WILLIAM BARRETT

Sur la structure des groupes semi-simples réels

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__224__1_0>

SÉRIE A, No. 394
No. D'ORDRE : 418

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

WILLIAM BARRETT

1re THÈSE. — SUR LA STRUCTURE DES GROUPES SEMI-SIMPLES RÉELS

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

SOUTENUES LE [illegible] DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN.

MM.	CARTAN	*Président.*
	MONTEL	*Examinateurs.*
	R. GARNIER	

TIMISOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA
1939

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

MM

Doyen honoraire M MOLLIARD

Doyen C MAURAIN *Professeur*, Physique du Globe

Professeurs honoraires	H LEBESGUE	AUGER	G BERTRAND
	EMILE PICARD	DANGEARD	ABRAHAM
	LEON BRILLOUIN	LESPIEAU	CH FABRY
	GUILLET	MARCHIS	LEON BERTRAND
	PECHARD	VESSIOT	WINTREBERT
	FREUNDLER	PORTIER	DUBOSCQ
		MOLLIARD	BOHN
		LAPICQUE	RABAUD

PROFESSEURS

M Caullery	T	Zoologie (Évolution des etres organises)
Emile Borel	T	Calcul des probabilites et Physique mathematique
Jean Perrin	T	Chimie physique
E Cartan	T	Geométrie superieure
A Cotton	T	Recherches physiques
J Drach	T	Analyse superieure et Algebre superieure
Charles Perez	T	Zoologie
M Guichard	T	Analyse et mesure chimiques
Paul Montel	T	Theorie des fonctions et Theorie des transformations
L Blaringhem	T	Botanique
G Julia	T	Mecanique analytique et Mecanique celeste
C Mauguin	T	Mineralogie
A Michel Levy	T	Petrographie
	T	Mecanique experimentale des fluides
A Denjoy	T	Application de l'analyse a la Geometrie
L Lutaud	T	Géographie physique et geologie dynamique
Eugène Bloch	T	Physique
G Bruhat	T	Physique theorique et physique
E Darmois	T	Enseignement de Physique celeste
A Debierne	T	Physique Generale et Radioactivite
A Dufour	T	Physique (P C B)
L Dunoyer		Optique appliquee
A Guilliermond	T	Botanique
M Javillier	T	Chimie biologique
Robert Levy	T	Physiologie comparee
F Picard	T	Zoologie (Évolution des etres organises)
Henry Villat	T	Mecanique des fluides et applications
Ch Jacob	T	Geologie
P Pascal	T	Chimie generale
M Frechet	T	Calcul differentiel et Calcul integral
E Esclangon	T	Astronomie
Mme *Ramart Lucas*	T	Chimie organique
H Beghin	T	Mecanique physique et experimentale
Foch		Mecanique experimentale des fluides
Pauthenier		Physique (P C B)
De Broglie	T	Theories physiques
Chretien		Optique appliquee
P Job		Chimie generale
Labrousse		Physique du Globe
Prenant	T	Anatomie et Histologie comparees
Villey		Mecanique physique et experimentale
Combes	T	Physiologie vegetale
Garnier	T	Mathematiques generales
Peres		Mecanique theorique des fluides
Hackspill	T	Chimie minerale
Laugier	T	Physiologie génerale
Toussaint		Technique Aeronautique
M Curie		Physique (P C B)
G Ribaud	T	Hautes temperatures
Chazy	T	Mecanique rationnelle
Gault		Chimie (P C B)
Croze		Recherches physiques
Dupont	T	Theories chimiques
Lanquine	T	Geologie structurale et geologie appliquee
Valiron		Mathematiques generales
Barrabe		Geologie structurale et geologie appliquee
Millot		Biologie animale (P C B)
F Perrin		Theories physiques
Vavon		Chimie organique
G Darmois		Calcul des probabilites et Physique Mathematique
Chatton	T	Biologie maritime
Aubel		Chimie biologique
Jaques Bourcart		Geographie physique et Geologie dynamique
Mme *Joliot Curie*		Physique generale et Radioactivite
Plantefol		Biologie vegetale (P C B)
Cabannes		Enseignement de Physique
Grasse		Biologie animale (P C B)
Prevost		Chimie (P C B)
Boulligand		Mathematiques

Secretaire A PACAUD

Secretaire honoraire D TOMBECK

À

MONSIEUR ELIE CARTAN

À

MONSIEUR J. H. C. WHITEHEAD

SUR LA STRUCTURE DES GROUPES SEMI-SIMPLES RÉELS.

PAR W. BARRETT.

INTRODUCTION.

Bien qu'on ait beaucoup étudié la structure infinitésimale des groupes de Lie complexes[1], on s'est borné pour les groupes réels à établir quelques théorèmes très généraux, ainsi que des propriétés globales de ces groupes. On connaît l'existence des différentes catégories fondamentales de groupes réels qui correspondent aux mêmes catégories de groupes complexes — les groupes intégrables, les groupes non-intégrables, etc.[2], et M. *Whitehead* a publié récemment[3] une démonstration valable pour les groupes réels du théorème d'*Eugenio-Elia Levi* sur la décomposition des groupes non-intégrables[4]. M. *Cartan* a trouvé en 1914[5] les structures des groupes simples réels en partant des formules de structure des groupes simples complexes qu'il avait déjà calculées dans sa thèse. Cette détermination exige, cependant, des calculs très lourds pour chaque classe de groupes simples, et surtout pour certains des cinq groupes exceptionnels. Plus tard, les belles recherches de M. *Cartan* sur les espaces symétriques l'ont amené[6] au théorème intéressant que toute automorphie involutive du groupe réel clos associé à un groupe simple complexe définit un groupe simple réel. M. *Cartan* a fait lui-même l'application de ce théorème aux quatre grandes classes de groupes simples, mais c'est M. *Pierre Lardy*[7] qui a complété ces résultats par le calcul des involutions des groupes exceptionnels.

La même différence se présente pour les représentations linéaires des groupes semi-simples. La structure des représentations des groupes semi-simples complexes a été étudiée par M. *Cartan* dans sa thése[8] et dans

---

[1]) *E. Cartan*, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse), Paris, Nony, 1894, et des recherches antérieures de Lie, de Killing et de Engel. Il y aura dans le cours de ce mémoire des renvois fréquents à la thèse de *M. Cartan*. Je l'indiquerai par la lettre C.

H. Weyl, Darstellung kontinuerlicher halbeinfacher Gruppen, Math. Zeit., 23 (1925) p 271—309 et 24 (1926) p. 328—395

[2]) *N. Jacobson*, Rational methods in the theory of Lie algebras, Annals of Mathematics, 36 (1935) p. 875–881.

[3]) *J. H. C. Whitehead*, On the decomposition of an infinitesimal group, Proc. Camb. Phil Soc., 32 (1936) p. 229—237.

[4]) *Eugenio-Elia Levi*, Atti. Acc. Torino, 40 (1905) p. 551—565.

[5]) *E. Cartan*, Les groupes réels simples, finis et continus, Ann. Ecole Normale, 31 (1914) p. 263—355.

[6]) *E Cartan*, Groupes simples clos et ouverts et géometrie riemannienne, Journal de Math., 8 (1929) p 1—33.

[7]) *Pierre Lardy*, Sur la détermination des structures réelles des groupes simples...., Comm. Math Helv., 8 (1935—36) p. 189—234.

[8]) C., chap. VIII.

plusieurs mémoires[1], et puis en particulier par M. *Weyl* dans le mémoire déjà cité[2], tandis que la structure des représentations des groupes semi-simples réels n'a pas encore fait l'objet d'une étude détaillée. M. *Cartan*[3] a demontré la possibilité d'associer à toute représentation irréductible réelle d'un groupe semi-simple réel, une représentation irréductible du groupe complexe correspondant, et de déterminer, au moyen d'une classification des représentations du groupe complexe selon certaines propriétés relatives au groupe réel, toutes les représentations irréductibles réelles de ce dernier. Sa méthode peut s'appliquer facilement à une représentation globale d'un groupe complexe, mais ne donne pas immédiatement de résultats si l'on considère un groupe de transformations linéaires infinitésimales caracterisé par son poids dominant. M *Whitehead* a donné une démonstration élégante[4] de la réductibilité complète d'une représentation réelle d'un groupe réel semi-simple.

La première partie de ce présent mémoire est consacrée à la démonstration de plusieurs théorèmes sur la structure infinitésimale des groupes semi-simples réels et à leur application à la détermination de ces groupes. Je démontre qu'à tout groupe semi-simple réel correspond une involution du groupe réel normal associé au groupe donné. Cette involution est essentiellement la même que celle du groupe clos qui définit le même groupe réel, car chacune des deux involutions détermine une antiinvolution du groupe complexe, et c'est la même antiinvolution. Il est cependant à remarquer que ma démonstration est entièrement algébrique, tandis que celle de M. *Cartan* repose sur une propriété globale de certains espaces symétriques. L'involution que je trouve, se présente sous une forme spéciale de sorte que toutes les involutions qui définissent le même groupe réel sont manifestement équivalentes. C'est justement la détermination des involutions équivalentes qui alourdit les calculs de M. *Lardy*, et c'est la question analogue qui a présenté le plus de difficultés dans le travail original de M. *Cartan*.

Les théorèmes auxquels je suis amené me permettent de caractériser tout groupe réel simple associé à un groupe simple complexe par une involution bien déterminée du système de racines caractéristiques du groupe complexe. La détermination des ces involutions repose, d'ailleurs, sur certaines relations linéaires qui lient les racines et ne fait pas intervenir les constantes de structure du groupe.

Dans la seconde partie je retrouve d'abord sous une forme un peu différente le théorème fondamental de M. *Cartan* sur les représentations réelles des groupes semi-simples réels, en regardant la représentation réelle comme invariante par une antiinvolution de la représentation du groupe complexe au

[1]) *E. Cartan*, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math., 41 (1913) p. 53—96; La géometrie des groupes simples, Ann. di Matematica, 4 (1927) p. 209—256; etc.

[2]) *Weyl*, loc. cit.

[3]) *E. Cartan*, Les groupes projectifs réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Journal de Math., 10 (1914) p. 149—186.

[4]) *J. H. C. Whitehead*, Certain equations in the algebra of a semi-simple group, Quarterly Journal of Math., 8 (1937) p, 220—237.

lieu de regarder cette antiinvolution comme invariante par le groupe réel. Je trouve ensuite des propriétés des poids d'une représentation d'un groupe complexe analogues à celles des racines caractéristiques d'un groupe complexe obtenues dans la première partie. Ces propriétés me conduisent à une détermination, très simple en général, des représentations d'un groupe complexe qui appartiennent aux diverses classes relatives à un groupe réel associé.

Bien des résultats antérieurs que je cite dans ce mémoire se rapportent aux groupes globaux, mais on verra que la démonstration de toutes ces propriétés serait la même pour les groupes intinitésimaux.

Il me reste maintenant à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur *E. Cartan* pour l'aide qu'il m'a apportée en acceptant de diriger personnellement mes recherches, complétant ainsi l'enseignement de ses admirables travaux. Je remercie aussi très vivement Monsieur *P. Sergescu* et Monsieur *V. Alaci* qui ont bien voulu faciliter l'impression de ce mémoire.

PREMIÈRE PARTIE

La structure des groupes infinitésimaux semi-simples réels.

CHAPITRE I.

1. *Généralités*[1]: Une algèbre de Lie ou groupe infinitésimal d'ordre r est un espace vectoriel à r dimensions dans lequel il est défini une opération appelée *crochet.*

Soient X, Y deux vecteurs de l'espace. Le crochet de X et Y s'écrit $[X, Y]$. Il satisfait aux conditions suivantes:

(i) il est linéaire:

$$a[X, Y] = [aX, Y]$$

où a est un facteur numérique;

$$[X+Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z].$$

(ii) il et anticommutatif:

$$[X, Y] + [Y, X] = 0.$$

(iii) il satisfait aux identités de *Jacobi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Dans la suite, *groupe* signifiera *groupe infinitésimal,* avec une seule exception, facile à reconnaître. Tout sous-espace linéaire $\mathfrak{G}_1$ d'un groupe $\mathfrak{G}$ tel que $[X, Y] \subset \mathfrak{G}_1$ si $X, Y \subset \mathfrak{G}_1$ est dit *sous-groupe* de $\mathfrak{G}$. Tout sous-groupe $\mathfrak{G}_1$ de $\mathfrak{G}$ tel que $[X, Z] \subset \mathfrak{G}_1$ si $X \subset \mathfrak{G}_1$ et $Z \subset \mathfrak{G}$ est dit *sous-groupe invariant* de $\mathfrak{G}$. Une base $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ de l'espace dans lequel est défini un groupe $\mathfrak{G}$ constitue une base du groupe, et les vecteurs de l'espace s'appellent *éléments générateurs* du groupe. Tout élément générateur peut s'exprimer sous la forme $e^i X_i$. Si l'on écrit $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, r)$, on aura $[Y, Z] = c_{ij}^k e^i f^j X_k$, où $Y = e^i X_i, Z = f^j X_j$. Les constantes c_{ij}^k sont les *constantes de structure* du groupe. Elles le déterminent complètement, et elles satisfont aux équations

$$\begin{cases} c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0 \\ c_{ij}^h c_{hk}^l + c_{jk}^h c_{hi}^l + c_{ki}^h c_{hj}^l = 0 \text{ (équations de } \textit{Jacobi}\text{).} \end{cases}$$

---

[1]) *C.*, première partie.

Par une transformation linéaire des paramètres e^i, les éléments de base X_i se transforment comme les composants d'un vecteur covariant, et les constantes de structure c_{ij}^k se transforment comme les composants d'un tenseur à deux indices covariants et un indice contravariant Les racines λ de l'équation

$$|e^i c_{ik}^j - \lambda \delta_k^j| = 0\ ,$$

qui s'appellent *racines caractéristiques du groupe relatives à l'élément* $e^i X_i$, sont invariantes, ainsi que la forme quadratique $\varphi(e) = c_{ih}^k c_{jk}^h e^i e^j$, somme des carrés des racines caractéristiques.

Les paramètres e^i peuvent être ou bien des nombres complexes arbitraires ou bien des nombres réels arbitraires. Dans le premier cas le groupe est dit complexe, et dans le second il est dit réel. Si l'on convient de donner aux paramètres d'un groupe réel G des valeurs complexes au lieu de valeurs réelles, on obtiendra un groupe complexe $\mathfrak{G}$, que l'on appelle *groupe complexe que définit* G *par le passage du réel au complexe.* G est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, et par rapport à la base de $\mathfrak{G}$ ainsi définie les constantes de structure de $\mathfrak{G}$ sont celles de G ; elles sont par suite toutes réelles. Tout système de paramètres réels dans G définit un système de paramètres dans $\mathfrak{G}$, et le conjugué complexe $\overline{Z}$ d'un élément générateur Z quelconque de $\mathfrak{G}$ est le même par rapport à tous les systèmes de paramètres ainsi définis dans $\mathfrak{G}$; $\overline{Z}$ sera appelé *le conjugué complexe de* Z *par rapport à* G.

Revenons maintenant aux groupes semi-simples. Nous ne nous occuperons pas d'une définition fondamentale. Remarquons simplement que les groupes semi-simples, réels ou complexes, sont complètement caractérisés par la propriété que le discriminant de la forme quadratique $\varphi(e)$ ne s'annule pas. Si $\mathfrak{G}$ est le groupe complexe défini par un groupe réel G par le passage du réel au complexe, les formes $\varphi(e)$ des deux groupes sont les mêmes. Donc, G et $\mathfrak{G}$ sont semi-simples en même temps.

Il a été demontré par M. *Cartan*[1] que tout groupe semi-simple complexe $\mathfrak{G}$ admet une base $\{X_i, X_\alpha\}$ $(i = 0, 1, \ldots l-1)$ où $\{X_i\}$ est une base d'un sous groupe abélien maximum $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{G}$ contenant un élément *général*[2] de $\mathfrak{G}$, et où

$$[X_i, X_\alpha] = c_{i\alpha}^\alpha X_\alpha = \alpha_i X_\alpha\,.$$

Une telle base s'appelle *base réduite de* $\mathfrak{G}$ *relative à* $\mathfrak{g}_0$. L'entier l est un invariant dit *rang* du groupe.

X_α est dit élément générateur de poids $\alpha = \alpha_i e^i$. Tout élément générateur ayant un poids est de la forme $k_\alpha X_\alpha$, qui est de poids α. Les bases de $\mathfrak{G}$ réduites relatives à $\mathfrak{g}_0$ sont celles de la forme

$$\{X_i^\bullet, X_\alpha^\bullet\} = \{k_i^j X_j, k_\alpha X_\alpha\}$$

où $|k_i^j| . \prod_\alpha k_\alpha \neq 0$.

[1]) C., deuxième partie.

[2]) C'est à dire un élément pour lequel le nombre minimum de racines caractéristiques s'annule.

Les racines caractéristiques relatives à $e^i X_i$ sont la racine zéro multiple d'ordre l, et les quantités $\alpha_i e^i$. Ces formes linéaires sont toutes distinctes et aucune d'elles ne s'annule identiquement. Elles ne s'annulent pas toutes en même temps si les e^i ne sont pas tous nuls, et si $\alpha = \alpha_i e^i$ est racine, $\alpha' = -\alpha_i e^i$ l'est aussi. La somme des carrés des racines caractéristiques relatives à $(e^i X_1 + e^\alpha X_\alpha)$ est une forme quadratique

$$\varphi(e^i, e^\alpha) = g_{ij} e^i e^j - \sum_\alpha g_{\alpha\alpha'} e^\alpha e^{\alpha'},$$

la somme étant étendue à toutes les racines α.

Les constantes de structure satisfont aux équations

$$\begin{cases} c_{ij}^k = c_{ij}^\alpha = c_{i\alpha}^j = 0 & \\ c_{\alpha\beta}^i = c_{i\alpha}^{\beta'} = 0 \quad \text{si} & \alpha + \beta \neq 0 \\ c_{i\alpha}^\alpha + c_{i\alpha'}^{\alpha'} = 0 & \\ c_{\alpha\beta}^\gamma \neq 0 \qquad \text{si} & \alpha + \beta \equiv \gamma \\ c_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \qquad \text{si} & \alpha + \beta \not\equiv \gamma \end{cases}$$

et à

(1) $$c_{\alpha'\alpha}^j \, g_{ij} = c_{i\alpha}^\alpha \, g_{\alpha'\alpha}$$ [1)]

2. Soient G et $\mathfrak{G}$ respectivement un groupe semi-simple réel et le groupe semi-simple complexe qu'il définit par le passage du réel au complexe. *Si* X *est un élément générateur général de* $\mathfrak{G}$, $\subset$ G[2)], *il existera l éléments* $X_0, X_1, \ldots, X_{l-1}$ *de* G *linéairement indépendants et échangeables entre eux,* où l est le rang du groupe $\mathfrak{G}$. Supposons en effet qu'il en existe seulement $l' < l$, soit $X_0, X_1, \ldots, X_{l'-1}$. Il existera un élément Z de $\mathfrak{G}$ indépendant de ces l' éléments de G et échangeable avec eux[3)]. Le conjugué $\overline{Z}$ de Z aura nécessairement les mêmes propriétés, les deux éléments $(Z + \overline{Z})$ et $i(Z - \overline{Z})$ de G seront échangeables avec $X_0, X_1, \ldots, X_{l'-1}$ et au moins l'un d'eux sera indépendant de $X_0, X_1, \ldots, X_{l'-1}$. C'est-à-dire qu'il existe $l'+1$ éléments de G indépendants et échangeables entre eux, contrairement à l'hypothèse.

Les éléments générateurs $\{X_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, l-1)$ engendrent un sous-groupe abélien maximum $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{G}$, et un sous-groupe abélien g_0 de G, sous-groupe de $\mathfrak{g}_0$. Le sous-groupe g_0 contient un élément général de $\mathfrak{G}$.

Soit X_α un élément générateur de $\mathfrak{G}$ de poids $\alpha = \alpha_i e^i$ par rapport à l'élément générateur $e^i X_i$.

---

1) *Van der Waerden*, Die Klassifikation der halbeinfachen Lieschen Gruppen, Math. Zeit., 37 (1933) p 446—462 (5).

2) Il existe un élément général de $\mathfrak{G}$ contenu dans G, car la condition pour qu'un élément soit général est que ses paramètres ne satisfassent pas à certaines équations algébriques, condition qui peut toujours être satisfaite par des valeurs réelles.

3) C., p. 33 et 54 $\{X_{i'}\}$ $(i' = 0, 1 \ldots, l'-1)$ engendrent un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ de rang zéro. Il existe alors un sous-groupe abélien de $\mathfrak{G}$ d'ordre l qui contient ce sous-groupe.

$$[\overline{X}_\alpha, X_i] = [\overline{X}_\alpha, \overline{X}_i] = \overline{[X_\alpha, X_i]} = \overline{\alpha}_i, \overline{X}_\alpha ;$$

$\overline{X}_\alpha$ est donc un élément générateur de poids $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_i e^i$. On voit alors que les racines caractéristiques relatives à un élément générateur de g_0 sont conjuguées deux à deux, et que l'on peut choisir un élément X_α de chacun des poids α de sorte que $\overline{X}_\alpha = X_{\overline{\alpha}}$, $\overline{\alpha}$ étant la conjuguée de la racine α.

Les éléments générateurs $\{X_i, X_\alpha\}$ *constituent une base réduite de* $\mathfrak{G}$ *pour laquelle*

(2)
$$\begin{cases} \overline{X}_i = X_i \\ \overline{X}_\alpha = X_{\overline{\alpha}} , \end{cases}$$

et par suite

(3)
$$\begin{cases} \overline{c}^{\alpha}_{i\,\alpha} = c^{\overline{\alpha}}_{i\,\overline{\alpha}} \\ \overline{c}^{i}_{\alpha\,\alpha'} = c^{i}_{\overline{\alpha}\,\overline{\alpha'}} \\ \overline{c}^{\gamma}_{\alpha\,\beta} = c^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} . \end{cases}$$

Soit la forme quadratique $\varphi(e)$ relative à cette base

$$\varphi(e) = g_{ij}\, e^i e^j - \sum_\alpha g_{\alpha\,\alpha'}\, e^\alpha e^{\alpha'} .$$

Les coefficients de cette forme sont donnés par

$$\begin{cases} g_{ij} = \sum\limits_\alpha c^\alpha_{i\,\alpha}\, c^\alpha_{j\,\alpha} = \sum\limits_\alpha \alpha_i \,.\, \alpha_j \\ -g_{\alpha\,\alpha'} = \sum\limits_\beta{}' c^{\alpha+\beta}_{\alpha\,\beta}\, c^\beta_{\alpha',\,\alpha+\beta} + c^i_{\alpha\,\alpha'}\, c^{\alpha'}_{\alpha'\,i} + c^\alpha_{\alpha\,i}\, c^i_{\alpha'\,\alpha} , \end{cases}$$

et on voit que g_{ij} sont réels et que $\overline{g}_{\alpha\,\alpha'} = g_{\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}'}$. En particulier, si α est réelle ou purement imaginaire, $\overline{\alpha} = \alpha$ ou α' et les deux paires de racines (α, α') et $(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}')$ sont confondues ; $g_{\alpha\,\alpha'}$ est alors réel.

3. Toutes les racines caractéristiques relatives aux éléments du sous-groupe $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{G}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients réels de l d'entre elles, soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$, qui sont indépendantes[1]. Parmi les $2l$ quantités $(\alpha_i \pm \overline{\alpha}_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, l-1)$ il y en a l qui sont indépendantes, soit ϱ de la forme $(\alpha_i + \overline{\alpha}_i)$ et σ de la forme $(\alpha_i - \overline{\alpha}_i)$ où $\varrho + \sigma = l$, et toute racine est une combinaison linéaire à coefficients réels de ces l quantités. Nous pourrons toujours choisir une base réelle du sous-groupe g_0 de G de sorte que les ϱ premières expressions, qui sont réelles pour tout élément générateur de g_0, soient égales à $e^0, e^1, \ldots e^{\varrho-1}$ et que les σ dernières, qui sont purement imaginaires, soient égales à $i e^l\; i e^{l+1}, \ldots, i e^{l-1}$. *Toute racine caractéristique sera alors de la forme*

[1]) C. p. 55, Théorème V.

(4) $\alpha = \overset{\bullet}{\alpha}_{i'} e^{i'} + i \overset{\bullet}{\alpha}_{i''} e^{i''} \; (i' = 0, 1, \ldots \varrho - 1 \; ; \; i'' = \varrho, \varrho + 1 \ldots, \varrho + \sigma - 1)$,
les coefficients $\overset{\bullet}{\alpha}_{i'}, \overset{\bullet}{\alpha}_{i''}$ *étant réels.*

Toutes les racines caractéristiques relatives à $e^{i'} X_{i'}$ sont alors des formes réelles des $e^{i'}$. Elles ne s'annulent pas toutes en même temps si les $e^{i'}$ ne sont pas tous nuls. La forme quadratique $\varphi\,(e^{i'}) = g_{i'j'} e^{i'} e^{j'}$, qui est la somme des carrés de ces racines, est donc définie positive. De la même manière, les racines relatives à $e^{i''} X_{i''}$ sont purement imaginaires et la forme quadratique $g_{i''j''} e^{i''} e^{j''}$ est définie négative. Enfin, $g_{i'j''} = i \sum\limits_{\alpha} \overset{\bullet}{\alpha}_{i'} \overset{\bullet}{\alpha}_{j''}$ et, $g_{i'j''}, \overset{\bullet}{\alpha}_{i'}, \overset{\bullet}{\alpha}_{j''}$ étant tous réels, $g_{i'j''} = 0$.

Il en résulte que $g_{ij} e^i e^j$ est de la forme

$$g_{i'j'} e^{i'} e^{j'} + g_{i''j''} e^{i''} e^{j''}$$

où la première de ces deux formes et définie positive et la seconde est définie négative.

Nous verrons maintenant qu'il existe toujours une base réduite $\{X_i, X_\alpha\}$ satisfaisant aux relations (2) telle que $g_{\alpha\alpha'}$ est positif si α est purement imaginaire. Soit en effet $\lambda = i \overset{\bullet}{\lambda}_{i''} e^{i''}$ une racine purement imaginaire pour laquelle $g_{\lambda\lambda'}$ est négatif. En effectuant en même temps une substitution linéaire réelle des $e^{i'}$ et une substitution linéaire réelle des $e^{i''}$ on pourra réduire la racine λ à la forme $\lambda^* e^{l-1}$ et en même temps $g_{ij} e^i e^j$ à la forme $\sum (e^{i'})^2 - \sum (e^{i''})^2$. Le caractère de cette forme quadratique est égal à $(\varrho - \sigma)$.

$$[X_\lambda, X_i] = -[X_{\bar\lambda}, X_i] = 0 \quad \text{si} \quad i \neq l - 1, \qquad \text{et } \textit{les } l$$

éléments générateurs $\{(X_\lambda + X_{\bar\lambda}, X_i), \; X_0, X_1, \ldots, X_{l-2}\}$ *de* G *engendrent un sous-groupe abélien maximum* $\overset{\bullet}{\mathfrak{g}}_0$ *de* $\mathfrak{G}$. La forme $\varphi\,(e)$ relative à l'élément $\{\xi\,(X_\lambda + X_{\bar\lambda}) + e^0 X_0 + \ldots + e^{l-2} X_{l-2}\}$ de ce sous-groupe est égal à

$$-\,2\, g_{\lambda\lambda'} \xi^2 + \sum_{i'=0}^{\varrho-1} (e^{i'})^2 - \sum_{i''=\varrho}^{l-2} (e^{i''})^2 \; ;$$

$g_{\lambda\lambda'}$ étant négatif, *cette forme quadratique est de caractère* $(\varrho - \sigma + 2)$. Il y a $(l+2)$ racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$ qui s'annulent pour tout élément générateur de la forme $e^i X_i \; (i = 0, 1, \ldots, l-2)$: ce sont les l racines qui s'annulent pour tout élément de $\mathfrak{g}_0$ et les deux racines $\pm \lambda$. Mais on vérifie immédiatement au moyen de l'équation $c^{i}_{\alpha'\alpha} g_{ij} = c^{\alpha}_{j\alpha} g_{\alpha'\alpha}$ (1, § 1) que

$$\begin{cases} [X_i, (X_\lambda - X_{\bar\lambda} + 2^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}_{\lambda'\lambda} . X_{l-1})] = 0 \; (i = 0, 1, \ldots, l-2) \\ [(X_\lambda + X_{\bar\lambda}), (X_\lambda - X_{\bar\lambda} + 2^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}_{\lambda'\lambda} . X_{l-1})] = -\, i\, g^{\frac{1}{2}}_{\lambda'\lambda} 2^{\frac{1}{2}} . \lambda^* (2^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}_{\lambda'\lambda} X_{l-1} + X_\lambda - X_{\bar\lambda}). \end{cases}$$

Il y a alors deux racines caractéristiques qui sont égales à $\pm\, i\, g^{\frac{1}{2}}_{\lambda'\lambda} 2^{\frac{1}{2}} \lambda^* \xi$ pour un élément générateur quelconque de $\mathfrak{g}_0$. Celles-ci s'annulent identiquement pour tout élément de la forme $e^i X_i$ $(i=0,1,\ldots,l-2)$ et on voit qu'il y a simplement l racines qui s'annulent pour tout élément de $\overset{\bullet}{\mathfrak{g}}_0$. *Le sous-groupe $\overset{\bullet}{\mathfrak{g}}_0$ contient donc un élément général de $\mathfrak{G}$.*

Si alors il existe une racine λ purement imaginaire pour laquelle $g_{\lambda\lambda'}$ est négatif, il existera une base réduite $\{\overset{\bullet}{X}_i, \overset{\bullet}{X}_\alpha\}$ de $\mathfrak{G}$ satisfaisant aux équations (2), pour laquelle le caractère de la forme quadratique $g_{ij}\, e^i\, e^j$ est augmenté de deux. Or, la valeur de ce caractère ne peut pas dépasser l. Il en résulte *que l'on peut choisir la base $\{X_i, X_\alpha\}$ de sorte que $g_{\alpha\alpha'}$ soit positif si α est purement imaginaire.*

Cela étant, soit $\{X_i, \overset{\bullet}{X}_\alpha\} = \{X_i, k_\alpha X_\alpha\}$ une nouvelle base réduite de $\mathfrak{G}$. Nous pouvons choisir k_α de sorte que $k_\alpha k_{\alpha'} = 1/g_{\alpha\alpha'}$ et $k_{\overline{\alpha}} = \overline{k}_\alpha$. Cela ne présente en effet aucune difficulté si la racine α n'est ni réelle ni purement imaginaire. Si α est reelle, $g_{\alpha\alpha'}$ est réel et on peut supposer également que k_α, $k_{\alpha'}$ soient réels. Si α est purement imaginaire, $\alpha' = \overline{\alpha}$ et nous aurons à choisir k_α de sorte que $k_\alpha\, \overline{k}_\alpha = 1/g_{\alpha\alpha'}$. Or cela est possible, car $g_{\alpha\alpha'}$ est réel et positif. Pour la nouvelle base nous aurons $\overset{\bullet}{g}_{\alpha\alpha'} = 1$ et $\overline{\overset{\bullet}{X}_\alpha} = \overset{\bullet}{X}_{\overline{\alpha}}$.

Nous avons alors démontré l'existence d'une base réduite $\{X_i, X_\alpha\}$ de $\mathfrak{G}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i)
$$\begin{cases} \overline{X}_i = X_i, \\ \overline{X}_\alpha = X_{\overline{\alpha}}. \end{cases}$$

(ii) *toute racine α est de la forme $\overset{\bullet}{\alpha}_{i'}\, e^{i'} + i\, \overset{\bullet}{\alpha}_{i''}\, e^{i''}$, où*

$$i' = 0,\ 1, \ldots, \varrho - 1\,; \qquad i'' = \varrho,\ \varrho + 1, \ldots, \varrho + \sigma - 1 = l - 1$$

et les $\overset{\bullet}{\alpha}_{i'}$, $\overset{\bullet}{\alpha}_{i''}$ sont tous réels.

(iii)
$$\varphi(e) = g_{ij}\, e^\lambda\, e^j - \sum_\alpha e^\alpha\, e^{\alpha'}.$$

Une telle base sera appelée base de $\mathfrak{G}$ réduite par rapport à G.

Comme conséquence de la deuxième condition nous avons

$$g_{ij}\, e^i\, e^j = g_{i'j'}\, e^{i'}\, e^{j'} + g_{i''j''}\, e^{i''}\, e^{j''},$$

où la première des deux formes quadratiques du second membre de cette équation est définie positive et la seconde est définie négative.

4. M. *Weyl* a démontré[1] qu'il existe une base réduite $\{Y_i, Y_\alpha\}$ d'un groupe semi-simple complexe $\mathfrak{G}$ ayant les propriétés suivantes:

(i) toutes les racines caractéristiques relatives aux éléments générateurs $e^i Y_i$ du sous-groupe abélien maximum $\mathfrak{g}_0$ engendré par les $\{Y_i\}$ sont des formes linéaires à coefficients réels des parametres e^i.

[1]) *H. Weyl*, loc. cit., p. 367—375.

(ii) la forme quadratique $\varphi(e)$ est

$$g_{ij}\, e^i\, e^j - \sum_\alpha e^\alpha\, e^{\alpha'}$$

où $g_{ij}\, e^i\, e^j$ est une forme quadratique définie positive.

(iii) $$c^\gamma_{\alpha\,\beta} = c^{\gamma'}_{\alpha'\,\beta'}\,.$$

Une telle base s'appelle *base normale réduite de* $\mathfrak{G}$. Rappelons la méthode employée par M. *Weyl* pour en démontrer l'existence.

Soit $\{X_i, X_\alpha\}$ une base réduite de $\mathfrak{G}$. On démontre d'abord qu'il existe une base $\{Y_i\}$ du sous-groupe abélien $\mathfrak{g}_0$ engendré par les $\{X\}$, telle que toute racine caractéristique relative à $e^i\, Y_i$ est une combinaison linéaire à coefficients réels des e^i. La forme quadratique $g_{ij}\, e^i\, e^j$ est la somme des carrés de ces racines. De plus, si les e^i ne sont pas tous nuls, les racines ne s'annulent pas toutes à la fois. La forme $g_{ij}\, e^i\, e^j$ est donc définie positive.

Remplaçons maintenant tout élément générateur X_α par $\overset{*}{X}_\alpha = k_\alpha\, X_\alpha$ où les coefficients k_α satisfont à la relation $k_\alpha\, k_{\alpha'}\, g_{\alpha\alpha'} = 1$. Nous aurons $\overset{*}{g}_{\alpha\alpha'} = 1$, et la forme quadratique φ (e) relative à la base $\{Y_i, \overset{*}{X}_\alpha\}$ sera

$$\varphi\,(e) = g_{ij}\, e^i\, e^j - \sum_\alpha e^\alpha\, e^{\alpha'}$$

où $g_{ij}\, e^i\, e^j$ est définie positive.

Cela étant, écrivons

(5) $$\alpha = \alpha_i\, e^i > \beta = \beta_i\, e^i\ ;\ \beta < \alpha$$

si

$$\alpha_{l'} = \beta_{l'}\ (l' = 0, 1, \ldots, p-1)$$

et

$$\alpha_p > \beta_p$$

pour une valeur convenablement choisie de $p < l$. Cette définition a un sens, parce que les α_i, β_i sont tous réels.

On vérifie immédiatement que

$$\alpha > \gamma \qquad \text{si} \qquad \alpha > \beta > \gamma$$

et que

$$\alpha + \beta > \gamma + \delta \qquad \text{si} \qquad \alpha > \gamma\,;\ \ \beta \geq \delta\,.$$

On fait ensuite l'hypothèse qu'il existe une base réduite $\{X_i, Y_\alpha\}$ de $\mathfrak{G}$ pour laquelle

$$\varphi\,(e) = g_{ij}\, e^i\, e^j - \sum_\alpha e_\alpha\, e_{\alpha'}$$

et

(6) $$c^{\gamma'}_{\alpha'\,\beta'} = c^\gamma_{\alpha\,\beta} \qquad \text{si} \qquad \omega' < \alpha, \beta, \gamma < \omega\,,$$

ω étant une racine donnée, et on démontre que cette hypothèse entraîne l'existence d'une base réduite de $\mathfrak{G}$, se déduisant de la précédente en multipliant X_ω par k et en même temps $X_{\omega'}$ par $\frac{1}{k}$, pour laquelle

$$\varphi(e) = g_{ij} e^i e^j - \sum_\alpha e^\alpha e^{\alpha'}$$

et

$$c_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = c_{\alpha\beta}^{\gamma} \qquad \text{pour} \qquad \omega' \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq \omega.$$

Si $\omega = \alpha + \beta$ où $\omega' < \alpha, \beta < \omega$, k est déterminé au signe près. Si $\overset{\bullet}{X}_\omega = k X_\omega$ et $\overset{\bullet}{X}_{\omega'} = \frac{1}{k} X_{\omega'}$, $\overset{\bullet}{c}{}_{\alpha\beta}^{\omega} = \frac{1}{k}\, c_{\alpha\beta}^{\omega}$ et $\overset{\bullet}{c}{}_{\alpha'\beta'}^{\omega'} = k\, c_{\alpha'\beta'}^{\omega'}$. Or $\overset{\bullet}{c}{}_{\alpha\beta}^{\omega} = \overset{\bullet}{c}{}_{\alpha'\beta'}^{\omega'}$, donc

$$k = \pm \left(c_{\alpha\beta}^{\omega} / c_{\alpha'\beta'}^{\omega'} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si ω n'est pas la somme de deux racines α, β qui satisfont aux inégalités $\omega' < \alpha, \beta < \omega$, on peut choisir k arbitrairement.

L'existence d'une base normale réduite $\{Y_i, Y_\alpha\}$ *de* $\mathfrak{G}$, *en résulte par induction, en faisant croître* ω.

On peut aller plus loin et dire que, si $\{Y_i, Y_\alpha\}$ est une base normale réduite de $\mathfrak{G}$ et si $c_{\alpha\beta}^{\gamma} = \gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ pour $\omega' < \alpha, \beta\, \gamma < \omega$ où les $\gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ sont les constantes de structure de la base $\{Y_i, Y_\alpha\}$, on peut choisir $\overset{\bullet}{X}_\omega = k X_\omega$ et $\overset{\bullet}{X}_{\omega'} = \frac{1}{k} X_{\omega'}$ de sorte que $\overset{\bullet}{c}{}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ pour $\omega' \leqq \alpha, \beta, \gamma, \gamma \leqq \omega$. *Dans cette réduction, k est déterminé complètement si* $\omega = \alpha + \beta$ *et* $\omega' < \alpha, \beta < \omega$, *et non simplement au signe près, mais il reste complètement indéterminé si* ω *ne peut pas s'exprimer sous cette forme.* C'est essentiellement cela que M. *Van der Waerden* a fait[1] pour démontrer qu'à tout système possible de racines caractéristiques il ne correspond qu'un seul groupe semi-simple complexe.

5. *Nous allons maintenant démontrer qu'il existe une base normale réduite* $\{Y_i, Y_\alpha\}$ *de* $\mathfrak{G}$ *telle que*

$$\begin{cases} \overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i \\ \overline{Y}_\alpha = \varepsilon_\alpha Y_{\overline{\alpha}} \end{cases}$$

où ε_i, $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ *et en particulier,* $\varepsilon_\alpha = +1$ *si* α *est purement imaginaire.*

Soit $\{X_i, X_\alpha\}$ une base de $\mathfrak{G}$ réduite par rapport à G. Toute racine caractéristique relative à $e^i X_i$ étant de la forme

$$\alpha = \overset{\bullet}{\alpha}_{i'} e^{i'} + i\, \overset{\bullet}{\alpha}_{i''} e^{i''} \quad (i' = 0, 1, \ldots, \varrho - 1\,; \quad i'' = l, l+1, \ldots, l-1),$$

où les coefficients $\overset{\bullet}{\alpha}_{i'}$, $\overset{\bullet}{\alpha}_{i''}$ sont réels, on pourra réduire toutes les racines à des formes linéaires réelles des paramètres en écrivant

---

[1]) *Van der Waerden*, loc. cit., p. 448.

$$\begin{cases} Y_{i'} = X_{i'} \; ; & Y_{i''} = i X_{i''} \\ e^{*i'} = e^{i'} \; ; & e^{*i''} = -i e^{i''} . \end{cases}$$

Cela nous donne

$$\alpha = \overset{*}{\alpha}_i e^{*i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1)$$

et $\overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i$ où $\varepsilon_{i'} = +1$ et $\varepsilon_{i''} = -1$.

La forme $\varphi(e)$ relative à la base $\{Y_i, X_\alpha\}$ est

$$\overset{*}{g}_{ij} e^{*i} e^{*j} - \sum e^\alpha e^{\alpha'}$$

où $\overset{*}{g}_{ij} e^{*i} e^{*j} = g_{i'j'} e^{*i'} e^{*j'} - g_{i''j''} e^{*i''} e^{*j''}$, qui est définie positive.

Les formules (5), appliquées aux coefficients $\overset{*}{\alpha}_i$ des racines caractéristiques α définissent alors un ordre de ces racines qui servira à déterminer par la méthode de M. *Weyl* une base normale réduite $\{Y_i, Y_\alpha\} = \{Y_i, k_\alpha X_\alpha\}$ de $\mathfrak{G}$, où $k_\alpha k_{\alpha'} = 1$. Soit $\mathcal{R}(\alpha) = \overset{*}{\alpha}_{i'} e^{i'}$ la partie réelle de la racine α relative à l'élément $e^i X_i$ du sous-groupe g_0 de G. Les relations (5) définissent également un ordre des quantités $\mathfrak{R}(\alpha)$, et on voit que

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha > \beta \quad \text{si} \quad \mathcal{R}(\alpha) > \mathcal{R}(\beta) \\ \mathcal{R}(\alpha) \geqq \mathcal{R}(\beta) \quad \text{si} \quad \alpha > \beta . \end{cases}$$

Soient ω, ω_0 deux racines telles que $\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}(\omega_0) \neq 0$. *Si l'on peut, sans changer la structure de la base* $\{Y_i, Y_\alpha\}$ *et sans changer les éléments générateurs* Y_α *pour lesquels* $\omega' < \alpha < \omega$, *remplacer* Y_{ω_0} *par un élément générateur arbitraire de poids* ω_0, *nous dirons que les éléments générateurs* $\{Y_\alpha\}(\omega' < \alpha < \omega)$ *ne déterminent pas* Y_{ω_0}. Dans le cas contraire nous dirons *qu'ils le déterminent.*

Si $\omega' < \omega_0 < \omega$, les $\{Y_\alpha\}(\omega' < \alpha < \omega)$ déterminent Y_{ω_0} par définition même. Si Y_{ω_0} est déterminé par $\{Y_\alpha\}(\omega' < \alpha < \omega)$ et $\omega_0 \geqq \omega$, il résulte de la méthode de détermination d'une base normale réduite, que $\omega_0 = \beta + \gamma$ où β, γ sont deux racines caractéristiques satisfaisant aux inégalités $\omega_0' < \beta, \gamma < \omega_0$. Ici deux possibilités se présentent: ou bien $\omega' < \beta, \gamma < \omega$ ou bien l'une des deux racines β, γ (soit β) ne satisfait pas à ces inégalités. De l'inégalité $\gamma < \omega_0$ et de $\beta + \gamma = \omega_0$ il résulte que $\beta > 0$. Dans le second cas alors $\omega_0 > \beta \geqq \omega$, d'où $\mathcal{R}(\omega_0) \geqq \mathcal{R}(\beta) \geqq \mathcal{R}(\omega)$. Or, $\mathcal{R}(\omega_0) = \mathcal{R}(\omega)$, donc $\mathcal{R}(\omega_0) = \mathcal{R}(\beta) = \mathcal{R}(\omega)$; enfin, $\mathcal{R}(\beta) + \mathcal{R}(\gamma) = \mathcal{R}(\omega_0) = \mathcal{R}(\beta)$, d'où $\mathcal{R}(\gamma) = 0$ et γ est purement imaginaire. Des inégalités $\mathcal{R}(\omega') < 0 = \mathcal{R}(\gamma) < \mathcal{R}(\omega)$ il résulte que $\omega' < \gamma < \omega$. Ecrivons $\beta = \omega_1$, $\gamma = \lambda_1$. On voit que Y_{ω_1} est nécessairement déterminé par $\{Y_\alpha\}(\omega' < \alpha < \omega)$. Sinon, en effet, $Y_{\omega_1} = k X_{\omega_1}$ serait un élément générateur quelconque de poids ω_1, et on aurait $Y_{\omega_0} = k\,(c^{\omega_0}_{\omega_1 \lambda_1} / \gamma^{\omega_0}_{\omega_1 \lambda_1})\, X_{\omega_0}$, qui est un élément arbitraire de poids ω_0; ce résultat serait contraire à l'hypothèse que $\{Y_\alpha\}(\omega' < \alpha < \omega)$ déterminent Y_{ω_0}.

En continuant ainsi, nous trouverons une suite de racines

$$\omega_0, \quad \omega_1 = \omega_0 - \lambda_1, \quad \omega_2 = \omega_1 - \lambda_1, \ldots$$

où λ_1, $\lambda_2, \ldots$ sont des racines purement imaginaires supérieures à zéro. Le nombre de racines caractéristiques étant fini, on terminerait par une racine

$$\omega_p = \omega_0 - \sum_{s=1}^{p} \lambda_s = \alpha + \beta$$

où α, β sont deux racines qui satisfont aux inégalités $\omega' < \alpha, \beta\, \omega$. *Nous aurons enfin une suite de racines*

$$\omega_0, \omega_1 = \omega_0 - \lambda_1, \omega_2 = \omega_1 - \lambda_2, \ldots, \omega_p = \omega_{p-1} - \lambda_p = \alpha + \beta$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des racines purement imaginaires et α, β sont deux racines telles que $\omega' < \alpha, \beta < \omega$.

Réciproquement, si une telle suife existe, on pourra déterminer de proche en proche les éléments générateurs, $Y_{\omega_p}, Y_{\omega_{p-1}}, \ldots, Y_{\omega_1}, Y_{\omega_0}$. Si Y_{ω_s} est égal à $k\ X_{\omega_s}$, on aura $Y_{\omega_{s-1}} = k \left(c^{\omega_s - 1}_{\omega_s \lambda_s} / c^{\omega'_s - 1}_{\omega'_s \lambda'_s}\right)^{\frac{1}{2}} X_{\omega_{s-1}}$. Remarquons que, en vertu de la relation $k_{\omega_0} k_{\omega'_0} = 1$, Y_{ω_0} et $Y_{\omega'_0}$ sont déterminés en même temps.

6. Cela posé, soit $\{Y_\iota, Y_\alpha\} = \{Y_\iota, k_\alpha X_\alpha\}$, où $k_\alpha . k_{\alpha'} = 1$, une base normale réduite de $\mathfrak{G}$, où les $\{Y_\iota\}$ sont ceux définis dans la section précédente et par suite

$$\overline{Y_\iota} = \varepsilon_\iota Y_\iota\ (\varepsilon_{\iota'} = 1\ ; i' = 0, 1, \ldots, \varrho - 1 .\ \varepsilon_{\iota''} = -1\ ; i'' = \varrho, \ldots, l - 1).$$

Supposons que $\overline{Y_\alpha} = \varepsilon_\alpha Y_{\overline{\alpha}}$ si $\omega' < \alpha < \omega$, ε_α étant égal à ± 1 et en particulier à $+1$ si en même temps α est purement imaginaire, et soient γ les constantes de structure de la base $\{Y_\iota, Y_\alpha\}$. De la relation $Y_\alpha = k_\alpha X_\alpha$ il résulte que

$$\gamma^\gamma_{\alpha\beta} = (k_\alpha . k_\beta / k_\gamma) . c^\gamma_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

et des équations $k_\alpha k_{\alpha'} = 1$, $\overline{c^\gamma_{\alpha\beta}} = c^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}$, que

$$\gamma^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} . \gamma^{\overline{\gamma}'}_{\overline{\alpha}'\,\overline{\beta}'} = c^{\overline{\lambda}'}_{\overline{\alpha}'\,\overline{\beta}'} . c^{\overline{\gamma}'}_{\overline{\alpha}'\,\overline{\beta}'} = \overline{c}^\gamma_{\alpha\beta} . \overline{c}^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = \overline{\gamma}^\gamma_{\alpha\beta} . \overline{\gamma}^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} .$$

Or, la base $\{Y_\iota, Y_\alpha\}$ étant normale réduite, $\gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \gamma^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}$ et on voit que $\gamma^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} = \pm\, \overline{\gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$.

Des équations $\gamma^\gamma_{\alpha\beta} = (k_\alpha k_\beta / k_\gamma) . c^\gamma_{\alpha\beta}$ et $c^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} = \overline{c}^\gamma_{\alpha\beta}$, il résulte que

$$(\overline{k}_\alpha \overline{k}_\beta k_{\overline{\gamma}} / k_{\overline{\alpha}} k_{\overline{\beta}} \overline{k}_\gamma) = \overline{\gamma}^\gamma_{\alpha\beta} / \gamma^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} = \pm 1 . \tag{9}$$

Supposons d'abord que ω soit purement imaginaire.

Si $\omega = \alpha + \beta$ où $\omega' < \alpha, \beta < \omega$, les racines α, β sont nécessairement purement imaginaires, et ω', α', β' sont respectivement égales à $\overline{\omega}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}$. La formule (9) nous donne

$$\overline{\gamma}^\omega_{\alpha\beta} / \gamma^{\overline{\omega}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} = (k_{\overline{\omega}} / \overline{k}_\omega) . \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta .$$

Or, $\gamma^{\omega}_{\alpha\beta} = \gamma^{\omega'}_{\alpha'\beta'} = \gamma^{\overline{\omega}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}$, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1$ et les $\gamma^{\beta}_{\alpha\beta}$ étant réelles[1)], $k_{\overline{\omega}} = \overline{k}_\omega$, d'où

$$\overline{\mathrm{Y}}_\omega = (k_{\overline{\omega}} / \overline{k}_\omega) \,.\, \mathrm{Y}_{\overline{\omega}} = \varepsilon_\omega \mathrm{Y}_{\overline{\omega}}$$

où

$$\varepsilon_\omega = 1 \,.$$

Si ω ne peut pas s'exprimer sous la forme $\alpha+\beta$, où $\omega' < \alpha, \beta < \omega$, k_ω peut être choisi arbitrairement, sans changer les éléments générateurs $\{\mathrm{Y}_\alpha\}$ $(\omega' < \alpha < \omega)$ et sans changer la structure de la base $\{\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_\alpha\}$. C'est une conséquence, en effet, du résultat de M. *Van der Waerden* cité à la fin de la section 4.

Prenons alors $k_\omega = k_{\omega'} = 1$; il vient

$$\overline{\mathrm{Y}}_\omega = (k_{\overline{\omega}} / \overline{k}_\omega) \,.\, \mathrm{Y}_{\overline{\omega}} = \varepsilon_\omega \,.\, \mathrm{Y}_{\overline{\omega}}$$

où

$$\varepsilon_\omega = 1 \,.$$

Etudions maintenant les cas où ω n'est pas purement imaginaire. Il y a trois possibilités qui se présentent.

D'abord, si les $\{\mathrm{Y}_\alpha\}$ $(\omega' < \alpha < \omega)$ *déterminent ou bien* Y_ω *ou bien* $\mathrm{Y}_{\overline{\omega}}$, il existera une suite de racines

$$\omega_0 \,, \omega_1 = \omega_0 - \lambda_1 \,, \ldots , \omega_p = \omega_{p-1} - \lambda_p = \alpha + \beta$$

où $\omega_0 = \omega$ ou $\overline{\omega}$ selon le cas, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des racines purement imaginaires qui satisfont par suite aux inégalités $\omega' < \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p < \omega$ et α, β sont deux recines telles que $\omega' < \alpha, \beta < \omega$. Appliquons à cette suite la formule (9).

Cela nous donnera

$$\begin{aligned}\left\{ \overline{\gamma}^{\omega_0}_{\omega_1\lambda_1} \,.\, \overline{\gamma}^{\omega_1}_{\omega_2\lambda_2} \cdots \overline{\gamma}^{\omega_p}_{\alpha\beta} \,/\, \gamma^{\overline{\omega}_0}_{\overline{\omega}_1\overline{\lambda}_1} \,.\, \gamma^{\overline{\omega}_1}_{\overline{\omega}_2\overline{\lambda}_2} \cdots \gamma^{\overline{\omega}_p}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} \right\} \\ = (k_{\overline{\omega}_0} / \overline{k}_{\omega_0}) \,.\, \varepsilon_\alpha \, \varepsilon_\beta \, \Pi \, \varepsilon_\lambda \\ = \pm (k_{\overline{\omega}_0} / \overline{k}_{\overline{\omega}_0}) \,.\end{aligned}$$

Or, nous avons vu que $\overline{\gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \pm \gamma^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}$; il en résulte que

$$(\overline{k}_{\omega_0} / k_{\overline{\omega}_0}) = \varepsilon_{\omega_0} = \pm 1$$

et

$$\overline{\mathrm{Y}}_\omega = \varepsilon_\omega \mathrm{Y}_{\overline{\omega}}$$

où

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon_{\omega_0} \quad \text{ou} \quad 1 / \overline{\varepsilon}_{\omega_0} , = \pm 1 .$$

De la relation $k_\omega \,.\, k_{\omega'} = 1$, il suit que $\overline{\mathrm{Y}}_{\omega'} = \varepsilon_\omega \,.\, \mathrm{Y}_{\overline{\omega}'}$.

Si les $\{\mathrm{Y}_\alpha\}$ $(\omega' < \alpha < \omega)$ *ne déterminent ni* Y_ω *ni* $\mathrm{Y}_{\overline{\omega}}$ *mais si les* $\{\mathrm{Y}_\alpha\}$ $(\omega' \leqq \alpha \leqq \omega)$ *déterminent* $\mathrm{Y}_{\overline{\omega}}$, il existera une suite de racines

(10) $$\overline{\omega} = \omega_0 , \; \omega_1 = \omega_0 - \lambda_1 , \ldots , \; \omega_p = \omega_{p-1} - \lambda_p = \omega .$$

---

1) *Weyl*, loc. cit., p. 372. La quantité $\mathrm{N}_{\alpha\beta}$ de *Weyl* est égale à $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Dans cette hypothèse, si les $\{Y_\alpha\}$ $(\omega' \leq \alpha < \omega)$ ne déterminent pas $Y_{\bar\beta}$ où $\omega' < \beta < \omega$, les $\{Y_\alpha\}$ $(\omega' \leqq \alpha \leqq \omega)$ ne le déterminent pas. En effet, $Y_{\bar\beta}$, $Y_{\bar\beta'}$ étant déterminés en même temps, en peut supposer $\bar\beta > 0$. Or, $\bar\beta$ ne satisfait certainement pas aux inégalités $\omega' < \bar\beta < \omega$. Donc, $\bar\beta \geqq \omega$ et $\mathcal{R}(\omega) \geqq \mathcal{R}(\beta) = \mathcal{R}(\bar\beta) \geqq \mathcal{R}(\omega)$ (7, §5). On voit alors que $(\bar\beta - \omega)$ est une quantité purement imaginaire supérieure à zéro. Si les $\{Y_\alpha\}$ $(\omega' \leqq \alpha \leqq \omega)$ déterminaient $Y_{\bar\beta}$, il existerait alors une suite de racines

$$\tilde\omega_0 = \bar\beta, \quad \tilde\omega_1 = \tilde\omega_0 - \mu_1, \ldots, \tilde\omega_q = \tilde\omega_{q-1} - \mu_q = \omega.$$

L'existence de la suite conjuguée

$$\bar{\tilde\omega}_0 = \beta, \ \bar{\tilde\omega}_1, \ldots, \bar{\tilde\omega}_q = \bar\omega.$$

entraînerait que les éléments générateurs $\{Y_\alpha\}$ $(\omega' < \alpha < \omega)$ détermineraient $Y_{\bar\omega}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous pouvons donc choisir k_ω arbitrairement sans changer les éléments générateurs $\{Y_\alpha, Y_{\bar\alpha}\}$ $(\omega' < \alpha < \omega)$ et sans changer la structure de la base $\{Y_\iota, Y_\alpha\}$. Une fois k_ω choisi, $k_{\bar\omega}$ est complétement déterminé par l'équation

$$\prod k_\lambda \cdot (k_\omega / k_{\bar\omega}) = \left\{ \gamma^{\bar\omega}_{\omega_1 \lambda_1} \cdot \gamma^{\omega_1}_{\omega_2 \lambda_2} \cdots \gamma^{\omega_{p-1}}_{\omega \lambda_p} \Big/ c^{\bar\omega}_{\omega_1 \lambda_1} \cdot c^{\omega_1}_{\omega_1 \lambda_2} \cdots c^{\omega_{p-1}}_{\omega \lambda_p} \right\}$$

qui s'obtient par l'application à la suite (10) de la formule (8). Ecrivons $k_\omega / k_{\bar\omega} = \varrho$ et appliquons la formule (9) à la suite (10). Cela nous donne

$$\prod \varepsilon_\lambda^{\sim} \cdot (\varrho \bar\varrho) = \left\{ \bar\varrho\, \bar\gamma^{\omega}_{\omega_1 \lambda_1} \cdot \bar\gamma^{\omega}_{\omega_2 \lambda_2} \cdots \bar\gamma^{\omega_{p-1}}_{\omega \lambda_p} \Big/ \gamma^{\omega}_{\bar\omega_1 \bar\lambda_1} \cdot \gamma^{\bar\omega_1}_{\bar\omega_1 \bar\lambda_1} \cdot \cdot \gamma^{\bar\omega_{p-1}}_{\bar\omega \bar\lambda_p} \right\} = \pm 1$$

d'où

$$\varrho \bar\varrho = 1 \ \text{ et } \ |\varrho| = 1.$$

Prenons alors

$$\begin{cases} k_\omega = \varrho^{\frac{1}{2}} \\ k_{\bar\omega} = 1 / k_\omega = \bar k_\omega ; \end{cases}$$

nous aurons

$$\bar Y_\omega = (\bar k_\omega / k_{\bar\omega}) \cdot Y_{\bar\omega} = \varepsilon_\omega Y_{\bar\omega} \quad \text{et} \quad \bar Y_{\omega'} + \varepsilon_\omega Y_{\bar\omega'}$$

où

$$\varepsilon_\omega = 1 .$$

Il ne reste à considérer qu'une seule possibilité. C'est le cas où les $\{Y_\alpha\}$ $(\omega' < \alpha < \omega)$ *ne déterminent ni* Y_ω *ni* $Y_{\bar\omega}$ *et les* $\{Y_\alpha\}$ $(\omega' \leqq \alpha \leqq \omega)$ *ne déterminent pas* $Y_{\bar\omega}$. Les coefficients $k_\omega, k_{\bar\omega}$ peuvent être choisis arbitrairement et indépendamment sans changer les éléments générateurs $\{Y_\alpha, Y_{\bar\alpha}\}$ $(\omega' < \alpha < \omega)$ et sans changer la structure de la base $\{Y_\iota, Y_\alpha\}$.

Prenons donc $k_\omega = k_{\bar\omega} = 1$; il en suit que

$$\bar Y_\omega = (\bar k_\omega / k_{\bar\omega}) \cdot Y_{\bar\omega} = \varepsilon_\omega Y_{\bar\omega} \quad \text{et} \quad \bar Y_{\omega'} = \varepsilon_\omega Y_{\bar\omega'}$$

où

$$\varepsilon_\omega = 1 .$$

Nous avons démontré alors qu'il existe une base normale réduite $\{Y_i, Y_\iota\}$ *de* $\mathfrak{G}$ *telle que*

$$\begin{cases} \overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i \\ \overline{Y}_\alpha = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}} \qquad si\ \omega' \leqq \alpha \leqq \omega, \end{cases}$$

où ε_i, $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ *et* $\varepsilon_\alpha = +1$ *si* a *est purement imaginaire.* Par induction en faisant croître ω, on démontre

Théorème I: *Si* $\mathfrak{G}$ *est le groupe complexe défini par un groupe semi-simple réel* G, *il existe une base normal réduite* $\{Y_i, Y_\alpha\}$ *de* $\mathfrak{G}$ *telle que*

$$\begin{cases} \overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i & (\varepsilon_i = \pm 1) \\ \overline{Y}_\alpha = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}} & (\varepsilon_\alpha = \pm 1) \end{cases}$$

avec $\varepsilon_\alpha = +1$ *si* α *est purement imaginaire.*

7. Soit $\{X_i, X_\alpha\}$ une base de $\mathfrak{G}$ réduite par rapport à G, et soit $\{Y_i, Y_\alpha\} = \{\varepsilon_i^{1/2} X_i, k_\alpha X_\alpha\}$ une base normale réduite de $\mathfrak{G}$ telle que

$$\begin{cases} \overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i \\ \overline{Y}_\alpha = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}}; \end{cases} \tag{11}$$

$k_\alpha k_{\alpha'} = 1$ et $\bar{k}_\alpha / k_\alpha = \varepsilon_\alpha$. Il suit des équations (11) et (3) et du fait que les γ, constantes de structure de la base $\{Y_i, Y_\alpha\}$, sont réelles, que

$$\begin{cases} \gamma_{i\,\alpha}^{\alpha} = \varepsilon_i \gamma_{i\,\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}} \\ \gamma_{\alpha\,\alpha'}^{i} = \varepsilon_i \gamma_{\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}'}^{i} \\ \gamma_{\alpha\,\beta}^{\gamma} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \gamma_{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}. \end{cases} \tag{12}$$

Les racines caractéristiques relatives à $e^i Y_i$ étant $e^i \gamma_{i\alpha}^{\alpha}$, il en résulte que la transformation involutive $Y_i^* = \varepsilon_i Y_i$ de la base du sous-groupe $\mathfrak{g}_0$ de base $\{Y_i\}$, laisse invariant le système de racines caractéristiques α en transformant α en $\bar{\alpha}$. *On voit aussi que la transformation*

$$\begin{cases} Y_i^* = \varepsilon_i Y_i \\ Y_\alpha^* = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

de la base de $\mathfrak{G}$ *est une automorphie involutive de* $\mathfrak{G}$.

Réciproquement, soit $\{Y_i, Y_\alpha\}$ une base normale réduite de $\mathfrak{G}$, et soient $\varepsilon_i, \varepsilon_\alpha$ des constantes égales à ± 1 telles que:

(i) la transformation $Y_i^* = \varepsilon_i Y_i$ de la base de $\mathfrak{g}_0$ laisse invariant le système de racines caractéristiques en transformant α en $\bar{\alpha}$.

(ii) la transformation

$$\begin{cases} Y_i^* = \varepsilon_i Y_i \\ Y_\alpha^* = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

est une automorphie involutive du groupe $\mathfrak{G}$. De la seconde condition il résulte que les équations (12) sont vérifiées et que $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\bar{\alpha}}$.

Considérons la base $\{X_i, (Y_\alpha + \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}}), i(Y_\alpha - \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}})$ de $\mathfrak{G}$; où $X_i = \varepsilon_i^{1/2} Y_i$. Les équations (12) nous permettent de vérifier que cette base est de structure réelle. Elle est alors une base d'un groupe réel G, sous-groupe de $\mathfrak{G}$, qui définit $\mathfrak{G}$ par le passage du réel au complexe. Le groupe G est nécessairement semi-simple et, par rapport à G :

$$\begin{cases} \overline{Y}_i = Y_i^* = \varepsilon_i Y_i \\ \overline{Y}_\alpha = Y_\alpha^* = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}}\,. \end{cases}$$

Théorème II : *Si* $\{Y_i, Y_\alpha\}$ *est une base normale réduite d'un groupe semi-simple complexe* $\mathfrak{G}$, *et si* $\varepsilon_i, \varepsilon_\alpha$ *sont des constantes égales à* ± 1 *telles que :*

(i) *la transformation* $Y_i^* = \varepsilon_i Y_i$ *de la base du sous-groupe* $\mathfrak{g}_0$ *laisse invariant le système de racines caractéristiques en transformant* α *en* $\bar{\alpha}$;

(ii) *la transformation*

$$\begin{cases} Y_i^* = \varepsilon_i Y_i \\ Y_\alpha^* = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

est une automorphie involutive de $\mathfrak{G}$,

le groupe $\mathfrak{G}$ *peut être considéré comme défini par le passage du réel au complexe par un groupe semi-simple réel* G, *et, par rapport à* G :

$$\begin{cases} \overline{Y}_i = \varepsilon_i X_i \\ \overline{Y}_\alpha = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

Cherchons les bases normales réduites $\{Y_i, Y_\alpha\}$ de $\mathfrak{G}$ pour lesquelles il existe de telles constantes $\varepsilon_i, \varepsilon_\alpha$ pour lesquelles $\varepsilon_\alpha = +1$ si $\alpha + \bar{\alpha} = 0$. Nous pouvons choisir arbitrairement le sous-groupe $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{G}$ engendré par les $\{Y_i\}$, car il existe une automorphie de $\mathfrak{G}$ qui transforme l'un des sous-groupes $\mathfrak{g}_0$ en un autre quelconque[1]. Supposons alors que $\{Y_i, Y_\alpha\}$ soit une base normale réduite arbitraire de $\mathfrak{G}$. Les racines α sont des formes linéaires à coefficients réels des paramètres dans $\mathfrak{g}_0$ correspondant à la base $\{Y_i\}$, et par suite toute transformation linéaire involutive de cette base qui laisse invariant le système de racines caractéristiques est réelle. Or, les $\{Y_i\}$ sont déterminés à une transformation linéaire réelle près, d'où il résulte qu'une telle involution peut se réduire par un choix convenable des $\{Y_i\}$, à la forme

[1]) *E. Cartan*, Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples, Bull. Sc. math., 49 (1925) p. 364.

$$Y_i^{\bullet} = \varepsilon_i Y_i$$

où

$\varepsilon_{i'} = +1$ si $i' = 0, 1, \ldots, \varrho - 1$; $\varepsilon_{i''} = -1$ si $i'' = \varrho, \varrho + 1, \ldots, \varrho + \sigma - 1 = l - 1$.

La base $\{ Y_i \}$ *de* $\mathfrak{g}_0$ *satisfait alors à la première condition du théorème II.*

Si $\bar{\alpha}$ est la transformée de α, nous conviendrons de dire que α, $\bar{\alpha}$ sont deux racines conjuguées et que deux racines α, β telles que $\bar{\alpha} = \alpha$ et $\bar{\beta} = \beta'$ sont respectivement réelle et purement imaginaire. Définissons par la formule (5) (§ 4) un ordre des racines caractéristiques; toutes les propriétés d'un tel ordre developpées dans la section 5 resteront vraies.

8. On sait que[1] si $\{ Y_i, Y_\alpha \}$, $\{ Z_i, Z_\alpha \}$ sont des bases normales réduites de deux groupes semi-simples complexes $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$, distincts ou non, et si les systèmes correspondants de racines caractéristiques sont les mêmes, Z_α et Y_α étant de même poids $\alpha_i\, e^i$ respectivement relatif à $e^i Z_i$ et à $e^i Y_i$, il existe une isomorphie de $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_i \rightarrow Z_i \\ Y_\alpha \rightarrow \varepsilon_\alpha Z_\alpha \end{array} \right.$$

où $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ et $\varepsilon_\alpha . \varepsilon_{\alpha'} = 1$. Or, Y_α et $Y_{\bar{\alpha}}$ sont de poids $\alpha_i\, e^i$ respectivement par rapport à e^i, Y_i et à $e^i Y_i^{\bullet} = e^i \varepsilon_i Y_i$. Nous pouvons donc poser $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_i = \varepsilon_i Y_i \\ Z_\alpha = Y_{\bar{\alpha}} \end{array} \right.$$

et nous aurons une automorphie de $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_i^{\bullet} = \varepsilon_i Y_i \\ Y_\alpha^{\bullet} = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}} \,. \end{array} \right.$$

Il en résulte que

$$\gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \gamma^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{13}$$

et que

$$\gamma^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \varepsilon_{\bar{\alpha}} \varepsilon_{\bar{\alpha}} \varepsilon_{\bar{\gamma}} \gamma^{\gamma}_{\alpha\beta},$$

d'où

$$\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_{\bar{\alpha}} \varepsilon_{\bar{\beta}} \varepsilon_{\bar{\gamma}}. \tag{14}$$

La condition pour que l'automorphie de $\mathfrak{G}$ que nous venons de définir soit involutive est que $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\bar{\alpha}}$. Supposons alors que $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\bar{\alpha}}$ si $\omega' < \alpha < \omega$ et que $\varepsilon_\alpha = +1$ si en même temps α est purement imaginaire.

Si d'abord ω *est purement imaginaire,* et si $\omega = \alpha + \beta$ où α, β sont deux racines qui satisfont à $\omega' < \alpha$, $\beta < \omega$, α et β sont purement imaginaires,

[1]) *Van der Waerden*, loc. cit

et $\gamma^{\bar\omega}_{\bar\alpha\bar\beta}=\gamma^{\omega'}_{\alpha'\beta'}=\gamma^{\omega}_{\alpha\beta}$. Il résulte de l'équation (13) que $\varepsilon_\omega=1$, et $\varepsilon_{\bar\omega}=\varepsilon_{\omega'}=1/\varepsilon_\omega=1$. Si ω est purement imaginaire, mais si elle ne peut pas s'exprimer sous la forme $\alpha+\beta$ où $\omega'<\alpha$, $\beta<\omega$, on peut remplacer Y^*_ω par un multiple arbitraire de lui-même, sans changer la structure de la base $\{Y^*_i, Y^*_\alpha\}$ et sans changer les éléments $\{Y^*_\alpha\}$ $(\omega'<\alpha<\omega)$. On peut donc supposer que $Y^*_\omega=Y_{\bar\omega}$, ce qui donne

$$\varepsilon_\omega=1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\bar\omega}=1/\varepsilon_\omega=1.$$

Si ω n'est pas purement imaginaire et si les $\{Y^*_\iota\}$ $(\omega'<\alpha<\omega)$ déterminent ou bien Y^*_α ou bien $Y^*_{\bar\alpha}$, appliquons l'équation (14) à la suite de

$$\omega_0=\omega \text{ ou } \bar\omega, \quad \omega_1=\omega_0-\lambda_1,\dots,\omega_p=\omega_{p-1}-\lambda_p=\alpha+\beta$$

où $\lambda_1, \lambda_2,\dots,\lambda_p$ sont purement imaginaires et $\omega'<\alpha$, $\beta<\omega$

Cela nous donne

$$\varepsilon_{\omega_0}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta=\varepsilon_{\bar\omega_0}\varepsilon_{\bar\alpha}\varepsilon_{\bar\alpha}.$$

Or, $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_{\bar\alpha}$ et $\varepsilon_\beta=\varepsilon_{\bar\beta}$, donc $\varepsilon_{\omega_0}=\varepsilon_{\bar\omega_0}$ et $\varepsilon_\omega=\varepsilon_{\bar\omega}$. De la relation $\varepsilon_\omega\,.\,\varepsilon_{\omega'}=1$ il résulte que $\varepsilon_{\omega'}=\varepsilon_{\bar\omega'}$.

Si ω n'est pas purement imaginaire, si les $\{Y^*_\iota\}$ $(\omega'<\alpha<\omega)$ ne déterminent ni Y^*_ω ni $Y^*_{\bar\omega}$, et si de plus les $\{Y^*_\alpha\}$ $(\omega'\leqq\alpha\leqq\omega)$ ne déterminent pas $Y^*_{\bar\omega}$, on peut remplacer Y^*_ω, $Y^*_{\bar\omega}$ par des multiples arbitraires et indépendants d'eux-mêmes sans changer la structure de la base $\{Y^*_i, Y^*_\alpha\}$ et sans changer les éléments $\{Y^*_\alpha, Y^*_{\bar\alpha}\}$ $(\omega'<\alpha<\omega)$. Nous pourrons alors supposer $Y^*_\omega=Y_{\bar\omega}$, $Y^*_{\bar\omega}=Y_\omega$ et

$$\varepsilon_\omega=\varepsilon_{\omega'}=\varepsilon_{\bar\omega}=\varepsilon_{\bar\omega'}=1\,.$$

Le seul cas qui reste à considérer est celui où les $\{Y^*_\iota\}$ $(\omega'<\alpha<\omega)$ ne déterminent ni Y^*_ω ni $Y^*_{\bar\omega}$ mais où les $\{Y^*_\omega\}$ $(\omega'\leqq\alpha\leqq\omega)$ déterminent $Y^*_{\bar\omega}$. Appliquons à la suite de racines :

(15) $$\omega_0=\bar\omega\,,\,\omega_1=\omega_0-\lambda_1,\dots,\omega_p=\omega_{p-1}-\lambda_p=\omega,$$

l'équation (13). Il en résulte que

$$\prod(\varepsilon_\lambda)\,.\,\varepsilon_\omega\,\varepsilon_{\bar\omega}=\left\{\gamma^{\omega_0}_{\omega_1\lambda_1}\,.\,\gamma^{\omega_1}_{\omega_2\lambda_2}\dots\gamma^{\omega_p\ 1}_{\omega_p\lambda_p}\Big/\gamma^{\bar\omega_0}_{\bar\omega_1\bar\lambda_1}\,.\,\gamma^{\bar\omega_1}_{\bar\omega_2}\dots\gamma^{\bar\omega_{p-1}}_{\bar\omega_p\bar\lambda_p}\right\}.$$

Or, $\varepsilon_\lambda=1$ et les γ sont réelles, donc l'expression

$$\prod_{s=0}^{p}\left(\gamma^{\omega_{s-1}}_{\omega_s\lambda_s}\,\gamma^{\bar\omega_{s-1}}_{\bar\omega_s\bar\lambda_s}\right)\Big/\varepsilon_\omega\,.\,\varepsilon_{\bar\omega}$$

est positive. Pour que $\varepsilon_\omega=\varepsilon_{\bar\omega}$ il faut et il suffit alors que le produit

(16) $$\prod\left(\gamma^{\omega_{s-1}}_{\omega_s\lambda_s}\,\gamma^{\bar\omega_{s-1}}_{\bar\omega_s\bar\lambda_s}\right)$$

soit positif. Enfin, $\varepsilon_{\omega'}=\varepsilon_{\bar\omega'}$ en même temps que $\varepsilon_\omega=\varepsilon_{\bar\omega}$.

Si dans le cas où les $\{Y^*_\alpha\}$ $(\omega'<\alpha<\omega)$ déterminent ou bien Y^*_α ou bien $Y^*_{\overline{\omega}}$, il existe une suite de la forme (15), ce même raisonnement démontre que le produit (16) associé est positif. Il en résulte par induction en faisant croître ω *qu'il faut et il suffit pour que l'on puisse choisir les* ε_α *de sorte que* $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\overline{\alpha}}$ *et que* $\varepsilon_\alpha = +1$ *si* α *est purement imaginaire, que le produit (16) associé à toute suite de racines non purement imaginaires de la forme*

$$(15a) \qquad \omega_0 , \omega_1 = \omega_0 - \lambda_1 , \omega_2 = \omega_1 - \lambda_2 , \ldots , \omega_p = \omega_{p-1} - \lambda_p = \overline{\omega_0}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *sont des racines purement imaginaires, soit positif.*

De plus, si ω est une racine quelconque d'une telle suite, il faut et il suffit pour que $\varepsilon_\omega = \varepsilon_{\overline{\omega}}$ que le produit (16) associé à la suite soit positif, car la suite

$$\omega = \omega_s , \omega_{s+1} , \ldots , \omega_p = \overline{\omega_0} , \overline{\omega_1} , \ldots , \overline{\omega_s} = \overline{\omega}$$

donne le même produit (16) que la suite primitive

$$\omega_0 , \omega_1 , \ldots , \omega_p = \overline{\omega_0} .$$

De cela il résulte que, si deux suites de la forme (15a) admettent une racine commune ou si une racine de la première est la conjugée d'une racine de la seconde, les produits (16) correspondants sont de même signe.

9. **Définition**: *L'ensemble des racines d'une suite de la forme (15a) et de leurs conjugées sera appelé „cycle de racines" si aucune des quantités* $\lambda_r \pm \lambda_s$ *n'est racine. L'entier* p *sera appelé l'ordre du cycle.*

Considérons les deux espèces de déformation d'une suite (15a) obtenues:

(i) en supprimant ω_s si $(\lambda_s + \lambda_{s+1})$ est racine

ou en supprimant ω_0 et en remplaçant ω_p par $\overline{\omega_1}$ si $(\lambda_1 - \lambda_p)$ est racine.

(ii) en remplaçant ω_s par la racine $(\omega_{s-1} - \lambda_{s+1}) = (\omega_{s+1} + \lambda_s)$ si $(\lambda_s + \lambda_{s+1})$ n'est pas racine

ou en remplaçant ω_0 , ω_p respectivement par $(\omega - \lambda_p)$, $\omega_{p-1} + \lambda_1)$ si $(\lambda_1 - \lambda_p)$ n'est pas racine.

Une telle déformation laisse toujours invariante au moins une racine de la suite, et par conséquent elle ne change pas le signe du produit (16). Or on voit que par une succession de telles déformations on pourrait arriver à une suite pour laquelle aucune des quantités $(\lambda_r \pm \lambda_s)$ ne serait racine. *Il faut et il suffit alors pour que l'on puisse choisir les* ε_α *de sorte que* $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\overline{\alpha}}$ *et que* $\varepsilon_\alpha = +1$ *si* α *est purement imaginaire, que le produit de la forme (16) associé à tout cycle de racines soit positif.*

Un cycle de racines d'ordre p est une suite de racines non purement imaginaires

$$(17) \qquad \tilde{\omega}_0 = \omega_0 , \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_0 - \lambda_1 , \ldots , \tilde{\omega}_{2p} = \tilde{\omega}_{2p-1} - \lambda_{2p} = \omega$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2p}$ sont des racines purement imaginaires et aucune des quantités $(\lambda_r \pm \lambda_s)$ n'est racine[1]. Une telle suite n'est pas nécessairement un cycle, mais si elle est un cycle, $\lambda_s = \lambda'_{s+p}$ et le produit (16) correspondant est

[1]) Ici, „racine" veut dire „racine non nulle".

(18) $$\prod_{s=1}^{2p} \left(\gamma^{\tilde\omega_{s-1}}_{\tilde\omega_s \lambda_s}\right).$$

Si dans une suite de la forme (17), $(\lambda_s + \lambda_{s+1}) \neq 0$ et on remplace $\tilde\omega_s$ par $\tilde\omega_s^* = \tilde\omega_{s-1} - \lambda_{s+1} = \tilde\omega_{s+1} + \lambda_s$, l'équation de *Jacobi*

$$\gamma^{\tilde\omega_{s-1}}_{\tilde\omega_s \lambda_s} \cdot \gamma^{\tilde\omega_s}_{\tilde\omega_{s+1} \lambda_{s+1}} = \gamma^{\tilde\omega_{s-1}}_{\tilde\omega_s^* \lambda_{s=1}} \cdot \gamma^{\tilde\omega_s^*}_{\tilde\omega_{s+1} \lambda_s}$$

montre que $\tilde\omega_s^*$ est racine et que le produit (18) n'est pas changé. Or, par une succession de telles déformations nous pourrions réduire un cycle à une suite de la forme

$$\tilde\omega_0 = \omega_0, \quad \tilde\omega_1 = \omega_0 - \lambda_1, \quad \tilde\omega_2 = \tilde\omega_1 + \lambda_1 = \omega_0, \ldots,$$

$$\tilde\omega_{2s} = \omega_0, \quad \omega_{2s+1} = \omega_0 - \lambda_{s+1}, \ldots, \tilde\omega_{2p} = \omega_0,$$

et le produit (18) deviendrait

$$\prod_{s=1}^{p} \left(\gamma^{\tilde\omega_0}_{\tilde\omega_0 - \lambda_s, \lambda_s} \cdot \gamma^{\tilde\omega_0 - \lambda_s}_{\tilde\omega_0, \lambda'_s}\right).$$

La base $\{Y_i, Y_\alpha\}$ étant normale réduite, $\gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = -\gamma^{\alpha}_{\gamma\beta'}$ [1] et ce produit est du signe de $(-1)^p$. On arrivera alors au théorème suivant:

Théorème III: *Pour qu'une involution du système de racines caractéristiques relatives aux éléments générateurs d'un sous-groupe $\mathfrak{g}_0$ d'un groupe semi-simple complexe $\mathfrak{G}$ puisse définir une automorphie involutive de $\mathfrak{G}$ de la forme*

$$\begin{cases} Y_i^* = \varepsilon_i Y_i \\ Y_\alpha^* = \varepsilon_\alpha Y_{\bar\alpha} \end{cases}$$

(où $\varepsilon_i = 1$ si $i = 0, 1, \ldots, \varrho - 1$; $\varepsilon_i = -1$ si $i = \varrho, \varrho + 1, \ldots, l - 1$; $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ et $\varepsilon_\alpha = +1$ si α est purement imaginaire), $\{Y_i\}$ étant une base de $\mathfrak{g}_0$ et $\{Y_i, Y_\alpha\}$ étant une base normale réduite de $\mathfrak{G}$, il faut et il suffit que tout cycle de racines déterminé par l'involution soit d'ordre pair.

Corollaire: *Si deux cycles de racines admettent une racine commune, l'ordre du premier est de la même parité que l'ordre du second.* Les deux cycles doivent donner, en effet, la même valeur pour $\varepsilon_\omega / \varepsilon_{\bar\omega}$ où ω est la racine commune.

Des théorèmes I et III il résulte:

Théorème IV: *A tout groupe réel associé à $\mathfrak{G}$ il correspond au moins une involutiou du système de racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$ pour laquelle tout cycle est d'ordre pair.*

10. A toute involution qui satisfait à la condition du théorème III il est associé au moins un groupe réel qui définit $\mathfrak{G}$ par le passage du réel au

[1] *Weyl*, loc. cit., p. 371 (§ 5).

complexe. (Th. II). Démontrons qu'il n'en existe qu'un seul. Dans la démonstration de théorème I, la base normale réduite $\{Y_i, Y_\alpha\}$ de laquelle on part est arbitraire à condition que

$$\overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i$$

où $\varepsilon_i = +1$ si $i = 0, 1, \ldots, \varrho - 1$ et $\varepsilon_i = -1$ si $i = \varrho, \varrho + 1, \ldots, l - 1$. De plus, chacune des constantes ε_α a une valeur bien déterminée. Dans certains cas, en effet, elle est déterminée en fonction des constantes ε_α $(\omega' < \alpha < \omega)$ et de la structure de la base $\{Y_i, Y_\alpha\}$ et dans les autres cas nous avons convenu de lui donner la valeur unité. En prenant comme base du groupe réel G, la base

$$\{\varepsilon_i^{1/2} Y_i, (Y_\alpha + \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}}), i(Y_\alpha - \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}})\}$$

de $\mathfrak{G}$, nous voyons que la structure de G est bien determinée.

Toute involution du système de racines caractéristiques pour laquelle tout cycle est d'ordre pair détermine un groupe réel et un seul qui définit $\mathfrak{G}$ par le passage du réel au complexe.

Définition: *Deux involutions d'un système de racines seront dites „équivalentes" s'il existe une transformation linéaire qui transforme l'une en l'autre.*

Soient $\{Y_i\}$, $\{Z_i\}$ deux bases respectivement de deux sous-groupes $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{G}$ telles que les racines caractéristiques sont pour ces deux bases des formes linéaires à coefficients réels des paramètres, et supposons que les transformations $Y_i^* = \varepsilon_i Y_i$ et $Z_i^* = \varepsilon_i Z_i$ définissent deux involutions équivalentes du systéme de racines[1]. On pourra choisir les $\{Z_i\}$ de sorte que les racines caractéristiques relatives à $e^i Z_i$ et $e^i Y_i$ soient les mêmes et d'après le théorème de M. *Van der Waerden* déjà cité (§ 4), il existera deux bases normales réduites $\{Y_i, Y_\alpha\}$ et $\{Z_i, Z_\alpha\}$ de même structure. Si les deux involutions définissent respectivement les groupes réels G et H nous aurons après réduction par la méthode développée dans la démonstration du théorème I, par rapport à G:

$$\begin{cases} \overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i \\ \overline{Y}_\alpha = \varepsilon_\alpha Y_{\bar{\alpha}}, \end{cases}$$

et par rapport à H:

$$\begin{cases} \overline{Z}_i = \varepsilon_i Z_i \\ \overline{Z}_\alpha = \varepsilon_\alpha Z_{\bar{\alpha}}, \end{cases}$$

où les constantes ε_α sont les mêmes pour les deux groupes. Or, cette réduction ne change pas la structure des bases $\{Y_i, Y_\alpha\}$ et $\{Z_i, Z_\alpha\}$, qui auront par suite toujours la même structure.

Il en résulte que les bases

[1]) On peut toujours supposer que les ε_i sont les mêmes pour deux involutions équivalentes, car il en est ainsi pour ρ, σ.

$$\{\varepsilon_i^{1/2} Y_i, (Y_\alpha + \varepsilon_\alpha Y_{\bar\alpha}), i(Y_\alpha - \varepsilon_\alpha Y_{\bar\alpha})\}$$

et

$$\{\varepsilon_i^{1/2} . Z_i, (Z_\alpha + \varepsilon_\alpha Z_{\bar\alpha}), i(Z_\alpha - \varepsilon_\alpha Z_{\bar\alpha})\}$$

respectivement de G et de H auront la même structure et que les deux groupes réels G et H seront isomorphes.

Théorème V : *A chaque involution du système de racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$ pour laquelle il n'existe pas de cycle d'ordre impair, il est associé un groupe réel et un seul qui définit $\mathfrak{G}$ par le passage du réel au complexe. Deux involutions équivalentes définissent deux groupes réels isomorphes.*

11. Calculons le caractère[1] du groupe réel semi-simple G défini par une involution donnée du système de racines. Par définition, le caractère de G est celui de la forme quadratique $\varphi(e)$, somme des carrés des racines caractéristiques relatives à une base réelle de G. Soit $\{Y_i, Y_\alpha\}$ une base normale réduite de $\mathfrak{G}$ pour laquelle

$$\overline{Y}_i = \varepsilon_i Y_i \quad \text{et} \quad \overline{Y}_\alpha = \varepsilon_\alpha Y_{\bar\alpha}$$

où les constantes ε_i, ε_α sont assujetties aux conditions habituelles. Relative à cette base la forme $\varphi(e)$ est

$$\varphi(e) = g_{ij} e^i e^j - \sum_\alpha e^\alpha e^{\alpha'}$$

où $g_{ij} e^i e^j$ est définie positive. La forme $\varphi(e)$ relative à la base

$$\{\varepsilon_i^{1/2} Y_i, \quad (Y_\alpha + \varepsilon_\alpha Y_\alpha), \quad \bar{i}(Y_\alpha - \overline{\varepsilon_\alpha} Y_{\bar\alpha})\}$$

de G, devient

$$g_{i'j'} e^{*i'} e^{*j'} - g_{i''j''} e^{*i''} e^{*j''} - 2\sum\{(\xi^\lambda)^2 + (\eta^\lambda)^2\} + \mathfrak{A}$$

où $(e^{*i}, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ sont les paramètres correspondant à cette base ; $i' = 0, 1, \dots, \varrho - 1$; $i'' = \varrho, \varrho + 1, \dots, \varrho + \sigma - 1 = l - 1$ et la somme est étendue à toutes les racines purement imaginaires supérieures à zéro. Le terme $\mathfrak{A}$ est une somme de produits de la forme $\xi^\alpha \xi^{\alpha'}$ ou $\eta^\alpha \eta^{\alpha'}$, *et cette forme quadratique est de caractère*

$$\varrho - \sigma - \tau$$

où τ est le nombre de racines purement imaginaires.

[1]) *E. Cartan*, Les groupes réels simples, finis et continus. Ann. Ecole Normale, 34 (1914) (désigné dans la suite par les initiales G. R) p. 268.

CHAPITRE II.

1. Un groupe réel semi-simple est le produit direct d'un ou de plusieurs groupes réels simples et il suffit donc de trouver ceux-ci pour avoir tous les groupes réels semi-simples. M. *Cartan* a démontré qu'il y a deux cas possibles[1]. Si G est un groupe réel simple, le groupe $\mathfrak{G}$ qu'il définit par le passage du réel au complexe est, ou bien simple, ou bien composé de deux groupes simples qui sont conjugués complexes par rapport à G.

Dans le second cas, soit $\mathfrak{G}$ le produit direct des deux groupes simples complexes $\mathfrak{G}_1$ et $\overline{\mathfrak{G}}_1$; on obtient le groupe réel G en considérant l'espace du groupe $\mathfrak{G}_1$ comme un espace à $2r$ dimensions réelles au lieu de r dimensions complexes, r étant l'ordre de $\mathfrak{G}_1$. Tout groupe simple complexe définit de cette manière un groupe simple réel et un seul.

Il reste à considérer les cas où $\mathfrak{G}$ est simple. Les groupes réels simples associés aux groupes complexes simples peuvent être déduits des systèmes bien connus des racines caractéristiques des types divers de groupes simples complexes. Nous allons chercher les automorphies involutives de chaque système de racines, non réductibles l'une à l'autre, pour lesquelles il n'existe pas de cycles de racines d'ordre impair. D'après le théorème V, il sera associé à chacune de ces involutions un groupe simple réel et un seul. Le théorème IV nous montre d'ailleurs que nous obtiendrons ainsi tous les groupes réels simples qui définissent par le passage du réel au complexe un groupe simple donné. Si nous exprimons l'involution sous la forme

$$\begin{cases} e^{*\,i'} = e^{i'} & (i' = 0, \ldots, \varrho - 1) \\ e^{*\,i''} = -e^{i''} & (i'' = \varrho, \varrho + 1, \ldots, \varrho + \sigma - 1 = l - 1) \end{cases}$$

où l est la rang du groupe, et si l'involution change de signe τ des racines caractéristiques, le caractère δ du groupe réel sera

$$\delta = \varrho - \sigma - \tau.$$

Nous pourrons simplifier les calculs en remarquant que, si une racine caractéristique est contenue dans plusieurs cycles, il suffit de considérer l'un quelconque de ces cycles. En effet le corollaire du théorème III montre que les ordres de tous les cycles contenant une même racine seront de même parité. Il nous sera aussi utile d'introduire certaines automorphies S_α du

[1]) G. R., p.

système de racines, définies de la manière suivante. Appelons d'après *Van der Waerden*[1] produit scalaire des deux racines

$$\alpha = \alpha_i e^i \quad \text{et} \quad \beta = \beta_i e^i ,$$

la quantité

$$(\alpha . \beta) = g^{ij} \alpha_i \beta_j$$

où

$$g^{ij} g_{ik} = \delta^j_k \quad \text{et} \quad g_{ij} e^i e^j = \sum (\alpha_i e^i)^2.$$

Nous pouvons définir de même le carré scalaire $(\alpha)^2 = (\alpha . \alpha)$ de toute racine α et le produit scalaire $(\omega . \alpha)$ de la racine α par une forme linéaire quelconque $\omega = \omega_i e^i$. Les opérations S_α et $S_{\alpha'}$ associées aux racines α et α' sont définies par l'équation[2]

$$S_\alpha(\omega) = S_{\alpha'}(\omega) = \omega - 2 \{ (\omega . \alpha) / (\alpha)^2 \} . \alpha.$$

Elles ont été définies pour la première fois par M. *Cartan*[3] par la propriété que $S_\alpha(\beta) - k\alpha$ et $\beta + k\alpha$ sont des racines en même temps, β etant une racine caractéristique quelconque.

Toutes les automorphies du système de racines laissent invariantes toutes les relations linéaires qui lient les racines; il en résulte que si uné automorphie transforme α en α^*, elle transforme S_α en S_{α^*}. Les racines β pour lesquelles $(\alpha . \beta) = 0$ sont dites orthogonales à α, et caractérisées par la relation $S_\alpha(\beta) = \beta$. L'ensemble des racines orthogonales à α se transforme alors en l'ensemble des racines orthogonales à α^*.

Remarquons enfin qu'il y a deux cas spéciaux qui se présentent pour tout groupe complexe simple. Si l'involution se réduit à l'identité, il n'y a pas de racines purement imaginaires[4], et par conséquent tout cycle est d'ordre zéro. Nous aurons $\varrho = l$ et $\sigma = \tau = 0$. *Il existe toujours alors un groupe réel de caractére l.* C'est le groupe réel *normal* engendré par une base normale réduite du groupe complexe. Si l'involution change de signe toutes les racines, elles sont toutes par définition purement imaginaires et il n'existe donc pas de cycles. $\varrho = 0$, $\sigma = l$ et $\tau = r - l$ où r est l'ordre de groupe. *On obtient ainsi le groupe réel unitaire de caractère $- r$.*

---

[1]) *Van der Waerden*, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen, Math. Zeit. 37 (1933) p. 447.

[2]) *H. Weyl*, Darstellung kontinuerlicher halbeinfacher Gruppen, II, Math. Zeit., 24, (1935) p. 367

Van der Waerden, loc. cit.

[3]) C., p. 57, Théorème VII. Avec la notation de M. *Cartan*,

$$\omega_\beta S_\alpha = \omega_\beta + a_{\beta\alpha} \omega_\alpha , \sum_h c_{\alpha,\alpha',(oh)} c_{(oh),\alpha,\alpha'} = -2 \text{ et} \sum_h c_{\alpha,\alpha',(oh)} c_{(oh),\beta,\beta,} = a_{\beta\alpha}.$$

Si nous écrivons $\omega_\alpha = \alpha$ et $\omega_\beta = \beta$, cela nous donne avec notre notation

$$a_{\beta\alpha} = - 2 c^i_{\alpha\alpha'} c^\beta_{i\beta} / c^i_{\alpha\alpha'} . c^\alpha_{i\alpha} ,$$

expression qui est invariante par toute transformation de base réduite de $\mathfrak{G}$. Or, pour une base normale réduite

$$c^i_{\alpha\alpha'} . c^\beta_{i\beta} = - g^{ij} c^\alpha_{j\alpha} c^\beta_{i\beta} = -(\alpha . \beta) ; c^i_{\alpha\alpha'} . c^\beta_{i\beta} = -(\alpha)^2 \text{ et } a_{\beta\alpha} = -2(\alpha . \beta) / (\alpha)^2 .$$

[4]) Pour la définition de racine purement imaginaire voir Ch. I, § 7.

2. Les groupes A_l.

Les racines caractéristiques sont[1]

$$(i,j)=(x^i-x^j)\quad (i,j=1,2,\ldots,l+1\,;\, i\neq j)$$

où $\sum_{i=1}^{l+1}(x^i)=0$. Si $\omega=m_i x^i$, les opérations S_α sont

$$S_{ij}(\omega=\omega-(m_i-m_j)(i,j)$$

Il existe des sous-systèmes de racines tels que la différence de deux racines d'un même sous-système est toujours une racine. Ce sont les $2(l+1)$ systèmes (i_0,j) et (j,i_0), où les ystème est déterminé par l'indice i_0, et l'indice j prend toutes les valeurs de 1 à $(l+1)$, sauf i_0. L'ensemble de ces $2(l+1)$ sous-systèmes est nécessairement invariant par toute automorphie. Or la somme des racines d'un tel sous-système est

$$\pm\left\{(l+1)x^{i_0}-\sum_{i=1}^{l+1}(x^i)\right\}=\pm(l+1)x^{i_0}.$$

Il en résulte que le système des quantités $(\pm x^i)$ est invariant par l'automorphie. De plus, si $\overline{x^i}=x^j$ et si $\overline{x^k}=-x^l$, où $\overline{x^i}$ et $\overline{x^k}$ sont les transformées des coordonées x^i et x^k, la racine (i,k) se transformerait en la quantité (x^j+x^l), *qui n'est pas racine.* Il y a alors deux cas possibles: *ou bien le système de quantités (x^i) est invariant par l'automorphie ou bien il se transforme en le système $(-x^i)$.*

Si l'automorphie est involutive, elle peut être réduite, en effectuant une permutation des indices, à la forme

$$\begin{cases}\overline{x^\alpha}=\varepsilon x^{\bar\alpha} & (\alpha=1,2,\ldots,2p\,;\,\bar\alpha=2p+1-\alpha)\\ \overline{x^a}=\varepsilon x^a & (a=2p+1,2p+2,\ldots,2p+q=l+1)\end{cases}$$

où $\varepsilon=\pm1$ cherchons les cycles dans les divers cas.

I: $\varepsilon=+1$. Les racines purement imaginaires sont $(\alpha,\bar\alpha)$ et $\tau=2p$. Le tableau suivant donne les racines non purement imaginaires, un cycle contenant chacune de ces racines et l'ordre de chaque cycle:

racines	cycles	ordre
$(a,\alpha)\to(a,\bar\alpha)$	$(a,\alpha),\ (a,\bar\alpha)$	1
$(\alpha,a)\to(\bar\alpha,a)$	$(\alpha,a),\ (\bar\alpha,a)$	1
$(a,b)\to(a,b)$	(a,b)	0
$(\alpha,\beta)\to(\bar\alpha,\bar\beta)$	$(\alpha,\beta),\ (\bar\alpha,\beta),\ (\bar\alpha,\bar\beta),\ (\alpha,\bar\beta)$	2

[1]) C., p. 71 et *E. Cartan*, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math., 41 (1913) (indiqué dans la suite par G. P.) p. 67.

Les seules involutions où il n'existe pas de cycles d'ordre impair sont données par :

(i) $p = 0$,

(ii) $q = 0$ et $p = (l+1)/2$; celle-ci n'existe que si $(l+1)$ est pair.

Nous avons alors deux groupes réels :

(i) $p = 0$. L'involution est l'identité et le groupe réel est le groupe normal de caractère l.

(ii) $(l+1)$ pair et $p = (l+1)/2$. L'involution peut s'exprimer :

$$\begin{array}{c|c|l} + & (\bar{x}^{\alpha} + \bar{x}^{\bar{\alpha}}) = (x^{\alpha} + x^{\bar{\alpha}}) & (\alpha = 1, 2, \ldots, (l-1)/2) \\ \hline - & (\bar{x}^{\beta} - \bar{x}^{\bar{\beta}}) = -(x^{\beta} - x^{\bar{\beta}}) & (\beta = 1, 2, \ldots, (l+1)/2). \end{array}$$

Donc, $\varrho = (l-1)/2$, $\sigma = (l+1)/2$, $\tau = 2p = (l+1)$ et

$$\delta = \varrho - \sigma - \tau = -l - 2.$$

L'involution peut se mettre sous la forme $\prod_{\alpha=1}^{(l+1)/2} S_{\alpha\bar{\alpha}}$.

II : $\varepsilon = -1$. Les racines purement imaginaires sont (a, b) et $\tau = (q^2 - q)$ Les racines non purement imaginaires et les cycles sont :

racines	cycles	ordre
$(a, \alpha) \to (\bar{\alpha}, a)$	—	—
$(\alpha, \beta) \to (\bar{\beta}, \bar{\alpha})$	—	—
$(\alpha, \bar{\alpha}) \to (\alpha, \bar{\alpha})$	$(\alpha, \bar{\alpha})$	$\bar{0}$

Il n'y a pas de cycles d'ordre impair et il existe alors un groupe réel pour toute valeur possible de q, soit $q = l+1, l-1, \ldots, 0$ ou 1. L'involution est définie par les équations :

$$\begin{array}{c|c|l} + & (\bar{x}^{\alpha} - \bar{x}^{\bar{\alpha}}) = (x^{\alpha} - x^{\bar{\alpha}}) & (\alpha = 1, 2, \ldots, p) \\ \hline - & (\bar{x}^{\beta} + \bar{x}^{\bar{\beta}}) = -(x^{\beta} + x^{\bar{\beta}}) & (\beta = 1, 2, \ldots, p-1) \\ & \bar{x}^{a} = -x^{a} & (a = 2p+1, \ldots, 2p+q = l+1) \end{array}$$

Nous avons donc $\varrho = p$, $\sigma = l - p$, $\tau = q^2 - q$ et

$$\delta = \varrho - \sigma - \tau = (1 - q^2).$$

Il y a alors deux classes de groupes réels du type A_l :

(i) *le groupe normal de caractère* l *et, si* l *est impair, un groupe de caractère* $-(l+2)$, *defini par l'involution*

$$\sum_{\alpha=1}^{(l+1)/2} S_{\alpha\bar{\alpha}} \qquad (\bar{\alpha} = l + 2 - \alpha)$$

(ii) *les groupes de caractère* $(1-q^2)$ *définis par les involutions*

$$\begin{cases} \bar{x}^{\alpha} = -x^{\bar{\alpha}}, (\alpha = 1, \ldots, 2p; \bar{\alpha} = 2p+1-\alpha) \\ \bar{x}^{a} = -x^{a}, (a = 2p+1, \ldots, 2p+q = l+1.) \end{cases}$$

3. Les groupes B_l.

Les racines caractéristiques sont [1]

$$\begin{cases} (i) = x^i \\ (i, j) = (x^i - x^j) \end{cases}$$

où $i, j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$; $i \neq \pm j$ et $x^{-i} = -x^i$.

Les opérations S_α sont [2]

$$\begin{cases} S_i(\omega) = \omega - 2m_i(i) \\ S_{ij}(\omega) = \omega - (m_i - m_j)(i, j), \end{cases}$$

où nous convenons de poser $m_{-i} = -m_i$.

Il est clair que toute automorphie laisse invariant l'ensemble des racines (i). En effet, toute autre racine est la somme de deux racines, ce qui serait faux pour toute racine (i). Il en résulte que toute automorphie du système de racines est de la forme

$$\bar{x}^i = \pm x^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Si cette automorphie est involutive on pourra, en effectuant une permutation des indices, la mettre sous la forme:

$$\begin{cases} \bar{x}^{\alpha} = \theta_\alpha x^{\bar{\alpha}}, & \begin{cases} \alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2p; \ \theta_\alpha = \theta_{\bar{\alpha}} = \theta_\alpha = \pm 1 \\ \bar{\alpha} = 2p+1-\alpha \text{ si } \alpha > 0 \text{ et } \bar{\alpha} = -(2p+1) - \alpha \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \\ \bar{x}^a = x^a, & (a = \pm(2p+1), \ldots, \pm(2p+q)) \\ \bar{x}^\lambda = -x^\lambda, & (\lambda = \pm(2p+q+1), \ldots, \pm(2p+q+s) = \pm l), \end{cases}$$

et par un choix convenable des signes des coordonnées (x^α) on pourra s'assurer que $\theta_\alpha = +1$. Les racines purement imaginaires sont (λ), (λ, μ) et $(\alpha, \bar{\alpha})$ et $\tau = 2(s^2 + p)$. Le tableau des autres racines et des cycles est:

racines	cycles	ordre
(a, b), $(\alpha', \bar{\alpha})$ [3], (a) sont réelles	(a, b), $(\alpha' \bar{\alpha})$, (a) respectivement	0
$(\alpha, a) \to (\bar{\alpha}, a)$	(α, a), $(\bar{\alpha}, a)$	1
$(\alpha) \to (\bar{\alpha})$	(α), $(\bar{\alpha})$	1
$(a, \lambda) \to (a, \lambda')$	(α, λ), (a, μ), (a, λ'), (a, μ')	2
$(\alpha, \beta) \to (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ $(\alpha \neq \bar{\beta})$	(α, β), $(\bar{\alpha}, \beta)$, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $(\alpha, \bar{\beta})$	2
$(\alpha, \lambda) \to (\bar{\alpha}, \lambda')$	(α, λ), (α, μ), (α, λ'), $(\bar{\alpha}, \lambda')$, $(\bar{\alpha}, \mu)$, $(\bar{\alpha}, \lambda)$	3

[1]) C., p. 79 et G. P., p. 69. [2]) G. P., p. 69.
[3]) Nous posons $\alpha' = -\alpha$ et $a' = -a$, etc.

Pour qu'il n'existe pas de cycles d'ordre impair, il faut et il suffit que p soit nul. Nous avons alors $(l+1)$ groupes réels pour lesquels $s=0, 1, \ldots, l$ et $q=l-s$. L'involution est définie par les équations:

$$\begin{array}{cc|c|l} + & & \bar{x}^a = x^a & (a=1, 2, \ldots, q) \\ - & & \bar{x}^\lambda = -x^\lambda & (\lambda = q+1, q+2, \ldots, q+s=l) \end{array}$$

et $\varrho = q$, $\sigma = s$. Or, $\tau = 2s^2$, donc

$$\delta = \varrho - \sigma - \tau = l - 2s(s+1).$$

Il existe alors une seule famille de groupes réels, de caractère $l-2s(s+1)$ $(s=0, 1, \ldots, l)$, *et l'involution peut s'écrire sous la forme*

$$\Pi\,(S_{\lambda, \lambda+1}\, S_{\lambda', \lambda+1}) \quad (\lambda = q+1, q+3, q+5, \ldots),$$

qu'il faut multiplier par S_l *si* s *est impair.*

4. **Les groupes C_l.**

Les racines caractéristiques sont[1])

$$(i, j) = (x^i - x^j)$$

où $i, j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$; $i \neq j$ et $x^{-i} = -x^i$.

Les opérations S_α sont[2])

$$\begin{cases} S_{ij}(\omega) = \omega - (m_i - m_j)(i, j) \text{ si } i \neq j' \\ S_{ii'}(\omega) = \omega - m_i(i, i'), \end{cases}$$

où, comme pour les groupes B_l, nous posons $m_{i'} = -m_i$.

La somme de deux racines distinctes de la forme (i, i') qui ne sont pas opposées, est toujours égale au double d'une troisième racine, et ces racines sont les seules pour lesquelles il en soit ainsi. Elles constituent alors un sous-système invariant par toutes automorphie. Il en résulte que les involutions sont les mêmes que pour les groupes B_l (§ 3). On peut de même supposer que $\theta_\alpha = +1$.

Les racines purement imaginaires sont (λ, μ) et $(\alpha, \bar{\alpha})$, et $\tau = 2(s^2 - p)$. Le tableau des autres racines et des cycles est:

racines	cycles	ordre
$(a, b) \to (a, b)$	(a, b)	0
$(\alpha, \overline{\alpha'}) \to (\alpha, \overline{\alpha'})$	$(\alpha, \overline{\alpha'})$	0
$(a, \lambda) \to (a, \lambda')$	$(a, \lambda), (a, \lambda')$	1
$(a, \alpha) \to (a, \bar{\alpha})$	$(a, \alpha), (a, \bar{\alpha})$	1
$(\alpha, \beta) \to (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$	$(\alpha, \beta), (\bar{\alpha}, \beta), (\bar{\alpha}, \bar{\beta}), (\alpha, \bar{\beta})$	2
$(\alpha, \lambda) \to (\bar{\alpha}, \lambda')$	$(\alpha, \lambda), (\bar{\alpha}, \lambda), (\bar{\alpha}, \lambda'), (\alpha, \lambda')$	2

1) C, p. 79 et G. P., p. 70.

2) G. P., p. 70.

Pour que tout cycle soit d'ordre pair ou zéro il faut et il suffit ou bien que $q=0$ ou bien que $p=s=0$.

(i) $q=0$. L'automorphie est définie par

$+$	$(\bar{x}^\alpha + \bar{x}^{\bar{\alpha}}) = (x^\alpha + x^{\bar{\alpha}})$	$(\alpha = 1, 2, \dots, p)$
$-$	$(\bar{x}^\alpha - \bar{x}^{\bar{\alpha}}) = -(x^\alpha - x^{\bar{\alpha}})$ $\bar{x}^\lambda = -x^\lambda$	$(\lambda = 2p+1, \dots, 2p+s = l)$.

Nous avons alors $\varrho = p, \sigma = l - p$ et $\tau = 2(s^2 + p)$, donc

$$\delta = \varrho - \sigma - \tau = -l - 2s^2.$$

L'automorphie, exprimée à l'aide des opérations S, est

$$\Pi S_{\alpha\bar{\alpha}} . \Pi S_{\lambda\lambda'} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p; \lambda = 2p+1, \dots, l).$$

(ii) $p = s = 0$. L'involution est l'identité, et nous avons le groupe réel normal de caractère l.

En résumé, les groupes réels du type C_l *sont:*

(i) *les groupes de caractère* $(-l - 2s^2)$ *où* $(l - s) = 0, 2, 4, \dots, 2[l/2]$, *définis par les involutions*

$$\Pi S_{\alpha\bar{\alpha}} . \Pi S_{\lambda\lambda'} (\alpha = 1, 2, \dots, p; \bar{\alpha} = 2p+1-\alpha; \lambda = 2p+1, \dots, 2p+s = l).$$

(ii) *le groupe normal, de caractère* l.

5. Les groupes D_l $(l \geq 4)$.

Les racines caractéristiques sont[1])

$$(i, j) = (x^i - x^j)$$

où $i, j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$; $i \neq \pm j$ et $x^{-i} = -x^i$.

Les opérations S_α sont[2])

$$S_{ij}(\omega) = \omega - (m_i - m_j) . (i, j) \quad \text{où} \quad m_{i'} = -m_i.$$

Prenons d'abord le cas où $l > 4$. Est associée à toute racine (i, j) une seconde racine orthogonale à (i, j), determinée au signe près, telle que toute autre racine orthogonale à la première est également orthogonale à la seconde; cette racine est (i, j'). Toute automorphie du système doit laisser invariant l'ensemble des paires de racines ainsi définies. Or,

$$(i, j) + (i, j') = 2x^i \quad \text{et} \quad (i, j') - (i, j) = 2x^j;$$

une automorphie laisse donc invariant l'ensemble des quantités $x^i (i = \pm 1, 2, \dots, \pm l)$. Il en résulte que les involutions du système D_l $(l > 4)$ sont les mêmes que celles des systèmes B_l, C_l (§§ 3, 4).

Dans le cas où $l = 4$, M *Cartan* a fait la remarque[3]) qu'il y a trois

[1]) C, p. 79 et G P., p. 71.
[2]) G. P., p. 71.
[3]) G. R., p. 286.

systèmes de quantités qui peuvent jouer le rôle des quantités $(\pm x^i)$, et que toute involution du système de racines doit laisser invariant au moins un de ces systèmes de quantités. Toute involution est alors équivalente à une involution de la forme que nous avons trouvée dans le cas $l > 4$.

Dans tous les cas, $l \geqq 4$, les racines purement imaginaires sont (λ, μ) et $(\alpha, \bar{\alpha})$, et $\tau = 2s(s-1) + 2p$.

Le tableau des autres racines et des cycles est:

racines	cycles	ordre
$(\alpha', \bar{\alpha}) \rightarrow (\alpha', \bar{\alpha})$ $(a, b) \rightarrow (a, b)$	$(\alpha', \bar{\alpha})$ (a, b)	0 0
$(a, \alpha) \rightarrow (a, \bar{\alpha})$	(a, α), $(a, \bar{\alpha})$	1
$(\alpha, \beta) \rightarrow (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ $(a, \lambda) \rightarrow (a, \lambda')$	(α, β), $(\bar{\alpha}, \beta)$, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $(\alpha, \bar{\beta})$ (a, λ), (a, μ), (a, λ'), (a, μ')	2
$(\lambda, \alpha) \rightarrow (\lambda', \bar{\alpha})$	(λ, α), $(\lambda, \bar{\alpha})$, $(\mu, \bar{\alpha})$, $(\lambda' \bar{\alpha})$, $(\lambda' \alpha)$, (μ', α)	3

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'existe pas de cycles d'ordre impair est: soit $p = 0$ soit $s < 2$ et $q = 0$.

(i) Si $p = 0$, l'involution est

$$\begin{array}{c|c|l} + & \bar{x}^a = x^a & (a = 1, 2, \ldots, q) \\ \hline - & \bar{x}^\lambda = -x^\lambda & (\lambda = q, +1, \ldots, q+s = l) \end{array}$$

et $\varrho = q$; $\sigma = s$. Or, $\tau = 2s(s-1)$, donc

$$\delta = l - 2s - 2s(s-1) = l - 2s^2.$$

(ii) Si $s < 2$ et $q = 0$, $s = 0$ si l est pair et $s = 1$ si l est impair. On peut choisir les coordonnées (x) de sorte que l'involution devienne

$$\bar{x}^\alpha = -x^{\bar{\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, l; \quad \bar{\alpha} = l + 1 - \alpha)$$

et les racines purement imaginaires sont $\pm(\alpha', \bar{\alpha})$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, [l/2])$, au nombre de $2[l/2]$. L'involution peut s'écrire:

$$\begin{array}{c|c|l} + & (\bar{x}^\alpha - \bar{x}^{\bar{\alpha}}) = (x^\alpha - x^{\bar{\alpha}}) & (\alpha = 1, 2, \ldots, [l/2]) \\ \hline - & (\bar{x}^\beta + \bar{x}^{\bar{\beta}}) = -(x^\beta + x^{\bar{\beta}}) & (\beta = 1, 2, \ldots, [(l+1)/2]), \end{array}$$

et nous avons

$$\varrho = [l/2], \qquad \sigma = [(l+1)/2] \qquad \text{et} \qquad \tau = 2[l/2],$$

d'où

$$\delta = \varrho - \sigma - \tau = -l.$$

Il y a alors deux familles de groupes réels :

(i) *les groupes réels de caractère* $(l - 2s^2)$ $(s = 0, 1, \ldots, l)$ *définis par les involutions*

$$\begin{cases} \bar{x}^a = x^a & (a = 1, 2, \ldots, q) \\ \bar{x}^\lambda = -x^\lambda & (\lambda = q+1, q+2, \ldots, q+s = l); \end{cases}$$

(ii) *le groupe réel de caractère* $-l$ *défini par l'involution*

$$\bar{x}^\alpha = -x^{\bar{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, l; \bar{\alpha} = l + 1 - \alpha).$$

Si $l = 4$ *les involutions*

$$\bar{x}^\alpha = -x^{\bar{\alpha}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{x}^a = x^a \; (a = 1, 2) \\ \bar{x}^\lambda = -x^\lambda \; (\lambda = 3, 4) \end{cases}$$

sont équivalentes et les groupes réels correspondants sont isomorphes. Ecrivons en effet $\xi^i = \{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{4} (x^j) - x^i\}$ où $i, j = 1, 2, 3, 4$. Le système D_4 est $(\pm \xi^i \pm \xi^j)$ et la seconde involution peut s'écrire

$$\begin{cases} \bar{\xi}^3 = \xi^4 \; ; \; \bar{\xi}^4 = \xi^3 \\ \bar{\xi}^1 = -\xi^2 \; ; \; \bar{\xi}^2 = -\xi^1, \end{cases}$$

qui est manifestement équivalente à la premiere involution.

6. Le groupe E_6.

Les racines caractéristiques sont[1)]

$$\begin{cases} (i, j) = (x^i - x^j) \\ (i, j, k) = (x^i + x^j + x^k) \\ (i, j, k)' = -(i, j, k) \\ (000) = -\sum_{i=1}^{6} x^i \\ (000)' = -(000) \end{cases}$$

où $i, j, k = 1, 2, \ldots, 6$ et $i \neq j \neq k \neq i$.

Les opérations S_α sont[2)]

$$\begin{cases} S_{ij}(\omega) = \omega - (m_i - m_j) \; (i, j) \\ S_{ijk}(\omega) = \omega + ({}^1/_3 \Sigma m - m_i - m_j - m_k) \; (i, j, k) \\ S_{000}(\omega) = \omega + {}^1/_3 \Sigma m \,.\, (0\,0\,0). \end{cases}$$

Si une involution échange entre elles deux racines dont la somme ou la différence est une racine, cette dernière est invariante au signe près. Si la

---

1) C., p. 80 et G. P., p. 72.

2) G. P., p 73.

transformée d'une racine est orthogonale à cette racine, les racines orthogonales à toutes deux forment un sous-système invariant. Or, les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} S_{ijl}(k, l) = (i, j, k) \\ S_{lmn}(i, j, k) = (000)', \end{cases}$$

montrent qu'on peut supposer l'une des deux racines égale à (000). L'autre sera de la forme (k, h), et les racines orthogonales seront (i, j) $(i, j \neq k, h)$; elles forment un système du type A_3, dont toute involution admet au moins une racine invariante au signe près (§ 2). Il en résulte que toute involution du système E_6 admet aussi au moins une racine invariante au signe près, et il suit des équations (1) qu'elle est équivalente à une involution qui laisse invariante au signe près la racine (000). Les racines orthogonales à (000), soit (i, j) $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$, forment un système A_5 invariant par une telle involution.

Je dis maintenant qu'il est nécessaire pour que l'involution du système E_6 définisse un groupe réel, que l'involution du système A_5 qu'elle détermine, définisse un groupe réel du type A_5. En effet, la somme de deux racines du système A_5 est toujours une racine du système A_5 si elle est une racine du E_6. De plus une racine purement imaginaire du A_5 est une racine purement imaginaire du E_6. Il en résulte que tout cycle défini dans le système A_5 par l'involution est également un cycle dans le système E_6, et doit par suite être d'ordre pair.

Les involutions du système A_5 qui définissent un groupe réel peuvent être réduites par une permutation des indices à l'une des formes (§ 2) :

(i) $\qquad \bar{x}^\alpha = x^\alpha \; (\alpha = 1, 2, \ldots, 6)$

(ii) $\qquad \bar{x}^\alpha = x_{\bar{\alpha}} \; (\alpha = 1, 2, \ldots, 6 \,;\, \bar{\alpha} = 7 - \alpha)$

$$\text{(iii)}\qquad \begin{cases} \bar{x}^\alpha = -\, x^{\bar{\alpha}} \; (\alpha = 1, 2, \ldots, 2p \,;\, \bar{\alpha} = 2p + 1 - \alpha) \\ \bar{x}^\alpha = -\, x^\alpha \; (\alpha = 2p + 1, \ldots, 2p + q = 6). \end{cases}$$

Chacune de ces involutions définit deux involutions du E_6, la première étant donnée par les équations précédentes, et la seconde étant obtenue en multipliant la premiére par l'opération S_{000}.

Il ne reste qu'à chercher dans chaque cas les cycles non entièrement contenus dans le système A_5.

I : **Si l'involution admet une racine invariante**, nous pouvons supposer que $(000) \to (000)$. Il y a trois cas possibles :

(i) $\qquad \bar{x}^\alpha = x^\alpha \; (\alpha = 1, \ldots, 6)$.

Cette involution est l'identité, qui donne le groupe réel normal, de caractère 6.

(ii) $\qquad \bar{x}^\alpha = x^{\bar{\alpha}} (\alpha = 1, 2, \ldots, 6 \,;\, \bar{\alpha} = 7 - \alpha)$.

La racine $(\gamma, \bar{\gamma})$ est purement imaginaire, $(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma)$ se transforme en $(\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ et ces deux dernières forment un cycle d'ordre un. Cette involution ne définit donc pas de groupe réel.

$$
\text{(iii)} \quad \begin{cases} \overline{x}^{\alpha} = S_{000}(-\overline{x}^{\alpha}) & (\alpha = 1, 2, \ldots, p \text{ et } 7-p, 8-p, 8-p, \ldots, 6\,;\ \overline{\alpha} = 7-\alpha) \\ \overline{x}^{a} = S_{000}(-x^{a}) & (a = p+1, \ldots, p+q = 6-p) \end{cases}
$$

Si $q = 0$, il n'y a pas de racines purement imaginaires. Il n'y a donc pas de cycles d'ordre non nul, et il existe un groupe réel défini par cette involution, qui peut se mettre sous la forme

$$
\begin{array}{c|c|l}
+ & \Sigma(\overline{x}^{i}) = \Sigma(x^{i}) & (i = 1, 2, \ldots, 6) \\
 & (\overline{x}^{\alpha} - \overline{x}^{\overline{\alpha}}) = (x^{\alpha} - x^{\overline{\alpha}}) & (\alpha = 1, 2, 3) \\
\hline
- & (\overline{x}^{1} - \overline{x}^{\beta}) + (\overline{x}^{6} - \overline{x}^{\overline{\beta}}) = -(x^{1} - x^{\beta}) - (x^{6} - x^{\overline{\beta}}) & (\beta = 2, 3).
\end{array}
$$

Donc $\varrho = 4$, $\sigma = 2$, $\tau = 0$ et $\delta = \varrho - \sigma - \tau = 2$.

L'involution est le produit de la transformation $\overline{x}^{i} = -x^{i}$ par l'opération $S_{000}\, \Pi\, S_{\alpha\overline{\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Si $q = 2$, $(3, 4)$ est une racine purement imaginaire.

$$(4, \alpha, \beta) \rightarrow S_{000}(4, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (3, \alpha, \beta)$$

et ces deux racines forment un cycle d'ordre un.

Si $q = 4$, les racines purement imaginaires sont (a, b) $(a, b = 2, 3, 4, 5)$ et $\tau = 12$. Le tableau des racines qui n'appartiennent pas au système A_5 et des cycles qui les contiennent est :

racines	cycles	ordre
$(a, \alpha, \overline{\alpha}) \rightarrow S_{000}(a, \alpha, \overline{\alpha})' = (b, c, d)$ $(a, \alpha, \overline{\alpha})' \rightarrow (b, c, d)'$	— —	— —
$(a, b, \alpha) \rightarrow S_{000}(a, b, \overline{\alpha})' = (c, d, \alpha)$	(a, b, α), (c, b, α), (c, d, α), (a, d, α)	2

et il n'y a aucun cycle d'ordre impair. L'involution est définie par :

$$
\begin{array}{c|c|l}
+ & \Sigma(\overline{x}^{i}) = \Sigma(\overline{x}^{i}) & \\
 & (\overline{x}^{1} - \overline{x}^{6}) = (x^{1} - x^{6}) & \\
\hline
- & (\overline{x}^{a} - \overline{x}^{5}) = -(x^{a} - x^{5}) & (a = 2, 3, 4) \\
 & 2\overline{x}^{5} - \overline{x}^{1} - \overline{x}^{6} = -2x^{5} + x^{1} + x^{6} &
\end{array}
$$

et $\varrho = 2$, $\sigma = 4$ et $\tau = 12$, donc

$$\delta = -14.$$

L'involution est le produit de la transformation $\overline{x} = -x^{i}$ par l'opération $S_{000}\, S_{16}$.

Si $q = 6$, les racines purement imaginaires sont (a, b) $(a, b = 1, 2, \ldots, 6)$. La racine $(1, 2, 3)$ se transforme en $S_{000}(1, 2, 3)' = (4, 5, 6)$ et les racines $(1, 2, 3)$, (4, 2, 3), (4, 5, 3), avec leurs transformées, forment un cycle d'ordre trois. Il n'y a donc pas de groupe réel.

II : **Si l'involution n'admet pas de racines invariantes** nous pouvons supposer que $(000) \rightarrow -(000)$. Toutes les involutions ainsi déterminées, à l'exception de deux, laissent invariante au moins une racine. Ces deux involutions sont :

(i) $$\bar{x}^a = -x^a \qquad (a = 1, 2, \ldots, 6).$$

Cette involution définit le groupe réel unitaire, de caractère -78.

(ii) $$\bar{x}^\alpha = S_{000}(x^{\bar{\alpha}}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 6 ; \ \bar{\alpha} = 7 - \alpha).$$

Les racines purement imaginaires sont $(\alpha, \bar{\alpha})$, $\pm(000)$ et $\pm(\alpha, \beta, \gamma)$ où les indices α, β, γ ; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ sont tous différents. Il y a donc 24 racines purement imaginaires. Le tableau des racines non purement imaginaires qui n'appartiennent pas au système A_5, et des cycles qui les contiennent est alors

racines	$(\alpha, \bar{\alpha}, \beta), \rightarrow S_{000}(\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\gamma, \bar{\gamma}, \beta)'$
cycles	$(\alpha, \bar{\alpha}, \beta)$, $(\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $(\gamma, \bar{\gamma}, \beta)$,$' = (\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) + (000)$, $(\gamma, \bar{\gamma}, \bar{\beta})'$
ordre	2

Il existe alors un groupe réel. L'involution est

$+$	$(\bar{x}^1 + \bar{x}^6 - \bar{x}^\beta - \bar{x}^{\bar{\beta}}) = (x^1 + x^6 - x^\beta - x^{\bar{\beta}})$	$(\beta = 2, 3)$
$-$	$(\bar{x}^\alpha - \bar{x}^{\bar{\alpha}}) = -(x^\alpha - x^{\bar{\alpha}})$ $\Sigma(\bar{x}^i) = -\Sigma(x^i)$	$(\alpha = 1, 2, 3)$

d'où $\varrho = 2, \sigma = 4, \tau = 24$ et

$$\delta = -26.$$

L'involution peut s'écrire $S_{000}\, \Pi\, S_{\alpha\bar{\alpha}} (\alpha = 1, 2, 3)$.

En résumé, il y a cinq groupes réels du type E_6 :

(i) *le groupe réel normal de caractère 6.*

(ii) *le groupe de caractère 2 défini par l'involution* $S_{000}\, \Pi\, S_{\alpha\bar{\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2, 3 ; \ \bar{\alpha} = 7 - \alpha)$ multipliée par $\bar{x}^i = -x^i$.

(iii) *le groupe de caractère — 14 défini par le produit de* $S_{000}\, S_{16}$ *et de* $\bar{x}^i = -x^i$.

(iv) *le groupe de caractère —26 défini par*

$$S_{000}\, \Pi\, S_{\alpha\bar{\alpha}}.$$

(v) *le groupe unitaire de caractère —78.*

7. Le groupe E_7.

Les racines caractéristiques sont[1]

$$\begin{cases} (i,j) = x^i - x^j \\ (i,j,k) = (x^i + x^j + x^k) \\ (i,j,k)' = -(i,j,k) \\ (00i) = x^i - \sum_{j=1}^{7} (x^j) \\ (00i)' = -(00i) \end{cases}$$

où $i, j, k = 1, 2 \ldots, 7$, ces indices étant tous inégaux.

Les opérations S_α sont[2]

$$\begin{cases} S_{ij}\,(\omega) = \omega - (m_i - m_j)\,.\,(i,j) \\ S_{ijk}\,(\omega) = \omega + \left(\frac{1}{3}\Sigma(m) - m_i - m_j - m_k\right).\,(i,j,k) \\ S_{00i}\,(\omega) = \omega + \left(\frac{1}{3}\Sigma(m) - m_i\right).\,(00i). \end{cases}$$

Toute involution du système laisse invariant l'ensemble des paires de racines égales et opposées, dont il y a un nombre impair. Au moins une de ces paires est alors invariante, et au moins une racine est invariante au signe près. Il suit des équations

$$\begin{cases} S_{jkh}\,(i,j,k) = (i,h) \\ S_{00h}\,(i,h) = (00i) \\ S_{7i}\,(00\,i) = (007), \end{cases}$$

qu'il existe une automorphie qui transforme une racine quelconque en $\pm(007)$, d'où il résulte que toute involution est équivalente à une involution qui laisse invariante au signe près la racine (007). Les racines orthogonales à (007), soit $(i,j,7)$, $(i,j,7)'$ et (i,j) $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, forment un système D_6 invariant par l'involution, système qui peut s'exprimer sous la forme

$$\pm\,\xi^i \pm \xi^j \qquad (i,j = 1, 2, \ldots, 6\,;\; i \neq j$$

où

$$\xi^i = \tfrac{1}{2}\,\{\,(i,j,7) + (i,j)\,\}$$

Le système E_7 est alors

$$\begin{cases} \pm\,(i,j,7) = \pm\,(\xi^i + \xi^j)\,; \quad (i,j) = (\xi^i - \xi^j \\ \dfrac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{6} \varepsilon_i\,\xi^i \pm \xi^0\right\} \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad \Pi\,\varepsilon_j = -1 \quad \text{et} \quad \xi^0 = (007) \\ \pm\,(007) = \pm\,\xi^0. \end{cases}$$

---

[1]) C., p. 80 et G. P., p. 76.
[1]) G. P., p. 77.

Si $\omega = \omega_h \xi^h + \omega_0 \xi^0$, nous avons les équations suivantes:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S_{ij}(\omega) = \omega - (\omega_i - \omega_j)(i,j) \\ S_{ij7}(\omega) = \omega - (\omega_i + \omega_j)(i,j,7) \\ S_{007}(\omega) = \omega - 2\,\omega_0 \quad (007). \end{array} \right.$$

Si l'involution du E_7 définit un groupe réel, l'involution qu'elle détermine dans le système D_6 définit un groupe réel du type D_6. En effet, on démontre comme pour le groupe E_6 que tout cycle défini dans le système E_6 par l'involution est également un cycle dans le système E_7.

Les involutions du D_6 qui définissent un groupe réel peuvent être réduites, en effectuant une permutation des indices, à l'une des formes (§ 5):

$$\text{(i)} \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\xi}^a = \xi^a & (a = s+1, s+2, \ldots, s+q = 6) \\ \bar{\xi}^\lambda = -\xi^\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots, s) \end{array} \right.$$

$$\text{(ii)} \quad \bar{\xi}^\alpha = \theta_\alpha \xi^{\bar{\alpha}} \quad (\alpha = 1, \ldots, 6\,;\ \bar{\alpha} = 7 - \alpha\,;\ \theta_\alpha = \theta_{\bar{\alpha}} = \pm 1)$$

S'il correspond à l'une des ces involutions, une involution du système E_7' il en correspondent deux, définies par les équations précédentes auxquelles on ajoute

$$\bar{\xi}^0 = \pm \xi^0 .$$

Pour que les équations (i) définissent de cette manière des involutions du E_7, il faut et il suffit que s soit pair. En effet, la racine

$$\tfrac{1}{2}\left\{ \Sigma\, \varepsilon_i \xi^i \pm \xi^0 \right\}$$

se transforme en

$$\tfrac{1}{2}\left\{ \Sigma\, \bar{\varepsilon}_i \xi^i \pm \xi^0 \right\} \qquad \text{où} \qquad \bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a \quad \text{et} \quad \varepsilon_\lambda = -\varepsilon_\lambda .$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette expression soit une racine est:

$$\prod_{i=1}^{6} \bar{\varepsilon}_i = -1 .$$

Or, $\Pi\, \bar{\varepsilon}_i = (-1)^s\, \Pi\, \varepsilon_i = -(-1)^s$ et la condition est alors que s soit pair. Les équations (ii) définissent toujours une involution du E_7, car $\Pi(\theta_\alpha) = 1$. Remarquons que nous pouvons changer de signe un nombre pair des (ξ^i) sans changer la forme du système E_7. De cette manière on pourrait s'arranger à avoir

$$\theta_1 = \theta_6 = \pm 1\,;\ \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = +1 .$$

Cherchons dans les divers cas les cycles non entièrement contenus dans le système D_6.

I: **Les involutions qui admettent une racine invariante** sont toutes équivalentes à une involution par laquelle $(007) \to (007)$ et $\bar{\xi}^0 = \xi^0$.

$$\begin{cases} \bar{\xi}^a = \xi^a & (a = s+1, s+2, \ldots, s+q = 6) \\ \bar{\xi}^\lambda = -\xi^\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots, s, \text{ où } s \text{ est pair}) \\ \bar{\xi}^0 = \xi^0 & \end{cases}$$

Les équations (2) nous permettent d'exprimer cette involution sous la forme

$$\Pi (S_{\lambda\bar{\lambda}} S_{\lambda\bar{\lambda}7}) \quad (\lambda = 1, 2 \ldots, s/2 \,;\, \bar{\lambda} = s + 1 - \lambda).$$

Si $s = 0$, l'involution est l'identité, et le groupe réel qu'elle définit est le groupe normal de caractère 7.

Si $s = 2$, l'involution est $S_{12}\, S_{127}$. La racine (1, 2, 7) est purement imaginaire et la racine (3, 7) se transforme en $(1, 2, 3) = (3, 7) + (1, 2, 7)$. Les racines (3, 7) et (1, 2, 3) forment alors un cycle d'ordre un.

Si $s = 4$, les racines purement imaginaires sont (λ, μ), $(\lambda, \mu, 7)$ et $(\lambda, \mu, 7)'$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$ et $\tau = 24$.

Le tableau des racines qui n'appartiennent pas au D_6 est :

racines	cycles	ordre
$(000) \to (000)$	(000)	0
$(a, 7) \to (00b)'$ $(a, \lambda, \mu) \to (a, \nu, \pi)$	$(a, 7), (a, \lambda, \mu), (00b)', (a, \nu, \pi)$	2
$(\lambda, \mu, \nu) \to (\pi, 7)$ $(a, b, \lambda) \to (00\lambda)'$	$(\lambda, \mu, \nu), (\lambda, \mu, \pi), (\pi, 7), (\nu, 7)$ $(a, b, \lambda), (a, b, \mu), (00\lambda)', (00\mu)'$	2 2

Tout cycle est alors d'ordre pair ou zéro, et il existe un groupe réel. L'involution est

$$\begin{array}{c|c|} + & \begin{array}{c} \bar{\xi}^0 = \xi^0 \\ \bar{\xi}^a = \xi^a \end{array} \\ \hline - & \bar{\xi}^\lambda = -\xi^\lambda \end{array},$$

d'où $\varrho = 3$, $\sigma = 4$. $\tau = 24$ et

$$\delta = \varrho - \sigma - \tau = -25.$$

Si $s = 6$, la racine (1, 7) se transforme en $(001)'$, et les racines (1, 7), (6, 7) et (2, 5, 6) forment avec leurs transformées $(001)'$, $(006)'$ et (134), un cycle d'ordre trois.

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \bar{\xi}^\alpha = \xi^{\bar{\alpha}} & (\alpha = 1, 2, \ldots, 6 \,;\, \bar{\alpha} = 7 - \alpha) \\ \bar{\xi}^0 = \xi^0, & \end{cases}$$

involution qui peut s'écrire $\Pi\, S_{\alpha\bar{\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

La racine $(\alpha, 7)$ est transformée en $(\bar{\alpha}, 7)$, et la racine $(\alpha, \bar{\alpha})$ est purement imaginaire. Les deux racines $(\alpha, 7)$ et $(\bar{\alpha}, 7)$ forment alors un cycle d'ordre un.

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} \bar{\xi}^1 = -\xi^6 \,; \qquad \bar{\xi}^6 = -\xi^1 \\ \bar{\xi}^\beta = \xi^{\bar{\beta}} \qquad\qquad\qquad\qquad (\beta = 2,3,4,5\,;\ \bar{\beta} = 7-\alpha). \\ \bar{\xi}^0 = \xi^0. \end{cases}$$

Cette involution est $S_{167}\, S_{25}\, S_{34}$. Les racines purement imaginaires sont $\pm\,(1, 6, 7)$, $\pm\,(2, 5)$ et $\pm\,(3, 4)$, et $\tau = 6$. Le tableau des racines qui n'appartiennent pas au système D_6, avec les cycles qui les contiennent, est:

racines	cycles	ordre
$(000), (\alpha, 7), (00\,\alpha)$, $(\alpha, \beta, \bar{\beta})$ sont réelles	$(000), (\alpha, 7), (00\,\alpha)$, $(\alpha, \beta, \bar{\beta})$ respectivement	0
$(\beta, 7) \to (\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ $(\alpha, \beta, \gamma) \to (\alpha, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ $(\beta, \gamma, \bar{\gamma}) \to (00\,\beta)'$	$(\beta, 7), (\bar{\beta}, 7), (\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), (\alpha, \bar{\alpha}, \beta)$ $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \bar{\beta}, \gamma), (\alpha, \bar{\beta}, \bar{\gamma}), (\alpha, \beta, \bar{\gamma})$ $(\beta, \gamma, \bar{\gamma}), (\bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}), (00\,\beta)', (00\,\bar{\beta})'$	2

où $\alpha = 1, 6\,;\ \beta, \gamma = 2, 3, 4, 5.$

Il n'y a pas de cycles d'ordre impair et l'involution est définie par les équations:

$$\begin{array}{c|c|l} + & \begin{array}{c} \bar{\xi}^0 = \xi^0 \\ (\bar{\xi}^\alpha + \theta_\alpha \bar{\xi}^{\bar{\alpha}}) = (\xi^\alpha + \theta_\alpha\, \xi^{\bar{\alpha}}) \end{array} & \\ \hline - & (\bar{\xi}^\alpha - \theta_\alpha \bar{\xi}^{\bar{\alpha}}) = -\,(\xi^\alpha - \theta_\alpha\, \xi^{\bar{\alpha}}) & (\alpha = 1, 2, 3)\,; \end{array}$$

$\varrho = 4, \sigma = 3, \tau = 6$ et $\delta = -\,5.$

II: Les involutions qui n'admettent pas de racines invariantes. Elles sont toutes équivalentes à une involution pour laquelle $(007) \to -(007)$ et $\bar{\xi}^0 = -\,\xi^0$. Or toutes les involutions définies par les équations (i), (ii) et (iii), avec $\bar{\xi}^0 = -\,\xi^0$, laissent invariante au moins une racine, à l'exception de l'involution:

$$\begin{cases} \bar{\xi}^0 = -\,\xi^0 \\ \bar{\xi}^\lambda = -\,\xi^\lambda \qquad\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Cette involution est alors la seule qu'il reste à considérer. Elle définit le groupe réel unitaire de caractère — 133, et peut s'écrire:

$$S_{007}\, \Pi\, (S_{\lambda\bar{\lambda}}\, S_{\lambda\bar{\lambda}7}) \qquad \text{où} \qquad \lambda = 1, 2, 3 \text{ et } \bar{\lambda} = 7 - \lambda.$$

Les groupes réels du type E_7 *sont alors*:
(i) *le groupe normal de caractère* 7.
(ii) *le groupe de caractère* — 5 *défini par*

$$S_{167}\ S_{25}\ S_{34}.$$

(iii) *le groupe de caractère* — 25 *défini par*

$$S_{12}\ S_{127}\ S_{34}\ S_{347}.$$

(iv) *le groupe réel unitaire de caractère* — 133 *défini par*

$$S_{007}\ \Pi(S_{\lambda\bar\lambda}\ S_{\lambda\bar\lambda 7}).$$

8. **Le groupe** E_8.

Les racines caractéristiques sont[1]

$$\begin{cases} (i, j) = (x^i - x^j) \\ (i, j, k) = (x^i + x^j + x^k) \\ (i, j, k)' = -(i, j, k) \end{cases}$$

où $i, j, k = 1, 2, \ldots, 9$ et $\Sigma(x) = 0$.

Les opérations S_α sont[2]:

$$\begin{cases} S_{ij}(\omega) = \omega - (m_i - m_j).(i, j) \\ S_{ijk}(\omega) = \omega + \left(\frac{1}{3}\Sigma(m) - m_i - m_j - m_k\right).(i, j, k). \end{cases}$$

Il résulte des équations

$$\begin{cases} S_{1i}\ S_{2j}(i, j) = (1, 2) \\ S_{ijk}\ S_{k1}(i, j, k)(1, 2), \end{cases}$$

où nous convenons de dire que S_{ii} représente l'identité, qu'il existe une automorphie qui transforme une racine quelconque en (1, 2). Si alors une involution laisse invariante une racine au signe près, elle est équivalente à une involution qui laisse invariante au signe près la racine (1, 2). Les racines orthogonales à (1, 2) forment un ensemble invariant par une telle involution. Ces racines sont

$$(i, j),\ \pm(i, j, k) \text{ et } \pm(1, 2, i) = \pm\left\{x^i - \sum_{h=3}^{9}(x^i)\right\}\ (i, j, k = 3, 4, \ldots, 9),$$

qui forment un système E_7 (§ 7). Une involution de ce système E_7 laisse invariante au signe près au moins une racine, que l'on peut toujours supposer égale à $x^9 - \sum_{i=3}^{9}(x^i) = (1, 2, 9)$.

Si une involution du E_8 échange entre elles deux racines, elle laisse invariantes au signe près la somme et la différence de ces racines, et si l'une de ces quantités est une racine, le problème se réduit au cas précédent.

---

[1]) C., p. 80 et G. P., p. 80.
[2]) G. P., p 80; Nous ne supposons pas ici que $\sum m_i = 0$.

Si enfin une involution échange entre elles deux racines orthogonales, on peut supposer l'une d'elles égale à $(1, 2)$ et l'autre à $(1, 2, 9)$. Dans tous les cas alors, une involution est équivalente à une involution qui laisse invariant l'ensemble des quatre racines :

(3) $$\pm (1, 2), \qquad \pm (1, 2, 9).$$

Les racines qui ne sont orthogonales ni à $(1, 2)$ ni à $(1, 2, 9)$ forment également un sous-système invariant. Ce sont les racines :

(4) $$\pm (1, a), \quad \pm (2, a), \quad \pm (1, 9, a), \quad \pm (2, 9, a) \qquad (a = 3, 4, \ldots, 8).$$

Il est de même des racines orthogonales à $(1, 2)$ et à $(1, 2, 9)$:

(5) $$(a, b), \quad \pm (a, b, 9)$$

et ces trois sous-systèmes (3), (4) et (5) forment un système du type D_8 invariant par l'involution, soit :

$$(i, j), \quad \pm (i, j, 9) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 8).$$

Ce système peut s'écrie

$$\pm \xi^i \pm \xi^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 8)$$

où

$$\xi^i = \tfrac{1}{2} \{ (i, j) + (i, j, 9) \},$$

et le système E_8 devient :

$$\begin{cases} \pm \xi^i \pm \xi^j \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \xi^i \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = -1. \end{cases}$$

Si une involution du E_8 qui laisse invariant ce système D_8 définit un groupe réel, l'involution du système D_8 qu'elle détermine, définit également un groupe réel, car tout cycle du D_8 est également un cycle du E_8. L'involution du D_8 peut se réduire alors, par une permutation des indices, à l'une des formes (§ 5) :

(i) $$\begin{cases} \bar{\xi}^\lambda = -\xi^\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots, s) \\ \bar{\xi}^a = \xi^a & (a = s+1, s+2, \ldots, s+q = 8) \end{cases}$$

(ii) $$\bar{\xi}^\alpha = \theta_\alpha \xi^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 8 ; \bar{\alpha} = 9 - \alpha ; \theta_\alpha = \theta_{\bar{\alpha}} = \pm 1).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (i) définissent une involution du E_8 est que s soit pair, car elles transforment la racine $\frac{1}{2} \Sigma (\varepsilon_i \xi^i)$ en $\frac{1}{2} \Sigma (\bar{\varepsilon}_i \xi^i)$ où $\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a$ et $\bar{\varepsilon}_\lambda = -\varepsilon_\lambda$, et il faut et il suffit pour que cette quantité soit une racine que s soit pair. Les équations (ii) au contraire définissent toujours une involution du système E_8. Cette involution laisse invariantes les deux racines orthogonales $(\xi^1 + \theta_1 \xi^8)$ et $(\xi^2 + \theta_2 \xi^7)$; elle est alors équivalente à une involution qui laisse invariantes les racines $(1, 2)$ et $(1, 2, 9)$, et si nous exprimons celle-ci sous l'une des formes (i) et (ii), les racines (1, 2) et (1, 2, 9) deviendront $(\xi^i \pm \xi^j)$ où $\bar{\xi}^i = \xi^i$ et $\bar{\xi}^j = \xi^j$. L'involution est alors de la forme (i), d'où il résulte que toute involution définie par des équations de la forme (ii) est équivalente à une involution définie par des équations de la forme (i).

Cherchons pour les différentes valeurs de s les cycles non entièrement contenus dans le système D_8.

Si $s = 0$, l'involution est l'identité et on obtient le groupe réel normal de caractère 8.

Si $s = 2$, la racine $\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i)$ se transforme en $\left\{\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i) - (\varepsilon_1 \xi^1 + \varepsilon_2 \xi^2)\right\}$ et la racine $(\varepsilon_1 \xi^1 + \varepsilon_2 \xi^2)$ est purement imaginaire. Nous avons alors un cycle d'ordre un.

Si $s = 4$, les racines purement imaginaires sont

$$(\pm \xi_\lambda \pm \xi_\mu) \qquad \text{et} \qquad \tau = 24.$$

Les racines qui n'appartiennent au D_8 et les cycles qui les contiennent sont :

racines	$\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i) \rightarrow \frac{1}{2}\Sigma(\bar{\varepsilon}_i \xi^i)$ où $\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a$; $\bar{\varepsilon}_\lambda = -\varepsilon_\lambda$
cycles	$\left\{\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i), \left\{\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i) - (\varepsilon_1 \xi^1 + \varepsilon_2 \xi^2)\right\}, \left\{\frac{1}{2}\Sigma(\bar{\varepsilon}_i \xi^i)\right\}, \left\{\frac{1}{2}\Sigma(\bar{\varepsilon}_i \xi^i) + (\varepsilon_1 \xi^1 + \varepsilon_2 \xi^2)\right\}\right.$
ordre	2

Tout cycle est alors d'ordre pair. L'involution étant :

$$\begin{array}{c|c|} + & \bar{\xi}^a = \xi^a \\ \hline - & \bar{\xi}^\lambda = -\xi^\lambda \end{array},$$

$\rho = \sigma = 4$ et $\delta = \rho - \sigma - \tau = -24$.

L'involution peut s'exprimer sous la forme :

$$S_{12}\, S_{34}\, S_{129}\, S_{349}.$$

En effet,

$(\xi^1 - \xi^2) = (1, 2)$, $(\xi^3 - \xi^4) = (3, 4)$, $(\xi^1 + \xi^2) = (1, 2, 9)$ et $(\xi^3 + \xi^4) = (3, 4, 9)$.

Si $s = 6$, les racines

$$\left\{\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i)\right\}, \left\{\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i) - (\varepsilon_1 \xi^1 + \varepsilon_2 \xi^2)\right\}$$

et

$$\left\{\frac{1}{2}\Sigma(\varepsilon_i \xi^i) - (\varepsilon_1 \xi^1 + \varepsilon_2 \xi^2) - (\varepsilon_3 \xi^3 + \varepsilon_4 \xi^4)\right\}$$

forment avec leurs transformées un cycle d'ordre trois.

Si $s = 8$, toute racine est purement imaginaire et le groupe réel défini par l'involution est le groupe unitaire de caractère -248.

En résumé, il y a trois groupes réels du type E_8:
(i) *le groupe normal de caractère 8.*
(ii) *le groupe réel de caractère — 24 défini par*

$$S_{12}\, S_{34}\, S_{129}\, S_{349}\,.$$

(iii) *le groupe réel unitaire de caractère — 248 défini par*

$$\Pi(S_{\lambda\bar\lambda}\, S_{\lambda\bar\lambda 9}) \quad (\lambda = 2, 4, 6, 8\,;\ \bar\lambda = \lambda - 1).$$

9. Le groupe F_4.

Les racines caractéristiques sont[1]:

$$\begin{cases} (i) = x^i \\ (i, j) = (x^i - x^j) \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i x^i \qquad\qquad (\varepsilon_i = \pm 1) \end{cases}$$

où $i, j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\,;\ i \neq \pm j$.

Les opérations S_α sont[2]:

$$\begin{cases} S_i(\omega) = \omega - 2\, m_i\,.\,(i) \\ S_{ij}(\omega) = \omega - (m_i - m_j)\,.\,(i, j) \\ S_{\varepsilon_i}(\omega) = \omega - (\Sigma\, \varepsilon_i m_i)\,.\left(\frac{1}{2}\Sigma\, \varepsilon_i x^i\right). \end{cases}$$

Les seules racines qui soient la somme de deux autres sont les racines (i, j). Elles forment alors un système du type D_4 invariant par toute involution du système F_4.

Les racines (i) et $\left(\frac{1}{2}\Sigma\, \varepsilon_i x^i\right)$ peuvent toutes s'exprimer sous la forme $\frac{1}{2}\left\{(i,j) + (k,l)\right\}$ où (i, j), (k, l) sont deux racines orthogonales, les indices n'étant pas nécessairement tous distincts. Inversement, toute expression de cette forme est une racine. Il en résulte que toute automorphie du D_4 laisse invariant le F_4, et que toute involution du D_4 définit une involution bien determinée du F_4. De plus, deux involutions équivalentes du D_4 définissent deux involutions équivalentes du F_4 et réciproquement. Si l'involution du système F_4 définit un groupe réel, il en est de même de l'involution du D_4, car tout cycle du D_4 est un cycle du F_4. Toute involution du D_4 qui définit un groupe réel est équivalente à une involution de la forme (§ 5):

$$\begin{cases} \bar{x}^\alpha = x^\alpha & (\alpha = 1, 2 \ldots, q) \\ \bar{x}^\lambda = -x^\lambda & (\lambda = (q+1), (q+2), \ldots, (q+s) = 4). \end{cases}$$

Si $q \neq 0$, les racines purement imaginaires sont (λ) et (λ, μ), et $\tau = 2 s^2$.

Si $s = 0$, l'involution est l'identité, et nous aurons le groupe réel normal de caractère 4.

---

[1]) C., p. 80 et G. P., p. 82.
[2]) G. P., p. 82.

Si $s = 1$, $\{ \frac{1}{2} \Sigma x^i \} \rightarrow \{ \frac{1}{2} \Sigma (x^i) - x^4 \}$, et ces deux racines forment un cycle d'ordre un. De même, si $s = 2$, les deux racines $\{ \frac{1}{2} \Sigma x^i \}$ et $\{ \frac{1}{2} \Sigma (x^i) - (x^3 + x^4) \}$ forment un cycle d'ordre un.

Si $s = 3$, les racines non purement imaginaires qui n'appartiennent pas au système D_4 sont:

racines	(a)	$\frac{1}{2} \Sigma (\varepsilon_i x^i) \rightarrow \frac{1}{2} \Sigma (\bar{\varepsilon}_i x^i)$ où $\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a$; $\bar{\varepsilon}_\lambda = - \varepsilon_\lambda$
cycles	(a)	$\{ \frac{1}{2} \Sigma (\varepsilon_i x^i) \}$; $\{ \frac{1}{2} \Sigma (\varepsilon_i x^i) - \varepsilon_4 x^4 \}$; $\{ \frac{1}{2} \Sigma (\bar{\varepsilon}_i x^i) \}$; $\{ \frac{1}{2} \Sigma (\bar{\varepsilon}_i x^i) + \varepsilon_4 x^4 \}$
ordre	0	2

et tout cycle est d'ordre pair ou zéro. L'involution est

$$\begin{array}{c|c|l} + & \bar{x}^1 = x^1 & \\ \hline - & \bar{x}^\lambda = - x^\lambda & (\lambda = 2, 3, 4) \end{array}$$

Donc, $\varrho = 1$, $\sigma = 3$, $\tau = 18$ et $\delta = \varrho - \sigma - \tau = - 20$. L'involution peut se mettre sous la forme $S_{23} S_{23'} S_4$.

Si $s = 4$, toute racine est purement imaginaire, et nous aurons le groupe réel unitaire de caractère $- 52$. L'involution peut s'écrire

$$S_{12} S_{34} S_{12'} S_{34'}.$$

10. Le groupe G_2

Les racines caractéristiques sont [1]:

$$\begin{cases} (i) = x^i \\ (i)' = - (i) \\ (i, j) = (x^i - x^j) \end{cases}$$

où $i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$ et $\Sigma (x^i) = 0$.

Les opérations S sont [2]

$$\begin{cases} S_i (\omega' = \omega + (\Sigma m_i) - 3 m_i) . (i) \\ S_{ij} (\omega' = \omega - (m_i - m_i) . (i, j) . \end{cases}$$

Toute involution du système G_2 définit une involution du systéme A_2 qui se compose des racines (i, j), et inversement. Si la première définit un groupe réel, il en est de même de la seconde, car tout cycle du A_2 est un cycle du G_2. Par une permutation des indices toute involution du A_2 qui détermine un groupe réel peut être réduite à l'une des formes (§ 2):

[1]) C., p. 81 et G P., p. 84.
[2]) G. P., p. 84; $\sum m_i$ n'est pas supposé égal à zéro.

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{(i)} & \text{l'identité.}\\ \text{(ii)} & \bar{x}^i = - x^{4-i}\\ \text{(iii)} & \bar{x}^i = - x_i, \qquad \text{qui est la transformation } S_{12}S_3.\end{array}\right.$$

La première et la dernière donnent nécessairement les groupes réels normal et unitaire, respectivement de caractère 2 et -14.

L'involution (ii) transforme la racine (1) en (3), et leur différence est la racine purement imaginaire (1, 3). Il existe alors un cycle d'ordre un, et il n'y a pas de groupe réel qui correspond à cette involution.

DEUXIÈME PARTIE

Les représentations linéaires réelles des groupes infinitésimaux semi-simples réels

CHAPITRE III.

1. Généralités[1]: Une représentation d'ordre n d'un groupe infinitésimal est un espace vectoriel à n dimensions dans lequel il est défini un ensemble de matrices (ou tenseurs à un indice covariant et un indice contravariant) associées aux éléments X du groupe. Elles satisfont aux conditions suivantes:

(i) à chaque élément X du groupe est associée une matrice $\mathcal{X}$ et une seule, et inversement;

(ii) $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$ si $X + Y = Z$

(iii) $a\,\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ si $a X = Y$

(iv) $\mathcal{X}\,\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\,\mathcal{Y} = \mathcal{Z}$ si $[X, Y] = Z$.

Nous pouvons sans ambiguité représenter les éléments du groupe et les matrices qui leur correspondent par le même symbole X. Représentons par x, y, ... les vecteurs de l'espace. Un système de coordonnées étant défini dans l'espace d'une représentation, les vecteurs de coordonnées seront appelés *une base de la représentation*, et les matrices associées aux éléments d'une base du groupe seront appelées *une structure de la représentation.*

Si le groupe est complexe, l'espace de la représentation est nécessairement à variables complexes; mais si le groupe est réel, l'espace peut être ou bien à variables réelles ou bien à variables complexes. Dans le premier cas la représentation est dite réelle et dans le second elle est dite complexe. Si $\mathfrak{G}$ est le groupe que définit un groupe réel G par le passage du réel au complexe, une représentation $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ peut toujours être regardée comme une représentation complexe de G; mais elle ne définit une représentation réelle de G que si, par un choix convenable de sa base, sa structure devient réelle pour une base de $\mathfrak{G}$ qui est une base du groupe réel G considéré comme sous-groupe de $\mathfrak{G}$. Au contraire, toute représentation réelle R de G définit une représentation complexe de G et une représentation $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$.

Un sous-espace linéaire $\mathfrak{R}_1$ d'une représentation $\mathfrak{R}$ d'un groupe $\mathfrak{G}$ est dit *invariant* si $X(x) \subset \mathfrak{R}_1$ lorsque $X \subset \mathfrak{G}$ et $x \subset \mathfrak{R}$; l'expression $X(x)$ représente le produit du vecteur x par la matrice X. Si $\mathfrak{R}$ n'admet aucun

[1]) *G. P.*, et *H. Weyl*, loc. cit., I, p. 275 et seq.

sous-espace invariant, sauf l'espace tout entier et l'origine, elle est dite *irréductible*. Dans le cas contraire elle est dite *réductible*. Toute représentation réductible d'un groupe semi-simple (réel ou complexe) est complètement réductible[1]: c'est à dire qu'elle est le produit direct de plusieurs représentations irréductibles.

Si $\{X_i, X_\alpha\}$ est une base réduite d'un groupe semi-simple complexe $\mathfrak{G}$, un vecteur x d'une représentation de $\mathfrak{G}$ est dit *de poids* $\omega = \omega_i e^i$ si $e^i X_i(x) = e^i \omega_i x$ [2]. Le vecteur $X_\alpha(x)$ sera de poids $(\omega + \alpha) = (\omega_i + \alpha_i) e^i$. On peut choisir la base d'une représentation $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ de sorte que tout vecteur de base ait un poids, et plusieurs vecteurs de poids différents ne sont liés par aucune relation linéaire. Un poids ω tel que $(\omega + \alpha)$ et $(\omega - \alpha)$ ne sont jamais des poids en même temps est dit *poids frontière*. Une représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ est définie à une homographie près par un poids frontière arbitraire[3]. Avec les matrices X associées aux éléments d'une base réduite de $\mathfrak{G}$ on peut construire des *polynomes*, qui sont une somme de plusieurs termes de la forme $a X_\alpha X_\beta \ldots X_\gamma$, et qui peuvent multiplier les vecteurs x de $\mathfrak{R}$. Tout vecteur d'une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ peut s'écrire sous la forme $A x$, où A est un de ces polynomes et x un vecteur arbitraire de $\mathfrak{R}$[4].

Dans la suite, G sera un groupe réel semi-simple et $\mathfrak{G}$ sera le groupe qu'il définit par le passage du réel au complexe. Si une représentation réelle irréductible R de G définit par le passage du réel au complexe une représentation $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$ est ou bien irréductible ou bien le produit direct de deux représentations irréductibles de $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{R}_1}$ et $\mathfrak{R}_1$, conjuguées complexes par rapport à l'espace de R[5]. D'après M. *Cartan*, ces deux espèces de représentations irréductibles réelles de G seront dites respectivement de *première classe* et de *seconde classe*. Dans le premier cas la représentation irréductible $\mathfrak{R}$, et dans le second cas les représentations $\mathfrak{R}_1$ et $\overline{\mathfrak{R}_1}$, sont dites *associées à* R. Par définition alors, il est associé à toute représentation irréductible réelle de G au moins une représentation irréductible de $\mathfrak{G}$.

Si une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ est associée à une représentation irréductible réelle R de G de première classe, R peut être définie de la manière déjà indiquée en choisissant une base de $\mathfrak{R}$ pour laquelle sa structure devient réelle. Si $\mathfrak{R}$ est associée à une représentation R de G de seconde classe, considérons la représentation complexe de G qu'elle définit. Cette représentation de G définit la représentation réelle R de G en regardant

[1]) *Weyl*, loc. cit, p. 380 et seq. *J. H. C. Whitehead*, Certain equations in the algebra of a semi-simple group, Quarterly Journal, 8 (1937) p. 220-224.

[2]) *G. P.*, p. 57. *H. Weyl*, loc. cit., I. p. 277.

[3]) *G. P.*, p. 59 et seq.

[4]) *G. P.*, p. 61. et 62. *M. Cartan* démontre ces propriétés respectivement pour un poids, frontière spécial et pour le vecteur associé à ce poids, mais la même méthode peut s'étendre aux cas généraux.

[5]) *E. Cartan*, Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Journ. de Math., 10 (1914) (désigné dans la suite par G. P. R.) p. 155.

l'espace complexe de $\mathfrak{R}$ comme étant à $2n$ dimensions réelles au lieu de n dimensions complexes. La représentation réelle de G ainsi définie est unique[1].

2. Définissons dans une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ du groupe semi-simple complexe $\mathfrak{G}$ une antihomographie[2] $x \to x^*$, et des matrices X^* déterminées par les équations

$$X^* x^* = (\overline{X} x)^* ,$$

où X, $\overline{X}$ représentent les matrices de $\mathfrak{R}$ associées à deux éléments générateurs de $\mathfrak{G}$ conjugués complexes par rapport à G. Ces matrices forment une représentation $\mathfrak{R}^*$ de $\mathfrak{G}$, et les matrices X^* de $\mathfrak{R}^*$ et X de $\mathfrak{R}$ correspondent au même élément générateur de $\mathfrak{G}$. On vérifie immédiatement, en effet, que les matrices X^* jouissent des propriétés fondamentales des représentations de $\mathfrak{G}$ énoncées dans la première section de ce chapitre. La représentation $\mathfrak{R}^*$ est irréductible, car toute variété plane invariante par $\mathfrak{R}^*$ serait la transformée d'une varieté plane invariante par $\mathfrak{R}$. On peut passer d'une antihomographie à une autre quelconque en effectuant sur les vecteurs x^* une homographie. Cette homographie transformera la représentation $\mathfrak{R}^*$ associée à la première antihomographie en celle qui est associé à la seconde. *La représentation $\mathfrak{R}^*$ est alors la même à une homographie près pour toute antihomographie de $\mathfrak{R}$.*

Si $\mathfrak{R}$ est la représentation de $\mathfrak{G}$ associée à une représentation irréductible R de G de première classe, les matrices X et $\overline{X}$ sont conjuguées complexes par rapport à R; c'est-à-dire que

$$(\overline{X}\,\overline{x}) = \overline{(X\,x)} ,$$

où $\overline{x}$ est le conjugué complexe par rapport à R du vecteur x. La représentation $\mathfrak{R}^*$ associée à l'antiinvolution $x^* = \overline{x}$ est définie alors par les équations

$$(X^* x^*) = (\overline{X} x)^* = X\,x^* ,$$

et les représentations $\mathfrak{R}^*$ et $\mathfrak{R}$ sont les mêmes.

Réciproquement, si l'antihomographie est involutive, nous pouvons choisir la base de $\mathfrak{R}$ de sorte que $x^* = \overline{x}$, le conjugué complexe de x par rapport à cette base. Si $\mathfrak{R}^*$ est égale à $\mathfrak{R}$, soit $X = \overline{X}$ un élément générateur du groupe réel G, considéré comme sous-groupe de $\mathfrak{G}$. Si x est réel, $x = x^*$, et $X\,x = (X^* x^*) = (X\,x)^*$, le transformé de x par X est donc réel, et les vecteurs réels de $\mathfrak{R}$ engendrent un espace réel à n dimensions, où n est l'ordre complexe de la représentation $\mathfrak{R}$, dans lequel est définie une représentation réelle R de G. Cette représentation R définit $\mathfrak{R}$ par le passage du réel au complexe.

[1]) *G. P. R.*, p. 161.

[2]) Si (x^i) est un système de coordonnées dans $\mathfrak{R}$, une antihomographie $x \to x^*$ est définie par un système d'équations de la forme

$$x^{*i} = \alpha^i_j \overline{x}^j$$

où $(\overline{x}^j)$ sont les conjuguées complexes des coordonnées (x^j). Si $(x^*)^* \equiv x$, l'antihomographie est dite antiinvolution. Dans ce sens, l'antihomographie $x^* = \lambda \overline{x}$ n'est une antiinvolution que si $\lambda = 1$.

$\mathfrak{R}$ étant irréductible, il en est de même de R, qui est alors de première classe. *Il faut et il suffit pour que* $\mathfrak{R}$ *soit associée à une représentation* R *de* G *de première classe qu'il existe une antiinvolution de* $\mathfrak{R}$ *pour laquelle* $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$.

Pour qu'il existe une antihomographie d'une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ telle que $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$, il faut et il suffit qu'il existe, pour une antihomographie arbitraire, une homographie de $\mathfrak{R}^*$ en $\mathfrak{R}$. Si, en effet, il existe une antihomographie pour laquelle $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$, la représentation $\mathfrak{R}^*$ associée à toute autre antihomographie sera semblable[1] à la représentation $\mathfrak{R}^*$ de la première antihomographie, et par suite semblable à $\mathfrak{R}$. Réciproquement, s'il existe une homographie qui transforme $\mathfrak{R}^*$ en $\mathfrak{R}$, effectuons cette homographie sur les vecteurs x^*. La nouvelle représentation $\mathfrak{R}^*$ sera égale à $\mathfrak{R}$.

Soit maintenant $\{X_i, X_\alpha\}$ une base réduite de $\mathfrak{G}$ pour laquelle

$$\begin{cases} \overline{X}_i = X_i \\ \overline{X}_\alpha = X_{\overline{\alpha}}. \end{cases}$$

Si x_ω est un vecteur de $\mathfrak{R}$ de poids $\omega = \omega_i e^i$ relatif à $e^i X_i$,

$$X_i^* x_\omega^* = (\overline{X}_i x_\omega)^* = (\omega_i x_\omega)^* = \overline{\omega}_i x_\omega^*,$$

et x_ω^* est un vecteur de $\mathfrak{R}^*$ de poids $\overline{\omega} = \overline{\omega}_i e^i$, le conjugué complexe du poids ω. Inversement, si un vecteur x^* de $\mathfrak{R}^*$ est de poids ω, le vecteur x de $\mathfrak{R}$ dont il est le transformé est de poids $\overline{\omega}$. Il en résulte que les poids de la représentation $\mathfrak{R}^*$ sont les conjugués complexes des poids de la représentation $\mathfrak{R}$ et, en particulier, que les poids *frontières* de $\mathfrak{R}^*$ sont les conjugués complexes des poids *frontières* de $\mathfrak{R}$. Les représentations $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}^*$ étant irréductibles, *il faut et il suffit pour qu'il existe une homographie de* $\mathfrak{R}^*$ *en* $\mathfrak{R}$ *que le conjugué complexe d'un poids frontière arbitraire de* $\mathfrak{R}$ *soit également un poids frontière de* $\mathfrak{R}$. En effet, la condition pour que $\mathfrak{R}^*$ et $\mathfrak{R}$ soient semblables est qu'un poids frontière arbitraire de $\mathfrak{R}$ soit aussi un poids frontière de $\mathfrak{R}^*$[2]. *Une représentation irréductible de* $\mathfrak{G}$ *qui satisfait à cette condition sera dite „autocorrélative par rapport à* G"[3]. Les poids frontières de $\mathfrak{R}$ étant les homologues d'un poids frontière arbitraire par le groupe (S) engendré par les opérations S_α[4], *la condition pour que* $\mathfrak{R}$ *soit autocorrélative est simplement qu'un poids frontière arbitraire soit homologue par* (S) *de son conjugué.*

---

[1]) Deux représentations d'un même groupe seront dites „semblables" s'il existe une homographie qui transforme l'une en l'autre.

[2]) *G. P.*, p. 59 et seq ; voir note (3), p. 50 de ce présent mémoire.

[3]) *G. P. R.*, p. 106. Cette notation tient à ce que, si une représentation réelle de $\mathfrak{G}$ définit par le passage du réel au complexe le produit direct d'une représentation autocorrélative $\mathfrak{R}_1$ de $\mathfrak{G}$ par sa conjuguée complexe $\overline{\mathfrak{R}}_1$, les représentations $\mathfrak{R}_1$ et $\overline{\mathfrak{R}}_1$ sont semblables.

[4]) voir plus haut, Chap II, § 1. Le groupe (S) est un groupe d'automorphies du système de poids de $\mathfrak{R}$ et non simplement du système de racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$. *G. P.*, p 57 58.

La représentation irréductible $\mathfrak{R}$ étant supposée autocorrélative, tout poids frontière de $\mathfrak{R}$ est un poids frontière de $\mathfrak{R}^*$, et le conjugué complexe $\overline{\Omega}$ d'un poids frontière arbitraire Ω de $\mathfrak{R}$ est également un poids frontière de $\mathfrak{R}$. Les vecteurs x_Ω et $x_{\overline{\Omega}}$, respectivement de poids $\overline{\Omega}$ et Ω, sont chacun déterminé à un facteur numérique près[1], et il existe une homographie bien déterminée de $\mathfrak{R}^*$ en $\mathfrak{R}$ qui transforme x^*_Ω en $\lambda\, x_{\overline{\Omega}}$, λ étant un facteur arbitraire. Il existe alors une antihomographie bien déterminée de $\mathfrak{R}$ pour laquelle $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$ et $x^*_\Omega = \lambda\, x_{\overline{\Omega}}$: on obtient ainsi toutes les antihomographies pour lesquelles $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$.

Exprimons $x_{\overline{\Omega}}$ sous la forme $\mathrm{F}\, x_\Omega$, où F est un polynome construit avec les matrices X de $\mathfrak{R}$. Si nous remplaçons dans F chaque matrice X par la matrice correspondante $\overline{\mathrm{X}}$, et chaque coefficient numérique par son conjugué complexe, nous obtiendrons un nouveau polynome $\overline{\mathrm{F}}$. Si $x^*_\Omega = \lambda\, x_{\overline{\Omega}}$, $x^*_\Omega = \lambda\, \mathrm{F}\, x_\Omega$, et on voit facilement que $x^*_{\overline{\Omega}} = (\mathrm{F}\, x_\Omega)^* = \bar{\lambda}\, \overline{\mathrm{F}}\, x_{\overline{\Omega}}$, donc

$$(x^*_{\overline{\Omega}})^* = (\lambda\, x_{\overline{\Omega}})^* = \lambda\, \bar{\lambda}\, \overline{\mathrm{F}}\, \mathrm{F}\, x_\Omega .$$

Pour que l'antihomographie soit involutive, il faut que $(x^*_\Omega)^* = x_\Omega$. Je dis que cette condition est suffisante. En effet, tout vecteur y peut se mettre sous la forme $y = \mathrm{A}\, x_\Omega$ où A est un polynome ; $y^* = \overline{\mathrm{A}}\, x^*_\Omega$, $(y^*)^* = \mathrm{A}\, (x^*_\Omega)^* = y$, et l'antihomographie est involutive. Pour que l'on puisse choisir λ de sorte que $(x^*_\Omega)^* = x_\Omega$, il faut et il suffit que $\overline{\mathrm{F}}\, \mathrm{F}\, x_\Omega = k\, x_\Omega$ où k est réel et positif. *Une représentation irréductible autocorrélative $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ qui satisfait à cette condition sera dite de première classe relative au groupe réel* G. *La condition pour que $\mathfrak{R}$ soit associée à une représentation réelle de* G *de première classe est qu'elle soit de première classe relative à* G.

Démontrons maintenant que la représentation R de G ainsi définie par la représentation $\mathfrak{R}$ est unique. La constante λ est indeterminée à un facteur numérique de la forme $e^{i\theta}$ près. Si l'on multiplie tous les vecteurs x de $\mathfrak{R}$ par un même facteur $e^{-i\theta/2}$, les vecteurs x^* seront multipliés par le conjugué complexe $e^{i\theta/2}$ de ce facteur, et λ sera remplacé par $\lambda\, e^{i\theta}$. Or cette transformation ne change pas les matrices X de la représentation $\mathfrak{R}$, d'où il résulte que toutes les antiinvolutions associées aux différentes valeurs de λ définissent des représentations réelles semblables de G.

Enfin, soit R_1 la représentation réelle de G d'ordre $2n$ obtenue en regardant l'espace de la représentation $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ comme étant à $2n$ dimensions réelles au lieu de n dimensions complexes Si $\mathfrak{R}$ est associée à une représentation réelle R de G de première classe, les vecteurs de R définiront dans R_1 un sous-espace à n dimensions invariant par G, et la représentation R_1 sera réductible. Une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ de première classe n'est alors associée à aucune représentation irréductible de G de seconde classe.

---

[1] *G. P.*, p. 62.

Théorème I: *Toute représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ de première classe relative à G est associée à une représentation irréductible réelle de G et une seule, qui est de première classe.*

3. Soit maintenent $\mathfrak{R}$ une représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ qui n'est pas de première classe relative à G, et soit R_1 la représentation réelle de G obtenue en considérant l'espace de $\mathfrak{R}$ comme étant à $2n$ dimensions réelles au lieu de n dimensions complexes.

Si R_1 était réductible, l'un des sous-espaces de R_1 invariants par G serait de $\nu \leqq n$ dimensions, et ce sous-espace définirait dans $\mathfrak{R}$ un sous-espace complexe à ν dimensions au plus invariant par $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{R}$ étant irréductible, ce sous-espace invariant devrait se confondre avec $\mathfrak{R}$, et une base du sous-espace invariant de R serait composée de n vecteurs de $\mathfrak{R}$ entre lesquels il n'existerait aucune relation linéaire *à coefficients complexes.* Prenons ce système de vecteurs comme base de $\mathfrak{R}$; on voit immédiatement que les matrices de $\mathfrak{R}$ associées aux éléments générateurs de G seraient *réelles*, ce qui est contraire à l'hypothèse que $\mathfrak{R}$ ne soit pas de première classe. La représentation R_1 de G est alors irréductible; elle est donc de seconde classe.

Théorème II: *Toute représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ qui n'est pas de première classe relative à G est associée à une représentation irréductible réelle de G et une seule, qui est de seconde classe.*[1]

4. Définissons maintenant par la méthode du Chapitre I, § 5, un ordre des racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$; les poids de $\mathfrak{R}$ étant des combinaisons linéaires à coefficients réels de ces racines[2], on peut définir un ordre des poids par la formule suivante, analogue à celle qui définit l'ordre des racines:

$$\omega = \omega_i \,.\, e^i > \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i \,.\, e^i$$

si

$$\begin{cases} \omega_{i'} = \tilde{\omega}_{i'} & (i' = 0,\ 1, \ldots,\ p-1) \\ \omega_p > \tilde{\omega}_p & (p < l)\,. \end{cases}$$

Celles des opérations S_α pour lesquelles α est une racine purement imaginaire engendrent un groupe (S'), sous-groupe de (S), qui laisse invariante la partie réelle de toute racine α et de tout poids ω (Chap. I § 5, p. 19). Si $\mathfrak{R}$ est autocorrélative, soit Ω son poids dominant[3], caractérisé par la propriété que $(\omega + \alpha)$ n'est jamais un poids si α est une racine caractéristique supérieure à zéro, et soit Ω_1 le plus petit des homologues de Ω par le groupe (S'). Posons $\Omega_1 = \mathfrak{S}(\Omega)$, où $\mathfrak{S}$ est une transformation de (S'), et soit $\mathfrak{S}^{-1}$ l'inverse de $\mathfrak{S}$. Si $\bar{\alpha} > 0$, ou bien $\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}(\bar{\alpha}) > 0$ ou bien $\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}(\bar{\alpha}) = 0$ et alors $\alpha < 0$. Dans le premier cas, $\mathcal{R}(\mathfrak{S}^{-1}(\alpha)) = \mathcal{R}(\alpha) > 0$, $\mathfrak{S}^{-1}(\alpha) > 0$ et

[1]) Ce théorème et le théorème I sont équivalents à des théorèmes publiés par *M. Cartan* dans G. P. R. La seule différence consiste en la définition des représentations de première classe par une propriété différente.

[2]) *G. P.*, p. 57.

[3]) *G. P.*, p. 58.

$\mathfrak{S}^{-1}(\Omega_1+\alpha)=\Omega+\mathfrak{S}^{-1}(\alpha)$, qui n'est pas un poids. *Il en résulte que* $(\Omega_1+\alpha)$ *n'est pas un poids de* $\mathfrak{R}$. Dans le second cas, $S_\alpha(\Omega_1)=\Omega_1-k\alpha$ et $k\geqq 0$, car, si $k<0$, $S_\alpha(\Omega_1)=S_\alpha\mathfrak{S}(\Omega)$ serait plus petit que Ω_1, qui est contraire à l'hypothèse. On aurait $S_\alpha(\Omega_1+\alpha)=\Omega_1-(k+1)\alpha$ où $(k+1)>0$, et $(\Omega_1-\alpha)$ serait un poids si $(\Omega_1+\alpha)$ était un poids[1]. Or, Ω_1 étant un poids frontière, $(\Omega_1+\alpha)$ et $(\Omega_1-\alpha)$ ne sont pas des poids en même temps, *et par suite* $(\Omega_1+\alpha)$ *n'est pas un poids de* $\mathfrak{R}$.

Donc, $(\Omega_1+\alpha)$ n'est jamais un poids si $\bar{\alpha}>0$, et on voit que le seul poids frontière qui satisfasse à cette condition est le poids $\overline{\Omega}$. *Il existe alors une transformation* $\mathfrak{S}$ *de* (S') *qui amène* Ω *en* $\overline{\Omega}$.

Choisissons une base $\{Y_i\}$ du sous-groupe abélien $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{G}$ engendré par $\{X_i\}$ telle que toutes les racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$ sont des formes linéaires à coefficients réels des nouveaux paramètres (e^{*i}). Nous pouvons regarder la forme quadratique définie positive $g_{ij}\,e^{*i}\,e^{*j}$, somme des carrés des racines caractéristiques, comme définissant une métrique euclidienne dans l'espace E_l à coordonnées e^{*i}. L'opération S_α se traduit par la symétrie par rapport à l'hyperplan $\alpha=\alpha_i^*\,e^{*i}=0$, et le groupe (S') devient le groupe engendré par les symétries par rapport aux hyperplans $\lambda_i^*\,e^{*i}=0$, où λ représente une racine purement imaginaire arbitraire. Ces hyperplans forment une famille invariante par (S') et partagent l'espace E_l en plusieurs régions (D) qui sont des régions fondamentales du groupe (S'). Tout poids de la représentation $\mathfrak{R}$ étant une combinaison linéaire à coefficients réels des racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$, on peut regarder le poids $\omega=\omega_i^*\,e^{*i}$ comme un vecteur dans E_l dont les composants covariants sont ω_i^*. Si ce vecteur est à l'intérieur de (D) ou sur sa frontière, nous écrirons $\omega\subset(D)$.

A toute région (D) est associée une autre région (D'), la symétrique de (D) par rapport à l'origine. Si (D) est définie par les inégalités

$$\lambda^{(h)}=\lambda_i^{(h)*}.\,e^{*i}\geqq 0\quad (h=1,\,2,\ldots,\,l'\leqq l),$$

la transformée de (D) par l'automorphie du système de racines caractéristiques qui amène α en $\bar{\alpha}$ est définie par

$$\bar{\lambda}^{(\lambda)}=-\,\lambda_i^{(h)*}\;.\,e^{*i}\geqq 0$$

et on voit que cette nouvelle région est la région (D'). Si alors $\Omega\subset(D)$, on aura $\overline{\Omega}\subset(D')$. Or, il existe une transformation et une seule de (S') qui transforme (D) en (D'), et il existe $\subset(D')$ un vecteur et un seul homologue de Ω par (S')[2]. Le poids $\overline{\Omega}$ étant homologue de Ω par (S'), ce vecteur est nécessairement égal à $\overline{\Omega}$, et la transformation de (S') qui amène (D) en (D'), transforme Ω en $\overline{\Omega}$.

---

[1]) Toutes les expressions ω $\omega+\alpha,\ldots\,\omega+k\alpha=S_\alpha(\omega)$ sont des poids si ω est un poids.

[2]) *E. Cartan*, Complément au memoire sur la géometrie des groupes simples, Ann. di Matematica, **5** (1928).

Cette transformation peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{S} = S_{\lambda_p} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}$$

où les racines purement imaginaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont toutes orthogonales deux à deux et par suite les opérations $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}, \ldots, S_{\lambda_p}$ sont échangeables entre elles[1].

Soient α et β deux racines orthogonales. Si l'une des deux quantités $(\alpha \pm \beta)$ est racine, il en est de même de l'autre, car

$$\begin{aligned} S_\beta(\alpha+\beta) &= (\alpha+\beta) - 2\{((\alpha+\beta).\beta)/(\beta)^2\}\beta \\ &= (\alpha-\beta). \end{aligned}$$

La quantité $2(\alpha\,(\alpha+\beta))/(\alpha+\beta)^2 = 2(\alpha)^2/\{(\alpha)^2+(\beta)^2\}$ est un entier[2], d'où il résulte que $(\alpha)^2=(\beta)^2$, et que $((\alpha+\beta).(\alpha-\beta)) = (\alpha)^2-(\beta)^2=0$. La somme et la différence des deux racines $(\alpha\pm\beta)$ sont 2α et 2β, qui ne sont pas racines[3], et

$$\begin{aligned} S_{\alpha+\beta} S_{\alpha-\beta}(\omega) &= \omega - 2\{((\alpha+\beta).\omega)/(\alpha+\beta)^2\}(\alpha+\beta) \\ &\quad - 2\{((\alpha-\beta).\omega)/(\alpha-\beta)^2\}(\alpha-\beta) \\ &= \omega - 2\{(\alpha.\omega)/(\alpha)^2\}\alpha - 2\{(\beta.\omega)/(\beta)^2\}\beta \\ &= S_\alpha S_\beta(\omega). \end{aligned}$$

Si alors l'une des quantités $(\lambda_r \pm \lambda_s)$ est racine, on pourra remplacer dans $\mathfrak{S}$ les deux opérations S_{λ_r} et S_{λ_s} par $S_{\lambda_r+\lambda_s}$ et $S_{\lambda_r-\lambda_s}$. Chaque fois qu'on effectue cette opération les carrés scalaires des λ correspondant aux nouvelles S sont supérieurs aux précédents et, puisque le nombre de racines caractéristiques est fini et l'ensemble des valeurs des carrés scalaires des racines est par suite borné, en un nombre fini d'étapes on réduira la transformation $\mathfrak{S}$ de (S') à la forme

$$S_{\lambda_p} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}$$

où aucune des quantités $(\lambda_r \pm \lambda_s)$ ne sera racine.

Théorème III: *Si une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ est autocorrélative par rapport à G, il existe un poids frontière Ω de $\mathfrak{R}$ dont le conjugué complexe est un poids de la forme*

$$\mathfrak{S}(\Omega) = S_{\lambda_p} S_{\lambda_{p-1}} \ldots S_{\lambda_1}(\Omega)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des racines caractéristiques purement imaginaires de $\mathfrak{G}$ telles qu'aucune des quantités $(\lambda_r \pm \lambda_s)$ n'est racine.

5 Cela étant, considérons la suite de poids

$$\Omega_0 = \Omega,\ \Omega_1 = S_{\lambda_1}\Omega_0, \ldots, \Omega_p = S_{\lambda_p}\Omega_{p-1} = \overline{\Omega}.$$

---

[1]) *W. Barrett*, Comptes rendus, 208 (1939) p. 962–4.
[2]) Cette quantité est le coefficient k dans $S_{\alpha+\beta}(\alpha) = \alpha - k(\alpha+\beta)$
[3]) C., p. 55, Th. VI.

On peut supposer les signes des racines λ_r choisis de sorte que $\Omega_{r-1} - \Omega_r = k_r \lambda_r$, où $k = 2 \{ (\Omega_{r-1} \cdot \lambda_r) / (\lambda_r)^2 \}$ est un entier *positif*, et si $x_{\Omega_{r-1}}$ est un vecteur de poids Ω_{r-1}, $(x_{\lambda'_r})^{k_r} (x_{\Omega_{r-1}})$ sera un vecteur de poids Ω_r. Posons

$$F = (X_{\lambda'_p})^{k_p} \ldots (X_{\lambda'_2})^{k_2} (X_{\lambda'_1})^{k_1}$$

et soit x_Ω un vecteur de poids Ω. $x_{\bar\Omega} = F x_\Omega$ est alors un vecteur de poids $\bar\Omega$, et la condition pour que la représentation $\mathfrak{R}$ soit de première classe relative à G est que $\bar F F x_\Omega$ soit un multiple réel et positif de x_Ω.

Du fait que $\bar X_\lambda = X_{\bar\lambda}$ et que $[X_{\lambda_r} X_{\lambda_s}] = [X_{\lambda_r} X_{\lambda_s}] = 0$[1] si $r \neq s$, il résulte que l'on peut écrire le polynome $\bar F F$ sous la forme

$$\mathfrak{J}_p \ldots \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{J}_1$$

où $\mathfrak{J}_r = (X_{\lambda_r})^{k_r} (X_{\lambda'_r})^{k_r}$.

Le poids Ω_{r-1} est égal à $\Omega - \sum_{h=1}^{r-1} k_h \lambda_h$ et $(\lambda_h \cdot \lambda_r) = 0$; nous avons alors $k_r = 2 (\Omega_{r-1} \cdot \lambda_r) / (\lambda_r)^2 = 2 (\Omega \cdot \lambda_r) / (\lambda_r)^2$ et ce coefficient peut être défini par la relation

$$S_{\lambda_r}(\Omega) = \Omega - k_r \lambda_r .$$

Supposons maintenant que la base $\{ X_i, X_\alpha \}$ de $\mathfrak{G}$ soit réduite par rapport à G (Chap. I, § 3) et définissons une suite de vecteurs

$$x_0 = x_\Omega, \quad x_1 = X_{\lambda'}(x_0), \ldots, \quad x_k = (X_{\lambda'})^k (x_0)$$

où $S_\lambda(\Omega) = \Omega - k \lambda$. Nous aurons

$$X_\lambda (x_m) = \mu_m \, x_{m-1} \; (m = 1, \ldots, k),$$

où $\mu_m = \sum_{i=1}^{m} \{ -(\Omega \cdot \lambda) + (i-1)(\lambda)^2 \}$[2]. Or $(\Omega \cdot \lambda) = \frac{1}{2} k (\lambda)^2$, d'où μ_m est égal à $\{ m \cdot (m - 1 - k) / 2 \} \cdot (\lambda)^2 < 0$.

Il en résulte que $(X_\lambda)^k (X_{\lambda'})^k (x_\Omega) = \nu_\lambda x_\Omega$ où ν_λ est du signe de $(-1)^k$. L'application de ce résultat au polynome $\bar F F = \mathfrak{J}_p \ldots \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{J}_1$ démontre que

$$\bar F F x_\Omega = \nu x_\Omega$$

où $\nu = \prod_{r=1}^{p} (\nu_{\lambda_r})$ est du signe de $(-1)^{\Sigma k_r}$. *Pour que ν soit positif, il faut et il suffit que $\sum_{r=1}^{p} k_r$ soit pair.* Dans la démonstration de cette propriété nous avons supposé le signe de la racine λ_r choisi de sorte que k_r est positif. Or cela n'est pas nécessaire, car si l'on change de signe λ_r, l'entier k_r change de signe et la parité de Σk_r ne change pas. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème IV : *Les conditions pour qu'une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ soit de première classe relative à G sont :*

---

[1]) $\bar\lambda = \lambda'$.

[2]) *Weyl*, loc. cit., I, p. 280

(i) $\mathfrak{R}$ *est autocorrélative par rapport à* G

(ii) *si* $\mathfrak{S} = S_{\lambda_p} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}$ *est une transformation de* (S′) *transformant un poids frontière* Ω *de* $\mathfrak{R}$ *en* $\overline{\Omega}$, *telle qu'aucune des quantités* $(\lambda_r \pm \lambda_s)$ *n'est racine, la somme des coefficients* k_r *définis par*

$$S_{\lambda_r}(\Omega) = \Omega - k_r \lambda_r$$

est pair.

Cette somme sera appelée „l'indice $\mathfrak{R}$" du poids Ω par rapport à la transformation $\mathfrak{S}$.

6. Si le groupe réel G se décompose en deux sous-groupes réels invariants G_1 et G_2, le groupe complexe $\mathfrak{G}$ se décompose en $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$, les groupes complexes que définissent respectivement G_1 et G_2 par le passage du réel au complexe. Les racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$ relatives aux éléments d'un sous-groupe abélien maximum se décomposent en deux familles orthogonales, la première composée des racines caractéristiques de $\mathfrak{G}_1$ et la seconde des racines caractéristiques de $\mathfrak{G}_2$. Toute combinaison linéaire des racines de $\mathfrak{G}$ peut être exprimée d'une manière et d'une seule sous la forme d'une somme d'une combinaison linéaire des racines de $\mathfrak{G}_1$ et d'une combinaison linéaire des racines de $\mathfrak{G}_2$. L'involution T du système de racines de $\mathfrak{G}$ qui définit le groupe réel G est le produit des involutions T_1 et T_2 des systèmes de racines de $\mathfrak{G}_1$ et de $\mathfrak{G}_2$ qui définissent respectivement les groupes réels G_1 et G_2.

Une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ définit d'une manière univoque deux représentations irréductibles, l'une de $\mathfrak{G}_1$ et l'autre de $\mathfrak{G}_2$. Réciproquement, deux représentations irréductibles, $\mathfrak{R}_1$ de $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ de $\mathfrak{G}_2$ définissent une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$.[1] Un poids frontière Ω de $\mathfrak{R}$ est la somme d'un poids frontière Ω_1 de $\mathfrak{R}_1$ et d'un poids frontière Ω_2 de $\mathfrak{R}_2$, et inversement, la somme d'un poids frontière de $\mathfrak{R}_2$ et d'un poids frontière de $\mathfrak{R}_1$ est un poids frontière de $\mathfrak{R}$. Le conjugué complexe $\overline{\Omega} = T\,\Omega$ de Ω est égal à $\overline{\Omega}_1 + \overline{\Omega}_2 = T_1\,\Omega_1 + T_2\,\Omega_2$. Pour que $\overline{\Omega}$ soit un poids frontière de $\mathfrak{R}$, il faut et il suffit que $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ soient des poids frontières respectivement de $\mathfrak{R}_1$ et de $\mathfrak{R}_2$. *La condition pour que* $\mathfrak{R}$ *soit autocorrélative est alors que* $\mathfrak{R}_1$ *et* $\mathfrak{R}_2$ *soit autocorrélatives.*

Cela étant, supposons qu'il existe une transformation $\mathfrak{S}$ du groupe (S′) qui satisfait aux conditions du théorème III et qui transforme un poids frontière Ω de $\mathfrak{R}$ en son conjugué complexe $\overline{\Omega}$. Cette transformation est le produit de deux autres, l'une qui se compose d'opérations S_λ appartenent aux racines caractéristiques de $\mathfrak{G}_1$ et l'autre qui se compose d'opérations S_λ appartenant aux racines de $\mathfrak{G}_2$. La première transforme Ω_1 en $\overline{\Omega}_1$ et la seconde

[1]) On peut définir le „produit" $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ de la manière suivante: si x^i et y^j sont respectivement les composants de deux vecteurs x, y, l'une de $\mathfrak{R}_1$ et l'autre de $\mathfrak{R}_2$, le vecteur corréspondant de (x, y), $\mathfrak{R}$ est de composants $(x\,y)^{ij} = x^i y^j$. La matrice d'un élément de $\mathfrak{G}$ de la forme $X + Y$), où X est un élément de $\mathfrak{G}_1$ et Y est un élément de $\mathfrak{G}_2$, est donnée par l'équation

$$(X + Y)(x, y) = (X(x), y) + (x, Y(y)).$$

transforme Ω_1 en $\overline{\Omega}_2$. Il est évident alors, que l'indice $\mathfrak{R}$ de Ω est égal à la somme des indices $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ des poids Ω_1 et Ω_2 de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$. L'indice $\mathfrak{R}$ sera pair si $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ sont de la même parité. *Il faut et il suffit donc pour que $\mathfrak{R}$ soit de première classe que $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ soient autocorrélatives respectivement par rapport aux groupes réels G_1 et G_2, et, ou bien qu'aucune de ces deux représentations ne soit de première classe, ou bien qu'elles soient toutes deux de première classe.*

Il en résulte :

Théorème V : *Si un groupe réel semi-simple G se décompose en plusieurs groupes réels simples G_1, $G_2, \ldots,$ et si $\mathfrak{R}$ est une représentation irréductible du groupe $\mathfrak{G}$ que définit G par le passage du réel au complexe, $\mathfrak{R}$ étant le produit d'une représentation irréductible de chacun des groupes complexes $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2, \ldots$ définis par G_1, $G_2, \ldots$:*

(i) *la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{R}$ soit autocorrélative par rapport à G est que chacune de ces représentations soit autocorrélative par rapport au groupe réel correspondant.*

(ii) *La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{R}$, étant autocorrélative, soit de première classe est que toutes les représentations dont elle est le produit soient de première classe, à l'exclusion d'un nombre pair d'entre elles.*

CHAPITRE IV.

1. Nous avons ramené la recherche des représentations réelles des groupes infinitésimaux semi-simples réels à la recherche parmi les représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes associés aux groupes simples réels, de celles qui sont autocorrélatives et de celles qui sont de première classe.

Considérons d'abord les groupes réels simples G *pour lesquels* $\mathfrak{G}$ *n'est pas simple.* Soit $\mathfrak{G}$ le produit direct des deux groupes complexes simples $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$, conjugués complexes par rapport à G. L'involution du système de racines caractéristiques de $\mathfrak{G}$ qui définit G, échange entre eux les systèmes de racines de $\mathfrak{G}_1$ et de $\mathfrak{G}_2$ et par suite échange entre eux les groupes (S_1) et (S_2) associés à $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$.

Une représentation irréductible $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$ est le produit (Chap. III, § 6) d'une représentation irréductible $\mathfrak{R}_1$ de $\mathfrak{G}_1$ et d'une représentation irréductible $\mathfrak{R}_2$ de $\mathfrak{G}_2$. Si $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ est un poids frontière de $\mathfrak{R}$, où Ω_1 et Ω_2 sont des poids frontières respectivement de $\mathfrak{R}_1$ et de $\mathfrak{R}_2$, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 + \overline{\Omega}_2$ où $\overline{\Omega}_1$, le conjugué de Ω_1, est une combinaison linéaire des racines de $\mathfrak{G}_2$ et $\overline{\Omega}_2$ est une combinaison linéaire des racines de $\mathfrak{G}_1$. Pour que $\mathfrak{R}$ soit autocorrélative, il faut et il suffit que $\overline{\Omega}_1$ soit un poids frontière de $\mathfrak{R}_2$ et que $\overline{\Omega}_2$ soit un poids frontière de $\mathfrak{R}_1$. Si $\mathfrak{R}_1$ est une représentation donnée, il existe une représentation $\mathfrak{R}_2$ de $\mathfrak{G}_2$ de poids frontière $\overline{\Omega}_1$, déterminée à une homographie près. Si Ω_2 est un poids frontière arbitraire de $\mathfrak{R}_2$, $\overline{\Omega}_1$ et Ω_2 sont homologues par (S_2) et par suite $\overline{\Omega}_2$ et $\overline{\overline{\Omega}}_1 = \Omega_1$ sont homologues par (S_1) et $\overline{\Omega}_2$ est un poids frontière de $\mathfrak{R}_1$. Il en résulte que le produit $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ est une représentation de $\mathfrak{G}$ autocorrélative par rapport à G. *A toute représentation irréductible de* $\mathfrak{G}_1$ *correspond une représentation irréductible de* $\mathfrak{G}$ *et une seule qui soit autocorrélative par rapport à* G. *Cette représentation est d'ailleurs de première classe,* car il n'existe pas de racines caractéristiques purement imaginaires, d'où il résulte que l'indice $\mathfrak{R}$ d'un poids frontière est nécessairement nul.

Le poids dominant de toute représentation d'un groupe complexe simple est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de l formes linéaires appelées *poids dominants fondamentaux*[1]. Les conditions que nous allons trouver pour qu'une représentation soit ou bien autocorrélative ou bien de première classe seront exprimées au moyen de ces coefficients.

Remarquons que le poids dominant d'une représentation n'est pas défini d'une manière univoque, mais dépend de l'ordre des racines caractéristiques que l'on a choisi. Le poids dominant est pourtant toujours un poids frontière. Un système de poids dominants fondamentaux détermine complètement le

[1]) *G. P.*, p. 66.

poids dominant de toute représentation ; dans la suite nous nous occuperons du poids dominant ainsi défini, et non de celui dont il s'agissait dans le chapitre précédent.

Si l'involution qui définit un groupe réel est une transformation du groupe (S), tout poids est homologue par (S) de son conjugué complexe, et toute représentation est autocorrélative.

Toute représentation est de première classe relative au groupe normal. En effet, l'involution qui le définit est l'identité, et par suite la représentation est autocorrélative. Il n'y a pas de racines purement imaginaires, et par suite, l'indice $\mathfrak{R}$ est égal à zéro.

2. **Les groupes** A_l (Chap. II, § 2).

Tout poids d'une représentation est de la forme[1)]

$$\omega = m_i x^i$$

où $\sum m_i = 0$ et les m_i sont égaux module un. Si $\Omega = M_i x^i$ est le poids dominant, les coefficients des poids fondamentaux sont[2)] :

$$p^{l+1-i} = M_i - M_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

On obtient les homologues de ω par le groupe (S) en effectuant une permutation arbitraire des coefficients m_i. Etudions les différents groupes réels :

(i) **Le groupe réel normal de caractère** l. *Toute représentation est autocorrélative et de première classe.*

(ii) **Le groupe réel de caractère** $(-l-2)$ défini par :

$$\bar{x}^{\alpha} = x^{\bar{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, l+1 \; ; \; \bar{\alpha} = l + 2 - \alpha)$$

où l est impair. Cette involution peut s'écrire $\prod_{\alpha=1}^{(l+1)/2} S_{\alpha\bar{\alpha}}$, *et toute représentation est autocorrélative.* L'involution est une transformation du groupe (S') satisfaisant à la condition du théorème III, qui transforme le poids dominant Ω en son conjugué complexe $\bar{\Omega}$.

$$S_{\alpha\bar{\alpha}}(\Omega) = \Omega - (M_\alpha - M_{\bar{\alpha}})(\alpha\bar{\alpha})$$

et l'indice $\mathfrak{R}$ est égal à $\sum(M_\alpha - M_{\bar{\alpha}})$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, (l+1)/2)$. Or, les coefficients $(M_\alpha - M_{\bar{\alpha}})$ étant des entiers, cette expression est de la même parité que

$$-\sum_{i=1}^{l+1} \left\{ (-1)^i M_i \right\} = p^1 + p^3 + \cdots + p^l.$$

Pour que la représentation soit de première classe il faut et il suffit que

$$p^1 + p^3 + \cdots + p^l$$

soit pair.

---

1) G. P., p. 67-8. 2) *G. P.*, p. 68.

(iii) **Le groupe réel de caractère** $(1 - q^2)$ défini par :

$$\begin{cases} \bar{x} = - x^{\bar{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2p \,;\, \bar{\alpha} = 2p + 1 - \alpha) \\ \bar{x}^a = - x^a \quad (a = 2p + 1, \ldots, 2p + q = l + 1). \end{cases}$$

Soit $\Omega = M_i x^i$ le poids dominant; pour que $\overline{\Omega}$ soit homologue de Ω par (S) il faut et il suffit que les quantités $(- M_i)$ forment une permutation des coefficients M_i. Or, les coefficients p^i sont par définition tous positifs ou nuls, et $M_i \geqq M_{i+1}$. La condition est alors que $M_i = - M_{l+2-i}$ ou, ce qui est équivalent,

$$p^i = p^{l+1-i}.$$

Pour que la représentation soit autocorrélative, il faut et il suffit que

$$p^i = p^{l+1-i}.$$

Cela étant, il existe un poids frontière $\omega = m_i x^i$, où les m_i sont une permutation des M_i, pour lequel

$$\begin{cases} m_\alpha = - m_{\bar{\alpha}} \\ m_a = - m_{a-1} \text{ si } a \text{ est pair} \\ m_{l+1} = 0 \text{ si } l + 1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Une transformation $\mathfrak{S}$ de (S') qui satisfait à la condition du théorème III et qui transforme ω en $\overline{\omega}$ est

$$\mathfrak{S} = \Pi \, S_{a, a-1} \quad (a = 2p + 2, 2p + 4, \ldots, 2[(l + 1)/2])$$

et

$$S_{a, a-1}(\omega) = \omega - (m_a - m_{a-1})(a, a - 1) = \omega - 2 m_a (a, a-1).$$

L'indice $\mathfrak{R}$ est égal à $2 \Sigma m_a$ $(a = 2p + 2, 2p + 4, \ldots, 2[(l + 1)/2])$.

Si $(l + 1)$ *est impair,* $m_a = m_{l+1} \pmod{1} = 0 \pmod{1}$, $\mathfrak{R}$ est pair, *et toute représentation autocorrélative est de première classe.*

Si $(l + 1)$ est pair, il y a deux cas possibles: ou bien $m_a = 0 \pmod{1}$ ou bien $m_a \neq 0 \pmod{1}$. Dans le premier cas, $\mathfrak{R}$ est pair, et dans le second, $m_a = - m_{a \pm 1} = - m_a \pmod{1}$, et $m_a = \frac{1}{2} \pmod{1}$. Pour que $\mathfrak{R}$ soit pair il faut et il suffit dans les deux cas que $M_i = m_a \pmod{1} = 0 \pmod{1}$ ou que $q/2$ soit pair ; q étant pair, on peut combiner ces deux conditions sous la forme

$$M_i \,.\, q = 0 \pmod{2}.$$

Or, $M_{(l+1)/2} = - M_{(l+3)/2} = \frac{1}{2} \,.\, p^{(l+1)/2}$ et la condition devient $\frac{1}{2} \,.\, p^{(l+1)/2} \,.\, q = 0 \pmod{2}$. *Si* $(l + 1)$ *est pair, il faut et il suffit pour qu'une représentation autocorrélative soit de première classe que*

$$\tfrac{1}{2} \,.\, p^{(l+1/2)} q = 0 \pmod{2}.$$

3. **Les groupes** B_l (Chap. II, § 3).

Tout poids d'une représentation est de la forme $\omega = m_i x^i$, où les coefficients m_i sont égaux module un[1].

[1]) G. P, p. 69.

Le groupe réel de caractère $l - 2s(s+1)$ défini par

$$\mathfrak{S} = \Pi\,(S_{\lambda,\lambda-1}\,S_{\lambda,\lambda-1'})\,(\lambda = q+2,\ q+4, \ldots,\ q+2[s/\lambda]\,;\ q = l-s)$$

si s est pair et par

$$\mathfrak{S} = S_l\,\Pi\,(S_{\lambda,\lambda+1}\,S_{\lambda,\lambda+1'})$$

si s est impair. Tout poids frontière étant homologue de son conjugué par (S), *toute représentation est autocorrélative.*

Les racines $(\lambda, \lambda-1)$, $(\lambda, \lambda-1')$ étant purement imaginaires, on voit que la transformation satisfait aux conditions du théorème III. Si $\Omega = M_i\,x^i$ est le poids dominant,

$$\begin{cases} S_{\lambda,\lambda-1}(\Omega) = \Omega - (M_\lambda - M_{\lambda-1})(\lambda, \lambda+1) \\ S_{\lambda,\lambda-1'}(\Omega) = \Omega - (M_\lambda + M_{\lambda-1})(\lambda\ \lambda+1') \\ S_l(\Omega) = \Omega - 2\,M_l(l), \end{cases}$$

et l'indice $\mathfrak{R}$ est égal à

$$2\,\Sigma\,M_\lambda$$

Les M_i étant égaux module un, cette expression est de la même parité que

$$2\,[(s+1)/2]\,M_l = \quad [(s+1)/2]\,p^1,$$

p^1 étant le coefficient du premier poids fondamental[1]. *Pour qu'une représentation soit de première classe il faut et il suffit que*

$$\{s.(s+1)/2\}\,.\,p^1$$

soit pair.

4. **Les groupes** C_l (Chap. II, § 4).

Tout poids d'une représentation est de la forme $\Omega = m_i\,.\,x^i$.

(i) **Le groupe réel normal de caractère** l. *Toute représentation est de première classe.*

(ii) **Le groupe réel de caractère** $-l-2s^2$ défini par :

$$\mathfrak{S} = \Pi\,S_{\alpha\bar\alpha}\,\Pi\,S_{\lambda\lambda'}\,(\alpha = 1, 2, \ldots, p\,;\ \bar\alpha = 2p+1-\alpha\,;$$
$$\lambda = 2p+1, \ldots, l = 2p+s)$$

Tout poids étant homologue de son conjugué par (S), *toute représentation est autocorrélative.*

Les racines $(\alpha, \bar\alpha)$ et (λ, λ') étant purement imaginaires la transformation $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition du théorème III. Si $\Omega = M_i x^i$ est le poids dominant,

$$\begin{cases} S_{\alpha\bar\alpha}(\Omega) = \Omega - (M_\alpha - M_{\alpha'})\,(\alpha, \bar\alpha) \\ S_{\lambda\lambda'}(\Omega) = \Omega - M_\lambda\ \ \lambda, \lambda') \end{cases}$$

et l'indice $\mathfrak{R}$ est égal à

$$\Sigma\,(M_\alpha - M_{\bar\alpha}) + \Sigma\,M_\lambda.$$

---

[1]) G P., p 70

Or, les coefficients $\{M_\alpha - M_{\bar\alpha}\}$ et $\{M_\lambda\}$ étant des entiers, cette expression est de la même parité que

$$M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \dots - (-1)^l M_l .$$

Les coefficients des poids fondamentaux sont[1]

$$\begin{cases} p^i = M_i - M_{i+1} \; (i = 1, 2, \dots, l-1) \\ p^l = M_l \end{cases}$$

d'où il résulte: *pour qu'une représentation soit de première classe il faut et il suffit que*

$$p^1 + p^3 + \dots + p^{2[(l+1)/2]-1}$$

soit pair.

5. **Les groupes** D_l (Chap. II, § 5).

Tout poids d'une représentation est de la forme $\omega = m_i x^i$ et les homologues des ω par (S) s'obtiennent en effectuant une permutation arbitraire des indices et en changeant de signe *un nombre pair* des coefficients m_i. Si $\Omega = M_i x^i$ est le poids dominant, les coefficients des poids fondamentaux sont[2]:

$$\begin{cases} p^1 = M_{l-1} - M_l \\ p^2 = M_{l-1} + M_l \\ p^i = M_{i-2} - M_{i-1} \; (i = 3, 4, \dots, l). \end{cases}$$

(i) **Le groupe réel de caractère** $l - 2s^2$ défini par

$$\begin{cases} \bar{x}^a = x^a & (a = 1, 2, \dots, q) \\ \bar{x}^\lambda = -x^\lambda & (\lambda = q+1, q+2, \dots, q+s = l). \end{cases}$$

Si s est pair, cette involution est une transformation du groupe (S), soit

$$\Pi (S_{\lambda, \lambda-1} S_{\lambda', \lambda-1}) \quad (\lambda = q+2, q+4, \dots, q+s = l)$$

et toute représentation est autocorrélative. Si s est impair, il faut et il suffit pour que Ω et $\bar\Omega$ soient homologues que l'un des coefficients M_i s'annule. Les p^i étant par définition positifs, ce coefficient est nécessairement M_l, et $(p^2 - p^1) = 2 M_l = 0$. Si s est impair, *la condition pour que la représentation soit autocorrélative est que* $p^1 = p^2$.

Cela étant, une transformation $\mathfrak{S}$ satisfaisant à la condition du théorème III est:

$$\mathfrak{S} = \Pi (S_{\lambda, \lambda-1} S_{\lambda, \lambda-1'}) \quad (\lambda = q+2, q+4, \dots, q + 2[s/2])$$

et

$$\begin{cases} S_{\lambda, \lambda-1}(\Omega) = \Omega - (M_\lambda - M_{\lambda-1}) (\lambda, \lambda-1) \\ S_{\lambda, \lambda-1'}(\Omega) = \Omega - (M_\lambda + M_{\lambda-1}) (\lambda', \lambda-1). \end{cases}$$

L'indice $\mathfrak{N}$ est alors égal à

---

[1]) G. P., p. 71. [2]) G P., p. 72

$$2\,\Sigma\, M_\lambda = 2\,[s/2]\,.\,M_{l-1}\ (\mathrm{mod.}\ 2) = (p^1 + p^2)\,.\,s\,(s-1)/2\ \ (\mathrm{mod.}\ 2).$$ [1]

Pour qu'une représentation autocorrélative soit de première classe, il faut et il suffit que

$$(p^1 + p^2)\,.\,s\,(s-1)/2$$

soit pair.

(ii) **Le groupe réel de caractère** $-l$ défini par

$$\bar{x}^\alpha = -x^{\bar{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, l\,;\ \bar{\alpha} = l+1-\alpha).$$

Si l est pair, cette involution est une transformation de (S), *et toute représentation est autocorrélative. Si l est impair*, on démontre de la même manière que pour la première classe de groupes réels, *qu'il faut et il suffit pour que la représentation soit autocorrélative que M_l s'annule, condition qui se réduit à: $p^1 = p^2$.*

Soit $\omega = m_i x^i$ un poids frontière; si l est impair, $M_l = 0$, et on peut supposer $m_{(l+1)/2}$ égal à zéro. Une transformation qui amène ω en $\bar{\omega}$ et qui satisfait à la condition du théorème III est:

$$\mathfrak{S} = \Pi\, S_{\alpha\,\bar{\alpha}'} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, [l/2]\,).$$

$$S_{\alpha\,\bar{\alpha}'}(\omega) = \omega - (m_\alpha + m_{\bar{\alpha}})\,(\alpha, \bar{\alpha}')$$

et l'indice $\mathfrak{N}$ est égal à $\sum_{i=1}^{l} m_i$. Les coefficients m_i étant égaux à $0\left(\mathrm{mod.}\ \frac{1}{2}\right)$, la parité de cette somme ne change pas si l'on effectue une transformation de (S); en transformant ω en Ω, la condition pour que $\mathfrak{N}$ soit pair se réduit alors à

$$\sum_{i=1}^{l} M_i = 0\ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Si l est impair, $M_l = 0$ et $M_i = 0\,(\mathrm{mod.}\ 1)$.

On peut donc changer de signe un nombre arbitraire des M_i sans changer la parité de leur somme:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \{\, M_1 - M_2 + \cdots + M_l \,\}\ (\mathrm{mod.}\ 2) \\ &= \{\, p^3 + p^5 + \cdots + p^l \,\}\ (\mathrm{mod.}\ 2)\ (\text{car } M_l = 0) \end{aligned}\right.$$

et la condition pour qu'une représentation autocorrélative soit de première classe est que:

$$p^3 + p^5 + \cdots + p_l$$

soit pair.

Si l est pair, on peut changer de signe un nombre pair des coefficients M_i sans changer la parité de leur somme:

$$\mathfrak{N} = \{\, M_1 - M_2 + \cdots - M_{4[l/4]} + \cdots + M_l \,\}\ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

---

[1]) Les coefficients m_i d'un poids sont égaux entre eux module un, et $m_i = 0$ (mod. $1/_2$). G. P., p. 71.

Si $l \equiv 0$ (mod. 4), $\mathfrak{R} = p^1 + p^3 + \cdots p^{l-1}$ (mod. 2) *et la condition pour que la représentation soit de première classe est que:*

$$p^1 + p^3 + p^5 + \cdots + p^{l-1}$$

soit pair. Si $l \equiv 2$ (mod. 4), $\mathfrak{R} = p^2 + p^3 + p^5 + \cdots + p^{l-1}$ (mod. 2) *et la condition est que*

$$p^2 + p^3 + p^5 + \cdots + p^{l-1}$$

soit pair.

Nous avons trouvé (Chap. II, § 5) dans le cas où l est un carré parfait, deux involutions du système de racines du type D_l qui donnent un groupe réel de caractère $-l$. Ce sont les involutions:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \bar{x}^a = x^{\bar{a}} & (a = 1, 2, \ldots, q) \\ \bar{x}^\lambda = -x^\lambda & (\lambda = q+1, \ldots, q+s = l \text{ où } s^2 = l) \end{cases}$$

et

$$\text{(ii)} \qquad \bar{x}^\alpha = -x^{\bar{\alpha}} \; (\alpha = 1, 2, \ldots, l\,;\; \bar{\alpha} = l + 1 - \alpha).$$

Si $l > 4$, ces deux involutions ne sont pas équivalentes. Si les deux groupes réels étaient isomorphes, à toute représentation irréductible réelle du premier correspondrait une représentation réelle du second, de même ordre. Or, la représentation de poids dominant x^1 ($p^3 = 1$, $p^i = 0$ si $i \neq 3$) est de première classe relative au premier groupe, mais ne l'est pas relative au second. *Elle est la seule représentation d'ordre* $2l$ *du groupe complexe, et il n'y a aucune représentation de ce groupe d'ordre moins de* $2l$. En effet, tout autre poids dominant admet plus de $2l-1$ homologues par le groupe (S), et la représentation serait par suite d'ordre plus grand que $2l$. La représentation de poids dominant x^1, au contraire, admet comme poids les homologues de x^1, soit $\pm x^i$, et pas d'autres poids. Ceux ci étant tous des poids frontières, chacun admet un seul vecteur, et la représentation est d'ordre $2l$. *Il en résulte que seul le premier groupe réel admet une représentation réelle d'ordre* $2l$, *et les deux groupes ne sont pas isomorphes.*

Si $l = 4$, on ne peut pas employer le même raisonnement, car les poids $\frac{1}{2}\sum \varepsilon_i x^i$ admettent chacun $2l - 1 = 7$ homologues. Dans ce cas d'ailleurs, les involutions sont équivalentes, et les groupes réels sont isomorphes.

6. **Le groupe** E_6 (Chap. II, § 6).

Tout poids est de la forme $\omega = m_i x^i$; si $\Omega = M_i x^i$ est le poids dominant, les coefficients des poids fondamentaux sont[1]:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} p^1 = M_5 - M_6 \\ p^2 = M_4 + M_5 + M_6 - \frac{1}{3}\sum M \\ p^3 = M_1 - M_2 \\ p^4 = M_4 - M_5 \\ p^5 = M_2 - M_3 \\ p^6 = M_3 - M_4 \end{cases}$$

[1]) G P., p. 75.

Considérons d'abord les groupes réels définis par une involution qui est une transformation du groupe (S). *Pour tous ces groupes, toute représentation est autocorrélative.*

(i) **Le groupe réel normal de caractère** 6. *Toute représentation est de première classe.*

(ii) **Le groupe réel de caractère** — 26 défini par:

$$S_{000}\,\Pi\, S_{\alpha\bar\alpha}\,(\alpha = 1, 2, 3\,;\ \bar\alpha = 7 - \alpha)\,;$$

$$\begin{cases} S_{000}\,(\Omega) = \Omega + \frac{1}{3}\Sigma\, M\,.\,(000) \\ S_{\alpha\bar\alpha}\,(\Omega) = \Omega - (M_\alpha - M_{\bar\alpha})\,(\alpha, \bar\alpha)\,, \end{cases}$$

et l'indice $\mathfrak{N}$ est égal à $-\frac{1}{3}\Sigma M + M_1 + M_2 + M_3 - M_4 - M_5 - M_6$. Or, $S_{456}\,(\Omega) = \Omega + (\frac{1}{3}\,\Sigma\, M - M_4 - M_5 - M_6)\,(4, 5, 6)$, et le coefficient $(\frac{1}{3}\Sigma M - M_4 - M_5 - M_6)$ est entier. En retranchant cette expression deux fois de l'indice $\mathfrak{N}$, nous avons

$$\mathfrak{N} = 0 \pmod{2}\,,$$

et toute représentation est de première classe.

Si l'involution qui définit un groupe réel du type E_6 n'appartient pas au groupe (S), elle est le produit d'une transformation de (S) et de l'involution $\bar{x}^i = -x^i\ (i = 1, \ldots, 6)$. Le conjugué $\bar\Omega$ du poids dominant Ω est homologue de $(-\Omega)$. Si (D) est la région fondamentale du groupe (S) définie par les racines fondamentales[1]

$$(5, 6), (4, 5, 6), (1, 2), (4, 5), (2, 3), (3, 4),$$

$S_{000}\, S_{16}\, S_{25}\, S_{34}\,(D) = (D')$. En effet, cette transformation de (S) change de signe toutes ces racines en les permutant. Pour que Ω soit homologue de $(-\Omega)$ il faut et il suffit donc que

$$\begin{aligned}(-\Omega) &= S_{000}\, S_{16}\, S_{25}\, S_{34}\,(\Omega) \\ &= \sum_{i=1}^{6} M_{7-i}\,.\,x^i\,.\end{aligned}$$

Cette condition peut s'écrire

$$M_i + M_{7-i} = \frac{1}{3}\Sigma\, M$$

ou, ce qui est équivalent,

---

[1]) *E. Cartan,* La géometrie des groupes simples, Ann. di Matematica, 4 (1926 – 1927), p. 214 et 215.

C., p. 64 et 65.

E. Cartan, Complément au mémoire sur la géometrie des groupes simples, Ann. di Mat., 5 (1928).

$$M_1 + M_6 = M_2 + M_5 = M_3 + M_4 .$$

Les valeurs (1) des coefficients des poids dominants fondamentaux nous donnent :

$$p^1 = p^3 ; p^4 = p^5 .$$

Pour qu'une représentation soit autocorrélative, il faut et il suffit que $p^1 = p^3$ *et que* $p^4 = p^5$.

(i) **Le groupe réel de caractère** 2 défini par le produit de $\bar{x}^i = - x^i$ par $S_{000} S_{16} S_{25} S_{34}$. Cette involution laisse invariante la région (D), et $\Omega = \bar{\Omega}$. *Toute représentation autocorrélative est de première classe*, car l'indice $\mathfrak{N}$ est égal à zéro.

(ii) **Le groupe réel de caractère** — 14 défini par le produit de $\bar{x}^i = - x^i$ par $S_{000} S_{16}$.

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= S_{000} S_{16} (- \Omega) \\ &= S_{000} S_{16} . S_{000} S_{16} S_{25} S_{34} (\Omega) \\ &= S_{52} S_{34} (\Omega), \end{aligned}$$

et la transformation $\mathfrak{S} = S_{52} S_{34}$ satisfait aux conditions du théorème III. On trouve pour l'indice $\mathfrak{N}$ la valeur

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= M_3 - M_4 + M_5 - M_2 \\ &= - (p^4 + p^5). \end{aligned}$$

La représentation étant autocorrélative, $p^4 = p^5 = 0$ (mod. 1) et $\mathfrak{N}$ est pair. *Toute représentation autocorrélative est alors de première classe.*

(iii) **Le groupe unitaire de caractère** — 78 défini par $\bar{x}^i = - x^i$. Comme transformation $\mathfrak{S}$ du groupe (S′) on pourrait prendre $S_{000} S_{16} S_{25} S_{34}$. Les calculs que nous avons faits pour le groupe réel de caractère — 26 nous montrent que $\mathfrak{N}$ est toujours pair, *et que toute représentation autocorrélative est de première classe.*

En resumé, toute représentation est autocorrélative par rapport aux groupes réels de caractere 6 et — 26, tandis que seules les représentations pour lesquelles $p^1 = p^3$ et $p^4 = p^5$ sont autocorrélatives par rapport aux groupes réels de caractère 2, — 14 et — 78. Toute représentation autocorrélative est de première classe.

7. **Le groupe** E_7 (Chap. II, § 8)

Tout poids est de la forme $\omega = m_i x^i (i = 1, 2, \ldots , 7)$ et les coefficients m_i sont égaux module un. Si $\Omega = M_i x^i$ est le poids dominant, les coefficients des poids fondamentaux sont :[1]

---

[1]) G. P., p. 79.

$$\left\{\begin{array}{l} p^1 = M_6 - M_7 \\ p^2 = M_1 - M_2 \\ p^3 = M_5 + M_6 + M_7 - \frac{1}{3}\Sigma M \\ p^4 = M_2 - M_3 \\ p^5 = M_5 - M_6 \\ p^6 = M_3 - M_4 \\ p^7 = M_3 - M_5. \end{array}\right.$$

L'involution qui définit tout groupe réel du type E_7 est une transformation du groupe (S). *Toute représentation est alors autocorrélative par rapport à tout groupe réel.*

(i) **Le groupe réel normal de caractère** 7. *Toute représentation est de première classe.*

(ii) **Le groupe réel de caractère** -25 défini par :

$$S_{12}\, S_{34}\, S_{127}\, S_{347}.$$

Comme transformation $\mathfrak{S}$ de (S′) satisfaisant aux conditions du théorème III, prenons :

$$\mathfrak{S} = S_{12}\, S_{34}\, S_{127}\, S_{347}.$$

L'indice $\mathfrak{R}$ du poids dominant Ω est

$$2(M_3 - M_2) = 0 \pmod{2}.$$

Toute représentation est alors de première classe relative aux groupes réels de caractère 7 *et* -25.

(iii) **Le groupe réel de caractère** -5 défini par :

$$S_{167}\, S_{25}\, S_{34}.$$

Comme transformation $\mathfrak{S}$ prenons $S_{167}\, S_{52}\, S_{34}$. L'indice $\mathfrak{R}$ est égal à :

$$-\tfrac{1}{3}\Sigma M + M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 + M_6 + M_7$$
$$= p^2 + p^3 + p^6.$$

(iv) **Le groupe réel unitaire de caractère** -133 défini par :

$$S_{007}\, S_{16}\, S_{25}\, S_{34}\, S_{167}\, S_{257}\, S_{347}.$$

Comme transformation $\mathfrak{S}$ nous pouvons prendre :

$$\mathfrak{S} = S_{007}\, S_{16}\, S_{52}\, S_{34}\, S_{167}\, S_{257}\, S_{346}.$$

et l'indice $\mathfrak{R}$ du poids dominant est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= -\tfrac{4}{3}\Sigma M + 2\,M_1 + 2\,M_3 + 2\,M_5 + 4\,M_7 \\ &= p^2 + p^3 + p^6 - 2\,p^1 \\ &= (p^2 + p^3 + p^6) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que seules les représentations pour lesquelles $(p^2 + p^3 + p^6)$

est pair sont de première classe relative aux groupes réels de caractère — 5 et — 133.

8. Tous les groupes réels des types E_8, F_4 et G_2 sont définis par une involution qui appartient au groupe (S') correspondant au groupe réel, et cette transformation satisfait aux conditions du théorème III. Il en résulte que *toute représentation irréductible d'un de ces trois groupes complexes est autocorrélative par rapport à tout groupe réel.*

Nous passerons en revue ces divers groupes réels, à l'exclusion des groupes normaux, qui sont toujours de premiere classe.

Le groupe E_8 (Chap. II, §).

Tout poids est de la forme $\omega = m_i x^i$, où l'on peut supposer $\sum m_i = 0$[1]. Soit $\Omega = M_i x^i$ le poids dominant.

(i) *Le groupe réel de caractère* — 24 défini par:

$$\mathfrak{S} = S'_{912} S_{12} S_{934} S'_{34}.$$

Pour l'indice $\mathfrak{N}$ on trouve la valeur $2(M_1 + M_3 + M_9)$. Or,

$$S_{139}(\Omega) = \Omega - (M_1 + M_3 + M_9)(1, 3, 9),$$

d'où $\mathfrak{N}$ est pair.

(ii) *Le groupe réel unitaire de caractère* — 248, défini par:

$$\mathfrak{S} = \Pi\,(S_{9\,a,\,a-1}\, S_{a-1,\,a}) \quad (a = 2, 4, 6, 8).$$

L'indice $\mathfrak{N}$ est égal à $2(M_1 + M_3 + M_9) + 2(M_5 + M_7 + M_9)$, qui est toujours pair.

Le groupe F_4 (Chap. II, § 9).

Soit $\Omega = M_i x^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ le poids dominant.

(i) *Le groupe réel de caractère* — 20 défini par:

$$\mathfrak{S} = S_2 S_{34} S_{34'}.$$

L'indice $\mathfrak{N}$ est égal à $2(M_2 + M_3)$, $S_{23'}(\Omega) = \Omega - (M_2 + M_3)(2, 3')$ et $\mathfrak{N}$ est pair.

(ii) *Le groupe réel unitaire de caractère* — 52 défini par:

$$\mathfrak{S} = S_{12} S_{34} S_{12'} S_{34'}.$$

L'indice $\mathfrak{N}$ est égal à $2(M_1 + M_3)$, qui est pair.

Le groupe G_2 (Chap. II, § 10).

Soit $\Omega = M_i x^i$ $(i = 1, 2, 3)$ le poids dominant.

Le groupe unitaire de caractère — 14 défini par:

$$\mathfrak{S} = S_1 S_{23}.$$

L'indice $\mathfrak{N}$ est égal à $2(M_1 - M_3)$, $S_{13}(\Omega) = \Omega - (M_1 - M_3)(1, 2)$ et $\mathfrak{N}$ est pair.

---

[1]) G. P., p. 80

Il en résulte que toute représentation irréductible d'un des groupes E_8, F_4 *ou* G_2 *est de première classe relative à tout groupe réel.*

9. Dans les calculs que nous venons de faire nous avons choisi arbitrairement une involution particulière qui définit chaque groupe simple réel. Obtiendrait-on les mêmes conditions en remplaçant cette involution par une involution équivalente?

Toute représentation irréductible d'un groupe simple complexe appartient à l'une des trois classes suivantes relatives à un groupe réel donné: ou bien elle est de première classe, ou bien elle est autocorrélative sans être de première classe, ou bien elle n'est pas autocorrélative. Soit $\mathfrak{R}$ une représentation irréductible de $\mathfrak{G}$ de poids frontière Ω qui appartient à l'une de ces trois classes relatives au groupe réel G défini par l'involution T du système de racines. Si T* est une involution équivalente qui peut être définie en effectuant sur T une transformation $\mathfrak{S}$ du groupe (S), la représentation $\mathfrak{R}^*$ de poids frontière $\mathfrak{S}$ (Ω) appartient à la même classe relative au groupe réel G* défini par l'involution T*. Or, $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$, car $\mathfrak{S}$ (Ω) est un poids frontière de $\mathfrak{R}$. *Il en résulte que les conditions pour qu'une représentation soit ou bien autocorrélative ou bien de première classe sont les mêmes pour les groupes réels* G *et* G*.

Le seul cas où cette transformation de T en T* ne soit pas possible est celui du groupe réel du type D_l et de caractère $-l$ défini par:

$$\overline{x^\alpha} = -x^{\bar{\alpha}} (\alpha = 1, 2, \ldots, l ; \bar{\alpha} = l + 1 - \alpha).$$

Toute involution équivalente à celle-ci peut se réduire ou bien à

$$\overline{x^\alpha} = -x^{\bar{\alpha}} (\alpha = 1, 2, \ldots, l)$$

ou bien à

$$\overline{x^1} = x^l ; \overline{x^\beta} = -x^{\bar{\beta}} (\beta = 2, 3, \ldots, l-1),$$

en effectuant une transformation de (S). On obtient facilement les conditions suivantes dans le cas de la seconde involution:

(a) pour que la représentation soit autocorrélative il faut et il suffit que $p^1 = p^2$ si l est impair.

(b) pour qu'une représentation autocorrélative soit de première classe, il faut et il suffit:

(i) si l est impair que

$$p^3 + p^5 + \cdots + p^l$$

soit pair.

(ii) si $l = 0.$ (mod. 4) que

$$p^2 + p^3 + p^5 + \cdots + p^l$$

soit pair.

(ii) si $l = 2 \pmod{4}$ que

$$p^1 + p^2 + \cdots + p^l$$

soit pair.

Ces nouvelles conditions se déduisent des anciennes en échangeant entre eux les coefficients p^1 et p^2.