quantité :

$$T = i(N - N')$$

et désignons par  $D$  la caractéristique de la dérivation par rapport à  $T$ , puis posons :

$$m = \frac{n}{n - n'}$$

nous verrons facilement que, dans ces conditions, le système (5) s'écrira :

$$(8) \quad \begin{cases} D^2 X_1 + 2imDY_1 + m^2 X_1 + \frac{1}{(n - n')^2} \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \\ D^2 Y_1 - 2imDX_1 + m^2 Y_1 + \frac{1}{(n - n')^2} \frac{\partial U}{\partial Y_1} = 0 \\ D^2 Z_1 - \frac{1}{(n - n')^2} \frac{\partial U}{\partial Z_1} = 0 \end{cases}$$

Multiplions les deux premières équations (8) respectivement par  $(1, +i)$  et  $(1, -i)$  et ajoutons-les membre à membre, nous obtiendrons facilement, en tenant compte des relations (6), le système :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^2x + 2mDx + m^2x + \frac{2}{(n - n')^2 a^2} \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ D^2y - 2mDy + m^2y + \frac{2}{(n - n')^2 a^2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ D^2z - \frac{1}{(n - n')^2 a^2} \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Revenons à la fonction des forces. Nous savons qu'elle peut s'écrire, en fonction des rayons vecteurs et en désignant par H leur angle sous la forme :

$$U = f \frac{M_0 + M}{r} + fM' \left[ \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right]$$

Si nous développons maintenant l'inverse du radical suivant les puissances du rapport  $\frac{r}{r'}$ , nous obtiendrons, comme nous le savons, le développement :

$$(10) \quad U = f \frac{M_0 + M}{r} + fM' \frac{r^2}{r'^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right) \dots$$

Partant de ce résultat et introduisant les variables  $x, y, z$ , nous allons transformer ce développement de manière à le rendre plus commode.

Pour cela, nous poserons d'abord :

$$(11) \quad f(M_0 + M) = K(n - n')^2 a^3$$

introduisant ainsi la quantité K au lieu de  $a$  ; puis :

$$v' = N' + \frac{l'}{i} \qquad s' = \frac{\sigma'}{i}$$

$v'$  et  $s'$  étant la longitude et la latitude de la planète troublante. Nous aurons d'abord, d'après les formules (6) ;

$$(12) \quad r^2 = a^2 (xy - z^2)$$

puis comme

$$rr' \cos H = XX' + YY' + ZZ'$$

et que

$$X' = r' \cos s' \cos v' \qquad Y' = r' \cos s' \sin v' \qquad Z' = r' \sin s'$$

nous obtiendrons facilement :

$$\frac{1}{a} \cos H = \left[ \frac{X}{a} \cos v' + \frac{Y}{a} \sin v' \right] \cos s' + \frac{Z}{a} \sin s'$$

Les puissances successives de cette quantité s'obtiennent aisément en ayant égard aux formules qui lient les cos et sin des multiples d'un arc aux puissances des cos et sin de l'arc.

Si nous remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs en fonction de  $x, y, z, s'$  et  $l'$ , nous obtiendrons enfin :

$$(12 \text{ bis}) \quad \frac{r}{a} \cos H = \frac{1}{2} (xe^{-l'} + ye^{l'}) \cos s' + \frac{z}{i} \sin s'$$

Dans l'expression (10) de la fonction des forces, nous poserons :

$$\rho = \frac{a}{r} \qquad \rho' = \frac{a'}{r'} \qquad \alpha = \frac{\alpha}{a'}$$

ce qui permettra d'écrire :

$$(13) \quad U = f \frac{M_0 + M}{r} + fM' \frac{a^2}{a'^3} \rho'^3 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{r}{a} \cos H \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \dots$$

Nous remplacerons maintenant  $\frac{r}{a} \cos \Pi$  et  $\frac{r}{a}$  ainsi que leurs puissances par leurs expressions en fonction de  $x, y, z, s'$  et  $l'$ , puis nous éliminerons  $f$  du premier terme au moyen de l'équation (11) et des autres termes au moyen de l'équation :

$$f(M_0 + M') = n'^2 a'^3$$

où  $a'$  représente le demi grand axe de l'orbite de la planète troublante. Nous poserons ensuite dans le résultat :

$$2\nu = \frac{M'}{M_0 + M'}$$

et nous savons que cette quantité est au plus de l'ordre de  $10^{-8}$ .

Nous voyons que tous les termes, à partir du deuxième, contiennent en facteur une puissance de  $\rho'$ . En remplaçant dans chacun  $\rho'^m e^{nl'}$  par  $(\rho'^m e^{nl'} - 1 + 1)$ , groupant les termes indépendants de  $\rho'^m e^{l'}$  et groupant, sous la dénomination de F tous les termes qui dépendent de  $\rho'^m e^{l'}$ , termes auxquels nous ajouterons le terme :

$$2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{i} (x + y) \sin 2s'$$

(ce terme est très petit car, pour Jupiter et Saturne  $s'$  est toujours très petit et de plus le premier facteur  $2\nu m^2$  est au plus de l'ordre de  $10^{-3}$ ), nous pourrions mettre la fonction des forces sous la forme :

$$(14) \quad \frac{U}{(n - n')^2 a^2} = K\rho + 2\nu m^2 \left[ -\frac{1}{8} (xy + 2z^2) + \frac{3}{16} (x^2 + y^2) \right] + 2\nu m^2 \left[ \frac{3}{8} (xy + 2z^2) + \frac{3}{16} (x^2 + y^2) \right] \cos 2s' + F$$

F représente la fonction suivante :

$$(15) \quad \begin{aligned} F = & 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{i} (x + y) \sin 2s' - 2\nu m^2 \cdot \frac{1}{8} (xy + 2z^2) (\rho'^3 - 1) + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{16} (\rho'^3 e^{-2l'} - 1) x^2 + \\ & + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{16} (\rho'^3 e^{2l'} - 1) y^2 + 2\nu m^2 \left[ \frac{3}{8} (xy + 2z^2) (\rho'^3 - 1) + \frac{3}{16} (\rho'^3 e^{-2l'} - 1) x^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{16} (\rho'^3 e^{2l'} - 1) y^2 \right] \cos 2s' + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{i} \cdot x (\rho'^3 e^{-l'} - 1) \sin 2s' + \\ & + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{i} \cdot y (\rho'^3 e^{l'} - 1) \sin 2s' \dots \dots \end{aligned}$$

Revenons maintenant au système (9) et remplaçons les dérivées partielles du U par leurs valeurs tirées de (14), en tenant compte de ce que l'on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{2} \rho^3 y \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{1}{2} \rho^3 x \qquad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho^3 z$$

nous obtiendrons facilement le système :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} D^2 x + 2mDx + (1 - 2\nu) m^2 x + 3\nu m^2 (x + y) - K\rho^3 x + 2 \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ D^2 y - 2mDy + (1 - 2\nu) m^2 y + 3\nu m^2 (x + y) - K\rho^3 y + 2 \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ D^2 z - 2\nu m^2 z - K\rho^3 z - \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

C'est ce système qui servira de point de départ. Nous remarquerons que U a été divisée en deux parties et que, dans la deuxième, les facteurs de  $(xy + 2z^2), x^2, y^2, \dots$  sont de l'ordre de l'excentricité de la planète troublante et de plus, il sont multipliés par le facteur  $2\nu m^2$  qui est très petit ou par le rapport des demi grand axes et le facteur  $2\nu m^2$ . La deuxième partie F sera donc, en général, très petite.

Nous pouvons obtenir du système (16) une intégrale analogue à celle de Jacobi. Il suffit pour cela, d'ajouter membre à membre les équations après les avoir multipliées respectivement par  $Dy$ ,  $Dx$ ,  $-2Dz$ . De plus, si nous remarquons que l'on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x} Dx + \frac{\partial F}{\partial y} Dy + \frac{\partial F}{\partial z} Dz = DF - \frac{\partial F}{\partial T}$$

la fonction  $F$  étant considérée comme dépendante de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et  $T$ , et que, d'autre part,  $T$  n'y figure que par l'intermédiaire de  $\rho'$  et  $l'$  qui sont fonctions de  $N'$ , on pourra écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial (iN')} D(iN') = m \frac{\partial F}{\partial (iN')}$$

Si maintenant nous intégrons, nous obtiendrons, en désignant par  $D^4F$  l'intégrale  $\int F dT$  :

$$(17) \quad Dx Dy - (Dz)^2 + (1 - 2\nu) m^2 (xy) + 2\nu m^2 z^2 + \frac{3}{2} \nu m^2 (x + y)^2 + 2K\rho + 2F - 2mD^{-1} \left[ \frac{\partial F}{\partial (iN')} \right] = 2C$$

Tout ce que nous venons de dire s'applique à une planète quelconque. Dans le cas spécial des petites planètes, la masse étant négligeable vis-à-vis de celle du Soleil, on fera  $M = 0$  et l'équation (11) deviendra dans ce cas :

$$(11 \text{ ter}) \quad fM_0 = K (n - n')^2 a^3$$

Comme on le verra plus loin, la constante  $a$  sera choisie très voisine de la distance moyenne de la petite planète au Soleil. Si la petite planète décrivait autour du Soleil un cercle de centre  $S$ , de rayon  $a$  situé dans le plan  $SXY$ , sa longitude étant  $N$ , on aurait simplement, en posant :

$$\begin{aligned} \theta &= e^{i(N-N')} = e^T \\ x &= \theta & y &= \theta^{-1} & z &= 0 \end{aligned}$$

Nous sommes donc conduits à admettre pour  $x$  et  $y$  la forme :

$$x = p^\theta \quad y = q^{\theta^{-1}}$$

et à étudier les variables  $p$  et  $q$ . Nous conserverons cependant les variables  $x$  et  $y$  écrites sous la forme  $x^{\theta^{-1}}$  et  $y^\theta$ .

7. — Nous allons aborder maintenant l'intégration du système (16), et nous allons opérer par approximations successives.

Nous savons en premier lieu que  $F$  est toujours fort petite ; donc, en première approximation nous pourrions la négliger. Nous négligerons de plus la troisième coordonnée  $z$  et la première approximation nous donnera ainsi une trajectoire située dans le plan de l'écliptique. Le système (16) se trouvera donc réduit aux deux équations :

$$(18) \quad \begin{cases} D^2x + 2mDx + (1 - 2\nu)m^2 x + 3\nu m^2 (x + y) - K\rho^3 x = 0 \\ D^2y - 2mDy + (1 - 2\nu)m^2 y + 3\nu m^2 (x + y) - K\rho^3 y = 0 \end{cases}$$

auxquelles nous ajouterons l'intégrale (17) dans laquelle nous aurons fait :

$$F = 0 \quad z = 0$$

et qui s'écrit alors :

$$(19) \quad Dx Dy + (1 - 2\nu) m^2 (xy) + \frac{3}{2} \nu m^2 (x + y)^2 + 2K\rho = 2C$$

Pour transformer les équations (18) et (19) et les rendre plus propre au but poursuivi, nous éliminerons  $K$  et  $\rho$ . Pour cela, il nous suffira de les ajouter membre à membre après les avoir multipliées respectivement par  $(y, x, 1)$  puis par  $(y, -x, 0)$ , nous obtiendrons ainsi, après quelques réductions, les deux équations :

$$(20) \quad \begin{cases} yD^2x + xD^2y + 2m(yDx - xDy) + Dx Dy + 3(1 + \nu)m^2(xy) + \frac{9}{2}\nu m^2(x^2 + y^2) = 2C \\ yD^2x - xD^2y + 2m(yDx + xDy) + 3\nu m^2(y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

Additionnons maintenant et soustrayons les équations (20) membre à membre, nous obtiendrons les deux équations :

$$(21) \quad \begin{cases} xD^2y - 2mx Dy + \frac{1}{2}DxDy + \frac{3}{2}(1 + \nu)m^2(xy) + \frac{\nu m^2}{4}(15x^2 + 3y^2) = C \\ yD^2x + 2my Dx + \frac{1}{2}DxDy + \frac{3}{2}(1 + \nu)m^2(xy) + \frac{\nu m^2}{4}(3x^2 + 15y^2) = C \end{cases}$$

Dans ces dernières équations, faisons passer au second membre :

$$\frac{\nu m^2}{4}(15x^2 + 3y^2) \qquad \frac{\nu m^2}{4}(3x^2 + 15y^2)$$

et remplaçons  $\nu m^2$  par  $m'^2$  qui sera un nouveau paramètre provisoire, nous pourrons écrire définitivement :

$$(22) \quad \begin{cases} xD^2y - 2mx Dy + \frac{1}{2}DxDy + \frac{3}{2}(1 + \nu)m^2(xy) = -\frac{m'^2}{4}(15x^2 + 3y^2) + C \\ yD^2x + 2my Dx + \frac{1}{2}DxDy + \frac{3}{2}(1 + \nu)m^2(xy) = -\frac{m'^2}{4}(3x^2 + 15y^2) + C \end{cases}$$

Le système (22) servira de base à nos calculs par la suite.

8. — Nous allons maintenant chercher pour les variables mises sous la forme  $x^{\theta-1}$  et  $y^{\theta}$  des développements en séries procédant suivant les puissances de  $m'^2$  et, une fois la solution obtenue, nous ferons :

$$m'^2 = \nu m^2$$

Nous supposerons la constante  $C$  développée, elle aussi suivant les puissances de  $m'^2$ , de sorte que nous allons chercher à satisfaire aux équations (22) par les séries suivantes :

$$(23) \quad \begin{cases} x^{\theta-1} = x_0 + m'^2 x_1 + \dots + m'^{2q} x_q \dots \\ y^{\theta} = y_0 + m'^2 y_1 + \dots + m'^{2q} y_q \dots \\ C = C_0 + m'^2 C_1 + \dots + m'^{2q} C_q \dots \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer par approximations successives d'abord  $x_0, y_0, C_0$ , puis  $x_1, y_1, C_1$ , et, ainsi de suite.

Observons d'abord que si l'on fait :

$$x_0 = y_0 = 1$$

et qu'on essaye de satisfaire aux équations (22) où l'on aura fait :

$$m' = 0$$

au second membre, on sera conduit à prendre :

$$C_0 = \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1 + \nu)m^2$$

Quand nous aurons remplacé dans les équations (22)  $(x^{\theta-1})$ ,  $(y^\theta)$  et  $C$  par les séries (23), nous trouverons dans le premier membre des termes de la forme :

$$m'^{2a+2b} x_a y_b$$

et d'autre d'une forme analogue où un des  $x_a$  ou  $y_b$  ou tous les deux ont été remplacés par l'une de leurs deux premières dérivées. Dans le deuxième membre nous trouverons des termes de la forme :

$$m'^{2a+2b+2} \theta^2 x_a y_b$$

ou de la forme :

$$m'^{2a+2b+2} \theta^{-2} x_a y_b$$

ou encore de la forme :

$$m'^{2a} C_a$$

Supposons que, par approximations successives, nous ayons déterminé les  $x_\alpha$ ,  $y_\alpha$ ,  $C_\alpha$  jusqu'à l'indice  $q-l$  inclusivement et que nous voulions déterminer  $x_q$ ,  $y_q$ ,  $C_q$ .

Dans le premier membre nous devons retenir les termes qui contiennent  $m'^{2q}$  en facteur, c'est-à-dire ceux pour lesquels on a :

$$a + b = q$$

Parmi ces termes, ceux pour lesquels on aura  $a = q$ ,  $b = 0$ , ou encore  $a = 0$ ,  $b = q$ , nous donneront les inconnues et les autres termes seront tels que les indices seront inférieurs à  $q$ ; ce seront donc des termes connus et nous les ferons passer au second membre.

Dans le second membre, nous devons retenir les termes pour lesquels :

$$a + b = q - l$$

en vertu de la présence du facteur  $m'^l$ ; ce seront donc des termes connus. Nous aurons de plus le terme inconnu  $m'^{2q} C_q$ .

Les termes encore inconnus des premiers membres des équations (22) s'obtiendront de la façon suivante : soit, par exemple, le terme  $x D^2 y$ . Nous pouvons écrire :

$$x D^2 [y^\theta \cdot \theta^{-1}] = (x^{\theta-1}) [D^2 (y^\theta) - 2D (y^\theta) + (y^\theta)]$$

car les série (23) représentent, rappelons-le,  $x^{\theta-1}$  et  $y^\theta$  et non pas  $x$  et  $y$ . Si nous opérons la même transformation sur les différents termes des équations (22), nous aurons les formules :

$$\begin{aligned} y D^2 x &= (y^\theta) [D^2(x^{\theta-1}) + 2D(x^{\theta-1}) + (x^{\theta-1})] \\ x D y &= (x^{\theta-1}) [D(y^\theta) - (y^\theta)] & y D x &= (y^\theta) [D(x^{\theta-1}) + (x^{\theta-1})] \\ D x D y &= [D(x^{\theta-1}) + (x^{\theta-1})] [D(y^\theta) - (y^\theta)] \\ x y &= (x^{\theta-1}) (y^\theta) \end{aligned}$$

Remplaçons dans les équations (22) tous les termes par les expressions que nous venons d'obtenir, retenons dans les premiers membres les termes en  $x_q$ ,  $y_q$ , et leurs dérivées, faisons passer aux seconds membres tous les autres termes, puis égalons aux deux membres les coefficients de  $m'^{2q}$ , nous obtiendrons, pour déterminer  $x_q$  et  $y_q$ , les deux équations linéaires :

$$(24) \quad \begin{cases} D^2 x_q + \left(\frac{3}{2} + 2m\right) D x_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2\right] x_q + \frac{1}{2} D y_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2\right] y_q = \Phi_q + C_q \\ D^2 y_q + \left(\frac{3}{2} + 2m\right) D y_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2\right] y_q - \frac{1}{2} D x_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2\right] x_q = \Phi'_q + C_q \end{cases}$$

dans lesquelles  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  représentent l'ensemble des termes connus.



Nous admettrons que  $x_a$  et  $y_a$  peuvent être représentées par une série procédant suivant les puissances positives et négatives de  $\theta$ , sous la forme :

$$x_a = \sum x_{a,k} \theta^k \quad y_a = \sum y_{a,k} \theta^k$$

et cela nous permet de voir, par induction, que  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  seront périodiques en  $T$ , ce que nous démontrerons plus loin.

Cherchons maintenant la forme générale des coefficients  $x_q$  et  $y_q$ . En admettant la forme donnée plus haut  $x_a$  et  $y_a$ , nous substituerons ces séries dans les équations (24) et nous égalons aux deux membres les coefficients des mêmes puissances de  $\theta$ . Si  $k$  désigne l'ordre de la puissance de  $\theta$ , et si nous appelons  $A, B, x_{q,k}, y_{q,k}$ , les coefficients  $\theta$  dans  $\Phi_q, \Phi'_q, x_q, y_q$ , cette identification nous donnera le système d'équations algébriques linéaires :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ -\frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{q,k} + \left[ k^2 - k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{q,k} = A \\ \left[ k^2 + k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{q,k} + \left[ \frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{q,k} = B \end{array} \right.$$

Ce système aura, en général, une solution car son déterminant a pour expression :

$$D = k^2 [ (1 - 3\nu)m^2 + 2m - (k^2 - 1) ]$$

et il ne sera pas nul en général car cela impliquerait entre les moyens mouvements  $n$  et  $n'$  une relation qui dépendrait de  $k$ .

Quant au coefficient  $C_q$ , il sera donné pour chaque valeur  $q$  par  $k=0$ . En effet, remontant aux équations (24) au moment de l'identification et cherchant aux deux membres les termes indépendants de  $\theta$ , nous trouverons les deux équations :

$$\begin{aligned} (x_{q,0} + y_{q,0}) \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] &= A_0 + C_q \\ (x_{q,0} + y_{q,0}) \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] &= B_0 + C_q \end{aligned}$$

Ces deux équations ne peuvent être satisfaites par les mêmes valeurs de  $x_{q,0}$  et  $y_{q,0}$  que si  $A_0 = B_0$ , et nous verrons que cela a toujours lieu.

Nous devons chercher maintenant à déterminer la forme générale des coefficients  $x_{q,k}, y_{q,k}$  et pour cela, nous allons d'abord calculer leurs valeurs effectives pour les premières valeurs de  $k$ . Nous remonterons pour cela aux équations (22) et nous remarquerons que, dans le second membre de chacune d'elles, la substitution des séries (23) fera apparaître les facteurs  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ . Cela nous induit à penser, ce que nous avons admis plus haut, que les coefficients de  $x_q$  et  $y_q$  seront développables suivant les puissances de  $\theta$ . Cela nous induit également à penser que  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  sont des fonctions de  $\theta$  et, par suite, des fonctions périodiques de  $T$ .

Si nous faisons  $k=2$ , et que nous désignons les coefficients de  $\theta^k$  et  $\theta^{-k}$  respectivement par  $x_{1,k}, y_{1,k}, x_{1,-k}, y_{1,-k}$ , nous devons, pour les obtenir, remplacer  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$  et  $C$  respectivement par  $1 + m'^2 x_1, 1 + m'^2 y_1, C_0 + m'^2 C_1$  et, ceci fait, remplacer  $x_1$  et  $y_1$  respectivement par :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,0} + x_{1,2} \theta^2 + x_{1,-2} \theta^{-2} + \dots + x_{1,k} \theta^k \dots \\ y_1 &= y_{1,0} + y_{1,2} \theta^2 + y_{1,-2} \theta^{-2} + \dots + y_{1,k} \theta^k \dots \end{aligned}$$

en tenant compte de ce que l'on a :

$$D\theta = 0 \quad D^2\theta = 0 \quad D\theta^{-1} = -\theta^{-1} \quad D^2\theta^{-1} = \theta^{-1}$$

Nous devons identifier aux deux membres les coefficients de  $m'^2$  et, dans les équations obtenues, faire passer au second membre les termes indépendants des inconnues. Ceci fait, l'identification des coefficients respectifs

de  $\theta^k$  et  $\theta^{-k}$  nous donnera les systèmes cherchés. En remarquant que la présence du facteur  $m'^2$  au second membre nous impose d'y réduire  $x_1$  et  $y_1$  à leur premier terme, nous obtiendrons les deux systèmes d'équations algébriques linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ -\frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,k} + \left[ k^2 - k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,k} = A \\ \left[ k^2 + k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,k} + \left[ -\frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,k} = B \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,-k} + \left[ k^2 + k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,-k} = B \\ \left[ k^2 - k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,-k} + \left[ -\frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,-k} = A \end{array} \right.$$

L'examen de ces systèmes nous montre tout d'abord que l'on a :

$$x_{1,-k} = y_{1,k} \qquad y_{1,-k} = x_{1,k}$$

puis, comme l'on a :

$$\text{pour } k = 2 \qquad A = -\frac{15}{4} \qquad B = -\frac{3}{4}$$

$$\text{pour } k > 2 \qquad A = B = 0$$

il en résulte que  $x_{1,k}$  et  $y_{1,k}$  sont nuls pour  $k > 2$  et  $x_1$  et  $y_1$  auront la forme :

$$x_1 = x_{1,0} + x_{1,2} \theta^2 + y_{1,2} \theta^{-2} \qquad , \qquad y_1 = y_{1,0} + y_{1,2} \theta^2 + x_{1,2} \theta^{-2}$$

L'identification des termes indépendants de  $\theta$  nous donnera la valeur de  $C_1$  :

$$C_1 = (x_{1,0} + y_{1,0}) \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right].$$

Comme  $x_{1,0}$  et  $y_{1,0}$  sont arbitraires, nous prendrons :

$$x_{1,0} = y_{1,0} = 0$$

ce qui nous donnera :

$$C_1 = 0$$

et  $x_1$  et  $y_1$  auront la forme :

$$x_1 = x_{1,2} \theta^2 + y_{1,2} \theta^{-2} \qquad y_1 = y_{1,2} \theta^2 + x_{1,2} \theta^{-2}$$

Si nous effectuons la résolution du premier des deux systèmes linéaires précédents, nous obtiendrons pour les inconnues les valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,2} = -\frac{18(1+\nu)m^2 + 2m + 1}{4 D_2} \\ y_{1,2} = \frac{1}{4} \frac{18(1+\nu)m^2 + 84m + 114}{D_2} \end{array} \right.$$

$$\text{avec :} \qquad D_2 = 4[(1-3\nu)m^2 + 2m - 3]$$

Poursuivons notre étude et passons aux coefficients  $x_2$ ,  $y_2$  et  $C_2$ . Pour les obtenir, nous devons remplacer dans les équations (22) au premier membre,  $x^{\theta^{-1}}$  et  $y^\theta$  respectivement par :

$$x^{\theta^{-1}} = 1 + m'^2 x_1 + m'^4 x_2 \qquad y^\theta = 1 + m'^2 y_1 + m'^4 y_2$$

et au second membre,  $x^{\theta^{-1}}$ ,  $y^{\theta}$  et C respectivement par :

$$x^{\theta^{-1}} = 1 + m'^2 x_1 \quad , \quad y^{\theta} = 1 + m^2 y_1 \quad , \quad C = C_0 + m'^2 C_1 + m'^4 C_2$$

puis identifier les coefficients de  $m'^4$ . En suivant la même marche que précédemment, désignant les coefficients de  $\theta^k$  et  $\theta^{-k}$  respectivement par  $x_{2,k}$ ,  $y_{2,k}$ ,  $x_{2,-k}$ ,  $y_{2,-k}$ , puis, remarquant que, d'après la constitution des équations linéaires, on doit avoir :

$$x_{2,-k} = y_{2,k} \quad \quad \quad y_{2,-k} = x_{2,k}$$

nous obtiendrons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ -\frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2 \right] \right] x_{2,k} + \left[ k^2 - k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2 \right] \right] y_{2,k} = A \\ \left[ k^2 + k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2 \right] \right] x_{2,k} + \left[ \frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2 \right] \right] y_{2,k} = B \end{array} \right.$$

dans lequel on a :  $A = B = 0$  pour  $k = 2$  et  $k > 4$ , ce qui montre que pour ces valeurs de  $k$  on a :  $x_{2,k} = y_{2,k} = 0$ , de sorte que  $x_2$  et  $y_2$  ont la forme :

$$x_2 = x_{2,0} + x_{2,t} \theta^t + y_{2,t} \theta^{-t} \quad \quad \quad y_2 = y_{2,0} + y_{2,t} \theta^t + x_{2,t} \theta^{-t}$$

Pour  $k = 4$ , et en tenant compte des valeurs trouvées pour  $x_1$  et  $y_1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{30}{4} x_{1,2} - \left[ 5 - 2 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2 \right] \right] x_{1,2} y_{1,2} \\ B &= -\frac{6}{4} x_{1,2} - \left[ 7 + 2 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2 \right] \right] x_{1,2} y_{1,2} \end{aligned}$$

Enfin, si nous prenons :

$$x_{2,0} = y_{2,0} = 0$$

nous obtiendrons  $x_2$ ,  $y_2$  sous la forme :

$$x_2 = x_{2,t} \theta^t + y_{2,t} \theta^{-t} \quad \quad \quad y_2 = y_{2,t} \theta^t + x_{2,t} \theta^{-t}$$

et pour  $C_2$  la valeur :

$$C_2 = \frac{36}{4} y_{1,2} + x_{1,2}^2 + 3y_{1,2}^2 + (3 + 4m) [x_{1,2}^2 - y_{1,2}^2] + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2 \right] [x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2]$$

Passons maintenant au calcul de  $x_3$ ,  $y_3$  et  $C_3$ . Nous devons substituer pour cela dans les équations (22) à  $x^{\theta^{-1}}$  et  $y^{\theta}$  respectivement, au premier membre :

$$\begin{aligned} x^{\theta^{-1}} &= 1 + m'^2 x_1 + m'^4 x_2 + m'^6 x_3 \\ y^{\theta} &= 1 + m'^2 y_1 + m'^4 y_2 + m'^6 y_3 \end{aligned}$$

et au second membre :

$$\begin{aligned} x^{\theta^{-1}} &= 1 + m'^2 x_1 + m'^4 x_2 \\ y^{\theta} &= 1 + m'^2 y_1 + m'^4 y_2 \end{aligned}$$

et prendre pour C la valeur :

$$C = C_0 + m'^2 C_1 + m'^4 C_2 + m'^6 C_3$$

puis, identifier les coefficients de  $m'^6$ . Désignant ensuite les coefficients de  $\theta^k$  et  $\theta^{-k}$  dans  $x_3$  et  $y_3$  respectivement par  $x_{3,k}$ ,  $y_{3,k}$ ,  $x_{3,-k}$ ,  $y_{3,-k}$ , et remarquant que, d'après la composition des équations, nous devons avoir :

$$x_{3,-k} = y_{3,k} \quad \quad \quad y_{3,-k} = x_{3,k}$$

nous obtiendrons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ -\frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{3,k} + \left[ k^2 - k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{3,k} = A \\ \left[ k^2 + k \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{3,k} + \left[ \frac{k}{2} + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{3,k} = B \end{array} \right.$$

dans lequel nous avons  $A = B = 0$  pour  $k = 4$  et  $k > 6$ , valeur de  $k$  auxquelles correspondent :

$$x_{3,k} = y_{3,k} = 0$$

Pour  $k = 2$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{30}{4} x_{1,2} y_{1,2} - \frac{3}{4} [y_{1,2}^2 + 2y_{2,4}] + 6x_{1,2} x_{2,4} + 3y_{1,2} y_{2,4} - \left[ 16 - 4 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,2} y_{2,4} - \left[ 4 + 2 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,2} x_{2,4} \\ B = -\frac{6}{4} x_{1,2} y_{1,2} - \frac{15}{4} [y_{1,2}^2 + 2y_{2,4}] + 5x_{1,2} x_{2,4} + 2y_{1,2} y_{2,4} - \left[ 16 + 4 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,2} x_{2,4} - \left[ 4 - 2 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,2} y_{2,4} \end{array} \right.$$

et pour  $k = 6$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -3x_{1,2} y_{2,4} - 2y_{1,2} x_{2,4} - \frac{15}{4} [x_{1,2}^2 + 2x_{2,4}] - \left[ 16 - 4 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,2} y_{2,4} - \left[ 4 - 2 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,2} x_{2,4} \\ B = -6x_{1,2} y_{2,4} - 5y_{1,2} x_{2,4} - \frac{3}{4} [x_{1,2}^2 + 2x_{2,4}] - \left[ 16 + 4 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] y_{1,2} x_{2,4} - \left[ 4 + 2 \left( \frac{3}{2} + 2m \right) + \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right] \right] x_{1,2} y_{2,4} \end{array} \right.$$

L'identification des termes indépendants des  $\theta$  donne pour  $C_3$  la valeur :

$$C_3 = (x_{3,0} + y_{3,0}) \left[ \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2 \right]$$

valeur qui sera nulle si nous prenons  $x_{3,0} = y_{3,0} = 0$ .

Nous obtiendrons donc  $x_3$  et  $y_3$  sous la forme :

$$\begin{aligned} x_3 &= x_{3,2} \theta^2 + y_{3,2} \theta^{-2} + x_{3,6} \theta^6 + y_{3,6} \theta^{-6} \\ y_3 &= y_{3,2} \theta^2 + x_{3,2} \theta^{-2} + y_{3,6} \theta^6 + x_{3,6} \theta^{-6} \end{aligned}$$

9. — En examinant les valeurs trouvées pour  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ , nous voyons immédiatement que ce sont des polynômes homogènes en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ , et dont le degré est égal à l'indice de  $x$  et de  $y$ . Nous sommes donc induits à penser que la loi est générale et que les coefficients  $x_q$  et  $y_q$  sont des polynômes homogènes de degré  $q$  en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ . Nous voyons que cela est vrai pour les premiers coefficients et nous supposons qu'il en est ainsi jusqu'à  $x_{q-1}$  et  $y_{q-1}$ . Si  $a < q - 1$ ,  $x_a$  et  $y_a$  seront des polynômes homogènes de degré  $a$  en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$  et il en sera de même de leurs dérivées.

Considérons les différents termes de  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$ ; nous avons d'abord les termes du premier membre de (22) que nous avons fait passer au second parce qu'ils ne contenaient pas d'inconnues. A un facteur numérique près, ils sont égaux à :

$$x_a y_b \quad (a < q, b < q, a + b = q)$$

où  $x_a$  ou  $y_b$  peuvent être remplacés par une de leurs dérivées. Ce sont donc des polynômes homogènes de degré  $q$  en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ .

Les autres termes des  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  proviennent des termes du second membre .

$$-\frac{15}{4} m'^2 x^2 \quad -\frac{3}{4} m'^2 y^2$$

pour  $\Phi_q$  et

$$-\frac{3}{4} m'^2 x^2 \quad -\frac{15}{4} m'^2 y^2$$

pour  $\Phi'_q$ . Ils sont de l'une des deux formes :

$$\theta^2 x_a y_b, \quad \theta^{-2} x_a y_b \quad (a + b = q - 1)$$

et, par conséquent, ils sont homogènes et de degré  $q$  en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ .

Donc  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$ , sont des polynômes homogènes de degré  $q$  en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ . Mais  $x_q$  et  $y_q$  se déduisent de  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  par les équations (25), les termes de  $x_q$  et  $y_q$  correspondent à ceux de  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  et contiennent les mêmes puissances de  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ . Donc  $x_q$  et  $y_q$  sont des polynômes homogènes de degré  $q$  en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ .

Il résulte de cela que si l'on ordonne  $x\theta^{-1}$ ,  $y\theta$  suivant les puissances de  $\theta$ , et le coefficient de chaque puissance de  $\theta$  suivant les puissances de  $m'$ , le coefficient de  $\theta^{2k}$  contiendra seulement des termes pour lesquels l'exposant de  $m'$  prendra la succession de valeurs :

$$2k, \quad 2k + 4, \quad 2k + 8, \quad 2k + 12, \quad \dots$$

et ceci induit à penser que les séries convergeront avec rapidité.

10. — Nous avons vu au paragraphe précédent que  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  sont des polynômes homogènes de degré  $q$  en  $\theta^2$  et  $\theta^{-2}$ . Nous allons chercher maintenant leur forme générale et la loi de leur formation. Pour cela, nous substituerons dans les équations (22) à  $x\theta^{-1}$  et  $y\theta$

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2 x_1 + \dots + m'^{2q} x_q$$

$$y\theta = 1 + m'^2 y_1 + \dots + m'^{2q} y_q$$

au premier membre et :

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2 x_1 + \dots + m'^{2(q-1)} x_{q-1}$$

$$y\theta = 1 + m'^2 y_1 + \dots + m'^{2(q-1)} y_{q-1}$$

au second membre et nous chercherons, dans le coefficient de  $m'^{2q}$  l'ensemble des termes qui ne contiennent pas les inconnues. Nous trouverons ainsi pour  $\Phi_q$  l'expression :

$$\begin{aligned} \Phi_q = & -\frac{6}{4} \theta^2 [x_{q-1} + x_{q-2} x_1 + x_{q-3} x_2 + \dots] - \frac{30}{4} \theta^{-2} [y_{q-1} + y_{q-2} y_1 + y_{q-3} y_2 + \dots] - \\ & - \sum_1^{q-1} y_i [D^2 x_{q-i} + (\frac{3}{2} + 2m) Dx_{q-i} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1 + \nu) m^2] x_{q-i}] - \frac{1}{2} \sum_1^{q-1} Dy_i [Dx_{q-i} + x_{q-i}] \end{aligned}$$

et pour  $\Phi'_q$  :

$$\begin{aligned} \Phi'_q = & -\frac{30}{4} \theta^2 [x_{q-1} + x_{q-2} x_1 + x_{q-3} x_2 + \dots] - \frac{6}{4} \theta^{-2} [y_{q-1} + y_{q-2} y_1 + y_{q-3} y_2 + \dots] - \\ & - \sum_1^{q-1} x_i [D^2 y_{q-i} - (\frac{3}{2} + 2m) Dy_{q-i} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1 + \nu) m^2] y_{q-i}] - \frac{1}{2} \sum_1^{q-1} Dx_i [Dy_{q-i} - y_{q-i}] \end{aligned}$$

Pour arriver à obtenir ces expressions en fonction des  $x_{q,k}$  et  $y_{q,k}$ , nous ferons une remarque importante :  
Si nous écrivons les valeurs de  $x_1$  et de  $y_1$  sous la forme :

$$x_1 = x_{1,2} \theta^2 + x_{1,-2} \theta^{-2} \quad y_1 = y_{1,2} \theta^2 + y_{1,-2} \theta^{-2}$$

nous pouvons remplacer  $x_q$  et  $y_q$  respectivement par les puissances  $q$  ième des valeurs de  $x_1$  et de  $y_1$  avec les conventions suivantes :

1) Les coefficients numériques des différents termes du développement de la puissance sont tous égaux à l'unité.

2) Nous traiterons les indices comme des exposants, en les additionnant algébriquement, les indices de droite avec ceux de droite et les indices de gauche avec ceux de gauche. Nous poserons aussi  $x_{q,0} = y_{q,0} = 0$

L'application de ces conventions aux premières valeurs de  $q$  nous permettra de retrouver les valeurs calculées plus haut pour les  $x_q$  et  $y_q$  correspondants, ce qui montre la légitimité de nos conventions.

Si donc, dans les expressions données plus haut pour  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$ , nous remplaçons les  $x_i$  et  $y_i$  ainsi que leurs dérivées par leurs expressions en fonction de  $\theta$  calculées en faisant usage des conventions ci-dessus, et si nous effectuons les réductions nécessaires, nous obtiendrons finalement les expressions :

$$\begin{aligned} \Phi_q = & -\frac{3}{4} \sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} x_{i,2i-4p'} x_{q-i,2q-2-2i-4p''} \theta^{2q-4(p'+p'')} \\ & -\frac{15}{4} \sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} y_{i,2i-4p'} y_{q-i,2q-2-2i-4(p''-1)} \theta^{2q-4(p'+p'')} \\ & -\sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} \frac{1}{2} (2i - 4p') [2q - 2i - 4p'' + 1] y_{i,2i-4p'} x_{q-i,2q-2i-4p''} \theta^{2q-4(p'+p'')} - \\ & -\sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} \left[ [2q - 2i - 4p'']^2 + \left(\frac{3}{2} + 2m\right) [2q - 2i - 4p''] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2\right] \right] y_{i,2i-4p'} x_{q-i,2q-2i-4p''} \theta^{2q-4(p'+p'')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi'_q = & -\frac{15}{4} \sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} x_{i,2i-4p'} x_{q-i-1,2q-2-2i-4p''} \theta^{2q-4(p'+p'')} \\ & -\frac{3}{4} \sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} y_{i,2i-4p'} y_{q-i-1,2q-2-2i-4(p''-1)} \theta^{2q-4(p'+p'')} \\ & -\sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} \frac{1}{2} (2i - 4p') [2q - 2i - 4p'' - 1] x_{i,2i-4p'} y_{q-i,2q-2i-4p''} \theta^{2q-4(p'+p'')} - \\ & -\sum_i^{q-1} \sum_{p'}^i \sum_{p''}^{q-i} \left[ [2q - 2i - 4p'']^2 - \left(\frac{3}{2} + 2m\right) [2q - 2i - 4p''] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2} (1 + \nu) m^2\right] \right] x_{i,2i-4p'} y_{q-i,2q-2i-4p''} \theta^{2q-4(p'+p'')} \end{aligned}$$

L'examen de ces expressions montre d'abord que  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  sont des fonctions périodiques de  $T$ . Quant à leur forme, on voit que ce sont des fonctions bilinéaires des  $x_{q,k}$  et des  $y_{q,k}$  et que dans chacun des produits  $x_{q,k} y_{q',k'}$  ou  $x_{q,k} x_{q',k'}$  ou encore  $y_{q,k} y_{q',k'}$  les indices de gauche sont complémentaires, leur somme étant égale à  $q$ , mais chacun de ces indices étant inférieur à  $q$ . Quant aux indices de droite, leur somme est égale à l'exposant de la puissance de  $\theta$  correspondante.

Cherchons les conditions pour lesquelles il existera des termes indépendants des  $\theta$ , c'est-à-dire, pour lesquelles le coefficient  $C_q$  ne sera pas nul. il suffit pour cela que l'on ait :

$$2q - 4(p' + p'') = 0$$

ce qui donne :

$$p' + p'' = \frac{q}{2}$$

Comme  $p'$  et  $p''$  sont des nombres entiers, cette équation ne peut exister que si  $q$  est pair, et c'est bien ce que nous avons trouvé en calculant les premiers coefficients  $x_q$  et  $y_q$ .

11. — Revenons aux coefficients  $x_{q,k}$  et  $y_{q,k}$ . Nous disons que ce sont des fonctions rationnelles de  $m$ . Cela est vrai pour  $x_{1,2}$  et  $y_{1,2}$ ; admettons que cela soit vrai jusqu'à  $x_{q-1,k}$  et  $y_{q-1,k}$  inclusivement et démontrons qu'il en est de même pour  $x_{q,k}$  et  $y_{q,k}$ . En effet, cela est vrai pour tous les termes de  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$  qui sont formés par multiplication en partant des coefficients  $x_{a,b}$ , et  $y_{a,b}$  ( $a + b < q$ ): cela est donc vrai des coefficients A et B qui figurent aux seconds membres des équations (25). Les coefficients de ces équations étant rationnels en  $m$ , il en sera de même des inconnues, c'est-à-dire des coefficients  $x_{q,k}$  et  $y_{q,k}$ .

Cherchons quels seront les facteurs des dénominateurs de ces fonctions rationnelles. Ils sont faciles à déterminer. En effet, la résolution des équations (25) introduit au dénominateur un facteur qui est le déterminant de ces équations, et donc la valeur est :

$$D = k^2 [ (1 - 3\gamma) m^2 + 2m - (k^2 - 1) ]$$

expression dans laquelle on devra faire successives :

$$k = 2, 4, 6, 8, \dots$$

ce qui donnera les trinômes :

$$(25 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 [ (1 - 3\gamma) m^2 + 2m - 3 ] \\ 16 [ (1 - 3\gamma) m^2 + 2m - 15 ] \\ 36 [ (1 - 3\gamma) m^2 + 2m - 35 ] \\ 64 [ (1 - 3\gamma) m^2 + 2m - 63 ] \\ \dots \end{array} \right.$$

Si donc on développe dans  $x$  le coefficient de  $\theta^{2k+1}$  suivant les puissances de  $m'$ , le coefficient de chaque puissance est une fonction rationnelle de  $m$  dont le dénominateur est un produit de facteurs de la forme (25 bis), chaque facteur pouvant être élevé à une puissance supérieure à 1.

Nous remarquerons que la composition du dénominateur nous montre que le degré en  $m$  du dénominateur est une puissance de 2. Pour le numérateur, nous voyons facilement que le degré en  $m$  est d'ordre pair. En effet, la résolution des équations (25) donne pour les inconnues des fonctions linéaires des coefficients A et B, chacun d'eux étant multiplié par une fonction de  $m$  qui est au plus du second degré. Mais, A et B sont extraits de  $\Phi_q$  et  $\Phi'_q$ ; ce sont donc des sommes de termes qui sont chacun produit d'un facteur  $x_{q,k}$  et d'un facteur  $y_{q,k}$  ou de deux facteurs  $x_{q,k}$  ou encore de deux facteurs  $y_{q,k}$ , chaque produit étant multiplié par un coefficient de degré 0, 1 ou 2 en  $m$ , au plus. Comme pour  $x_{1,2}$  et  $y_{1,2}$  le numérateur est de degré pair, on voit de proche en proche qu'il en est de même de chaque coefficient  $x_{q,k}$  ou  $y_{q,k}$  et par suite des coefficients A et B relatifs aux  $x_{q,k}$  et  $y_{q,k}$  suivants

12. — Ayant calculé les coefficients  $x_{q,k}$  et  $y_{q,k}$  nous devons maintenant, pour compléter la solution, calculer  $K$  et  $\alpha$ . Mais auparavant nous devons effectuer quelques transformations.

Reprenons les équations (18) et remplaçons  $x$  et  $y$  par  $x^{\theta^{-1}}$  et  $y^{\theta}$ ; nous voyons facilement qu'en posant comme auparavant :

$$m'^2 = \nu m^2$$

elles peuvent s'écrire :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^2 (x^{\theta^{-1}}) + 2 (1 + m) D (x^{\theta^{-1}}) + [ 1 + 2m + (1 + \nu) m^2 ] (x^{\theta^{-1}}) \\ \quad - K \rho^3 (x^{\theta^{-1}}) = - 3 \nu m^2 \theta^{-2} (y^{\theta}) \\ D^2 (y^{\theta}) - 2 (1 + m) D (y^{\theta}) + [ 1 + 2m + (1 + \nu) m^2 ] (y^{\theta}) \\ \quad - K \rho^3 (y^{\theta}) = - 3 \nu m^2 \theta^2 (x^{\theta^{-1}}) \end{array} \right.$$

Nous savons que les valeurs :

$$x^{\theta^{-1}} = 1 \qquad y^{\theta} = 1 \qquad m' = 0$$

satisfont aux équations (22) déduites par combinaison des équations (18) et (19). Nous voyons facilement qu'elles satisferont aux équations (18) à la condition de prendre pour  $K$  la valeur :

$$K = 1 + 2m + (1 + \nu) m^2$$

ce qui constitue une valeur approchée de  $K$ .

Reportons-nous maintenant aux valeurs trouvées pour les développements de  $x^{\theta^{-1}}$  et de  $y^{\theta}$  suivant les puissances de  $m'^2$ . Nous voyons que nous pouvons les écrire sous la forme suivante :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{\theta^{-1}} = 1 + \theta^2 (m'^2 x_{1,2} + m'^6 x_{3,2} + \dots) + \\ \quad + \theta^{-2} (m'^2 y_{1,2} + m'^6 y_{3,2} + \dots) + \\ \quad + \theta^4 (m'^4 x_{2,4} + \dots) + \theta^{-4} (m'^4 y_{2,4} + \dots) + \\ \quad + \theta^6 (m'^6 x_{3,6} + \dots) + \theta^{-6} (m'^6 y_{3,6} + \dots) + \dots \\ y^{\theta} = 1 + \theta^2 (m'^2 y_{1,2} + m'^6 y_{3,2} + \dots) + \\ \quad + \theta^{-2} (m'^2 x_{1,2} + m'^6 x_{3,2} + \dots) + \\ \quad + \theta^4 (m'^4 y_{2,4} + \dots) + \theta^{-4} (m'^4 x_{2,4} + \dots) + \\ \quad + \theta^6 (m'^6 y_{3,6} + \dots) + \theta^{-6} (m'^6 x_{3,6} + \dots) + \dots \end{array} \right.$$

Nous sommes donc conduits à les écrire sous la forme :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{\theta^{-1}} = 1 + \theta^2 (x^{\theta^{-1}})_{0,2} + \theta^{-2} (x^{\theta^{-1}})_{0,-2} + \theta^4 (x^{\theta^{-1}})_{0,4} + \theta^{-4} (x^{\theta^{-1}})_{0,-4} + \theta^6 (x^{\theta^{-1}})_{0,6} + \theta^{-6} (x^{\theta^{-1}})_{0,-6} + \dots \\ y^{\theta} = 1 + \theta^2 (y^{\theta})_{0,2} + \theta^{-2} (y^{\theta})_{0,-2} + \theta^4 (y^{\theta})_{0,4} + \theta^{-4} (y^{\theta})_{0,-4} + \theta^6 (y^{\theta})_{0,6} + \theta^{-6} (y^{\theta})_{0,-6} + \dots \end{array} \right.$$

avec

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^{\theta^{-1}})_{0,2} = m'^2 x_{1,2} + m'^6 x_{3,2} + \dots \\ (x^{\theta^{-1}})_{0,4} = m'^4 x_{2,4} + \dots \\ (x^{\theta^{-1}})_{0,6} = m'^6 x_{3,6} + \dots \\ \dots \\ (y^{\theta})_{0,2} = m'^2 y_{1,2} + m'^6 y_{3,2} + \dots \\ (y^{\theta})_{0,4} = m'^4 y_{2,4} + \dots \\ (y^{\theta})_{0,6} = m'^6 y_{3,6} + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$



Quant aux coefficients  $(x^{\theta-1})_{0,-2h}$  et  $(y^{\theta})_{0,-2h}$  nous voyons facilement, à l'inspection des relations (29) que l'on a :

$$(30) \quad (x^{\theta-1})_{0,-2h} = (y^{\theta})_{0,2h} \qquad (y^{\theta})_{0,-2h} = (x^{\theta-1})_{0,2h}$$

Ceci fait, posons :

$$\begin{aligned} (x^{\theta-1})_{0,2h} &= \xi_{0,2h} + \eta_{0,2h} & (y^{\theta})_{0,2h} &= \xi_{0,2h} - \eta_{0,2h} \\ x^{\theta-1} &= \xi + \eta & y^{\theta} &= \xi - \eta \end{aligned}$$

les relations (30) nous donneront de suite :

$$(30 \text{ bis}) \quad \xi_{0,-2h} = \xi_{0,2h} \qquad \eta_{0,-2h} = -\eta_{0,2h}$$

Remplaçons maintenant dans les équations (26)  $x^{\theta-1}$  et  $y^{\theta}$  par  $\xi$  et  $\eta$  et additionnons les résultats membre à membre, nous obtiendrons l'équation :

$$(31) \quad D^2\xi + 2(1+m)D\eta + [1+2m+(1+\nu)m^2]\xi - K\rho^3\xi = -\frac{3}{2}\nu m^2[\theta^2(x^{\theta-1}) + \theta^{-2}(y^{\theta})]$$

qui va nous servir à calculer la valeur exacte de  $K$ . Remarquons pour cela que, d'après les relations (28),  $\xi$  et  $\eta$  peuvent s'écrire :

$$(32) \quad \begin{aligned} \xi &= 1 + \xi_{0,2}\theta^2 + \xi_{0,4}\theta^{-2} + \xi_{0,6}\theta^4 + \xi_{0,8}\theta^{-4} + \dots \\ \eta &= \eta_{0,2}\theta^2 + \eta_{0,4}\theta^{-2} + \eta_{0,6}\theta^4 + \eta_{0,8}\theta^{-4} + \dots \end{aligned}$$

Désignons maintenant par  $c$  la partie constante de  $\rho^3\xi$  et égalons les parties constantes des deux membres de (31), en nous rappelant que :

$$(y^{\theta})_{0,2} = (x^{\theta-1})_{0,-2}$$

nous obtiendrons pour  $K$  la valeur complétée :

$$(33) \quad cK = 1 + 2m + (1+\nu)m^2 + 3\nu m^2(x^{\theta-1})_{0,-2}$$

et le calcul est ramené à celui de  $c$ .

Il est facile à effectuer car, en négligeant, comme nous l'avons fait, la troisième coordonnée, nous avons :

$$\rho = (xy)^{-\frac{1}{2}} = [(x^{\theta-1})(y^{\theta})]^{-\frac{1}{2}} = [\xi^2 - \eta^2]^{-\frac{1}{2}},$$

nous pouvons donc écrire :

$$\rho^3\xi = \xi [\xi^2 - \eta^2]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\xi^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}\frac{\eta^2}{\xi^{\frac{5}{2}}} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\frac{\eta^4}{\xi^{\frac{7}{2}}} + \dots$$

et posant

$$\xi = 1 + \zeta'$$

nous obtiendrons :

$$\rho^3\xi = 1 - 2\zeta' + 3\zeta'^2 - 4\zeta'^3 + 5\zeta'^4 \dots + \frac{3}{2}\eta^2[1 - 4\zeta' + 10\zeta'^2 - \dots] + \frac{15}{8}\eta^4[1 - 6\zeta' + \dots] \dots$$

La recherche de la partie constante nous donnera enfin  $c$ , en tenant compte des relations (30 bis) appliquées à  $\xi'$  et  $\eta$ . Nous obtiendrons ainsi :

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} c &= 1 + 6\xi_{0,2}^2 - 3\eta_{0,2}^2 + 6\xi_{0,4}^2 - 3\eta_{0,4}^2 - 24\xi_{0,2}^2\xi_{0,4} + 24\xi_{0,2}^2\eta_{0,4} - \\ &- 12\eta_{0,2}^2\eta_{0,4} + 30\xi_{0,2}^4 - 30\xi_{0,2}^2\eta_{0,2}^2 + \frac{45}{8}\eta_{0,2}^4 + \dots \end{aligned} \right.$$

les quantités négligées étant du deuxième ordre par rapport à  $m'$ . On en conclut  $K$ .

Il nous reste à calculer  $a$ . Or, rappelons nous que :

$$f(M_0 + M) = K (n - n')^2 a^3$$

et que, d'autre part, si nous appelons  $a_0$  la valeur du demi grand axe qui correspond à la valeur  $n$  du moyen mouvement, valeur donnée par les observations, nous avons :

$$fM_0 = n^2 a_0^3$$

Le rapprochement de ces deux formules, après avoir fait dans la première  $M = O$ , et après une transformation facile, nous donnera :

$$(35) \quad \frac{a_0}{a} = \left[ \frac{K}{(1+m)^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

d'où  $a$ . D'après la forme de la valeur de  $K$ , on voit que  $a$  diffère peu de  $a_0$  comme nous l'avons dit.

13. — Pour achever le calcul de la première approximation, il faut chercher les valeurs correspondantes de  $r, v, s, X, Y, Z$ . Nous savons déjà que :

$$Z = 0 \quad s = 0$$

CALCUL DE  $r$ . — Nous avons par définition :

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{\rho} = (xy)^{\frac{1}{2}} = [(x^{\theta-1})(y^\theta)]^{\frac{1}{2}} = \epsilon [\xi^2 - \eta^2]^{\frac{1}{2}}$$

ce qui s'écrit, après avoir développé le radical par la formule du binôme :

$$\frac{r}{a} = \xi - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi} - \frac{1}{8} \frac{\eta^4}{\xi^3} - \frac{1}{16} \frac{\eta^6}{\xi^5} - \dots$$

comme nous avons posé :  $\xi = 1 + \xi'$ , nous obtiendrons aisément :

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = & 1 + \xi' - \frac{1}{2} \eta^2 (1 - \xi' + \xi'^2 - \xi'^3 + \xi'^4 - \dots) - \\ & - \frac{1}{8} \eta^4 (1 - 3\xi' + 6\xi'^2 - 10\xi'^3 + \dots) - \frac{1}{16} \eta^6 (1 - 5\xi' + \dots) \dots \end{aligned}$$

Nous devons substituer à  $\xi'$  et  $\eta$  leurs valeurs données plus haut en fonction des  $\theta$ . Nous calculerons donc les puissances successives de  $\xi'$  et de  $\eta$  et les porterons dans la valeur trouvée pour  $\frac{r}{a}$ . Nous poserons de plus :

$$V = N - N'$$

Nous rappelant alors que nous avons :

$$\theta = e^{i(N-N')} \quad 2 \cos V = e^{iV} + e^{-iV}$$

nous obtiendrons pour  $r$  le développement trigonométrique suivant :

$$(35 \text{ bis}) \quad r = r_{0,0} + r_{0,2} \cos 2V + r_{0,4} \cos 4V + \dots$$

avec :

$$(35 \text{ ter}) \quad \begin{cases} r_{0,0} = a [ 1 + \eta_{0,2}^2 + \eta_{0,4}^2 - 2\xi_{0,2} \eta_{0,2} \eta_{0,4} + \xi_{0,2}^2 \eta_{0,2}^2 - \frac{3}{4} \eta_{0,2}^4 \dots ] \\ r_{0,2} = a [ 2\xi_{0,2} \eta_{0,2}^2 - \xi_{0,2} \eta_{0,2}^2 + 2\eta_{0,2} r_{0,4} + \xi_{0,2}^2 \eta_{0,2}^2 \dots ] \\ r_{0,4} = a [ 2\xi_{0,4} - \eta_{0,2}^2 - 2\xi_{0,4} \eta_{0,2}^2 + 2\eta_{0,2} r_{0,6} \dots ] \\ \dots \end{cases}$$

CALCUL DE  $v$ . — Comme nous avons posé :

$$v = N + \frac{l}{i}$$

il se ramène à celui de  $l$ .

Nous devons, pour cela, retourner en arrière. Nous avons, en effet :

$$X = r \operatorname{coss} \cos v \quad Y = r \operatorname{coss} \sin v \quad Z = r \operatorname{sins} \quad ,$$

puis :

$$X_1 = X \cos N' + Y \sin N' \quad Y_1 = -X \sin N' + Y \cos N'$$

Les équations (6) nous donnent alors pour  $x$  et  $y$  :

$$ax = X_1 + iY_1 = (X + iY) e^{-iN'}$$

$$ay = X_1 - iY_1 = (X - iY) e^{iN'}$$

mais d'après les formules rappelées plus haut, nous aurons :

$$X + iY = r \operatorname{cosse}^{iv} \quad X - iY = r \operatorname{cosse}^{-iv}$$

de sorte que les valeurs trouvées pour  $x$  et  $y$  deviendront, en se rappelant que  $\theta = e^{iV}$  :

$$ax = r \operatorname{cosse}^{iV+l} \quad ay = r \operatorname{cosse}^{-iV-l}$$

et, finalement, puisque  $s = \frac{\sigma}{i}$ , nous pourrons écrire :

$$(x^{\theta^{-1}}) = \frac{r}{a} e^{l} \operatorname{Ch} \sigma \quad (y^{\theta}) = \frac{r}{a} e^{-l} \operatorname{Ch} \sigma \quad .$$

Revenant à  $\xi$  et  $\eta$ , nous trouverons facilement, en appliquant leur définition, que l'on a :

$$(36) \quad \xi = \frac{r}{a} \operatorname{Ch} \sigma \operatorname{Ch} l \quad \eta = \frac{r}{a} \operatorname{Ch} \sigma \operatorname{Sh} l \quad z = \frac{r}{a} \operatorname{Sh} \sigma$$

Ceci posé, les deux premières formules (36) donnent par division :

$$\operatorname{Th} \lambda = \frac{\eta}{\xi}$$

formule qui, par inversion, fournit le développement :

$$l = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{3} \frac{\eta^3}{\xi^3} + \frac{1}{5} \frac{\eta^5}{\xi^5} \dots$$

Dans ce développement nous remplacerons, comme plus haut,  $\xi$  par  $1 + \xi'$  et il deviendra :

$$l = \eta (1 - \xi' + \xi'^2 - \xi'^3 + \dots) + \frac{1}{3} \eta^3 (1 - 3\xi' + \dots) + \frac{1}{5} \eta^5 (1 - 5\xi' \dots)$$

Calculons les puissances successives de  $\xi'$  et  $\eta$ , transportons-les dans ce développement, groupons les puissances semblables de  $\theta$ . En nous rappelant que :

$$V = N - N' \quad V = N + \frac{l}{i}$$

$$2i \sin V = e^{iV} - e^{-iV}$$

nous obtiendrons le développement trigonométrique de  $v$  sous la forme :

$$(36 \text{ bis}) \quad v = N + l_{0,2} \sin 2V + l_{0,4} \sin 4V + l_{0,6} \sin 6V \dots$$

avec :

$$(36 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_{0,2} = 2\tau_{0,2} - 2\xi'_{0,2} \eta_{0,4} + 2\tau_{0,2} \xi'_{0,4} + 2\xi'^2_{0,2} \tau_{0,2} - 8\eta^3_{0,2} + 12\xi'_{0,2} \eta^3_{0,2} \tau_{0,4} \dots \\ l_{0,4} = 2\tau_{0,4} - 2\xi'_{0,2} \eta_{0,2} - 2\xi'_{0,2} \eta_{0,6} + 2\eta_{0,2} \xi'_{0,6} + 4\xi'^2_{0,2} \eta_{0,4} - 4\eta^2_{0,2} \eta_{0,4} + 4\xi'_{0,2} \eta^3_{0,2} - 4\xi'^3_{0,2} \eta_{0,2} \dots \\ l_{0,6} = 2\tau_{0,6} - 2\xi'_{0,2} \eta_{0,4} - 4\xi'_{0,4} \eta_{0,2} + 2\xi'^2_{0,2} \tau_{0,2} + \frac{8}{3} \eta^3_{0,2} + 12\xi'_{0,2} \eta^2_{0,2} \tau_{0,4} - 6\xi'_{0,2} \tau_{0,2} \eta_{0,4} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Il nous reste à calculer les coordonnées rectangulaires  $X, Y, Z$  (on sait que  $Z = 0$ ) et la solution périodique annoncée.

CALCUL DE  $X$  ET  $Y$ . — Revenons aux formules (7) qui donnent  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x, y$  et  $N'$ . En nous rappelant la définition de  $\theta$ , nous voyons que ces formules peuvent être écrites sous la forme :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{a}{2} [(x\theta^{-1}) e^{iN} + (y\theta) e^{-iN}] \\ Y = \frac{a}{2i} [(x\theta^{-1}) e^{iN} - (y\theta) e^{-iN}] \end{array} \right.$$

Si nous remplaçons dans ces dernières formules  $x\theta^{-1}$  et  $y\theta$  par leurs développements (formules 28), nous obtiendrons pour  $X$  et  $Y$  les développements simples :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = a \sum (x\theta^{-1})_{0,2h} \cos(N + 2hV) \\ Y = a \sum (x\theta^{-1})_{0,2h} \sin(N + 2hV) \end{array} \right.$$

CALCUL DE LA SOLUTION PÉRIODIQUE. — Nous l'obtiendrons en calculant  $X_1$  et  $Y_1$ . Les équations de définition (6) donnent pour  $X_1$  et  $Y_1$ .

$$X_1 = \frac{a}{2} (x + y) \qquad Y_1 = \frac{a}{2i} (x - y)$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{a}{2} [(x\theta^{-1})_0 + (y\theta)_0] \\ Y_1 = \frac{a}{2i} [(x\theta^{-1})_0 - (y\theta)_0] \end{array} \right.$$

Remplaçant  $(x\theta^{-1})$  et  $(y\theta)$  par leurs développements (28) et effectuant la transformation des exponentielles en lignes trigonométriques, nous obtiendrons pour  $X_1$  et  $Y_1$  les développements :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = A_1 \cos V + A_3 \cos 3V + A_5 \cos 5V + \dots \\ Y_1 = B_1 \sin V + B_3 \sin 3V + B_5 \sin 5V + \dots \end{array} \right.$$

les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} A_1 = a [ 1 + (y\theta)_{0,2} ] & B_1 = a [ 1 - (y\theta)_{0,2} ] \\ A_3 = a [ (x\theta^{-1})_{0,2} + (y\theta)_{0,4} ] & B_3 = a [ (x\theta^{-1})_{0,2} - (y\theta)_{0,4} ] \\ A_5 = a [ (x\theta^{-1})_{0,4} + (y\theta)_{0,6} ] & B_5 = a [ (x\theta^{-1})_{0,4} - (y\theta)_{0,6} ] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Remarquons que les séries (39) constituent une solution périodique des équations du mouvement réduites aux deux premières en faisant  $z = 0$ . La période a pour valeur.

$$\frac{2\pi}{n - n'}$$

C'est la solution périodique annoncée.

Avant de passer à l'étude de la seconde approximation, nous allons nous occuper de la convergence des séries formées dans ce chapitre.

## CHAPITRE II

---

14. — Toutes les séries qui ont été formées jusqu'ici dépendent des coefficients  $(x^{\theta-1})_{0,h}$  et  $(y^{\theta})_{0,h}$  qui sont eux-mêmes des séries procédant suivant les puissances de  $m'^2$ . Avant d'étudier la convergence des séries qui donnent  $X, Y, X_0, Y_0$ , nous devons donc chercher si les séries  $(x^{\theta-1})_{0,h}$  et  $(y^{\theta})_{0,h}$  sont convergentes.

Si nous nous reportons aux formules (29), nous voyons que nous pouvons écrire, en général :

$$\begin{aligned} (x^{\theta-1})_{0,2p} &= m'^{2p} x_{p,2p} + m'^{2p+4} x_{p+2,2p} + \dots + m'^{2p+4(q-1)} x_{p+2(q-1),2p} \dots \\ (y^{\theta})_{0,2p} &= m'^{2p} y_{p,2p} + m'^{2p+4} y_{p+2,2p} + \dots + m'^{2p+4(q-1)} y_{p+2(q-1),2p} \dots \end{aligned}$$

et nous voyons qu'il nous suffira d'étudier une de ces séries, la première, par exemple.

Nous voyons que le terme général de cette série a pour valeur :

$$U_q = m'^{2p+4(q-1)} x_{p+2(q-1),2p} .$$

Nous avons démontré plus haut (Num. 11) que les  $x_{i,j}$  sont des fractions rationnelles en  $m$  et que les degrés des numérateurs et des dénominateurs sont d'ordre pair. Nous pouvons donc écrire  $x_{p+2(q-1),2p}$  sous la forme :

$$x_{p+2(q-1),2p} = \frac{Am^{2h} + Bm^{2h-2} + \dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2} + \dots}$$

Pour étudier la convergence de la série de terme général  $U_q$  nous allons appliquer la règle de Cauchy, car c'est une série numérique, et chercher la limite de  $\sqrt[q]{|U_q|}$  lorsque  $q$  augmente indéfiniment. Or, on a :

$$|U_q| = m'^{2p+4q} \left( \frac{Am^{2h} + Bm^{2h-2} + \dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2} + \dots} \right) \quad m' > 0$$

Nous pouvons écrire la fraction entre parenthèses sous la forme :

$$|m|^{2h-2h'} \left( \frac{Am^{2h'} + Bm^{2h'-2} + \dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2} + \dots} \right)$$

de sorte que l'on aura :

$$\sqrt[q]{|U_q|} = m'^{\frac{2p}{q} + 4(1-\frac{1}{q})} |m|^{\frac{2h-2h'}{q}} \left( \frac{Am^{2h'} + Bm^{2h'-2} + \dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2} + \dots} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Effectuons la division indiquée pour la quantité entre parenthèse, et nous pourrions écrire  $\sqrt[q]{|U_q|}$  sous la forme :

$$\sqrt[q]{|U_q|} = m'^{\frac{2p}{q} + 4(1-\frac{1}{q})} |m|^{\frac{2h-2h'}{q}} \left| \frac{A}{A'} + \varphi(m) \right|^{\frac{1}{q}}$$

$\varphi(m)$  étant une fraction rationnelle en  $m$  dont le numérateur a un degré inférieur à celui du dénominateur. Si, maintenant, nous développons la parenthèse par la formule du binôme, nous obtiendrons finalement pour  $\sqrt[q]{|U_q|}$  :

$$\sqrt[q]{|U_q|} = m'^{\frac{2p}{q} + 4(1-\frac{1}{q})} |m|^{\frac{2h-2h'}{q}} \left| \left( \frac{A}{A'} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{q} \left( \frac{A}{A'} \right)^{\frac{1}{q}-1} \varphi(m) \dots \right|$$

Faisons croître  $q$  indéfiniment, les deux premiers facteurs tendent respectivement vers  $m'^4$  et 1 car  $2h - 2h'$  est un nombre fini. Dans la parenthèse, le premier terme tend vers 1 et tous les autres termes tendent vers zéro car ils sont formés d'une partie numérique finie, multipliée par une puissance de  $\frac{1}{q}$  qui tend vers zéro. La parenthèse tend donc vers 1 et l'on a, lorsque  $q$  augmente indéfiniment :

$$\lim. \sqrt[q]{|U_q|} = m'^4$$

Evaluons  $m'^4$ . A l'exception des planètes Troyennes avec Jupiter, pour toutes les autres petites planètes, le paramètre  $m$  a une valeur numérique inférieure à 10, de sorte que son carré est inférieur à 100. Comme, d'autre part, la quantité que nous avons appelé  $\nu$  est donnée par l'égalité :

$$2\nu = \frac{M'}{M_0 + M'}$$

$M_0$  étant la masse du Soleil et  $M'$  celle de la planète troublante, il en résulte que dans le cas le plus défavorable qui est celui de Jupiter,  $2\nu$  est au maximum de l'ordre de  $10^{-3}$  et  $\nu$  de l'ordre de 0,0005. Le produit  $\nu m^2 = m'^2$  est donc, au plus, si on prend pour  $m$  le nombre 10 et pour  $\nu$  le nombre 0,00045 qui correspond à Jupiter, égal à :

$$0,00045 \times 10^2 = 0,045$$

de sorte que la limite de  $\sqrt[q]{|U_q|}$  est au plus égale à 0,002025

Il en résulte que la série de terme général  $|U_q|$  est convergente de sorte que la série de terme général  $U_q$  qui représente le coefficient  $(x^{h-1})_{0,2p}$  est absolument convergente.

De la même manière on verrait que la série qui représente le coefficient  $(x^h)_{0,2p}$  est absolument convergente, la limite de  $\sqrt[q]{|V_q|}$  étant égale elle aussi à  $m'^4$ .

Passons aux séries qui représentent  $X$  et  $Y$ . Nous savons que pour les deux séries, le coefficient de la ligne trigonométrique est  $(x^{h-1})_{0,2h}$ . Or, on peut écrire :

$$(x^{h-1})_{0,2h} = m'^{2p} [x_{p,2h} + m'^4 x_{p+2,2h} + \dots + m'^{4(q-1)} x_{2(q-1),2h} \dots]$$

et nous venons de prouver que la série entre parenthèses est absolument convergente. Elle a donc une limite finie et on pourra écrire :

$$(x^{h-1})_{0,2h} = m'^{2p} H$$

de sorte que le terme général de la série qui représente  $X$  pourra s'écrire, en valeur absolue :

$$|U_p| = m'^{2p} |H| |\cos(N + 2hV)| \quad m' > 0$$

Comme le cos est inférieur à l'unité, il nous suffira d'étudier la série de terme général :

$$|U'_p| = m'^{2p} |H|$$

et chercher la limite de  $\sqrt[p]{|U'_p|}$  quand  $p$  augmente indéfiniment. On voit facilement que l'on a encore :

$$\lim. \sqrt[p]{|U'_p|} = m'^2 < 1$$

de sorte que la série de terme général  $U_p$  est absolument convergente et, comme la série qui représente  $X$  est obtenue en multipliant chaque terme de la série  $U$  par un cosinus, et que celui-ci est, en valeur absolue, inférieur à l'unité, il en résulte que les termes de la série qui représente  $X$  sont respectivement inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants d'une série numérique absolument convergente. La série qui représente  $X$  est donc uniformément convergente. On démontrerait de même la convergence uniforme de la série qui représente  $Y$ .

Passons à la solution périodique. Les termes généraux des séries qui représentent  $X_0$  et  $Y_0$  ont respectivement pour expression :

$$\begin{aligned} U_p &= a [ (x^{\theta-1})_{0,2p} + (y^{\theta})_{0,2p+2} ] \cos (2p + 1) V \\ V_p &= a [ (x^{\theta-1})_{0,2p} - (y^{\theta})_{0,2p+2} ] \sin (2p + 1) V \end{aligned}$$

et nous devons étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont :

$$\begin{aligned} U'_p &= a [ (x^{\theta-1})_{0,2p} + (y^{\theta})_{0,2p+2} ] \\ V'_p &= a [ (x^{\theta-1})_{0,2p} - (y^{\theta})_{0,2p+2} ] \end{aligned}$$

et nous pouvons étudier une seule série de terme général :

$$W_p = a [ (x^{\theta-1})_{0,2p} + \varepsilon (y^{\theta})_{0,2p+2} ]$$

$\varepsilon$  étant égal à  $+1$  pour obtenir  $U'_p$  et à  $-1$  pour obtenir  $V'_p$ .

Les séries qui représentent les coefficients  $(x^{\theta-1})_{0,2h}$  et  $(y^{\theta})_{0,2h}$  étant absolument convergentes, nous pouvons écrire ces coefficients sous la forme :

$$(x^{\theta-1})_{0,2h} = m'^{2h} H \qquad (y^{\theta})_{0,2h} = m'^{2h} H'$$

où  $H$  et  $H'$  sont des quantités finies. Le terme général  $W_p$  pourra donc être écrit sous la forme :

$$W_p = a m'^{2p} [ H + \varepsilon m'^2 H' ]$$

et nous allons chercher la limite de  $\sqrt[p]{|W_p|}$  quand  $p$  augmente indéfiniment.

Nous pouvons écrire :

$$W_p = a m'^{2p} H \left[ 1 + \varepsilon m'^2 \frac{H'}{H} \right]$$

et, par suite, nous aurons :

$$\sqrt[p]{|W_p|} = m'^2 \left| a H \left[ 1 + \varepsilon m'^2 \frac{H'}{H} \right] \right|^{\frac{1}{p}}$$

ce qui s'écrit, après avoir développé le dernier facteur par la formule du binôme :

$$\sqrt[p]{|W_p|} = m'^2 \left| a H \right|^{\frac{1}{p}} \left| 1 + \frac{1}{p} \varepsilon m'^2 \frac{H'}{H} + \dots \right|$$

Lorsque  $p$  augmente indéfiniment, le premier facteur tend vers l'unité. Dans le dernier facteur, tous les termes, à partir du deuxième, sont formés d'un facteur numérique fini multiplié par une puissance de  $\frac{1}{p}$  qui tend vers zéro quand  $p$  augmente indéfiniment. Tous ces termes tendent donc vers zéro et le dernier facteur tend vers l'unité. On a donc :

$$\lim. \sqrt[p]{|W_p|} = m'^2 < 1$$

et la série de terme général  $W_p$  est absolument convergente. Il en est de même, par suite des séries de termes généraux  $U'_p$  et  $V'_p$ . Mais les séries qui représentent  $X_0$  et  $Y_0$  sont obtenues en multipliant  $U'_p$  et  $V'_p$  respectivement par  $\cos (2p + 1)V$  et  $\sin (2p + 1)V$  quantités inférieures à l'unité en valeur absolue. Ces séries ont donc leurs termes respectivement inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants d'une série numérique absolument convergente. Les séries qui représentent  $X_0$  et  $Y_0$  sont donc uniformément convergentes.

Il nous reste à étudier les séries qui représentent  $r$  et  $v$ . Prenons  $r$ . En examinant les formules (35 ter), nous voyons que la forme générale des coefficients  $r_{0,2h}$  est :

$$r_{0,2h} = a [ 2\xi_{0,2h} - \dots ]$$

les termes, à partir du deuxième étant de degré supérieur en  $m'$  par rapport au degré du premier terme. Or si nous retournons en arrière, nous voyons que nous avons :

$$2\xi_{0,2h} = (x^{\theta-1})_{0,2h} + (y^{\theta})_{0,2h} \quad 2r_{0,2h} = (x^{\theta-1})_{0,2h} - (y^{\theta})_{0,2h}$$

et, comme les séries qui représentent  $(x^{\theta-1})_{0,2h}$  et  $(y^{\theta})_{0,2h}$  sont absolument convergentes, nous pouvons écrire, les  $H$  et  $H'$  étant des quantités finies :

$$2\xi_{0,2h} = m'^{2h} (H + H') \\ 2r_{0,2h} = m'^{2h} (H - H')$$

Le coefficient  $r_{0,2h}$  pourra donc être écrit sous la forme :

$$r_{0,2h} = a [ m'^{2h} (H - H') - \dots ]$$

ou encore sous la forme :

$$r_{0,2h} = am'^{2h} (H - H') [ 1 - \dots ]$$

Nous allons étudier la limite de  $\sqrt[h]{|r_{0,2h}|}$  quand  $h$  croît indéfiniment. Nous pouvons écrire :

$$\sqrt[h]{|r_{0,2h}|} = m'^2 | a (H + H') |^{\frac{1}{h}} | 1 - \dots |^{\frac{1}{h}}$$

ou, après avoir développé le dernier facteur par la formule du binôme :

$$\sqrt[h]{|r_{0,2h}|} = m'^2 | a (H + H') |^{\frac{1}{h}} | 1 - \dots |$$

tous les termes, dans le dernier facteur, à partir du deuxième, étant le produit d'un facteur numérique fini et d'une puissance de  $\frac{1}{h}$ . Ces termes tendent donc vers zéro avec  $\frac{1}{h}$  et le dernier facteur tend vers 1 quand  $h$  augmente indéfiniment. Les deux premiers facteurs tendent vers 1 dans les mêmes conditions et l'on a :

$$\lim. \sqrt[h]{|r_{0,2h}|} = m'^2 < 1$$

La série formée par les coefficients des cosinus dans le développement de  $r$  est donc absolument convergente. Mais le développement de  $r$  est obtenu en multipliant chaque terme de la série précédente par un cosinus, quantité, en valeur absolue, inférieure à 1. La série qui représente  $r$  est donc uniformément convergente.

On démontrerait de même la convergence uniforme de la série qui représente  $v$ . Le raisonnement est le même que pour  $r$  et il suffit de prendre  $\eta_{0,2h}$  au lieu de  $\xi_{0,2h}$ . Les  $l_{0,2h}$  ont la même forme générale que les  $r_{0,2h}$ ,  $\xi_{0,2h}$  étant remplacé par  $\eta_{0,2h}$ . On trouve :

$$\lim. \sqrt[h]{|l_{0,2h}|} = m'^2 < 1$$



### CHAPITRE III

---

15. -- Nous nous sommes occupés seulement jusqu'ici de la première approximation, c'est-à-dire de calculer une solution dans laquelle nous avons négligé la fonction  $F$  et la troisième coordonnée. Nous allons nous occuper maintenant des approximations suivantes. Nous ne nous occuperons plus des coordonnées  $X_1, Y_1$ , et nous partirons de la solution périodique obtenue que nous affecterons de l'indice zéro, tant pour les coordonnées rectangulaires que pour les coordonnées polaires et les variables complexes  $x$  et  $y$ .

Nous appellerons  $\delta x$  et  $\delta y$  les accroissements que subissent  $x_0$  et  $y_0$  quand on rétablit la troisième coordonnée  $z$  dans les équations.

Nous partirons du système d'équations (16) et nous substituerons à  $x$  et  $y$  les quantités :

$$x = x_0 + \delta x \qquad y = y_0 + \delta y$$

Nous remarquerons d'abord que  $\rho^2 x, \rho^2 y, \rho^2 z$ , dépendent de  $z$  par la fonction  $\rho$ . Nous ne connaissons que la valeur particulière  $\rho_0$  de  $\rho$  trouvée au chapitre premier. Nous tournerons la difficulté en développant les trois fonctions  $\rho^2 x, \rho^2 y, \rho^2 z$ , suivant les puissances de  $\delta x, \delta y, z$ , en nous rappelant que :

$$\rho_0 = (x_0 y_0)^{-\frac{1}{2}}$$

Nous conserverons dans le premier membre de chacune des équations (16) les termes du premier degré en  $\delta x, \delta y, z$ , et nous ferons passer au second membre les autres termes. Nous désignerons par  $U, V, Z$  les deuxièmes membres formés et, après avoir tenu compte des équations (18), nous obtiendrons pour déterminer  $\delta x, \delta y, z$  le système d'équations .

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^2 \delta x + 2mD\delta x + (1 - 2\nu) m^2 x + \left[ \frac{1}{2} K\rho_0^4 + 3\nu m^2 \right] \delta x + \left[ \frac{3}{2} K\rho_0^3 x^2_0 + 3\nu m^2 \right] \delta y = U \\ D^2 \delta y - 2mD\delta y + (1 - 2\nu) m^2 y + \left[ \frac{1}{2} K\rho_0^3 + 3\nu m^2 \right] \delta y + \left[ \frac{3}{2} K\rho_0^3 y^2_0 + 3\nu m^2 \right] \delta x = V \end{array} \right.$$

$$(41) \quad D^2 z - [K\rho_0^3 + 2\nu m^2] z = Z$$

où  $U, V, Z$ , ont les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = -2 \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{3}{2} K\rho_0^3 [x_0 \delta x \delta y + y_0 \delta x^2] + \frac{3}{2} K\rho_0^3 [x_0 \delta x \delta y - x_0 z^2] \dots \\ V = -2 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{3}{2} K\rho_0^3 [y_0 \delta x \delta y + x_0 \delta y^2] + \frac{3}{2} K\rho_0^3 [y_0 \delta x \delta y + y_0 z^2] \dots \\ Z = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{3}{2} K\rho_0^3 [y_0 z \delta x + x_0 z \delta y] \dots \end{array} \right.$$

Si, maintenant, nous ajoutons membre à membre les équations (40) après les avoir multipliées respectivement par  $Dy_0$  et  $Dx_0$ , et si nous tenons compte des équations (18) dont les premiers membres auront été préalablement différenciés, puis, si nous intégrons les deux membres de la combinaison trouvée, nous obtiendrons ce que devient l'intégrale (19) quand on introduit  $\delta x$  et  $\delta y$ . Nous aurons ainsi :

$$(42) \quad Dy_0 D\delta x + Dx_0 D\delta y - [D^2 y_0 - 2mDy_0] \delta x - [D^2 x_0 + 2mDx_0] \delta y = J$$

avec :

$$Dj = UDy_0 + VDx_0$$

L'expression précédente peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} Dy_0 D\delta x + Dx_0 D\delta y - [ K\rho^3_0 y_0 - (1 - 2\nu) m^2 y_0 - 3\nu m^2 (x_0 + y_0) ] \delta x \\ - [ K\rho^3_0 x_0 - (1 - 2\nu) m^2 x_0 - 3\nu m^2 (x_0 + y_0) ] \delta y = J \end{array} \right.$$

16. — Remarquons que les équations (40), si l'on y néglige les seconds membres, sont les équations aux variations des deux premières équations (16) et, de même, si l'on néglige J, l'équation (42) est l'équation aux variations de l'intégrale (19).

Nous savons que ces équations aux variations sont satisfaites si l'on prend pour  $\delta x$  et  $\delta y$  les valeurs :

$$\delta x = Dx_0 \quad \delta y = Dy_0$$

et nous allons essayer d'obtenir la solution des équations (40) et (41), auxquelles nous ajouterons l'équation (42), en prenant pour  $\delta x$  et  $\delta y$  des valeurs de la forme ;

$$\delta x = x_1 Dx_0 \quad \delta y = -y_1 Dy_0$$

$x_1$  et  $y_1$  étant deux nouvelles variables conjuguées comme  $\delta x$  et  $\delta y$ .

Effectuant la substitution indiquée dans les premiers membres des équations (40) et (42), et tenant compte des équations (18) dont les premiers membres auront été différenciés préalablement, nous obtiendrons les équations suivantes dans lesquelles nous voyons apparaître les combinaisons  $x_1 + y_1$  et  $x_1 - y_1$  :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} Dx_0 D^2 x_1 + 2 [ D^2 x_0 + m Dx_0 ] Dx_1 + (x_1 + y_1) [ D^3 x_0 + 2m D^2 x_0 + (1 - 2\nu) m^2 Dx_0 + [ \frac{1}{2} K\rho^3_0 + 3\nu m^2 ] Dx_0 ] = U \\ Dy_0 D^2 y_1 + 2 [ D^2 y_0 - m Dy_0 ] Dy_1 + (x_1 + y_1) [ D^3 y_0 - 2m D^2 y_0 + (1 - 2\nu) m^2 Dy_0 + [ \frac{1}{2} K\rho^3_0 + 3\nu m^2 ] Dy_0 ] = -V \end{array} \right.$$

$$(45) \quad Dx_0 Dy_0 D (x_1 - y_1) + (x_1 + y_1) [ Dy_0 D^2 x_0 - Dx_0 D^2 y_0 + 2m Dx_0 Dy_0 ] = J$$

Les combinaisons  $x_1 + y_1$ ,  $x_1 - y_1$ , qui apparaissent mêlées aux dérivées de  $x_1$  et de  $y_1$ , nous induisent à transformer les équations (44) de telle sorte qu'elles ne contiennent plus que ces combinaisons. Pour obtenir ce résultat, nous les ajouterons membre à membre après les avoir multipliées respectivement par  $Dy_0$  et  $Dx_0$ . Nous obtiendrons ainsi l'équation :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} Dx_0 Dy_0 D^2 (x_1 + y_1) + [ Dy_0 D^2 x_0 + Dx_0 D^2 y_0 ] D (x_1 + y_1) + [ Dy_0 D^2 x_0 - Dx_0 D^2 y_0 + 2m Dx_0 Dy_0 ] D (x_1 - y_1) + \\ (x_1 + y_1) [ Dy_0 D^3 x_0 + Dx_0 D^3 y_0 + 2m [ Dy_0 D^2 x_0 - Dx_0 D^2 y_0 ] + Dx_0 Dy_0 [ K\rho^3_0 + 2m^2 + 2\nu m^2 ] ] = UDy_0 - VDx_0 \end{array} \right.$$

que nous conserverons avec l'équation (45).

Il s'agit de transformer à nouveau les équations (45) et (46) pour les simplifier le plus possible. Nous poserons pour cela :

$$(47) \quad x_1 = a' + b \quad y_1 = a' - b$$

$a'$  et  $b$  étant deux nouvelles variables conjuguées comme  $x_1$  et  $y_1$ .

L'examen des équations (45) et (46) nous conduit à poser :

$$P = \frac{1}{2} \left[ \frac{D^2 x_0}{Dx_0} - \frac{D^2 y_0}{Dy_0} \right] + m \quad Q = \frac{1}{2} \left[ \frac{D^2 x_0}{Dx_0} - \frac{D^2 y_0}{Dy_0} \right]$$

Nous tirerons facilement de là :

$$\frac{D^2 x_0}{Dx_0} + \frac{D^2 y_0}{Dy_0} = 2DQ + 2Q^2 + 2(P - m)^2$$

Après avoir divisé les deux membres des équations (45) et (46) par  $Dx_0 Dy_0$  et si nous tenons compte des valeurs de P et Q, elles deviennent, après avoir opéré la substitution (47) :

$$D^2 a' + 2QDa' + 2PDb + a' [2DQ + 2Q^2 + 2P^2 + K\rho_0^3 + 2m^2 + 2vm^2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{U}{Dx_0} - \frac{V}{Dy_0} \right]$$

$$Db + 2Pa' = \frac{J}{2Dx_0 Dy_0}$$

Éliminons  $b$  de la première équation au moyen de la seconde et posons :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{V - 2Dx_0 Dy_0}}$$

égalité qui nous donne par dérivation :

$$Q = -\frac{D\Delta}{\Delta} \qquad DQ = -\frac{D^2\Delta}{\Delta} + \frac{(D\Delta)^2}{\Delta^2}$$

nous pourrions écrire les équations sous la forme :

$$(48) \quad D^2 a' + 2QDa' + a' [2DQ + 2Q^2 - 2P^2 + K\rho_0^3 + 2m^2 + 2vm^2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{U}{Dx_0} - \frac{V}{Dy_0} \right] + JP\Delta^2$$

$$(49) \quad Db + 2Pa' = -\frac{1}{2} J\Delta^2$$

Si, maintenant, nous remarquons que l'on a :

$$\Delta \cdot D \frac{a'}{\Delta} = D^2 a' + 2QDa' + a'DQ + a'Q^2$$

et si nous posons :

$$a' = a''\Delta$$

nous voyons que l'équation dont dépend  $a'$  peut s'écrire sous la forme :

$$D^2 a'' + a'' [DQ + Q^2 - 2P^2 + K\rho_0^3 + 2m^2 + 2vm^2] = \frac{1}{2} \left[ U\sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}} - V\sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}} \right] + JP\Delta$$

et l'équation dont dépend  $b$  devient, dans les mêmes conditions :

$$Db = -2P\Delta a'' - \frac{1}{2} J\Delta^2$$

Enfin, si nous posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} W = 2P^2 - Q^2 - DQ - (K\rho_0^3 + 2m^2 + 2vm^2) \\ B = -2P\Delta a'' - \frac{1}{2} J\Delta^2 \\ \Xi = \frac{1}{2} \left[ U\sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}} - V\sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}} \right] + JP\Delta \end{array} \right.$$

nous voyons que les équations (40) ont été transformées en les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^2 a'' - Wa'' = \Xi \\ Db = B \end{array} \right.$$

de sorte que la solution du système formé par les équations (40) et (41) est ramenée à la solution du système :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^2 a'' - Wa'' = \Xi \\ Db = B \\ D^2 z - [K\rho_0^3 + 2vm^2] z = Z \end{array} \right.$$

On voit que la première et la troisième équation sont du même type, linéaires du second ordre, et qu'elles ne contiennent chacune, au premier membre, qu'une seule fonction inconnue. La deuxième est linéaire et du premier ordre, mais son second membre dépend de  $a''$ . On ne pourra donc l'intégrer qu'après la première.

Supposons intégré le système (50). Connaissant  $a''$  et  $b$ , nous aurons pour  $x_1$  et  $y_1$  :

$$(51) \quad x_1 = a' + b = a''\Delta + b \quad y_1 = a' - b = a''\Delta - b \quad ,$$

Or, nous avons écrit :

$$x^{(1)} = \xi + \eta \quad y^{(1)} = \xi - \eta$$

et nous savons que :

$$x = x_0 + \delta x \quad y = y_0 + \delta y$$

nous voyons donc facilement que nous pouvons écrire aussi :

$$\theta^{-1}\delta x = \delta\xi + \delta\eta \quad \theta\delta y = \delta\xi - \delta\eta$$

équations qui nous donneront :

$$2\delta\xi = \theta^{-1}\delta x + \theta\delta y \quad 2\delta\eta = \theta^{-1}\delta x - \theta\delta y$$

Mais

$$\delta x = x_1 D x_0 \quad \delta y = y_1 D y_0 \quad ,$$

par suite, les équations (51) peuvent être écrites sous la forme :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x = (a''\Delta + b) D x_0 = a'' \sqrt{\frac{-D x_0}{D y_0}} + b D x_0 \\ \delta y = -(a''\Delta - b) D y_0 = a'' \sqrt{\frac{-D y_0}{D x_0}} + b D y_0 \end{array} \right.$$

Nous obtiendrons enfin  $\delta\xi$  et  $\delta\eta$  sous la forme :

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\delta\xi = a'' \left[ \theta^{-1} \sqrt{\frac{-D x_0}{D y_0}} + \theta \sqrt{\frac{-D y_0}{D x_0}} \right] + b [\theta^{-1} D x_0 + \theta D y_0] \\ 2\delta\eta = a'' \left[ \theta^{-1} \sqrt{\frac{-D x_0}{D y_0}} - \theta \sqrt{\frac{-D y_0}{D x_0}} \right] + b [\theta^{-1} D x_0 - \theta D y_0] \end{array} \right.$$

L'inspection de ces formules nous conduit à poser

$$\theta^{-1} D x_0 = u + v \quad \theta D y_0 = u - v$$

et remarquant que :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-2 D x_0 D y_0}}$$

nous obtiendrons enfin pour  $\delta\xi$  et  $\delta\eta$  les formules très simples :

$$(54) \quad \delta\xi = (a''\Delta) u + b v \quad \delta\eta = (a''\Delta) v + b u$$

17. — Nous allons passer maintenant à l'intégration du système (50).

Comme la première et la troisième des équations (50) sont du même type, nous ferons l'intégration pour une équation générale de ce type :

$$(55) \quad D^2\sigma - \varphi(T)\sigma = \Phi$$

et l'intégrale générale obtenue, nous passerons à celles des équations données en faisant successivement :

$$\begin{aligned} \varphi (1) &= W & \Phi &= \Xi \\ \varphi (T) &= K\varphi_0 + 2vm^2 & \Phi &= Z \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la fonction  $\varphi$  est périodique et peut être développée en série trigonométrique procédant suivant les cosinus des multiples pairs de  $V$ .

L'équation sans second membre est donc une équation linéaire à coefficients périodiques. On sait que son intégrale générale une fois obtenue, l'intégrale générale de l'équation avec second membre pourra se calculer facilement par quadratures. D'autre part, la théorie des équations linéaires à coefficients périodiques nous montre que, si l'on désigne une solution particulière de l'équation par :

$$\sigma_1 = \theta^{a_0} \sum m_{1,k} \theta^k \quad (\theta = e^{i(N-N')})$$

on obtiendra une autre solution particulière en prenant :

$$\sigma_2 = \theta^{-a_0} \sum m_{2,k} \theta^k$$

la série étant conjuguée de la première, c'est-à-dire que l'on a :

$$m_{2,k} = m_{1,-k}$$

Les solutions particulières  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant formées, la solution générale aura pour expression :

$$\sigma = C_1 \sigma_1 + C_2 \sigma_2$$

Nous obtiendrons alors la solution générale de l'équation avec second membre en appliquant la méthode de Lagrange, c'est-à-dire en résolvant le système :

$$\begin{aligned} \sigma_1 DC_1 + \sigma_2 DC_2 &= 0 \\ D\sigma_1 DC_1 + D\sigma_2 DC_2 &= \Phi \end{aligned}$$

Or, si on se rappelle que le déterminant du système :

$$c = \sigma_2 D \sigma_1 - \sigma_1 D \sigma_2$$

est constant, on obtiendra :

$$c DC_1 = \sigma_2 \Phi \quad c DC_2 = -\sigma_1 \Phi$$

Intégrant et remplaçant  $C_1$  et  $C_2$  par les valeurs trouvées dans l'expression donnée plus haut de l'intégrale générale, nous obtiendrons, pour l'équation complète, l'intégrale générale :

$$(56) \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{c} D^{-1} (\sigma_2 \Phi) - \frac{\sigma_2}{c} D^{-1} (\sigma_1 \Phi)$$

le symbole  $D^{-1}$  représentant l'intégration. Nous utiliserons plus tard cette formule.

Pour intégrer l'équation (55) nous utiliserons la méthode des coefficients indéterminés. Soit :

$$\sigma = \theta^{a_0} \sum m_{1,k} \theta^k$$

une solution. Comme  $\varphi (T)$  est périodique, cette fonction peut être représentée par le développement :

$$\varphi (T) = \sum \varphi_k \theta^k$$

Substituons ces deux séries dans l'équation (55) sans second membre et annulons les coefficients des diverses puissances de  $\theta$ . Si nous posons :

$$n_k = (a_0 + k)^2 - \varphi_0$$

en sorte que :

$$n_0 = a_0^2 - \varphi_0 \quad n_k = k^2 + 2ka_0 + n_0$$

les relations obtenues prendront la forme :

$$(57) \quad n_k m_{1,k} = \sum m_{1,i} \varphi_i \quad i + j = k, i \neq 0$$

D'après la définition des  $n_k$ , on voit que tout revient à calculer  $n_0$ , ce qui permettra aussi le calcul de  $a_0$ .  
Remarquons que si l'on fait  $k = 0$ , les séries se réduisent chacune à son premier terme et que l'on obtient ainsi :

$$n_0 = 0$$

Ceci fait la relation

$$n_0 = a_0^2 - \varphi_0$$

donne une première valeur approchée de  $a_0$  :

$$a_0 = \sqrt{\varphi_0}$$

et l'on se rappelle que  $\varphi_0$  est développé suivant les puissances de  $\nu m^2$ . En transportant cette série dans l'équation de définition des  $n_k$ , on verra aisément que ces quantités se présentent sous forme de séries procédant suivant les puissances de  $\nu m^2$  et dont le terme indépendant de  $\nu m^2$  n'est pas nul.

Remarquons maintenant que pour  $\nu m^2 = 0$ , les solutions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de l'équation sans second membre doivent se réduire respectivement à  $\theta$  et  $\theta^{-1}$ . Cela indique que l'on devra trouver pour  $a_0$  une valeur voisine de l'unité, mais il faudra pour cela que les rapports :

$$\frac{m_{1,k}}{m_{1,0}}$$

s'annulent avec  $\nu m^2$ . Comme le coefficient  $m_{1,0}$  est arbitraire, nous prendrons :

$$m_{1,0} = 1$$

Faisons maintenant  $k = 0$  dans la formule (57), nous obtiendrons : ( car  $\varphi_{-j} = \varphi_j$  )

$$n_0 = \sum m_{1,j} \varphi_j,$$

remplaçons  $m_{1,j}$  par sa valeur tirée de la même formule (57) :

$$m_{1,j} = \frac{1}{n_j} \sum m_{1,j-j'} \varphi_{j'},$$

nous obtiendrons pour  $n_0$  :

$$n_0 = \sum \frac{\varphi_j \varphi_{j'}}{n_j} m_{1,j-j'}.$$

Remplaçons dans cette dernière formule, dans tous les termes dont l'indice  $j - j'$  n'est pas nul,  $m_{1,j-j'}$  par sa valeur tirée de la formule (57) :

$$m_{1,j-j'} = \frac{1}{n_{j-j'}} \sum m_{1,j-j'-j''} \varphi_{j''}$$

et ainsi de suite, nous obtiendrons enfin pour déterminer  $n_0$  l'équation :

$$(58) \quad n_0 = \sum \frac{\varphi_j \varphi_j}{n_j} + \sum \frac{\varphi_j \varphi_{j'} \varphi_{j''}}{n_j n_{j-j'}} + \dots$$

dans laquelle, pour chaque groupe, la somme  $j - j' - j'' - \dots$  sera nulle sans qu'aucune des précédentes le soit, le nombre des facteurs de chaque dénominateur étant inférieur d'une unité au nombre des facteurs du numérateur correspondant.

Le calcul de  $n_0$  montre qu'il suffit d'obtenir le premier terme de cette formule, et nous l'écrivons sous la forme :

$$(59) \quad n_0 = \varphi_0^2 \left[ \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_{-2}} \right] + \varphi_0'^2$$

qui nous permettra de passer au calcul effectif de  $n_0$ .

La formule (59) peut être écrite sous la forme :

$$(60) \quad n_0 = \varphi_2^2 \frac{n_{-2} + n_2}{n_2 n_{-2}} + \varphi'_2 \quad ,$$

or on a :

$$n_2 = 4 + 4\alpha_0 + n_0 \quad \quad n_{-2} = 4 - 4\alpha_0 + n_0$$

et ceci permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} n_2 + n_{-2} &= 8 + 2n_0 \\ n_2 n_{-2} &= (4 + n_0)^2 - 16\alpha_0^2 = (4 + n_0)^2 - 16(n_0 + \varphi_0)^2 \end{aligned}$$

Si nous portons ces expressions dans la formule (60), nous obtiendrons, pour déterminer  $n_0$ , l'équation :

$$(61) \quad 8n_0^2 + 2n_0(8\varphi_0 - 8 + \varphi_2^2) + 8\varphi_2^2 + n_2 n_{-2} \varphi'_2 - n_0^3 = 0$$

En posant :

$$A = \varphi_0 - 1 + \frac{\varphi_2^2}{8} \quad B = \sqrt{A - \varphi_2^2} \quad C = \frac{1}{16} (n_2 n_{-2} \varphi'_2 - n_0^3)$$

nous obtiendrons enfin pour  $n_0$  la valeur :

$$n_0 = -A + \sqrt{B^2 - 2C}$$

Enfin, si nous développons le radical suivant les puissances de  $\frac{C}{B}$  et si nous remplaçons  $B - A$  par :

$$\frac{B^2 - A^2}{B + A} = -\frac{\varphi_2^2}{B + A} \quad ,$$

nous obtiendrons pour  $n_0$  la série :

$$(62) \quad n_0 = -\frac{\varphi_2^2}{B+A} - \frac{C}{B^2} - \frac{1}{2} \frac{C^2}{B^3} \dots$$

Connaissant  $n_0$  nous obtiendrons  $\alpha_0$  au moyen de la relation :

$$n_0 = \alpha_0^2 - \varphi_0$$

Le calcul de  $n_0$  s'effectuera de la façon suivante : on connaît les  $\varphi_i$ , on pourra donc calculer A et B et une première valeur approchée de  $n_0$  par la formule :

$$n = -\frac{\varphi_2^2}{A+B}$$

On calculera ensuite les  $n_k$  d'une façon approchée en prenant :

$$n_2 = 4 + 4\alpha_0 \quad \quad n_{-2} = 4 - 4\alpha_0$$

et la formule (60) donnera une première valeur approchée de  $\varphi'_2$  qui, jointe aux valeurs approchées de  $n_2$ ,  $n_{-2}$ ,  $n_0$ , permettra de calculer une valeur approchée de C avec laquelle on calculera une valeur meilleure de  $n_0$ , On recommencera, avec cette nouvelle valeur de  $n_0$  le calcul des  $n_k$ , de  $\varphi'_2$ , de C et on obtiendra une deuxième valeur approchée de  $n_0$ , et ainsi de suite. Dans la pratique, il suffira presque toujours de prendre pour  $n_0$  la valeur :

$$n_0 = -\frac{\varphi_2^2}{A+B}$$

Revenons aux définitions de P, Q, Δ, u, v, nous obtiendrons de suite les formules commodes :

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= 1 + m + \frac{1}{2} \text{DLog} \frac{u+v}{u-v} \\ Q &= \frac{1}{2} \text{DLog} (u^2 - v^2) \\ \Delta^2 &= (u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right.$$

Pour calculer effectivement ces fonctions, nous nous reporterons aux équations de définition et aux séries trouvées aux chapitres précédents pour  $x_0\theta^{-1}$  et  $y_0\theta$ . Comme on a

$$x_0\theta^{-1} = \xi_0 + \eta_0 \qquad y_0\theta = \xi_0 - \eta_0$$

il en résultera :

$$\begin{aligned} \theta(u + v) &= \theta(\xi_0 + \eta_0 + D\xi_0 + D\eta_0) \\ \theta^{-1}(u - v) &= \theta^{-1}(\xi_0 - \eta_0 + D\xi_0 - D\eta_0) \end{aligned}$$

et on déduira de là  $u$  et  $v$  sous la forme :

$$u = \xi_0 + D\eta_0 \qquad v = \eta_0 + D\xi_0$$

Si l'on se rappelle que :

$$\xi_0 = \sum \xi_{0,k} \theta^k \qquad \eta_0 = \sum \eta_{0,k} \theta^k \qquad \xi_{0,0} = 1 \qquad \eta_{0,0} = 0$$

et si l'on pose :

$$u = \sum u_k \theta^k \qquad v = \sum v_k \theta^k$$

on obtiendra :

$$(64) \qquad u_k = \xi_{0,k} + k\eta_{0,k} \qquad v_k = \eta_{0,k} + k\xi_{0,k}$$

et, comme on sait que :

$$\xi_{0,-k} = \xi_{0,k} \qquad \eta_{0,-k} = -\eta_{0,k}$$

on aura :

$$u_{-k} = u_k \qquad v_{-k} = -v_k$$

avec :

$$u_0 = 1 \qquad v_0 = 0$$

et ceci montre que  $u$  est réel et  $v$  imaginaire pur.

Les formules (63) nous permettront de former les développements de  $P$ ,  $Q$ ,  $\Delta$  ; il suffira pour cela de former les combinaisons  $u + v$ ,  $u - v$ ,  $u^2 - v^2$ . Comme les deux premières ont un terme égal à l'unité, il sera possible de développer les log en série au moyen des formules connues, puis d'utiliser la formule du binôme. On aura ainsi  $P, Q, \Delta$ . Il sera ensuite aisé d'obtenir  $P^2$ ,  $Q^2$ ,  $\Delta^2$ ,  $DQ$ ,  $K\rho_0^3 + 2\nu m^2$ ,  $P\Delta$ ,  $u\Delta$ ,  $v\Delta$ ,  $W$ . Nous donnerons ces développements plus loin.

Pour intégrer la première et la troisième des équations (50) sans second membre, nous ferons successivement dans les formules obtenues :

$$\begin{aligned} a_0 &= g_0 & \varphi &= W & m_{1,k} &= a''_{1,k} & m_{1,0} &= a''_{1,0} = 1 \\ a_0 &= h_0 & \varphi &= K\rho_0^3 + 2\nu m^2 & m_{1,k} &= c_{1,k} & m_{1,0} &= c_{1,0} = 1 \end{aligned}$$

et les  $a''_{1,k}$  et  $c_{1,k}$  s'obtiendront facilement. Nous calculerons ensuite les constantes :

$$c = \sigma_1 D\sigma_2 - \sigma_2 - D\sigma_1$$

en faisant successivement dans cette formule :

$$\sigma_1 = \theta^{g_0} \sum a''_{1,k} \theta^k \qquad \sigma_2 = \theta^{h_0} \sum c_{1,k} \theta^k$$

et nous obtiendrons :

$$a' = 2\sum (g_0 + k)^2 a''_{1,k} \qquad c = 2\sum (h_0 + k)^2 c_{1,k}$$

Passons à l'équation

$$Db = B$$

et cherchons-en une solution particulière. Comme, pour les autres équations, les seconds membres ont été négligés, nous laisserons de côté ici le deuxième terme du second membre qui contient  $J$ , et conserverons seulement le terme  $-2P\Delta a''$ .

$$\text{Si nous posons :} \qquad a'' = a''_1 \qquad b = b_1 = D^{-1}(-2P\Delta a''_1)$$



nous aurons une solution particulière et nous pourrons calculer une solution particulière des équations (40) et (42) privées de second membre :  $\delta x_1, \delta y_1, \delta \xi_1, \delta \eta_1; b_1, \delta \xi_1, \delta \eta_1$ , étant de même forme que  $a''_1$ . On aura une deuxième solution particulière en prenant :

$$a' = a''_2 \qquad b = b_2 = D^{-1}(-2P\Delta a''_2)$$

qui donnera  $\delta x_2, \delta y_2, \delta \xi_2, \delta \eta_2$ , où  $a''_2, \delta \xi_2$ , seront conjugués de  $a''_1, \delta \xi_1$ , et  $b_2, \delta \eta_2$ , seront les conjugués changés de signe de  $b_1, \delta \eta_1$ .

Pour calculer effectivement  $b_1$  et  $b_2$ , nous poserons :

$$b_1 = \theta^{\xi_0} \sum b_{1,k} \theta^k \qquad b_2 = \theta^{\xi_0} \sum b_{2,k} \theta^k$$

et, à l'aide des séries  $P\Delta$  et  $a''_1$  ou  $a''_2$ , nous formerons la fonction  $-2P\Delta a''$ , puis, substituant dans l'équation  $Db = B$  et égalant aux deux membres les coefficients de même puissances de  $\theta$ , nous obtiendrons les coefficients  $b_{1,k}$  ou  $b_{2,k}$

Pour calculer  $\delta \xi_1$  et  $\delta \eta_1$  on se rappellera que :

$$(54) \qquad \delta \xi = (u\Delta) a'' + bv \qquad \delta \eta = (v\Delta) a'' + bu$$

et on posera :

$$\delta \xi_1 = \theta^{\xi_0} \sum \mu_{1,k} \theta^k \qquad \delta \eta_1 = \theta^{\xi_0} \sum \nu_{1,k} \theta^k$$

Transportant ces valeurs de  $\delta \xi_1$  et  $\delta \eta_1$  dans les équations (54) ainsi que les développements trouvés pour  $(u\Delta), (v\Delta), u, v, a''_1, b_1$ , et égalant aux deux membres les coefficients des mêmes puissances de  $\theta$ , nous trouverons les coefficients  $\mu_{1,k}$  et  $\nu_{1,k}$  sous la forme :

$$(64) \left\{ \begin{array}{l} \mu_{1,0} = a''_{1,0} (u\Delta)_0 + [a''_{1,2} + a''_{1,-2}] (u\Delta)_2 + [a''_{1,4} + a''_{1,-4}] (u\Delta)_4 + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + v_2 [b_{1,-2} - b_{1,2}] + v_4 [b_{1,-4} - b_{1,4}] + \dots \\ \mu_{1,-k} = a''_{1,0} (u\Delta)_k + a''_{1,2} (u\Delta)_{k-2} + \dots + a''_{1,k} (u\Delta)_0 + \\ \qquad \qquad \qquad + b_{1,0} v_k + b_{1,2} v_{k-2} + \dots + b_{1,k-2} v_2 \\ \mu_{1,k} = a''_{1,0} (u\Delta)_k + a''_{1,2} (u\Delta)_{k-2} + \dots + a''_{1,k} (u\Delta)_0 + \\ \qquad \qquad \qquad - b_{1,0} v_k - b_{1,2} v_{k-2} - \dots - b_{1,-(k-2)} v_2 \\ \nu_{1,0} = [a''_{1,-2} - a''_{1,2}] (v\Delta)_2 + [a''_{1,-4} - a''_{1,4}] (v\Delta)_4 + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + h_{1,0} + [b_{1,2} + b_{1,-2}] u_2 + [b_{1,4} + b_{1,-4}] u_4 + \dots \\ \nu_{1,-k} = a''_{1,0} (v\Delta)_k + a''_{1,2} (v\Delta)_{k-2} + \dots + a''_{1,k} (v\Delta)_0 + \\ \qquad \qquad \qquad + h_{1,k} + b_{1,k-2} u_2 + \dots + b_{1,0} u_k \\ \nu_{1,k} = -a''_{1,0} (v\Delta)_k - a''_{1,2} (v\Delta)_{k-2} - \dots - a''_{1,-(k-2)} (v\Delta)_2 \\ \qquad \qquad \qquad + b_{1,-k} + b_{1,-(k-2)} u_2 + \dots + b_{1,0} u_k \end{array} \right.$$

Ayant obtenu  $a''_1, b_1, \delta \xi_1, \delta \eta_1$ , nous pourrons calculer  $a''_2, b_2, \delta \xi_2, \delta \eta_2; a''_2, \delta \eta_2$ , étant, comme on sait, les conjugués de  $a''_1, \delta \xi_1$ , et  $b_2, \delta \eta_2$ , les conjugués changés de signe de  $b_1, \delta \eta_1$ . Nous aurons donc :

$$\begin{array}{ll} a''_{2,k} = a''_{1,-k} & \delta \xi_{2,k} = \delta \xi_{1,-k} \\ b_{2,k} = b_{1,-k} & \delta \eta_{2,k} = -\delta \eta_{1,-k} \end{array}$$

18. — Nous pouvons aborder la recherche des intégrales générales des équations (50) avec seconds membres et, pour cela, il faut tenir compte des fonctions  $U, V, Z$  et  $J$ . Or, d'après la manière dont elles ont été formées, ces fonctions sont du second degré au moins par rapport à  $\delta x, \delta y, z$ ;  $\delta x, \delta y$  sont petits et  $z$ , dans la plupart des cas, est petit également, de sorte que dans la détermination de la partie principale des inconnues, les fonctions  $U, V, Z, J$  pourront être supposées nulles.

Prenons la première équation (50). Au lieu de chercher son intégrale générale, nous allons chercher directement les fonctions  $\delta \xi$  et  $\delta \eta$  qui lui correspondent.

Nous avons d'abord :  $x\theta^{-1} = \xi + \eta$   $y\theta = \xi - \eta$   
ce qui donne :  $\delta(x\theta^{-1}) = \delta\xi + \delta\eta$   $\delta(y\theta) = \delta\xi - \delta\eta$

D'autre part, nous avons :

$$a'' = C_1 a''_1 + C_2 a''_2 \quad b = C_1 b_1 + C_2 b_2$$

et les relations (54) :

$$\delta\xi = (u\Delta) a'' + bv \quad \delta\eta = (v\Delta) a'' + bu$$

Transportant dans ces dernières formules les valeurs des intégrales  $a''$  et  $b$ , nous pourrions écrire :

$$\delta\xi = C_1 \delta\xi_1 + C_2 \delta\xi_2 \quad \delta\eta = C_1 \delta\eta_1 + C_2 \delta\eta_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  désignent deux constantes arbitraires et où on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\xi_1 = (u\Delta) a''_1 + b_1 v \\ \delta\eta_1 = (v\Delta) a''_1 + b_1 u \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\xi_2 = (u\Delta) a''_2 + b_2 v \\ \delta\eta_2 = (v\Delta) a''_2 + b_2 u \end{array} \right.$$

Remplaçons alors  $C_1$  et  $C_2$  par deux nouvelles constantes  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_0$  liées à elles par les équations :

$$C_1 = \frac{\varepsilon \omega}{2} e^{-i\varphi_0} \quad C_2 = \frac{\varepsilon \omega}{2} e^{i\varphi_0}$$

et rappelons-nous que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\xi_1 = \theta g_0 \sum \mu_{1,k} \theta^k \\ \delta\eta_1 = \theta g_0 \sum \nu_{1,k} \theta^k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\xi_2 = \theta^{-1} g_0 \sum \mu_{-1,k} \theta^k \\ \delta\eta_2 = \theta^{-1} g_0 \sum \nu_{-1,k} \theta^k \end{array} \right.$$

Si nous faisons :

$$G_0 = g_0 V - \varphi_0$$

puis :

$$(64 \text{ bis}) \quad \begin{array}{ll} \delta\xi_{1,k} = \omega \mu_{1,k} & \delta\xi_{-1,k} = \omega \mu_{-1,k} \\ \delta\eta_{1,k} = \omega \nu_{1,k} & \delta\eta_{-1,k} = \omega \nu_{-1,k} \end{array}$$

ce qui donne :

$$\delta\xi_{-1,k} = \delta\xi_{1,-k} \quad \delta\eta_{-1,k} = -\delta\eta_{1,-k}$$

et enfin si nous posons :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iG_0} \quad \varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iG_0}$$

nous pourrions écrire les valeurs de  $\delta\xi$  et  $\delta\eta$  sous la forme :

$$(65) \quad \delta\xi = \varepsilon_1 \delta\xi_1 + \varepsilon_{-1} \delta\xi_{-1} \quad \delta\eta = \varepsilon_1 \delta\eta_1 + \varepsilon_{-1} \delta\eta_{-1}$$

avec :

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\xi_1 = \sum \delta\xi_{1,k} \theta^k \\ \delta\eta_1 = \sum \delta\eta_{1,k} \theta^k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\xi_{-1} = \sum \delta\xi_{-1,k} \theta^k \\ \delta\eta_{-1} = \sum \delta\eta_{-1,k} \theta^k \end{array} \right.$$

Ayant obtenu les fonctions  $\delta\xi$  et  $\delta\eta$ , nous pouvons calculer les accroissements  $\delta x$  et  $\delta y$  correspondants. Les formules (36) nous permettent d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta X = \frac{a}{2} \left[ \delta(x\theta^{-1}) e^{iN} + \delta(y\theta) e^{-iN} \right] \\ \delta Y = \frac{a}{2i} \left[ \delta(x\theta^{-1}) e^{iN} - \delta(y\theta) e^{-iN} \right] \end{array} \right.$$

ou bien, en remplaçant  $\delta(x\theta^{-1})$  et  $\delta(y\theta)$  en fonction de  $\delta\xi$  et  $\delta\eta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta X = \frac{a}{2} \left[ (\delta\xi + \delta\eta) e^{iN} + (\delta\xi - \delta\eta) e^{-iN} \right] \\ \delta Y = \frac{a}{2i} \left[ (\delta\xi + \delta\eta) e^{iN} - (\delta\xi - \delta\eta) e^{-iN} \right] \end{array} \right.$$

Faisant usage des formules (65) et (66) et combinant les exposants  $k$ , d'une part, et  $-k$  d'autre part, de manière à grouper les mêmes coefficients, nous obtiendrons, après avoir transformé les exponentielles en sinus et cosinus, les valeurs suivantes pour  $\delta X$  et  $\delta Y$  :

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta X = \frac{a\varepsilon}{2} \sum \left[ (\delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k}) \cos(N + G_0 + kV) + (\delta\xi_{-1,-k} + \delta\eta_{-1,-k}) \cos(N - G_0 - kV) \right] \\ \delta Y = \frac{a\varepsilon}{2} \sum \left[ (\delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k}) \sin(N + G_0 + kV) + (\delta\xi_{-1,-k} + \delta\eta_{-1,-k}) \sin(N - G_0 - kV) \right] \end{array} \right.$$

19. — Passons aux coordonnées polaires  $r$  et  $v$ . Nous avons :

$$\frac{r}{a} = \left(\frac{r}{a}\right)_0 + \delta\left(\frac{r}{a}\right) = (xy - z^2)^{\frac{1}{2}} = [(x_0 + \delta x)(y_0 + \delta y) - z^2]^{\frac{1}{2}}$$

Développant le radical par la formule du binôme et retenant seulement la partie principale du développement nous obtiendrons pour l'accroissement  $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$  :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2} \rho_0 (x_0 \delta y + y_0 \delta x)$$

Après quelques transformations simples et tenant compte de ce que l'on a :

$$\delta(x\theta^{-1}) = \theta^{-1} \delta x = \theta^{-1} (\delta \xi + \delta \eta) \quad \delta(y\theta) = \theta \delta y = \theta (\delta \xi - \delta \eta)$$

nous obtiendrons finalement :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \rho_0 (\xi_0 \delta \xi - \eta_0 \delta \eta)$$

et ceci peut être écrit, d'après les formules (65) sous la forme suivante :

$$(68) \quad \delta\left(\frac{r}{a}\right) = \varepsilon_1 \delta\left(\frac{r}{a}\right)_1 + \varepsilon_{-1} \delta\left(\frac{r}{a}\right)_{-1}$$

avec :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right)_1 = (\rho_0 \xi_0) \delta \xi_1 - (\rho_0 \eta_0) \delta \eta_1 \quad \delta\left(\frac{r}{a}\right)_{-1} = (\rho_0 \xi_0) \delta \xi_{-1} - (\rho_0 \eta_0) \delta \eta_{-1}$$

En faisant enfin usage des formules (66), nous obtiendrons aisément le développement trigonométrique suivant :

$$(69) \quad \delta\left(\frac{r}{a}\right) = \varepsilon \sum \delta\left(\frac{r}{a}\right)_{1,k} \cos(G_0 + kV)$$

avec :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right)_{1,k} = (\rho_0 \xi_0) \delta \xi_{1,k} - (\rho_0 \eta_0) \delta \eta_{1,k}$$

Pour la longitude, nous avons :

$$v = v_0 + \delta v \quad l = l_0 + \delta l \quad v = N + \frac{l}{i} \quad v_0 = N + \frac{l_0}{i}$$

et nous déduisons de là :

$$\delta v = \frac{\delta l}{i}$$

Pour calculer  $\delta l$ , reportons-nous aux formules (36) qui donnent par division :

$$\text{Th}(\lambda_0 + \delta l) = \text{Th} l = \frac{\eta}{\xi}$$

D'après la formule d'addition de Th ceci peut s'écrire :

$$\text{Th}(l_0 + \delta l) = \frac{\text{Th} l_0 + \text{Th} \delta l}{1 + \text{Th} l_0 \text{Th} \delta l}$$

et nous tirons de là  $\text{Th} \delta l$  sous la forme :

$$\text{Th} \delta l = \frac{\text{Th}(l_0 + \delta l) - \text{Th} l_0}{1 - \text{Th} l_0 \text{Th}(l_0 + \delta l)}$$

Comme on a :

$$\text{Th}(l_0 + \delta l) = \frac{\eta_0 + \delta \eta}{\xi_0 + \delta \xi} \quad \text{Th} l_0 = \frac{\eta_0}{\xi_0}$$

nous pourrons écrire, après quelques réductions :

$$\text{Th} \delta l = \frac{\xi_0 \delta \eta - \eta_0 \delta \xi}{\xi_0^2 - \eta_0^2 + \xi_0 \delta \xi - \eta_0 \delta \eta} = \rho_0^2 \frac{\xi_0 \delta \eta - \eta_0 \delta \xi}{1 + \rho_0^2 (\xi_0 \delta \xi - \eta_0 \delta \eta)}$$

Développant l'inverse du dénominateur en série procédant suivant les puissances de  $\rho^2_0$  et retenant seulement les termes du premier ordre en  $\delta\xi$  et  $\delta\eta$ , nous obtiendrons :

$$\text{Th } \delta l = \rho^2_0 (\xi_0 \delta\eta - \eta_0 \delta\xi)$$

Faisons maintenant l'inversion de cette équation et ne conservons que les termes du premier ordre du développement, nous obtiendrons la valeur de  $\delta l$  sous la forme :

$$\delta l = \rho^2_0 (\xi_0 \delta\eta - \eta_0 \delta\xi)$$

et, faisant usage de la formule (65) et des relations entre les fonctions conjuguées, nous pourrions écrire  $\delta l$  sous la forme :

$$\delta l = \varepsilon_1 \delta l_1 + \varepsilon_{-1} \delta l_{-1}$$

formule où :

$$\delta l_1 = -(\rho^2_0 \eta_0) \delta\xi_1 + (\rho^2_0 \xi_0) \delta\eta_1$$

$\delta l_{-1}$  étant le conjugué changé de signe de  $\delta l_1$ .

Si, maintenant, nous tenons compte des formules (66) et des valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_{-1}$ , nous obtiendrons, après quelques transformations, le développement trigonométrique :

$$(70) \quad v = \frac{\delta l}{i} = \varepsilon \sum \delta l_{1,k} \sin(G_0 + kV)$$

avec :

$$\delta l_{1,k} = -(\rho^2_0 \eta_0) \delta\xi_{1,k} + (\rho^2_0 \xi_0) \delta\eta_{1,k}$$

20. — Considérons maintenant la dernière équation (50). Si nous nous rappelons que nous avons fait  $Z = 0$ , la formule (56) donnera pour l'intégrale générale :

$$z = C_1 z_1 - C_2 z_2$$

avec :

$$z_1 = \theta^{h_0 \sum C_{1,k} \theta^k} \quad z_2 = \theta^{-h_0 \sum C_{2,k} \theta^k}$$

Par analogie avec ce que nous avons fait pour la première équation (50), nous poserons,  $\gamma$  et  $\Omega_0$  étant deux constantes nouvelles :

$$C_1 = \frac{\gamma \omega'}{2} e^{-i\Omega_0} \quad C_2 = \frac{\gamma \omega'}{2} e^{i\Omega_0}$$

si nous posons aussi :

$$H_0 = h_0 V - \Omega_0$$

puis :

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH_0} \quad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH_0}$$

et enfin :

$$z_{1,k} = \omega' c_{1,k} \quad z_{-1,k} = -\omega' c_{-1,k}$$

nous verrons aisément que nous pouvons écrire :

$$z = \gamma_1 z_1 + \gamma_{-1} z_{-1}$$

avec :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum z_{1,k} \theta^k & c_{-1,k} &= c_{1,k} \\ z_{-1} &= \sum z_{-1,k} \theta^k & z_{-1,k} &= -z_{1,k} \end{aligned}$$

Ceci fait, cherchons la valeur de  $Z$ . Nous savons que :

$$Z = \frac{az}{i}$$

Remplaçant  $z$  par la valeur trouvée plus haut, nous obtiendrons, après quelques transformations simples :

$$(71) \quad Z = a\gamma \sum z_{1,k} \sin(H_0 + kV)$$

avec

$$z_{1,k} = \omega' c_{1,k}$$

Il nous reste à chercher la valeur de la latitude  $s$ . Or, nous avons posé :

$$s = \frac{\sigma}{i}$$

tout revient donc à calculer  $\sigma$ .

D'après la troisième formule (36), nous avons :

$$z = \frac{r}{a} \text{Sh } \sigma$$

et nous savons que, l'indice zéro désignant la première partie de la solution, trouvée au chapitre I :

$$z_0 = 0 \qquad \sigma_0 = 0$$

Si nous posons :  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ , nous pourrions écrire :  $\text{Sh } \sigma = z (\rho_0 + \delta\rho)$  ;

mais,  $\delta\rho$  est l'accroissement de  $\rho_0$  qui correspond à  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $z$ , et il ne dépend que de  $\delta x$  et  $\delta y$  au premier degré. Comme il est petit, son produit par  $z$  sera petit aussi et nous pourrions le négliger en cherchant la valeur principale de  $\sigma$ . Nous aurons donc seulement :

$$\text{Sh } \sigma = \rho_0 z$$

Par inversion, et réduisant le développement à sa partie principale, nous trouverons pour  $\sigma$  la valeur :

$$\sigma = \rho_0 z$$

ce qui pourra être écrit sous la forme :

$$\sigma = \gamma_1 \sigma_1 + \gamma_{-1} \sigma_{-1}$$

avec

$$\sigma_1 = \rho_0 z_1 \qquad \sigma_{-1} = \rho_0 z_{-1}$$

Revenant aux valeurs réelles, nous obtiendrons pour  $s$  le développement :

$$(72) \qquad s = \gamma \sum \sigma_{1,k} \sin (H_0 + kV)$$

avec :

$$\sigma_{1,k} = \rho_0 \omega' c_{1,k}$$

Dans les formules précédentes, tant pour la première équation (50) que pour la dernière, nous avons introduit deux quantités  $\omega$  et  $\omega'$  qui doivent être déterminées par une convention spéciale. Nous sommes en mesure de le faire maintenant.

Pour déterminer  $\omega$  nous poserons l'équation :

$$\delta l_{1,0} = 2$$

et pour déterminer  $\omega'$  nous ferons :

$$\sigma_{1,0} = 1$$

Examinons maintenant les séries qui donnent la solution complète obtenue jusqu'à maintenant. C'est-à-dire les séries obtenues en ajoutant, pour chaque coordonnée tant rectangulaire que polaire, les solutions obtenues aux chapitres I et III, et supposons que l'on fasse  $\nu m^2 = 0$ . Il est aisé de voir que la petite planète pourra être considérée comme se mouvant approximativement sur une orbite képlérienne dont l'excentricité serait  $\epsilon$  et la tangente de l'inclinaison  $\gamma$ , l'argument de la latitude étant  $H_0$  et l'anomalie moyenne  $G_0$ . La longitude du nœud et celle du périhélie auront donc respectivement pour expressions :

$$\Omega = N - H_0 \qquad \varphi = N - G_0$$

Or, on peut écrire :

$$\Omega = N - h_0 (N - N') + \Omega_0$$

$$\varphi = N - g_0 (N - N') + \varphi_0$$

ce qui montre que les angles  $\Omega$  et  $\varphi$  varieront proportionnellement au temps avec des moyens mouvements  $nh''_0$  et  $ng''_0$ , et on aura :

$$(73) \qquad h''_0 = 1 - \frac{h_0}{1+m} \qquad g''_0 = 1 - \frac{g_0}{1+m}$$

21. — Nous avons donc déterminé complètement les inégalités de la petite planète qui dépendent de la première puissance tant de son excentricité que de la tangente de son inclinaison.

Nous pouvons essayer de poursuivre la solution par approximations successives au moyen de séries ordonnées suivant les puissances des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\gamma'$ ,  $\alpha$ , en désignant par  $\varepsilon'$  et  $\gamma'$  les constantes analogues à  $\varepsilon$  et  $\gamma$  relatives à la planète troublante.

Pour cela, nous prendrons d'abord les portions de  $U$ ,  $V$ ,  $Z$ ,  $J$  qui dépendent de  $\varepsilon'$ ,  $\gamma'$ ,  $\alpha$ , à la première puissance. On voit de suite que  $Z$  ne contient que des termes en  $\gamma$ . Appliquant la méthode exposée, nous déterminerons les inégalités correspondantes pour  $x$ ,  $y$ ; il n'y en a pas pour  $z$ . Nous prendrons ensuite les portions de  $U$ ,  $V$ ,  $Z$ ,  $J$  qui sont du second degré par rapport aux paramètres et nous obtiendrons les inégalités correspondantes pour  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et ainsi de suite.

Pour effectuer ces calculs, il faudra préalablement développer les fonctions :

$$\rho'^m e^{\pm n l'} \quad , \quad \rho'^m$$

en séries procédant suivant les puissances de  $\varepsilon'_1$  et  $\varepsilon'_{-1}$ , et les fonctions  $\sin ms'$  et  $\cos ms'$  en séries procédant suivant les puissances de  $\gamma'_1$ ,  $\gamma'_{-1}$ ,  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_{-1}$ ; nous donnerons ces développements plus tard.

Si nous désignons par  $\varepsilon'$  et  $\gamma'$  l'excentricité et la tangente de l'inclinaison de l'orbite de la planète troublante, par  $\varphi'$  la longitude de son périhélie, et par  $\Omega'$  celle de son nœud, nous poserons, par analogie avec ce qui a été fait pour la petite planète :

$$\begin{aligned} G' &= N' - \varphi' & H' &= N' - \Omega' \\ \varepsilon'_1 &= \frac{\varepsilon'}{2} e^{iG'} & \varepsilon'_{-1} &= \frac{\varepsilon'}{2} e^{-iG'} & \gamma'_1 &= \frac{\gamma'}{2} e^{iH'} & \gamma'_{-1} &= \frac{\gamma'}{2} e^{-iH'} \end{aligned}$$

En appliquant la méthode exposée, nous pourrions donc obtenir la solution générale du problème sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances entières et positives des cinq paramètres  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\gamma'$ ,  $\alpha$ , les coefficients de ces séries étant des fonctions des  $\theta$ .

Il est visible, néanmoins, que l'application des quadratures successives que l'on doit effectuer fera apparaître des termes séculaires. Pour les éviter, nous modifierons convenablement les arguments  $G_0$  et  $H_0$  de façon à permettre l'introduction de quantités indéterminées dont nous pourrions disposer pour faire disparaître les termes séculaires.

Nous remplacerons  $g_0$  et  $h_0$  par deux nouvelles fonctions  $g$  et  $h$  que nous supposerons fonction des paramètres. Nous ferons :

$$G = gV - \varphi_0 \quad H = hV - \Omega_0$$

de sorte que l'on aura :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iG} \quad \varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iG} \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH} \quad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH}$$

Nous supposerons  $g$  et  $h$  développés suivant les puissances de  $\varepsilon^2$ ,  $\gamma^2$ ,  $\varepsilon'^2$ ,  $\gamma'^2$ ,  $\alpha^2$ , la partie indépendante de ces paramètres étant précisément égale à  $g_0$  pour  $g$  et à  $h_0$  pour  $h$ . Nous supposerons également que la partie constante de la fonction  $J$ , partie que nous appellerons ( $J$ ), soit développée suivant les puissances de  $\varepsilon^2$ ,  $\gamma^2$ ,  $\varepsilon'^2$ ,  $\gamma'^2$ ,  $\alpha^2$ , mais sans qu'il y ait de terme indépendant de ces paramètres. Les fonctions  $g$ ,  $h$  et ( $J$ ) nous fourniront les coefficients arbitraires dont nous disposerons pour faire disparaître les termes séculaires.

Comme les fonctions :

$$\rho'^m e^{\pm n l'} \quad , \quad \rho'^m$$

sont développables suivant les puissances de  $\varepsilon'_1$  et  $\varepsilon'_{-1}$  et que  $\sin ms'$  et  $\cos ms'$  le sont suivant les puissances de  $\gamma'_1$ ,  $\gamma'_{-1}$ ,  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_{-1}$ , nous voyons que nous pouvons supposer que  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x\theta^{-1}$ ,  $y\theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\frac{r}{a}$ ,  $l$ ,  $\sigma$ , sont développables sous la forme suivante :

$$x = \sum x_n M_n \quad y = \sum y_n M_n \dots\dots$$

séries dans lesquelles  $M_n$  représente le monome :

$$M_n = \varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_{-1}^{p_{-1}} \gamma_1^{q_1} \gamma_{-1}^{q_{-1}} \varepsilon'_1{}^{p'_1} \varepsilon'_{-1}{}^{p'_{-1}} \gamma'_1{}^{q'_1} \gamma'_{-1}{}^{q'_{-1}} \alpha^s$$

les exposants étant des entiers non négatifs (s'ils étaient tous nuls on aurait  $M_0 = 1$ ).

D'un autre côté, nous avons supposé  $g, h, (J)$  développables suivant les puissances de  $\varepsilon^2, \gamma^2, \varepsilon'^2, \gamma'^2, \alpha^2$ ; nous pourrions donc prendre pour ces développements la forme :

$$g = \sum g_n' M_n', \quad h = \sum h_n' M_n', \quad (J) = \sum J_n' M_n'$$

en désignant par  $M_n'$  des monomes de la forme :

$$M_n' = (\varepsilon_1 \varepsilon_{-1})^p (\gamma_1 \gamma_{-1})^q (\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1})^{p'} (\gamma'_1 \gamma'_{-1})^{q'} \alpha^{2s}$$

Vérifions que ces hypothèses cadrent bien avec ce que nous avons trouvé plus haut.

En effet, si nous prenons  $M_0 = 1$ , les coefficients correspondants à  $x$  et  $y$ ,  $x_0$  et  $y_0$  sont bien ceux que nous avons trouvés au Chapitre I. On a  $z = 0$ ; et les coefficients  $g_0$  et  $h_0$  sont ceux qui ont été déterminés au Num. 17. On a  $J_0 = 0$ .

Si nous prenons  $M_n$  égal à  $\varepsilon_1$  ou  $\varepsilon_{-1}$ , les fonctions  $\xi_1, \xi_{-1}, \eta_1, \eta_{-1}$ , sont précisément égales aux fonctions  $\delta\xi_1, \delta\xi_{-1}, \delta\eta_1, \delta\eta_{-1}$ , déterminées plus haut et l'on a  $z = \sigma_1 = 0$ . Si l'on prend  $M_n$  égal à  $\gamma_1$  ou  $\gamma_{-1}$ ,  $z_1, z_{-1}, \sigma_1, \sigma_{-1}$ , sont les fonctions déjà déterminées et l'on a  $\partial x, \partial y, \dots = 0$ . Donc les hypothèses faites permettent de retrouver les expressions déjà calculées.

Il suffit d'examiner avec soin comment est composée la fonction des forces  $U$ , et les développements obtenus pour  $x, y, \dots$ , pour voir que dans les monomes  $M_n$  qui figurent dans  $x^{\theta-1}, y^\theta, \xi, \eta, \frac{r}{a}, l$ , la somme  $q_1 + q_{-1}$  est paire, et qu'elle est impaire pour ceux qui figurent dans  $z$  et  $\sigma$ .

On voit, d'après le mode de formation des coefficients, que  $(x^{\theta-1})_n, (y^\theta)_n, \dots, z_n, \sigma_n$ , sont des séries en  $\theta$  de la forme :

$$(x^{\theta-1})_n = \sum (x^{\theta-1})_{n,k} \theta_k, \quad (y^\theta)_n = \sum (y^\theta)_{n,k} \theta_k \dots$$

dans lesquelles les coefficients  $(x^{\theta-1})_{n,k}, (y^\theta)_{n,k}, \dots$  sont des fonctions de  $\nu m^2$  seul. Il en est de même des coefficients  $g_n', h_n', J_n'$ .

Si l'on continue l'examen des séries  $(x^{\theta-1}), (y^\theta), \dots$ , on pourra voir aussi que dans les coefficients  $(x^{\theta-1})_{n,k}, \dots$  les indices  $k$  sont de même parité que l'exposant de  $z$  dans le monome  $M_n$ .

En désignant par  $M_{-n}$  le monome conjugué de  $M_n$ , c'est-à-dire le monome obtenu en échangeant entre eux  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_{-1}$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_{-1}$ ,  $\varepsilon'_1$  et  $\varepsilon'_{-1}$ ,  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_{-1}$ , on voit aisément que l'on a, en se reportant aux propriétés des fonctions  $(x^{\theta-1}), \dots$  :

$$\begin{aligned} (x^{\theta-1})_{-n,k} &= (y^\theta)_{n,-k} & (y^\theta)_{-n,k} &= (x^{\theta-1})_{n,-k} & \xi_{-n,k} &= \xi_{n,-k} \\ \eta_{-n,k} &= -\eta_{n,-k} & \left(\frac{r}{a}\right)_{-n,k} &= \left(\frac{r}{a}\right)_{n,-k} & l_{-n,k} &= -l_{n,-k} \\ z_{n,k} &= -z_{n,-k} & \sigma_{-n,k} &= -\sigma_{n,-k} \end{aligned}$$

Pour un monome de la forme  $M_n'$ , qui est à lui-même son propre conjugué, on a :

$$\begin{aligned} (x^{\theta-1})_{n',k} &= (y^\theta)_{n',k} & (y^\theta)_{n',k} &= (x^{\theta-1})_{n',k} & \xi_{n',k} &= \xi_{n',k} & \eta_{n',k} &= -\eta_{n',k} \\ \left(\frac{r}{a}\right)_{n',k} &= \left(\frac{r}{a}\right)_{n',k} & l_{n',k} &= -l_{n',k} & z_{n',k} &= -z_{n',k} & \sigma_{n',k} &= -\sigma_{n',k} \end{aligned}$$

Il va sans dire qu'il en est de même pour tous les monomes  $M_n$  qui sont constants.

Voyons maintenant comment se présenteront les développements des coordonnées sous forme réelle.

Le monome  $M_n$  pourra s'écrire sous la forme :

$$M_n = A_n e^{i[(p_1 - p_{-1})G + (q_1 - q_{-1})H + (p'_1 - p'_{-1})G' + (q'_1 - q'_{-1})H']}$$

avec :

$$A_n = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1 + p_{-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{q_1 + q_{-1}} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{p'_1 + p'_{-1}} \left(\frac{\gamma'}{2}\right)^{q'_1 + q'_{-1}} \alpha^s$$

Si, maintenant, nous posons :

$$V_{n,k} = kV + (p_1 - p_{-1})G + (q_1 - q_{-1})H + (p'_1 - p'_{-1})G' + (q'_1 - q'_{-1})H'$$

nous obtiendrons les développements :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = a \sum A_n (x^{\theta-1})_{n,k} \cos (V + V_{n,k}) \\ Y = a \sum A_n (x^{\theta-1})_{n,k} \sin (V + V_{n,k}) \\ Z = a \sum A_n z_{n,k} \sin V_{n,k} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = a \sum A_n \left(\frac{r}{a}\right)_{n,k} \cos V_{n,k} \\ v = N + \sum A_n \delta_{n,k} \sin V_{n,k} \\ s = \sum A_n \sigma_{n,k} \sin V_{n,k} \end{array} \right.$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs possibles dans chaque cas pour  $n$  et  $k$ .

Pour  $g$  et  $h$  on aura des développements analogues, mais non trigonométriques :

$$g = \sum g_n M'_n, \quad h = \sum h_n M'_n,$$

où  $M'_n$  représente le monome :

$$M'_n = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2p} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{2p'} \left(\frac{\gamma'}{2}\right)^{2q'} \alpha^{2s}$$

Si maintenant nous appelons  $ng''$  et  $nh''$  les moyens mouvements des arguments  $N - G$  et  $N - H$ , on aura pour  $g''$  et  $h''$  des développements analogues

22. — Il reste à voir comment on pourra se débarrasser des termes séculaires. Pour cela, revenons aux équations fondamentales (16) et (17), substituons-y les valeurs supposées des inconnues et voyons ce qui arrive quand on effectue les différentiations indiquées.

Prenons pour cela un terme de  $(x^{\theta-1})$ , que nous appellerons  $A$  :

$$A = (x^{\theta-1})_{n,k} M_n \theta^k$$

et appliquons la différentiation par rapport à  $T$ . Cela nous donnera :

$$DA = A [ k + (p_1 - p_{-1})g + (q_1 - q_{-1})h + (p'_1 - p'_{-1})m + (q'_1 - q'_{-1})m ]$$

Supposons maintenant que l'on remplace  $g$  et  $h$  par leurs développements, que l'on sépare les termes qui, dans la formule précédente, dépendent de  $g_0$  et  $h_0$ , et que l'on pose :

$$D_0 A = A [ k + (p_1 - p_{-1})g_0 + (q_1 - q_{-1})h_0 + (p'_1 - p'_{-1})m + (q'_1 - q'_{-1})m ]$$

$D_0$  désignant l'opération qui consiste à prendre la dérivée par rapport à  $T$  d'un terme tel que  $A$  où  $G$  et  $H$  ont été remplacés par  $G_0$  et  $H_0$ . On voit, d'après ce qui précède, que la différence  $DA - D_0 A$  se présentera sous la forme d'un développement suivant les produits du monome  $M_n$  par les différents monomes  $M'_n$ ,  $M_0$  étant exclu.

Remplaçons alors dans les équations (40), (41) et (42) la caractéristique  $D$  par  $D_0$ . Les fonctions  $U, V, Z, J$ , seront modifiées car il faudra tenir compte pour leur formation des différences telles que  $DA - D_0 A$ , mais la méthode d'approximations successives indiquée ne subira aucun changement car nous connaissons pour chaque différence son développement suivant les produits  $M_n M'_n$ , de sorte que la partie des fonctions  $U, V, Z, J$ , qui correspond à un monome donné pourra toujours être calculée dès que l'on connaîtra les parties des inconnues qui correspondent aux monomes de degré inférieur, à quelques exceptions près.



L'opération  $D_0$  est analogue à la dérivation ordinaire et elle est équivalente à l'opération  $D$  quand on l'applique aux fonctions  $a''_1, a''_2, z_1, z_2$ . Elle jouit des mêmes propriétés que l'opération  $D$ .

D'après les modifications qui ont été apportées aux fonctions  $U, V, Z, J$ , il est évident qu'il faudra, dans ces fonctions, remplacer  $D^{-1}$  par  $D_0^{-1}$ , en désignant par  $D_0^{-1}$  l'opération inverse de  $D_0$ , opération analogue à l'intégration, et qui appliquée au terme  $A$ , supposé non constant, le reproduira divisé par :

$$k + (p_1 - p_{-1}) g_0 + (q_1 - q_{-1}) h_0 + (p'_1 - p'_{-1}) m + (q'_1 - q'_{-1}) m$$

Si nous nous reportons à la formule (56), nous voyons que cette opération porte sur des quantités de l'une des cinq formes suivantes :

$$\theta^{-g_0+k} M_n, \quad \theta^{g_0+k} M_n, \quad \theta^{-h_0+k} M_n, \quad \theta^{h_0+k} M_n, \quad \theta^k M_n,$$

suyvant qu'il s'agira des fonctions :

$$D_0^{-1}(a''_2 \Xi), \quad D_0^{-1}(a''_1 \Xi), \quad D_0^{-1}(z_2 Z), \quad D_0^{-1}(z_1 Z), \quad D_0^{-1} B$$

$k$  désigne un entier quelconque, et il est à remarquer que les facteurs  $\theta^{\pm g_0}, \theta^{\pm h_0}$ , se trouvent détruits ultérieurement, puisque les quatre premières opérations  $D_0^{-1}$  doivent être multipliées ensuite respectivement par  $a''_1, a''_2, z_1, z_2$ .

On aura donc, par exemple :

$$D_0^{-1}(\theta^{g_0+k} M_n) = \frac{\theta^{g_0+k} M_n}{g_0 + k + (p_1 - p_{-1}) g_0 + (q_1 - q_{-1}) h_0 + (p'_1 - p'_{-1}) m + (q'_1 - q'_{-1}) m}$$

ce qui montre que le calcul est immédiat.

Il n'y a d'exception que si l'opération  $D_0^{-1}$  fait apparaître un diviseur nul. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut que les fonctions  $(a''_2 \Xi), (a''_1 \Xi), (z_2 Z), (z_1 Z), B$ , ne contiennent respectivement aucun termes des formes :

$$\theta^{g_0 \varepsilon_1} M'_n, \quad \theta^{g_0 \varepsilon_{-1}} M'_n, \quad \theta^{-h_0} \gamma_1 M'_n, \quad \theta^{h_0} \gamma_1 M'_n, \quad M'_n$$

Or, ceci peut être réalisé de la façon suivante : Considérons la fonction  $(a''_2 \Xi)$ , le coefficient de  $\theta^{-g_0 \varepsilon_1} M'_n$  dépend de la constante  $g_n$  qui est encore indéterminée. Nous pouvons donc la choisir de façon à faire disparaître ce coefficient et, en même temps, disparaîtra le coefficient correspondant dans la fonction conjuguée. Considérons maintenant la fonction  $(z_2 Z)$ , le coefficient de  $\theta^{-h_0} \gamma_1 M'_n$  dépend de  $h_n$  et nous pourrons disposer de cette quantité de façon à faire disparaître ce coefficient ainsi que celui de  $\theta^{h_0} \gamma_1 M'_n$  dans la fonction conjuguée.

Il reste à faire disparaître le coefficient de  $M'_n$  dans  $B$ . Or, il dépend de  $J_n$  que nous déterminerons de façon à annuler ce coefficient.

La fonction  $J$  contient la quadrature  $D^{-1} \left[ \frac{\partial F}{\partial (iN')} \right]$  mais il est aisé de voir que la fonction soumise à cette quadrature ne peut contenir aucun terme constant et que, par suite, elle ne peut donner lieu à aucun terme séculaire.

Nous ferons en sorte que le coefficient complet de  $\sin G$  dans le développement non symétrique de la longitude ait pour expression :

$$2 \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^3 + \frac{5}{96} \varepsilon^5 \dots$$

et que le coefficient complet de  $\sin H$  dans le développement non symétrique de la latitude ait pour expressions :

$$\gamma - \gamma \varepsilon^2 - \frac{1}{128} \gamma^3 + \frac{7}{64} \gamma \varepsilon^4 \dots$$

comme s'il s'agissait d'un mouvement klépérien pour lequel l'excentricité de l'orbite serait  $\varepsilon$  et le double du sinus de la moitié de l'inclinaison serait égal à  $\gamma$ . Pour cela, nous ajouterons aux opérations  $D_0^{-1}(a''_2 \Xi), D_0^{-1}(a''_1 \Xi), D_0^{-1}(z_2 Z), D_0^{-1}(z_1 Z)$ , des termes tels que  $c'^{\theta-g_0 \varepsilon_1} M'_n, c'^{\theta+g_0 \varepsilon_{-1}} M'_n, c'^{\theta-h_0} \gamma_1 M'_n, c'^{\theta+h_0} \gamma_1 M'_n$ , et nous déterminerons la constante  $c'$  dans chacun d'eux pour que la condition posée plus haut soit remplie. C'est ce qui a été fait déjà pour les termes  $2\varepsilon$  et  $\gamma$  quand nous avons posé :

$$\delta l_{1,0} = 2 \qquad \sigma_{1,0} = 1$$

## DEUXIÈME PARTIE

### CHAPITRE PREMIER

#### Etude des petites Planètes par groupes

23 — Tout ce que nous avons dit jusqu'ici se rapporte au calcul des perturbations générales d'une petite Planète isolée. Nous allons maintenant introduire la conception fondamentale de M. Karl Bohlin afin de traiter les petites Planètes par groupes.

Pour cela, désignons par  $\mu$  le rapport des moyens mouvements de la Planète troublante à la planète troublée, nous aurons :

$$(74) \quad \mu = \frac{n'}{n}$$

puis, désignons par  $\mu_0$  un nombre rationnel voisin de  $\mu$  qui sera généralement une fraction simple, et posons :

$$(75) \quad \mu = \mu_0 (1 - \omega)$$

$\omega$  étant une quantité petite.

En introduisant dans les formules  $\mu$  à la place de  $m$  et remplaçant  $\mu$  par sa valeur (75), nous obtiendrons pour la solution des fonctions de  $\omega$  et de  $\mu_0$ . Le problème reviendra alors à développer toutes les fonctions suivant les puissances de  $\omega$ , les coefficients de ces développements seront alors des fonctions du nombre rationnel choisi  $\mu_0$ , ce seront donc des nombres absolus et *ils seront les mêmes pour toutes les petites Planètes pour lesquelles on pourra utiliser le nombre  $\mu_0$  choisi.*

Nous devons examiner la solution trouvée à la première partie, en vue d'introduire  $\mu_0$  et  $\omega$ .

Si nous nous reportons aux formules trouvées, nous verrons aisément que le problème se simplifie. En effet, toutes les formules du chapitre premier reposent sur le calcul des séries  $(x^{(0-1)})$ ,  $(y^{(0)})$ , dont les coefficients sont développés suivant les puissances de  $\nu m^2$ , (nous avons remis  $\nu m^2$  au lieu de  $m'$ ), la succession des exposants étant :

$$2h, \quad 2h + 4, \quad 2h + 8, \quad \dots$$

les coefficients de ces puissances de  $\nu m^2$  étant les fonctions  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ , dont le calcul a été expliqué au num. 8, et qui sont aussi des fonctions de  $m$ . Les formules du chapitre III reposent sur le calcul des fonctions  $u$  et  $v$ , calcul qui dépend lui aussi des fonctions dont nous venons de parler.

On voit donc qu'il suffira d'effectuer le développement des fonctions  $(x^{(0-1)})_{0,2h}$ ,  $(y^{(0)})_{0,2h}$ , et celui des coefficients  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ , pour pouvoir calculer la solution complète du problème.

Nous allons nous en occuper et nous donnerons ensuite les développements des fonctions qui entrent dans la solution générale.

24. — Tout d'abord, nous devons exprimer  $m$  en fonction de  $\mu_0$  et  $w$ . Or, nous avons, d'après la définition de  $m$  :

$$m = \frac{n'}{n - n} = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

ce qui s'écrit, en remplaçant  $\mu$  par sa valeur (75) et après avoir remarqué que l'on a :

$$(76) \quad \begin{aligned} m_0 &= \frac{\mu_0}{1 - \mu_0} \\ m &= \frac{m_0 (1 - w)}{1 + m_0 w} \end{aligned}$$

Ceci fait, nous remarquerons que les coefficients sont fonctions de  $m$  directement et par l'intermédiaire des fonctions  $x_{i,j}$  et  $y_{i,j}$ , de sorte qu'en introduisant  $\mu$ , nous devons effectuer séparément les développements des  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ , suivant les puissances de  $w$ , puis, les multiplier par les développements des puissances correspondantes de  $m$ .

Si nous revenons à la formule (76), et si nous l'écrivons sous la forme :

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1 - w}{1 + m_0 w}$$

nous obtiendrons, en effectuant la division indiquée suivant les puissances croissantes de  $w$  :

$$\begin{aligned} \frac{m}{m_0} &= 1 - (1 + m_0) w + m_0 (1 + m_0) w^2 - m_0^2 (1 + m_0) w^3 + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} m_0^{n-1} (1 + m_0) w^n \dots \end{aligned}$$

Ceci pourra être écrit sous la forme :

$$\frac{m}{m_0} = 1 - W$$

en posant :

$$(77) \quad W = (1 + m_0) w - m_0 (1 + m_0) w^2 + m_0^2 (1 + m_0) w^3 \dots$$

Si nous calculons les puissances successives de  $W$ , dont les premières sont :

$$\begin{aligned} W^2 &= (1 + m_0)^2 w^2 - 2 m_0 (1 + m_0)^2 w^3 + 3 m_0^2 (1 + m_0)^2 w^4 \dots \\ W^3 &= (1 + m_0)^3 w^3 - 3 m_0 (1 + m_0)^3 w^4 + \dots \\ W^4 &= (1 + m_0)^4 w^4 \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

nous obtiendrons pour la puissance  $2h$  de  $m$  la formule :

$$(77 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{m^{2h}}{m_0^{2h}} &= 1 - C^1_{2h} (1 + m_0) w + [C^1_{2h} m_0 (1 + m_0) + C^2_{2h} (1 + m_0)^2] w^2 - \\ &\quad - [C^1_{2h} m_0^2 (1 + m_0) + C^2_{2h} C^1_{2h} m_0 (1 + m_0)^2 + C^3_{2h} (1 + m_0)^3] w^3 \dots \end{aligned} \right.$$

Ceci fait, occupons-nous des coefficients  $(x^{(h-1)})_{0,2h}$  et  $(y^{(h)})_{0,2h}$ . Il suffira d'effectuer le développement pour l'un d'eux, les autres s'en déduiront par changement d'indices

En examinant les formules (29), nous voyons que la forme générale des coefficients est la suivante :

$$\begin{aligned} (x^{(h-1)})_{0,2h} &= (\nu m^2)^h x_{h,2h} + (\nu m^2)^{h+2} x_{h+2,2h} \dots \quad (\nu m^2 = m'^2) \\ (y^{(h)})_{0,2h} &= (\nu m^2)^h y_{h,2h} + (\nu m^2)^{h+2} y_{h+2,2h} \dots \end{aligned}$$

et ceci montre qu'il suffit d'effectuer le développement des  $x_{i,j}$  et des  $y_{i,j}$ .

Lorsque nous remplaçons  $m$  en fonction de  $\mu$ , puis  $\mu$  en fonction de  $\mu_0$  et de  $w$ , nous pouvons appliquer la formule Taylor aux différents coefficients  $x_{i,j}$  et  $y_{i,j}$ . Pour  $x_{i,j}$ , cela nous donnera :

$$x_{i,j} = x_{i,j}(\mu_0) - w\mu_0 \left[ \frac{dx_{i,j}}{d\mu} \right]_{\mu_0} + \frac{w^2 \mu_0^2}{1.2} \left[ \frac{d^2 x_{i,j}}{d\mu^2} \right]_{\mu_0} \dots$$

et il faut calculer les dérivés successives de  $x_{i,j}$  par rapport à  $\mu$ . Cela peut être évité par un artifice. En effet, nous avons :

$$m = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

d'où nous tirons, par différentiation :

$$(78) \quad dm = \frac{d\mu}{(1 - \mu)^2}$$

Si nous remplaçons dans la série qui donne  $x_{i,j}$ ,  $d\mu$  par sa valeur en fonction de  $dm$  tirée de la formule (78), nous obtiendrons la série :

$$(79) \quad x_{i,j} = x_{i,j}(\mu_0) - w \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \left[ \frac{dx_{i,j}}{dm} \right]_{m_0} + \frac{w^2}{1.2} \cdot \frac{\mu_0^2}{(1 - \mu_0)^4} \left[ \frac{d^2 x_{i,j}}{dm^2} \right]_{m_0} \dots$$

Faisant la même opération pour tous les termes de  $(x^{\theta-1})_{0,2h}$ ,  $(y^\theta)_{0,2h}$ , multipliant chacune des séries obtenues par le développement de la puissance correspondante de  $m$ , effectuant les réductions nécessaires et ordonnant enfin suivant les puissances de  $w$ , nous obtiendrons enfin pour  $(x^{\theta-1})_{0,2h}$ ,  $(y^\theta)_{0,2h}$ , les développements suivants

$$(80) \quad (x^{\theta-1})_{0,2h} = (x^{\theta-1})^{(0)}_{0,2h} + w (x^{\theta-1})^{(1)}_{0,2h} + w^2 (x^{\theta-1})^{(2)}_{0,2h} + \dots$$

avec :

$$(x^{\theta-1})^{(0)}_{0,2h} = (vm^2_0)^h x_{h,2h}(\mu_0) + (vm^2_0)^{h+2} x_{h+2,2h}(\mu_0) \dots$$

$$(x^{\theta-1})^{(1)}_{0,2h} = - (vm^2_0)^h \left[ C^1_{2h} (1 + m_0) x_{h,2h}(\mu_0) + \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \cdot \frac{dx_{h,2h}}{dm_0} \right] + \\ - (vm^2_0)^{h+2} \left[ C^1_{2h+4} (1 + m_0) x_{h+2,2h}(\mu_0) + \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \cdot \frac{dx_{h+2,2h}}{dm_0} \right] \dots$$

$$(x^{\theta-1})^{(2)}_{0,2h} = (vm^2_0)^h \left[ C^1_{2h} m_0 (1 + m_0) + C^2_{2h} (1 + m_0)^2 \right] x_{h,2h}(\mu_0) + C^1_{2h} (1 + m_0) \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \cdot \frac{dx_{h,2h}}{dm_0} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0^2}{(1 - \mu_0)^4} \cdot \frac{d^2 x_{h,2h}}{dm_0^2} \left[ C^1_{2h+4} m_0 (1 + m_0) + C^2_{2h+4} (1 + m_0)^2 \right] x_{h+2,2h}(\mu_0) + \\ + C^1_{2h+4} (1 + m_0) \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \cdot \frac{dx_{h+2,2h}}{dm_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0^2}{(1 - \mu_0)^4} \cdot \frac{d^2 x_{h+2,2h}}{dm_0^2} \left[ \dots \right] \dots$$

$$(81) \quad (y^\theta)_{0,2h} = (y^\theta)^{(0)}_{0,2h} + w (y^\theta)^{(1)}_{0,2h} + w^2 (y^\theta)^{(2)}_{0,2h} \dots$$

formules dérivées des précédentes en substituant  $y_{h,k}$  à  $x_{h,k}$ .

Reportons-nous maintenant au numéro 11. Nous voyons qu'il faut calculer les quantités  $K$  et  $a$ . Elles sont données par les formules : (33) pour  $K$ , (35) pour  $a$  et (34) pour la quantité auxiliaire  $c$ . Nous allons les adapter au cas actuel.

Prenons d'abord la formule (33) et remplaçons  $m$  et  $m^2$  par leurs développements suivant les puissances de  $w$  (formules (77) et (77 bis)). Si nous posons :

$$cK = (cK)^{(0)} + w (cK)^{(1)} + w^2 (cK)^{(2)} + \dots$$

nous aurons pour les coefficients  $(cK)^{(i)}$  les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} (cK)^{(0)} &= 1 + 2m_0 + (1 + \nu) m_0^2 + 3 (\nu m_0^2) (x^{\theta-1})^{(0)}_{0,-2} \\ (cK)^{(1)} &= -2m_0 (1 + m_0) - 2 (1 + \nu) m_0^2 (1 + m_0) + 3 (\nu m_0^2) [ (x^{\theta-1})^{(1)}_{0,-2} - 2 (1 + m_0) (x^{\theta-1})^{(0)}_{0,-2} ] \\ (cK)^{(2)} &= 2m_0^2 (1 + m_0) + (1 + \nu) m_0^2 [ 2m_0 (1 + m_0) + (1 + m_0)^2 ] + 3 (\nu m_0^2) \left[ (x^{\theta-1})^{(2)}_{0,-2} - 2 (1 + m_0) (x^{\theta-1})^{(1)}_{0,-2} + \right. \\ &\quad \left. + [ 2m_0 (1 + m_0) + (1 + m_0)^2 ] (x^{\theta-1})^{(0)}_{0,-2} \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de  $K$  il faudra calculer à part la valeur de  $c$ . Celle-ci est donnée par la formule (34). Si, dans celle-ci, nous remplaçons les  $\xi_{0,h}$  et  $\gamma_{0,h}$  et leurs puissances par leurs développements suivant les puissances de  $w$  et si nous ordonnons par rapport à  $w$ , nous obtiendrons pour  $c$  la formule :

$$(83) \quad c = c^{(0)} + c^{(1)} w + c^{(2)} w^2 + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} c^{(0)} &= 1 + 6 [\xi^{(0)}_{0,2}]^2 - 3 [\gamma^{(0)}_{0,2}]^2 + 6 [\xi^{(0)}_{0,4}]^2 - 3 [\gamma^{(0)}_{0,4}]^2 - 24 [\xi^{(0)}_{0,2}]^2 \xi^{(0)}_{0,4} + \dots \\ c^{(1)} &= 12 \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} - 6 \gamma^{(0)}_{0,2} \gamma^{(1)}_{0,2} + 12 \xi^{(0)}_{0,4} \xi^{(1)}_{0,4} - 6 \gamma^{(0)}_{0,4} \gamma^{(1)}_{0,4} - 24 [ 2 \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,4} + 2 [\xi^{(0)}_{0,2}]^2 \xi^{(1)}_{0,4} ] + \dots \\ c^{(2)} &= 6 \left[ [\xi^{(1)}_{0,2}]^2 + 2 \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,2} \right] - 3 \left[ [\gamma^{(1)}_{0,2}]^2 + 2 \gamma^{(0)}_{0,2} \gamma^{(2)}_{0,2} \right] + 6 \left[ [\xi^{(1)}_{0,4}]^2 + 2 \xi^{(0)}_{0,4} \xi^{(2)}_{0,4} \right] - \\ &\quad - 3 \left[ [\gamma^{(1)}_{0,4}]^2 + 2 \gamma^{(0)}_{0,4} \gamma^{(2)}_{0,4} \right] - 24 \left[ [\xi^{(0)}_{0,2}]^2 \xi^{(2)}_{0,4} + 2 \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,4} + \xi^{(0)}_{0,4} [ [\xi^{(1)}_{0,2}]^2 + 2 \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,2} ] \right] + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Nous arrivons au calcul de  $a$ . La formule (35) donne pour  $a$  :

$$a = a_0 \left[ \frac{K}{(1+m)^2} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

mais on peut écrire :

$$1 + m = \frac{1 + m_0}{1 + m_0 w^\nu}$$

de sorte que la valeur de  $a$  prend la forme :

$$a = a_0 K^{-\frac{1}{3}} (1 + m_0)^{\frac{2}{3}} (1 + m_0 w)^{-\frac{2}{3}}$$

dans cette formule il faudra employer la valeur de  $K$  calculée en fonction de  $w$  numériquement. En développant le dernier facteur suivant la formule du binôme et ordonnant par rapport à  $w$ , nous obtenons pour  $a$  la formule :

$$(85) \quad a = a_0 K^{-\frac{1}{3}} (1 + m_0)^{\frac{2}{3}} \left( 1 - \frac{2}{3} m_0 w + \frac{2.5}{3.6} m_0^2 w^2 \dots \right)$$

Ces préliminaires posés, nous allons passer à l'adaptation des formules qui donnent  $\left(\frac{r}{a}\right)_0$ ,  $v_0$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$ , puis de celles qui donnent  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $Z$ ,  $\delta \left(\frac{r}{a}\right)$ ,  $\delta v$ ,  $s$  et des formules auxiliaires.

CHAPITRE II

25. — Pour adapter les formules qui donnent  $\left(\frac{r}{a}\right)_0$ ,  $v_0$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$ , au calcul des petites planètes par groupes, il nous suffit de remplacer dans les formules (35<sup>ter</sup>), (36<sup>ter</sup>), (38), les  $\xi_{0,h}$ ,  $\eta_{0,h}$ ,  $(x^{\theta-1})_{0,h}$ ,  $(y^\theta)_{0,h}$ , par leurs développements suivants les puissances de  $w$ .

Nous remarquerons que nous n'avons pas donné encore les développements de  $\xi_{0,h}$  et de  $\eta_{0,h}$  suivant les puissances de  $w$ , mais, comme l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \xi_{0,h} = (x^{\theta-1})_{0,h} + (y^\theta)_{0,h} \\ 2 \eta_{0,h} = (x^{\theta-1})_{0,h} - (y^\theta)_{0,h} \end{array} \right.$$

il suffit d'ajouter membre à membre ou de soustraire les formules de même rang (80) et (81) pour les obtenir.

Remarquons aussi que le calcul des développements de  $X_0$  et  $Y_0$  est immédiat car leurs coefficients ne sont autres que les coefficients (80).

Il nous reste à calculer les développements de  $\left(\frac{r}{a}\right)_0$  et de  $v_0$ .

Nous poserons pour cela, afin de simplifier les formules :

$$\xi_{0,h} = \xi^{(0)}_{0,h} + w \xi^{(1)}_{0,h} + w^2 \xi^{(2)}_{0,h} \dots \quad \eta_{0,h} = \eta^{(0)}_{0,h} + w \eta^{(1)}_{0,h} + w^2 \eta^{(2)}_{0,h} \dots$$

Ceci dit, dans les formules (35<sup>ter</sup>) et (36<sup>ter</sup>), nous remplacerons les  $\xi_{0,h}$  et les  $\eta_{0,h}$  par leurs développements suivants les puissances de  $w$  et, effectuant les opérations, en nous bornant à conserver les termes en  $w$  et  $w^2$  nous obtiendrons les développements :

$$\begin{aligned} r_{0,h} &= r^{(0)}_{0,h} + w r^{(1)}_{0,h} + w^2 r^{(2)}_{0,h} \dots \\ l_{0,h} &= l^{(0)}_{0,h} + w l^{(1)}_{0,h} + w^2 l^{(2)}_{0,h} \dots \end{aligned}$$

avec :

$$(85) \left\{ \begin{array}{l} r^{(0)}_{0,0} = 1 + [\eta^{(0)}_{0,2}]^2 + [\eta^{(0)}_{0,4}]^2 - 2 \xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4} + \dots \\ r^{(1)}_{0,0} = 2 \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,2} + 2 \eta^{(0)}_{0,4} \eta^{(1)}_{0,4} - 2 \xi^{(1)}_{0,2} [\eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4}] - \dots \\ r^{(2)}_{0,0} = \left[ [\eta^{(1)}_{0,2}]^2 + 2 \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,2} \right] + \left[ [\eta^{(1)}_{0,4}]^2 + 2 \eta^{(0)}_{0,4} \eta^{(2)}_{0,4} \right] - 2 \xi^{(0)}_{0,2} [\eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(2)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4}] - 2 \xi^{(1)}_{0,2} [\eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4}] - 2 \xi^{(2)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4} + \dots \end{array} \right.$$

$$(86) \left\{ \begin{array}{l} r^{(0)}_{0,2} = 2 \xi^{(0)}_{0,2} - \xi^{(0)}_{0,2} [\eta^{(0)}_{0,2}]^2 + 2 \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4} + \dots \\ r^{(1)}_{0,2} = 2 \xi^{(1)}_{0,2} - 2 \xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,2} - \xi^{(1)}_{0,2} [\eta^{(0)}_{0,2}]^2 + 2 [\eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4}] + \dots \\ r^{(2)}_{0,2} = 2 \xi^{(2)}_{0,2} - \xi^{(0)}_{0,2} \left[ [\eta^{(1)}_{0,2}]^2 + 2 \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,2} \right] - 2 \xi^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,2} - \xi^{(0)}_{0,2} [\eta^{(1)}_{0,2}]^2 + 2 [\eta^{(2)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,4}] + \dots \end{array} \right.$$

$$(87) \left\{ \begin{array}{l} r^{(0)}_{0,4} = 2 \xi^{(0)}_{0,4} - [\eta^{(0)}_{0,4}]^2 - \dots \\ r^{(1)}_{0,4} = 2 \xi^{(1)}_{0,4} - 2 \eta^{(0)}_{0,4} \eta^{(1)}_{0,4} - \dots \\ r^{(2)}_{0,4} = 2 \xi^{(2)}_{0,4} - \left[ [\eta^{(1)}_{0,4}]^2 + 2 \eta^{(0)}_{0,4} \eta^{(2)}_{0,4} \right] - \dots \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
(88) \quad & \left\{ \begin{aligned}
l^{(0)}_{0,2} &= 2\eta^{(0)}_{0,2} - 2\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4} + 2\eta^{(0)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,4} \dots \\
l^{(1)}_{0,2} &= 2\eta^{(1)}_{0,2} - 2 [\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,4} + \xi^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4}] + 2 [\eta^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,4}] \dots \\
l^{(2)}_{0,2} &= 2\eta^{(2)}_{0,2} - 2 [\xi^{(2)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,4} + \xi^{(1)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,4} + \xi^{(2)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,4}] + 2 [\eta^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,4} + \eta^{(2)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,4}] \dots \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \right. \\
(88 \text{ bis}) \quad & \left\{ \begin{aligned}
l^{(0)}_{0,4} &= 2\eta^{(0)}_{0,4} - 2\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,6} - 2\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,6} + 2\eta^{(0)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,6} \\
l^{(1)}_{0,4} &= 2\eta^{(1)}_{0,4} - 2 [\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,6} + \xi^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,6}] - 2 [\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,6} + \xi^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,6}] + 2 [\eta^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,6} + \eta^{(1)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,6}] \\
l^{(2)}_{0,4} &= 2\eta^{(2)}_{0,4} - 2 [\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,6} + \xi^{(1)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,6} + \xi^{(2)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,6}] - 2 [\xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,6} + \xi^{(1)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,6} + \xi^{(2)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,6}] + \\
&\quad + 2 [\eta^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,6} + \eta^{(1)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,6} + \eta^{(2)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,6}] + \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Avant de nous occuper des formules qui donnent les compléments  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta \left( \frac{r}{a} \right)$ ,  $\delta v$ , et les coordonnées  $z$  et  $s$ , nous devons calculer le développement trigonométrique de  $\rho_0^n$  avec  $n = 1, 2, 3$  et son développement suivant les puissances de  $w$ .

Rappelons-nous que :

$$\rho_0^n = (\xi_0^2 - \eta_0^2)^{-\frac{n}{2}}$$

En mettant  $\xi_0$  en facteur, développant le radical par la formule du binôme et mettant  $1 + \xi'_0$  à la place de  $\xi_0$ , nous pouvons écrire :

$$\rho_0^n = 1 - \frac{n}{1} \xi'_0 + \frac{n(n+1)}{1.2} \xi_0'^2 \dots + \frac{n}{2} \eta_0^2 \left( 1 - \frac{n+2}{1} \xi'_0 + \dots \right) + \frac{n(n+2)}{2.4} \eta_0^4 (1 \dots) \dots$$

Remplaçant maintenant  $\xi'_0$  et  $\eta_0$  par leurs développements en fonction de  $\theta$  et transformant les exponentielles en lignes trigonométriques, nous obtiendrons pour  $\rho_0^n$  le développement suivant :

$$(89) \quad \rho_0^n = (\rho_0^n)_0 + (\rho_0^n)_2 \cos 2V + (\rho_0^n)_4 \cos 4V + \dots$$

avec

$$\begin{aligned}
(\rho_0^n)_0 &= 1 + n(n+1) \xi_0^2 + n(n+1) \xi_0^4 - n \eta_0^2 - n \eta_0^4 - n(n+2) \xi_0 \eta_0^2 - \frac{1}{2} n(n+2)(n+3) \xi_0^2 \eta_0^2 + \dots \\
(\rho_0^n)_2 &= -2n \xi_0^2 + 2n(n+1) \xi_0 \eta_0^2 - 2n \eta_0^2 \eta_0^4 + n(n+2) \xi_0^2 \eta_0^2 \dots \\
(\rho_0^n)_4 &= -2n \xi_0^4 + n(n+1) \xi_0^2 \eta_0^2 + 2n \eta_0^2 \eta_0^4 + 2n(n+1) \xi_0 \eta_0^2 \dots \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Ceci fait, remplaçons les  $\xi_0$  et  $\eta_0$  par leurs développements suivant les puissances de  $\tau$ , ordonnons et arrêtons nous aux termes en  $\tau^2$ , nous obtiendrons pour les divers coefficients  $(\rho_0^n)_h$  les développements :

$$(\rho_0^n)_h = (\rho_0^n)_{h^{(0)}}(\tau) + (\rho_0^n)_{h^{(1)}}(\tau) + (\rho_0^n)_{h^{(2)}}(\tau) + \dots$$

avec :

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned}
(\rho_0^n)_{0^{(0)}} &= 1 + n(n+1) [\xi^{(0)}_{0,2}]^2 + n(n+1) [\xi^{(0)}_{0,4}]^2 - n [\eta^{(0)}_{0,2}]^2 - n [\eta^{(0)}_{0,4}]^2 \dots \\
(\rho_0^n)_{0^{(1)}} &= 2n(n+1) [\xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} + \xi^{(0)}_{0,4} \xi^{(1)}_{0,4}] - 2n [\eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,2} + \eta^{(0)}_{0,4} \eta^{(1)}_{0,4}] \dots \\
(\rho_0^n)_{0^{(2)}} &= n(n+1) [2 \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,2} + (\xi^{(1)}_{0,2})^2 + 2 \xi^{(0)}_{0,4} \xi^{(2)}_{0,4} + (\xi^{(1)}_{0,4})^2] - n [2 \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,2} + (\eta^{(1)}_{0,2})^2 + \\
&\quad + 2 \eta^{(0)}_{0,4} \eta^{(2)}_{0,4} + (\eta^{(1)}_{0,4})^2] \dots \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \right.$$

$$(91) \left\{ \begin{aligned} (\rho_{n_0}^n)_2^{(0)} &= -2n \xi^{(0)}_{0,2} + 2n(n+1) \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,2} - 2n \tau^{(0)}_{0,2} \tau^{(0)}_{0,2} \dots \\ (\rho_{n_0}^n)_2^{(1)} &= -2n \xi^{(1)}_{0,2} + 2n(n+1) [\xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} + \xi^{(1)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,2}] - 2n [\tau^{(0)}_{0,2} \tau^{(1)}_{0,2} + \tau^{(1)}_{0,2} \tau^{(0)}_{0,2}] \dots \\ (\rho_{n_0}^n)_2^{(2)} &= -2n \xi^{(2)}_{0,2} + 2n(n+1) [\xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,2} + \xi^{(1)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} + \xi^{(2)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,2}] - 2n [\tau^{(0)}_{0,2} \tau^{(2)}_{0,2} + \\ &\quad + \tau^{(1)}_{0,2} \tau^{(1)}_{0,2} + \tau^{(2)}_{0,2} \tau^{(0)}_{0,2}] \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$$(92) \left\{ \begin{aligned} (\rho_{n_0}^n)_4^{(0)} &= -2n \xi^{(0)}_{0,4} + n(n+1) [\xi^{(0)}_{0,2}]^2 + n [\eta^{(0)}_{0,2}]^2 + 2n(n+2) \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,2} \dots \\ (\rho_{n_0}^n)_4^{(1)} &= -2n \xi^{(1)}_{0,4} + 2n(n+1) \xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} + 2n \eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,2} + 2n(n+2) [\eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(1)}_{0,2} + \eta^{(1)}_{0,2} \eta^{(0)}_{0,2}] \dots \\ (\rho_{n_0}^n)_4^{(2)} &= -2n \xi^{(2)}_{0,4} + 2n(n+1) [2\xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,2} + (\xi^{(1)}_{0,2})^2] + n [2\tau^{(0)}_{0,2} \tau^{(2)}_{0,2} + (\tau^{(1)}_{0,2})^2] + \\ &\quad + 2n(n+2) [\eta^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,2} + \tau^{(1)}_{0,2} \tau^{(1)}_{0,2} + \tau^{(2)}_{0,2} \tau^{(0)}_{0,2}] \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

26. — Nous pouvons aborder le calcul des autres séries. Nous remarquerons tout d'abord que toutes les séries qui entrent dans les formules donnant  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $z$ ,  $\delta \left(\frac{r}{a}\right)$ ,  $\delta v$ ,  $s$ , sont des fonctions d'une ou de plusieurs des fonctions  $P$ ,  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $P^2$ ,  $Q^2$ ,  $\Delta^2$ ,  $DQ$ ,  $K\rho^3_0 + 2vm^2$ ,  $P\Delta$ ,  $u\Delta$ ,  $v\Delta$ , qui sont elles-mêmes des fonctions de  $u$  et de  $v$  d'après les formules (63). Nous devons donc commencer par développer  $u$  et  $v$  suivant les puissances de  $w$ .

Nous reportant aux formules (64) qui donnent les coefficients  $u_k$  et  $v_k$  en fonction de  $\xi_{0,k}$  et  $\eta_{0,k}$ , nous voyons que ces coefficients peuvent s'écrire en fonction de  $w$  sous la forme :

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} u_k &= (\xi^{(0)}_{0,k} + k \tau^{(0)}_{0,k}) + w (\xi^{(1)}_{0,k} + k \tau^{(1)}_{0,k}) + w^2 (\xi^{(2)}_{0,k} + k \tau^{(2)}_{0,k}) + \dots \\ v_k &= (\eta^{(0)}_{0,k} + k \xi^{(0)}_{0,k}) + w (\eta^{(1)}_{0,k} + k \xi^{(1)}_{0,k}) + w^2 (\eta^{(2)}_{0,k} + k \xi^{(2)}_{0,k}) + \dots \end{aligned} \right.$$

ce qui donne les développements cherchés de  $u$  et de  $v$ .

Pour les développements des autres fonctions, nous nous reporterons à la troisième partie où sont données en fonction de  $u_k$ ,  $v_k$ , des  $\xi_{0,k}$ ,  $\eta_{0,k}$ ,  $\rho_{0,k}$ , les développements de ces fonctions en séries dans le cas général. Nous remplacerons dans ces développements  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $\rho_{0,k}$ ,  $\xi_{0,k}$ ,  $\eta_{0,k}$ , par leurs développements suivant les puissances de  $w$ , nous ordonnerons et nous arrêterons à  $w^2$  car, dans la plupart des cas,  $w$  sera très petit. En donnant à chaque coefficient la forme générale :

$$C = C^{(0)} + C^{(1)} w + C^{(2)} w^2 + \dots$$

nous obtiendrons les développements suivants :

$$(93 \text{ bis}) \quad P_0^{(0)} = 2 \quad P_0^{(1)} = -(1+m_0) \quad P_0^{(2)} = m_0(1+m_0) \quad \dots$$

$$(94) \quad P_2^{(0)} = 2v_2^{(0)} - 2u_2^{(0)} v_1^{(0)} + \dots$$

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} P_2^{(1)} &= 2v_2^{(1)} - 2 [u_2^{(0)} v_1^{(1)} + u_2^{(1)} v_1^{(0)}] - 2 [v_2^{(0)} u_1^{(1)} + v_2^{(1)} u_1^{(0)}] \dots \\ P_2^{(2)} &= 2v_2^{(2)} - 2 [u_2^{(0)} v_1^{(2)} + u_2^{(1)} v_1^{(1)} + u_2^{(2)} v_1^{(0)}] - 2 [v_2^{(0)} u_1^{(2)} + v_2^{(1)} u_1^{(1)} + v_2^{(2)} u_1^{(0)}] \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} P_4^{(0)} &= 4v_4^{(0)} - 4u_2^{(0)} \dots \\ P_4^{(1)} &= 4v_4^{(1)} - 4 [u_2^{(0)} v_2^{(1)} + u_2^{(1)} v_2^{(0)}] \dots \\ P_4^{(2)} &= 4v_4^{(2)} - 4 [u_2^{(0)} v_2^{(2)} + u_2^{(1)} v_2^{(1)} + u_2^{(2)} v_2^{(0)}] \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$



$$(95) \left\{ \begin{array}{l} Q_0 = 0 \\ Q_2^{(0)} = 2u_2^{(0)} - 2u_2^{(0)} v_1^{(0)} + 2v_2^{(0)} u_1^{(0)} \dots \\ Q_2^{(1)} = 2u_2^{(1)} - 2 [u_2^{(0)} v_1^{(1)} + u_2^{(1)} v_1^{(0)}] + 2 [v_2^{(0)} u_1^{(1)} + v_2^{(1)} u_1^{(0)}] \dots \\ Q_2^{(2)} = 2u_2^{(2)} - 2 [u_2^{(0)} v_1^{(2)} + u_2^{(1)} v_1^{(1)} + u_2^{(2)} v_1^{(0)}] + 2 [v_2^{(0)} u_1^{(2)} + v_2^{(1)} u_1^{(1)} + v_2^{(2)} u_1^{(0)}] \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(95) \left\{ \begin{array}{l} Q_4^{(0)} = 4u_4^{(0)} - 2 [u_2^{(0)}]^2 - 2 [v_2^{(0)}]^2 \dots \\ Q_4^{(1)} = 4u_4^{(1)} - 4u_2^{(0)} u_2^{(1)} - 4v_2^{(0)} v_2^{(1)} \dots \\ Q_4^{(2)} = 4u_4^{(2)} - 2 \left[ [u_2^{(1)}]^2 + 2u_2^{(0)} u_2^{(2)} \right] - 2 \left[ [v_2^{(1)}]^2 + 2v_2^{(0)} v_2^{(2)} \right] \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(96) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_0^{(0)} = 1 + 2 [u_2^{(0)}]^2 - [v_2^{(0)}]^2 \dots \\ \Delta_0^{(1)} = 4u_2^{(0)} u_2^{(1)} - 2v_2^{(0)} v_2^{(1)} \dots \\ \Delta_0^{(2)} = 2 \left[ [u_2^{(1)}]^2 + 2u_2^{(0)} u_2^{(2)} \right] - \left[ [v_2^{(1)}]^2 + 2v_2^{(0)} v_2^{(2)} \right] \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(97) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2^{(0)} = -u_2^{(0)} + \frac{1}{2} u_2^{(0)} v_1^{(0)} - v_2^{(0)} u_1^{(0)} + \dots \\ \Delta_2^{(1)} = -u_2^{(1)} + \frac{1}{2} [u_2^{(0)} v_1^{(1)} + u_2^{(1)} v_1^{(0)}] - [v_2^{(0)} u_1^{(1)} + v_2^{(1)} u_1^{(0)}] + \dots \\ \Delta_2^{(2)} = -u_2^{(2)} + \frac{1}{2} [u_2^{(0)} v_1^{(2)} + u_2^{(1)} v_1^{(1)} + u_2^{(2)} v_1^{(0)}] - [v_2^{(0)} u_1^{(2)} + v_2^{(1)} u_1^{(1)} + v_2^{(2)} u_1^{(0)}] \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(98) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_4^{(0)} = [u_2^{(0)}]^2 + \frac{1}{2} [v_2^{(0)}]^2 - u_4^{(0)} \dots \\ \Delta_4^{(1)} = 2u_2^{(0)} u_2^{(1)} + v_2^{(0)} v_2^{(1)} - u_4^{(1)} \dots \\ \Delta_4^{(2)} = \left[ [u_2^{(1)}]^2 + 2u_2^{(0)} u_2^{(2)} \right] + \frac{1}{2} \left[ [v_2^{(1)}]^2 + 2v_2^{(0)} v_2^{(2)} \right] - u_4^{(2)} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Les formules que nous venons d'obtenir, de (90) à (98) inclus, vont nous permettre de développer toutes les autres fonctions. En suivant toujours la même marche, nous obtiendrons les développements suivants :

$$(99) \left\{ \begin{array}{l} (P^2)_0^{(0)} = (P_0^{(0)})^2 + 2 (P_2^{(0)})^2 \dots \\ (P^2)_0^{(1)} = 2P_0^{(0)} P_0^{(1)} + 4 P_2^{(0)} P_2^{(1)} \dots \\ (P^2)_0^{(2)} = \left[ [P_0^{(1)}]^2 + 2P_0^{(0)} P_0^{(2)} \right] + 2 \left[ [P_2^{(1)}]^2 + 2P_2^{(0)} P_2^{(2)} \right] \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(100) \left\{ \begin{array}{l} (P^2)_2^{(0)} = 2P_0^{(0)} P_2^{(0)} + \dots \\ (P^2)_2^{(1)} = 2 [P_0^{(0)} P_2^{(1)} + P_0^{(1)} P_2^{(0)}] + \dots \\ (P^2)_2^{(2)} = 2 [P_0^{(0)} P_2^{(2)} + P_0^{(1)} P_2^{(1)} + P_0^{(2)} P_2^{(0)}] + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(101) \left\{ \begin{array}{l} (P_2)_k^{(0)} = 2P_0^{(0)} P_k^{(0)} + [P_2^{(0)}]^2 \dots\dots \\ (P^2)_k^{(1)} = 2 [P_0^{(0)} P_k^{(1)} + P_0^{(1)} P_k^{(0)}] + 2P_2^{(0)} P_2^{(1)} \dots\dots \\ (P^2)_k^{(2)} = 2 [P_0^{(0)} P_k^{(2)} + P_0^{(1)} P_k^{(1)} + P_0^{(2)} P_k^{(0)}] + \left[ [P_2^{(1)}]^2 + 2P_2^{(0)} P_2^{(2)} \right] \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(102) \left\{ \begin{array}{l} (Q^2)_0^{(0)} = -2 [Q_2^{(0)}]^2 - \dots\dots \\ (Q^2)_0^{(1)} = -4Q_2^{(0)} Q_2^{(1)} - \dots\dots \\ (Q^2)_0^{(2)} = -2 \left[ [Q_2^{(1)}]^2 + 2Q_2^{(0)} Q_2^{(2)} \right] - \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(103) \left\{ \begin{array}{l} (Q^2)_2^{(0)} = -2Q_2^{(0)} Q_4^{(0)} \dots\dots \\ (Q^2)_2^{(1)} = -2 [Q_2^{(0)} Q_4^{(1)} + Q_2^{(1)} Q_4^{(0)}] \dots\dots \\ (Q^2)_2^{(2)} = -2 [Q_2^{(0)} Q_4^{(2)} + Q_2^{(1)} Q_4^{(1)} + Q_2^{(2)} Q_4^{(0)}] \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(104) \left\{ \begin{array}{l} (Q^2)_4^{(0)} = [Q_2^{(0)}]^2 \dots\dots \\ (Q^2)_4^{(1)} = 2Q_2^{(0)} Q_2^{(1)} \dots\dots \\ (Q^2)_4^{(2)} = \left[ [Q_2^{(1)}]^2 + 2Q_2^{(0)} Q_2^{(2)} \right] \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(105) \left\{ \begin{array}{l} (\Delta^2)_0^{(0)} = [\Delta_0^{(0)}]^2 + 2 [\Delta_2^{(0)}]^2 + \dots\dots \\ (\Delta^2)_0^{(1)} = 2\Delta_0^{(0)} \Delta_0^{(1)} + 4\Delta_2^{(0)} \Delta_2^{(1)} + \dots\dots \\ (\Delta^2)_0^{(2)} = \left[ [\Delta_0^{(1)}]^2 + 2\Delta_0^{(0)} \Delta_0^{(2)} \right] + 2 \left[ [\Delta_2^{(1)}]^2 + 2\Delta_2^{(0)} \Delta_2^{(2)} \right] \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(106) \left\{ \begin{array}{l} (\Delta^2)_2^{(0)} = 2\Delta_0^{(0)} \Delta_2^{(0)} + \dots\dots \\ (\Delta^2)_2^{(1)} = 2 [\Delta_0^{(0)} \Delta_2^{(1)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ (\Delta^2)_2^{(2)} = 2 [\Delta_0^{(0)} \Delta_2^{(2)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_2^{(1)} + \Delta_0^{(2)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(107) \left\{ \begin{array}{l} (\Delta^2)_4^{(0)} = 2\Delta_0^{(0)} \Delta_4^{(0)} + \dots\dots \\ (\Delta^2)_4^{(1)} = 2 [\Delta_0^{(0)} \Delta_4^{(1)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_4^{(0)}] + \dots\dots \\ (\Delta^2)_4^{(2)} = 2 [\Delta_0^{(0)} \Delta_4^{(2)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_4^{(1)} + \Delta_0^{(2)} \Delta_4^{(0)}] + \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(108) \quad (DQ)_0 = 0$$

$$(109) \left\{ \begin{array}{l} (DQ)_{2^{(0)}} = 2Q_{2^{(0)}} \dots\dots \\ (DQ)_{2^{(1)}} = 2Q_{2^{(1)}} \dots\dots \\ (DQ)_{2^{(2)}} = 2Q_{2^{(2)}} \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right. \quad (110) \left\{ \begin{array}{l} (DQ)_{i^{(0)}} = 4Q_{i^{(0)}} \dots\dots \\ (DQ)_{i^{(1)}} = 4Q_{i^{(1)}} \dots\dots \\ (DQ)_{i^{(2)}} = 4Q_{i^{(2)}} \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(111) \left\{ \begin{array}{l} (P\Delta)_0^{(0)} = P_0^{(0)} \Delta_0^{(0)} + 2P_2^{(0)} \Delta_2^{(0)} + \dots\dots \\ (P\Delta)_0^{(1)} = [P_0^{(0)} \Delta_0^{(1)} + P_0^{(1)} \Delta_0^{(0)}] + 2[P_2^{(0)} \Delta_2^{(1)} + P_2^{(1)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ (P\Delta)_0^{(2)} = [P_0^{(0)} \Delta_0^{(2)} + P_0^{(1)} \Delta_0^{(1)} + P_0^{(2)} \Delta_0^{(0)}] + 2[P_2^{(0)} \Delta_2^{(2)} + P_2^{(1)} \Delta_2^{(1)} + P_2^{(2)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(112) \left\{ \begin{array}{l} (P\Delta)_2^{(0)} = P_0^{(0)} \Delta_2^{(0)} + P_2^{(0)} \Delta_0^{(0)} + \dots\dots \\ (P\Delta)_2^{(1)} = [P_0^{(0)} \Delta_2^{(1)} + P_0^{(1)} \Delta_2^{(0)}] + [P_2^{(0)} \Delta_0^{(1)} + P_2^{(1)} \Delta_0^{(0)}] + \dots\dots \\ (P\Delta)_2^{(2)} = [P_0^{(0)} \Delta_2^{(2)} + P_0^{(1)} \Delta_2^{(1)} + P_0^{(2)} \Delta_2^{(0)}] + [P_2^{(0)} \Delta_0^{(2)} + P_2^{(1)} \Delta_2^{(1)} + P_2^{(2)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(113) \left\{ \begin{array}{l} (P\Delta)_{i^{(0)}} = P_0^{(0)} \Delta_i^{(0)} + P_i^{(0)} \Delta_0^{(0)} + \dots\dots \\ (P\Delta)_{i^{(1)}} = [P_0^{(0)} \Delta_i^{(1)} + P_0^{(1)} \Delta_i^{(0)}] + [P_i^{(0)} \Delta_0^{(1)} + P_i^{(1)} \Delta_0^{(0)}] + \dots\dots \\ (P\Delta)_{i^{(2)}} = [P_0^{(0)} \Delta_i^{(2)} + P_0^{(1)} \Delta_i^{(1)} + P_0^{(2)} \Delta_i^{(0)}] + [P_i^{(0)} \Delta_0^{(2)} + P_i^{(1)} \Delta_0^{(1)} + P_i^{(2)} \Delta_0^{(0)}] + \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(114) \left\{ \begin{array}{l} (u\Delta)_0^{(0)} = \Delta_0^{(0)} + 2u_2^{(0)} \Delta_2^{(0)} + \dots\dots \\ (u\Delta)_0^{(1)} = \Delta_0^{(1)} + 2[u_2^{(0)} \Delta_2^{(1)} + u_2^{(1)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ (u\Delta)_0^{(2)} = \Delta_0^{(2)} + 2[u_2^{(0)} \Delta_2^{(2)} + u_2^{(1)} \Delta_2^{(1)} + u_2^{(2)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(115) \left\{ \begin{array}{l} (u\Delta)_2^{(0)} = u_2^{(0)} \Delta_0^{(0)} + \Delta_2^{(0)} + \dots\dots \\ (u\Delta)_2^{(1)} = [u_2^{(0)} \Delta_0^{(1)} + u_2^{(1)} \Delta_0^{(0)}] + \Delta_2^{(1)} + \dots\dots \\ (u\Delta)_2^{(2)} = [u_2^{(0)} \Delta_0^{(2)} + u_2^{(1)} \Delta_0^{(1)} + u_2^{(2)} \Delta_0^{(0)}] + \Delta_2^{(2)} + \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(116) \left\{ \begin{array}{l} (u\Delta)_{i^{(0)}} = u_i^{(0)} \Delta_0^{(0)} + u_2^{(0)} \Delta_2^{(0)} + \dots\dots \\ (u\Delta)_{i^{(1)}} = [u_i^{(0)} \Delta_0^{(1)} + u_i^{(1)} \Delta_0^{(0)}] + [u_2^{(0)} \Delta_2^{(1)} + u_2^{(1)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ (u\Delta)_{i^{(2)}} = [u_i^{(0)} \Delta_0^{(2)} + u_i^{(1)} \Delta_0^{(1)} + u_i^{(2)} \Delta_0^{(0)}] + [u_2^{(0)} \Delta_2^{(2)} + u_2^{(1)} \Delta_2^{(1)} + u_2^{(2)} \Delta_2^{(0)}] + \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$(117) \quad (v\Delta)_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
(118) \quad & \left\{ \begin{aligned}
(\mathfrak{v}\Delta)_2^{(0)} &= \mathfrak{v}_2^{(0)} \Delta_0^{(0)} + \dots \\
(\mathfrak{v}\Delta)_2^{(1)} &= [\mathfrak{v}_2^{(0)} \Delta_0^{(1)} + \mathfrak{v}_2^{(1)} \Delta_0^{(0)}] + \dots \\
(\mathfrak{v}\Delta)_2^{(2)} &= [\mathfrak{v}_2^{(0)} \Delta_0^{(2)} + \mathfrak{v}_2^{(1)} \Delta_0^{(1)} + \mathfrak{v}_2^{(2)} \Delta_0^{(0)}] + \dots \\
\dots & \dots
\end{aligned} \right. \\
(119) \quad & \left\{ \begin{aligned}
(\mathfrak{v}\Delta)_4^{(0)} &= \mathfrak{v}_4^{(0)} \Delta_0^{(0)} + \dots \\
(\mathfrak{v}\Delta)_4^{(1)} &= [\mathfrak{v}_4^{(0)} \Delta_0^{(1)} + \mathfrak{v}_4^{(1)} \Delta_0^{(0)}] + \dots \\
(\mathfrak{v}\Delta)_4^{(2)} &= [\mathfrak{v}_4^{(0)} \Delta_0^{(2)} + \mathfrak{v}_4^{(1)} \Delta_0^{(1)} + \mathfrak{v}_4^{(2)} \Delta_0^{(0)}] + \dots \\
\dots & \dots
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Les premières séries que nous devons étudier maintenant sont celles qui représentent les fonctions  $K\rho^3_0 + 2\nu m^2$  et :

$$W = 2P^2 - Q^2 - DQ - (K\rho^3_0 + 2\nu m^2)$$

et leurs expressions suivant les puissances de  $w$  s'obtiendront immédiatement en vertu des formules (99), (100), (101), (102), (103), (104), (108), (109), (110), (123), (124), (125).

Prenons ensuite les séries représentées par les formules (67). Leurs coefficients seront calculés au moyen des formules (64 bis) et (64), ce qui est facile car on connaît les développements suivant les puissances de  $w$  des coefficients des équations (64) et les équations :

$$\delta l_{1,0} = 2 \qquad \sigma_{1,0} = 1$$

dans les premiers membres desquelles on mettra les développements correspondant suivant les puissances de  $w$ , donneront les valeurs de  $\omega$  et  $\omega'$  en fonction de  $i\omega$ .

Nous pouvons donc aborder l'étude des séries que donnent  $\delta \left( \frac{r}{a} \right)$ ,  $\delta v$ ,  $\varkappa$ ,  $s$ .

Nous remarquons d'abord que les séries qui donnent  $\delta \left( \frac{r}{a} \right)$  et  $\delta v$  contiennent les facteurs  $\rho_0 \xi_0$ ,  $\rho_0 \eta_0$ ,  $\rho^2_0 \xi_0$ ,  $\rho^2_0 \eta_0$ ; nous les calculerons aisément au moyen des formules (120), (121), (122), (90), (91), (92), et des formules :

$$\begin{aligned}
\xi_{0,h} &= \xi^{(0)}_{0,h} + w \xi^{(1)}_{0,h} + w^2 \xi^{(2)}_{0,h} \dots \\
\eta_{0,h} &= \eta^{(0)}_{0,h} + w \eta^{(1)}_{0,h} + w^2 \eta^{(2)}_{0,h} \dots
\end{aligned}$$

Ordonnant par rapport aux puissances de  $w$  et nous arrêtant à  $w^2$ , nous obtiendrons :

$$(120) \quad M_0^{(0)} = \rho^{(0)}_{0,0} + \rho^{(0)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,2} + \dots$$

$$(121) \quad \left\{ \begin{aligned}
M_0^{(1)} &= \rho^{(1)}_{0,0} + [\rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,2} \xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\
M_0^{(2)} &= \rho^{(2)}_{0,0} + [\rho^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,2} + \xi^{(1)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(2)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,2}] + \dots \\
\dots & \dots
\end{aligned} \right.$$

$$(122) \quad \left\{ \begin{aligned}
M_2^{(0)} &= \rho^{(0)}_{0,2} + 2\rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(0)}_{0,2} + \dots \\
M_2^{(1)} &= \rho^{(1)}_{0,2} + 2[\rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0} \xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\
M_2^{(2)} &= \rho^{(2)}_{0,2} + 2[\rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(2)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0} \xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(2)}_{0,0} \xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\
\dots & \dots
\end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
M_4^{(0)} &= \rho^{(0)}_{0,4} + 2\rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(0)}_{0,4} + \dots \\
M_4^{(1)} &= \rho^{(1)}_{0,4} + 2[\rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(2)}_{0,4} + \rho^{(1)}_{0,4} \xi^{(0)}_{0,4}] + \dots \\
M_4^{(2)} &= \rho^{(2)}_{0,4} + 2[\rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(2)}_{0,4} + \rho^{(1)}_{0,0} \xi^{(1)}_{0,4} + \rho^{(2)}_{0,0} \xi^{(0)}_{0,4}] + \dots \\
\dots & \dots
\end{aligned} \right.$$

$$(124) \quad N_0 = 0$$

$$(125) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_2^{(0)} = i [2\rho^{(0)}_{0,0} \eta^{(0)}_{0,2} + \dots] \\ N_2^{(1)} = i \left[ 2 [\rho^{(0)}_{0,0} \eta^{(1)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0} \eta^{(0)}_{0,2}] + \dots \right] \\ N_2^{(2)} = i \left[ 2 [\rho^{(0)}_{0,0} \eta^{(2)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0} \eta^{(1)}_{0,2} + \rho^{(2)}_{0,0} \eta^{(0)}_{0,2}] + \dots \right] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_i^{(0)} = i [2\rho^{(0)}_{0,0} \eta^{(0)}_{0,i} + \dots] \\ N_i^{(1)} = i \left[ 2 [\rho^{(0)}_{0,0} \eta^{(1)}_{0,i} + \rho^{(1)}_{0,0} \eta^{(0)}_{0,i}] + \dots \right] \\ N_i^{(2)} = i \left[ 2 [\rho^{(0)}_{0,0} \eta^{(2)}_{0,i} + \rho^{(1)}_{0,0} \eta^{(1)}_{0,i} + \rho^{(2)}_{0,0} \eta^{(0)}_{0,i}] + \dots \right] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_0^{(0)} = (\rho^2_0)_0^{(0)} + (\rho^2_0)_2^{(0)} \xi^{(0)}_{0,2} + \dots \\ E_0^{(1)} = (\rho^2_0)_0^{(1)} + [(\rho^2_0)_2^{(0)} \xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_2^{(1)} \xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ E_2^{(0)} = (\rho^2_0)_0^{(2)} + [(\rho^2_0)_2^{(0)} \xi^{(2)}_{0,2} + (\rho^2_0)_2^{(1)} \xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_2^{(2)} \xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_2^{(0)} = (\rho^2_0)_2^{(0)} + 2 (\rho^2_0)_0^{(0)} \xi^{(0)}_{0,2} + \dots \\ E_2^{(1)} = (\rho^2_0)_2^{(1)} + 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ E_2^{(2)} = (\rho^2_0)_2^{(2)} + 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \xi^{(2)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(2)} \xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_i^{(0)} = (\rho^2_0)_i^{(0)} + 2 (\rho^2_0)_0^{(0)} \xi^{(0)}_{0,i} + \dots \\ E_i^{(1)} = (\rho^2_0)_i^{(1)} + 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \xi^{(1)}_{0,i} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \xi^{(0)}_{0,i}] + \dots \end{array} \right.$$

$$(130) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_i^{(2)} = (\rho^2_0)_i^{(2)} + 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \xi^{(2)}_{0,i} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \xi^{(1)}_{0,i} + (\rho^2_0)_0^{(2)} \xi^{(0)}_{0,i}] + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(131) \quad F_0 = 0$$

$$(132) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2^{(0)} = i [2 (\rho^2_0)_0^{(0)} \eta^{(0)}_{0,2} + \dots] \\ F_2^{(1)} = i \left[ 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \eta^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \eta^{(0)}_{0,2}] + \dots \right] \\ F_2^{(2)} = i \left[ 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \eta^{(2)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \eta^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(2)} \eta^{(0)}_{0,2}] + \dots \right] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(133) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_i^{(0)} = i [2 (\rho^2_0)_0^{(0)} \eta^{(0)}_{0,i} + \dots] \\ F_i^{(1)} = i \left[ 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \eta^{(1)}_{0,i} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \eta^{(0)}_{0,i}] + \dots \right] \\ F_i^{(2)} = i \left[ 2 [(\rho^2_0)_0^{(0)} \eta^{(2)}_{0,i} + (\rho^2_0)_0^{(1)} \eta^{(1)}_{0,i} + (\rho^2_0)_0^{(2)} \eta^{(0)}_{0,i}] + \dots \right] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Si nous combinons maintenant les valeurs que nous venons de trouver pour les coefficients M , N , E , F , avec les valeurs en fonction de  $w$  des  $\delta z_{i,j}$  et des  $\delta \eta_{i,j}$  , nous obtiendrons les coefficients des développements trigonométriques de  $\delta \left( \frac{r}{a} \right)$  , de  $\delta l$  et de  $s$  sous la forme générale suivante :

a) COEFFICIENTS DU DÉVELOPPEMENT DE  $\delta \left( \frac{r}{a} \right)$

$$(134) \quad R^{(0)}_{i,k} = \varepsilon \left[ M_0^{(0)} \delta z_{i,k}^{(0)} + \frac{1}{2} M_2^{(0)} \delta z_{i,k-2}^{(0)} + \frac{1}{2} M_2^{(0)} \delta z_{i,k+2}^{(0)} + \dots + \frac{1}{2} i N_2 \delta \eta_{i,k-2}^{(0)} - \frac{1}{2} i N_2 \delta \eta_{i,k+2}^{(0)} \dots \right]$$

$$(135) \quad R^{(1)}_{i,k} = \varepsilon \left[ [M_0^{(0)} \delta z_{i,k}^{(1)} + M_0^{(1)} \delta z_{i,k}^{(0)}] + \frac{1}{2} [M_2^{(0)} \delta z_{i,k-2}^{(1)} + M_2^{(1)} \delta z_{i,k-2}^{(0)}] + \frac{1}{2} [M_2^{(0)} \delta z_{i,k+2}^{(1)} + M_2^{(1)} \delta z_{i,k+2}^{(0)}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} i [N_2^{(0)} \delta \eta_{i,k-2}^{(1)} + N_2^{(1)} \delta \eta_{i,k-2}^{(0)}] - \frac{1}{2} i [N_2^{(0)} \delta \eta_{i,k+2}^{(1)} + N_2^{(1)} \delta \eta_{i,k+2}^{(0)}] \dots \right]$$

$$(136) \quad R^{(2)}_{i,k} = \varepsilon \left[ [M_0^{(0)} \delta z_{i,k}^{(2)} + M_0^{(1)} \delta z_{i,k}^{(1)} + M_0^{(2)} \delta z_{i,k}^{(0)}] + \frac{1}{2} [M_2^{(0)} \delta z_{i,k-2}^{(2)} + M_2^{(1)} \delta z_{i,k-2}^{(1)} + M_2^{(2)} \delta z_{i,k-2}^{(0)}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [M_2^{(0)} \delta z_{i,k+2}^{(2)} + M_2^{(1)} \delta z_{i,k+2}^{(1)} + M_2^{(2)} \delta z_{i,k+2}^{(0)}] + \frac{1}{2} i [N_2^{(0)} \delta \eta_{i,k-2}^{(2)} + N_2^{(1)} \delta \eta_{i,k-2}^{(1)} + N_2^{(2)} \delta \eta_{i,k-2}^{(0)}] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} i [N_2^{(0)} \delta \eta_{i,k+2}^{(2)} + N_2^{(1)} \delta \eta_{i,k+2}^{(1)} + N_2^{(2)} \delta \eta_{i,k+2}^{(0)}] \dots \right]$$

.....

b) COEFFICIENTS DU DÉVELOPPEMENT DE  $\delta l$  .

$$(137) \quad \delta l^{(0)}_{i,k} = -\frac{1}{2} F_2^{(0)} [\delta z_{i,k-2}^{(0)} - \delta z_{i,k+2}^{(0)}] + \dots + i E_0^{(0)} \delta \eta_{i,k}^{(0)} + \frac{1}{2} i E_2^{(0)} [\delta \eta_{i,k+2}^{(0)} + \delta \eta_{i,k-2}^{(0)}] \dots$$

$$(138) \quad \delta l^{(1)}_{i,k} = -\frac{1}{2} \left[ F_2^{(0)} [\delta z_{i,k-2}^{(1)} - \delta z_{i,k+2}^{(1)}] + F_2^{(1)} [\delta z_{i,k-2}^{(0)} - \delta z_{i,k+2}^{(0)}] \right] + \dots + i [E_0^{(0)} \delta \eta_{i,k}^{(1)} + E_0^{(1)} \delta \eta_{i,k}^{(0)}] \dots + \\ + \frac{1}{2} i \left[ E_2^{(0)} [\delta \eta_{i,k+2}^{(1)} + \delta \eta_{i,k-2}^{(1)}] + E_2^{(1)} [\delta \eta_{i,k+2}^{(0)} + \delta \eta_{i,k-2}^{(0)}] \right] + \dots$$

$$(139) \quad \delta l^{(2)}_{i,k} = -\frac{1}{2} \left[ F_2^{(0)} [\delta z_{i,k-2}^{(2)} - \delta z_{i,k+2}^{(2)}] + F_2^{(1)} [\delta z_{i,k-2}^{(1)} - \delta z_{i,k+2}^{(1)}] + F_2^{(2)} [\delta z_{i,k-2}^{(0)} - \delta z_{i,k+2}^{(0)}] \right] + \dots \\ + i [E_0^{(0)} \delta \eta_{i,k}^{(2)} + E_0^{(1)} \delta \eta_{i,k}^{(1)} + E_0^{(2)} \delta \eta_{i,k}^{(0)}] + \frac{1}{2} i \left[ E_2^{(0)} [\delta \eta_{i,k+2}^{(2)} + \delta \eta_{i,k-2}^{(2)}] + \right. \\ \left. + E_2^{(1)} [\delta \eta_{i,k+2}^{(1)} + \delta \eta_{i,k-2}^{(1)}] + E_2^{(2)} [\delta \eta_{i,k+2}^{(0)} + \delta \eta_{i,k-2}^{(0)}] \right] + \dots$$

.....

c) COEFFICIENTS DU DÉVELOPPEMENT DE  $s$  .

$$(140) \quad B_k^{(0)} = \rho^{(0)}_{0,0} z^{(0)}_{i,k} + \frac{1}{2} \rho^{(0)}_{0,2} [z^{(0)}_{i,k-2} + z^{(0)}_{i,k+2}] + \dots$$

$$(141) \quad B_k^{(1)} = [\rho^{(0)}_{0,0} z^{(1)}_{i,k} + \rho^{(1)}_{0,0} z^{(0)}_{i,k}] + \frac{1}{2} \left[ \rho^{(0)}_{0,2} [z^{(1)}_{i,k-2} + z^{(1)}_{i,k+2}] + \rho^{(1)}_{0,2} [z^{(0)}_{i,k-2} + z^{(0)}_{i,k+2}] \right] + \dots$$

$$(142) \quad B_k^{(2)} = [\rho^{(0)}_{0,0} z^{(2)}_{i,k} + \rho^{(1)}_{0,0} z^{(1)}_{i,k} + \rho^{(2)}_{0,0} z^{(0)}_{i,k}] + \frac{1}{2} \left[ \rho^{(0)}_{0,2} [z^{(2)}_{i,k-2} + z^{(2)}_{i,k+2}] + \rho^{(1)}_{0,2} [z^{(1)}_{i,k-2} + z^{(1)}_{i,k+2}] + \right. \\ \left. + \rho^{(2)}_{0,2} [z^{(0)}_{i,k-2} + z^{(0)}_{i,k+2}] \right] + \dots$$

.....

Il ne reste plus à adapter que  $z$ . Or, si nous nous reportons à la formule (71), nous voyons que les coefficients  $z_{i,k}$  sont liés aux  $c_{i,k}$  par la relation

$$z_{i,k} = \omega' c_{i,k}$$

et on obtiendra les  $z_{i,k}$  immédiatement connaissant les  $c_{i,k}$  et  $\omega'$

27 — Nous avons fait usage des formules (64), (64<sup>bis</sup>) et (71) qui contiennent, les premières les  $a''_{i,k}$  et  $b_{i,k}$  et la troisième les  $c_{i,k}$ . Il nous faut expliquer comment on pourra exprimer les  $a''_{i,k}$ ,  $b_{i,k}$ ,  $c_{i,k}$ , en fonction de  $w$

Pour cela, reportons-nous au num 17 et examinons les différentes formules qui conduisent aux intégrales de l'équation (55).

Nous voyons tout d'abord qu'il faut calculer  $n_0$  par la formule (62). Pour cela, nous calculons A et B en donnant à  $\varphi$  la valeur W pour les  $a''_{i,k}$  et  $b_{i,k}$  et  $(K\rho^3_0 + 2vm^2)$  pour les  $c_{i,k}$ . Comme W et  $(K\rho^3_0 + 2vm^2)$  sont développés suivant les puissances de  $w$ , nous obtenons A et B développés de la même manière et, par conséquent, nous pouvons calculer en fonction de  $w$  la partie principale de  $n_0$ . Nous obtiendrons ensuite une valeur approchée de  $g_0$  et de  $h_0$  d'après la relation :

$$a^2_0 = n_0 + \varphi_0$$

ou :

$a_0 = \tilde{g}_0$	pour	$\varphi = W$
$a_0 = h_0$	pour	$\varphi = K\rho^3_0 + 2vm^2$

Ceci fait, la formule de définition de  $n_k$  nous donnera une valeur approchée de  $n_2$  et de  $n_{-2}$  et, de là, une valeur approchée de C. On aura donc, par application de la formule (62) une valeur meilleure pour  $n_0$ . On recommencera les opérations jusqu'à ce que deux opérations successives donnent le même résultat au degré d'approximation choisi.

On calculera alors les valeurs définitives de  $n_2$  et  $n_{-2}$ , etc puis, faisant successivement dans la formule (57) :

$$\varphi_i = W_i \qquad \varphi_i = [K\rho^3_0 + 2vm^2]_i$$

on calculera par approximations successives les  $a''_{i,k}$  et les  $c_{i,k}$  que l'on obtiendra sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de  $w$

Connaissant les  $a''_{i,k}$  et utilisant la deuxième équation (50), on calculera par approximations successives les  $b_{i,k}$  que l'on obtiendra aussi sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de  $w$

Il nous reste à donner les formules nécessaires au calcul du mouvement de la planète idéale : nous le ferons dans la troisième partie et nous expliquerons sommairement comment nous les avons obtenues

## TROISIÈME PARTIE

### CHAPITRE PREMIER

28 — Nous allons revenir maintenant à la première partie pour obtenir le développement complet de la fonction perturbatrice et des fonctions auxiliaires, et ensuite des fonctions qui se présentent quand on veut tenir compte de la troisième coordonnée. Voyons d'abord la fonction perturbatrice.

29. — Nous savons que la fonction des forces a pour expression :

$$U = f \frac{M_0 + M}{r} + fM' \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right]$$

avec :

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H$$

H désignant l'angle que fait le rayon vecteur de la petite planète avec celui de la planète troublante.

Si nous posons :

$$U' = fM' \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right]$$

et si nous développons  $\frac{1}{\Delta}$  suivant les puissances du rapport  $\frac{r}{r'}$ , nous savons que nous pouvons écrire :

$$(143) \quad U' = fM' \left[ \frac{1}{r'} S_0 + \frac{r^2}{r'^3} S_2 + \frac{r^3}{r'^4} S_3 + \frac{r^4}{r'^5} S_4 + \frac{r^5}{r'^6} S_5 + \dots \right]$$

les coefficients  $S_i$  représentant les fonctions :

$$(144) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_0 = 1 \\ S_1 = \cos H \\ S_2 = \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \\ S_3 = \frac{5}{2} \cos^3 H - \frac{3}{2} \cos H \\ S_4 = \frac{35}{8} \cos^4 H - \frac{30}{8} \cos^2 H + \frac{3}{8} \\ S_5 = \frac{63}{8} \cos^5 H - \frac{70}{8} \cos^3 H + \frac{15}{8} \cos H \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

de plus, nous savons par la formule (11<sup>bis</sup>) que nous pouvons écrire :

$$(145) \quad \frac{1}{a} \cos H = \frac{1}{2} \left[ x e^{-l'} + y e^{l'} \right] \cos s' + \frac{z}{i} \sin s'$$



Si, maintenant, nous nous rappelons que nous avons posé :

$$\rho' = \frac{a'}{r} \quad m = \frac{n'}{n - n'} \quad 2\nu = \frac{M'}{M_0 + M'} \quad x = \frac{a}{a'}$$

et que :

$$f(M_0 + M') = n'^2 a'^3 \quad f(M_0 + M) = K (n - n')^2 a^3$$

nous pouvons écrire :

$$(146) \left\{ \begin{aligned} \frac{U}{(n - n')^2 a^2} &= 2\nu m^2 \rho'^3 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{r}{a} \cos H \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] + 2\nu m^2 \rho'^4 \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{r}{a} \cos H \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{r}{a} \cos H \right) \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] + \\ &+ 2\nu m^2 \rho'^5 \left[ \frac{35}{8} \left( \frac{r}{a} \cos H \right)^4 - \frac{30}{8} \left( \frac{r}{a} \cos H \right)^2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right] + 2\nu m^2 \rho'^6 \left[ \frac{63}{8} \left( \frac{r}{a} \cos H \right)^5 - \right. \\ &\left. \frac{70}{8} \left( \frac{r}{a} \cos H \right)^3 \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \frac{15}{8} \left( \frac{r}{a} \cos H \right) \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

Nous devons remplacer les diverses puissances de  $\frac{r}{a} \cos H$  par leurs valeurs en fonction de  $x, y, z$  et  $l'$ .

Pour cela, si nous posons :

$$(147) \quad P = x e^{-l'} + y e^{l'}$$

nous pourrons écrire ces diverses puissances sous la forme suivante :

$$\frac{r}{a} \cos H = \frac{1}{2} P \cos s' + \frac{z}{i} \sin s'$$

$$(148) \left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{r}{a} \cos H \right]^2 &= \left[ \frac{1}{8} P^2 - \frac{1}{2} z^2 \right] + \left[ \frac{1}{8} P^2 + \frac{1}{2} z^2 \right] \cos 2s' + \frac{1}{2} P \frac{z}{i} \sin 2s' \\ \left[ \frac{r}{a} \cos H \right]^3 &= \left[ \frac{3}{32} P^3 - \frac{3}{8} P z^2 \right] \cos s' + \left[ \frac{1}{32} P^3 + \frac{3}{8} P z^2 \right] \cos 3s' + \left[ \frac{3}{16} P^2 \frac{z}{i} - \frac{3}{4} \frac{z^3}{i} \right] \sin s' + \\ &+ \left[ \frac{3}{16} P^2 \frac{z}{i} + \frac{1}{4} \frac{z^3}{i} \right] \sin 3s' \\ \left[ \frac{r}{a} \cos H \right]^4 &= \left[ \frac{3}{128} P^4 - \frac{3}{16} P^2 z^2 + \frac{3}{8} z^4 \right] + \left[ \frac{1}{32} P^4 - \frac{1}{2} z^4 \right] \cos 2s' + \left[ \frac{1}{128} P^4 + \frac{3}{16} P^2 z^2 + \frac{1}{8} z^4 \right] \cos 4s' + \\ &+ \left[ \frac{1}{8} P^3 \frac{z}{i} - \frac{1}{2} P \frac{z^3}{i} \right] \sin 2s' + \left[ \frac{1}{16} P^3 \frac{z}{i} + \frac{1}{4} P \frac{z^3}{i} \right] \sin 4s' \\ \left[ \frac{r}{a} \cos H \right]^5 &= \left[ \frac{10}{512} P^5 - \frac{20}{128} P^3 z^2 + \frac{10}{32} P z^4 \right] \cos s' + \left[ \frac{5}{512} P^5 + \frac{10}{128} P^3 z^2 - \frac{15}{32} P z^4 \right] \cos 3s' + \\ &+ \left[ \frac{1}{512} P^5 + \frac{10}{128} P^3 z^2 + \frac{5}{32} P z^4 \right] \cos 5s' + \left[ \frac{10}{256} P^4 \frac{z}{i} - \frac{20}{64} P^2 \frac{z^3}{i} + \frac{10}{16} \frac{z^5}{i} \right] \sin s' + \\ &+ \left[ \frac{15}{256} P^4 \frac{z}{i} - \frac{10}{64} P^2 \frac{z^3}{i} - \frac{5}{16} \frac{z^5}{i} \right] \sin 3s' + \left[ \frac{5}{256} P^4 \frac{z}{i} + \frac{10}{64} P^2 \frac{z^3}{i} + \frac{1}{16} \frac{z^5}{i} \right] \sin 5s' \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

les différentes puissances de P ayant pour expressions :

$$(149) \left\{ \begin{array}{l} P = xe^{-l'} + ye^{l'} \\ P^2 = x^2e^{-2l'} + y^2e^{2l'} + 2xy \\ P^3 = x^3e^{-3l'} + y^3e^{3l'} + 3x^2ye^{-l'} + 3xy^2e^{l'} \\ P^4 = x^4e^{-4l'} + y^4e^{4l'} + 4x^3ye^{-2l'} + 4xy^2e^{2l'} + 6x^2y^2 \\ P^5 = x^5e^{-5l'} + y^5e^{5l'} + 5x^4ye^{-3l'} + 5xy^4e^{3l'} + 10x^3y^2e^{-l'} + 10x^2y^3e^{l'} \\ \dots \end{array} \right.$$

En nous rappelant que l'on a :

$$\frac{r^2}{a^2} = xy - z^2$$

et substituant dans la forme (146) les diverses puissances de  $\frac{r}{a} \operatorname{cosh}$  données par les formules (148) et (149) et les diverses puissances de  $\frac{r}{a}$ , puis, effectuant les calculs et réductions nécessaires, nous obtiendrons, pour le développement de la fonction U', jusqu'aux termes du cinquième ordre inclus en  $x, y, z$ , l'expression suivante (nous donnons séparément l'ensemble des termes qui sont multipliés par la même puissance de  $\alpha$ ) :

1) TERMES MULTIPLIÉS PAR  $\nu m^2$ .

$$\frac{3}{8} \rho'^3 [x^2 e^{-2l'} + y^2 e^{2l'}] - \frac{1}{4} \rho'^3 (xy + 2z^2) + \left[ \frac{3}{8} \rho'^3 [x^2 e^{-2l'} + y^2 e^{2l'}] + \frac{3}{4} \rho'^3 (xy + 2z^2) \right] \cos 2s' + \left[ \frac{3}{2} \rho'^3 \left[ \frac{xz}{i} e^{-l'} + \frac{yz}{i} e^{l'} \right] \right] \sin 2s' +$$

2) TERMES MULTIPLIÉS PAR  $2\nu m^2 \alpha$ .

$$\left[ \frac{15}{64} \rho'^4 [x^3 e^{-3l'} + y^3 e^{3l'}] - \frac{3}{64} \rho'^4 [xe^{-l'} + ye^{l'}] (xy + 4z^2) \right] \cos s' + \left[ \frac{5}{64} \rho'^4 [x^3 e^{-3l'} + y^3 e^{3l'}] + \frac{15}{64} \rho'^4 [xe^{-l'} + ye^{l'}] (xy + 4z^2) \right] \cos 3s' +$$

$$+ \left[ \frac{15}{32} \rho'^4 \left[ \frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'} \right] - \frac{9}{16} \rho'^3 \frac{z}{i} (xy + \frac{2}{3} z^2) \right] \sin s' + \left[ \frac{15}{32} \rho'^4 \left[ \frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'} \right] + \frac{15}{16} \rho'^4 \frac{z}{i} (xy + \frac{2}{3} z^2) \right] \sin 3s'$$

3) TERMES MULTIPLIÉS PAR  $2\nu m^2 \alpha^2$ .

$$\left[ \frac{105}{1024} \rho'^5 [x^4 e^{-4l'} + y^4 e^{4l'}] - \frac{15}{256} \rho'^5 [x^2 e^{-2l'} + y^2 e^{2l'}] (xy + 6z^2) + \frac{27}{512} \rho'^5 (x^2 y^2 + 8xy z^2 + \frac{8}{3} z^4) \right] + \left[ \frac{35}{256} \rho'^5 [x^4 e^{-4l'} + y^4 e^{4l'}] + \right.$$

$$+ \frac{5}{64} \rho'^5 [x^2 e^{-2l'} + y^2 e^{2l'}] (xy + 6z^2) - \frac{15}{128} \rho'^5 (x^2 y^2 + 8xy z^2 + \frac{8}{3} z^4) \left. \right] \cos 2s' + \left[ \frac{35}{1024} \rho'^5 [x^4 e^{-4l'} + y^4 e^{4l'}] + \right.$$

$$+ \frac{35}{256} \rho'^5 [x^2 e^{-2l'} + y^2 e^{2l'}] (xy + 6z^2) + \frac{105}{512} \rho'^5 (x^2 y^2 + 8xy z^2 + \frac{8}{3} z^4) \left. \right] \cos 4s' + \left[ \frac{35}{64} \rho'^5 \left[ \frac{x^3 z}{i} e^{-3l'} + \frac{y^3 z}{i} e^{3l'} \right] - \right.$$

$$- \frac{5}{64} \rho'^4 \left[ \frac{xz}{i} e^{-l'} + \frac{yz}{i} e^{l'} \right] (3xy + 4z^2) \left. \right] \sin 2s' + \left[ \frac{35}{128} \rho'^5 \left[ \frac{x^3 z}{i} e^{-3l'} + \frac{y^3 z}{i} e^{3l'} \right] + \frac{105}{128} \rho'^5 \left[ \frac{xz}{i} e^{-l'} + \frac{yz}{i} e^{l'} \right] (xy + \frac{4}{3} z^2) \right. \left. \right] \sin 4s'$$

4) TERMES MULTIPLIÉS PAR  $2\nu m^2 \alpha^3$ .

$$\left[ \frac{315}{2048} \rho'^6 [x^5 e^{-5l'} + y^5 e^{5l'}] - \frac{105}{2048} \rho'^6 [x^3 e^{-3l'} + y^3 e^{3l'}] (xy + 8z^2) + \frac{15}{1024} \rho'^6 [xe^{-l'} + ye^{l'}] (x^2 y^2 + 12xy z^2 + 8z^4) \right] \cos s' +$$

$$+ \left[ \frac{315}{4096} \rho'^6 [x^5 e^{-5l'} + y^5 e^{5l'}] + \frac{455}{4096} \rho'^6 [x^3 e^{-3l'} + y^3 e^{3l'}] (xy + 8z^2) - \frac{105}{2048} \rho'^6 [xe^{-l'} + ye^{l'}] (x^2 y^2 + 12xy z^2 + 8z^4) \right] \cos 3s' +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{63}{4096} \rho'^6 [x^3 e^{-3l'} + y^3 e^{3l'}] + \frac{315}{4096} \rho'^6 [x^3 e^{-3l'} + y^3 e^{3l'}] (xy + 8y^2) + \frac{315}{2048} \rho'^6 [xe^{-l'} + ye^{l'}] (x^2 y^2 + 12xyz^2 + 8z^4) \right] \cos 5s' + \\
& + \left[ \frac{315}{1024} \rho'^6 \left[ \frac{x^4 z}{i} e^{-4l'} + \frac{y^4 z}{i} e^{4l'} \right] - \frac{105}{256} \rho'^6 \left[ \frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'} \right] (xy + 2z^2) + \frac{225}{512} \rho'^6 \frac{z}{i} (x^2 y^2 + \frac{8}{3} xy z^2 + \frac{8}{15} z^4) \right] \sin s' + \\
& + \left[ \frac{945}{2048} \rho'^6 \left[ \frac{x^4 z}{i} e^{-4l'} + \frac{y^4 z}{i} e^{4l'} \right] + \frac{105}{512} \rho'^6 \left[ \frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'} \right] (xy + 2z^2) - \frac{525}{1024} \rho'^6 \frac{z}{i} (x^2 y^2 + \frac{8}{3} xy z^2 + \frac{8}{15} z^4) \right] \sin 3s' + \\
& + \left[ \frac{315}{2048} \rho'^6 \left[ \frac{x^4 z}{i} e^{-4l'} + \frac{y^4 z}{i} e^{4l'} \right] + \frac{315}{512} \rho'^6 \left[ \frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'} \right] (xy + 2z^2) + \frac{945}{1024} \rho'^6 \frac{z}{i} (x^2 y^2 + \frac{8}{3} xy z^2 + \frac{8}{15} z^4) \right] \sin 5s'
\end{aligned}$$

Dans le développement que nous venons d'écrire ainsi que dans les formules (155) et 158),  $i$  représente  $\sqrt{-1}$ .

30. — Comme nous le savions, ce développement fait apparaître les fonctions :

$$\rho'^m e^{\pm n l'} \quad \rho'^m$$

et nous devons les développer suivant les puissances de  $\epsilon'_1$  et  $\epsilon'_{-1}$ .

Pour savoir jusqu'à quel ordre nous devons les développer, nous devons remarquer que les excentricités des orbites des grosses planètes que l'on considère habituellement, c'est-à-dire Jupiter et Saturne, sont de l'ordre de 0,01 ; les excentricités des orbites des petites planètes sont quelquefois assez considérables mais forcément inférieures à 1. Si donc, nous considérons comme étant du premier ordre les excentricités des orbites des petites planètes, celles des orbites de Jupiter et Saturne devront être considérées comme étant du second ordre. Nous pourrions donc arrêter les développements aux termes du troisième ordre pour les fonctions  $\rho'^m e^{\pm n l'}$ ,  $\rho'^m$ . Pareillement, si nous considérons la tangente de l'inclinaison de l'orbite des petites planètes comme étant du premier ordre, les tangentes des inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne devront être considérées comme étant du second ordre.

Pour le développement des fonctions  $\rho'^m e^{\pm n l'}$ ,  $\rho'^m$ , nous utiliserons les formules données par Andoyer (*Cours de Mécanique Céleste*, Tome I, pages 396 et suiv.) pour des fonctions analogues et, d'après ce qui a été dit plus haut, nous limiterons ces développements aux termes du troisième ordre. Nous obtiendrons ainsi les développements :

$\rho'^m e^{nl'}$		$\epsilon'_1$	$\epsilon'_{-1}$	$\epsilon'^2_1$	$\epsilon'_1 \epsilon'_{-1}$	$\epsilon'^2_{-1}$	$\epsilon'^3_1$	$\epsilon'^2_1 \epsilon'_{-1}$	$\epsilon'_1 \epsilon'^2_{-1}$	$\epsilon'^3_{-1}$	
m	n										
3	0	1	3	3	9	6	9	53/2	27/2	27/2	53/2
3	-1	1	1	5	5/2	9	39/2	19/3	6	-1	206/3
3	+1	1	5	1	39/2	9	5/2	206/3	-1	6	19/3
3	-2	1	-1	7	0	-10	34	1/6	1/2	-123/2	845/6
3	+2	1	7	-1	34	-10	0	845/6	-123/2	1/2	1/6
4	0	1	4	4	14	12	14	46	34	34	46
4	-1	1	2	6	11/2	8	53/2	46/3	20	22	308/3
4	+1	1	6	2	53/2	8	11/2	308/3	22	20	46/3
4	-2	1	0	8	1	-4	43	8/3	4	-40	580/3
4	+2	1	8	0	43	-4	1	580/3	-40	4	8/3
4	-3	1	-2	10	1/2	-24	127/2	0	10	-176	326
4	+3	1	10	-2	127/2	-24	1/2	326	-176	10	0

$\varepsilon'_1{}^m \varepsilon'_{-1}{}^n$		$\varepsilon'_1$	$\varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_1{}^3$	$\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_{-1}{}^3$	$\varepsilon'_1{}^3$	$\varepsilon'_1{}^2 \varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}{}^2$	$\varepsilon'_{-1}{}^3$	
m	n										
5	0	1	5	5	20	20	20	145/2	135/2	135/2	145/2
5	-1	1	3	7	19/2	16	69/2	88/3	45	60	437/3
5	+1	1	7	3	69/2	16	19/2	437/3	60	45	88/3
5	-2	1	1	9	3	4	53	49/6	33/2	-3/2	1541/6
5	2	1	9	1	53	4	3	1541/6	-3/2	33/2	49/6
5	-3	1	-1	11	1/2	-16	151/2	1	6	-141	414
5	3	1	11	-1	151/2	-16	1/2	414	-141	6	1
5	-4	1	-3	13	2	-44	102	-1/6	75/2	-765/2	3751/6
5	4	1	13	-3	102	-44	2	3751/6	-765/2	75/2	-1/6
6	0	1	6	6	27	30	27	107	117	117	107
6	-1	1	4	8	29/2	26	87/2	148/3	84	116	596/3
6	1	1	8	4	87/2	26	29/2	596/3	116	84	148/3
6	-2	1	2	10	6	14	64	53/3	41	57	997/3
6	2	1	10	2	64	14	6	997/3	57	41	53/3
6	-3	1	0	12	3/2	-6	177/2	4	12	-84	516
6	3	1	12	0	177/2	-6	3/2	516	-84	12	4
6	-4	1	-2	14	1	-34	117	1/3	21	-331	2273/3
6	4	1	14	-2	117	-34	1	2273/3	-331	21	1/3
6	-5	1	-4	16	9/2	-70	299/2	-4/3	92	-708	3196/3
6	5	1	16	-4	299/2	-70	9/2	3196/3	-708	92	-4/3

31 — Il reste à développer les fonctions cosms' et sinms'. Nous devons, pour cela, exprimer la tangente de la latitude s' en fonction de  $\gamma'_1$  et de  $\gamma'_{-1}$ .

Soient : E la trace du plan de l'écliptique sur la sphère céleste, P la trace du plan de l'orbite de la planète troublante, N' son nœud ascendant, J sa position sur son orbite. L'angle en N' sera l'inclinaison I' de son orbite et, si nous désignons par J' l'intersection avec la trace de l'écliptique du grand cercle abaissé de J perpendiculairement à l'écliptique, l'arc J'J sera égal à la latitude de la planète troublante. Le triangle sphérique N'J'J étant rectangle en J', on aura la relation :

$$\widehat{\text{tg}}J'J = \text{tgs}' = \text{tg}I' \sin \widehat{\text{N}'J'};$$

or,

$$\widehat{\text{N}'J'} = v' - \Omega' = N' - \Omega' + \frac{l'}{i} = H' + \frac{l'}{i}$$

de sorte que, i désignant le radical  $\sqrt{-1}$ , nous pourrions écrire :

$$\text{tgs}' = \text{tg}I' \sin \left( H' + \frac{l'}{i} \right)$$

et, en vertu de la définition de  $\gamma'_1$  et de  $\gamma'_{-1}$ , ceci devient :

$$(150) \quad \operatorname{tgs}' = \frac{1}{2} (\gamma'_1 e^{l'} - \gamma'_{-1} e^{-l'})$$

D'autre part, en vertu des relations qui lient la tangente au sinus et au cosinus, on aura, en développant par la formule du binôme l'inverse du radical :

$$\operatorname{sins}' = \frac{\operatorname{tgs}'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 s'}} = \operatorname{tgs}' \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 s' + \frac{3}{8} \operatorname{tg}^4 s' - \frac{5}{16} \operatorname{tg}^6 s' \dots \right)$$

$$\operatorname{coss}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 s'}} = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 s' + \frac{3}{8} \operatorname{tg}^4 s' - \frac{5}{16} \operatorname{tg}^6 s' \dots$$

En introduisant ces valeurs de  $\operatorname{sins}'$  et  $\operatorname{coss}'$  dans les formules qui donnent  $\operatorname{sinms}'$  et  $\operatorname{cosms}'$  en fonction de  $\operatorname{sins}'$  et  $\operatorname{coss}'$ , nous trouverons :

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sin}2s' = 2\operatorname{tgs}' - 2\operatorname{tg}^3 s' + 2\operatorname{tg}^5 s' - 2\operatorname{tg}^7 s' \dots \\ \operatorname{cos}2s' = 1 - 2\operatorname{tg}^2 s' + 2\operatorname{tg}^4 s' - 2\operatorname{tg}^6 s' \dots \\ \operatorname{sin}3s' = 3\operatorname{tgs}' - \frac{11}{2} \operatorname{tg}^3 s' + \frac{77}{8} \operatorname{tg}^5 s' - \frac{135}{16} \operatorname{tg}^7 s' \dots \\ \operatorname{cos}3s' = 1 - \frac{9}{2} \operatorname{tg}^2 s' + \frac{51}{8} \operatorname{tg}^4 s' - \frac{125}{16} \operatorname{tg}^6 s' \dots \\ \operatorname{sin}4s' = 4\operatorname{tgs}' - 12\operatorname{tg}^3 s' + 20\operatorname{tg}^5 s' - 28\operatorname{tg}^7 s' \dots \\ \operatorname{cos}4s' = 1 - 8\operatorname{tg}^2 s' + 16\operatorname{tg}^4 s' - 24\operatorname{tg}^6 s' \dots \\ \operatorname{sin}5s' = 5\operatorname{tgs}' - \frac{45}{2} \operatorname{tg}^3 s' + \frac{383}{8} \operatorname{tg}^5 s' - \frac{1265}{16} \operatorname{tg}^7 s' \dots \\ \operatorname{cos}5s' = 1 - \frac{25}{2} \operatorname{tg}^2 s' + \frac{275}{8} \operatorname{tg}^4 s' - \frac{1005}{16} \operatorname{tg}^6 s' \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Dans les formules ci-dessus, nous devons remplacer  $\operatorname{tgs}'$  et ses puissances par leurs développements obtenus par application de la formule du binôme à l'équation (150). Ces développements renferment les fonctions  $e^{ml'}$  et nous développerons celles-ci suivant les puissances de  $\varepsilon'_1$  et  $\varepsilon'_{-1}$  par la méthode utilisée par Andoyer (*Cours de Mécanique Céleste*, Tome I, pages 386 et suiv.). Nous obtiendrons ainsi les développements suivants limités aux termes du troisième ordre.

$e^{ml'}$	$\varepsilon'_1{}^m \varepsilon'_{-1}{}^n$		$\varepsilon'_1$	$\varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_1{}^2$	$\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_{-1}{}^2$	$\varepsilon'_1{}^3$	$\varepsilon'_1{}^2 \varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}{}^2$	$\varepsilon'_{-1}{}^3$
$e^{-l'}$		1	-2	2	-1/2	-4	9/2	-2/3	0	-10	32/3
$e^{l'}$		1	2	-2	9/2	-4	-1/2	32/3	-10	0	-2/3
$e^{-2l'}$		1	-4	4	3	-16	13	2/3	14	-54	59
$e^{2l'}$		1	4	-4	13	-16	3	59	-54	14	2/3
$e^{-3l'}$		1	-6	6	21/2	-36	51/2	-4	66	-156	94
$e^{3l'}$		1	6	-6	51/2	-36	21/2	94	-156	66	-4
.....											

Si nous introduisons maintenant ces développements dans les formules (154) et (155), nous obtiendrons, en nous bornant à conserver les termes du troisième ordre, les développements suivants pour les fonctions  $\cos m s'$  et  $\sin m s'$  :

$\gamma'_1 m \gamma'_{-1} m \varepsilon'_1 p \varepsilon'_{-1} p'$		$\gamma'_1{}^2$	$\gamma'_1 \gamma'_{-1}$	$\gamma'_{-1}{}^2$	$\varepsilon'_1 \gamma'_1{}^2$	$\varepsilon'_{-1} \gamma'_{-1}{}^2$	$\varepsilon'_{-1} \gamma'_1{}^2$	$\varepsilon'_1 \gamma'_{-1}{}^2$
$\cos m s'$								
$\cos s'$	1	1/2	- 1	1/2	2	- 2	- 2	2
$\cos 2s'$	1	2	- 4	2	8	- 8	- 8	8
$\cos 3s'$	1	9/2	- 9	9/2	18	- 18	- 18	18
$\cos 4s'$	1	8	- 16	8	32	- 32	- 32	32
$\cos 5s'$	1	25/2	- 25	25/2	50	- 50	- 50	50

$\varepsilon'_1 m \varepsilon'_{-1} n \gamma'_1 p \gamma'_{-1} q$	$\gamma'_1$	$\gamma'_{-1}$	$\varepsilon'_1 \gamma'_1$	$\varepsilon'_{-1} \gamma'_{-1}$	$\varepsilon'_1 \gamma'_{-1}$	$\varepsilon'_{-1} \gamma'_1$	$\varepsilon'_1{}^2 \gamma'_1$	$\varepsilon'_{-1} \varepsilon'_{-1} \gamma'_{-1}$
$i \sin m s'$								
$i \sin s'$	1	- 1	2	- 2	2	- 2	9/2	- 4
$i \sin 2s'$	2	- 2	4	- 4	4	- 4	9	- 8
$i \sin 3s'$	3	- 3	6	- 6	6	- 6	27/2	- 12
$i \sin 4s'$	4	- 4	8	- 8	8	- 8	18	- 16
$i \sin 5s'$	5	- 5	10	- 10	10	- 10	45/2	- 20

.....

$\varepsilon'_1 m \varepsilon'_{-1} n \gamma'_1 p \gamma'_{-1} q$	$\varepsilon'_{-1}{}^2 \gamma'_1$	$\varepsilon'_1{}^2 \gamma'_{-1}$	$\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1} \gamma'_{-1}$	$\varepsilon'_{-1}{}^2 \gamma'_{-1}$	$\gamma'_1{}^3$	$\gamma'_1{}^2 \gamma'_{-1}$	$\gamma'_1 \gamma'_{-1}{}^2$	$\gamma'_{-1}{}^3$
$i \sin m s'$								
$i \sin s'$	- 1/2	1/2	4	- 9/2	1/2	- 3/2	3/2	- 1/2
$i \sin 2s'$	- 1	1	8	- 9	- 2	- 6	6	- 2
$i \sin 3s'$	- 3/2	3/2	12	- 27/2	11/2	- 33/2	33/2	- 11/2
$i \sin 4s'$	- 2	2	16	- 18	12	- 36	36	- 12
$i \sin 5s'$	- 5/2	5/2	20	- 45/2	45/2	- 135/2	125/2	- 45/2

.....

En remplaçant dans le développement donné plus haut de la fonction perturbatrice les fonctions :

$$\rho'^m e^{n l'}, \rho'^m, \cos m s', \sin m s'$$

par leurs développements suivant les puissances de  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_{-1}, \gamma'_1, \gamma'_{-1}$ , on obtiendra finalement le développement de la fonction perturbatrice suivant les puissances des mêmes quantités.

Il est d'ailleurs inutile de procéder à ce développement en général car, pour appliquer la méthode exposée à la première partie, il faut prendre, dans les approximations successives, l'ensemble des termes de même degré. On sera donc amené à opérer le développement de la fonction perturbatrice progressivement en même temps que l'on effectuera les approximations successives.

32. — Pour terminer, nous devons donner les développements des fonctions  $u, v, P, Q, \Delta, P^2, Q^2, \Delta^2, DQ, P\Delta, u\Delta, v\Delta$ , puis ceux de  $W, K\rho_0^3 + 2vm^2, \delta\left(\frac{r}{a}\right), \delta v, s$  et des fonctions auxiliaires, en expliquant sommairement comment nous les avons obtenus.

CHAPITRE II

---

33. — Les premières séries à calculer sont celles qui représentent les fonctions  $u$  et  $v$ . Or, cela est immédiat si nous nous reportons aux formules (64), car elles nous donnent :

$$u_k = \xi_{0,k} + k\eta_{0,k} \qquad v_k = \eta_{0,k} + k\xi_{0,k}$$

avec :

$$u_{-k} = u_k \qquad v_{-k} = -v_k$$

Ceci fait, il sera aisé d'obtenir les développements de  $u + v$ ,  $u - v$ ,  $u^2 - v^2$ ,  $\text{Log}(u + v)$ ,  $\text{Log}(u - v)$ ,  $\text{Log}(u^2 - v^2)$ , car les fonctions sous le signe  $\text{Log}$  ont un terme égal à l'unité.

Les formules (63) nous donnent alors les développements des fonctions  $P$ ,  $Q$ ,  $\Delta$ , en utilisant les développements obtenus pour  $u$  et  $v$ . Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}
 P &= \Sigma P_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) \\
 P_0 &= 1 + m \\
 P_2 &= 2v_2 - 2u_2 v_4 - 2v_2 u_4 + \dots \\
 P_4 &= 4v_4 - 4u_2 v_2 \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= \Sigma Q_{2k} (\theta^{2k} - \theta^{-2k}) \\
 Q_0 &= 0 \\
 Q_2 &= 2u_2 - 2u_2 v_4 + 2v_2 u_4 + \dots \\
 Q_4 &= 4u_4 - 2u_2^2 - 2v_2^2 \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \Sigma \Delta_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) \\
 \Delta_0 &= 1 + 2u_2^2 - v_2^2 \dots \\
 \Delta_2 &= -u_2 + \frac{1}{2} u_2 v_4 - v_2 u_4 + \dots \\
 \Delta_4 &= u_2^2 + \frac{1}{2} v_2^2 - u_4 \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Les développements que nous venons d'obtenir nous permettent de calculer immédiatement les fonctions  $P^2$ ,  $Q^2$ ,  $\Delta^2$ ,  $DQ$ ,  $P\Delta$ , et nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \Sigma (P^2)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) & Q^2 &= \Sigma (Q^2)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) \\
 (P^2)_0 &= P_0^2 + 2P_2^2 + \dots & (Q^2)_0 &= -2Q_2^2 - \dots \\
 (P^2)_2 &= 2P_0 P_2 + \dots & (Q^2)_2 &= -2Q_2 Q_4 \dots \\
 (P^2)_4 &= 2P_0 P_4 + P_2^2 \dots & (Q^2)_4 &= Q_2^2 \dots \\
 &\dots & &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \Sigma (\Delta^2)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) & DQ &= \Sigma (DQ)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) \\ (\Delta)_0^2 &= \Delta_0^2 + 2\Delta_2^2 + \dots & (DQ)_0 &= 0 \\ (\Delta^2)_2 &= 2\Delta_0 \Delta_2 + \dots & (DQ)_2 &= 2Q_2 \dots \\ (\Delta^2)_4 &= 2\Delta_0 \Delta_4 + \dots & (DQ)_4 &= 4Q_4 \dots \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\Delta &= \Sigma (P\Delta)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) \\ (P\Delta)_0 &= P_0 \Delta_0 + 2P_2 \Delta_2 + \dots \\ (P\Delta)_2 &= P_0 \Delta_2 + P_2 \Delta_0 + \dots \\ (P\Delta)_4 &= P_0 \Delta_4 + P_4 \Delta_0 + \dots \\ \dots & \end{aligned}$$

Par combinaison des séries qui donnent  $\Delta$ ,  $u$  et  $v$  nous obtiendrons les développements des fonctions  $u\Delta$  et  $v\Delta$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u\Delta &= \Sigma (u\Delta)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k}) & v\Delta &= \Sigma (v\Delta)_{2k} (\theta^{2k} - \theta^{-2k}) \\ (u\Delta)_0 &= \Delta_0 + 2u_2 \Delta_2 + \dots & (v\Delta)_0 &= 0 \\ (u\Delta)_2 &= u_2 \Delta_0 + \Delta_2 + \dots & (v\Delta)_2 &= v_2 \Delta_0 + \dots \\ (u\Delta)_4 &= u_4 \Delta_0 + u_2 \Delta_2 + \dots & (v\Delta)_4 &= v_4 \Delta_0 + \dots \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

Nous devons effectuer maintenant les développements de  $W$  et de  $K\rho^3 + 2vm^2$ . Pour cela, nous utiliserons les développements trouvés pour  $P^2$ ,  $Q^2$ ,  $DQ$ ,  $\rho_0^3$ , et nous pouvons écrire :

$$W = \Sigma W_{2k} \cos 2kV ,$$

avec :

$$\begin{aligned} W_0 &= 2P_0^2 - Q_0^2 - (DQ)_0 - (K\rho_0^3 + 2m^2 + 2vm^2)_0 \\ W_2 &= 2P_2^2 - Q_2^2 - (DQ)_2 - (K\rho_0^3 + 2m^2 + 2vm^2)_2 \\ W_4 &= 2P_4^2 - Q_4^2 - (DQ)_4 - (K\rho_0^3 + 2m^2 + 2vm^2)_4 \\ \dots & \end{aligned}$$

et :

$$K\rho_0^3 + 2vm^2 = \Sigma [K\rho_0^3 + 2vm^2]_{2k} \cos 2kV$$

avec :

$$\begin{aligned} [K\rho_0^3 + 2vm^2]_0 &= K(\rho_0^3)_0 + 2vm^2 \\ [K\rho_0^3 + 2vm^2]_2 &= K(\rho_0^3)_2 \\ [K\rho_0^3 + 2vm^2]_4 &= K(\rho_0^3)_4 \\ \dots & \end{aligned}$$

Nous sommes en mesure de calculer les  $a''_{1,k}$ ,  $b_{1,k}$  et  $c_{1,k}$ , et par suite,  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $Z$ . Passons aux coordonnées polaires.



34. — Nous avons d'abord pour le rayon vecteur :

$$\delta \left( \frac{r}{a} \right) = \varepsilon_1 \delta \left( \frac{r}{a} \right)_1 + \varepsilon_{-1} \delta \left( \frac{r}{a} \right)_{-1}$$

avec :

$$\delta \left( \frac{r}{a} \right)_1 = (\rho_0 \xi_0) \delta \xi_1 - (\rho_0 \eta_0) \delta \eta_1$$

$$\delta \left( \frac{r}{a} \right)_{-1} = (\rho_0 \xi_0) \delta \xi_{-1} - (\rho_0 \eta_0) \delta \eta_{-1}$$

Faisant usage des formules (89) et (32), nous obtiendrons d'abord les développements des fonctions  $(\rho_0 \xi_0)$  et  $(\rho_0 \eta_0)$  sous la forme :

$$(\rho_0 \xi_0) = M_0 + M_2 \cos 2V + M_4 \cos 4V \dots$$

$$(\rho_0 \eta_0) = N_0 + N_2 \sin 2V + N_4 \sin 4V \dots$$

avec :

$$M_0 = \rho_{0,0} + \rho_{0,2} \xi_{0,2} + \dots$$

$$M_2 = \rho_{0,2} + 2\rho_{0,0} \xi_{0,2} + \dots$$

$$M_4 = \rho_{0,4} + 2\rho_{0,0} \xi_{0,4} + \dots$$

.....

$$N_0 = 0$$

$$N_2 = i [ 2\rho_{0,0} \eta_{0,2} + \dots ]$$

$$N_4 = i [ 2\rho_{0,0} \eta_{0,4} + \dots ]$$

.....

Utilisant maintenant les développements de  $\delta \xi_1$  et  $\delta \eta_1$ , (formules (66)), et tenant compte de ce que l'on a :

$$\delta \xi_{1,k} = \delta \xi_{1,-k} \qquad \delta \eta_{1,k} = -\delta \eta_{1,-k}$$

nous trouverons pour  $\delta \left( \frac{r}{a} \right)$  le développement :

$$\delta \left( \frac{r}{a} \right) = R_{1,0} \cos G_0 + R_{1,-2} \cos (G_0 - 2V) + R_{1,2} \cos (G_0 + 2V) + R_{1,-4} \cos (G_0 - 4V) + R_{1,4} \cos (G_0 + 4V) \dots$$

avec :

$$R_{1,k} = \varepsilon \left[ M_0 \delta \xi_{1,k} + \frac{1}{2} M_2 \delta \xi_{1,k-2} + \frac{1}{2} M_2 \delta \xi_{1,k+2} + \dots + \frac{1}{2} i N_2 \delta \eta_{1,k-2} - \frac{1}{2} i N_2 \delta \eta_{1,k+2} \dots \right]$$

Pour la longitude nous avons :

$$\delta l = \varepsilon_1 \delta l_1 + \varepsilon_{-1} \delta l_{-1}$$

avec :

$$\delta l_1 = -(\rho_0^2 \eta_0) \delta \xi_1 + (\rho_0^2 \xi_0) \delta \eta_1$$

$$\delta l_{-1} = (\rho_0^2 \eta_0) \delta \xi_{-1} - (\rho_0^2 \xi_0) \delta \eta_{-1}$$

ce qui exige le développement des fonctions  $(\rho_0^2 \xi_0)$  et  $(\rho_0^2 \eta_0)$ . Utilisant les développements de  $\rho_0^2$  donnés plus haut et de  $\xi_0$  et  $\eta_0$  donnés par les formules (32), nous obtiendrons de suite :

$$(\rho_0^2 \xi_0) = E_0 + E_2 \cos 2V + E_4 \cos 4V \dots$$

$$(\rho_0^2 \eta_0) = F_0 + F_2 \sin 2V + F_4 \sin 4V \dots$$

avec :

$$\begin{aligned}
 E_0 &= (\rho_0^2)_0 + (\rho_0^2)_2 \xi_{0,2} + \dots \\
 E_2 &= (\rho_0^2)_2 + 2 (\rho_0^2)_0 \xi_{0,2} + \dots \\
 E_4 &= (\rho_0^2)_4 + 2 (\rho_0^2)_0 \xi_{0,4} + \dots \\
 &\dots \\
 F_0 &= 0 \\
 F_2 &= i [ 2 (\rho_0^2)_0 \eta_{0,2} + \dots ] \\
 F_4 &= i [ 2 (\rho_0^2)_0 \eta_{0,4} + \dots ] \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Combinant les développements que nous venons d'obtenir avec ceux de  $\delta\xi_1$ ,  $\delta\xi_{-1}$ ,  $\delta\eta_1$ ,  $\delta\eta_{-1}$ , (formules (66)), nous obtiendrons pour la longitude le développement suivant :

$$\begin{aligned}
 \delta v &= \varepsilon \delta l_{1,0} \sin G_0 + \varepsilon \delta l_{1,-2} \sin (G_0 - 2V) + \varepsilon \delta l_{1,2} \sin (G_0 + 2V) + \\
 &\quad + \varepsilon \delta l_{1,-4} \sin (G_0 - 4V) + \varepsilon \delta l_{1,4} \sin (G_0 + 4V) \dots
 \end{aligned}$$

avec :

$$\delta l_{1,k} = -\frac{1}{2} F_2 [\delta\xi_{1,k-2} - \delta\xi_{1,k+2}] + \dots + i E_0 \delta\eta_{1,k} + \frac{1}{2} i E_2 [\delta\eta_{1,k+2} + \delta\eta_{1,k-2}] \dots$$

Pour la latitude, nous savons que l'on a le développement : ( formule (72) ) :

$$s = \gamma \sum \sigma_{1,k} \sin (H_0 + kV)$$

avec

$$\sigma = \rho_0 z \qquad \sigma = \gamma_1 \sum \rho_0 z_{1,k} \theta^k + \gamma_{-1} \sum \rho_0 z_{-1,k} \theta^k$$

et :

$$\begin{aligned}
 z_{1,k} &= \omega' c_{1,k} & c_{1,k} &= c_{1,-k} \\
 z_{-1,k} &= -\omega' c_{-1,k} & z_{-1,k} &= -z_{1,-k}
 \end{aligned}$$

Tenant compte du développement de  $\rho_0$  et effectuant les réductions nécessaires, nous obtiendrons pour  $s$  le développement :

$$\begin{aligned}
 s &= \gamma B_0 \sin H_0 + \gamma B_{-2} \sin (H_0 - 2V) + \gamma B_2 \sin (H_0 + 2V) + \\
 &\quad + \gamma B_{-4} \sin (H_0 - 4V) + \gamma B_4 \sin (H_0 + 4V) \dots
 \end{aligned}$$

avec :

$$B_k = \rho_{0,0} z_{1,k} + \frac{1}{2} \rho_{0,2} [z_{1,k-2} + z_{1,k+2}] + \dots$$

## APPLICATION NUMÉRIQUE

---

35. Comme application numérique de ce qui précède, nous allons construire une table et donner un exemple.

Nous avons choisi Jupiter comme planète troublante et, comme groupe, les astéroïdes du type (46) Hestia dont les moyens mouvements sont compris entre  $800''$  et  $975''$ , groupe qui renferme 395 astéroïdes dans le volume des *Kleine Planeteng Jahrgang* de 1938. Comme pour  $900''$ , on a environ :

$$n = 3n'$$

$n'$  étant le moyen mouvement de Jupiter, le groupe correspondra à :

$$\mu_0 = \frac{1}{3}$$

Nous avons adopté pour la masse de Jupiter le nombre donné par Newcomb :

$$M' = \frac{1}{1047,355}$$

et, appliquant les formules données à la première partie, nous avons obtenu tout d'abord :

$$m_0 = \frac{1}{2}$$

$$v = 0,000\ 476\ 937\ 5$$

$$vm_0^2 = 0,000\ 119\ 234$$

$$(vm_0^2)^2 = 0,000\ 000\ 014$$

$$(vm_0^2)^3 = 0,000\ 000\ 000\ 002$$

$$(vm_0^2)^4 = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 196$$

et ces valeurs du paramètre font préjuger de la rapidité de la convergence des séries.

En partant de ces valeurs, nous avons appliqué à la lettre les formules données aux chapitres I et II de la première partie, I et II de la troisième partie et enfin I et II de la deuxième partie. Nous avons obtenu ainsi les coefficients des puissances 0, 1, 2, 3 et 4 de  $w$  dans les développements des coordonnées rectangulaires X, Y, Z et des coordonnées polaires  $r$ ,  $v$ ,  $s$ , coefficients qui sont donnés dans les tableaux I, I<sup>bis</sup>, II, III, IV, V, VI, VII et VIII.

36. — Avant de passer aux tableaux qui constituent la table proprement dite, nous allons rappeler la forme des développements des coordonnées rectangulaires et polaires.

Nous savons que ces développements sont formés de deux parties : la première, caractérisée par l'indice zéro se rapporte à la solution périodique, la seconde se rapporte au complément qu'il faut lui ajouter pour tenir compte de la troisième coordonnée. Nous savons de plus que pour la coordonnée Z et pour la latitude la première partie n'existe pas.

COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

Pour X et Y on a :

$$X = X_0 + \delta X \qquad Y = Y_0 + \delta Y$$

avec :

$$\begin{cases} X_0 = \sum a (x\theta^{-1})_{0,2h} \cos (N + 2hV) \\ Y_0 = \sum a (x\theta^{-1})_{0,2h} \sin (N + 2hV) \\ V = N - N' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta X &= \frac{a\epsilon}{2} \sum \left[ (\delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k}) \frac{\cos (N + G_0 + kV)}{\sin (N + G_0 + kV)} + (\delta\xi_{-1,k} + \delta\eta_{-1,k}) \frac{\cos (N - G_0 - kV)}{\sin (N - G_0 - kV)} \right] \\ \delta Y &= \frac{a\epsilon}{2} \sum \left[ (\delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k}) \frac{\sin (N + G_0 + kV)}{\sin (N + G_0 + kV)} + (\delta\xi_{-1,k} + \delta\eta_{-1,k}) \frac{\sin (N - G_0 - kV)}{\sin (N - G_0 - kV)} \right] \end{aligned}$$

Nous poserons :

$$P_{1,k} = \delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k} \qquad P_{-1,k} = \delta\xi_{-1,k} + \delta\eta_{-1,k}$$

et les coefficients de  $\delta X$  et  $\delta Y$  prendront la forme :

$$P'_{1,k} = \frac{a\epsilon}{2} P_{1,k} \qquad P'_{-1,k} = \frac{a\epsilon}{2} P_{-1,k}$$

Le développement de Z a la forme :

$$Z = a\gamma Z_{1,0} \sin H_0 + a\gamma Z_{1,-2} \sin (H_0 - 2V) + a\gamma Z_{1,2} \sin (H_0 + 2V) + a\gamma Z_{1,-4} \sin (H_0 - 4V) + a\gamma Z_{1,4} \sin (H_0 + 4V) \dots$$

COORDONNÉES POLAIRES.

Les coordonnées  $r$  et  $v$  ont respectivement pour expressions :

$$r = r_0 + \delta r \qquad v = v_0 + \delta v$$

avec :

$$\begin{aligned} r_0 &= ar_{0,0} + ar_{0,2} \cos 2V + ar_{0,4} \cos 4V + \dots \\ \delta r &= a\epsilon R_{1,0} \cos G_0 + a\epsilon R_{1,-2} \cos (G_0 - 2V) + a\epsilon R_{1,2} \cos (G_0 + 2V) + \\ &\quad + a\epsilon R_{1,-4} \cos (G_0 - 4V) + a\epsilon R_{1,4} \cos (G_0 + 4V) \dots \\ v_0 &= N + l_{0,2} \sin 2V + l_{0,4} \sin 4V \dots \\ \delta v &= \epsilon \delta l_{1,0} \sin G_0 + \epsilon \delta l_{1,-2} \sin (G_0 - 2V) + \epsilon \delta l_{1,2} \sin (G_0 + 2V) + \\ &\quad + \epsilon \delta l_{1,-4} \sin (G_0 - 4V) + \epsilon \delta l_{1,4} \sin (G_0 + 4V) \dots \end{aligned}$$

Enfin la latitude  $s$  a pour expression :

$$s = \gamma B_0 \sin H_0 + \gamma B_{-2} \sin (H_0 - 2V) + \gamma B_2 \sin (H_0 + 2V) + \gamma B_{-4} \sin (H_0 - 4V) + \gamma B_4 \sin (H_0 + 4V) \dots$$

Dans les développements de  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta r$ ,  $\delta v$ , d'une part, de Z et  $s$ , d'autre part,  $\epsilon$  et  $\gamma$  sont des constantes qui seront déterminées plus loin, constantes dont la valeur dépend de l'astéroïde étudié.

Nous allons donner les tableaux des coefficients

$$P_{\pm 1,k}, Z_{1,k}, r_{0,k}, R_{1,k}, l_{0,k}, \delta l_{0,k}, B_k,$$

$P_{\pm 1,k}$  ayant la signification donnée plus haut, et  $R_{1,k}$  représentant le quotient par  $\epsilon$  des coefficients déterminés au chapitre II de la deuxième partie d'après le chapitre II de la troisième partie.

	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
--	-------	-------	-------	-------	-------

	TABLEAU I $X_0$ et $Y_0$				
$(x\theta^{-1})_{0,0}$	1,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000
$(x\theta^{-1})_{0,2}$	0,000 172 437	-0,000 911 322	0,002 433 374	-0,004 166 634	0,007 222 309
$(x\theta^{-1})_{0,4}$	0,000 000 055	-0,000 000 565	0,000 002 901	-0,000 010 199	0,000 038 657
$(x\theta^{-1})_{0,6}$	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000

Note. — Les coefficients complets de  $X_0$  et  $Y_0$  s'obtiendront en multipliant les nombres du tableau par  $a$ .

	TABLEAU Ibis $X_0$ et $Y_0$				
$(y\theta)_{0,2} - (x\theta^{-1})_{0,-2}$	-0,000 683 336	0,003 253 714	-0,007 982 599	0,014 701 344	-0,060 565 889
$(y\theta)_{0,4} - (x\theta^{-1})_{0,-4}$	0,000 000 009	-0,000 000 107	0,000 000 616	-0,000 002 375	0 000 006 909
$(y\theta)_{0,6} - (x\theta^{-1})_{0,-6}$	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000

	TABLEAU II $\delta X$ et $\delta Y$				
$P_{1,0}$	1,118 173 167	-0,094 274 159	0,271 166 843	-0,047 273 738	0,378 910 451
$P_{1,-2}$	0,000 588 957	-0,003 006 089	0,007 696 676	-0,007 512 233	0,007 810 042
$P_{1,2}$	-0,014 925 766	0,058 220 057	-0,149 002 703	0,262 836 830	-1,917 652 504
$P_{1,-4}$	0,000 000 089	-0,000 000 925	0,000 004 765	-0,000 014 830	0,000 087 118
$P_{1,4}$	-0,000 000 414	0,000 007 518	-0,000 049 600	0,000 200 020	-0,001 346 392
$P_{-1,0}$	-2,881 830 775	-0,094 239 939	0,271 011 175	-0,046 782 008	-0,854 829 365
$P_{-1,-2}$	0,008 260 408	-0,036 821 213	0,101 182 069	-0,194 721 788	1,247 277 452
$P_{-1,2}$	0,000 051 263	-0,000 420 931	0,001 414 924	-0,008 245 599	0,025 866 548
$P_{-1,4}$	0,000 005 010	-0,000 045 344	0,000 218 748	-0,000 731 260	0,001 499 852
$P_{-1,6}$	-0,000 000 075	0,000 000 765	-0,000 003 637	0,000 011 182	-0,000 077 894

	TABLEAU III $Z$				
$Z_{1,0}$	1,000 000 141	-0,000 001 323	0,000 006 405	-0,000 021 383	0,000 066 157
$Z_{1,-2}$	-0,000 862 039	0,003 521 429	-0,008 034 685	0,015 524 222	-0,086 220 920
$Z_{1,2}$	0,000 172 441	-0,000 911 371	0,002 494 039	-0,005 211 718	0,021 405 375
$Z_{1,-4}$	0,000 000 227	-0,000 000 826	0,000 000 725	0,000 004 754	-0,000 032 736
$Z_{1,4}$	0,000 000 039	-0,000 000 446	0,000 002 425	-0,000 008 929	0,000 030 644

	TABLEAU IV $r_0$				
$r_{0,0}$	1,000 000 183	-0,000 001 782	0,000 008 792	-0,000 029 762	0,000 095 419
$r_{0,2}$	-0,000 510 900	0,002 342 392	-0,005 549 226	0,010 534 710	-0,053 343 580
$r_{0,4}$	-0,000 000 119	0,000 001 110	-0,000 005 274	0,000 017 188	-0,000 049 833

	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
--	-------	-------	-------	-------	-------

TABLEAU V  $\delta r$

$R_{1,0}$	-0.881 833 390	-0,094 214 476	0,270 883 519	-0,046 339 203	-0,240 460 377
$R_{1,-2}$	0,001 288 565	-0,006 382 924	0,016 106 374	-0,013 016 690	0,096 031 098
$R_{1,2}$	-0,004 075 824	0,014 360 125	-0,033 192 924	0,050 899 429	-0,392 104 214
$R_{1,-4}$	0,000 000 648	-0,000 006 549	0,000 024 430	-0,000 069 100	0,000 239 911
$R_{1,4}$	0,000 007 629	-0,000 067 354	0,000 308 625	-0,001 013 642	0,002 862 759

TABLEAU VI  $v_0$

$l_{0,2}$	176",516	-859",100	2 148",448	3 891",800	13 982",320
$l_{0,4}$	-0",035	0",331	-1",573	5",275	-16",292

TABLEAU VII  $\delta v$

$\delta l_{1,0}$	412 529",612	0",000	0",000	0",000	0",000
$\delta l_{1,-2}$	-22",374	103",858	-235",036	2 724",135	7 553",644
$\delta l_{1,2}$	-2 343",416	9 432",353	-24 919",219	45 694",693	-320 714",414
$\delta l_{1,-4}$	0",010	-0",229	0",842	3",108	6",753
$\delta l_{1,4}$	0",340	-2",746	12",570	-38",670	152",809

TABLEAU VIII  $s$

$B_0$	206 264",806	0",000	0",000	0",000	0",000
$B_{-2}$	-151",462	605",558	-1 371",118	2 658",858	-15 033",588
$B_{+2}$	61",913	-308",770	800",575	-1 618",184	7 165",722
$B_{-4}$	0",037	-0",092	-0",174	2",002	-11",438
$B_{+4}$	0",025	-0",266	1",285	-4",469	15",239

37. — Nous allons donner maintenant un exemple. Nous avons choisi pour cela l'astéroïde (17) Thétis dont le moyen mouvement a pour valeur :

$$914'',344$$

Nous avons tout d'abord à nous occuper du choix des constantes qui entrent dans les formules :  $a_0, \epsilon, \gamma, \varphi_0$  et  $\Omega_0$ .

Soit d'abord  $a_0$ . Si nous nous reportons à la formule (35) qui donne la valeur de  $a$ , et à la façon dont nous l'avons démontrée, nous voyons que, pour un astre donné, étudié seul,  $a_0$  est la valeur du demi grand axe qui correspond au moyen mouvement donné par les observations, d'après la formule :

$$n_0^2 a_0^3 = f(M_0 + M)$$

où  $M_0$  est la masse du Soleil (dans le cas actuel  $M$  est nul). Nous sommes donc conduit à prendre pour chaque astéroïde la valeur de  $a_0$  donnée par cette équation. Le développement de  $a$  suivant les puissances de  $w$  sera donné alors par la formule (85) où  $a_0$  aura la valeur qui vient d'être déterminée.

Soient maintenant  $\varepsilon$  et  $\gamma$ . Nous avons dit que nous ferions en sorte que le coefficient complet de  $\sin G$  dans le développement non symétrique de la longitude ait pour valeur :

$$2\varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^3 + \frac{5}{96} \varepsilon^5$$

tout comme s'il s'agissait d'un mouvement képlérien dans lequel  $\varepsilon$  serait l'excentricité, et nous nous sommes arrangés pour que le premier terme ait pour coefficient numérique 2. Nous sommes donc conduit à prendre pour  $\varepsilon$  la valeur de l'excentricité de l'astéroïde donnée par ses éléments elliptiques.

Nous avons dit également que nous ferions en sorte que le coefficient complet de  $\sin H$  dans le développement non symétrique de la latitude ait pour expression :

$$\gamma - \gamma \varepsilon^2 - \frac{1}{128} \gamma^3 + \frac{7}{64} \gamma \varepsilon^4 \dots$$

comme s'il s'agissait d'un mouvement képlérien d'excentricité  $\varepsilon$  dans lequel  $\gamma$  serait égal au double du sinus de la demi-inclinaison. Nous avons réalisé cette condition pour le premier terme en nous arrangeant de telle sorte que son coefficient numérique soit égal à 1. Nous sommes donc conduit à prendre pour  $\gamma$  le double de la valeur du sinus de la demi-inclinaison.

Il reste deux constantes  $\varphi_0$  et  $\Omega_0$ . Elles entrent dans la composition des arguments  $G_0$  et  $H_0$ . Mais nous avons dit que si, dans les formules trouvées on faisait  $\omega m^2 = 0$ , on pourrait considérer l'astéroïde comme se mouvant approximativement sur une orbite elliptique d'excentricité  $\varepsilon$ , d'inclinaison  $\gamma$ , l'anomalie moyenne étant  $G_0$  et l'argument de la latitude correspondant étant  $H_0$ . Cela nous porte à prendre pour  $G_0$  et  $H_0$  respectivement l'anomalie moyenne et l'argument de la latitude sans nous occuper davantage de  $\varphi_0$  et  $\Omega_0$ .

Ceci dit, revenons à Thétis. Le *Kleine Planeten Jahrgang* de 1938 nous donne pour les éléments les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 358^{\circ} 41' 42'' \\ \omega &= 137 \ 58 \ 44,40 \\ \Omega &= 125 \ 21 \ 46,80 \\ i &= 5 \ 36 \ 7,20 \\ \varphi &= 7 \ 50 \ 52,80 \\ n &= 914'',344 \\ a &= 2,4694 \end{aligned} \right\} \text{(Equ. 1950,0)}$$

Le moyen mouvement de Jupiter ayant pour valeur

$$n' = 299'',1283 \quad (\text{Connaissance des Temps})$$

a formule :

$$\mu = \mu_0 (1 - w) \quad \mu_0 = \frac{1}{3}$$

donne pour  $w$  la valeur :

$$w = 0,018 \ 547 \ 833$$

et nous obtenons de suite les puissances successives de  $w$  :

$$w^2 = 0,000 \ 344 \ 022$$

$$w^3 = 0,000 \ 006 \ 381$$

$$w^4 = 0,000 \ 000 \ 112$$

Les valeurs de  $w$  et de ses puissances nous permettent d'obtenir de suite les valeurs de  $K$ ,  $g_0$  et  $h_0$  :

$$K = 2,208 \ 953 \ 782$$

$$g_0 = 1,313 \ 041 \ 938$$

$$h_0 = 1,484 \ 330 \ 444$$

La formule (85) nous donne alors la valeur de  $a$  qui, en prenant pour  $a_0$  la valeur du demi grand axe donnée aux éléments, est

$$a = 2,469\ 357\ 892$$

D'après ce que nous avons dit plus haut au sujet de  $\varepsilon$  et de  $\gamma$ , ils auront pour valeurs respectives  $\sin \varphi$  et  $2 \sin \frac{\varphi}{2}$ . c'est-à-dire

$$\varepsilon = 0,136\ 545\ 800$$

$$\gamma = 0,097\ 734\ 440$$

Partant de ces valeurs et utilisant les tableaux IV, V, VI, VII, VIII, nous obtenons, pour les coordonnées polaires, les séries suivantes :

$$r_0 = 2,469\ 358\ 270 - 0,001\ 158\ 875 \cos 2V - 0,000\ 000\ 247 \cos 4V \dots$$

$$\begin{aligned} \delta r = & - 0,297\ 894\ 880 \cos G_0 + 0,000\ 396\ 405 \cos(G_0 - 2V) - 0,001\ 288\ 237 \cos(G_0 + 2V) + \\ & + 0,000\ 000\ 180 \cos(G_0 - 4V) + 0,000\ 002\ 185 \cos(G_0 + 4V) \dots \end{aligned}$$

$$v_0 = N + 171'',301 \sin 2V - 0'',030 \sin 4V \dots$$

$$\begin{aligned} \delta v = & 56\ 329'',186 \sin G_0 - 2'',801 \sin(G_0 - 2V) - 293'',128 \sin(G_0 + 2V) + \\ & + 0'',001 \sin(G_0 - 4V) + 0'',040 \sin(G_0 + 4V) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = & 20\ 159'',165 \sin H_0 - 13'',749 \sin(H_0 - 2V) + 5'',517 \sin(H_0 + 2V) + \\ & + 0'',004 \sin(H_0 - 4V) - 0'',003 \sin(H_0 + 4V) \dots \end{aligned}$$

Telles sont les séries qui définissent en fonction du temps les coordonnées polaires de (17) Thétis, ces coordonnées étant rapportées à l'équinoxe moyen de 1950,0

38 -- Pour voir quel degré de confiance ces formules peuvent mériter, nous allons calculer pour la même date  $r$ ,  $v$  et  $s$  par ces formules et par les formules du mouvement elliptique et examinons les différences des nombres obtenus. Nous ferons seulement une observation : les éléments donnés par le *Kleine Planeten Jahrgang* ont été calculés en tenant compte, par perturbations spéciales, de l'influence de Jupiter et de Saturne. Les séries données plus haut sont obtenues en tenant compte seulement de l'action de Jupiter. Si les éléments avaient été calculés en tenant compte de l'action de Jupiter seul, les différences devraient être très petites et de l'ordre des erreurs d'observations, mais ici les différences devront représenter l'action de Saturne. Elles devront être quand même assez petites vu l'éloignement de Saturne.

Ceci dit, pour réduire les formules en nombres, nous devons calculer  $N$ ,  $V$ ,  $G_0$ ,  $H_0$ ; pour ces derniers, selon ce qui a été dit plus haut, nous prendrons pour  $G_0$  la valeur de l'anomalie moyenne à l'époque choisie et pour  $H_0$  la valeur de l'argument correspondant de la latitude. Nous choisirons comme époque le 11 Juin 1938 à 0<sup>h</sup> T U qui est l'époque des éléments. Nous aurons alors

$$G_0 = M_0 = 358^\circ\ 41'\ 42'',00$$

$$H_0 = M_0 + \omega = 136^\circ\ 40'\ 26'',40$$

Nous savons que la longitude moyenne  $N$  s'obtient en ajoutant à l'anomalie moyenne la longitude du périhélie, cela nous donnera ici pour  $N$  :

$$N = 262^\circ\ 2'\ 13'',20$$



Il reste à calculer  $V = N - N'$ . Pour cela il faut calculer la longitude moyenne de Jupiter. En utilisant les tables de Leverrier, nous obtenons, pour le 11 Juin 1938 à 0<sup>h</sup> temps universel :

$$N' = 325^{\circ} 32' 7'',90$$

et nous obtenons ainsi :

$$V = 296^{\circ} 30' 5'',30$$

puis :

$$2V = 233^{\circ} 0' 10'',60$$

$$4V = 106^{\circ} 0' 21'',20$$

En faisant usage de tables de valeurs naturelles et d'une machine à calculer, nous obtiendrons enfin, pour  $r$ ,  $v$  et  $s$ , le 11 Juin 1938 à 0<sup>h</sup> T.U. les valeurs suivantes :

$$r = 2,172 804 653$$

$$v = 261^{\circ} 42' 21'',32$$

$$s = + 3^{\circ} 50' 46'',79$$

Si maintenant, nous calculons les mêmes coordonnées en faisant usage des formules du mouvement elliptique et pour déterminer la longitude projetée et la latitude, des formules :

$$\operatorname{tg}(v - \Omega) = \operatorname{cositg}(\omega + \omega)$$

$$\operatorname{tgs} = \operatorname{tgisin}(\omega + \omega)$$

nous obtiendrons pour les valeurs elliptiques de  $r$ ,  $v$  et  $s$  :

$$r = 2,132 333 333$$

$$v = 261^{\circ} 44' 42'',27$$

$$s = + 3^{\circ} 51' 9'',16$$

Les différences avec les valeurs trouvées plus haut sont :

$$r' - r = 0,040 471 320$$

$$v' - v = 0^{\circ} 2' 20'',95$$

$$s' - s = 0^{\circ} 0' 22'',57$$

ces différences sont petites et justifient ce que nous avons annoncé plus haut.

En résumé, à l'inspection des formules données pour  $r$ ,  $v$  et  $s$ , on voit que la décroissance des coefficients est très rapide, ce qui s'explique par le choix du paramètre  $\nu m^2$  qui contient en facteur la masse perturbatrice.

Nous ferons simplement une remarque sur les calculs à effectuer pour obtenir les tableaux qui constituent une table : *Tous les calculs, sans exception, sont des calculs algébriques simples, résolution de systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues, multiplications ou divisions algébriques ; il s'introduit seulement quatre racines carrées et leur calcul est immédiat en partant de la formule du binôme, mais là aussi, les calculs se réduisent à des multiplications algébriques.* Il y a donc *uniformité* dans les calculs et les chances d'erreurs sont moindres que lorsqu'il s'agit de calculs trigonométriques.

## CONCLUSIONS

---

39 — Le moment est venu de résumer notre travail et d'examiner les résultats obtenus

Nous nous étions proposé d'étudier les astéroïdes par groupes en appliquant la méthode de Hill-Brown modifiée par l'introduction de la conception de M. Böhlin si  $u$  désigne le rapport des moyens mouvements  $n$  de la planète troublante et  $n$  de l'astéroïde étudié, si  $\mu_0$  désigne un nombre *rationnel* voisin de  $u$ , ces deux nombres sont liés par la relation

$$u = \mu_0 (1 - w)$$

$w$  étant un petit nombre,  $\mu_0$  caractérisera le groupe auquel appartient l'astéroïde étudié et  $w$  caractérisera chaque astéroïde du groupe

Ce problème est entièrement résolu et nous sommes en mesure d'étudier les astéroïdes par groupes, à une exception près le groupe Troyen lorsque la planète troublante est Jupiter. Cela n'a pas grande importance car le groupe Troyen est peu nombreux

Nous voyons que les calculs fondamentaux, les plus longs, sont réservés à l'étude de la planète idéale qui correspond au nombre rationnel  $\mu_0$  choisi. Ayant obtenu les coefficients des puissances de  $w$  dans les séries qui représentent le mouvement, coefficients qui sont numériques et calculés *une fois pour toutes pour le groupe considéré*, le calcul, pour chaque astéroïde, sera rapide. Il se ramène, en effet, au calcul de  $w$ , puis, pour chaque coefficient, dans les séries qui représentent les coordonnées, au calcul de quelques termes correctifs, deux ou trois généralement, obtenus en multipliant un nombre déjà calculé par la puissance correspondante de  $w$ . Dans la majorité des cas, ce calcul pourra s'effectuer très rapidement à la machine à calculer.

Mais, ce qui distingue notre méthode, c'est la facilité d'obtenir *directement, sans être obligé de calculer les éléments osculateurs, les coordonnées rectangulaires ou polaires*. Son application permettra d'obtenir les perturbations générales d'un astéroïde sous la forme de tableaux un pour chaque coordonnée, tableaux valables pour une époque quelconque. En particulierisant l'époque, et, spécialement, en prenant une succession régulière d'époques on pourra obtenir ainsi, soit en coordonnées rectangulaires, soit en coordonnées polaires, une éphéméride qui tienne compte des perturbations soit de Jupiter, soit de Saturne ou de telle autre planète pour laquelle des tables auront été dressées. On voit donc qu'on est dispensé de la résolution des équations de condition, chose nécessaire quand on veut obtenir les éléments osculateurs.

Il reste un pas à franchir pour avoir directement les ascensions droites et les déclinaisons. Cela sera facile quand les tableaux de perturbations auront été dressés pour la longitude, la latitude et le rayon vecteur. Il suffira alors d'appliquer les formules de changement de coordonnées et ce calcul pourra s'effectuer à la machine à calculer sans aucune difficulté.

*Vu et permis d'imprimer*

LE RECTEUR DE L'ACADEMIE DE PARIS,  
G. ROUSSY

*Vu et approuvé*

Paris le 28 Mars 1939,

LE DOYEN DE LA FACULTE DES SCIENCES,  
CH. MAURAIN



## ERRATA

Pages	Lignes	Au lieu de :	Lisez :
1	15	imaginé	imaginée
3	18	Vol. IV	Vol. LIII
4	3	$im + m_0 w$	$i + m_0 w$
7	9	snivant	suivant
8	16	$\rho'^3 e^{-2l}$	$\rho'^3 e^{-2l'}$
9	8	D <sup>1</sup> F	D <sup>-1</sup> F
11	11	$x_\alpha, y_\alpha, C_\alpha$	$x_a, y_a, C_a$
11	11	$q - l$	$q - 1$
11	20	$q - l$	$q - 1$
11	avant-dernière	$+ \left( \frac{3}{2} + 2m \right) Dy_q$	$- \left( \frac{3}{2} + 2m \right) Dy_q$
12	1	une séries	des séries
12	9	$x_{qk}, y_{qk}$	$x_{q,k}, y_{q,k}$
12	17	$(x_{q0} + y_{q0})$	$(x_{q,0} + y_{q,0})$
12	27	$x^{i,k}, y^{i,k}$	$x_{i,k}, y_{i,k}$
13	15	$x_{1,2} \theta^{-2}$	$x_{1,2} \theta^{-2}$
14	1	$m^2 y_1$	$m'^2 y_1$
16	4	$a, + b$	$, a + b$
16	35	$-\frac{6}{4} \theta^2$	$-\frac{6}{4} \theta^{-2}$
17	21	$\theta_{2q-4} (p'+p')$	$\theta_{2q-4} (p'+p'')$
18	20	déterminés	déterminer
18	32	fonctian	fonction
20	15	$\eta_{0,4} \theta_4$	$\eta_{0,4} \theta^4$
22	11	$- r \cosse^{-iv}$	$= r \cosse^{-iv}$
22	13	$ax = r \cosse^{-iV-l}$	$ay = r \cosse^{-iV-l}$
22	19	Th $\lambda$	Th $l$
22	26	$V = N + \frac{l}{2}$	$v = N + \frac{l}{2}$
25	21	$x_{2(q-1),2h}$	$x_{p+2(q-1),2h}$
26	27	$\sqrt{ W_p }$	$\sqrt[p]{ W_p }$
28	18	$(1 - 2\nu) m^2 x$	$(1 - 2\nu) m^2 \delta x$
28	19	$(1 - 2\nu) m^2 y$	$(1 - 2\nu) m^2 \delta y$
28	23	$+ y_0 z^2$	$- y_0 z^2$

29	31	$Q = \frac{1}{2} \left[ \frac{D^2 x_0}{Dx} - \frac{D^2 y_0}{Dy} \right]$	$Q = \frac{1}{2} \left[ \frac{D^2 x_0}{Dx_0} + \frac{D^2 y_0}{Dy_0} \right]$
30	6	$- 2 Dx_0 Dy_0$	$- Dx_0 Dy_0$
31	15	$y_1 Dy_0$	$- y_1 Dy_0$
31	25	$- 2 Dx_0 Dy_0$	$- Dx_0 Dy_0$
33	28	$\varphi_j \varphi_j$	$\varphi_j \varphi_j'$
34	22	$n$	$n_0$
37	23	$\varepsilon^{-1}$	$\varepsilon_{-1}$
38	23	$\text{Th} (\lambda_0 + \delta l)$	$\text{Th} (l_0 + \delta l)$
44	20	$M'^n$	$M'_n$
46	13, 16	$\frac{m_0}{m}$	$\frac{m}{m_0}$
47	18	$x^{h+2,2h} (\mu_0)$	$x_{h+2,2h} (\mu_0)$
47	19	$(x^{\theta^{-1}})^{(0)}_{0,2h}$	$(x^{\theta^{-1}})^{(1)}_{0,2h}$
47	19	$\left. \vphantom{x^{\theta^{-1}}}\right] +$	$\left. \vphantom{x^{\theta^{-1}}}\right] -$
49	15	suivants	suivant
50	3	$- 2 \left[ \xi^{(2)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,4} +$	$- 2 \left[ \xi^{(0)}_{0,2} \eta^{(2)}_{0,4} +$
50	17	$-\frac{n}{1} \zeta'_0$	$-\frac{n}{1} \zeta'_0$
51	3	$\xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,4} \xi^{(1)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,4} +$	$\xi^{(0)}_{0,2} \xi^{(2)}_{0,4} + \xi^{(1)}_{0,2} \xi^{(1)}_{0,4} +$
51	6 en montant	$- 2 [v_2^{(0)} u_1^{(2)} +$	$- 2 [v_2^{(0)} u_1^{(2)} +$
51	4 en montant	$- 4u_2^{(0)}$	$- 4u_2^{(0)} v_2^{(0)}$
55	13	$(123), (124), (125)$	$(90), (91), (92)$
55	3 en montant	$2 [ \rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(2)}_{0,4} +$	$2 [ \rho^{(0)}_{0,0} \xi^{(1)}_{0,4} +$

# TABLE DES MATIÈRES

---

AVANT PROPOS.....	I
-------------------	---

## PREMIERE PARTIE

### **Exposition de la méthode de Hill-Brown adaptée au cas des petites Planètes**

CHAPITRE PREMIER.....	5
CHAPITRE II.....	24
CHAPITRE III.....	28

## DEUXIEME PARTIE

### **Etude des petites Planètes par groupes**

CHAPITRE PREMIER.....	45
CHAPITRE II.....	49

## TROISIEME PARTIE

CHAPITRE PREMIER.....	59
CHAPITRE II.....	66
APPLICATION NUMERIQUE.....	70
CONCLUSIONS.....	77
ERRATA.....	79

