

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JULIEN KRAVTCHENKO

**Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz  
; théorie des sillages et des proues**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1941

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1941\\_\\_236\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1941__236__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :  
2814  
Série A.  
N° de Série 1947

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. JULIEN KRAVTCHENKO

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — SUR LE PROBLÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME DE HELMHOLTZ;  
THÉORIE DES SILLAGES ET DES PROUES.

2<sup>e</sup> THÈSE. — SUR LES RÉCENTS TRAVAUX CONCERNANT LA THÉORIE DES SILLAGES.

---

Soutenues le 1941 devant la Commission d'examen.

---

MM. VILLAT, *Président.*  
J. PÉRÈS } *Examineurs.*  
BOULIGAND }



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—  
1941

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM

*Doyen honoraire*

M MOLLIARD

*Doyen*

C MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe

<i>Professeurs honoraires</i>	H LEBESGUE	DANGEARD	LAPICQUE	DUBOSCQ
	EMILE PICARD	LESPIEAU	G BERTRAND	BOHN.
	LÉON BRILLOUIN	MARCHIS	ABRAHAM	RABAUD
	PECHARD	VESSIOT	CH FABRY	CAULLERY
	FREUNDLER	PORTIER	LÉON BERTRAND	J PERRIN
	AUGER	MOLLIARD	WINTREBERT	CARTAN

## PROFESSEURS

ÉMILE BOREL	T Calcul des probabilités et Physique mathématique	PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées
A COTTON	T Recherches physiques	VILLEY	Mécanique physique et expérimentale
J DRACH	T Analyse sup <sup>re</sup> et Algèbre sup <sup>re</sup>	COMBES	T Physiologie végétale
CHARLES PEREZ	T Zoologie	GARNIER	T Mathématiques générales
M GUICHARD	T Analyse et mesures chimiques	PERLS	Mécanique théorique des fluides
PAUL MONTEL	T Théorie des fonctions et Théorie des transformations	HACKSPILL	T Chimie minérale
L BLARINGHEM	T Botanique	TOUSSAINT	Technique aéronautique
G JULIA	T Mécanique analytique et Mécanique céleste	M CURIE	Physique (P C B)
C MAUGUIN	T Minéralogie	G. RIBAUD	T Hautes températures
A DENJOY	T Géométrie supérieure	CHAZY	T Mécanique rationnelle
L LUTAUD	T Géographie physique et Géologie dynamique	GAULT	Chimie (P C B)
G BRUHAT	T Physique théorique et physique céleste	CROZE	Recherches physiques
E DARMOIS	T Enseignement de Physique	DUPONT	T Théories chimiques
A DEBIERNE	T Physique générale et Radioactivité	LANQUINE	T Géologie structurale et Géologie appliquée
A DUFOUR	T Physique (P C B)	VALIRON	Mathématiques générales
I DUNOVER	Optique appliquée	BARRABE	Géologie structurale et Géologie appliquée
A GUILLIERMOND	T Botanique	MILLOT	Biologie animale (P C B)
M JAVILLIER	T Chimie biologique	F PERRIN	Théories physiques
HENRI VILLAT	T Mécanique des fluides et applications	VAVON	Chimie organique
CH JACOB	T Géologie	C DARMOIS	Calcul des probabilités et Physique mathématique
P PASCAL	T Chimie minérale	CHATTON	T Biologie maritime
M FRECHET	T Calcul différentiel et Calcul intégral	AUBEL	Chimie biologique.
E ESCLANGON	T Astronomie	JACQUES BOURCARI	Géographie physique et Géologie dynamique
M <sup>me</sup> RAMART LUCAS	T Chimie organique	M <sup>me</sup> JOLIOT-CURIE	Physique générale - Radioactivité
H BEGHIN	T Mécanique physique et expérimentale	PLANTEFOL	Biologie végétale (P C B)
FOCH	T Mécanique expérimentale des fluides	CABANNES	Enseignement de Physique
PAUFHENIER	Physique (P C B)	GRASSE	Zoologie Evolution des êtres organisés
DR BROGLIE	T Théories physiques	PRÉVOST	Chimie (P C B)
CHRETIEN	Optique appliquée	BOULIGAND	Mathématiques
LABROUSTE	Physique du Globe	CHAUDRON	Chimie (P C B)
		CHATELET	Arithmétique supérieure
		CARTAN H	Calcul différentiel

*Secrétaire*

A. PACAUD

*Secrétaire honoraire*

D TOMBECK

**A MADAME MADELEINE VIONNET**





**A MONSIEUR HENRI VILLAT**

**MEMBRE DE L'INSTITUT  
PROFESSEUR A LA SORBONNE**



---

# PREMIÈRE THÈSE

SUR

LE

PROBLÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME DE HELMHOLTZ

THEORIE DES SILLAGES ET DES PROUES

---

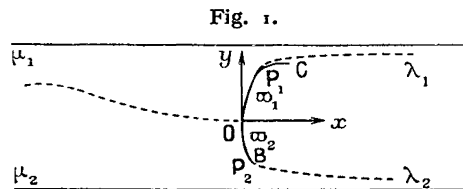
## CHAPITRE I.

---

### I. — Généralités. Historique. Énoncé des problèmes.

1. SCHEMA DE HELMHOLTZ-KIRCHHOFF. — Considérons un mouvement permanent, plan, irrotationnel d'un fluide parfait, incompressible, enfermé dans un canal <sup>(1)</sup> à parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , rectilignes, indéfinies et parallèles. Venant de l'infini en amont, le courant heurte un obstacle  $\widehat{BC}$ , fixe par rapport aux bords du canal.

Pour échapper au paradoxe de d'Alembert, on est conduit à envisager le schéma suivant du mouvement. En un point O du profil de



l'obstacle, la vitesse du fluide est nulle; le courant s'y divise en deux

---

(<sup>1</sup>) Le cas du fluide limité par une seule paroi plane, ainsi que le cas du fluide illimité, peuvent être envisagés comme cas limites du canal.

parties. Le fluide glisse ensuite le long des arcs  $OP_1$  et  $OP_2$  (arcs que nous désignerons par  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ ) de la courbe obstacle, s'en détache aux points  $P_1$  et  $P_2$  (confondus ou non avec ses extrémités), formant ainsi à l'arrière du corps solide immergé un sillage étendu jusqu'à l'infini et limité, outre  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , par deux lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , de formes *a priori* inconnues. La masse du fluide formant sillage est immobile par rapport au corps.

L'obstacle est supposé tranchant. Nous admettrons donc dans ce qui suit que la condition suivante est satisfaite : l'intersection de toute droite parallèle aux parois avec la courbe obstacle se réduit à un seul point; exceptionnellement cette intersection pourra comprendre un segment rectiligne. Les arcs  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  possèdent en chacun de leurs points une tangente qui varie continûment le long de ces arcs. Dans certains énoncés, le point O pourra, toutefois, être supposé anguleux.

Relativement au schéma de Helmholtz <sup>(2)</sup>-Kirchhoff <sup>(3)</sup> qu'on vient de décrire, on peut se poser plusieurs problèmes.

**2. PROBLÈME INDÉTERMINÉ DE MM. LEVI-CIVITA ET VILLAT.** — On se donne *a priori* une fonction d'une variable caractérisant l'obstacle et les valeurs de trois paramètres; le problème consiste à construire, à partir de ces données arbitraires (assujetties, toutefois, à vérifier quelques conditions qualitatives simples), un mouvement à la Helmholtz et en déterminer les éléments géométriques et cinématiques.

Ce problème, formulé par M. H. Villat <sup>(4)</sup> à la suite des travaux de M. T. Levi-Civita <sup>(5)</sup>, a été résolu par M. Villat lui-même,

---

<sup>(2)</sup> *Berliner Berichte*, 1868, p. 215; *Wissenschaftl.-Abhandlungen*, t. 1, p. 146.

<sup>(3)</sup> *Vorlesungen über math. Physik*, 22<sup>e</sup> leçon.

<sup>(4)</sup> *Sur la résistance des fluides* (Thèse), Annales de l'École Normale Supérieure, 1911, p. 203. Voir aussi le Mémoire de H. Villat, id., t. 29, 1912, p. 127 et son livre : *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (Collection Scientia, Gauthier-Villars, 1920).

<sup>(5)</sup> *Scie le leggi di résistenze* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 23, 1907).

étudié et généralisé ensuite par M. U. Cisotti <sup>(6)</sup> et ses élèves, puis par MM. D. Riabouchinsky et B. Demtchenko <sup>(7)</sup>.

Les formules de résolution de M. Villat permettent d'écrire les équations des lignes de jet; on constate que ces courbes sont à tangente continue et se raccordent en leurs points de détachement avec l'obstacle, formant ainsi avec lui un contour à tangente continue.

**3. VALIDITE PHYSIQUE DES SOLUTIONS.** — Pour être physiquement acceptables, les solutions construites par M. Villat doivent satisfaire à deux conditions énoncées par M. M. Brillouin <sup>(8)</sup>.

En premier lieu, la vitesse du courant doit être partout inférieure à la vitesse du courant à l'infini en aval. Cette inégalité fondamentale complète les équations du problème en exprimant que la pression ne peut devenir négative en aucun point du fluide en mouvement; elle assure la convexité des lignes de jet vers le courant, allure qui, du point de vue physique, est particulièrement satisfaisante pour elles.

En second lieu, les lignes de jet ne doivent ni se recouper, ni recouper l'obstacle. En étudiant à ce point de vue l'allure de la ligne libre au point de détachement, MM. Brillouin et Villat ont constaté que sa courbure est, en général, infinie en ce point; la courbe s'incurve donc dans le voisinage de ce dernier. Cela est sans inconvénient dans le cas de l'obstacle tranchant si le point  $P_1$  est confondu avec l'extrémité de l'obstacle. Cette circonstance est, au contraire, incompatible avec l'hypothèse d'un corps solide se prolongeant dans le sillage au delà du point  $P_1$ . Il faut donc assujettir la ligne libre à

---

<sup>(6)</sup> *Idromecanica piana*, Milan, 1922 (chez Tamburini). Cet ouvrage contient une bibliographie très étendue des travaux de l'école italienne (MM. Colonetti, Caldonazzo, Palatini, Boverio, etc.); on y trouvera aussi des indications sur les travaux antérieurs à ceux de M. Villat et dus, outre M. Cisotti lui-même, à lord Rayleigh, Michell, A. Love, Bobyleff, Réthy, Greenhill, etc.; ces auteurs ont réussi à résoudre ce que nous appelons le problème indéterminé dans des cas particuliers.

<sup>(7)</sup> Cf. l'ouvrage de M. DEMTCHENKO, *Problèmes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits*, 1934 (Gauthier-Villars), qui comporte une bibliographie complète de la question; cet auteur a réussi à traiter le problème dans des cas beaucoup plus étendus.

<sup>(8)</sup> *Annales de Physique et de Chimie*, 23, 1911, p. 154.

avoir au point  $P_1$  une courbure finie; celle-ci est alors nécessairement égale, comme l'a montré M. Villat, à celle de l'obstacle en ce point.

Dans ce cas, le détachement est dit en poue.

**4. PROBLÈMES DU SILLAGE ET DE LA PROUE.** — Les remarques qui précèdent incitent à préciser comme suit le schéma du mouvement de Helmholtz et à formuler pour les obstacles tranchants deux problèmes.

*Problème du sillage.* — On place arbitrairement les points de détachement des lignes libres aux extrémités de l'obstacle, caractérisé par les données arbitraires de M. Villat et l'on construit à l'aide de ses formules la solution correspondante. Il y aura lieu ensuite de vérifier si les conditions de validité de M. Brillouin sont satisfaites.

*Problème de la poue.* — On cherche à construire un mouvement à la Helmholtz (correspondant à un obstacle caractérisé par les données arbitraires de M. Villat) ayant les propriétés suivantes : si l'extrémité de l'obstacle ne coïncide pas avec le point de détachement, la ligne libre doit présenter en ce point un détachement en poue. On examinera ensuite la solution du point de vue de la validité.

**5. ÉTUDE DE LA VALIDITÉ DES SOLUTIONS DE M. VILLAT.** — On se trouve ainsi conduit au problème de la validité physique des solutions de la théorie du sillage et de la poue; il s'agit de déterminer des classes aussi étendues que possible des fonctions arbitraires caractérisant l'obstacle qui conduisent à un régime physiquement acceptable. Dans cet ordre d'idées, les premiers résultats fondamentaux sont dus à M. Villat <sup>(9)</sup> qui, en se bornant au cas de l'obstacle symétrique (soit en fluide indéfini, soit placé symétriquement dans un canal), a indiqué de vastes catégories de profils auxquels la théorie des sillages s'adapte parfaitement.

M. C. Jacob <sup>(10)</sup> a, depuis, sensiblement généralisé plusieurs théorèmes de M. Villat tout en simplifiant les démonstrations.

---

<sup>(9)</sup> *Journal de Mathématiques*, 6<sup>e</sup> série, 10, 1914, p. 231.

<sup>(10)</sup> *Sur la détermination des fonctions harmoniques par certaines conditions aux limites* (Thèse) (*Mathematica*, t. XI, 1935, p. 150). Cet auteur étudie

En dehors des cas de la lame rectiligne placée dans le canal et des obstacles concaves vers le courant en fluide illimité (théorème de M. Boggio), on ne connaissait, jusqu'à ces dernières années, aucun exemple de profil dissymétrique conduisant aux solutions acceptables. M. J. Leray <sup>(11)</sup> a obtenu des théorèmes de validité en s'affranchissant de l'hypothèse de la symétrie mais en supposant le fluide indéfini. Dans le Chapitre II, nous montrons que ses conclusions subsistent encore lorsqu'on suppose le fluide enfermé dans un canal à bords rectilignes; nous étendons également aux obstacles de forme dissymétrique plusieurs propositions de MM. Villat et Jacob.

**6. PROBLÈMES D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ.** — On se donne un obstacle tranchant  $\widehat{BC}$  par ses équations intrinsèques, ainsi que sa position par rapport aux parois du canal.

*Problème du sillage.* — Déterminer un mouvement à la Helmholtz qui correspond à la configuration ainsi définie, les points de détachement étant placés, *par hypothèse*, aux extrémités B, C de l'obstacle.

*Problème de la proue.* — Déterminer le sillage correspondant à un obstacle  $\widehat{P_1P_2}$  caractérisé comme suit :  $\widehat{P_1P_2}$  coïncide avec  $\widehat{BC}$  ou est une portion de cet arc. Si  $P_1$  (ou  $P_2$ ) est intérieur à  $\widehat{BC}$ , la ligne libre issue de ce point doit y présenter un détachement en proue. Si  $P_1$  (ou  $P_2$ ) coïncide avec C (ou B), la ligne libre issue de ce point y présente un détachement en proue ou non <sup>(12)</sup>. [Autrement dit, les points de détachement sont actuellement inconnus *a priori*;

---

un schéma voisin de celui de Helmholtz proprement dit et qui a été proposé par M. V. Valcovici dans son *Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1913.

<sup>(11)</sup> *Commentarii Mathematici Helvetici*, 8, 1936, p. 250. Du même auteur : *Sur la validité des solutions du problème de la proue* (Jubilé de M. M. Brillouin, 1935, p. 246).

<sup>(12)</sup> Ces problèmes ont été posés sous cette forme par M. Leray. L'énoncé de M. Leray est même plus précis; si le point de détachement  $P_1$ , par exemple, coïncide avec C, la ligne libre  $\lambda_1$ , lorsqu'elle n'y présente pas un détachement en proue, sera assujettie à y présenter un détachement vers l'aval, c'est-à-dire à présenter sa convexité vers le courant dans le voisinage de C.



mais on impose à la ligne libre une condition supplémentaire de détachement (\*).]

Les problèmes de cette nature seront dits *symétriques* lorsqu'ils seront posés sur des obstacles symétriques par rapport à l'axe du canal; on impose *a priori* au sillage la condition de présenter la même symétrie.

Helmholtz a montré que ces problèmes reviennent à déterminer la représentation conforme du domaine du fluide en mouvement sur un domaine de forme convenable. Ce problème, d'un type essentiellement différent de celui de Riemann, présente la difficulté suivante : une portion de la frontière des deux domaines n'est pas connue *a priori* (c'est le cas des lignes libres pour le domaine du fluide en mouvement). Par contre la fonction analytique, qui réalise la représentation conforme en cause, est assujettie à vérifier le long des portions inconnues de frontière des conditions limites que nous préciserons.

La résolution explicite du problème ainsi posé est, en général, impossible.

On se borne à établir l'existence de solutions, à discuter leur nombre (en particulier à rechercher les catégories d'obstacles pour lesquelles la solution est unique) et à en étudier les propriétés (du point de vue de leur validité et de leur dépendance des éléments géométriques de la configuration).

Avant les travaux de M. Leray, les problèmes de cette nature étaient traités d'abord par la méthode de continuité; la question d'existence des solutions était abordée en même temps que celle de leur unicité.

Les premiers résultats sont dus à M. Weinstein (<sup>13</sup>) qui a étudié

---

(\*) Signalons encore un schéma différent que M. Stefan Bergmann a fait connaître dans son Mémoire publié dans : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 12, Heft 2, 1932. Les résultats, curieux, de cet auteur se rattachent aux recherches de M. Villat et de M. Thiry (voir la Thèse de M. Thiry : *Annales de l'École Normale Supérieure*, III, série 38, 1921) sur la multiplicité des solutions de certains problèmes de l'Hydrodynamique; c'est là un point de vue étranger au présent travail.

(<sup>13</sup>) *Sur les jets liquides à parois données* (*Rend. d. R. Acc. Lincei*, 1926, p. 119); *Sur le théorème d'existence pour les jets liquides* (*id.*, 1927, p. 157);

le problème du jet liquide symétrique, équivalent à celui du sillage symétrique dans un canal. Cet auteur opère d'abord la réduction du problème à une question d'unicité locale. Ce dernier problème a été successivement résolu, sous des hypothèses de plus en plus étendues, par MM. G. Hamel (<sup>14</sup>), H. Weyl (<sup>15</sup>) et K. Friedrichs (<sup>16</sup>). Les résultats les plus complets obtenus par cette méthode sont de MM. Leray et Weinstein (<sup>17</sup>).

Dans le cas particulier d'un arc de cercle symétrique placé dans un courant indéfini, le problème d'existence a été ramené par M. A. Quarleri (<sup>18</sup>) à la résolution d'une équation intégrale non linéaire, à laquelle cet auteur tenta d'appliquer les théorèmes d'existence de M. Hammerstein. La question a été reprise par M. Weinstein (<sup>19</sup>) qui a signalé des erreurs dans les raisonnements de M. Quarleri et qui a présenté ensuite une démonstration rigoureuse du théorème d'existence (\*).

---

*Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen* (*Math. Zeitschrift*, t. 31, 1929, p. 424).

(<sup>14</sup>) *Über einen hydrodynamischen Unitätssatz* (*C. R. du 2<sup>e</sup> Congrès Intern. de Mécanique appliquée*, Zürich, 1926).

(<sup>15</sup>) *Strahlbildung nach der Kontinuitätsmethode behandelt*; *Gött. Nachrichten*, 1927, p. 227.

(<sup>16</sup>) *Über ein Minimum problem für Potentialströmungen* (*Math. Annalen*, t. 109, 1933, p. 60).

(<sup>17</sup>) *Sur un problème de représentation conforme posé par la théorie de Helmholtz* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 198, 1934, p. 430).

(<sup>18</sup>) *Sulla teoria della scia nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo* (*Rend. d. R. Acc. de Lincei*, 1931, p. 332).

(<sup>19</sup>) *Sur les sillages provoqués par des arcs circulaires* (*Rend. d. R. Acc. dei Lincei*, 1933, p. 83). *Sur les points de détachement des lignes de glissement* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 196, 1933, p. 324). On trouvera un exposé de l'ensemble des travaux qui précède dans un article de M. Weinstein publié dans *l'Enseignement Mathématique*, t. 35, 1936, p. 107.

(\*) Signalons encore une courte Note de M. M. Lavrentieff parue dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.*, vol. XVIII, 1938, fasc. 4 et 5, p. 225 (cette Note a été développée dans un Mémoire très étendu publié en 1939 dans le *Recueil Mathématique de la Société Mathématique de Moscou*, qu'à mon grand regret, et en raison des circonstances actuelles, je n'ai pas pu consulter), où l'auteur énonce des théorèmes très généraux d'existence et d'unicité de la solution du problème du sillage. M. Lavrentieff aborde seule-

Dans ce domaine, M. Leray <sup>(20)</sup> a été le premier à établir des théorèmes d'existence et d'unicité pour des obstacles dissymétriques, plongés dans un fluide indéfini et assujettis seulement à avoir une courbure suffisamment régulière. Cet auteur part des équations intégral-différentielles du problème du sillage [obtenues par M. Villat <sup>(21)</sup>] qui rentrent dans la classe des équations fonctionnelles étudiées par lui en collaboration avec M. J. Schauder <sup>(22)</sup>. Cette théorie permet d'aborder le problème d'existence indépendamment de la question d'unicité. Des théorèmes d'existence ainsi obtenus valent pour des catégories d'obstacles beaucoup plus larges que les énoncés d'unicité; ceux-ci ne s'appliquent qu'aux obstacles réguliers de forme particulièrement simple (profils symétriques, profils convexes, etc.); pour certains profils les conclusions sont particulièrement décisives : arcs de cercle, profils symétriques dits en « accolade ». Les problèmes du sillage ou de la proue posés pour un tel obstacle n'admettent qu'une seule solution qui est nécessairement acceptable; le schéma de Helmholtz semble donc s'adapter particulièrement bien aux profils qui offrent au courant une grande résistance <sup>(23)</sup>.

---

ment le cas du fluide indéfini. Les hypothèses qu'il fait sur la nature de l'obstacle sont les suivantes :

- 1° l'obstacle possède une courbure suffisamment régulière;
- 2° l'obstacle est symétrique par rapport à une droite parallèle à la direction du courant à l'infini (nos énoncés sont affranchis de cette hypothèse);
- 3° l'intersection de l'obstacle avec une droite parallèle à l'axe de symétrie peut contenir plus d'un point (au contraire, nous supposons qu'une telle intersection ne peut contenir qu'un point unique). Par contre, l'intersection de l'obstacle avec une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie devrait se réduire à un point unique; cette hypothèse n'intervient pas dans nos énoncés.

Plusieurs lemmes, énoncés dans la Note citée, semblent pouvoir conduire à quelques théorèmes de validité.

Ajoutons que M. Lavrentieff ne se pose pas le problème de la proue pour les obstacles qu'il étudie; sa méthode ne semble avoir aucun point commun avec la nôtre.

<sup>(20)</sup> Voir *loc. cit.* <sup>(11)</sup>.

<sup>(21)</sup> Cf. par exemple *Journal de Mathématiques*, 6<sup>e</sup> série, t. 7, 1911, p. 353.

<sup>(22)</sup> J. LERAY et J. SCHAUDER, *Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 51, 1934, p. 45.

<sup>(23)</sup> Avant de terminer ce rapide aperçu historique, je dois mentionner un

On peut résumer comme suit nos recherches sur ce sujet : les théorèmes d'existence et d'unicité établis par M. Leray pour des catégories de profils déterminés (variables d'ailleurs d'un énoncé à l'autre), plongés dans un fluide illimité, valent pour les mêmes catégories

---

certain nombre de travaux qui traitent de l'existence et de l'unicité des solutions du problème du sillage sans atteindre toute la rigueur désirable. Il s'agit des publications de M. Schmieden et de ses élèves (le travail de base de M. Schmieden a été publié dans le Band III, 4 Heft de *l'Ingénieur Archiv*, 1932, p. 368), et de celles des élèves de M. Nekrassoff.

A mon grand regret, je n'ai pu consulter le Mémoire de M. Schmieden. Toutefois, il résulte de plusieurs remarques de MM. Leray (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 8, p. 153) et Weinstein (*Zentralblatt*) que ses démonstrations manqueraient de rigueur.

Je n'ai pas pu, non plus, prendre connaissance du travail de M. Nekrassoff, paru en 1922 dans les Publications de l'Institut Polytechnique d'Ivanovo Vozniesensk sous le titre : *Sur le mouvement discontinu à deux dimensions du fluide autour d'un obstacle en forme d'arc de cercle*, ni des travaux de ses élèves : MM. N. Arjannikoff [*Sur le mouvement d'un courant fluide discontinu et plan autour d'un arc de parabole (Recueil Mathématique de Moscou*, t. XXXV, 1928)], P. Miasnikoff et S. Kalinine (*Dissertations inaugurales* soutenues devant l'Institut de Mécanique de l'Université de Moscou au mois de juin 1935), N. Slioskine, etc. La courte analyse de la méthode employée par ces auteurs que nous allons présenter est faite d'après un article de M. J. Sekerj-Zenkowitch, intitulé : *Aperçus sur la théorie du courant fluide autour d'un arc curviligne avec détachement des lignes de jet* et publié sous forme de brochure par les soins de l'Institut Central aérohydrodynamique de Moscou.

Dans cet article, l'auteur expose la méthode de M. Nekrassoff et l'applique au cas des obstacles suffisamment réguliers situés dans un courant plan de largeur infinie. Sa démonstration me paraît présenter deux lacunes :

1° Après avoir énuméré les hypothèses de régularité faites sur la nature de l'obstacle, M. Sekerj-Zenkowitch affirme, sans le démontrer, que la fonction inconnue doit posséder une dérivée continue. Notons que ce résultat est exact, comme le montrent les paragraphes 22 et 26 de ce travail.

2° Ceci posé, M. Sekerj-Zenkowitch aborde la solution du problème par la méthode des approximations successives. Après avoir défini son processus d'approximations successives, il en démontre la convergence avec beaucoup d'ingéniosité. Il semble, malheureusement, que l'auteur a interverti l'ordre de certaines opérations, en sorte que le problème qu'il a résolu n'est pas identique à celui du sillage, tel qu'il a été formulé dans le texte. Une critique détaillée du procédé de M. Sekerj-Zenkowitch est faite au cours du paragraphe 23.

d'obstacles enfermés dans un canal; les équations intégral-différentielles de M. Villat que nous discutons font intervenir des fonctions elliptiques (contrairement à ce qui a lieu dans le cas du fluide illimité) construites à l'aide du paramètre  $q$ ; ce paramètre se présente sous forme de fonctionnelle très compliquée des données géométriques de la configuration; c'est la limitation *a priori* de cette fonctionnelle qui constitue une difficulté spécifique des problèmes du sillage et de la proue en présence des parois planes.

Signalons, à ce propos, que nous avons réussi à simplifier certains raisonnements de M. Leray en améliorant quelques lemmes de représentation conforme qu'on lui doit et en généralisant un énoncé de MM. Fatou <sup>(24)</sup> et Priwaloff <sup>(25)</sup>; nous avons pu construire *a priori* des modules de continuité pour les fonctions qui réalisent l'application conforme d'une classe très générale des domaines sur le demi-plan, nos résultats restant valables le long des frontières des domaines. Cet aspect de nos recherches, qui présente un intérêt propre, permet de rattacher nos travaux à ceux de MM. Carathéodory, Wolf, Ostrowski, Lavrentieff, Seidel, Warschawski, dont on trouvera la bibliographie au troisième Chapitre.

Il convient aussi de rappeler le rôle que joue, dans nos démonstrations du quatrième Chapitre, certains résultats de MM. Friedrichs et A. Weinstein <sup>(26)</sup>. Enfin nous étudions les propriétés de la solution dont nous avons reconnu l'existence <sup>(27)</sup>.

Nous déterminons d'abord le sens des variations que fait subir, au débit du liquide et au paramètre  $q$ , une translation connue des parois planes. Ensuite nous précisons le comportement des solutions lorsque l'une des parois,  $\mu_1$ , pour fixer les idées, se rapproche indéfiniment

---

<sup>(24)</sup> *Acta Math.*, t. 30, 1906.

<sup>(25)</sup> *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 44, 1916, p. 100-103.

<sup>(26)</sup> *Loc. cit.* <sup>(15)</sup> et <sup>(16)</sup>.

<sup>(27)</sup> Dans sa thèse et dans une Note élégante aux *Rend. d. Real. Acc. d. Lincei*, 24, 1936, p. 439, M. Jacob s'occupe des problèmes analogues mais dans le cas symétrique. Il applique, notamment, les théories de MM. Schauder-Leray à la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de la proue, l'obstacle étant un arc circulaire, et fait ensuite connaître des propriétés remarquables de la solution.

de l'obstacle de manière à venir à la limite au contact avec l'extrémité C de celui-ci. Nous montrons que la configuration limite du sillage est celle qui correspond à l'obstacle fixé à  $\mu_1$  au point C; le point de bifurcation se confond à la limite avec C. Nous faisons ensuite connaître l'allure limite de la ligne libre  $\lambda_1$ , étranglée entre le profil et la paroi. Exception faite du voisinage de  $\lambda_1$ , le passage du régime considéré au régime limite se fait d'une manière continue. Il faut entendre par là que la vitesse d'un point du fluide en mouvement (n'appartenant pas à la veine étranglée) converge uniformément vers sa limite; en particulier, il en est ainsi le long de l'obstacle, le point C excepté.

Une partie des résultats ci-dessus est en défaut lorsque la demi-tangente du profil au point C, orientée dans le sens de la vitesse du fluide, fait un angle nul avec la vitesse à l'infini en aval.

L'étude que nous venons de résumer nous paraît être la partie la plus originale de ce travail. A notre connaissance, de tels passages à la limite n'ont encore jamais été examinés par les hydrodynamiciens, en raison des difficultés que présentait leur discussion (une partie des formules de M. Villat devient alors illusoire) et que l'utilisation de quelques théorèmes de M. Leray a permis de vaincre.

Les résultats obtenus sont tous conformes à ceux que l'intuition et l'observation laissent prévoir; c'est, peut-être, une preuve de plus que le schéma de Helmholtz traduit assez fidèlement la réalité physique<sup>(28)</sup>.

Mes recherches ont été entreprises sous l'impulsion et sous le contrôle de M. Henri Villat. Ceux qui ont eu le privilège de travailler sous sa direction savent la part qui lui revient dans les progrès réalisés par ses élèves; ils comprendront les sentiments de profonde gratitude qui m'animent envers mon maître au terme de ce travail.

Je suis heureux que M. Villat a bien voulu accepter cet ouvrage comme un témoignage de ma reconnaissance pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer et pour les directives qu'il m'a données.

---

(28) Nos recherches ont été résumées dans des Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* : 200, 1935, p. 208; 200, 1935, p. 1832; 201, 1936, p. 250; 203, 1936, p. 426; 205, 1937, p. 1205.

Plusieurs des résultats exposés dans mon Mémoire ont été inspirés par M. Jean Leray; plusieurs autres ont été obtenus en appliquant des méthodes qu'il a eu souvent l'obligeance de me faire connaître de vive voix. Je le remercie très vivement de l'aide si essentielle et, parfois, si décisive qu'il m'a ainsi apportée.

Au cours de mes recherches, j'ai eu de fréquentes occasions d'échanger des idées sur les mouvements à la Helmholtz avec MM. A. Weinstein, C. Jacob et A. Oudart. Leurs critiques et leurs conseils m'ont été précieux pour la mise au point de plusieurs paragraphes de cet ouvrage. De plus, M. A. Oudart a eu l'amabilité de lire attentivement mon manuscrit; ses suggestions m'ont permis d'améliorer sur plus d'un point ma rédaction primitive. En leur rendant témoignage du service qu'ils m'ont ainsi rendu, je leur en adresse ici l'expression de toute ma reconnaissance.

## II. — Rappel des résultats connus.

Problème de MM. Levi-Civita-Villat. Solution indéterminée de M. Villat.

7. NOTATIONS; PREMIERS RÉSULTATS. PREMIÈRES CONDITIONS DE VALIDITÉ DE M. BRILLOUIN. — Nous rapporterons la configuration envisagée au paragraphe 1 au système d'axes rectangulaires  $Oxy$  ayant pour origine le point de bifurcation  $O$ ; l'axe des  $x$  sera choisi parallèle à la vitesse du fluide à l'infini en aval et orienté dans le sens de celle-ci. On introduit la variable complexe  $z = x + iy$ .

Rappelons <sup>(29)</sup> que le fluide est incompressible; son mouvement est irrotationnel et permanent. Ces hypothèses entraînent l'existence du potentiel des vitesses  $\varphi(x, y)$  et de la fonction de courant  $\psi(x, y)$  indépendantes du temps; le potentiel complexe  $f(z)$  est alors défini par

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

les constantes additives arbitraires étant choisies de manière que  $f(o)$

---

<sup>(29)</sup> Pour tout ce qui concerne ce paragraphe, voir le livre de M. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides*.

soit nul. Dans ces conditions, les composantes  $u$ ,  $v$  suivant les axes du vecteur vitesse  $\vec{V}$  d'une particule fluide seront données par la formule

$$\frac{df}{dz} = u - iv.$$

D'après cela, le module  $V(x, y)$  de  $\vec{V}$  est égal à  $\left| \frac{df}{dz} \right|$ . La fonction  $V(x, y)$  est donc essentiellement positive; elle ne doit devenir nulle qu'au point de bifurcation. Nous appellerons  $\Theta(x, y)$  l'angle algébrique que fait la vitesse  $\vec{V}$  avec  $Ox$ ; on a donc

$$\arg. \frac{df}{dz} = -\Theta(x, y).$$

La fonction  $f(z)$  est analytique dans le domaine fluide en mouvement; elle est régulière à distance finie à l'intérieur et sur les frontières; elle est uniforme partout, les points à l'infini compris. Il en sera de même de la fonction  $\frac{df}{dz}$ ; les fonctions  $\varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  d'une part,  $\log V(x, y)$  et  $\Theta(x, y)$  d'autre part sont donc harmoniques, régulières dans leur domaine de définition où elles sont deux à deux conjuguées. Les conditions que nous venons d'énoncer sont la traduction mathématique de quelques caractéristiques qualitatives du mouvement à la Helmholtz.

Les hypothèses faites sur la nature du mouvement entraînent aussi l'égalité de Bernoulli; pour en simplifier l'écriture, nous supposons les unités choisies de manière que la densité du fluide (constante, le fluide étant incompressible) soit égale à l'unité, ainsi que la vitesse du mouvement à l'infini en aval. On a alors, en appelant  $p_0$  la pression du fluide à l'infini en aval, et  $p$  la pression en un point quelconque

$$(1.1) \quad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Le liquide situé dans le sillage est au repos; la pression  $y$  est donc constante, frontière comprise. D'après (1.1) la vitesse sera constante le long des lignes libres qui limitent le sillage, égale donc à la valeur qu'elle a à l'infini, c'est-à-dire à l'unité.



L'équation (1.1) montre, de plus, que la pression  $p$  en un point du fluide peut devenir négative si la vitesse en ce point est supérieure à 1,  $p_0$  n'étant pas assez grand. Or,  $p_0$  est une constante additive arbitraire; la solution ne sera donc entièrement satisfaisante, du point de vue physique, que si la fonction  $V(x, y)$  vérifie dans le domaine du fluide en mouvement la condition de M. Brillouin

$$(1.2) \quad V \leq 1$$

qui complète les équations du problème.

La fonction  $V(x, y)$  étant harmonique, il n'y a besoin de vérifier l'inégalité précédente que le long des frontières du domaine où elle est définie. Lorsque la condition (1.2) est satisfaite, la fonction  $V$  atteint son maximum sur les lignes libres, le long desquelles elle vérifie donc l'inégalité

$$\frac{\partial V}{\partial n} < 0,$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale à la ligne libre orientée vers l'intérieur de la masse fluide mobile. Or, en désignant par  $dl$  l'élément d'arc de la ligne  $\lambda_1$ , par exemple, compté positivement à partir de son point de détachement, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial \Theta}{\partial l},$$

les fonctions  $V$  et  $\Theta$  étant harmoniques conjuguées. Il s'ensuit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial l} < 0.$$

Cette inégalité exprime le fait que la ligne de jet  $\lambda_1$  tourne sa convexité vers le courant toutes les fois que la condition (1.2) est satisfaite; du point de vue physique cette forme de la frontière libre est très satisfaisante. Nous admettons, pour l'instant, l'existence des dérivées ci-dessus qui sera établie plus tard en toute rigueur.

Le raisonnement prouve, en outre, que les vitesses sont supérieures à l'unité dans le voisinage des portions de lignes libres concaves vers le courant; la convexité de ces lignes est donc une condition nécessaire, sinon suffisante, de la validité physique.

**8. REPRÉSENTATION CONFORME DU DOMAINE DU FLUIDE EN MOUVEMENT SUR DES DOMAINES AUXILIAIRES. CONDITIONS AUX FRONTIÈRES.** — L'arc  $\varpi_1$  de l'obstacle et la ligne libre  $\lambda_1$  correspondante constituent visiblement une ligne de courant d'équation  $\psi = 0$ , puisque la vitesse est, par hypothèse, tangente à la ligne  $\varpi_1$ ; il en est de même de l'ensemble formé de l'arc  $\varpi_2$  et de  $\lambda_2$ . La fonction  $f$  croît de 0 à  $+\infty$  lorsqu'on décrit depuis l'origine jusqu'à l'infini chacune des lignes  $\varpi_1 + \lambda_1$  et  $\varpi_2 + \lambda_2$ .

En effet,  $\varphi(0, 0)$  est nul. D'autre part, on peut écrire le long de  $\varpi_1 + \lambda_1$  et  $\varpi_2 + \lambda_2$

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| = V.$$

Or,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f| = +\infty.$$

Enfin  $\varphi$  ne cesse de croître le long de  $\varpi_1 + \lambda_1$  (ou de  $\varpi_2 + \lambda_2$ ), ainsi que le montre l'égalité

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = V$$

qui, le long de chacune de ces lignes, se réduit à  $\frac{d\varphi}{dl} = V$ , en appelant  $l$  l'abscisse curviligne. Or,  $V$  est essentiellement positif.

Le long de chacune des parois  $\psi$  demeure constant, les parois constituant des lignes de courant; nous poserons

$$\psi(x, y) = \psi_1, \quad \text{sur } \mu_1 \quad \psi(x, y) = -\psi_2, \quad \text{sur } \mu_2,$$

les constantes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  étant évidemment positives.

Le potentiel des vitesses  $\varphi$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$  quand on décrit de l'amont à l'aval chacune des parois. En effet, le débit du fluide à travers une section du canal étant constant le long de ce canal, la vitesse à l'infini en amont n'est pas nulle; le raisonnement utilisé ci-dessus montre que les points  $x = -\infty$  et  $\varphi = -\infty$  se correspondent; dès lors, la démonstration s'achève comme plus haut.

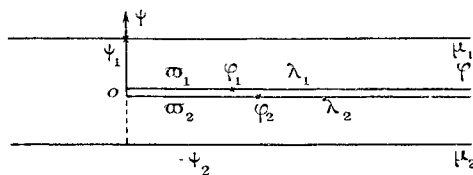
De l'ensemble de ces résultats, il suit que la fonction analytique et uniforme  $f = f(z)$  réalise la représentation conforme du domaine  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement sur le domaine correspondant  $F$  du plan du

potentiel complexe  $f$ . La frontière de  $F$  se compose de deux droites d'équations :

$$\psi = \psi_1, \quad \psi = -\psi_2$$

(images des parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  du canal) et des deux bords de la coupure pratiquée le long du demi-axe réel positif du plan  $f$  (fig. 2).

Fig. 2.



Le bord supérieur de la coupure correspond à la ligne  $\sigma_1 + \lambda_1$ ; le bord inférieur à la ligne  $\sigma_2 + \lambda_2$ . Nous désignerons par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les affixes réels des images dans le plan  $f$  des points  $P_1$  et  $P_2$ .

Nous avons vu que le long des lignes libres la vitesse du fluide est égale à 1; cette condition se traduit par l'équation

$$(1.3) \quad \left| \frac{df}{dz} \right| = 1.$$

Elle exprime que la correspondance conforme entre les domaines  $\mathcal{A}$  et  $F$  doit conserver les longueurs le long des lignes de jet. Enfin, le long des lignes de courant  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , la composante  $v$  de la vitesse doit être nulle; d'après la définition même de  $\frac{df}{dz}$  cette fonction sera donc réelle sur  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

En définitive, la fonction analytique  $f = f(z)$ , qui réalise l'application conforme de  $\mathcal{A}$  sur  $F$  vérifie l'ensemble suivant des conditions que nous désignerons désormais par (H) :

1° les systèmes de trois points à l'infini (un en amont, deux en aval) des plans  $f$  et  $z$  se correspondent;

2° les directions sont conservées le long des parois (ou de leurs images); cela se traduit par la condition frontière

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{df}{dz} \quad \text{sur } \mu_1 \text{ et } \mu_2;$$

3° les longueurs sont conservées le long de lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (ou de leurs images); cela se traduit par la condition frontière

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = 1 \quad \text{sur } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2.$$

La vitesse complexe étant, par hypothèse, une fonction uniforme de  $z$ , les conditions (1.2) et (1.3) entraînent encore la suivante :  $\frac{df}{dz} = 1$  aux points à l'infini en aval.

Inversement,  $z$  peut être envisagée comme une fonction  $z(f)$  de la variable  $f$  définie dans le domaine  $F$  : elle vérifie, évidemment, les trois conditions précédentes.

Helmholtz et Kirchhoff ont fait voir que la relation qui lie les deux variables  $z$  et  $f$  caractérise complètement le mouvement; il suffit de remarquer que le champ des vitesses est donné par la formule

$$\frac{df}{dz} = u - iv.$$

Le régime hydrodynamique défini par la relation  $z = z(f)$  ne pourra être physiquement acceptable que si la quantité

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

satisfait à l'inégalité de M. Brillouin

$$\left| \frac{df}{dz} \right| \leq 1.$$

**9. SOLUTIONS INDÉTERMINÉES. SOLUTION INDÉTERMINÉE DE M. LEVI-CIVITA. DEUXIÈME CONDITION DE M. BRILLOUIN.** — La recherche d'un mouvement à la Helmholtz correspondant à une configuration donnée dans le plan  $z$  revient donc à déterminer une fonction  $f(z)$  satisfaisant aux conditions (H). La résolution de ce problème, dont l'énoncé complet sera donné au Chapitre III, présente des difficultés qui ont d'abord paru insurmontables; pour l'instant, notons que ni le domaine de définition  $\mathcal{A}$  de  $f(z)$  ni son image  $F$  dans le plan  $f$  ne sont entièrement déterminés, puisque les lignes libres, d'une part, et les quatre cons-

tantes  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$  et  $\psi_2$ , d'autre part, sont *a priori* inconnues. Mais le domaine  $F$  est évidemment mieux déterminé *a priori* que son image  $\mathcal{A}$ . On a été ainsi amené à traiter le problème inverse : étant donné quatre constantes positives  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ , définir dans le domaine  $F$  qui leur correspond des fonctions  $z = z(f)$  vérifiant les trois conditions (H). C'est ce qu'on appelle le problème indéterminé dont la solution explicite permettrait de construire un exemple effectif d'un mouvement à la Helmholtz. On prouverait ainsi que notre schéma est compatible avec les équations de l'hydrodynamique et l'on pourrait alors en étudier les propriétés d'une manière approfondie.

Suivant les idées de M. Levi-Civita, M. Villat aborde la question comme suit : il représente conformément le domaine  $F$  sur une demicouronne circulaire du plan auxiliaire  $Z = X + iY$ ; les éléments de frontières homologues des deux plans seront précisés plus loin. Pour cela il effectue d'abord la transformation

$$(1.4) \quad f = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(t-a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(t-b) + D + i\psi_1,$$

dans laquelle  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels et où l'on a posé

$$\begin{aligned} \log(t-a) &= \log |t-a| && \text{pour } t > a, \\ \log(t-b) &= \log |t-b| && \text{pour } t > b. \end{aligned}$$

La valeur du paramètre  $D$  sera précisée tout à l'heure.

Au domaine  $F$  on fait ainsi correspondre le demi-plan supérieur  $\mathcal{E}$  du plan  $t$ ; les points  $t = \infty$  et le point à l'infini en amont du plan  $f$  sont images l'un de l'autre, alors que les images  $t = a$  et  $t = b$  des points à l'infini en aval des parois  $\mu_2$  et  $\mu_1$  restent pour l'instant arbitraires. Nous pouvons donc choisir à notre gré les affixes des images de deux points frontières quelconques de  $F$ ; la relation entre  $f$  et  $t$ , qui fait intervenir en apparence trois constantes,  $a, b$  et  $D$ , ne doit dépendre effectivement que de deux paramètres. En effet, dans l'intervalle  $(a, b)$  la fonction  $f(t)$  est assujettie à avoir un minimum égal à zéro. Or,  $\frac{df}{dt}$  s'annule pour

$$(1.4') \quad t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}.$$

On peut donc écrire

$$-\frac{\psi_2}{\pi} \log(t_0 - a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(b - t_0) + D = 0,$$

relation qui permet d'exprimer  $D$  en fonction de  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $a$  et de  $b$ . Nous déterminerons alors les paramètres  $a$  et  $b$  en faisant correspondre aux points de détachement  $f = \varphi_1$  et  $f = \varphi_2$  les points  $t = 1$  et  $t = -1$ ; cela donne

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\psi_2}{\pi} \log(1 - a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(1 - b) + D + i\psi_1, \\ \varphi_2 &= -\frac{\psi_2}{\pi} \log(-1 - a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(-1 - b) + D + i\psi_1. \end{aligned}$$

Les constantes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant réelles et positives, les équations ci-dessus n'admettent de solutions réelles que si  $a < -1$  et  $b > +1$ . M. Villat a montré que le système précédent possède alors un système et un seul de solutions en  $a$  et  $b$ , pourvu que, comme on le constate d'ailleurs sans peine, le nombre  $t_0$ , précédemment défini, soit compris entre  $-1$  et  $+1$ . La réciproque est vraie si  $|t_0| < 1$ .

Ainsi, nous avons substitué à l'ensemble de quatre paramètres  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , qui caractérisent le domaine  $F$ , le groupe entièrement équivalent de quatre paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  qui définissent la correspondance conforme entre  $F$  et  $\mathfrak{E}$ .

Il est très important de se rappeler que les paramètres  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  étant positifs et les points  $f = \varphi_1$  et  $f = \varphi_2$  ayant les points  $t = +1$  et  $t = -1$  pour images, les paramètres  $a$  et  $b$  correspondants doivent vérifier [cf. (1.4)] l'ensemble des conditions

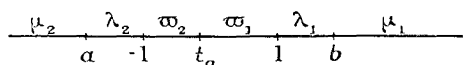
$$(1.4'') \quad \left\{ \begin{array}{l} a < -1, \\ b > 1, \\ -1 < t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} < 1, \end{array} \right.$$

qu'à l'avenir nous supposons toujours remplies. De ces inégalités il résulte notamment que si  $\psi_1$  augmente indéfiniment,  $\psi_2$  restant fini, le paramètre  $b$  correspondant doit augmenter indéfiniment de manière que le quotient  $\frac{\psi_1}{b}$  ait une valeur finie. Cette conclusion nous sera utile au cours des paragraphes **14** et **27**.

Il est utile de noter que le domaine  $\mathfrak{C}$  est caractérisé par trois paramètres  $a, b, t_0$  seulement; il en sera de même maintenant de tous les domaines auxiliaires que nous aurons à considérer.

Les éléments correspondants des domaines  $F$  et  $\mathfrak{C}$  sont mis en évidence sur la figure 3.

Fig. 3.



Cela posé, M. Villat introduit une variable complexe nouvelle

$$u = u_1 + i u_2,$$

qu'il définit par

$$(1.5) \quad du = \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t^2-1)}}.$$

On en tire, en effectuant l'inversion de l'intégrale elliptique du second membre,

$$(1.5') \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p'[u, \omega_1, \omega_2] - p'[\gamma, \omega_1, \omega_2]}{p[u, \omega_1, \omega_2] - p[\gamma, \omega_1, \omega_2]}.$$

La constante d'intégration de l'équation différentielle (1.5) a été choisie de manière à faire correspondre le point  $u = 0$  au point à l'infini du plan  $t$ . Dans cette relation  $p(u, \omega_1, \omega_2)$  désigne la fonction doublement périodique de Weierstrass dont les demi-périodes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont données par les formules

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \int_{-\infty}^a \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}} + \int_b^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}}, \\ \frac{\omega_2}{i} = \int_a^{-1} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}} = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}}, \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$R(t) = (t-a)(t-b)(t^2-1),$$

et où les radicaux ont leur sens arithmétique.

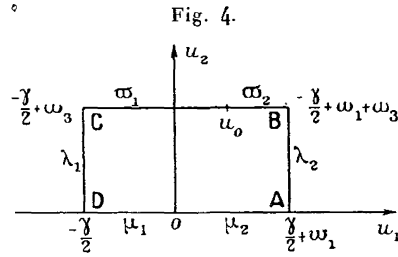
Le paramètre  $\gamma$  qui figure dans (1.5') est un nombre réel positif défini par la formule

$$(1.6') \quad \gamma = 2 \int_b^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}},$$

qui se déduit de la lecture de la figure 4;  $\gamma$  vérifie l'équation

$$p[\gamma | \omega_1, \omega_3] = \frac{3(a^2 + b^2) - 2ab + 8}{48}.$$

Il convient de remarquer que les quantités  $\omega_1, \omega_3$  et  $\gamma$  ainsi définies ne dépendent que de  $a$  et de  $b$ ; ce fait aura une grande importance dans la suite.



La formule de transformation (1.5) [ou (1.5')] fait correspondre, au demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}$ , l'aire intérieure à un rectangle R du plan  $u$ . Les points  $t = a, t = -1, t = +1, t = b$  ont respectivement pour images les sommets A, B, C, D de R dont les affixes sont, dans l'ordre

$$-\frac{\gamma}{2} + \omega_1, \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega_1 + \omega_3, \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega_3, \quad -\frac{\gamma}{2}.$$

Notons enfin que l'affixe  $u_0$  de l'image du point  $t = t_0$  est défini sans ambiguïté par la relation

$$(1.6'') \quad t_0 = \frac{a + b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' u_0 - p' \gamma}{p u_0 - p \gamma},$$

$u_0 = u_{01} + \omega_3$  sera donc une fonction compliquée des deux paramètres  $a$  et  $b$ . Réciproquement, à un choix de valeurs de  $u_0, a, b$  correspond une valeur et une seule du quotient  $\frac{\psi_2}{\psi_1}$  [cf. l'équation (1.4')]. Les éléments homologues des domaines  $\mathfrak{C}$  et R ont été mis en évidence sur la figure 4.

Finalement M. Villat pose encore

$$(1.7) \quad u = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z,$$



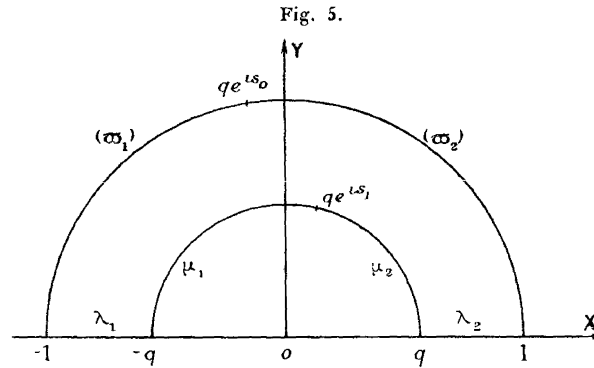
en faisant ainsi correspondre à l'intérieur du rectangle R l'aire intérieure  $d$  de la demi-couronne circulaire supérieure située dans le plan de la variable  $X = X + iY$  et centrée sur l'origine.

Les rayons des cercles de la couronne sont respectivement égaux à 1 et à  $q$ ,  $q$  étant le paramètre bien connu dans la théorie des fonctions elliptiques, défini par la relation

$$(1.8) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega_2}{i\omega_1}}.$$

Il en résulte, rappelons-le, que  $q$  est un nombre positif, inférieur à l'unité.

La demi-circonférence  $|Z|=1$  est l'image du côté BC du rectangle R; la demi-circonférence  $|Z|=q$  est l'image du côté DA de R. Enfin les segments  $(-1, -q)$ ,  $(q, +1)$  de l'axe réel du plan Z correspondent respectivement aux côtés CD et AB de R.



Aux points  $u=0$  et  $u=u_0$  la formule de transformation fait correspondre respectivement les points

$$Z_1 = q e^{is_1}, \quad Z_0 = e^{is_0},$$

dont les arguments  $s_1$  et  $s_0$  sont définis par les relations

$$(1.8') \quad s_1 = \frac{\pi}{\omega_1} \left( \omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right), \quad s_0 = -\frac{\pi}{\omega_1} \left[ u_{01} - \omega_1 + \frac{\gamma}{2} \right].$$

La figure 5 met en évidence les éléments homologues des domaines R et  $d$ .

Moyennant les transformations successives que nous venons de définir, le potentiel complexe  $f$  s'exprimera en fonction de la variable  $Z$  par l'intermédiaire de la formule (1.4), dans laquelle il faut poser

$$(1.9) \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' \left[ \omega_1 + \omega_2 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right] - p'(\gamma)}{p \left[ \omega_1 + \omega_2 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right] - p(\gamma)}.$$

Nous aurons bientôt besoin de l'expression de la différentielle de la fonction  $f$ ; celle-ci sera définie par l'ensemble de deux formules

$$(1.10) \quad df = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} dt$$

avec

$$(1.10') \quad dt = - \frac{\omega_1}{i\pi} \frac{p' \left( \frac{\gamma}{2} \right) p' \left[ \omega_1 + \omega_2 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right]}{\left[ p \left( \omega_1 + \omega_2 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right]^2} \frac{dZ}{Z}.$$

En résumé, le domaine demi-circulaire  $d$  est défini par trois paramètres  $g$ ,  $s_0$  et  $s_1$ ;  $g$  et  $s_1$  s'expriment au moyen de  $a$  et de  $b$  seulement, alors que  $s_0$  est fonction des quatre nombres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  qui caractérisent complètement la correspondance conforme entre  $d$  et  $F$ . Les deux groupes de paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , d'une part,  $g$ ,  $s_1$ ,  $s_0$ , auxquels on adjoint l'une des constantes  $\psi_1$  ou  $\psi_2$ , d'autre part, sont équivalents.

Cela étant, M. Villat se propose de construire dans le domaine  $d$  une fonction  $\frac{df}{dz}$  satisfaisant aux conditions (H); pour cela il introduit la fonction analytique uniforme  $\Omega(Z)$  de M. Levi-Civita en posant

$$(1.11) \quad \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega(z)} = e^{i - i\Theta}.$$

Il en résulte

$$(1.12) \quad V = \left| \frac{df}{dz} \right| = e^1.$$

Ainsi l'inégalité  $V > 0$  sera satisfaite d'elle-même. Par ailleurs, on voit, compte tenu de l'égalité  $\frac{df}{dz} = u - iv$ , que  $\Theta$  est égal à l'argument du vecteur vitesse dans le plan  $z$ .

Énumérons les conditions qu'on doit imposer à priori à la fonction  $\Omega(Z)$ , définie dans  $d$ , pour que la formule (1. 1) puisse convenir à un schéma de Helmholtz.

La vitesse complexe  $\frac{df}{dz}$ , définie dans le domaine  $F$ , doit être, nous l'avons vu, une fonction analytique uniforme et régulière à l'intérieur de  $F$  et sur ses frontières; elle ne s'annule dans  $F$  que pour  $f = 0$ . La formule (1. 11) montre alors que la fonction analytique  $\Omega(Z)$  doit être uniforme et régulière dans  $d$  et sur ses frontières à l'exception de l'image  $Z_0 = e^{i\theta_0}$  du point  $f = 0$  [ou d'après (1. 12)  $T$  doit être infinie négative]. Les fonctions  $\Theta(X, Y)$  et  $T(X, Y)$  devront donc être harmoniques et régulières dans leur domaine de définition  $d$ , frontières comprises, le point  $Z_0 = e^{i\theta_0}$  excepté.

D'après la deuxième condition (H),  $\frac{df}{dz}$  doit être réel sur la demi-circonférence  $|Z| = q$ ; il en résulte que l'argument  $\Theta$  de cette fonction doit être nul sur cette portion de frontière de  $d$ .

D'après la troisième condition (H), le module de la vitesse complexe doit être égal à 1 le long des segments  $(-1, -q)$ ,  $(q, 1)$  de l'axe réel du plan  $Z$ ; d'après (1. 12) cela exige que l'on ait

$$T = 0 \quad \text{sur} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \\ \lambda_2. \end{array} \right.$$

Cette condition entraîne la conséquence fondamentale suivante. La fonction  $\Omega(Z)$ , étant réelle sur l'axe réel et régulière dans le voisinage de cet axe, est prolongeable à travers cet axe au moyen du principe de symétrie de Schwarz. Il en résulte que cette fonction est définie dans toute la couronne circulaire  $C$  limitée par les cercles  $|Z| = 1$  et  $|Z| = q$  où elle prend des valeurs imaginaires conjuguées aux points  $Z$  imaginaires conjugués (<sup>30</sup>).

---

(<sup>30</sup>) Il résulte donc de ce qui précède que  $\Omega(Z)$  est une fonction régulière partout, sauf aux points d'affixes  $Z = e^{\pm i\theta_0}$ ; mais il ne faudrait pas en conclure, sans nouvel examen, que  $\Omega(Z)$ , uniforme dans  $d$ , le sera encore dans  $C$ . Nous verrons que la condition (1. 13) exprime précisément la condition d'uniformité de  $\Omega(Z)$  dans son nouveau domaine de définition  $C$  (et non seulement dans le domaine  $d$ ).

Enfin la condition d'uniformité de la fonction  $\frac{df}{dz}$  à l'infini en aval

$$\frac{df}{dz} = 1 \text{ aux points à l'infini en aval}$$

se transforme, compte tenu de (1.11), en la suivante

$$(1.13) \quad \Omega(\pm q) = 0,$$

dont on apercevra bientôt toute l'importance.

L'extension du domaine de définition de  $\Omega(X, Y)$  permet de faire un progrès important dans l'étude du schéma de Helmholtz. En effet, les images des lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont maintenant intérieures (extrémités exclues) au domaine  $C$ ; il s'ensuit que  $\Omega(Z)$ , et par conséquent  $\frac{df}{dz}$ , sont des fonctions analytiques le long de chacune d'elles, sauf peut-être pour  $Z = \pm 1$ ,  $Z = \pm q$ . Cela montre [la correspondance  $f = f(Z)$ , définie par les formules (1.4) et (1.9), étant analytique] qu'il en est de même de la correspondance  $z = z(Z)$ , excepté, peut-être, les points précédemment exclus. Or, les parois et leurs images dans le plan  $f$  étant des courbes analytiques, la fonction  $\frac{df}{dz}$  et, par conséquent,  $\Omega(Z)$  est analytique le long de  $|Z| = q$  et, en particulier, aux points  $Z = \pm q$  <sup>(31)</sup>.

Ainsi, les lignes libres sont des courbes analytiques, sauf, peut-être, en leurs points de détachement respectifs.

En résumé, à la fonction  $\frac{df}{dz}$ , définie dans le domaine  $F$ , nous avons fait correspondre une fonction  $\Omega(Z)$  définie dans le domaine  $C$  plus simple, où elle vérifie des conditions frontières également plus simples.

Réciproquement, donnons-nous quatre constantes  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  ( $a < 1$ ,  $b > 1$ ). Nous savons construire, comme cela a été expliqué plus haut, les domaines  $d$  et  $F$  caractérisés par ces paramètres et la fonction  $f = f(Z)$  qui réalise la représentation conforme

---

<sup>(31)</sup> L'analyticité de  $\Omega(Z)$  le long du cercle  $|Z| = q$  résulte aussi du fait que la fonction  $i\Omega(Z)$ , étant réelle le long de ce cercle, est prolongeable analytiquement à travers lui.

de l'un de ces domaines sur l'autre. Si l'on sait alors définir dans le domaine  $d$  une fonction  $\Omega(Z)$  vérifiant les conditions ci-dessus énoncées, on sait construire un domaine  $\mathcal{A}$  au moyen de la relation

$$(1.14) \quad z = \int_{e^{i\theta_0}}^z e^{i\Omega Z} df$$

[où la différentielle  $df$  doit être remplacée par son expression (1.10) après y avoir substitué à  $t$  et à  $dt$  leurs valeurs (1.9) et (1.10')] qui établit une correspondance conforme entre  $F$  et  $\mathcal{A}$  satisfaisant aux conditions de régularité et aux trois conditions (H). Remarquons enfin que les points  $z = 0$  et  $f = 0$  sont images l'un de l'autre.

Ainsi, étant donné quatre paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , le problème indéterminé revient à définir dans le domaine  $d$ , qui leur correspond, des classes aussi vastes que possible des fonctions  $\Omega(Z)$  de M. Levi-Civita; M. Villat a été le premier à se servir directement de cette méthode pour construire des solutions indéterminées<sup>(32)</sup>. Une fois une telle solution obtenue, il y a lieu de vérifier si l'inégalité (1.2) de M. Brillouin est satisfaite; or celle-ci s'écrit, d'après (1.12),

$$T \leq 0,$$

inégalité qu'il suffit de vérifier le long des frontières circulaires de  $d$ , la fonction  $T$  étant nulle le long de l'axe réel.

De plus, M. Brillouin a fait voir sur des exemples simples que le domaine obtenu à partir de la formule (1.14) peut se recouvrir; les lignes de jet que cette relation définit peuvent se recouper ou recouper l'obstacle, circonstances évidemment incompatibles avec la nature physique du problème. Il y a donc toujours lieu d'étudier les solutions au point de vue de cette condition de non-recoupement qu'on appelle la *deuxième condition de validité* de M. Brillouin.

Il reste à noter un grave inconvénient de la solution indéterminée de M. Levi-Civita; on n'aperçoit pas de liaison nette entre la fonction arbitraire  $\Omega(Z)$  et l'obstacle qui lui correspond dans le plan  $z$ . Nous allons voir comment M. Villat a réussi à surmonter cette difficulté.

---

(32) Antérieurement à M. Villat, M. Cisotti a traité le problème symétrique par rapport à l'axe du canal.

**10. SOLUTION INDETERMINEE DE M. VILLAT.** — M. Villat part du fait que la partie réelle  $\Theta(X, Y)$  de la fonction arbitraire  $\Omega(Z)$  est l'argument du vecteur vitesse dans le plan  $z$ . Supposons que l'on ait pu construire, dans un domaine  $d$ , une fonction  $\Omega(Z)$  continue tout le long de la demi-circonférence supérieure  $Z = e^{is}$  ( $0 \leq s \leq \pi$ ), excepté au point  $Z = e^{is_0}$ . Alors  $\Theta(X, Y)$  est une fonction continue  $\Phi(s)$  de l'argument  $s$  de  $Z = e^{is}$  dans l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ , excepté pour  $s = s_0$ , où nous la supposons discontinue mais bornée. La fonction  $\Theta(X, Y)$  vérifie donc, dans le domaine  $C$ , les conditions frontières suivantes :

$$\Theta(X, Y) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq \pi, & \text{sur le cercle } |Z| = 1. \\ \Phi(2\pi - s) & \text{pour } \pi \leq s \leq 2\pi, & \text{»} \\ 0, & & \text{sur le cercle } |Z| = q. \end{cases}$$

Par ailleurs  $T(X, Y)$  est nul sur l'axe réel. M. Villat a montré que, dans ces conditions, la fonction  $\Omega(Z)$  s'exprime, au moyen de  $\Phi(s)$ , par la formule

$$(1.15) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s') \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\tau} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\tau} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds',$$

valable à l'intérieur, mais non sur la frontière  $|Z| = 1$  de son domaine de définition  $C$ . Rappelons que  $\zeta(u)$  est la fonction bien connue de la théorie des fonctions elliptiques, construite à l'aide des nombres  $\omega_1$  et  $\omega_3$  définis par les formules (1.6).

Les conditions (1.13) se réduisent ici à la relation unique

$$(1.16) \quad \int_0^\pi \Phi(s) ds = 0,$$

qu'on obtient en faisant  $Z = \pm q$  dans la formule (1.15) et en tenant compte du fait que  $\zeta u$  est impaire et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\zeta(u + 2\omega_l) = \zeta u + 2\pi l \quad (l = 1, 2, 3).$$

Cette condition de M. Villat, appelée à jouer dans la suite un rôle fondamental, exprime le fait que la fonction  $\Omega(Z)$  définie par le second membre de (1.15) est uniforme dans le domaine  $C$ . Si, en effet,  $Z$  décrit dans le sens direct un cercle concentrique à l'origine, les

arguments des fonctions  $\zeta$ , qui figurent dans cette formule, augmentent de  $2\omega_1$ . La quantité entre crochets s'accroît donc de  $4\eta_1$ ; or, d'après (1.16), la contribution à  $\Omega(Z)$  de ce terme constant additif est nulle.

En définitive, nous avons substitué la fonction  $\Phi(s)$  de M. Villat à la fonction arbitraire  $\Omega(Z)$  de M. Levi-Civita dans le cas où celle-ci est continue pour  $Z = e^{is}$ , sauf pour  $s = s_0$ . Nous allons préciser quelques hypothèses supplémentaires moyennant lesquelles la formule (1.14) fera correspondre au domaine  $d$  et à la fonction  $\Omega(Z)$ , définie par la formule (1.15), un domaine  $\mathcal{A}$  où l'image de la demi-circonférence  $|Z| = 1$  sera une courbe obstacle à tangente continue partout, à l'exception du point de bifurcation  $O$ , image du point  $Z = e^{is_0}$ ;  $\Phi(s)$  sera alors l'angle que fait avec  $Ox$  la vitesse tangentielle à l'obstacle, au point image  $Z = e^{is}$ . La fonction  $\Phi(s)$  caractérisera donc l'allure de l'obstacle d'une manière très précise.

Il y aura plus;  $\Phi(s)$  étant continue, par hypothèse, dans le voisinage de  $s = 0$  et  $s = \pi$ , il en sera de même de  $\Theta(X, Y)$  dans le voisinage des points  $Z = \pm 1$ . Ceci montre que la ligne libre se raccordera à l'obstacle; exception faite, éventuellement, du point de bifurcation, l'obstacle et les lignes libres formeront une courbe à tangente continue<sup>(33)</sup>.

Cherchons à préciser la nature de la discontinuité à imposer à  $\Phi(s)$  pour  $s = s_0$  de manière à obtenir dans le plan  $z$  un obstacle ayant en son point de bifurcation une allure conforme à la réalité physique.

Nous poserons

$$(1.17) \quad \Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0) = 2\pi\alpha,$$

$\alpha$  étant un nombre réel compris entre 0 et 1<sup>(34)</sup>; si  $\alpha = \frac{1}{2}$ , l'obstacle sera à tangente continue en 0; si  $\alpha$  est nul ou égal à 1, l'obstacle

(<sup>33</sup>) Mais, bien entendu, il n'en résulte pas que la ligne libre ait une courbure régulière en son point de détachement. Cf. à ce sujet le paragraphe 13 où nous précisons l'allure de la fonction  $\Theta[X(l), 0]$  (qui exprime l'angle de la tangente à la ligne libre en fonction de l'abscisse curviligne  $l$  de celle-ci), dans le voisinage des points de détachement.

(<sup>34</sup>) Pour des raisons qui seront explicitées au paragraphe 12,  $\alpha$  devra être supposé différent de l'unité.

possédera en  $o$  un point de rebroussement; le point  $o$  est anguleux dans tous les autres cas.

Enfin, l'intersection de l'obstacle avec une droite parallèle à  $Ox$  se réduira à un seul point si l'on assujettit  $\Phi(s)$  à vérifier l'inégalité

$$(1.18) \quad |\Phi(s)| \leq \pi.$$

Nous ferons désormais cette hypothèse qui jouera dans la suite un rôle capital; cela entraîne que  $\Phi(s)$  est positif sur  $\varpi_1$ , et négatif sur  $\varpi_2$ .

Rappelons quelques autres propriétés de la solution indéterminée de M. Villat, définie par l'ensemble des formules (1.9), (1.10), (1.14), (1.15), (1.16). La formule (1.15) n'est pas valable telle quelle pour  $Z = e^{i\alpha}$ , puisque l'expression sous le signe d'intégration devient infinie comme  $\frac{1}{s-s'}$  pour  $s = s'$ . Aussi la transforme-t-on par l'artifice classique suivant, dont nous aurons fréquemment à nous servir dans la suite. Supposons d'abord  $|Z| \neq 1$  et ajoutons, au second membre de la formule (1.15), la quantité

$$\begin{aligned} & \Phi(s) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(s) \log Z \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \Phi(s) \int_0^\pi \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds' \end{aligned}$$

visiblement nulle; (1.15) devient alors

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \Omega(Z) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Phi(s') - \Phi(s)] \\ & \times \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds' \\ & + \Phi(s) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(s) \log Z. \end{aligned}$$

Si la fonction arbitraire  $\Phi(s)$  possède un module de continuité tel que l'intégrale

$$\int \frac{\Phi(s) - \Phi(s')}{s - s'} ds'$$

ait un sens pour  $s = s'$  (bien entendu  $s \neq s_0$ ), et c'est l'hypothèse que nous ferons désormais<sup>(35)</sup>, le second nombre de (1.19) a un sens le long

---

(<sup>35</sup>) Ce point sera précisé dans le paragraphe suivant.



du cercle  $|Z| = 1$  sauf pour  $s = s_0$ . Dès lors, la partie imaginaire  $T(e^{is})$  de  $\Omega(Z)$  le long de ce cercle est définie par la formule

$$(1.20) \quad T(e^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Phi(s') - \Phi(s)] \\ \times \left[ \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - s') + \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + s') \right] ds' + \frac{2g_1\omega_1}{\pi^2} s \Phi(s),$$

qui garde un sens, d'après ce qui précède, tant que  $Z$  est distinct de  $e^{\pm is_0}$ , alors que la partie réelle de  $\Omega(Z)$  se réduit pour  $Z = e^{is}$ ,  $s \neq \pm s_0$  à  $\Phi(s)$ . C. Q. F. D.

Rappelons la nature de la singularité que la fonction  $\Omega(Z)$ , ainsi définie, présente aux points  $Z_0 = e^{is_0}$  et  $\bar{Z}_0 = e^{-is_0}$ . Considérons pour cela, avec M. Villat, la fonction auxiliaire  $U(Z)$

$$U(Z) = \Omega(Z) + \frac{2\alpha}{i} \log \left( \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0} \right),$$

$\alpha$  étant le nombre défini par (1.17);  $U(Z)$  est réelle sur l'axe réel et uniforme dans son domaine de définition  $C$ , si l'on précise la détermination du logarithme en un point quelconque de  $C$ . On constate immédiatement que la partie réelle de  $U(Z)$  est continue aux points  $Z = Z_0$  et  $Z = \bar{Z}_0$ ; elle est donc continue tout le long de  $|Z| = 1$  et  $|Z| = q$ . La fonction  $U(Z)$  est, par suite, régulière dans le domaine  $C$ , frontière comprise, et notamment au point  $Z = Z_0$ . Il en résulte d'abord que,  $Z$  tendant vers  $Z_0$  le long d'un chemin intérieur à  $C$  et non tangent à  $|Z| = 1$  au point  $Z = Z_0$ , la fonction  $T(Z)$  se comporte comme  $2\alpha \log|Z - Z_0| +$  fonction de  $(Z - Z_0)$  continue pour  $Z = Z_0$ .  $\alpha$  étant positif, cette expression tend vers  $-\infty$  comme  $2\alpha \log|Z - Z_0|$ .

En second lieu, appelons  $\lambda$  l'angle formé par le vecteur  $Z - Z_0$  avec la demi-tangente menée au cercle  $|Z| = 1$  par le point  $Z_0$  dans le sens des  $s$  décroissants et  $\Theta$ , la valeur que prend la partie réelle de  $\Omega(Z)$  lorsque  $Z$  tend vers  $Z_0$  le long d'un chemin faisant l'angle  $\lambda$  avec la demi-tangente précédente; dans ces conditions, on a

$$\Theta = \Phi(s_0 - 0) + 2\alpha\lambda.$$

Cette formule montre que  $\Theta_\lambda$  croît de  $\Phi(s_0 - 0)$  à  $\Phi(s_0 + 0)$  lorsque  $\lambda$  augmente de 0 à  $\pi$ .

Ce qui précède justifie les hypothèses faites sur la fonction  $\Phi(s)$ ; elles sont naturelles lorsqu'on se limite à l'étude des obstacles lisses partout, le point  $z = 0$  excepté.

Nous allons résumer ces hypothèses dans un tableau :

1°  $\Phi(s)$  est continue dans chacun des intervalles  $0 \leq s < s_0$  et  $s_0 < s \leq \pi$ ;

2° Dans chacun des intervalles  $0 \leq s < s_0$ ;  $s_0 < s \leq \pi$ , l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\Phi(s) - \Phi(s')}{s - s'} ds'$$

a un sens;

3°  $\Phi(s)$  est assujettie à vérifier l'inégalité

$$|\Phi(s)| \leq \pi;$$

$\Phi(s)$  n'est pas égale identiquement à 0 ou à  $\pi$ ;

4°  $\Phi(s)$  vérifie la condition de M. Villat

$$\int_0^\pi \Phi(s) ds = 0;$$

5° Pour  $s = s_0$ ,  $\Phi(s)$  possède une discontinuité qui, d'après la condition 4°, est de première espèce. Nous poserons

$$\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0) = 2\pi\alpha.$$

D'après la condition 4°  $\alpha$  est nécessairement compris entre 0 et 1; la valeur 1 est exclue (*cf.* § 12).

Pour abrégé, nous appellerons *conditions (V)* l'ensemble des cinq conditions précédentes auxquelles nous venons d'assujettir le choix de la fonction arbitraire  $\Phi(s)$  de M. Villat.

**II. CONSTRUCTION DU MODULE DE CONTINUITÉ POUR LES FONCTIONS DÉFINIES AU MOYEN D'UN OPÉRATEUR INTÉGRAL.** — Dans le paragraphe précédent nous avons vu le rôle important que jouent, dans la théorie, les fonctions qu'on déduit d'une fonction donnée  $\Psi(\varepsilon)$  [supposée continue dans l'intervalle d'intégration  $(a, b)$  quelconque que nous supposons

réduit à  $(-1, +1]$  au moyen de l'opérateur

$$(1.21) \quad U(\varepsilon) = \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{\varepsilon - s} ds.$$

Il est essentiel, pour l'étude de la correspondance entre les plans  $z$  et  $Z$ , de savoir construire un module de continuité pour la fonction  $U(\varepsilon)$  (quand il existe), connaissant celui de  $\Psi(\varepsilon)$ . Il existe sur ce sujet un théorème de Fatou et de M. Priwaloff.

Si la fonction  $\Psi(\varepsilon)$  vérifie une condition de Hölder d'exposant  $\nu$

$$|\Psi(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon_1)| \leq \text{const.} |\varepsilon - \varepsilon_1|^\nu,$$

où  $\nu$  est un nombre compris entre 0 et 1<sup>(36)</sup>, la fonction  $U(\varepsilon)$ , définie par l'équation (1.21), vérifie une condition de Hölder de même exposant. Nous dirons alors que les fonctions  $U(\varepsilon)$  et  $\Psi(\varepsilon)$  appartiennent à l'espace abstrait  $H_\nu$ .

En modifiant légèrement le raisonnement de M. Priwaloff, nous allons établir le théorème suivant qui nous sera très utile :

*Si la fonction  $\Psi(\varepsilon)$  vérifie une condition du type*

$$|\Psi(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon_1)| \leq \text{const.} \frac{1}{\left| \log \frac{1}{|\varepsilon - \varepsilon_1|} \right|^n},$$

*où  $n$  désigne un nombre positif supérieur à 1, la fonction  $U(\varepsilon)$  vérifie une inégalité du type*

$$|U(\varepsilon) - U(\varepsilon_1)| \leq \text{const.} \frac{1}{\left| \log \frac{1}{|\varepsilon - \varepsilon_1|} \right|^{n-1}}.$$

Nous poserons

$$(1.22) \quad \gamma_n(\Delta\varepsilon) = \frac{\text{const.}}{\left| \log \frac{1}{|\Delta\varepsilon|} \right|^n},$$

<sup>(36)</sup> Cet énoncé suppose  $\nu \neq 1$ . Si  $\nu = 1$ , le second membre de l'inégalité du texte doit être écrit comme suit

$$\text{const.} |\varepsilon - \varepsilon_1|^{1-\eta},$$

où  $\eta$  désigne un nombre positif aussi petit qu'on le veut.

où  $\Delta\varepsilon$  désigne la différence  $\varepsilon_1 - \varepsilon$  :  $\gamma_n(\Delta\varepsilon)$  est donc, de par sa définition, une fonction positive, croissante de  $|\Delta\varepsilon|$ , nulle pour  $\Delta\varepsilon = 0$ . Nous dirons, pour abrégier, qu'une fonction  $\Psi(\varepsilon)$  vérifie la condition  $\mathcal{L}_n(\varepsilon)$  lorsqu'elle satisfait à l'inégalité du type

$$|\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon)| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon).$$

*Démonstration.* — La formule (1.21) permet d'écrire

$$U(\varepsilon_1) - U(\varepsilon) = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)} \Delta\varepsilon + \frac{\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon)}{\varepsilon_1 - s} \right] ds.$$

Ceci posé, nous supposons d'abord que  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_1$  sont distincts de  $\pm 1$ , et nous décomposerons l'intervalle d'intégration  $(-1, +1)$  en trois intervalles partiels

$$(-1, \varepsilon - \eta), \quad (\varepsilon - \eta, \varepsilon + \eta), \quad (\varepsilon + \eta, 1),$$

que nous désignerons respectivement par  $E_1, E_2, E_3$ . Nous choisirons  $\eta$  de façon que l'on ait  $\eta = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)$ .

Le point  $\varepsilon_1$  est donc intérieur à l'intervalle de longueur  $2\eta$  dont le point  $\varepsilon$  est le centre et distant de  $|\Delta\varepsilon|$  au moins des extrémités de celui-ci.

Nous allons montrer que l'intégrale précédente se décompose en trois autres, étendues respectivement aux intervalles  $E_1, E_2, E_3$  et vérifiant chacune une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(\varepsilon)$ . Remarquons pour cela que la quantité  $(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)$  reste positive sur  $E_1$ ; on a donc

$$\left| \int_{E_1} \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)} \Delta\varepsilon ds \right| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon) |\Delta\varepsilon| \int_{E_1} \frac{ds}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)}.$$

Or, la valeur absolue de l'intégrale du second membre vaut

$$\frac{1}{\Delta\varepsilon} \left| \log \frac{\eta + \Delta\varepsilon}{\eta} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1} \right|.$$

De par le choix même de  $\eta$ , la quantité  $\frac{\eta + \Delta\varepsilon}{\eta}$  prend l'une des valeurs  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{3}{2}$ , suivant le signe de  $\Delta\varepsilon$ ; par ailleurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon$  étant par hypothèse distincts de  $\pm 1$ , le quotient  $\frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1}$  n'est ni infini, ni nul; le logarithme qui figure dans l'expression précédente est donc borné.

L'inégalité ci-dessus peut donc s'écrire

$$\left| \int_{E_1} \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)} \Delta\varepsilon ds \right| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon);$$

cela montre, comme  $\gamma_n < \gamma_{n-1}$ , que l'intégrale considérée vérifie *a fortiori* une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ .

Par ailleurs, on trouve immédiatement

$$\left| \int_{E_1} \frac{\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon)}{\varepsilon_1 - s} ds \right| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon) \left| \int_{E_1} \frac{ds}{\varepsilon_1 - s} \right| = \gamma_n(\Delta\varepsilon) \left| \log \frac{\eta + \Delta\varepsilon}{1 + \varepsilon_1} \right| \leq \gamma_{n-1}(\Delta\varepsilon),$$

puisque, par hypothèse,  $1 + \varepsilon_1$  n'est pas nul, alors que  $\eta + \Delta\varepsilon$  vaut  $2\Delta\varepsilon$  ou  $\Delta\varepsilon$  suivant le signe de  $\Delta\varepsilon$ .

Ces considérations s'appliquent sans changement aux intégrales précédentes étendues à l'intervalle  $E_3$ .

Enfin, la contribution de l'intervalle  $E_2$  à la valeur de  $U(\varepsilon) - U(\varepsilon_1)$  se présente, d'après (1.21), sous forme de différence de deux intégrales du type

$$I = \int_{E_2} \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{\varepsilon - s} ds.$$

On a

$$|I| \leq \int_{E_2} \frac{\text{const.}}{\left[ \log \frac{1}{|\varepsilon - s|} \right]^n} \frac{ds}{|\varepsilon - s|}.$$

On remarque que la dérivée de  $\log(s - \varepsilon)$  est  $\frac{1}{s - \varepsilon}$ ; on trouve tout de suite

$$|I| \leq \frac{\text{const.}}{\left| \log \frac{1}{|\Delta\varepsilon|} \right|^{n-1}} \leq \gamma_{n-1}(\Delta\varepsilon).$$

Ainsi, pour des valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon$  distinctes de  $\pm 1$ ,  $U(\varepsilon)$  se présente sous forme d'une somme de fonctions vérifiant chacune une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ ;  $U(\varepsilon)$  satisfait donc aussi à une condition de ce type.

L'extension de cette propriété aux extrémités  $\pm 1$  de l'intervalle d'intégration est immédiate : si  $\varepsilon = +1$ , par exemple, il suffit de supprimer dans le raisonnement l'ensemble  $E_3$  et de prendre pour  $E_2$  l'intervalle  $(1 - \eta, 1)$ .

COROLLAIRE. — Si la fonction  $\Phi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n$  excepté

pour  $s = s_0$ , la fonction  $T(e^{is})$ , définie par l'expression (1.20), vérifie une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(s)$ , sauf pour  $s = \pm s_0$ .

Observons que le raisonnement précédent s'étend, sans aucune difficulté, au cas où la fonction  $\Psi(\varepsilon)$  et la variable  $\varepsilon$  sont supposées complexes; il suffit de remplacer, dans les formules qui précèdent, toutes les différences par leurs modules respectifs. En particulier, cette remarque s'applique à la fonction  $\Omega(Z)$ , définie par la formule (1.19), qui vérifiera une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ , dans tout son domaine d'existence  $C$ , frontières comprises, les points  $Z = Z_0$  et  $Z = \bar{Z}_0$  exceptés, si la fonction  $\Phi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  partout, le point  $s = s_0$  excepté.

Relativement aux modules de continuité, rappelons encore un lemme très simple qui nous sera bientôt utile :

*Si deux fonctions  $f(\varepsilon)$  et  $\varphi(\varepsilon)$  possèdent respectivement les modules de continuité  $\eta_1(\Delta\varepsilon)$  et  $\eta_2(\Delta\varepsilon)$ , leur produit  $f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$  admet pour module de continuité le plus faible des modules précédents.*

Nous dirons que le module de continuité  $\eta_1(\Delta\varepsilon)$  est plus faible que  $\eta_2(\Delta\varepsilon)$  si

$$\eta_1(\Delta\varepsilon) \geq \eta_2(\Delta\varepsilon).$$

Dans la suite de la démonstration nous ferons cette hypothèse.

Cela étant considérons l'identité

$$f(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = [f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)]\varphi(\varepsilon_1) + [\varphi(\varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon)]f(\varepsilon).$$

On en tire, en désignant par const. un nombre positif supérieur aux maximums de  $\varphi(\varepsilon)$  et  $f(\varepsilon)$ ,

$$|f(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)| \leq \text{const.} [ |f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)| + |\varphi(\varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon)| ].$$

D'après la définition même du module de continuité, cela s'écrit encore

$$|f(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)| \leq \text{const.} \eta_1(\Delta\varepsilon),$$

car  $\eta_1 > \eta$ ; cette inégalité démontre notre lemme.

**12. ÉTUDE DE L'OBSTACLE.** — Substituons encore à  $\Phi(s)$  la fonction

$\Psi(s)$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \Phi(s) - \pi && \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \\ \Psi(s) &= \Phi(s) && \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi; \end{aligned}$$

d'après cela,  $\Psi(s)$  désigne l'angle que fait avec  $Ox$  l'obstacle, orienté dans le sens des  $y$  croissants, au point  $z$  image de  $Z = e^{is}$ ; il s'ensuit que  $\Phi(s)$  et  $\Psi(s)$  ont même module de continuité, sauf pour  $s = s_0$ . Moyennant ce changement de fonction, les formules (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) deviennent respectivement

$$(1.23) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(s') \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds' \\ - i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)},$$

$$(1.24) \quad \pi s_0 = \int_0^\pi \Psi(s) ds,$$

$$(1.25) \quad \Psi(s_0 + 0) - \Psi(s_0 - 0) = (2\alpha - 1)\pi,$$

$$(1.26) \quad 0 \leq \Psi(s) \leq \pi.$$

Appelons  $\Omega_0(Z) = \Theta_0 + iT_0$  l'intégrale qui figure au second membre de la formule (1.23) : en utilisant un artifice que nous avons rappelé au paragraphe 10, on peut écrire

$$(1.27) \quad \Omega_0(Z) = \Psi(s) + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Psi(s') - \Psi(s)] \\ \times \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds' \\ + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \log Z \Psi(s).$$

Mise sous cette forme, l'expression de  $\Omega_0(Z)$ , holomorphe pour  $q \leq |Z| < 1$ , est valable jusqu'à la frontière  $|Z| = 1$  du domaine de définition de cette fonction. D'après les formules de M. Villat, qui résolvent le problème de Dirichlet généralisé dans une couronne circulaire, la partie réelle de  $\Omega_0(Z)$  prend sur le cercle  $|Z| = 1$  les valeurs  $\Theta_0(e^{\pm is}) = \Psi(s)$ ;  $\Omega_0(Z)$  est réelle pour  $Z$  réel et imaginaire

pure pour  $|Z|=q$ . Cet ensemble de conditions suffit à caractériser la fonction  $\Omega_0(Z)$ . Le long de  $|Z|=1$ , la partie imaginaire  $T_0(e^{is})$  de  $\Omega_0(Z)$  est égale à

$$(1.28) \quad T_0(e^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Psi(s') - \Psi(s)] \left\{ \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s') \right] + \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s') \right] \right\} ds' + \frac{2\gamma_1 \omega_1}{\pi^2} s \Psi(s).$$

D'après (1.20) et (1.23), on peut écrire

$$(1.29) \quad T(e^{is}) = T_0(e^{is}) - \log \left| \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \right|.$$

Ces différentes expressions étant continues tant que  $s \neq s_0$ , l'artifice utilisé au paragraphe 10 permet de préciser la nature de la singularité que la fonction  $\Omega_0(Z)$  présente aux points :  $Z_0$  et  $\bar{Z}_0$  il suffit de remarquer que la fonction

$$(1.30) \quad H(Z) = \Omega_0(Z) + \frac{2\alpha - 1}{i} \log \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0},$$

où  $\alpha$  désigne le nombre défini par (1.25), est continue pour  $Z = e^{\pm is_0}$ ; si, pour fixer les idées, l'on suppose que  $\Psi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$ , la fonction  $H(Z)$  correspondante appartiendra à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ , dans tout son domaine de définition. Il s'ensuit que, dans le voisinage de  $Z_0$ , la fonction  $T_0(e^{is_0})$  se comporte comme

$$(2\alpha - 1) \log |e^{is} - e^{is_0}|.$$

Ainsi, nous avons substitué à  $\Phi(s)$  une fonction nouvelle  $\Psi(s)$  qui offre l'avantage d'être continue tout le long de  $|Z|=1$ , dans le cas particulier, très important, où l'on veut obtenir un obstacle à tangente continue au point de bifurcation; dans ce cas,  $\alpha = \frac{1}{2}$  et la fonction  $\Omega_0(Z)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$  pour  $q \leq Z \leq 1$  si  $\Psi(s)$  fait partie de l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$ .

Si  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , la fonction  $\Omega_0(Z)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$  dans tout son domaine de définition  $C$ , frontières comprises (sauf aux



points  $Z_0$  et  $\bar{Z}_0$ ), si  $\Psi(s)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$  dans tout son intervalle de définition (le point  $s = s_0$  excepté). Nous ferons désormais ces hypothèses sur la fonction  $\Psi(s)$ , en raison de leur commodité.

Il y a lieu de remarquer que  $s_0$  étant une fonction déterminée de  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  la formule (1.25) établit une relation entre ces paramètres arbitraires et la fonction  $\Psi(s)$ .

Ceci posé, la correspondance entre le cercle  $|Z| = 1$  et son image dans le plan  $z$  est définie par la relation

$$z = \int_{Z_0}^Z e^{i\Omega(Z)} df(Z),$$

l'intégrale précédente étant prise le long du cercle  $|Z| = 1$ ; cette égalité fournit donc les équations paramétriques de la courbe obstacle. Choisissons l'argument  $s$  de  $Z = e^{is}$  ( $s \neq s_0$ ) pour paramètre de cette courbe, orientée dans le sens des ordonnées croissantes; son abscisse curviligne sera donnée par la relation, due à M. Villat,

$$(1.31) \quad \frac{dl(s)}{ds} = j e^{-T(e^{is})} \frac{df}{ds} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j = -1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \\ j = +1 & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi, \end{cases}$$

où  $\frac{df}{ds}$  est définie au moyen des formules (1.10) et (1.10'). Ainsi l'arc  $l(s)$  de l'obstacle est une fonction continue et dérivable de  $s$ , sauf peut-être pour  $s = s_0$ ; de plus  $\frac{df}{ds}$  étant analytique et régulière pour  $|Z| = 1$ ,  $\frac{dl}{ds}$  possède le même module de continuité que  $T(e^{is})$  (lorsque celui-ci existe) dans chacun des intervalles  $0 \leq s < s_0$  et  $s_0 < s \leq \pi$ .

Il reste à préciser le comportement de  $\frac{dl}{ds}$  pour  $s = s_0$ . D'après ce qui a été dit au paragraphe 10 et vérifié au début du précédent paragraphe, la fonction  $T(e^{is})$  se comporte dans le voisinage de  $s = s_0$  comme

$$2\alpha \log |e^{is} - e^{is_0}| + \text{fonction de } (s - s_0) \text{ continue pour } s = s_0,$$

alors que, d'après (1.9) et (1.10),  $\frac{df}{ds}$  possède, pour cette valeur de  $s$ , un zéro simple.

On peut donc écrire, en désignant par  $K(s)$  et  $K_1(s)$  des fonctions continues pour  $s = s_0$  et ne s'annulant pas pour cette valeur :

$$\frac{dl}{ds} = K(s)(s - s_0)^{1-2\alpha} + K_1(s).$$

Cela montre que  $\frac{dl}{ds}$  est nul, infini ou fini au point de bifurcation, suivant que  $\alpha$  est inférieur, supérieur ou égal à  $\frac{1}{2}$ ; autrement dit si l'obstacle présente à l'origine un angle saillant, rentrant vers le courant, ou y possède une tangente continue. Mais, comme par hypothèse  $\alpha < 1$ , l'intégrale (1.4) prise le long de  $|Z| = 1$  aura toujours un sens;  $l(s)$  est donc, dans tous les cas, une fonction continue, quel que soit  $s$ , et croissante. La longueur totale  $L$  de l'obstacle est donnée par la formule

$$(1.32) \quad L = \int_0^\pi e^{-T(e^{is})} \frac{|df(e^{is})|}{ds} ds.$$

*Remarque.* — Lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire lorsque l'obstacle est à tangente continue, il y a intérêt à écrire l'équation de M. Villat avec la fonction  $T_0(e^{is})$  qui, dans ce cas, est continue pour  $s = s_0$ ; eu égard à (1.29), (1.31) se met, en effet, sous la forme

$$(1.31') \quad \frac{dl(s)}{ds} = e^{-T_0(e^{is})} \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \frac{df}{ds},$$

le facteur

$$\frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \frac{df}{ds}$$

étant fini pour  $s = s_0$  [cf. (1.10) et (1.10')] et positif dans tout l'intervalle  $(0, \pi)$ .

La position de l'obstacle ainsi défini par rapport aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  se détermine aisément. Nous appellerons  $d_1$  et  $d_2$  les distances respectives des points  $P_1$  et  $P_2$  aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui leur correspondent. En vertu des inégalités (1.26),  $d_1$  et  $d_2$  sont les plus courtes distances

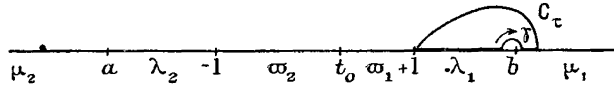
de l'obstacle à  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ; nous appellerons ces longueurs *distances de l'obstacle aux parois*.

En séparant le réel de l'imaginaire dans l'équation (1.14), on trouve

$$d_1 = \text{Imag.} \left[ \int_C e^{i\Omega} df \right],$$

C désignant un chemin régulier quelconque, joignant le point  $P_1$  à un point arbitraire de  $\mu_1$ . Nous évaluerons l'intégrale ci-dessus en utilisant la variable  $t$  précédemment introduite; nous désignerons par  $C_{\mathfrak{E}}$  l'image de C dans  $(\mathfrak{E})$  et par  $\gamma$  la demi-circonférence supérieure de rayon  $\eta$  centrée sur  $t = b$  (fig. 6). La fonction sous le signe

Fig. 6.



d'intégration est régulière et uniforme dans le domaine limité par  $C_{\tau}$ , deux segments de l'axe réel et  $\gamma$ . Comme  $\frac{df}{dt}$  est réel pour  $t$  réel, alors que  $\Omega(t)$  est réel pour  $1 \leq t \leq b$  et imaginaire pure pour  $b \leq t$ , on a

$$d_1 = \int_1^{b-\eta} \sin \Theta(t) df(t) + \text{Imag.} \int_{\gamma} e^{i\Omega(t)} df(t),$$

l'intégrale le long de  $\gamma$  étant prise dans le sens indiqué sur la figure. Or  $\Omega(t)$  est analytique pour  $t = b$ , puisque  $\Omega(Z)$  l'est pour  $Z = -q$ ; de plus  $\Omega(b)$  est nul, d'après (1.13). Comme  $\frac{df}{dt}$  possède pour  $b = t$  [cf. (1.9)] un pôle simple de résidu  $-\frac{\psi_1}{\pi}$ , la fonction  $\frac{df}{dt} \sin \Theta$  est finie en ce point. Enfin les fonctions sous le signe d'intégration sont continues pour  $t = b$ ; dès lors on a, en faisant tendre  $\eta$  vers zéro,

$$(1.33) \quad d_1 = \int_1^b \sin \Theta df + \psi_1.$$

Cette formule montre que la ligne libre  $\lambda_1$  possède une asymptote horizontale d'équation

$$(1.33') \quad y = y_1 = \int_1^b \sin \Theta df.$$

Nous appellerons désormais  $\gamma_1$  l'intégrale définie du second membre.

La distance de cette asymptote à la paroi  $\mu_1$  est égale à  $\psi_1$  : c'est le débit du fluide entre l'obstacle et  $\mu_1$ . Il va de soi qu'on obtient pour  $d_2$  une expression analogue.

Nous avons ainsi exprimé en fonctions des éléments  $a, b, \psi_1, \psi_2$  et  $\Psi(s)$  liés entre eux par la relation (1.24) et vérifiant les inégalités (1.25), tous les paramètres géométriques qui caractérisent le domaine  $\mathcal{A}$  du plan  $Z$ ; les formules (1.5), (1.9), (1.10), (1.14), (1.23), (1.25), (1.28) et (1.29) de M. Villat constituent donc la solution la plus générale du problème du sillage. De plus, ces formules permettent de résoudre, d'une manière approximative, le problème direct tel que nous l'avons énoncé au paragraphe 6. Donnons-nous, en effet, un obstacle qui soit l'arc d'une courbe illimitée définie dans le plan  $z$  par son équation intrinsèque

$$\Psi = \Psi(l),$$

où  $\Psi(l)$  désigne l'angle de l'obstacle orienté avec  $Ox$ , exprimé en fonction de son abscisse curviligne  $l, \alpha \leq l \leq \beta$ ;  $\Psi(l)$  est supposée continue, sauf pour  $l = l'$ , où cette fonction peut être discontinue mais bornée. Choisissons quatre paramètres  $a, b, \psi_1, \psi_2$ , et une fonction  $l(s)$  continue, croissant de  $\alpha$  à  $\beta$  dans l'intervalle  $(0, \pi)$ , de manière que  $\Psi[l(s)]$ , envisagée comme fonction de  $(s)$ , vérifie l'équation (1.24), les inégalités (1.26), et appartienne, pour fixer les idées, à l'espace  $\mathcal{E}_n$  : il faudra de plus que l'on ait  $l' = l(s_0)$ . Il est clair que  $\Psi(s) = \Psi[l(s)]$  est une fonctionnelle continue de  $l(s)$ , il en sera, par suite, de même des fonctionnelles de  $l(s)$  définies par les équations (1.23), (1.28) et (1.29).

*Remarque.* — Il est à noter que les modules de continuité de  $l(t)$  et par suite de  $l(s)$  ne peuvent être choisis arbitrairement. La fonction  $l(t)$ , en effet, réalise la correspondance entre les portions de frontière des domaines  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  représentés conformément l'une sur l'autre; les portions de frontière en cause possèdent des tangentes continues, sauf peut-être pour  $s = s_0$ . On montre que, dans ces conditions,  $l(t)$  est assujettie à vérifier une inégalité du type

$$|l(t) - l(t_1)| \leq \text{const} |t - t_1|^{\mu} \quad \text{pour } t \text{ et } t_1 \neq 1,$$

où  $\mu$  désigne un nombre positif aussi voisin de l'unité que l'on veut. On peut aller plus loin si l'on suppose de plus que  $0 < \Psi'(l) < \pi$ ; dans ce cas  $\frac{dl}{dt}$  existe et est continue [cf. § 22]. Enfin, on verra que l'existence et la continuité de  $\Psi'(l)$  assurent celles de  $\frac{dl}{dt}$  dans le cas où  $0 \leq \Psi'(l) \leq \pi$ , sauf, peut-être, pour  $t = t_0$  et  $t = \pm 1$ ; dans la suite nous nous placerons toujours dans ce cas. La correspondance entre  $t$  et  $Z$  étant analytique le long de  $|Z| = 1$ , le résultat précédent montre que la dérivée  $\frac{d l[t(s)]}{ds}$  est continue pour  $0 \leq s \leq \pi$ , sauf, peut-être, pour  $s = s_0$ ; ces assertions seront justifiées et approfondies au cours du troisième Chapitre.

Les sillages que les formules de M. Villat font correspondre aux données  $a, b, \psi_1, \psi_2, \Psi(l), l(s)$  possèdent la propriété suivante : l'angle de la demi-tangente positive à l'obstacle ainsi construit avec  $Ox$  prend le long de l'obstacle la même suite de valeurs que le long de l'arc considéré de la courbe donnée. Mais l'abscisse curviligne  $L(s)$  de l'obstacle construit, fournie par la formule [cf. (1.31) et (1.31')]

$$(1.33'') \quad \frac{dL(s)}{ds} = j e^{-T(e^{is})} \frac{df}{ds} = e^{-T_0(e^{i^*})} \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \frac{df}{ds} \quad (j = \pm 1 \text{ pour } s \gtrless s_0),$$

est, en général, différente de  $l(s)$ ; les longueurs de deux arcs de courbes donné et construit ne sont pas égales. Enfin les distances  $d_1$  et  $d_2$ , calculées à l'aide de la formule (1.33), n'ont pas les valeurs fixées a priori. Nous n'avons donc, par ce procédé, qu'une solution approximative du problème; mais celle-ci sera pratiquement satisfaisante moyennant un choix judicieux des éléments  $a, b, \psi_1, \psi_2$ , et  $l(s)$  <sup>(37)</sup>.

Notons aussi que les raisonnements précédents établissent l'équivalence du groupe des paramètres  $a, b, \psi_1, \psi_2$  et  $\Phi(s)$  avec le groupe

---

<sup>(37)</sup> Dans le cas du fluide indéfini, de telles solutions approximatives ont été construites par M. Brodetsky, *Proc. Edin. Math. Soc.*, XLII, 1923; *Scrip. Univ. Hieros*, Jérusalem, 1923; *Deuxième Congrès International de Mécanique appliquée*, Zürich, 1926.

des paramètres  $a, b, \psi_1, \psi_2, \Psi(l)$  et  $l(s)$  à l'égard du problème indéterminé; ce point de vue sera approfondi plus tard.

**13. ÉTUDE DES POINTS DE DETACHEMENT. PROBLÈME DE LA PROUE.** — Les études qui précèdent font bien connaître les propriétés de l'obstacle en fonction des données arbitraires de M. Villat; elles permettent par ailleurs de préciser le comportement de la fonction  $z(f)$  aux points à l'infini et de constater l'analyticité de cette fonction le long des images des parois et des lignes libres, exception faite, toutefois, des points de détachement. Nous allons succinctement examiner l'allure de  $z(f)$  en ces points; une telle étude repose sur une hypothèse supplémentaire de régularité que nous allons introduire.

Considérons un sillage correspondant aux données  $a, b, \psi_1, \psi_2$  et  $\Psi(s)$ ; nous supposons toujours que  $\Psi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  dans tout l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ , sauf, peut-être, pour  $s = s_0$ . Nous savons évaluer l'abscisse curviligne  $l(s)$  de l'obstacle construit à partir de ces éléments, supposés liés par la relation (1.24); rappelons que  $l(s)$  possède une dérivée satisfaisant à une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ ; sauf pour  $s = s_0$ . Inversement  $s$  est une fonction continue et dérivable de  $l$ , la dérivée  $\frac{dl}{ds}$  étant nulle pour  $s = 0$  et  $s = \pi$  [cf. l'équation (1.31) de M. Villat];  $\frac{ds}{dl}$  vérifie encore une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ , sauf pour  $s = s_0$ ,  $s = 0$ ,  $s = \pi$ .

La fonction  $\Psi(s)$  peut être envisagée comme fonction de  $l$ ; nous supposerons maintenant que  $\frac{d\Psi(l)}{dl} = \Psi'(l)$  existe et que  $\Psi'(l)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(l)$  partout, sauf pour  $l = l(s_0)$  où  $\Psi'(l)$  peut être discontinue mais bornée. Cela revient donc à se limiter à l'étude des obstacles admettant, en chacun de leurs points, une courbure vérifiant une condition  $\mathcal{L}_n$ , le point de bifurcation éventuellement excepté. Nous écrivons

$$\Psi(s) = \Psi[l(s)].$$

Cela montre que la dérivée  $\frac{d\Psi}{ds}$  existe partout, sauf pour  $s = s_0$ ; on a

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{d\Psi}{dl} \frac{dl}{ds};$$

$\frac{d\Psi}{ds}$  appartient donc à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}$  tant que  $s \neq s_0$ . Il y a plus; l'existence et la continuité de  $\frac{d\Psi}{ds}$  prouvent que  $\Psi(s)$  vérifie une condition de Hölder (d'exposant aussi voisin de l'unité qu'on le veut) partout, sauf pour  $s = s_0$ . Il en sera donc de même de  $\frac{dl}{ds}$ , compte tenu de l'équation (1.31) de M. Villat et du théorème de Fatou. L'expression ci-dessus de  $\frac{d\Psi}{ds}$  montre alors que cette fonction vérifie une condition  $\mathcal{L}_n$ . La fonction  $Zi\Omega'_0(Z)$  existe donc pour  $Z = 1$ , puisque sa partie réelle, qui vaut  $\pm \frac{d\Psi}{ds}$  pour  $Z = e^{\pm is}$ , existe sur ce cercle. De plus, cette partie réelle vérifie pour  $|Z| = 1$  une condition  $\mathcal{L}_n$ , sauf pour  $Z = Z_0$  et  $Z = \bar{Z}_0$ , puisqu'elle continue pour  $Z = \pm 1$ ; en effet,  $\frac{d\Psi}{ds}$  vaut zéro pour  $s = 0$  et  $s = \pi$ , car  $\frac{df}{ds}$ , d'après (1.10'), et par suite  $\frac{dl}{ds}$ , s'y annulent.

Il suit de là que  $Zi\Omega'_0(Z)$  et par conséquent  $\Omega'(Z)$  vérifient dans le voisinage de  $Z = \pm 1$  une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ ; on peut écrire

$$(1.34) \quad |\Omega'(Z) - \Omega'(\pm 1)| \leq \gamma_{n-1}(Z \mp 1).$$

Cette inégalité nous permettra de préciser, en utilisant un raisonnement de M. Leray, le comportement de la fonction  $\frac{d\Omega}{df}$  dans le voisinage des points de détachement. Rappelons que  $\Omega(Z)$  et  $f(Z)$  sont réelles sur  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ; on peut donc prolonger  $\frac{d\Omega}{df}$ , définie dans  $d$ , à travers l'axe réel du plan  $Z$ , et définir cette fonction dans toute la couronne  $C.\Omega(Z)$ , pour  $Z$  réel, est égal à l'angle que fait la ligne libre  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) avec  $Ox$ ; la correspondance entre  $\mathcal{C}$  et  $F$  conservant les longueurs le long de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , l'abscisse curviligne de  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) est  $f$  (ou  $-f$ ). La quantité  $\frac{d\Omega}{df}$  (ou  $-\frac{d\Omega}{df}$ ) est donc égale à la courbure de la ligne  $\lambda_1$  (ou de  $\lambda_2$ ); on a

$$\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{d\Omega}{df} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ}.$$

La dérivée  $\frac{df}{dt}$ , envisagée comme fonction de  $t$  ou de  $Z$ , est réelle,

régulière et non nulle aux points  $Z = \pm 1$ ;  $\frac{dt(Z)}{dZ}$  y possède un zéro simple; il vient d'ailleurs, en faisant  $Z = 1$ , pour fixer les idées, dans les formules (1. 10) et (1. 10'),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{1 - t_0}{(1 - a)(b - 1)}$$

et puis

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{dt}{dZ} \frac{1}{Z - 1} = \frac{-\omega_1^2}{\pi^2} \frac{p' \left( \frac{\gamma}{2} \right)}{\left[ e_2 - p \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right]^2} p''(\omega_2),$$

où les quantités  $p \left( \frac{\gamma}{2} \right)$ ,  $p' \left( \frac{\gamma}{2} \right)$  et  $p''(\omega_2)$  sont des fonctions analytiques de  $a$ ,  $b$ , continues tant que  $a \neq 1$  et  $b \neq 1$ , et qu'il est inutile d'expliquer; nous poserons

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ} \frac{1}{Z - 1} = N(a, b, \psi_1, \psi_2).$$

Le nombre  $N$  est visiblement réel et positif; la simple inspection des figures 2, 3 et 5 montre, en effet, que  $Z$  tendant vers 1 par valeurs réelles et croissantes, les fonctions  $f$  et  $-t$  sont réelles et décroissantes. L'inégalité (1. 34) permet dès lors d'écrire

$$\left| \frac{d\Omega}{df} N(Z - 1) - \Omega'(1) \right| < \gamma_{n-1}(Z - 1) \quad \text{avec} \quad \Omega'(1) = \left( \frac{d\Omega}{dZ} \right)_{z=1}$$

ou encore

$$(1. 34') \quad \left| \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(1)}{2N} \frac{Z + 1}{Z - 1} \right| \leq \frac{\gamma_{n-1}(Z - 1)}{|Z - 1|}.$$

Nous introduisons le facteur  $\frac{Z + 1}{2}$  qui se réduit à 1 pour  $Z = 1$  pour une raison qui apparaîtra tout à l'heure. Posons alors

$$(1. 35) \quad \frac{d\Omega}{df} = U + iV.$$

Les fonctions  $U(X, Y)$  et  $V(X, Y)$ , harmoniques à l'intérieur de  $d$ , sont appelées à jouer un rôle capital. On a, en tenant compte de l'équation (1. 14), et en supposant l'obstacle orienté comme il a été



dit,

$$df = j e^{\tau} dl \quad \left( j = \begin{cases} +1 & \text{pour } \pi \geq s \geq s_0 \\ -1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \end{cases} \right),$$

par suite

$$(1.35') \quad \begin{cases} U(e^{i\tau}) = j \frac{d\Psi}{dl} e^{-\tau/(e^{i\tau})} \\ V(e^{is}) = j e^{-\tau} \frac{dT}{dl} \end{cases} \quad \left( j = \begin{cases} +1 & \text{pour } \pi \geq s \geq s_0 \\ -1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \end{cases} \right).$$

La fonction  $\frac{d\Omega}{df}$  est prolongeable par symétrie à travers l'axe réel.

Cette relation montre que U est continue dans le voisinage de  $Z = 1$  et y appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$  puisque  $\Psi'[l(s)]$  et  $T(e^{is})$  appartiennent, par hypothèse, à cet espace. Introduisons dès lors la fonction  $W(Z)$  définie comme suit : elle est analytique pour  $q \leq Z < 1$ ; pour  $|Z| = 1$  elle vérifie une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ ; elle est réelle pour  $Z$  réel; dans le voisinage de  $Z = 1$  sa partie réelle le long de  $|Z| = 1$  est égale à U et est quelconque, mais continue et suffisamment régulière sur le reste de la frontière de C. Dans ces conditions, la fonction  $P(Z)$

$$P(Z) = \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(1)}{2N} \frac{Z+1}{Z-1} - W(Z)$$

est imaginaire pure pour  $|Z| = 1$  dans le voisinage de  $Z = 1$ ; en effet, la différence  $\frac{d\Omega}{df} - W(Z)$  a, par définition, sa partie réelle nulle dans ce voisinage, alors que les quantités  $2N$ ,  $\Omega'(1)$  sont réelles,  $\frac{Z+1}{Z-1}$  étant imaginaire pure pour  $Z = e^{is}$  [ceci explique l'introduction du facteur  $(Z+1)$  dans la formule (1.34')]. Autour de  $Z = 1$ , on peut donc prolonger  $P(Z)$  par la méthode des images à travers le cercle  $|Z| = 1$  et la définir dans un petit cercle  $\gamma$  centré sur le point; cela prouve que  $P(Z)$  est analytique, uniforme et régulière dans  $\gamma$ , sauf, peut-être, pour  $Z = 1$  où  $P(Z)$  peut présenter une singularité polaire ou essentielle. Mais cette éventualité est à écarter, compte tenu de l'inégalité (1.34') :  $P(Z)$  est donc holomorphe pour  $Z = 1$ , et dans le voisinage de ce point nous pouvons écrire

$$(1.36) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(1)}{2N} \frac{Z+1}{Z-1} + \left( \frac{d\Psi}{dl} \right)_{s=0} \right| \leq \gamma_{n-1}(Z-1),$$

puisque, par définition,  $W(1)$  vaut

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{s=0}$$

Ainsi toutes les fois que  $\Omega'(1) \neq 0$ , la ligne libre  $\lambda_2$  présente, en son point de détachement  $P_2$ , une courbure infinie. Dans le voisinage de  $P_2$ , elle tourne sa convexité vers l'amont ou vers l'aval suivant que  $\Omega'(1)$  est négative ou positive. Du point de vue physique, la première éventualité est très satisfaisante; on regarde, en général, sa réalisation comme une condition nécessaire de validité (cf. les § 7 et § 16). Si, au contraire,  $\Omega'(1) = 0$ ,  $\lambda_2$  possède au point  $P_2$  une courbure finie, égale à celle de l'obstacle en ce point; le détachement de  $\lambda_2$  est alors dit en proue. On retrouve ainsi les résultats fondamentaux de M. Villat <sup>(38)</sup>.

Le développement (1.36) montre que la ligne  $\lambda_2$  s'incurve dans le voisinage du point  $P_2$  lorsque  $\Omega'(1)$  n'est pas nul; toutefois, l'obstacle étant supposé tranchant en  $P_2$ , tout danger de recouplement de  $\lambda_2$  et  $\varpi_2$  est écarté. Mais, dans ce cas, il est impossible de prolonger tangentiellement (et avec une courbure finie) l'arc  $\varpi_2$  dans le sillage au delà de  $P_2$ .

Au contraire, une telle opération est possible si l'on choisit les éléments arbitraires de M. Villat de manière à annuler la quantité  $\Omega'(1)$ . L'arc  $\varpi'_2$  de l'obstacle, qui prolonge tangentiellement l'arc  $\varpi_2$ , ne trouble pas le régime hydrodynamique pourvu qu'il soit tout entier situé à l'extérieur du domaine  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement, et pourvu que sa courbure se raccorde en  $P_2$  avec celle de  $\varpi_2$  <sup>(39)</sup>; la

<sup>(38)</sup> Observons que l'on a

$$\Omega'(1) = \left[ \frac{dT(e^{is})}{ds} \right]_{s=0}.$$

C'est sous la forme écrite au second membre que la quantité  $\Omega'(1)$  intervient dans les travaux de M. Villat.

<sup>(39)</sup> De cette manière on pourra construire des sillages avec obstacle en forme de courbe fermée et réaliser ainsi des configurations particulièrement intéressantes du point de vue physique. Rappelons que ces sillages sont contruits à partir des éléments arbitraires de M. Villat (problème indéterminé) à l'aide des

deuxième condition de Brillouin est alors satisfaite. En particulier, il sera nécessaire, du point de vue de la validité, que  $\varpi'_2$  se dirige en  $P_2$  vers l'aval de  $\lambda_2$ . Dans le cas où l'obstacle possède une courbure  $c(s)$  dont la dérivée vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  [c'est-à-dire si  $\frac{d^2\Phi}{ds^2}$  existe et vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  partout, sauf pour  $s = s_0$ ,  $n > 1$ ], on peut traduire cette dernière condition de validité locale par une inégalité, due à M. Leray, que nous allons rappeler et qui nous sera bientôt utile.

D'après (1.34)  $\frac{dT(e^{is})}{ds}$  existe pour  $s = 0$  et appartient dans le voisinage de cette valeur à l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$ ,  $n$  pouvant être ici aussi grand qu'on le veut. Dans le cas actuel  $\frac{dT(e^{is})}{ds}$  vérifie même, dans le voisinage de  $s = 0$ , une condition de Hölder d'exposant aussi voisin de 1 qu'on le veut, puisque  $\frac{d\Phi}{ds}$  vérifie une condition de Lipschitz (en effet, rappelons que  $\frac{d^2\Phi}{ds^2}$  existe et est continue); l'équation de définition de  $U(e^{is})$  [cf. (1.35')]

$$U(e^{is}) = -c e^{-T(e^{is})}$$

montre alors que  $\frac{dU}{ds}$  existe et appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$  puisque les dérivées des facteurs du second membre appartiennent encore à cet espace.

formules qui fournissent les équations des arcs  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  de l'obstacle et non pas celles des arcs  $\varpi'_1$  et  $\varpi'_2$ ; ceux-ci, tracés dans le plan  $\mathcal{Z}$ , ne sauraient être définis à partir des données du plan  $\mathcal{Z}$ . Mais il importe de préciser que tous les résultats de ce paragraphe comportent une réciproque au sens que voici; donnons-nous, dans le plan  $\mathcal{Z}$ , un obstacle au moyen de son équation intrinsèque  $\Psi = \Psi(l)$  et de position connue par rapport aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  du canal; cherchons à construire un sillage correspondant à cette configuration des éléments rigides; on montrera que si  $\frac{d\Psi(l)}{dl}$  existe et appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(l)$ , la fonction  $l(s)$  correspondante, à priori inconnue, doit posséder une dérivée assujettie à vérifier une condition  $\mathcal{L}_n(s)$ ,  $n$  étant un nombre arbitrairement grand. Il s'ensuit que les résultats de ce paragraphe valent encore pour le problème déterminé ainsi posé et permettent de discuter la validité de ses solutions éventuelles. On consultera à ce sujet le Chapitre III.

D'après (1.36)  $\frac{d\Omega}{df}$  n'a pas de pôle et est continue dans le voisinage de  $Z=1$ , si  $\Omega'(1)=0$ ; on sait que, dans ces conditions, l'existence et la continuité (\*) de  $\frac{dU(e^{is})}{ds}$  pour  $s=0$  entraînent celles de  $\frac{d}{d \log Z} \left( \frac{d\Omega}{df} \right)$  pour  $Z=1$ . D'après le lemme du paragraphe 11  $\frac{d}{dZ} \left( \frac{d\Omega}{df} \right)$  vérifie alors, dans le voisinage de  $Z=1$ , une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(s)$ .

Cela étant, appelons  $c_2 = \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{t=0}$  la courbure de l'obstacle au point  $P_2$ , courbure égale, rappelons-le, en valeur absolue à celle de la ligne  $\lambda_2$  en ce point, et posons

$$c'_2 = \left[ \frac{d}{dZ} \left( \frac{d\Omega}{df} \right) \right]_{Z=1}.$$

En remarquant qu'on a par définition

$$(1.37) \quad \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{\left| \frac{d\Omega}{df} + c_2 \right|}{Z-1} = c'_2,$$

la condition ci-dessus s'explique comme suit

$$(1.38) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} + c_2 - c'_2(Z-1) \right| \leq |Z-1| \gamma_{n-1}(Z-1).$$

Nous transformerons (1.36) en substituant à  $Z$  les variables réelles  $\rho$  et  $\omega$  définies par la relation

$$f = \varphi_2 + \rho e^{i\omega};$$

une simple inspection de la figure 2 montre que le point  $f$  ne se trouve dans le domaine  $\mathcal{A}$  que si  $-\pi \leq \omega \leq 0$ .

D'après la définition même du nombre réel positif  $N$  (cf. le début de ce paragraphe), on peut écrire dans le voisinage de  $Z=1$

$$\frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ} = N(Z-1) + \dots$$

Portons cette expression du premier membre dans le développement de Taylor de la fonction  $(f - \varphi_2)$ ; il vient

$$f - \varphi_2 = \rho e^{i\omega} = \frac{N}{2} (Z-1)^2 + \dots$$

---

(\*) Au sens  $\mathcal{L}_n(s)$ .

En observant qu'aux  $|Z|$  décroissants correspondent des  $\rho$  croissants, la formule précédente permet d'écrire le premier terme du développement de la fonction  $Z(f)$  dans le voisinage du point de détachement; il vient <sup>(40)</sup>

$$Z - 1 = - \left( \frac{N}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\omega}{2}} + \dots$$

Portons cette expression de  $(Z - 1)$  dans l'inégalité (1.38); on trouve

$$(1.39) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} + c_2 + c'_2 \left( \frac{N}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\omega}{2}} \right| \leq \rho^{\frac{1}{2}} \gamma_{n-1} \left( \rho^{\frac{1}{2}} \right).$$

Avec les nouvelles variables  $\rho$  et  $\omega$ , l'équation de la ligne  $\lambda_2$  s'écrit  $\omega = 0$ ; l'abscisse curviligne d'un point de  $\lambda_1$  est  $\rho$  (les longueurs se conservant le long des lignes libres dans la correspondance entre  $\mathcal{A}$  et  $F$ ); l'inégalité (1.39) se réduit, en y faisant  $\omega = 0$ , à

$$(1.40) \quad c(\rho) = -c_2 - \left( \frac{N}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} c'_2 \rho^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

où  $c(\rho)$  désigne la courbure de  $\lambda_2$  supposée orientée dans le sens de la vitesse au point d'abscisse  $\rho$  (donc, en sens contraire de l'obstacle).

Cette formule met en évidence le résultat suivant :

1° La ligne libre  $\lambda_2$ , analytique pour  $\rho \neq 0$ , présentera, en son point de détachement  $\rho = 0$ , une singularité toutes les fois que  $c'_2 \neq 0$ ; en effet, le développement de sa courbure suivant les puissances de  $\rho$  ne sera alors pas taylorien; 2° dans le voisinage de  $P_2$ , les différentielles  $dl$ ,

<sup>(40)</sup> Notons en passant que ce résultat permet de préciser l'allure de la correspondance  $\Omega(f)$ , ou de  $\Omega(\rho)$ , le long de la ligne  $\lambda_2$  et dans le voisinage de son point de détachement  $P_2$  lorsque  $\Omega'(1) \neq 0$ . Portons, en effet, dans (1.36) le développement limité du texte, après y avoir fait  $\omega = 0$ ; en intégrant de 0 à  $\rho$ , on trouve l'équation intrinsèque de la ligne  $\lambda_2$

$$\Omega(\rho) = l[l(0)] + \sqrt{\frac{2}{N}} \Omega'(1) \sqrt{\rho} + \dots,$$

puisque  $\rho$  est égal à l'abscisse curviligne de  $\lambda_2$ ; cette relation confirme en le précisant ce résultat annoncé au paragraphe 10 : les lignes libres et l'obstacle forment une courbe à tangente continue.

$df$  et  $d\rho$  sont équivalentes; on peut donc y exprimer la courbure  $c(l)$  de  $\varpi_2$  au moyen du développement limité <sup>(41)</sup>

$$c(l) = c_2 + c'_2 \rho + \dots$$

(puisque, par hypothèse,  $\frac{dc}{dl}$  existe); dans le voisinage de  $P_2$  la courbure de  $\lambda_2$  varie, par suite, plus vite que celle de l'arc  $\varpi'_2$ ; si donc l'obstacle se prolonge dans le sillage au delà du point de détachement  $P_2$ , l'arc  $\varpi'_2$  sera, dans le voisinage de  $P_2$ , en aval ou en amont de  $\lambda_2$  suivant que  $c'_2$  est positif ou négatif. Cela montre que la deuxième condition de non-recoupement de M. Brillouin n'est satisfaite que moyennant la condition

$$\frac{d}{dZ} \left( \frac{d\Omega}{df} \right)_{Z=1} > 0$$

due à M. Leray.

Il y a plus. Formons l'expression de la différentielle  $df$  prise le long d'un cercle situé dans le plan  $f$  et centré sur le point  $f = \varphi_2$ ; en utilisant les variables  $\rho$  et  $\omega$ , on trouve

$$df = i\rho e^{i\omega} d\omega,$$

où  $\rho$  doit être regardé comme constant.

Comme la fonction  $T$  est nulle le long de l'image de la ligne libre  $\lambda_2$ , on déduit de cette relation que la valeur de  $T$  en un point  $f = \varphi_2 + \rho e^{i\omega}$  de ce cercle est donnée par la partie réelle de l'intégrale

$$\int_0^\omega \frac{d\Omega}{df} \rho e^{i\omega} d\omega.$$

Remplaçons-y alors  $\frac{d\Omega}{df}$  par son développement limité fourni

<sup>(41)</sup> Les méthodes exposées dans ce paragraphe se prêtent à l'étude des cas où l'ordre du contact entre  $\varpi_2$  et  $\lambda_2$  serait supérieur au second [cf. M. LERAY, *loc. cit.* <sup>(41)</sup>]. On montre, en particulier, que  $\frac{d^2\Omega}{dZ^2}$  présente, en général, une discontinuité pour  $Z = \pm 1$ , à moins que la courbure de l'obstacle n'y soit nulle ou que l'on ait  $\Omega'(\pm 1) = 0$ .

par (1.39); il vient, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$(1.41) \quad \left| T + c_2 \rho \sin \omega + \frac{2\sqrt{2}}{3} N^{-\frac{1}{2}} c'_2 \rho^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3\omega}{2} \right| \leq \rho^{\frac{3}{2}} \gamma_{n-1} \left( \rho^{\frac{1}{2}} \right) |\omega|.$$

Or, la condition (1.2) de M. Brillouin équivaut à  $T \leq 0$  (cf. § 9). L'inégalité (1.41) montre que  $T$  ne peut être négatif dans le voisinage de  $f = \varphi_2$  que moyennant les deux conditions simultanées

$$(1.42) \quad c_2 \leq 0, \quad c'_2 \geq 0,$$

puisque, rappelons-le,

$$-\pi \leq \omega \leq 0.$$

D'après (1.41), la première de ces inégalités exprime que  $T(X, Y)$  n'est pas positif dans le voisinage de l'axe réel si  $|1 - X|$  est suffisamment petit; dans ce cas, l'obstacle (et par suite, la ligne libre  $\lambda_2$ ) n'est pas concave vers le courant au point de détachement. De même l'inégalité  $c'_2 \geq 0$  exprime que la fonction  $T(X, Y)$  n'est pas positive dans le voisinage du cercle  $Z = e^{is}$  pourvu que l'argument  $s$  soit positif et suffisamment petit. L'inégalité  $c'_2 > 0$  constitue donc une condition nécessaire et suffisante de validité locale lorsque l'obstacle est convexe vers le courant au point  $P_2$  et lorsque la ligne libre  $\lambda_2$  y présente un détachement en poue.

Précisons que dans le cas étudié — cas du problème indéterminé — le développement du (1.41) se calcule à partir des formules de M. Villat le long de l'arc  $\varpi_2$  et sera donné intrinsèquement le long de son prolongement  $\varpi'_2$ , les premiers termes des deux développements devant être identiques pour assurer la continuité de la courbure sur  $\varpi_2 + \varpi'_2$ .

*Remarque.* — Les discussions exposées dans ce paragraphe mettent en lumière le rôle essentiel que jouent dans la théorie les quantités  $\Omega'(\pm 1)$  de M. Villat et dont nous avons établi l'existence dans le cas des obstacles à courbure continue; il y a donc intérêt à en calculer les expressions.

Nous partirons des formules (1.23) et (1.27); en introduisant la fonction

$$\Psi(s) = \Psi[l(s)]$$

et en tenant compte du fait que  $\sigma u$  est une fonction impaire, on obtient

$$\frac{\Omega(Z) - \Omega(1)}{Z - 1} = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(0)] \} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) \\ + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s\right) \end{array} \right\}}{Z - 1} ds$$

$$+ \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Psi[l(0)] \frac{\log Z}{Z - 1} - \frac{i}{Z - 1} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)},$$

où  $Z$  désigne l'affixe d'un point intérieur au domaine  $d$ . Cela étant, faisons tendre  $Z$  vers  $1$ , il vient

$$(A) \quad \Omega'(1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \{ \Psi[l(0)] - \Psi[l(s)] \} p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right) ds$$

$$+ \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Psi[l(0)] - 2\frac{\omega_1}{\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right).$$

Un calcul identique nous conduit à la relation

$$(A') \quad \Omega'(-1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(\pi)] \} p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_1\right) ds$$

$$- \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \{ \Psi[l(\pi)] + \pi \} + \frac{2\omega_1}{\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \omega_1\right).$$

Le passage à la limite que nous venons d'effectuer suppose essentiellement que les intégrales ci-dessus ont un sens : nous allons vérifier qu'il en est bien ainsi. En effet, les dérivées  $\frac{d\Psi}{ds}$  et  $\frac{dl}{ds}$  existent par hypothèse; on a donc

$$| \Psi[l(s)] - \Psi[l(s')] | \leq \text{const.} \cdot | l(s) - l(s') | \leq \text{const.} \cdot \left| \frac{dl(s)}{ds} \right| | s - s' |.$$

Or, l'équation (4.31) de M. Villat montre que  $\frac{dl}{ds}$  et  $\frac{df}{ds}$  s'annulent simultanément, alors que, d'après (4.10),  $\frac{df}{ds}$  possède un zéro d'ordre 1 pour  $s = 0$ . Il s'ensuit que la quantité

$$\{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(0)] \} p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right)$$



est finie pour  $s = 0$ , bien que  $p \frac{\omega_1}{\pi} s$  y présente un pôle de second ordre; cela justifie notre assertion.

Pour la suite, il est essentiel de noter que le résultat précédent subsiste sous la seule hypothèse que  $l[t(s)]$  appartienne à l'espace  $H_\nu(t)$

$$|l(t) - l(t')| \leq \text{const.} (t - t')^\nu \quad \left(\nu > \frac{1}{2}\right),$$

alors que  $\frac{d\Psi}{ds}$  est supposée existante; on a vu (*cf.* la remarque finale du paragraphe 12) combien la considération de ce cas était naturelle. On a maintenant

$$|\Psi[l(t)] - \Psi[l(0)]| \leq \text{const.} |l(t) - l(-1)| \leq \text{const.} (t + 1)^\nu \leq \text{const.} |s|^{2\nu},$$

la dernière inégalité étant obtenue en tenant compte de (1.10'); il s'ensuit

$$|\Psi[l(s)] - \Psi[l(0)]| p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right) \leq \text{const.} |s|^{2\nu-2},$$

inégalité qui assure un sens à l'intégrale de (A) toutes les fois que  $2\nu - 2 > -1$ .

Notons enfin qu'avec les notations de M. Villat on peut écrire

$$(B) \quad \Omega'(1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi [\Phi(0) - \Phi(s)] p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right) ds + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(0)$$

et

$$(B') \quad \Omega'(-1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi [\Phi(s) - \Phi(\pi)] p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_1\right) ds - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(\pi),$$

comme on s'en assure après un calcul facile. En suivant M. Leray, on peut, grâce à ces relations, préciser quelques cas où la nature du détachement est évidente *a priori* :

1° Si

$$\Psi[l(0)] \leq \Psi[l(s)],$$

on a <sup>(42)</sup>, d'après les résultats du paragraphe 12,

$$\Phi(0) \leq \Phi(s), \quad \text{avec } \Phi(0) < 0.$$

<sup>(42)</sup> Tel sera, par exemple, le cas de l'obstacle concave vers le courant.

Cela montre que les deux termes du second membre de (B) sont négatifs dans tous les cas où  $\eta_1$  est positif, car on a

$$p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right) > 0 \quad \text{pour } 0 < s \leq \pi;$$

cela entraîne

$$\Omega'(1) < 0.$$

2° Pareillement, on vérifie que si  $\eta_1$  est positif (<sup>43</sup>), on a

$$\Omega'(-1) < 0,$$

moyennant l'inégalité

$$\Psi[l(\pi)] \geq \Psi[l(s)],$$

ce qui entraîne la suivante

$$\Phi(\pi) > \Phi(s),$$

avec

$$\Phi(\pi) > 0.$$

3° Si, enfin, la quantité  $\Psi[l(0)]$  est nulle, on a

$$\Phi(0) = 0.$$

En tenant compte de (1.16), la formule (B) s'écrit alors

$$\Omega'(1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \Phi(s) \left[ p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right) \right] ds.$$

L'élément différentiel de l'intégrale est positif ou nul pour  $0 \leq s \leq \pi$ , puisque ses deux facteurs changent de signe pour  $s = s_0$  seulement.

(<sup>43</sup>) D'après la formule ( $X_4$ ) du *Traité des fonctions elliptiques* de Tannery et Molk, on a

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1} \left[ \frac{1}{6} - 4 \sum_1^\infty \frac{1}{(q^n - q^{-n})^2} \right],$$

le paramètre  $q$  étant relié aux paramètres  $a$  et  $b$  par les formules (1.6) et (1.8).

Une discussion élémentaire montre alors que :  $\eta_1 > 0$  pourvu que :  $q < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

A la faveur d'un énoncé inexact qui s'était glissé dans le *Traité de Tannery et de Molk* — qui sera désormais désigné par l'abréviation T. et M. — j'ai cru d'abord que  $\eta_1$  était toujours positif — (cf. T. et M., tome I, page 201). Cette erreur a été rectifiée à la suite d'une obligeante communication de M. Oudart.

Nous avons donc, dans le cas actuel,

$$\Omega'(1) > 0.$$

Lorsque la fonction arbitraire  $\Psi(s)$  se réduit identiquement à zéro ou à  $\pi$ , l'obstacle correspondant devient une lame rectiligne parallèle aux parois; d'après (1.24) la constante  $s_0$  est alors égale à zéro ou à  $\pi$ . L'une des quantités  $p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)$  ou  $p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_1\right)$  devient dans ce cas infinie et les expressions de  $\Omega'(\pm 1)$  perdent toute signification. Au contraire, les quantités

$$\Omega'(+1) \sin \frac{s_0}{2} \quad \text{et} \quad \Omega'(-1) \cos \frac{s_0}{2},$$

qui ont même signe que  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  respectivement, conservent un sens lorsque

$$\Psi(s) \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \Psi(s) \equiv \pi;$$

il y a donc avantage à les substituer aux fonctionnelles définies par les équations (A) et (A').

Observons encore, qu'en vertu des équations (1.24), (A) et (A'), les quantités  $\Omega'(1)$ ,  $\Omega'(-1)$  et  $s_0$  sont déterminées à partir des éléments  $\Psi(s)$ ,  $a$  et  $b$  ou encore, de  $\Psi(l)$ ,  $l(s)$ ,  $a$  et  $b$ ; elles ne dépendent pas des paramètres  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ; nous poserons donc, en mettant en évidence les arguments des fonctionnelles du second membre,

$$(C) \quad P_1[l(s), \Psi(l), a, b] = \Omega'(-1) \cos \frac{s_0}{2},$$

$$(C') \quad P_2[l(s), \Psi(l), a, b] = \Omega'(1) \sin \frac{s_0}{2}.$$

Ces expressions nous seront très utiles aux paragraphes 23 et 28.

**14. CAS OÙ LES PARAMÈTRES  $a$  ET  $b$  AUGMENTENT INDÉFINIMENT.** — Nous nous proposons de montrer que les solutions indéterminées de M. Villat, relatives au cas d'un sillage en présence d'une seule paroi ou en fluide illimité, s'obtiennent en effectuant un passage à la limite sur les formules (1.4), (1.9), (1.14) et (1.15). La possibilité d'un tel passage à la limite est à peu près évidente *a priori*, mais il est utile de l'effectuer explicitement, pour bien préciser le comportement de chaque

paramètre. Nous nous bornerons d'ailleurs à de brèves indications : il serait fastidieux, en effet, de reproduire le détail de chaque calcul.

Regardons les paramètres  $a, b, \psi_1$  et  $\psi_2$  (<sup>44</sup>) comme fonctions d'un paramètre arbitraire  $K$ , définies et continues pour  $0 \leq K \leq 1$ ; nous supposerons que lorsque  $K$  tend vers l'unité,  $\frac{1}{|a|}$  et  $\frac{1}{|\psi_2|}$  tendent uniformément vers zéro, de manière que le quotient  $\frac{\psi_2}{a}$  converge continûment vers une limite finie  $\Lambda \pi$  (négative), alors que  $b, \psi_1$  et  $t_0$  convergent vers des limites finies que nous désignerons par les mêmes lettres et qui seront telles que

$$b > 1, \quad \psi_1 > 0, \quad -1 < t_0 < 1.$$

Notons, en passant, que ces hypothèses sont en accord avec les conclusions que nous avons tirées de (1.4''). De même, nous regarderons  $\Phi(s) = \Phi(s, K)$  comme dépendant continûment du paramètre  $K$ ; cela veut dire qu'étant donné un nombre positif  $\eta$  arbitrairement petit, on peut trouver (si  $s$  n'appartient pas au voisinage de  $s_0$ ) un nombre positif  $\eta_1(\eta)$  tel que

$$|\Phi(s, K) - \Phi(s, K_1)| < \eta,$$

pourvu que

$$|K - K_1| < \eta_1(\eta);$$

cela quel que soit  $K, 0 \leq K \leq 1$ ; pour toute valeur  $K$  de cet intervalle,  $\Phi(s, K)$  vérifie les conditions de régularité que nous lui avons imposées au paragraphe 10.

Ceci posé, cherchons ce que deviennent, pour la valeur  $K = 1$  du paramètre indépendant, les domaines  $\mathcal{A}$  et  $F$  soumis à cette transformation.

La portion de frontière  $\psi = -\psi_2$  de  $F$  s'éloigne à l'infini : il en est de même de son image  $\mu_2$  dans le plan  $z$ , puisque la distance  $d_2$  de l'obstacle à cette paroi est inférieure à  $\psi_2$ . Les deux domaines,

---

(<sup>44</sup>) Nous substituons donc le groupe  $\psi_1, \psi_2, a, b$  des paramètres au groupe équivalent  $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ , que nous avons regardé jusqu'ici comme indépendant (cf. le paragraphe 9); on vérifiera aisément que moyennant les hypothèses faites au sujet du premier groupe les paramètres  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  convergeront continûment vers les limites finies  $\varphi'_1$  et  $\varphi'_2$  lorsque  $K$  tend vers 1.

limites de  $\mathcal{A}$  et  $F$  que nous désignerons respectivement par  $\mathcal{A}'$  et  $F'$  correspondent donc bien au cas du sillage provoqué par un obstacle en présence d'une seule paroi. Il reste à vérifier que les formules (1.4), (1.9) et (1.15) se réduisent pour  $K = 1$  à celles que M. Villat a construites pour de telles données.

La formule (1.4) peut s'écrire, compte tenu de la valeur de  $D$ ,

$$f = -\frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{a-t}{a-t_0} - \frac{\psi_1}{\pi} \log(t-b) + i\psi_1 + \frac{\psi_1}{\pi} \log(b-t_0).$$

Pour toute valeur finie de  $t$  telle que  $|a| > t$ , on a

$$-\frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{a-t}{a-t_0} = +\frac{\psi_2}{\pi} \frac{t-t_0}{a-t_0} \left[ 1 + \frac{t-t_0}{2(a-t_0)} + \dots \right],$$

la série entre crochets étant convergente dans les conditions énoncées. Si l'on fait tendre  $K$  vers 1, le second membre converge continûment pour toute valeur de  $t$  vers

$$A(t-t_0),$$

compte tenu de l'hypothèse sur le comportement de  $\frac{\psi_2}{a}$ . La formule (1.4) prend donc pour  $K = 1$  la forme

$$(1.43) \quad f = A(t-t_0) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(t-b) + i\psi_1 + \frac{\psi_1}{\pi} \log(b-t_0),$$

qui permet, justement, de réaliser la représentation conforme du domaine  $F'$  sur le demi-plan supérieur  $\mathcal{E}'$ , obtenu en faisant tendre dans le domaine  $\mathcal{E}$ ,  $a$  vers  $-\infty$  (*cf.* le paragraphe 9) <sup>(45)</sup>.

<sup>(45)</sup> Remarquons que, d'après l'expression (1.4') de  $t_0$  et les hypothèses faites au début du paragraphe concernant les paramètres  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $a$  et  $b$ , on doit avoir

$$\lim_{K=1} t_0 = \frac{bA + \frac{\psi_1}{\pi}}{A}.$$

Il s'ensuit que les paramètres  $A$ ,  $b$  et  $\psi_1$  doivent être assujettis à vérifier la condition analogue à (1.4'')

$$-1 \leq \frac{bA + \frac{\psi_1}{\pi}}{A} \leq 1,$$

puisque, par hypothèse,  $\lim_{K=1} t_0$  la vérifie aussi.

Étudions le comportement de la correspondance entre les plans  $t$  et  $Z$ .

A cet effet, nous posons

$$(1.44) \left\{ \begin{array}{l} R'(t) = (t^2 - 1)(t - b) = (t_1 - e_1)(t_1 - e_2)(t_1 - e_3), \\ \text{avec} \\ e_1 = \frac{2b}{3}, \quad e_2 = 1 - \frac{b}{3}, \quad e_3 = -1 - \frac{b}{3}, \quad t_1 = t - \frac{b}{3}, \\ 2\omega'_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|} = \int_b^{\infty} \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|}, \\ \frac{2\omega'_3}{i} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|} = \int_1^b \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|}. \end{array} \right.$$

La comparaison de ces expressions avec les formules (1.6) permet d'écrire les égalités

$$(1.45) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{|a|+1}} |2\omega'_1| \leq \omega_1 \leq \frac{1}{\sqrt{|a|-1}} |2\omega'_1|, \\ \frac{1}{\sqrt{|a|+b}} |2\omega'_3| \leq \omega_3 \leq \frac{1}{\sqrt{|a|+1}} |2\omega'_3|, \end{array} \right.$$

qui entraînent les conséquences suivantes :

1° Lorsque  $K$  tend vers 1, on a

$$(1.45') \left\{ \begin{array}{l} \lim \sqrt{|a|} \omega_1 = 2\omega'_1, \\ \lim \sqrt{|a|} \omega_3 = 2\omega'_3. \end{array} \right.$$

2° La quantité  $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$  (et, par suite,  $q = e^{\pi i \tau}$ ) est une fonction de  $K$  régulière pour  $K = 1$ . La demi-couronne  $d$ , image du domaine  $\mathcal{A}$ , tend donc uniformément vers la demi-couronne supérieure  $d'$  non dégénérée.

Ainsi, les fonctions  $pu$ ,  $\zeta u$  et  $\sigma u$  dégèrent pour  $K = 1$ , puisque les périodes  $2\omega_1$  et  $2\omega_3$ , à partir desquelles elles sont construites, dégèrent. Au contraire, la fonction  $\theta(\nu, q)$  de Jacobi se comporte régulièrement pour cette valeur du paramètre : il y a donc intérêt à exprimer les formules de transformation (1.9) à l'aide de  $\theta(\nu, q)$ .

On trouve ainsi

$$(1.46) \quad t = \left[ \frac{a+b}{4} - \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\nu_1)}{\theta(\nu_1)} \right] + \frac{1}{2\omega_1} \left[ \frac{\theta'(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} - \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)} \right],$$

en utilisant les relations classiques

$$\frac{1}{2} \frac{p'u - p'\gamma}{p'u - p\gamma} = \zeta(u + \gamma) - \zeta u - \zeta\gamma$$

et

$$\zeta u = \frac{\eta_1}{\omega_1} u + \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)},$$

et en prenant

$$\nu = \frac{u}{2\omega_1} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{2\omega_1} - \frac{1}{2i\pi} \log Z, \quad \nu_1 = \frac{\gamma}{2\omega_1}.$$

Précisons d'abord le comportement du paramètre  $\nu_1$ . Étudions pour cela la quantité  $2\omega_1 - \gamma$ ; d'après (1.6) et (1.6') on a, en appelant  $\alpha$  la valeur absolue de  $a$ ,

$$2\omega_1 - \gamma = 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-b)(t^2-1)}}.$$

On en tire le développement limité suivant

$$\begin{aligned} 2\omega_1 - \gamma &= 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t(t-\alpha)} \sqrt{\left(1-\frac{b}{t}\right) \left(1-\frac{1}{t^2}\right)}} \\ &= 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t(t-\alpha)}} - b \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{t(t-\alpha)}} + \dots, \end{aligned}$$

où le signe ... désigne une quantité qui tend vers zéro comme  $\frac{1}{\alpha^3}$ .

Après avoir effectué les quadratures qui figurent au second membre, on trouve finalement

$$(1.47) \quad \begin{aligned} 2\omega_1 - \gamma &= \frac{4}{\alpha} - \frac{4}{3} \frac{b}{\alpha^2} + \dots \\ &= -\frac{4}{a} - \frac{4}{3} \frac{b}{a^2} + \dots \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en tenant compte de (1.45'),

$$\lim_{k=1} \nu_1 = 1,$$

et par conséquent

$$\lim_{\kappa=1} \rho = \rho',$$

en posant

$$\rho' = \frac{\tau'}{2} - \frac{1}{2i\pi} \log Z$$

et

$$\tau' = \frac{\omega'_3}{\omega'_1};$$

pour simplifier les écritures, posons encore

$$(1.48) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \rho_1 - 1 \\ &= \frac{\gamma - 2\omega_1}{2\omega_1}. \end{aligned}$$

La relation (1.47) nous fournit le développement limité

$$(1.49) \quad 2\omega_1 \varepsilon = \frac{4}{a} \left( 1 + \frac{b}{3a} \right) + \dots,$$

dont on tire, en tenant compte de (1.45'),

$$(1.49') \quad \lim_{\kappa=1} \frac{\varepsilon}{2\omega_1} = -\frac{1}{4\omega_1^2} \quad (^{16}).$$

Ceci posé, nous allons chercher les limites de chaque crochet qui figure au second membre de la formule (1.46). D'après (1.48) le premier crochet peut s'écrire

$$\frac{a+b}{4} - \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)},$$

si l'on observe que

$$\theta(\nu+1) = -\theta(\nu).$$

(<sup>16</sup>) Notons que d'après les résultats du paragraphe 9 on a

$$s_1 = \pi \varepsilon,$$

$s_1$  tend donc vers zéro comme  $\frac{1}{|a|}$ .



La fonction  $\theta(\nu)$  étant impaire, l'expression  $\varepsilon \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)}$ , régulière pour  $\varepsilon = 0$ , peut se développer, en effectuant le quotient, en série de puissances de  $\varepsilon$  de la forme

$$\varepsilon \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)} = \frac{\theta'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \theta'''(0) + \dots}{\theta'(0) + \frac{\varepsilon^2}{3!} \theta'''(0) + \dots} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{3} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} + \dots$$

On peut donc, en tenant compte des formules (1.49) et (1.49'), écrire

$$\frac{a+b}{4} - \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{1}{2\omega_1 \varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\omega_1} \frac{1}{3} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} + \dots$$

Il s'ensuit que le premier crochet de (1.46) converge uniformément vers

$$\frac{b}{3} + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} \right].$$

Occupons-nous maintenant du second crochet; celui-ci s'écrit, en utilisant l'équation  $\theta(\nu+1) = -\theta(\nu)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 1} \frac{1}{2\omega_1} \left[ \frac{\theta'(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} - \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)} \right] &= \frac{\theta(\nu') \theta''(\nu') - \theta'^2(\nu')}{\theta^2(\nu')} \lim_{2\omega_1} \frac{\varepsilon}{2\omega_1} + \dots \\ &= - \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta(\nu') \theta'''(\nu') - \theta'^2(\nu')}{\theta^2(\nu')}. \end{aligned}$$

Il en résulte que,  $K$  tendant vers 1, la correspondance (1.46) converge uniformément vers la limite

$$f = \frac{b}{3} + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} \right] - \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta(\nu') \theta'''(\nu') - \theta'^2(\nu')}{\theta^2(\nu')}.$$

Cette formule est équivalente à la relation de M. Villat

$$(1.50) \quad t = \frac{b}{3} + p \left[ \frac{\omega_1'}{i\pi} \log Z - \omega_1' | \omega_1', \omega_3' \right],$$

qui réalise la correspondance entre les domaines  $\mathfrak{G}'$  et  $d'$ . En effet, nous pouvons exprimer la fonction  $\theta(\rho', q')$  et ses dérivées au moyen de la fonction  $p(u' | \omega'_1, \omega'_3)$ , puisque, rappelons-le,  $\lim_{\kappa=1} \tau = \tau'$ ; on a posé

$$u' = 2\omega'_1 \rho' = -\frac{\omega'_1}{i\pi} \log Z + \omega'_3.$$

Dès lors, pour justifier (1.50), il suffit de remarquer que

$$p[u' | \omega'_1, \omega'_3] = -\frac{\eta'_1}{\omega'_1} - \frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta(\rho') \theta''(\rho') - \theta'^2(\rho')}{\theta^2(\rho')},$$

et s'appuyer sur la relation

$$\frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} = -3 \frac{\eta'_1}{\omega'_1},$$

qu'on établit comme suit : on tire de l'expression de  $pu'$  qui précède,

$$\frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta''(\rho)}{\theta(\rho)} = [\zeta^2 u - pu] - \frac{2\eta_1}{\omega_1} u \zeta u + \frac{\eta_1^2}{\omega_1^2} u^2 - \frac{\eta_1}{\omega_1},$$

en y remplaçant  $\frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta''(\rho)}{\theta(\rho)}$  par sa valeur  $\zeta u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u$ , et en supprimant les accents, désormais inutiles. Si l'on fait tendre  $\rho$  vers zéro, le premier membre de l'égalité précédente tend vers  $\frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}$ ; par suite

$$\frac{1}{4\omega_1^2} \lim \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} = -3 \frac{\eta_1}{\omega_1},$$

puisque  $\lim_{u=0} (\zeta^2 u - pu) = 0$  et  $\lim_{u=0} u \zeta u = 1$ .

*Remarque.* — D'après (1.44) et (1.50),  $Z$  s'exprime en fonction de  $t$  au moyen de la relation différentielle

$$(1.50') \quad \frac{\omega_1}{i\pi} = \frac{dZ}{Z} \frac{dt}{\sqrt{4(1-t^2)(b-t)}},$$

qu'on peut mettre sous la forme finie

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = \int_{-1}^t \frac{dt}{\sqrt{4(1-t^2)(b-t)}}$$

en écrivant que les points  $Z$  et  $t$  d'une part,  $Z = 1$  et  $t = -1$ , d'autre part, sont images l'un de l'autre et en convenant de choisir pour le radical sa détermination arithmétique lorsque  $t$  est réel et compris entre  $-1$  et  $+1$ .

Ainsi la formule (1.50) peut se déduire de (1.9) au moyen d'un passage à la limite uniformément continu. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier en détail que les formules (1.15), (1.19), (A), (A'), (B) et (B') du paragraphe 13 convergent uniformément vers les limites qui s'obtiennent simplement en remplaçant les éléments construits à partir des périodes  $2\omega_1$  et  $2\omega_3$  qui y figurent par ceux qui leur correspondent dans le système  $2\omega'_1$ ,  $2\omega'_3$ . Il suffira de passer par l'intermédiaire des fonctions  $\theta$  et de tenir compte des conditions (1.16) et (1.24).

On trouve ainsi que la fonction  $\Omega(Z)$  définie par (1.15) ou (1.23) s'écrit, en substituant aux fonctions  $\sigma u$  et  $\mu u$  la fonction  $\theta(v, q)$  et en tenant compte de (1, 16) [cf. XXIII<sub>5</sub>, T. M.]<sup>(47)</sup>

$$\begin{aligned} (1.51) \quad \Omega(Z) &= \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)} + \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)} \right] \Phi(s) ds \\ &= \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)} + \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)} \right] \Psi(s) ds \\ &\quad - i \log \frac{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s_0}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi}, q \right)}. \end{aligned}$$

Pareillement, les fonctionnelles  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$ , définies par les

---

<sup>(47)</sup> Pour la signification de cette notation, d'un usage constant dans la suite, on se reportera au renvoi <sup>(43)</sup>.

équations (A) et (A') du paragraphe 13 se mettent sous la forme

$$\begin{aligned}
 (1.51') \quad \Omega'(+1) &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \frac{\theta'^2\left(\frac{s}{2\pi}, q\right) - \theta\left(\frac{s}{2\pi}, q\right)\theta''\left(\frac{s}{2\pi}, q\right)}{\theta^2\left(\frac{s}{2\pi}, q\right)} \\
 &\quad \times [\Psi(0) - \Psi(s)] ds - \frac{1}{\pi} \frac{\theta'\left(\frac{s_0}{2\pi}, q\right)}{\theta\left(\frac{s_0}{2\pi}, q\right)}; \\
 (1.51'') \quad \Omega'(-1) &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \frac{\theta'^2\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right) - \theta\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)\theta''\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)}{\theta^2\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)} \\
 &\quad \times [\Psi(s) - \Psi(\pi)] ds + \frac{1}{\pi} \frac{\theta'\left(\frac{s_0}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)}{\theta\left(\frac{s_0}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)},
 \end{aligned}$$

$\theta(v, q)$  étant une fonction analytique de  $q$  pour  $0 \leq q < 1$ , il est clair que les expressions précédentes de  $\Omega(Z)$ ,  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  convergeront continûment vers leurs limites respectives lorsque  $K$  tendra vers 1.

Dans ces conditions, toutes les fonctions qui interviennent dans la formule (1.14) convergent uniformément vers leurs limites respectives lorsque  $K \rightarrow 1$ ; à la limite on obtient la correspondance entre les domaines  $\mathcal{C}'$  et  $d'$ . Cela achève de justifier notre assertion.

Il reste à faire voir que le problème du sillage en fluide indéfini peut être envisagé comme cas limite du même problème posé pour un courant en présence d'une seule paroi plane. Les éléments arbitraires de M. Villat qui caractérisent ce dernier régime sont ici  $A$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\Phi(s)$ .

Envisageons encore ces éléments comme fonctions d'un paramètre auxiliaire  $K$ , définies et continues pour  $0 \leq K \leq 1$ ; supposons de plus que lorsque  $K$  tend vers 1, les nombres  $b$  et  $\psi_1$  augmentent indéfiniment de manière que les quotients  $\frac{\psi_1}{b^2}$  et  $\frac{A}{b}$  tendent continûment vers des limites finies; au contraire, le paramètre  $t_0$  devra avoir une limite comprise entre  $-1$  et  $+1$ . Dans ces conditions on voit comme

ci-dessus que la paroi  $\mu_1$  du plan  $z$  et son image  $\psi = \psi_1$  dans le plan  $f$  s'éloignent indéfiniment. Le domaine  $F'$  que nous avons obtenu tout à l'heure se réduit donc au plan  $f$  tout entier, fendu le long du demi-axe réel positif, alors que son image  $\mathcal{C}'$  du plan  $z$  comprend, à la limite, tout le domaine extérieur au sillage. Nous appellerons respectivement  $\mathcal{C}''$  et  $F''$  les domaines limites de  $\mathcal{C}'$  et  $F'$  pour  $K = 1$ .

Le demi-plan supérieur  $\mathcal{E}'$  se réduit au demi-plan  $\mathcal{E}''$  sur lequel l'image de la paroi  $\mu_1$  serait réduite au point à l'infini. Vérifions que pour  $K = 1$  la correspondance (1.43) entre les domaines  $F'$  et  $\mathcal{E}'$  se réduit précisément à la correspondance entre  $\mathcal{E}''$  et  $F''$ . On peut écrire (1.43) <sup>(48)</sup>

$$f = \frac{A}{b} \left[ b(t - t_0) + b(b - t_0) \log \frac{b-t}{b-t_0} \right].$$

Or, pour toute valeur de  $t$  inférieur à  $b$  en module, on a le développement

$$\log \frac{b-t}{b-t_0} = \frac{t_0-t}{b} + \frac{t_0^2-t^2}{2b^2} + \dots,$$

qui est convergent, puisque  $\left| \frac{t}{b} \right|$  et  $\left| \frac{t_0}{b} \right|$  sont inférieurs à 1. Il vient donc, après quelques simplifications,

$$f = -\frac{|A|}{b} \left[ t_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(t_0^2 - t^2) - \frac{t_0}{2b}(t_0^2 - t^2) + \dots \right].$$

Le second membre tend visiblement vers  $A_1(t - t_0)^2$  ou  $A_1$  désigne la limite de  $\frac{|A|}{2b}$ ; on obtient donc à la limite la correspondance entre  $F''$  et  $\mathcal{E}''$ . C. Q. F. D.

Les fonctions elliptiques à l'aide desquelles on réalise l'application conforme du domaine  $\mathcal{E}'$  sur  $d'$  dégénèrent pour  $K = 1$ . En effet, les paramètres de ces fonctions dépendent de  $K$  par l'intermédiaire de  $b$  seul [cf. par exemple, les formules (1.44)]; formons le paramètre  $\chi$

$$\chi = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

---

<sup>(48)</sup> On aura soin de remplacer, dans (1.43), le paramètre  $\psi_1$  par sa valeur tirée de l'expression de  $t_0$  [cf. le renvoi <sup>(45)</sup>].

On trouve [cf. les formules (1.44)]

$$\chi = \frac{2}{b+1},$$

en tenant compte des relations

$$e_1 = \frac{2b}{3}, \quad e_2 = 1 - \frac{b}{3}, \quad e_3 = -1 - \frac{b}{3}.$$

Ainsi,  $b$  augmentant infiniment lorsque  $K$  tend vers 1,  $\chi$  tend vers zéro comme  $\frac{2}{b}$ ; dans ces conditions les formules (XXII. T. M.) s'appliquent<sup>(49)</sup>.

Il vient d'abord, en désignant par ... des quantités de l'ordre de  $\frac{1}{b}$  au moins,

$$(1.52) \quad \omega'_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{b+1}} + \dots; \quad \frac{\omega'_3}{i} \sqrt{b+1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2(b+1)} \right] \log 8(b+1) + \dots$$

Ceci montre que le paramètre  $q'$  défini par (1.8) tend vers zéro, si  $K$  tend vers 1; la demi-circonférence  $d'$  se réduit donc, à la limite, au demi-cercle unitaire supérieur  $d''$ .

D'autre part, la correspondance (1.50) entre  $t$  et  $Z$  peut s'écrire, en utilisant la formule d'addition de la fonction  $pu$ ,

$$t = \frac{b}{3} + e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - e_3} = -1 + 2 \frac{b+1}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) + \frac{b}{3} + 1}.$$

Or, d'après les formules de dégénérescence classique (XXII. TM.), il vient

$$p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) = -\frac{b+1}{3} \left[ 1 - \frac{1}{b} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{\beta}{\sin^2 \frac{\log Z}{2i}} + \dots \right].$$

On en tire, en divisant par  $b$  le numérateur et le dénominateur de la

<sup>(49)</sup> On aurait d'ailleurs pu se passer de la plupart d'entre elles et obtenir directement les développements limités dont il sera fait usage.

fraction qui figure au second membre de l'expression de  $t$ ,

$$t = -1 + \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{3}{\sin^2 \frac{\log Z}{2t}} \right] + \dots}$$

d'où, en passant à la limite et en remarquant que

$$\sin \frac{\log Z}{2t} = \frac{\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}}}{2t},$$

la relation finale

$$t = -\frac{1}{2} \left( Z + \frac{1}{Z} \right),$$

qui permet précisément de réaliser l'application conforme du domaine  $\mathcal{C}''$  sur  $d''$ .

Il reste à étudier le comportement de la fonction  $\Omega(Z)$  au cours de cette transformation. Pour simplifier, nous ferons cette étude sur l'expression (1.51), équivalente à (1.15) de  $\Omega(Z)$ ; les conclusions ne seront donc valables que pour  $q' \leq Z < 1$ . Mais il est possible d'effectuer le passage à la limite ci-dessous sur la formule (1.19) et justifier ainsi nos résultats même pour  $|Z| = 1$ .

La fonction  $\Phi(s, K)$  étant assujettie à vérifier l'ensemble des conditions (V) pour  $0 \leq K \leq 1$ , on a, d'après (CXXII<sub>10</sub> T. M.), et en négligeant les infiniment petits du premier ordre,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)} + \frac{1}{2} \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)} &= \frac{\pi}{2} \left[ \cot \left( \frac{\log Z}{2t} + \frac{s}{2} \right) + \cot \left( \frac{\log Z}{2t} - \frac{s}{2} \right) \right] + \dots \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\sin \frac{\log Z}{i}}{\sin^2 \frac{\log Z}{2t} \cos^2 \frac{s}{2} - \cos^2 \frac{\log Z}{2t} \sin^2 \frac{s}{2}} + \dots \\ &= \frac{\pi}{i} \frac{1 - Z^2}{1 - 2Z \cos s + Z^2} + \dots \end{aligned}$$

de sorte que, à la limite, la fonction  $\Omega(Z)$  se réduit à

$$(1.52) \quad \Omega(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{1 - Z^2}{1 - 2Z \cos s + Z^2} ds,$$

forme sous laquelle on reconnaît sans peine l'expression bien connue que M. Villat a donnée de  $\Omega(Z)$  dans le cas du fluide indéfini.

Le lecteur vérifiera d'une manière toute semblable (en utilisant la formule précédente et la formule XXXII, T. M.) que les expressions (1.51') et (1.52'') de  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  se réduisent continûment, pour  $K = 1$ , aux formes suivantes :

$$(1.52') \quad \Omega'(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{ \Psi[l(0)] - \Psi[l(s)] \} \frac{ds}{\sin^2 \frac{s}{2}} - \cot \frac{s_0}{2},$$

$$(1.52'') \quad \Omega'(-1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(\pi)] \} \frac{ds}{\cos^2 \frac{s}{2}} - \text{tang} \frac{s_0}{2},$$

obtenues directement par M. Leray.

En définitive, la continuité des passages à la limite qu'on vient d'effectuer a été vérifiée pour toute valeur finie des variables  $t$  et  $f$ . Notons aussi qu'on aurait pu faire tendre  $|a|$  et  $b$  vers l'infini simultanément; on aurait alors pu déduire directement les formules intéressant le sillage en fluide indéfini de celles que nous avons données pour le cas du canal.

Dans le cours du chapitre III, nous ferons connaître les réciproques des théorèmes que nous avons énoncés dans le présent paragraphe; après avoir établi l'existence des éléments caractéristiques de M. Villat :  $\psi_1, \psi_2, a, b$  et  $\Phi(s)$  correspondant à une configuration donnée a priori dans le plan du mouvement, nous montrerons, par exemple, que le quotient  $\frac{\psi_2}{|a|}$  reste effectivement fini et non nul lorsque la paroi  $\mu_2$  s'éloigne indéfiniment.

Remarquons enfin que nous avons laissé de côté le cas où  $b$  (pour fixer les idées) tend vers 1. L'étude approfondie de ce cas est réservée pour le chapitre III; mais d'ores et déjà, nous pouvons remarquer que les formules de M. Villat deviennent alors illusoires puisque,  $\omega_1$  devenant ici infini, les fonctions elliptiques dégénèrent, alors que leur argument devient infini.

**14<sup>bis</sup>.** Il est intéressant de montrer comment on peut retrouver certains résultats du paragraphe 14 en utilisant l'expression de la



fonction  $\Omega(t)$  dans le plan de la variable complexe  $t = t_1 + it_2$  [cf. fig. 3].

Cherchons, en effet, la fonction analytique

$$\Omega(t) = \Theta(t_1, t_2) + iT(t_1, t_2),$$

régulière dans le domaine  $\mathfrak{C}$  (y compris le point à l'infini) et définie dans son domaine d'existence par les conditions frontières suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta(t_1, 0) &= 0, & \text{pour } \begin{cases} -\infty \leq t_1 \leq a, \\ b \leq t_1 \leq \infty, \end{cases} \\ \Theta(t_1, 0) &= \Phi(t_1), & \text{pour } -1 \leq t_1 \leq 1, \\ T(t_1, 0) &= 0, & \text{pour } \begin{cases} a \leq t_1 \leq 1, \\ 1 \leq t_1 \leq b, \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\Phi(t_1)$  désigne la fonction arbitraire de M. Villat. Pour résoudre le problème de Dirichlet mixte correspondant aux données précédentes, nous envisagerons, avec MM. Volterra <sup>(50)</sup>, Signorini <sup>(51)</sup> et Demtchenko <sup>(52)</sup>, la fonction auxiliaire

$$\omega(t) = \theta(t_1, t_2) + i\tau(t_1, t_2),$$

définie dans le demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}$  par la formule

$$\omega(t) = - \frac{\Omega(t)}{\sqrt{(t^2 - 1)(t - a)(t - b)}},$$

où le radical est pris avec sa détermination arithmétique pour  $t$  réel et très grand; on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} \theta(t_1, 0) &= 0, & \text{pour } \begin{cases} -\infty \leq t_1 \leq 1, \\ 1 \leq t_1 \leq \infty; \end{cases} \\ \theta(t_1, 0) &= \frac{\Phi(t_1)}{\sqrt{(t_1^2 - 1)(t_1 - a)(t_1 - b)}}, & \text{pour } -1 \leq t_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Cela montre que  $\theta(t_1, t_2)$  est connue le long de l'axe réel  $t_1$ ; d'après

<sup>(50)</sup> *Sopra alcune condizioni caratteristiche per le funzioni di variabile complessa* (*Annali di Matematica*, 2<sup>e</sup> série, t. 11, p. 1-55).

<sup>(51)</sup> *Sopra un problema al contorno nella teoria della funzioni di variabili complessa* (*Annali di Matematica*, 3<sup>e</sup> série, t. 25, p. 253-273).

<sup>(52)</sup> *Loc. cit.* (7).

un résultat absolument classique il en résulte

$$\omega(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(t_1, 0) dt_1}{t - t_1},$$

l'intégrale étant prise le long de l'axe réel d'où, en remontant à  $\Omega(t)$ ,

$$(1.53) \quad \Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{(t-t') \sqrt{(t'^2-1)(t'-a)(t'-b)}},$$

la constante imaginaire pure, additive de la formule se réduisant à zéro, puisque

$$T(t_1, 0) = 0, \quad \text{pour } a \leq t_1 \leq -1.$$

Nous renvoyons aux raisonnements exposés dans des mémoires originaux pour légitimer en toute rigueur la formule qui précède, et notamment pour montrer qu'elle garde un sens pour de très grandes valeurs de  $|t|$ , lorsque la fonction  $\Phi(t)$  vérifie les conditions analogues aux conditions (V). Mais il est essentiel de préciser que la fonction  $\Phi(t)$  sera assujettie à vérifier la condition

$$(1.54) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)(t-a)}} = 0,$$

que l'on déduira de (1.16) en y remplaçant la différentielle  $ds$  par sa valeur définie par la relation (1.10').

Ceci posé, les résultats du paragraphe 14, relatifs à la dégénérescence de la fonction  $\Omega(Z)$ , se lisent sans difficulté sur la formule (1.53). En conservant les notations et les hypothèses du début du paragraphe en cause, on voit d'abord que la fonction  $\Omega(t, K)$ , envisagée comme fonction de  $K$ , est continue par rapport à son argument dans le voisinage de  $K = 1$ ; lorsque  $K$  tend vers 1 (c'est-à-dire lorsque  $\frac{1}{a}$  tend vers zéro), on a donc

$$(1.55) \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(t-b)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{(t'^2-1)(t'-b)(t-t')}}.$$

Or, le second membre de (1.55) représente précisément la fonction  $\Omega(t)$  relative au cas d'une configuration caractérisée par les élé-

ments  $A$ ,  $b$ ,  $\Phi(t)$  [*cf.* le précédent paragraphe], c'est-à-dire d'un courant fluide limité par une seule paroi plane et heurtant un obstacle.

La fonction  $\Phi(s)$ , relative au cas du courant limité par une seule paroi plane, est toujours assujettie à vérifier la condition (1.16). Cela s'écrit, en remplaçant  $s$  et  $ds$  par leurs valeurs tirées de (1.50),

$$(1.56) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = 0.$$

Si maintenant on fait croître indéfiniment  $b$  (les hypothèses énoncées au précédent paragraphe étant toujours remplies), on trouve, à la limite, la formule

$$\Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{t^2-1} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{(t-t')\sqrt{(t'^2-1)}},$$

qui fournit la fonction  $\Omega(t)$  relative au cas du fluide indéfini et que, d'ailleurs, la transformation

$$t = -\frac{1}{2} \left( Z + \frac{1}{Z} \right)$$

permettrait de réduire à la forme classique (1.52) : on notera que la transformation précédente est précisément celle qui fait correspondre au demi-plan supérieur  $\mathfrak{E}''$ , relatif au cas du fluide indéfini (*cf.* le précédent paragraphe), l'intérieur du demi-cercle supérieur auxiliaire du plan  $Z$ .

L'expression de la fonction  $\Omega(t)$  construite ci-dessus peut servir de point de départ à toutes les théories exposées dans ce travail; elle est d'une obtention plus simple, puisque sa démonstration ne fait pas appel au plan auxiliaire  $Z$  et, d'autre part, elle permet d'éliminer l'emploi des fonctions elliptiques qui rendent difficile toute étude des solutions indéterminées, considérées comme fonctionnelles des paramètres  $a$  et  $b$ .

M. A. Oudart s'est du reste attaché à présenter la théorie des sillages, même dans des cas plus compliqués que ceux traités ici, en se plaçant systématiquement au point de vue que nous avons adopté au cours de ce paragraphe; son travail, encore inédit, étend les résultats de notre mémoire au cas du canal à parois curvilignes.

## CHAPITRE II.

### Validité physique des solutions des problèmes du sillage et de la proue.

**15. OBJET DU CHAPITRE. LEMME PRÉLIMINAIRE.** — Nous nous proposons d'examiner les solutions indéterminées de M. Villat du point de vue de deux conditions de validité physique de M. M. Brillouin. Nous ferons d'abord connaître des classes étendues de fonctions arbitraires  $\Phi(s)$  de M. Villat, qui conduisent à des solutions entièrement acceptables du problème du sillage. Puis nous étendrons au fluide limité par deux parois planes les théorèmes de validité que M. Leray a obtenus pour le problème de la proue en fluide illimité.

Dans la suite nous utiliserons fréquemment le lemme suivant, déjà utilisé par M. Leray : « Considérons une fonction  $\Phi(s)$  satisfaisant à l'ensemble des conditions (V) et une fonction réelle  $R(s, s_1)$  des variables réelles  $s$  et  $s_1$ , définie dans le domaine  $\alpha \leq s \leq \beta$ ,  $0 \leq s_1 \leq \pi$ , où elle est continue;  $R(s, s_1)$  est supposée décroissante par rapport à  $s_1$ . Dans ces conditions, la quantité  $I(s)$

$$I(s) = \int_0^\pi R(s, s_1) \Phi(s_1) ds_1$$

est négative ». On a, en effet,

$$I(s) = \int_0^\pi [R(s, s_1) - R(s, s_0)] \Phi(s_1) ds_1,$$

compte tenu de l'équation (1.16); or,

$$\left. \begin{array}{l} R(s, s_1) - R(s, s_0) \leq 0 \\ \Phi(s_1) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ pour } s \geq s_0,$$

la dernière inégalité résultant de (1.18). L'élément différentiel de l'intégrale  $I(s)$  est donc négatif ou nul : comme il ne peut être constamment nul, en vertu des conditions (V) et des hypothèses faites sur  $R(s, s_1)$ ,  $I(s)$  est négative et non nulle. Bien entendu  $I(s)$  serait positive si  $R(s, s_1)$ , envisagée comme fonction de  $s_1$ , était croissante.

**16. ALLURE DES LIGNES LIBRES. DEUXIÈME CONDITION DE VALIDITÉ DE M. BRILLOUIN.** — Considérons un sillage caractérisé par les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  et la fonction  $\Phi(s)$ , assujettie à vérifier les conditions (V). On a le théorème suivant.

**THÉORÈME I.** — *L'ordonnée  $y$  de chaque ligne de jet varie toujours dans le même sens le long de chacune d'elles depuis le point de détachement jusqu'au point à l'infini; elle est non décroissante le long de  $\lambda_1$ , et non croissante le long de  $\lambda_2$ .*

D'après (1. 14) la dérivée  $\frac{dy}{df}$  vaut  $\sin\Theta(X, o)$  ou  $\sin\Omega(X, o)$  le long des lignes libres; tout revient donc à établir que l'angle  $\Theta(X, o)$  n'est pas négatif sur  $\lambda_1$ , et n'est pas positif sur  $\lambda_2$ .

Or, l'équation (1. 15) peut s'écrire

$$\begin{aligned} (2. 1) \quad \Omega(Z) &= \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s_1) \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_1\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_1\right) \right] ds_1 \\ &= \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s_1) \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_1\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_1\right) \right. \\ &\quad \left. - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \right] ds_1 \\ &= \frac{i\omega_1}{\pi^2} p' \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \int_0^\pi \Phi(s_1) \frac{ds_1}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - p\frac{\omega_1}{\pi} s_1}, \end{aligned}$$

compte tenu de l'équation (1. 16) et de la formule C III, T. M. Sur le segment  $(q, r)$  de l'axe réel, l'imaginaire pure  $\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z$  varie de  $\omega_3$  à zéro; il s'ensuit que  $i p' \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)$  est une quantité réelle positive.

La fraction réelle

$$\frac{1}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - p\frac{\omega_1}{\pi} s_1},$$

envisagée comme fonction de  $s_1$ , est décroissante dans l'intervalle  $0, \pi$ , puisque  $p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)$  est réel et compris entre  $e_3$  et  $-\infty$ , alors que  $p\frac{\omega_1}{\pi} s_1$  décroît de  $+\infty$  à  $e_1$  quand  $s_1$  croît de  $0$  à  $\pi$ .

Dans ces conditions, le lemme du paragraphe 15 s'applique; la fonction  $\Omega(Z)$  est réelle et non positive si  $Z$  est réel et positif. On établirait tout pareillement que sur le segment  $(-1, -q)$ ,  $\Omega(Z)$  n'est pas négative; enfin, la partie réelle de  $\Omega(Z)$  ne peut prendre pour  $q < |Z| < 1$  les valeurs  $\pm \pi$ , valeurs maxima et minima de cette fonction sur les frontières de  $C$ ; cela démontre notre théorème <sup>(53)</sup>.

Ainsi, lorsque l'on place les points de détachement aux extrémités de l'obstacle (problème du sillage), l'obstacle et les lignes libres forment une courbe dont l'intersection, avec toute parallèle avec  $Ox$ , se réduit à un seul point. Les lignes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ne recourent donc pas l'obstacle et ne se recourent pas. Le domaine  $\mathcal{A}$  ne se recouvre donc jamais; sa frontière est dépourvue de points doubles. Par suite, la solution indéterminée du problème du sillage, déduite d'une fonction  $\Phi(s)$  vérifiant les conditions (V), satisfait toujours à la deuxième condition de validité de M. Brillouin. Au contraire, la solution du problème de la proue, posé relativement à l'obstacle caractérisé

<sup>(53)</sup> Voici comment on pourrait obtenir la démonstration de ce théorème en utilisant le domaine  $\mathfrak{E}$  et les formules (1.53) et (1.54). En retranchant du second membre de (1.53) l'expression

$$-\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)}}{t-t_0} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)}},$$

nulle en vertu de (1.54) et dans laquelle  $t_0$  désigne l'abscisse de l'image du point de bifurcation, nous avons, pour  $1 < t < b$ ,

$$\Omega(t) = \frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(b-t)}}{(t-t_0)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(t-t_0) dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)(t-t')}}.$$

L'élément différentiel de l'intégrale du second membre est positif, puisque le radical qui y figure est positif et que, d'autre part, le produit

$$\Phi(t')(t-t_0)$$

n'est pas négatif pour  $-1 \leq t' \leq 1$ , puisque

$$\begin{aligned} \Phi(t') \geq 0, & \quad \text{pour} \quad t \geq t_0, \\ \Phi(t') \leq 0, & \quad \text{pour} \quad t \leq t_0. \end{aligned}$$

La démonstration du théorème s'achève dès lors comme dans le texte.

par  $\Phi(s)$ , peut n'être pas satisfaisante, puisque les arcs tels que  $\widehat{P_1 C}$  (voir *fig. 1*) peuvent recouper les lignes libres; une discussion supplémentaire est alors nécessaire.

On a déjà fait observer (*cf.* § 7) que les lignes libres ont une forme particulièrement satisfaisante du point de vue physique lorsqu'elles sont convexes vers le courant; il en est ainsi moyennant les conditions

$$\frac{d\Omega}{dZ} < 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} -1 \leq Z \leq -q. \\ q \leq Z \leq 1. \end{cases}$$

La discussion que nous venons de rappeler prouve d'ailleurs que l'inégalité (1.2) de M. Brillouin n'est satisfaite que si la condition ci-dessus est remplie; celle-ci apparaît donc comme une condition nécessaire de validité. Nous allons préciser le signe de  $\Omega'(Z)$  pour  $Z$  réel dans un certain nombre de cas particuliers; cette étude repose sur les lemmes suivants.

LEMME I. — *Quelle que soit la fonction  $\Phi(s)$  vérifiant les conditions (V),  $\Omega'(Z)$  est négative <sup>(54)</sup> pour  $Z$  réel, dans le voisinage des points  $Z = \pm q$ .*

En chacun de ces points, en effet,  $\Omega(Z)$  est analytique; la différentiation est donc toujours légitime et l'on trouve

$$\Omega'(-q) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q} \int_0^\pi \Phi(s) \left[ p \left( \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_2 \right) + p \left( \frac{\omega_1}{\pi} s - \omega_2 \right) - 2e_2 \right] ds,$$

relation qui s'écrit, en tenant compte de VII<sub>9</sub> T. M.,

$$\Omega'(-q) = - \frac{2\omega_1^2}{\pi^3 q} (e_1 - e_2)(e_2 - e_1) \int_0^\pi \frac{\Phi(s)}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_2} ds.$$

Or, la fraction  $\frac{1}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_2}$  est réelle et croissante dans l'intervalle  $0, \pi$ ;

d'après le lemme du paragraphe 15, l'intégrale du second membre est positive. Par suite  $\Omega'(-q) < 0$ .

---

(54) Comme il était, du reste, à prévoir, compte tenu du résultat que l'on vient de démontrer.

LEMME II. — *Toute courbe d'équation  $\Theta(X, Y) = \text{const.}$ , intérieure au domaine  $d$  et issue d'un point du segment  $(-1, -q)$ , ne peut aboutir qu'à un point  $Z = e^{is}$ ,  $s_0 \leq s \leq \pi$ .*

La fonction  $\Theta(X, Y)$  étant analytique le long de l'axe réel et prolongeable par symétrie à travers cet axe, ne peut prendre sur OX des valeurs isolées; chaque point de l'axe réel est donc l'origine d'une courbe d'équation  $\Theta(X, Y) = \text{const.}$  et issue de ce point.

Ensuite, cette ligne est analytique régulière à l'intérieur de  $d$  (et par suite de  $C$ ); elle ne peut donc présenter de point d'arrêt dans  $d$ . Elle ne peut aboutir à un point du segment  $(-1, -q)$ ; sinon, en prenant le symétrique de cette courbe par rapport à OX, on obtiendrait un domaine fermé, limité par une courbe simple le long de laquelle la fonction harmonique  $\Theta(X, Y)$  serait constante, donc constante dans tout le domaine. La courbe  $\Theta(X, Y) = \text{const.}$ , issue d'un point du segment  $(-1, -q)$ , ne peut atteindre un point du segment  $(q, 1)$ , puisque  $\Theta(X, Y)$  est positive sur l'un des segments et négative sur l'autre. Cette courbe ne peut enfin aboutir à un point de  $|Z| = q$ , puisque  $\Theta(X, 0)$  n'est pas nul pour  $-1 < X < -q$ ; donc elle doit nécessairement atteindre un point de l'arc  $s_0 \leq s \leq \pi$  de  $Z = e^{is}$  le long duquel  $\Theta(\cos s, \sin s)$  n'est pas négative.

LEMME III. — *Deux courbes quelconques  $\Theta(X, Y) = C_1$ , et  $\Theta(X, Y) = C_2$  issues de deux points distincts de  $(-1, -q)$  ne peuvent avoir de points communs à l'intérieur de  $d$ .*

En effet,  $\Omega(X, Y)$  étant uniforme et régulière dans  $d$ , cette éventualité ne pourrait se présenter que si les constantes  $C_1$  et  $C_2$  étaient égales; or, les raisonnements précédents prouvent que cela est impossible.

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si l'arc  $\varpi_1$  de l'obstacle (ou  $\varpi_2$ ) possède des points d'inflexion, la ligne libre  $\lambda_1$  correspondante (ou  $\lambda_2$ ) peut avoir  $n + 1$  points d'inflexion au plus.*

Pour simplifier la démonstration, nous admettons que  $\frac{d\Phi(s)}{ds}$  existe



et est continue pour  $0 \leq s \leq \pi$  sauf pour  $s = s_0$ ; par hypothèse, elle s'annule donc  $n$  fois dans l'intervalle  $s_0 \leq s \leq \pi$ . Ceci posé, soit  $Z = X_1$ , l'affixe d'un point de l'intervalle  $-1 < X_1 < -q$  où  $\Omega'(Z) = 0$ ;  $\Omega(Z)$  étant analytique pour  $q \leq |Z| < 1$ ,  $\Theta(X, 0)$  n'est pas une valeur de  $\Theta(X, Y)$  isolée dans le voisinage de  $Z = X_1$ . Il part donc de ce point au moins deux courbes d'équation  $\Theta(X, Y) = \Theta(X_1, 0)$  qui aboutissent, d'après les lemmes II et III aux points  $Z = e^{is_1}$  et  $Z = e^{is'_1}$ ;  $s_0 \leq s_1 < s'_1 \leq \pi$ .

Si  $s_0 \neq s_1$ , la valeur de  $\Theta(\cos s_1, \sin s_1)$  est bien définie; on a donc  $\Phi(s_1) = \Phi(s'_1)$ , ce qui ne peut avoir lieu que si  $\Phi'(s)$  s'annule au moins une fois dans l'intervalle  $s_1, s'_1$ . Il peut donc y avoir au plus  $n$  points d'affixes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $-1 < X_n < \dots < X_1 < -q$ ) tels que : 1°  $\Omega'(X_i, 0) = 0$ ; 2° les extrémités  $Z = e^{is_i}, Z = e^{is'_i}$  des courbes  $\Theta(X, Y) = \Theta(X_i, 0)$ , issues des points  $Z = X_i$ , soient intérieures à l'arc  $s_0 < s \leq \pi$ .

Il reste à discuter le nombre de zéros de  $\Omega'(X, 0)$  pour  $X_1 < X < -q$  dans l'hypothèse  $s_1 = s_0$ . Dans ce cas, on ne peut avoir  $s_1 = s'_1$ ; sinon  $\Theta(X, Y)$  serait constant sur la frontière d'un domaine simple et, par suite, constant dans  $d$ . Avec nos conventions, on a donc  $s'_1 > s_1 = s_0$ . Or, d'après les lemmes I et II, toutes les courbes d'équation  $\Theta(X, Y) = \Theta(X', 0)$  issues des points  $Z = X, X_1 < X' < -q$  aboutissent nécessairement au point  $Z = Z_0$  sans se recouper à l'intérieur de  $d$ . Il en résulte, d'après la formule (A) du paragraphe 10, qu'aux  $\lambda$  croissants et, par conséquent, aux  $X$  décroissants, ne peuvent correspondre que des valeurs croissantes de  $\Theta_\lambda$  et, par suite, de  $\Theta(X', 0)$ . Il s'ensuit que la dérivée de  $\Theta(X, 0) = \Omega(X, 0)$  ne change pas de signe sur l'intervalle considéré <sup>(55)</sup>  $X_1 < X < -q$ ; cela établit notre théorème.

Ce théorème entraîne les conséquences suivantes :

**COROLLAIRE I.** — *Chacune des lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , correspondantes aux profils formés de deux arcs  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  convexes vers le courant, ne peut avoir plus d'un point d'inflexion.*

---

(55) Ce fait est à rapprocher du lemme I du présent paragraphe.

Cela résulte du fait que  $\frac{d\Phi}{ds}(s)$  est, dans ce cas, négative dans chacun des intervalles  $0 \leq s \leq s_0$ ,  $s_0 \leq s \leq \pi$ .

COROLLAIRE II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondant aux profils visés par le précédent corollaire, soient convexes vers le courant s'écrit*

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_{z=\pm 1} \leq 0.$$

D'après (1.36), cette condition est manifestement nécessaire; il reste à faire voir qu'elle est suffisante. Le précédent corollaire montre que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  possèdent un point d'inflexion au plus. Dès lors, pour que ces lignes en soient dépourvues, il suffit qu'elles soient convexes vers le courant aux points de détachement  $P_1$  et  $P_2$ ; en effet, elles le sont, d'après le lemme I, à l'infini.

Or, l'inégalité  $[\Omega'(Z)]_{z=\pm 1} \leq 0$  exprime justement le fait que les détachements de  $\lambda_1$  et de  $\lambda_2$  sont, soit en amont, soit en poue [cf. (1.36)]. Dans ces deux cas,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont convexes en  $P_1$  et  $P_2$ , puisque l'obstacle  $y$  est convexe.

*Remarques.* — 1° Ce théorème constitue l'extension au cas dissymétrique d'un résultat dû à M. Villat.

2° Dans le cas où  $\lambda_1$ , par exemple, présente un détachement en poue, les résultats ci-dessus ne suffisent pas à assurer le non-recouvrement de  $\lambda_1$  avec l'obstacle, supposé prolongé au delà de  $P_1$ ; *a priori*, la condition de validité de M. Leray n'est pas satisfaite et une étude supplémentaire est nécessaire.

Dans certains cas, il est possible d'abaisser la borne supérieure que le théorème précédent assigne au nombre des points d'inflexion d'une ligne libre; c'est notamment le cas de l'obstacle dont la fonction caractéristique  $\Phi(s)$  vérifie, outre les conditions (V), les conditions suivantes : la dérivée  $\Phi'(s)$  existe et est continue dans chacun des intervalles  $0 \leq s \leq s_0$  et  $s_0 \leq s \leq \pi$ ;  $\delta_1$  et  $\delta_2$  désignant deux nombres tels que  $s_0 \leq \delta_1 \leq \pi$  et  $0 \leq \delta_2 \leq s_0$ ,  $\Phi'(s)$  est négative pour  $0 \leq s \leq \delta_2$  et  $\delta_1 \leq s \leq \pi$ , positive pour  $\delta_2 \leq s \leq s_0$  et  $s_0 \leq s \leq \delta_1$ . Autrement dit, l'obstacle correspondant sera formé de deux arcs concaves vers le courant, formant au

point de bifurcation un angle rentrant ou saillant et dont chacun est prolongé d'un arc convexe; comme cas limite, chacun des quatre arcs ci-dessus pourra être supposé réduit à un point, en sorte que pour  $\delta_1 = s_0 = \delta_2$  on obtient des obstacles convexes visés par le corollaire I. Ceci posé, on a le théorème suivant :

**THÉORÈME III.** — *Lorsqu'une solution du problème du sillage est construite à partir d'une fonction  $\Phi(s)$  vérifiant les conditions énumérées ci-dessus, chacune des lignes libres correspondantes ne peut avoir plus d'un point d'inflexion (alors que ce nombre maximum serait de deux d'après le précédent théorème).*

En effet, le nombre maxima de points d'inflexion éventuel de  $\lambda_1$  serait de deux; soient  $X_1$  et  $X_2$ , ( $-1 < X_2 < X_1 < -q$ ) leurs images sur  $d$ . D'après ce qu'on a vu, l'une des courbes  $\Theta(X, Y) = \Theta(X_1, 0)$  aboutit nécessairement au point  $Z = Z_0$ ; sinon, il ne pourrait y avoir qu'un point d'inflexion sur  $\lambda_1$ .

La formule (A) du paragraphe 10 prouve que  $\Theta(X_1, 0) \leq \Phi(s_0 + 0)$ ; il en résulte, d'après nos hypothèses,  $\Theta(X_1, 0) < \Phi(\delta_1)$ . Par suite, les autres courbes d'équation  $\Theta(X_1, 0) = \Theta(X, Y)$ , et l'on sait qu'il y en a au moins une, atteindront le cercle  $|Z| = 1$  en un point  $Z = e^{is_1}$  tel que  $s_1 > \delta_1$ . Or, cela empêchera deux courbes d'équation

$$\Theta(X, Y) = \Theta(X_2, 0)$$

d'atteindre l'arc  $s_1 < s < \pi$  de  $Z = e^{is}$  en deux points  $Z = e^{is_2}$  et  $Z = e^{is'_2}$  tels que la dérivée  $\Phi'(s)$  s'annule dans l'intervalle  $s_2 \leq s \leq s'_2$ .

Cette remarque établit notre théorème.

**COROLLAIRE I.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , qui correspondent aux fonctions  $\Phi(s)$  visées par l'énoncé du théorème III, soient convexes vers le courant, est que la condition de M. Villat,*

$$\Omega'(\pm 1) \leq 0,$$

*soit satisfaite.*

La démonstration est identique à celle du corollaire II du théorème II.

**COROLLAIRE II.** — *Si la fonction caractéristique  $\Phi(s)$  pourvue d'une*

dérivée continue dans chacun des intervalles  $0 \leq s \leq s_0$ ,  $s_0 \leq s \leq \pi$ , conduit à un obstacle dont l'arc  $\varpi_1$  (ou  $\varpi_2$ ) est concave, la ligne libre  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) n'a pas de point d'inflexion.

Cela résulte des raisonnements mêmes employés pour établir le théorème III.

*Remarque.* — Dans le cas que nous venons de considérer, la ligne  $\lambda_1$  ne peut pas présenter en  $P_1$  de détachement en poue. En effet,  $\lambda_1$  serait osculatrice en  $P_1$  à l'obstacle, donc concave vers le courant dans le voisinage de ce point, et convexe à l'infini, d'après le lemme I. Elle présenterait donc nécessairement un point d'inflexion, ce qui est impossible. On peut arriver à cette conclusion en discutant la nature du détachement à partir des formules (B) et (B') du paragraphe 13.

**17. ÉTUDE DE LA FONCTION  $T(X, Y)$ . PREMIÈRE CONDITION DE M. BRILLOUIN.** — Le sillage étant caractérisé, comme précédemment, par les éléments arbitraires de M. Villat, nous nous proposons de l'étudier du point de vue de la première condition de validité de M. Brillouin qui s'écrit, d'après (1.2) et (1.12),

$$(2.2) \quad T \leq 0.$$

Nous avons vu (*cf.* § 9) qu'il n'y a besoin de vérifier cette condition que le long des images de l'obstacle et des parois. Le théorème I ci-dessous affirme que les vitesses sont toujours acceptables le long de  $Z = qe^{is}$ ,  $0 \leq s \leq \pi$ .

Tout revient alors à vérifier l'inégalité (2.2) le long du demi-cercle supérieur  $Z = e^{is}$ ; le théorème III fait connaître une condition suffisante de validité.

**THÉORÈME I.** — *La première condition de M. Brillouin est satisfaite le long des parois du canal.*

Faisons, en effet,  $Z = qe^{is}$  dans la formule (2.1). La fonction  $\Omega(qe^{is})$  se réduit à  $iT(qe^{is})$ ; il vient, en effet,

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_2,$$

d'où

$$T(qe^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} p' \left( \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) \int_0^\pi \Phi(s) \frac{ds_1}{p \left( \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1}.$$

La fonction

$$\frac{1}{p \left( \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1}$$

est réelle puisque  $p \left( \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right)$  est réel dans l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ ; envisagée comme fonction de  $s_1$ , elle est une fonction régulière et décroissante de celle variable dans l'intervalle  $0 \leq s_1 \leq \pi$ . D'après le lemme du paragraphe 15, l'intégrale qui figure au second membre de l'expression de  $T(qe^{is})$  est négative. Par ailleurs, la quantité  $p' \left( \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right)$  est positive pour  $0 < s < \pi$ , ce qui démontre notre théorème.

On peut préciser davantage, en étendant au cas dissymétrique l'énoncé suivant de M. Jacob.

**THÉORÈME II.** — *La dérivée  $\frac{dT}{ds}(qe^{is})$  ne s'annule qu'une fois dans l'intervalle  $0 < s < \pi$ .*

1° En effet, les fonctions harmoniques conjuguées  $\Theta(X, Y)$  et  $T(X, Y)$  sont analytiques pour  $Z = qe^{is}$  (cf. 9); elles vérifient donc, le long de ce cercle, l'équation

$$(2.3) \quad \frac{d\Theta}{dn} = \frac{1}{q} \frac{dT(qe^{is})}{ds},$$

où  $n$  désigne la normale intérieure au domaine  $d$ . Jointe à la relation  $\Theta(qe^{is}) = 0$ , (2.3) montre que, dans le voisinage du point  $Z = qe^{is}$ , la fonction  $\Theta(X, Y)$  est positive ou négative selon que  $\frac{dT(qe^{is})}{ds}$  est positive ou négative en ce point. D'après cela, si  $\frac{dT(qe^{is})}{ds}$  s'annule pour  $s = \varepsilon$  en passant du négatif au positif, par exemple,  $\Theta(X, Y)$  sera positive dans le voisinage de l'arc  $Z = qe^{is}$ ,  $s > \varepsilon$  et négative dans celui de l'arc  $Z = qe^{is}$ ,  $s < \varepsilon$ ; ceci entraîne l'existence d'une ligne, au moins, d'équation  $\Theta(X, Y) = 0$ , issue de  $Z = qe^{i\varepsilon}$ , autre que  $|Z| = 0$

et intérieure au domaine  $d$ . De plus, une de ces lignes (on pourrait, en précisant un peu le raisonnement, établir dès maintenant qu'elle est unique) est orthogonale à  $|Z| = q$ , puisque, d'après (2.3), il vient

$$\left(\frac{d\Theta}{dn}\right)_{z=qe^{i\alpha}} = 0$$

et que, d'autre part, ce zéro du premier membre est nécessairement d'ordre 1.

2° Les lignes  $\Theta(X, Y) = 0$ , dont on vient d'établir l'existence, aboutissent nécessairement à un point  $Z = e^{i\alpha}$ .

En effet, aucune d'elles ne peut atteindre le cercle  $|Z| = q$ ; sinon, la fonction harmonique  $\Theta(X, Y)$ , régulière à l'intérieur du domaine limité par cette ligne et  $|Z| = q$  serait nulle sur ses frontières, donc nulle partout dans  $d$ . Le même raisonnement prouve que deux lignes en cause ne sauraient avoir de points communs dans  $d$ . Par ailleurs, on a vu que la ligne  $\Theta(X, Y) = 0$  issue de  $Z = qe^{i\alpha}$  ne peut atteindre un point de l'axe réel (cf. § 16, lemme II).

3° Ceci posé, on a, en tenant compte du lemme du paragraphe 16,

$$\Omega'(+q) = \left(\frac{d\Theta}{dn}\right)_{z=q} < 0, \quad \Omega'(-q) = -\left(\frac{d\Theta}{dn}\right)_{z=-q} < 0,$$

d'où, d'après (2.3),

$$\frac{dT(qe^{i\alpha})}{ds} \gtrless 0 \quad \text{pour } Z = \mp q.$$

Ainsi, la dérivée  $\frac{dT(qe^{i\alpha})}{ds}$  change de signe dans l'intervalle  $0 < s < \pi$ , et cela un nombre impair de fois. Montrons qu'elle ne peut admettre qu'un seul zéro, par exemple qu'elle ne peut changer de signe pour  $s = \varepsilon_1, s = \varepsilon_2, s = \varepsilon_3, \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ .

En effet, dans ce cas,  $\frac{dT(qe^{i\alpha})}{ds}$  serait positive pour  $\varepsilon_1 < s < \varepsilon_2$  et négative pour  $\varepsilon_2 < s < \varepsilon_3$ .

Considérons alors le domaine  $b$ , limité par l'arc  $Z = qe^{i\alpha} (\varepsilon_1 \leq s \leq \varepsilon_2)$  par les deux courbes d'équation  $\Theta(X, Y) = 0$ , issues respectivement

de  $Z = qe^{i\varepsilon_1}$  et  $Z = qe^{i\varepsilon_2}$ , contiguës à cet arc; enfin, l'arc de  $Z = e^{is}$  aux extrémités duquel aboutissent les courbes  $\Theta(X, Y) = 0$  précédentes — compte tenu de l'alinéa 2°.

D'après ce qui précède  $\frac{d\Theta}{dn} > 0$  pour  $Z = qe^{is}$ ,  $\varepsilon_1 < s < \varepsilon_2$ ;  $\Theta(X, Y)$  serait donc positive dans le voisinage de cet arc. Ceci exige que le domaine  $b$  atteigne l'arc de  $Z = e^{is}$ ,  $s > s_0$ , où  $\Theta(X, Y)$  prend des valeurs positives ou nulles  $\Phi(s)$ ; sinon  $\Theta(X, Y)$  serait nul ou éventuellement négatif sur les frontières de  $b$  et, par conséquent, nul ou, éventuellement, négatif dans  $b$ , ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Il suit de là que  $\Theta(X, Y) \geq 0$  sur les frontières du domaine limité par  $Z = qe^{is}$ ,  $\varepsilon_2 < s < \varepsilon_3$ , le segment  $(-1, -q)$  de l'axe réel, l'arc  $|Z| = 1$  et la ligne  $\Theta(X, Y) = 0$  issue de  $Z = qe^{i\varepsilon_3}$ . Or, le raisonnement de l'alinéa 1° prouve que  $\Theta(X, Y)$  est négative dans le voisinage de l'arc  $Z = qe^{is}$ ,  $\varepsilon_2 < s < \varepsilon_3$  appartenant à ce domaine. Cette contradiction établit le théorème que nous avons en vue.

*Remarques.* — Ainsi, la fonction  $T = qe^{is}$  n'a qu'un seul minimum,  $s = \varepsilon$ , le long de  $|Z| = q$ , image des parois  $\mu_1, \mu_2$  du canal; comme  $T(q) = T(-q) = 0$ ,  $T(qe^{is})$  est constamment négative. Il y a plus. La fonction  $\Theta(X, Y)$  change de signe lorsque le point  $Z = X + iY$  traverse une ligne d'équation  $\Theta(X, Y) = 0$ ; les raisonnements ci-dessus prouvent que la ligne  $\Theta(X, Y) = 0$ , issue du point  $Z = qe^{i\varepsilon}$ , est unique et qu'elle aboutit nécessairement au point  $Z = Z_0$ . Cette courbe partage donc le domaine  $d$  en deux domaines partiels  $b_1$  et  $b_2$ ;  $\Theta(X, Y) \geq 0$  dans  $b_1$  appartenant à l'image de  $\lambda_1$ ;  $\Theta(X, Y) \leq 0$  dans l'autre.

Il reste à étudier et à discuter la condition (2. 2) le long de l'image de l'obstacle; on a, d'après la formule (1. 20) de M. Villat,

$$T(e^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Phi(s_1) - \Phi(s)] \left\{ \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_1) \right] + \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_1) \right] \right\} ds_1 + \frac{2\gamma_1\omega_1}{\pi^2} s\Phi(s).$$

Transformons le second membre au moyen de la formule

$$\zeta(u) = \frac{\gamma_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin \frac{r\pi u}{\omega_1}$$

(cf. T. M. CVI<sub>2</sub>); nous poserons, pour simplifier,

$$u = \frac{\omega_1}{\pi} s, \quad u_1 = \frac{\omega_1}{\pi} s_1,$$

il vient

$$\begin{aligned} \omega_1[\zeta(u + u_1) + \zeta(u - u_1)] &= \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} s + \frac{\pi}{2} \left[ \cot \frac{s + s_1}{2} + \cot \frac{s - s_1}{2} \right] \\ &\quad + 2\pi \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} [\sin r(s + s_1) + \sin r(s - s_1)], \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de l'équation (1.16) et après quelques calculs faciles,

$$\begin{aligned} (2.4) \quad \Gamma(e^{is}) &= \frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(s_1) - \Phi(s)}{\cos s_1 - \cos s} ds_1 \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin rs \int_0^\pi \Phi(s_1) \cos rs_1 ds_1. \end{aligned}$$

Nous désignerons, suivant l'usage, par  $\tau(s)$ , la première intégrale du second membre. On sait que la fonction  $\tau(s)$  est égale — d'après une formule bien connue de M. Villat<sup>(56)</sup> — au logarithme de la vitesse le long des obstacles, construits en fluide indéfini à partir de la même fonction arbitraire  $\Phi(s)$ . (Ces obstacles en fluide indéfini dépendent d'un seul paramètre.) Ceci posé, on a le théorème suivant :

**THEOREME III.** — *La différence  $\Gamma(e^{is}) - \tau(s)$  est sûrement négative lorsque le paramètre  $q$  (57) est inférieur à 0,517.*

Posons, en effet,

$$\varphi(s, s_1) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin rs \cos rs_1.$$

On a, d'après (2.4),

$$\Gamma(e^{is}) = \tau(s) + \int_0^\pi \Phi(s_1) \varphi(s, s_1) ds_1.$$

Pour démontrer le théorème, il suffira d'établir, d'après le lemme

<sup>(56)</sup> Cf. *loc. cit.*, Aperçus théoriques, page 9.

<sup>(57)</sup> Le paramètre  $q$  est relié aux éléments  $a, b$  de M. Villat par les formules (1.6) et (1.8).



du paragraphe 15, que  $\varphi(s, s_1)$ , envisagée comme fonction de  $s_1$ , est décroissante dans l'intervalle  $(0, \pi)$ , quel que soit  $s$ ,  $0 \leq s \leq \pi$ ; cela équivaut à vérifier l'égalité

$$(2.5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} < 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq \pi, \\ 0 \leq s_1 \leq \pi. \end{cases}$$

C'est à cette vérification qu'est consacrée la suite de la démonstration. Mettons  $\varphi(s, s_1)$  sous la forme

$$\frac{\pi}{2} \varphi(s, s_1) = \sum_1^{\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin r(s + s_1) + \sum_1^{\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin r(s - s_1).$$

Nous transformerons le second membre à l'aide de l'identité élémentaire <sup>(58)</sup>

$$(2.6) \quad \Lambda(u) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin ru = \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{q^{2\rho} \sin u}{(1 - 2q^{2\rho} \cos u + q^{4\rho})} = \sum_1^{\infty} V_{\rho}(u)$$

ou

$$(2.7) \quad V_{\rho}(u) = \frac{q^{2\rho} \sin u}{1 - 2q^{2\rho} \cos u + q^{4\rho}}.$$

<sup>(58)</sup> Pour démontrer cette formule on peut procéder comme il suit. On a

$$\frac{1}{1 - q^{2r}} = 1 + q^{2r} + \dots + q^{2\rho r} + \dots$$

On en déduit

$$\Lambda(u) = \sum_1^{\infty} \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin ru = \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} q^{2\rho r} \sin ru.$$

Dans le second membre, remplaçons  $\sin ru$  par sa valeur  $\frac{1}{2i}(e^{iru} - e^{-iru})$ . La fonction  $\Lambda(u)$  s'écrit alors

$$\Lambda(u) = \frac{1}{2i} \sum_{\rho=1}^{\infty} \left( \sum_{r=1}^{\infty} q_{1\rho}^r - \sum_{r=1}^{\infty} q_{2\rho}^r \right),$$

où l'on a posé

$$q_{1\rho} = e^{2\rho\tau i\pi + iu} \quad \text{et} \quad q_{2\rho} = e^{2\rho\tau i\pi - iu}.$$

Les séries qui figurent entre les parenthèses du second membre sont des progressions géométriques convergentes; en effectuant les sommations par rapport à  $r$ , en réduisant et en remplaçant les exponentielles par  $q$ ,  $\sin u$  et  $\cos u$ , on trouve la formule du texte.

Moyennant ces conventions, nous pourrons écrire

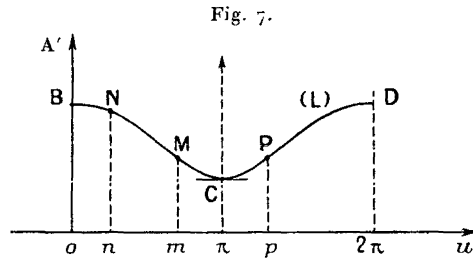
$$\frac{\pi}{2} \varphi(s, s_1) = [\Lambda(s + s_1) + \Lambda(s - s_1)],$$

en sorte que l'inégalité (2.5) est équivalente à la suivante :

$$A'(s - s_1) - A'(s + s_1) \geq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq \pi, \\ 0 \leq s_1 \leq \pi. \end{cases}$$

Nous allons faire voir que l'inégalité (2.5) est sûrement vérifiée lorsque la fonction  $A'(u)$  est décroissante dans l'intervalle  $0 \leq u \leq \pi$ ; il suffit, évidemment, de se limiter au cas où  $s > s_1$ , puisque les diverses expressions de la fonction  $\frac{\partial \varphi(s, s_1)}{\partial s_1}$  sont symétriques par rapport à ses arguments.

Admettons, en effet, que  $A'(u)$  décroisse dans l'intervalle  $0 \leq u \leq \pi$ , la courbe L, représentative des variations de  $A'(u)$ , est symétrique par rapport à la droite  $u = \pi$  et affecte, dans l'intervalle  $0, 2\pi$ , la forme indiquée sur la figure 7. Nous appellerons M, N, P les points de L dont les abscisses sont respectivement égales à  $s$ ,  $s - s_1$  et  $s + s_1$ .



Or, d'une part, l'argument  $(s - s_1)$  étant positif, car  $s > s_1$ , le point N est situé sur l'arc  $\widehat{BM}$  de L. La différence  $(2\pi - s - s_1)$  des abscisses des points D et P est, d'autre part, supérieure à  $(s - s_1)$  puisque  $s < \pi$ . Les arcs  $\widehat{BC}$  et  $\widehat{CD}$  étant symétriques par rapport à  $u = \pi$ , il suit de là que l'ordonnée de N est supérieure à celle de P lorsque  $s$  croît de zéro à  $\pi$ . C. Q. F. D.

Nous sommes ainsi ramenés à étudier les variations de  $A'(u)$ .

Or, il vient, d'après (2.6),

$$A''(u) = \sum_1^{\infty} V_p''(u),$$

avec, en vertu de (2.7),

$$V_p''(u) = -q^{2p} \sin u \frac{(1+q^{4p})^2 - 8q^{4p} + 2q^{2p}(1+q^{4p}) \cos u}{(1-2q^{2p} \cos u + q^{4p})^2}.$$

Nous poserons

$$h_p(u) = (1+q^{4p})^2 - 8q^{4p} + 2q^{2p}(1+q^{4p}) \cos u.$$

Il est clair que le terme de rang  $p$  du développement de  $A''(u)$  est du signe de  $-h_p(u)$  pourvu que  $0 < u < \pi$ ; il suffit donc, pour que la dérivée  $A''(u)$  soit négative dans l'intervalle considéré, que toutes les fonctions  $h_p(u)$  [ $p = 1, 2, \dots, \infty$ ] soient positives.

Or, une discussion élémentaire montre que : 1° les  $h_p(u)$  sont des fonctions décroissantes de  $\cos u$ ; le minimum de chacune d'elles est atteint pour  $u = \pi$ ; on a

$$h_p(\pi) = a_p^4 - 2a_p^3 - 6a_p^2 - 2a_p + 1,$$

formule où l'on a posé

$$a_p = q^{2p};$$

2°  $h_p(\pi)$  se présentent sous forme de polynômes symétriques en  $a_p$  qui se réduisent à 1 pour  $a_p = 0$  et dont la plus petite racine est égale à  $2 - \sqrt{3}$ .

Il suit de là que tous les  $h_p(u)$  seront sûrement positifs, pourvu que

$$q \leq \sqrt{a_1} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,517,$$

car  $a_p$  est une fonction décroissante de  $p$ . Ce résultat démontre notre théorème.

COROLLAIRE. — Une condition suffisante pour que l'inégalité (2.2) de M. Brillouin soit vérifiée peut s'écrire

$$(2.8) \quad \begin{cases} q < 0,517, \\ \tau(s) < 0. \end{cases}$$

$\tau(s)$  désignant la fonction de M. Villat définie par

$$(Cf. 2.4) \quad \tau(s) = \frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(s_1) - \Phi(s)}{\cos s_1 - \cos s} ds_1.$$

Or, M. Villat a fait connaître de vastes classes de fonctions  $\Phi(s)$

vérifiant la deuxième inégalité (2.8). Chacune de ces fonctions fournira donc en fluide limité par une ou deux parois planes des obstacles le long desquels les vitesses seront acceptables pourvu que le paramètre correspondant  $q$  ne dépasse pas  $0,517$ ; tel sera, notamment, le cas des fonctions  $\Phi(s)$  croissantes pour  $0 \leq s \leq \pi$  (caractérisant les profils concaves vers le courant); cet énoncé constitue l'extension au cas du canal (ou d'une seule paroi) d'un théorème de M. Boggio<sup>(59)</sup>.

A de telles fonctions  $\Phi(s)$  correspondent des lignes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  convexes vers le courant (pourvu que  $q$  soit assez petit) (*cf.* § 7); ces lignes ne se recoupent pas (*cf.* § 16, théorème I). La solution du problème indéterminé est alors entièrement acceptable; les inégalités (2.8) constituent donc des conditions suffisantes de validité physique pour les solutions construites à partir des éléments  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et des fonctions  $\Phi(s)$  vérifiant l'ensemble des conditions (V).

*Remarque.* — Il est possible de préciser la signification géométrique de la première condition (2.8). Les résultats du troisième chapitre, en effet, permettent de relier  $q$  aux dimensions de l'obstacle d'une part, et aux distances  $d_1$ ,  $d_2$  des points de détachement aux parois  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  du canal d'autre part; on montre ainsi que, qualitativement, la première inégalité (2.8) exprime que les parois du canal doivent être suffisamment éloignées de l'obstacle. Nous renvoyons pour les précisions quantitatives aux travaux de M. Oudart<sup>(60)</sup>.

**18. PROBLÈME DE LA PROUE. OBSTACLES EN ACCOLADES DE M. LERAY.** — Nous allons maintenant étendre au cas du canal (et, par suite, au cas d'une seule paroi plane) un théorème de validité que M. Leray a fait connaître pour le cas du fluide illimité. Contrairement à ce qui avait lieu jusqu'ici, les catégories d'obstacles qu'intéresse l'énoncé en cause

---

(59) Dans le paragraphe suivant nous établirons cette proposition indépendamment de toute limitation du paragraphe  $q$ . On trouvera une autre démonstration, très simple, de cette propriété dans notre travail « Sur un théorème de validité dans la théorie des sillages » qui paraîtra dans les *Mémoires de l'Académie*, t. 63, 1940.

(60) *C. R. Acad. Sc.* t. 208, 1939, p. 721.

ne seront plus caractérisés par les éléments arbitraires de M. Villat, mais par des propriétés intrinsèques. On commence par postuler à priori l'existence d'une solution du problème de la proue correspondant à un obstacle de forme donnée et de position connue par rapport aux parois planes : on montre ensuite qu'une telle solution est nécessairement acceptable <sup>(61)</sup>.

M. Leray appelle accolade tout obstacle vérifiant les conditions suivantes :

Son intersection avec une parallèle aux parois de l'obstacle se réduit à un point unique. La courbure  $c(l)$  de l'obstacle, considérée comme une fonction de l'arc  $l$  de celui-ci (compté à partir du point d'ordonnée minimum B) possède, relativement à  $l$  une dérivée  $c'(l)$  vérifiant une condition  $\mathcal{L}_n(l)$  le long de chacun des arcs  $\widehat{BO}$  et  $\widehat{OC}$  — en lesquels un point O partage, éventuellement, le profil — extrémités comprises. Au point O le profil peut présenter, éventuellement, un point anguleux ou un point de rebroussement [cf. § 10 et l'équation (1.17)]; nous appellerons  $2\pi\alpha$  l'angle que font en O les demi-tangentes aux arcs  $\widehat{OC}$  et  $\widehat{BO}$ .

L'arc  $\widehat{OC}$  de l'obstacle (c'est-à-dire l'arc situé tout entier dans la bande comprise entre  $\mu_1$  et l'horizontale de O; voir la figure 8) se compose d'un arc  $\widehat{OC}_1$ , non convexe vers le courant (c'est-à-dire d'un arc concave pouvant contenir, éventuellement, des portions rectilignes) et d'un arc  $\widehat{C}_1C$  convexe vers le courant; la courbure de  $\widehat{C}_1C$  ne décroît pas en valeur absolue quand on parcourt  $\widehat{C}_1C$  de  $C_1$  vers C.

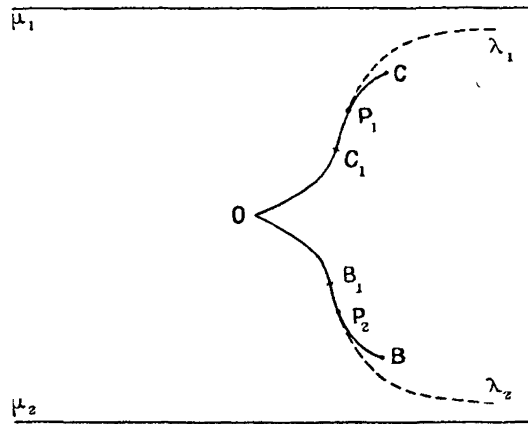
Pareillement, l'arc  $\widehat{OB}$  de l'obstacle se compose d'un arc  $\widehat{OB}_1$ , non convexe vers le courant, et d'un arc convexe  $\widehat{B}_1B$ ; la courbure de  $\widehat{B}_1B$  ne décroît pas en valeur absolue lorsqu'on décrit cet élément de profil

---

<sup>(61)</sup> Remarquons à ce sujet que le théorème II du paragraphe 16 peut s'énoncer comme suit : *supposons qu'il existe une solution du problème du sillage posé pour un obstacle convexe donné de forme et de position relativement aux parois d'un canal; alors, chacune des lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondantes ne peut avoir plus d'un seul point d'inflexion.*

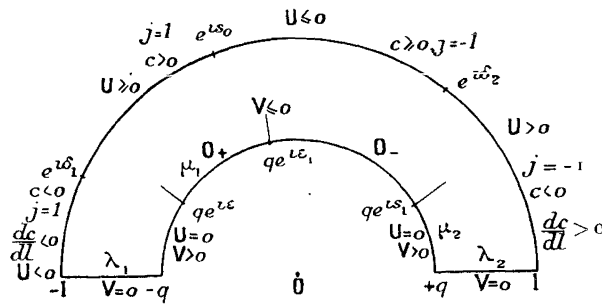
de  $B_1$  vers B. A la limite, chacun des arcs  $\widehat{B_1 B}$ ,  $\widehat{B_1 OC_1}$ ,  $\widehat{C_1 C}$  peut être supposé réduit à un point unique : ceci permet de considérer un arc

Fig. 8.



de cercle, un arc concave, un arc convexe, comme des cas particuliers de l'obstacle en accolade. Remarquons enfin qu'un tel obstacle rentre

Fig. 8 bis.



dans la catégorie générale des profils visés par l'énoncé du théorème II du paragraphe 16.

Cela étant, posons-nous, relativement à un tel obstacle, le problème de la proue (énoncé au § 7); supposons qu'on ait construit une solution de ce problème [c'est-à-dire qu'on ait déterminé les éléments  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\Phi(s)$  associés à l'accolade] telle que les détachements soient

en proue ou vers l'aval<sup>(62)</sup> (ce dernier cas se présentant lorsque  $P_1$  ou  $P_2$  sont confondus avec C et B) et que le point de bifurcation soit placé au point anguleux O du profil<sup>(63)</sup> si celui-ci en possède un ou coïncide avec un point de l'arc  $B_1 C_1$  dans le cas contraire; nous construisons le domaine  $d$  qui correspond à ces éléments et nous allons montrer que toute solution de l'espèce considérée vérifie les deux conditions de validité de M. Brillouin.

Les points de détachement  $P_1$  et  $P_2$  sont à priori inconnus; mais nous allons montrer qu'ils sont nécessairement situés sur les arcs  $\widehat{B_1 B}$  et  $\widehat{C_1 C}$  respectivement lorsque ces arcs ne se réduisent pas à un point unique (par exemple, dans le cas de l'obstacle concave vers le courant). Dans ce cas les points C et  $C_1$  sont confondus; d'après notre énoncé  $P_1$  sera alors nécessairement confondu avec C. Sinon, en effet, l'un des arcs  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  serait réduit à un arc concave vers le courant, alors que le détachement correspondant serait nécessairement en proue (puisque  $P_1$  et  $P_2$  sont distincts de B et C). Or, ces deux faits sont incompatibles, d'après le corollaire II du théorème IV (cf. § 16) et la remarque additionnelle. Cela étant, nous appellerons  $e^{i\delta_1}$  et  $e^{i\delta_2}$  les images respectives des points  $C_1$  et  $B_1$  dans le plan Z; la fonction  $\Phi(s)$  est par suite croissante dans les intervalles  $\delta_2 \leq s \leq s_0$ ,  $s_0 \leq s \leq \delta_1$  et décroissante pour  $0 \leq s \leq \delta_2$ ,  $\delta_1 \leq s \leq \pi$ . D'après les résultats<sup>(64)</sup> du paragraphe 13,  $\Phi'(s)$  et  $\Phi''(s)$  existent (sauf pour  $s = s_0$ ) puisque  $c$  et  $\frac{dc}{dl}$  existent. Nous allons montrer que les lignes libres sont nécessairement convexes vers le courant.

En effet, si le point  $P_1$  coïncide avec C, la quantité correspondante  $\Omega'(-1)$  ne peut être positive, puisqu'en ce point la ligne  $\lambda_1$  présente, par hypothèse, soit un détachement en aval, soit un détachement en proue; dans le premier cas  $\lambda_1$  sera convexe dans le voisinage de C en vertu d'un résultat du paragraphe 13; il en sera de même dans le second cas puisque  $\varpi_1$  est convexe en C; en vertu du

<sup>(62)</sup> Nous montrerons que de telles solutions existent.

<sup>(63)</sup> Cette hypothèse est sûrement remplie dans le cas particulier de la configuration symétrique.

<sup>(64)</sup> Et leurs réciproques qui seront établis au cours du Chapitre III.

théorème III du paragraphe 16,  $\lambda_1$  est toujours convexe. La conclusion subsiste si l'on suppose  $P_1$  placé en un point quelconque de  $\widehat{C_1 C}$ .

Cela acquis, considérons les fonctions harmoniques conjuguées  $U(X, Y)$  et  $V(X, Y)$  définies par l'équation (4.35). Ces fonctions existent pour  $|Z| = 1$ , puisque  $\Phi'(s)$  existe (cf. § 13).

Nous appellerons  $O$  l'ensemble ouvert des points de  $d$  en lesquels  $V$  est négatif; l'ensemble ouvert des points de  $O$  en lesquels  $U$  est positif (ou négatif) sera désigné par  $O_+$  (ou  $O_-$ ). Les ensembles  $O$ ,  $O_+$ ,  $O_-$  se décomposent respectivement en domaines  $D$ ,  $D_+$  et  $D_-$  d'un seul tenant; nous désignerons par  $D'$ ,  $D'_+$  et  $D'_-$  leurs frontières respectives, supposées orientées dans le sens des rotations positives.

1° Nous allons montrer tout d'abord que dans le voisinage de  $|Z| = q$  il existe des points appartenant à chacun des ensembles  $O$ ,  $O_+$  et  $O_-$ . On remarquera que la démonstration s'applique à tout obstacle vérifiant les conditions (V).

En effet, d'après les équations de définition même,  $U(qe^{is}) = 0$ ; d'autre part, le long de  $Z = qe^{is}$ , on a

$$V(qe^{is}) = \frac{dT}{df} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{df}.$$

Or, le théorème II du paragraphe 17 montre que  $\frac{dT}{ds}$  change de signe une fois pour  $s = s_1$ , alors que  $\frac{ds}{df}$  change de signe une fois pour  $s = s_1$  ( $Z_1 = qe^{is_1}$  étant l'image du point à l'infini, en amont, du domaine  $\mathcal{A}$ ); en définitive, le long de  $|Z| = q$ ,  $V$  est positif pour  $0 \leq s \leq s_1$  et  $\varepsilon \leq s \leq \pi$ ;  $V < 0$  pour  $s_1 \leq s \leq \varepsilon$  <sup>(65)</sup>, donc dans le voisinage de l'arc correspondant de  $|Z| = q$ . Il s'ensuit que l'ensemble  $O$  n'est pas vide.

D'après ce qui précède,  $V(qe^{is})$  possède au moins un minimum dans l'intervalle  $s_1 \leq s \leq \varepsilon$ ; il existe donc un argument  $s = \varepsilon_1$  où  $\frac{dV(qe^{is})}{ds}$  s'annule en passant du négatif au positif. Comme  $U(qe^{is}) = 0$ , la

---

<sup>(65)</sup> Dans le cas symétrique  $s_1 = \varepsilon$ ; on adaptera aisément les raisonnements à cette hypothèse. Nous admettons, pour fixer les idées, que  $\varepsilon > s_1$ ; cette hypothèse ne diminue en rien la généralité du raisonnement.



relation

$$\frac{dU}{dn} = \frac{1}{q} \frac{dV}{ds}(qe^{is})$$

montre alors que  $U < 0$  dans le voisinage de  $Z = qe^{is}$  pour  $\varepsilon_1 - s > 0$  et suffisamment petit, et que  $U > 0$  dans le voisinage de  $Z = qe^{is}$  pour  $s - \varepsilon_1 > 0$  et suffisamment petit; ces raisonnements établissent l'existence de chacun des ensembles  $O_+$  et  $O_-$ , puisque  $V < 0$  dans le voisinage de  $q = e^{i\varepsilon_1}$  (66).

2° Nous allons maintenant étudier les valeurs frontières de  $U$  et de  $V$ .

On vérifie aisément que le point  $Z = q$  est un zéro double de la fonction  $t(Z) - a$ .

(66) Lorsque l'une des parois,  $\mu_2$  pour fixer les idées, s'éloigne indéfiniment, les raisonnements doivent être retouchés comme suit. En admettant la réciproque du théorème du paragraphe 14, nous supposons que la condition  $d_2 = \infty$  entraîne :  $\lim |a| = \infty$ ; il vient alors, d'après ce qu'on a vu :  $\lim s_1 = 0$ ; la fonction  $V(qe^{is}) = \frac{dT}{df}(qe^{is})$  ne change de signe qu'une fois dans l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ .

Comme  $V(q) = \left(\frac{dT}{ds}\right)_{s=0} \left(\frac{ds}{df}\right)_{s=0}$  est nul,  $V(qe^{is})$  sera négatif dans le voisinage de  $s = 0$ ; l'ensemble  $O$  existe encore dans le voisinage de  $Z = q$ . Les formules (1.43) et (1.50) montrent, en effet, que dans le voisinage de  $Z = q$ , on a

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{Z=q} = A, \quad t = -\frac{\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{1}{(Z-q)^2} + \dots$$

Cela montre que  $\frac{d\Omega}{df}$  est holomorphe pour  $Z = q$  et y possède un zéro d'ordre trois; on a

$$U + iV = \frac{\omega_1^2}{2\pi^2 q^2} \Omega'(q) \left(\frac{dt}{df}\right)_{Z=q} (Z-q)^3 + \dots$$

Il s'ensuit que  $s = 0$  est un zéro de  $\frac{dV(qe^{is})}{ds}$ ;  $V(qe^{is})$  possède donc au moins un minimum dans l'intervalle  $0 \leq s \leq \varepsilon$ . Dès lors le raisonnement du texte suffit pour établir l'existence des points de  $O_+$  et de  $O_-$  dans le voisinage de ce minimum  $Z = qe^{i\varepsilon_1}$ .

Si la paroi  $\mu_1$  s'éloigne indéfiniment, on retombe sur le cas du fluide indéfini traité par M. Leray.

D'après (1.10') :  $\left[ \frac{dt(Z)}{dZ} \right]_{z=q} = 0$  puisque  $p'(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi i} \log Z)$  se réduit pour  $Z = q$  à  $p'(\omega_1) = 0$ . On a donc

$$\lim_{z \rightarrow q} \frac{t - a}{(Z - q)^2} = - \frac{\omega_1^2}{2\pi^2 q^2} \frac{p' \frac{\gamma}{2} p'' \omega_1}{\left( e_1 - p \frac{\gamma}{2} \right)^2}.$$

Des conclusions analogues valent pour  $Z = -q$ ; ce point est, en effet, un pôle d'ordre trois pour le numérateur du second membre de (1.10') et un pôle d'ordre quatre pour le dénominateur; donc

$$t - b = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 Z}{dt^2} \right)_{z=-q} (Z + q)^2 + \dots$$

D'après (1.4) on peut écrire dans le voisinage de  $Z = q$

$$f = - \frac{\psi_2}{\pi} \log(t - a) + \text{série entière en } (Z - q),$$

d'où l'on tire, en utilisant les développements précédents,

$$(2.9) \quad f = - \frac{2\psi_2}{\pi} \log(Z - q) + \text{série entière en } (Z - q).$$

Le comportement de  $f$  dans le voisinage de  $Z = -q$  est absolument analogue.

[Notons en passant que cela montre que les points  $Z = \pm q$  sont des zéros simples de  $\frac{d\Omega}{df}$ .  $U$  et  $V$  ne changent pas de signe dans les portions de voisinage (intérieurs à  $d$ ) de ces points.]

Le long du segment  $q \leq Z \leq 1$  (ou  $-1 \leq Z \leq -q$ ),  $U$  est positif (ou négatif) puisque les lignes tournent leur convexité vers le courant. Il s'ensuit<sup>(67)</sup> qu'aucun domaine  $D$  n'atteint les points  $Z = +1$  (ou  $-1$ ) lorsque la quantité  $\Omega'(+1)$  [ou  $\Omega'(-1)$ ] diffère de zéro.

*a.* En effet, si  $V(X, Y)$  était négatif dans le voisinage intérieur à  $d$  de  $Z = +1$  et du segment  $(q, 1)$ , il résulterait de la relation  $V(X, 0) = 0$  l'inégalité

$$\frac{dU}{dX}(X, 0) = \frac{dV}{dn}(X, Y) < 0,$$

---

<sup>(67)</sup> C'est un point important de la démonstration.

valable le long de l'axe réel;  $U(X, 0)$  serait donc décroissant dans le voisinage de  $X = +1$ . Or, ce fait est contredit par l'équation (1.36); la convexité de  $\lambda_2$  entraîne, en effet,  $\Omega'(1) < 0$ ; donc, d'après (1.36),

$$\lim_{X \rightarrow 1} U(X, 0) = +\infty.$$

Ainsi, la portion considérée du voisinage de  $Z = 1$  n'appartient à aucun domaine D.

b. Il en résulte que si un domaine D atteignait le point  $Z = 1$ , il existerait au moins un arc de courbe d'équation

$$V(X, Y) = 0,$$

aboutissant en ce point et étranger au segment réel  $(q, 1)$ . Or, ce fait est contredit par la formule (1.36); elle montre que lorsque  $\Omega'(1) \neq 0$ , la fonction  $\frac{d\Omega}{df}$  possède en  $Z = 1$  un pôle d'ordre 1. D'après le théorème de M. Magnier <sup>(68)</sup>, une seule courbe d'équation  $V = 0$  peut alors atteindre ce point intérieurement à la couronne C; nous avons vu que cette courbe se réduit au segment réel  $(q, 1)$ , ce qui achève de justifier notre assertion.

La première relation (1.35') montre que  $U(e^{is})$  est positif pour  $0 \leq s \leq \delta_2$  et  $s_0 \leq s \leq \delta_1$  et négatif pour  $\delta_2 < s \leq s_0$ ,  $\delta_1 \leq s \leq \pi$ . Toutefois,  $U$  peut être nul le long des arcs concaves puisque ceux-ci peuvent comporter des portions rectilignes. La dérivée  $\frac{dV(e^{is})}{ds}$  existe, puisque  $\Phi''$  existe.

Il reste à préciser le comportement de  $\frac{d\Omega}{df}$  dans le voisinage de

$$Z = Z_0 = e^{is_0}.$$

D'après l'équation (1.30),  $\frac{d\Omega_0}{dZ}$  s'y comporte comme

$$\frac{1-2\alpha}{i} \frac{1}{Z-Z_0} + \dots,$$

puisque  $H(Z)$  est régulière et dérivable pour  $Z = Z_0$ ; (1.23) et (1.27)

<sup>(68)</sup> Cf. le renvoi <sup>(69)</sup>.

permettent d'écrire alors le développement limité

$$(2.10) \quad \frac{d\Omega}{dZ} = -\frac{2\alpha}{i} \frac{1}{Z-Z_0} + \dots$$

Les formules (1.4) et (1.10) montrent que  $Z = Z_0$  est un zéro d'ordre deux de  $f = f(Z)$ ; on a

$$(2.11) \quad \lim_{Z \rightarrow Z_0} \frac{\frac{df}{dZ}}{Z-Z_0} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\left(\frac{dt}{dZ}\right)_{Z=Z_0}^2}{(t_0-a)(b-t_0)} = -\frac{K^2}{Z_0^2},$$

où  $K$  désigne une constante réelle qui dépend de  $\psi_1 + \psi_2$ ,  $s_0$ ,  $a$  et  $b$ .

L'ensemble de ces résultats permet d'écrire le développement limité

$$U + iV = \frac{2\alpha}{iK^2} \frac{1}{(Ze^{-is_0} - 1)^2} + \dots$$

D'après un théorème de M. Magnier<sup>(69)</sup>, la disposition des courbes  $U = \text{const.}$  et  $V = \text{const.}$  au point  $Z = Z_0$  est identique à celle qu'y présente le développement de  $U + iV$  arrêté à son premier terme; par suite, le point  $Z = Z_0$  est l'origine de deux courbes d'équation  $V = 0$  qui s'y croisent à angle droit, séparées par une ligne d'équation  $U = 0$ .

Il existe donc des points de  $O$ ,  $O_+$  et  $O_-$  dans le voisinage de  $Z = Z_0$ ; leur disposition est indiquée sur la figure 8 bis<sup>(70)</sup>.

En résumé,  $\frac{d\Omega}{df}$  est une fonction analytique de  $Z$ , régulière pour  $q \leq |Z| < 1$ ; elle possède au point  $Z = Z_0$  un pôle double et, éventuellement, un pôle simple en chacun des deux points  $Z = \pm 1$  lorsque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  y présentent des détachements en aval.

3° Montrons que tout domaine  $D_+$  (ou  $D_-$ ) atteint l'arc  $s_0 \leq s \leq \delta_1$  (ou  $\delta_2 \leq s \leq s_0$ ) du cercle  $Z = e^{is}$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons que la frontière  $D'_+$  d'un domaine  $D_+$  soit étrangère à l'arc  $s_0 \leq s \leq \delta_1$  de  $Z = e^{is}$ . Comme, par

<sup>(69)</sup> *C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1275.

<sup>(70)</sup> Observons que le pôle de  $U + iV$  au point  $Z = Z_0$  est simple dans le cas où  $\alpha = 0$ ; le point  $O$  est alors un point de rebroussement du profil. Il serait facile d'adapter nos raisonnements à cette hypothèse simplificatrice.

ailleurs, l'ensemble  $O$  est vide dans le voisinage de  $Z = \pm 1$  lorsque  $\Omega'(\pm 1) \neq 0$ , il en résulterait que  $O_+$  ne pourrait atteindre aucun point de discontinuité de  $U + iV$ ;  $U$  serait donc continu le long de  $D'_+$ . Or, les portions de  $D'_+$  étrangères à  $Z = e^{is}$  se composent : *a.* d'arcs intérieurs à  $d$  (ou appartenant à  $Z = qe^{is}$ ) le long desquels  $U = 0$ ; *b.* éventuellement, des segments de l'axe réel et d'arcs de courbes intérieurs à  $d$  le long desquels on aurait  $U > 0$ ;  $V = 0$ . Pour ces derniers éléments de  $D'_+$  (donc l'arc  $l$  est supposé orienté comme il a été dit), on a, en désignant par  $n_i$  la normale intérieure à  $D_+$ ,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dn_i} \leq 0,$$

puisque  $V \leq 0$  dans  $D_+$ .

D'autre part, d'après (1.35') et les résultats de l'alinéa 2° : *a.*  $D'_+$  est étranger à l'arc  $\delta_1 \leq s \leq \pi$ , le long duquel par hypothèse  $c(l)$  n'est pas nul; *b.*  $U$  est nul en des points communs à  $D'_+$  et à l'arc  $\delta_2 \leq s \leq s_0$ .

Enfin, le long des portions de  $Z = e^{is}$ , communes à  $D'_+$  et à l'arc  $0 \leq s \leq \delta_2$ ,  $U$  ne peut pas croître. En effet, les équations (1.35') permettent d'écrire

$$\frac{dU}{dt} = -e^{-\tau} \frac{dc}{dt} - cV,$$

la dérivation de  $U$  étant légitime d'après l'alinéa 2°; or, le long de l'image de  $\widehat{B}_1 B$  on a, par hypothèse,

$$c(l) < 0, \quad \frac{dc}{dt} \geq 0.$$

Il s'ensuit que si  $V(e^{is})$  était négatif aux points considérés de  $Z = e^{is}$ , on aurait, en ces points,

$$\frac{dU}{dt} \leq 0.$$

Ainsi,  $U$  serait non croissant mais continu le long de  $D'_+$  (sans pouvoir être constant); ces propriétés sont contradictoires et cette incompatibilité établit notre lemme.

**COROLLAIRE.** — *Il existe un chemin  $l_-$  intérieur à  $O_-$  et joignant un point de  $Z = qe^{is}$  à un point de l'arc  $\delta_2 \leq s \leq s_0$  du cercle  $|Z| = 1$ .*

En effet, d'après l'alinéa 1°, il existe des points de  $O_-$  appartenant

à  $Z = qe^{is}$ ; or, d'après l'alinéa 3°, les domaines  $D_-$ , dont ces points font partie, atteignent l'arc  $\delta_1 \leq s \leq s_0$ .

4° L'ensemble  $O_+$  (ou  $O_-$ ) n'atteint ni le segment  $q \leq Z \leq 1$  (ou  $-1 \leq Z \leq -q$ ), ni l'arc  $0 \leq s \leq \delta_2$  de  $Z = e^{is}$  (ou  $\delta_1 \leq s \leq \pi$ ).

Raisonnons par l'absurde. Un domaine  $D_+$  ayant des points communs soit avec l'arc  $0 \leq s \leq \delta_2$  de  $Z = e^{is}$ , soit avec le segment  $q \leq Z \leq 1$  ne peut avoir de points<sup>(71)</sup> communs avec l'arc  $s_0 < s \leq \delta_1$ , puisqu'il en est séparé par le chemin  $L_-$  (voir le précédent corollaire). Par suite, d'après l'alinéa 3°,  $D_+$  et  $L_-$  doivent atteindre nécessairement le point  $Z = Z_0$ ; dans le voisinage de ce point, à l'intérieur du domaine limité par  $L_-$ ,  $Z = e^{is}$ , ( $s \leq s_0$ ) et  $Z = qe^{is}$ , il y aurait des points de  $O_+$ . Or, cela est en contradiction avec l'allure de  $U + iV$  telle qu'elle résulte de l'alinéa 2°. L'extension du théorème de M. Leray au cas du courant limité par une ou deux parois planes s'achève alors d'elle-même.

5° La première condition de M. Brillouin est vérifiée. D'après les résultats du paragraphe 17, il suffit de vérifier l'inégalité  $T(X, Y) \leq 0$  le long de  $Z = e^{is}$ .

a. La fonction  $T(X, Y)$  n'atteint pas son maximum le long des images des arcs concaves. On a, en effet, le long de  $\delta_2 \leq s \leq s_0$ , par exemple,

$$\frac{dT}{dn_i} = \frac{d\psi}{ds} \geq 0.$$

$T(X, Y)$  atteint donc son maximum sur les images des arcs convexes.

b. Le long de l'arc  $0 \leq s \leq \delta_2$ , par exemple,  $U(e^{is}) > 0$ ; d'après l'alinéa 4°,  $V(e^{is}) \geq 0$  pour  $0 \leq s \leq \delta_2$ . Cela entraîne, en tenant compte de la deuxième relation (1.35'),

$$\frac{dT(e^{is})}{dt} \leq 0 \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \delta_2.$$

Il s'ensuit que le maximum de  $T(e^{is})$  est atteint pour  $Z = 1$ ; or

$$T(1, 0) = 0.$$

(71) Autres que  $Z = e^{is_0}$ .

6° La deuxième condition de validité de M. Brillouin est satisfaite.

On a vu que  $U(X, 0) > 0$  pour  $q \leq X \leq 1$ ; d'après l'alinéa 4°, il en résulte que  $V$  est positif dans le voisinage de ce segment intérieur à  $d$ ; donc, comme  $V(X, 0) = 0$ ,

$$\frac{dV}{dn_i} = \frac{dU}{dX} > 0.$$

Ainsi, la courbure de la ligne libre  $\lambda_2$  croît quand on se rapproche du point de détachement. Si donc le détachement de  $\lambda_2$  est en proue,  $\lambda_2$  est extérieure au cercle osculateur en  $P_2$  à l'obstacle. Au contraire l'arc  $\widehat{P_2 B}$  est intérieur à ce cercle puisque sa courbure croît quand on se déplace de  $P_2$  vers  $B$ .

Ainsi tout danger de recoupement est écarté.

*Remarque.* — Il y a lieu de noter que lorsque le détachement au point  $P_2$  est en proue, l'obstacle étant en accolade, on a nécessairement en ce point

$$(2.12) \quad c'_2 > 0,$$

le cas de l'égalité étant exclu [*cf.* la formule (1.37)]; d'après les résultats du paragraphe 13,  $c'_2$  ne peut être négatif lorsque les deux conditions de M. Brillouin sont vérifiées dans le voisinage d'un détachement en proue. Cette remarque, due à M. Leray, nous sera utile.

En effet, rappelons que moyennant les hypothèses faites sur la régularité de l'obstacle et la nature du détachement en  $P_2$ , les fonctions harmoniques  $U(X, Y)$  et  $V(X, Y)$  sont continues et dérivables dans le voisinage du point  $Z = 1$ ; le long du cercle  $|Z| = 1$  elles seront donc liées par la relation

$$(2.12') \quad d \left[ \frac{U(e^{is})}{c(s)} \right] = -V(e^{is}) dl(s),$$

qu'on obtient en éliminant la fonction  $T(e^{is})$  entre les deux équations (1.35') et qui, dans le cas considéré — cas du détachement en proue — est valable même pour  $s = 0$ .

Ceci posé, admettons que l'on ait, contrairement à l'énoncé,

$$c'_2 = \left[ \frac{d}{dZ} (U + iV) \right]_{Z=1} = 0.$$

La fonction  $V$ , nulle le long de l'axe réel, posséderait au point  $Z = 1$  un zéro double, ce qui nous permettrait d'écrire, le long de  $Z = e^{is}$ ,

$$|V(e^{is})| \leq \text{const. } s^2.$$

Compte tenu de la relation (2. 12'), cette inégalité entraînerait

$$|U(e^{is}) - U(1)| \leq \text{const. } s^4,$$

puisque, rappelons-le,  $\frac{dl(s)}{ds}$  s'annule pour  $s = 0$ . Dès lors, d'après les résultats de M. Magnier <sup>(72)</sup>, il existerait quatre courbes de Jordan d'équation  $U = U(1)$  (et, par conséquent,  $V = 0$ ) aboutissant au point  $Z = 1$ , intérieures à la couronne  $C$ , et dont les tangentes intérieures au domaine  $d$  auraient pour arguments  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{4}$ ; le nombre de courbes précédentes peut d'ailleurs se réduire à deux. En tout état de cause, la fonction  $V(X, Y)$  ne pourrait pas être d'un signe constant dans la portion de voisinage de  $Z = 1$  intérieure à  $d$ ; or, ceci est en contradiction avec l'inégalité

$$V \geq 0 \quad \text{pour} \quad Y \geq 0,$$

que nous avons établie au cours du présent paragraphe.

### CHAPITRE III.

#### Problème de représentation conforme de Helmholtz. Théorèmes d'existence.

**19. PRELIMINAIRES.** — Jusqu'ici nous avons étudié des sillages dont les obstacles étaient caractérisés par les données arbitraires de M. Villat :  $\Psi(l)$ ,  $l(s)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , supposées reliées par l'équa-

---

<sup>(72)</sup> Cf. *loc. cit.* <sup>(69)</sup>.



tion (1.24). Maintenant nous allons nous placer au point de vue opposé; nous chercherons à construire les éléments correspondant à un obstacle donné, placé d'une manière connue par rapport aux parois fixes  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Ces recherches reposent sur quelques lemmes de représentation conforme et des limitations *a priori* des paramètres; les résultats sont dus à M. Leray <sup>(73)</sup>, à moins qu'ils ne soient inspirés par lui. Nous commencerons par exposer ces préliminaires indispensables qui permettent d'étudier *a priori* les propriétés de la solution; la théorie des équations fonctionnelles de MM. J. Schauder et J. Leray nous permettra ensuite de conclure.

**20.** *Un lemme sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme.* Rappelons tout d'abord quelques notions classiques. Envisageons un arc de courbe réelle, plane, définie — pour fixer les idées — relativement à un système d'axes rectangulaires par les équations paramétriques :

$$\begin{aligned}x &= x(h), \\ y &= y(h),\end{aligned}$$

dans lesquelles les symboles  $x(h)$  et  $y(h)$  désignent deux fonctions réelles de l'argument réel  $h$ , continues dans l'intervalle

$$h_0 \leq h \leq h_1;$$

un tel arc sera dit *arc de Jordan*.

Si les fonctions  $x(h)$  et  $y(h)$  vérifient les conditions

$$\begin{aligned}x(h_0) &= x(h_1), \\ y(h_0) &= y(h_1),\end{aligned}$$

la courbe sera dite *fermée*.

---

<sup>(73)</sup> Je n'ai pas cru devoir indiquer en leur lieu et place tous les emprunts que j'ai faits aux travaux de M. Leray. Signalons, toutefois, que les paragraphes **20**, **25** et **28** ne font qu'exposer, en les précisant et en les développant, les résultats acquis par cet auteur (*voir* les chapitres III et IV de son *Mémoire des Comm. Math. Helveticæ*). Partout ailleurs, j'ai eu à utiliser à maintes reprises le travail précité ainsi que les suggestions que M. Leray m'a faites de vive voix.

Si le système de deux équations a une seule inconnue

$$\begin{aligned} x(h) &= x(h_2) \\ y(h) &= y(h_2) \end{aligned} \quad \text{avec } h_0 < h_2 < h_1$$

n'admet d'autre solution que  $h = h_2$ , la courbe sera dépourvue de points multiples. Toute courbe de Jordan  $\Gamma'$  fermée, sans points multiples, partage le plan en deux régions (théorème de Jordan); les points de la région intérieure constitue le domaine simplement connexe  $\Gamma$  <sup>(74)</sup> dont la courbe  $\Gamma'$  sera la frontière.

D'après un résultat de Schœnflies, tout point A d'une courbe fermée  $\Gamma'$  de Jordan est accessible de l'intérieur de cette courbe; nous entendons par là que le point en cause peut être joint à un point intérieur du domaine par un arc de courbe de Jordan n'ayant en commun avec  $\Gamma'$  que le point A, par exemple, par une ligne polygonale; dans le cas général celle-ci aura un nombre infini de côtés dans le voisinage de A et sa longueur totale ne sera pas finie. Mais on montre que tout point A de  $\Gamma'$  peut être considéré comme point limite d'une suite de points  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , de  $\Gamma'$  qui sont accessibles de l'intérieur de  $\Gamma$  par des arcs de courbes rectifiables de longueurs finies (par exemple, des lignes polygonales de longueur finie).

Dans la suite nous aurons à utiliser la notion d'étendues extérieure et intérieure du domaine  $\Gamma$ . Considérons dans le plan de  $\Gamma$  un quadrillage constitué par deux systèmes de droites rectangulaires, parallèles respectivement aux axes; appelons  $d$  la longueur maxima des diagonales des rectangles de ce quadrillage,  $\sigma_d$  la somme des aires de ceux des rectangles du quadrillage dont tous les points font partie de  $\Gamma$ ,  $\Sigma_d$  la somme des aires de ceux des rectangles de l'espèce considérée qui contiennent les points de  $\Gamma$ . D'après cela, on a

$$\sigma_d \leq \Sigma_d.$$

Cela étant, considérons une suite infinie de quadrillages telle que les diagonales maxima  $d_i$  correspondantes vérifient la condition

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = 0.$$

---

(74) Une telle définition du domaine est très restrictive. Pour plusieurs auteurs, le mot domaine a une acceptation beaucoup plus large.

On démontre que chacun des nombres  $\sigma_{d_i}$  et  $\Sigma_{d_i}$  tend vers une limite bien déterminée, indépendante du choix des quadrillages; nous désignerons par  $\sigma$  et  $\Sigma$  les nombres ainsi définis

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{i=\infty} \sigma_{d_i}, \\ \Sigma &= \lim_{i=\infty} \Sigma_{d_i};\end{aligned}$$

$\sigma$  est ce qu'on appelle étendue intérieure de  $\Gamma$  alors que  $\Sigma$  en est l'étendue extérieure.

En général, on a

$$\sigma < \Sigma.$$

Si  $\sigma = \Sigma$ , le domaine est dit quarrable et sa frontière  $\Gamma'$  est dite d'étendue extérieure nulle; il en est, notamment, ainsi, lorsque  $\Gamma'$  est une courbe rectifiable.

Cela étant, attachons au plan de  $\Gamma$  la variable complexe :  $z = x + iy$ ; envisageons, d'autre part, dans le plan de la variable  $Z = X + iY$  le cercle d'équation  $|Z| = 1$ . On sait qu'on peut représenter conformément  $\Gamma$  sur l'intérieur de  $|Z| = 1$ ; on démontre de façon élémentaire que cette correspondance jouit des propriétés suivantes :

1° toute fonction

$$z = z(Z)$$

qui réalise l'une des correspondances en cause est analytique et holomorphe pour  $|Z| < 1$ ;

2° à un point intérieur à  $\Gamma$  correspond un point intérieur à  $|Z| < 1$ , et réciproquement; par suite, à un point de  $|Z| = 1$  ne peut correspondre qu'un ou plusieurs points de  $\Gamma'$ ; d'après cela, au chemin  $\widehat{MN}$ , joignant intérieurement à  $|Z| \leq 1$  deux points  $MN$  de sa frontière (ce qui veut dire que tout point de  $\widehat{MN}$ , autre que  $M$  et  $N$ , est étranger à  $|Z| = 1$ ), il correspond un chemin  $\widehat{mn}$  (dont la longueur, dans le cas général, ne sera pas finie) joignant intérieurement à  $\Gamma$  deux points  $m$  et  $n$  de  $\Gamma'$ ;

3° si la longueur  $l$  du chemin  $\widehat{mn}$  est finie, elle sera donnée par la formule

$$l = \int_{\widehat{mn}} \left| \frac{dz}{dZ} dZ \right|.$$

4° l'étendue intérieure  $\sigma$  du domaine  $\Gamma$  sera donnée par l'intégrale de Dirichlet

$$\sigma = \iint \left| \frac{dz}{dZ} \right|^2 dX dY,$$

étendue à tout le domaine  $|Z| < 1$ .

Il importe de bien faire préciser que les résultats des alinéas 3° et 4° subsistent dans le cas le plus général, c'est-à-dire lorsque la dérivée  $\frac{dz}{dZ}$  n'existe pas pour tous ou quelques-uns des points de  $|Z| = 1$ .

Il est évident que les résultats précédents valent tant pour le cercle  $|Z| = 1$  que pour tout autre domaine que l'on sait représenter sur  $|Z| \leq 1$ , par exemple, le demi-plan supérieur, le rectangle, etc.

En utilisant les conclusions élémentaires qui précèdent, nous allons, avec M. Leray, imiter les raisonnements de Grötsch et de J. Wolff et établir un lemme sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme d'un domaine sur un demi-plan; cela nous permettra, dans le paragraphe suivant, de retrouver, en les précisant, plusieurs des résultats classiques acquis à ce jour dans cette voie. Il est, du reste, à noter que les conclusions du présent paragraphe peuvent être étendues aux frontières autres que des courbes de Jordan.

Considérons donc un domaine borné, simplement connexe  $\Gamma$  situé dans le plan de la variable  $z$ . Nous appellerons  $z = f(t)$  la fonction analytique qui réalise l'application conforme de  $\bar{\Gamma}$  sur le demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}$  (cf. § 9). Soient  $t_1, t_2, t_3, t_4$  quatre points de l'axe réel du plan  $Z$ . On suppose que  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ; d'après cela les images  $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$  et  $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$  des segments  $t_1 t_2$  et  $t_3 t_4$  seront des portions de  $\Gamma'$  dépourvues de points communs. Il en est de même des images  $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$  et  $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$  des segments  $(t_2 t_3)$  et  $(t_4, +\infty; -\infty, t_1)$ . Nous appellerons  $\Lambda(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_4 \alpha_1})^{(75)}$  la plus courte longueur des chemins tracés dans le plan  $z$  *intérieurement* à  $\Gamma$  et joignant  $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$  à  $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$ . Ceci posé, nous allons établir

---

(75) Nous désignerons dans la suite ce nombre simplement par  $\Lambda$  lorsque aucune ambiguïté ne sera à craindre.

l'inégalité suivante

$$(3.1) \quad \frac{\Lambda^2}{\sigma} \leq \frac{4\pi}{\left| \log \frac{1}{|r|} \right|},$$

qui sera valable moyennant la condition  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$  et où le symbole  $r$  désigne le rapport anharmonique des points  $t_3, t_2, t_4, t_1$  pris dans cet ordre. On observera que  $r$  est positif, puisque l'on a

$$(3.1') \quad r = \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}.$$

En effet, représentons conformément le domaine  $\mathfrak{C}$  sur l'intérieur d'un rectangle  $R$  du plan auxiliaire  $u = u_1 + iu_2$ ; on pourra, par exemple, utiliser à cet effet les formules de transformation (1.5) et (1.5'), à condition de substituer aux racines  $a, -1, +1, b$  du polynome  $R(t)$  les quantités  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$ . Considérons un segment rectiligne d'équation  $u_1 = \alpha$ , intérieur à  $R$  et joignant les côtés  $AD$  et  $BC$ ; la relation  $z = \mathcal{F}[t(u)]$  lui fait correspondre un chemin intérieur à  $\Gamma$ , reliant les éléments  $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$  et  $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$  de sa frontière  $\Gamma'$  et dont la longueur, qui peut n'être pas finie, est égale à (*cf.* la figure 4)

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} |\mathcal{F}'[t(\alpha + iu_2)]| du_2.$$

Je dis, toutefois, qu'il existe des valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles l'intégrale ci-dessus a une valeur finie. En effet, d'après ce que nous avons rappelé au début de ce paragraphe, l'intégrale

$$I(\varepsilon_2, \alpha) = \int_{\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{i} - \varepsilon_2} |\mathcal{F}'[t(\alpha + iu_2)]| du_2,$$

dans laquelle  $\varepsilon_2$  désigne un nombre positif arbitrairement petit mais non nul, est finie. On en tire, en utilisant l'inégalité de Schwartz,

$$[I(\varepsilon_2, \alpha)]^2 \leq \frac{\omega_3}{i} \int_{\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{i} - \varepsilon_2} |\mathcal{F}'[t(\alpha + iu_2)]|^2 du_2,$$

l'intégrale du second membre, que nous désignerons par  $I_1(\varepsilon_2, \alpha)$ ,

étant encore finie lorsque  $\varepsilon_2$  diffère de zéro. D'après l'inégalité qui précède, nous justifierons notre assertion dès que nous aurons prouvé que pour certaines valeurs de  $\alpha$  ( $-\frac{\gamma}{2} < \alpha < -\frac{\gamma}{2} + \omega_1$ ) l'intégrale  $I_1(o, \alpha)$  est supérieurement bornée. Or, l'élément d'aire de  $\Gamma$  étant égal à

$$|f'[\iota(u)]|^2 du_1 du_2,$$

nous pouvons écrire

$$\int_{-\frac{\gamma}{2} + \varepsilon_1}^{\omega_1 - \varepsilon_1 - \frac{\gamma}{2}} I_1(\varepsilon_2, u_1) du_1 \leq \sigma,$$

en désignant par  $\varepsilon_1$  un nombre positif arbitrairement petit mais non nul et par  $\sigma$  l'étendue intérieure de  $\Gamma$ .

Faisons alors tendre  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  vers zéro; il vient, en passant à la limite et en utilisant un résultat rappelé au début de ce paragraphe,

$$\int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\omega_1 - \frac{\gamma}{2}} I_1(o, u_1) du_1 = \sigma.$$

De cette formule il résulte que la mesure  $e$  de l'ensemble des points de l'intervalle  $-\frac{\gamma}{2} < \alpha < -\frac{\gamma}{2} + \omega_1$ ,  $u_2 = 0$  en lesquels

$$I_1(o, \alpha) > A,$$

A désignant une constante positive quelconque, vérifie l'inégalité

$$e \leq \frac{\sigma}{A}.$$

Il suit de là que la mesure de l'ensemble des points en lesquels  $I_1(o, \alpha)$ , et par suite  $I(o, \alpha)$ , n'est pas supérieurement borné, est nulle.

Ainsi, la borne inférieure de l'ensemble  $I(o, \alpha)$  des longueurs correspondant à  $-\frac{\gamma}{2} \leq \alpha \leq \omega_1 - \frac{\gamma}{2}$  est finie et au plus égale à  $A$ , puisque l'ensemble des segments considérés est inclus dans celui des chemins joignant intérieurement à  $R$  les images  $AD$  et  $BC$  de  $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$  et  $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$ . Or, l'inégalité de Schwartz, appliquée à l'intégrale  $I(o, \alpha)$  ci-dessus,

permet d'écrire

$$[I(o, \alpha)]^2 \leq \frac{\omega_3}{l} I_1(o, \alpha)$$

en tout point  $\alpha$  où  $I_1(o, \alpha)$  a un sens.

Cette relation a encore lieu entre les bornes inférieures de deux intégrales considérées; on a donc

$$\Lambda^2 \leq \frac{\omega_3}{l} [\text{borne inférieure de } I_1(o, \alpha)].$$

Appliquons alors le théorème de la moyenne à l'intégrale du second membre (manifestement positive); en utilisant l'expression de l'élément d'aire de  $\Gamma$ , il vient

$$\text{Borne inférieure } I_1(o, \alpha) \leq \frac{I}{\omega_1} \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\omega_1 - \frac{\gamma}{2}} |f'[\ell(u)]|^2 du_1 du_2 = \frac{\sigma}{\omega_1}.$$

De deux dernières inégalités, on tire

$$(3.2) \quad \Lambda^2 \leq \frac{\omega_3}{l\omega_1} \sigma.$$

Cette inégalité, notons-le en passant, est indépendante de l'hypothèse :  $o \leq r \leq \frac{l}{2}$ .

Il est bien évident que les raisonnements précédents s'appliquent encore aux éléments  $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$  et  $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$  de  $\Gamma'$ , à condition d'invertir partout le rôle de  $\omega_1$  et  $\frac{\omega_3}{l}$ ; on aurait donc l'inégalité

$$(3.2') \quad \lambda^2 \leq l \frac{\omega_1}{\omega_3} \sigma,$$

où  $\lambda$  désigne la borne inférieure des longueurs des chemins joignant  $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$  à  $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$  intérieurement à  $\Gamma$ .

Cela posé, introduisons la fonction modulaire

$$X(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \varphi}},$$

dont l'argument  $\chi$  est donné par

$$\chi = \frac{e_2 - e}{e_1 - e_3} \quad (0 \leq \chi \leq 1),$$

formule où les  $e_i$  correspondent à la fonction  $p(u; \omega_1, \omega_3)$ , dont les périodes sont construites à l'aide de (1.6) en posant

$$R(t) = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4).$$

Les paramètres  $\chi$  et  $r$  sont liés par la relation (CXXXII, et CXXXVII T. M.)

$$\chi = 1 - r.$$

Or, des formules bien connues (cf. CXIX, et CXX T. M.), il résulte

$$\frac{\tau}{t} = \frac{X'(\chi)}{X(\chi)},$$

où les fonctions  $X(\chi)$  et  $X'(\chi)$  sont données, sous réserve que  $|\chi| < 1$ , par les relations

$$\begin{aligned} X(\chi) &= \frac{\pi}{2} \lambda(\chi), \\ X'(\chi) &= -\frac{1}{2} \left[ 4\mu(\chi) + \lambda(\chi) \log \frac{\chi}{16} \right], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda(\chi) &= 1 - \frac{1}{\pi} \log(1 - \chi) - \varepsilon(\chi), \\ \mu(\chi) &= -\frac{1}{\pi} \log 2 \log(1 - \chi) - \eta(\chi), \end{aligned}$$

les fonctions  $\varepsilon(\chi)$  et  $\eta(\chi)$  étant assujetties à vérifier respectivement les inégalités

$$|\varepsilon(\chi)| \leq \frac{1}{5} |\chi|, \quad |\eta(\chi)| \leq \frac{1}{3} |\chi|.$$

Comme, par hypothèse,  $r$  reste compris entre 0 et  $\frac{1}{2}$ ,  $\chi$  sera compris entre  $\frac{1}{2}$  et 1; or, les formules précédentes cessent d'être valables pour  $\chi = 1$ . Pour tourner la difficulté, nous utiliserons les relations fonctionnelles (cf. CXX, T. M.) que vérifie  $X(\chi)$

$$\begin{aligned} X(\chi) &= X'(1 - \chi), \\ X'(\chi) &= X(1 - \chi). \end{aligned}$$



d'où l'on tire

$$\frac{\tau}{i} = \frac{X(1-\chi)}{X'(1-\chi)}.$$

De l'ensemble des résultats qui précèdent, il résulte

$$\frac{\tau}{i} = \frac{\pi \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \log \chi - \varepsilon(1-\chi) \right]}{-\log \frac{(1-\chi)}{16} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \log \chi - \varepsilon(1-\chi) \right] + \frac{4}{\pi} \log^2 \log \chi + 4 \eta(1-\chi)},$$

la relation étant valable pour  $\chi = 1$ . Dès lors, une discussion élémentaire permet d'écrire l'inégalité

$$\left| \frac{\tau}{i} \right| \leq \frac{4\pi}{\left| \log \frac{1-\chi}{16} \right|},$$

valable tant que  $\chi$  reste compris entre  $\frac{1}{2}$  et 1 — c'est-à-dire tant que  $r$  est compris entre 0 et  $\frac{1}{2}$  et d'où l'on déduira aisément l'inégalité (3.1) en substituant à  $\chi$  sa valeur en fonction de  $r$ .

Notons également que, d'après (3.2),

$$(3.3) \quad \frac{\tau}{i} \frac{\lambda^2}{\sigma} \leq 1$$

[bien entendu,  $\lambda$  ayant la signification précisée dans le texte à propos de la formule (3.2)]. Il s'ensuit que si  $\frac{\tau}{i}$  augmente indéfiniment,  $\lambda$  tend vers zéro.

D'après ce qui précède, cela ne peut avoir lieu que si  $r$  est très voisin de l'unité et, par suite  $\chi$  est voisin de zéro; on a d'ailleurs (CXXII<sub>10</sub> T. M.) dans ce cas

$$\frac{\tau}{i} = \frac{1}{\pi} \log \frac{\chi}{16} + \text{const.} \chi + \dots,$$

$\lambda$  est alors au moins de l'ordre de  $\frac{1}{\pi} \log |\chi|$ .

Il va de soi que les raisonnements précédents demeurent valables si l'on substitue au domaine plan  $\Gamma$  un domaine situé sur une sphère de Riemann.

21. APPLICATION A L'ÉTUDE DES CORRESPONDANCES ENTRE CERTAINS ÉLÉMENTS FRONTIÈRES DANS LA REPRÉSENTATION CONFORME. — Les considérations précédentes permettent de retrouver, en le précisant, ce résultat bien connu de M. C. Carathéodory : la correspondance conforme entre un domaine  $\Gamma$  borné d'un seul tenant du plan  $z$  (limité par une courbe de Jordan  $\Gamma'$ ) d'une part, et le demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}$  (du plan  $t$ ) d'autre part, est continue le long de  $\Gamma'$ . Pour préciser, appelons  $z = f(t) = R(t) + iI(t)$  la fonction analytique qui permet d'effectuer l'application conforme de  $\Gamma$  sur  $\mathfrak{C}$ ; les frontières se correspondant, les équations paramétriques de  $\Gamma$  pourront s'écrire

$$x = R(t), \quad y = I(t),$$

où  $t$  est supposé réel; d'après le théorème de M. Carathéodory, les fonctions  $R(t)$  et  $I(t)$  sont continues pour  $t$  réel; le contour  $\Gamma'$  et l'axe réel  $t$  se correspondent donc point par point.

Pour établir ce résultat, il suffit de se reporter aux inégalités (3. 1) et (3. 1'); nous respectons, pour le moment, les notations du précédent paragraphe.

Fixons, en effet, arbitrairement, ce qui est toujours possible, les points  $t_1, t_2$  et  $t_3$  d'une part <sup>(76)</sup>, et leurs images respectives  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  d'autre part; au point  $t_2$  correspondra alors un point  $\alpha_2(t_2)$ , au moins, de  $\Gamma'$ . Faisons alors tendre  $t_2$  vers  $t_1$ , par exemple; d'après les inégalités (3. 1) et (3. 1'),  $\Lambda(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1})$  tend vers zéro.

Or, le contour  $\Gamma'$  est, par hypothèse, une courbe de Jordan dépourvue de points doubles; donc, sur chaque arc de  $\Gamma'$ , il existe des points accessibles de l'intérieur par des lignes polygonales de longueur finie. Il en résulte,  $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$  et  $\widehat{\alpha_4\alpha_1}$  étant étrangers l'un à l'autre, que  $\Lambda(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1})$  ne peut tendre vers zéro sans que  $\alpha_2$  ne tende vers  $\alpha_1$ ; la correspon-

<sup>(76)</sup> Toutefois, les points  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  doivent être choisis de manière que la quantité  $r$  correspondante [cf. (3, 1')] soit comprise entre  $-1$  et  $0$ . Ceci ne restreint évidemment pas la généralité du raisonnement. Dans les applications, en effet, nous ferons toujours tendre  $t_2$  vers  $t_1$ ; d'après (3. 1') la valeur absolue du rapport anharmonique  $r$  sera suffisamment petite dès que la différence  $t_2 - t_1$  est suffisamment petite. Notons aussi que le raisonnement du texte ne prouve pas, tel quel, que la correspondance  $z = f(t)$  est bicontinue.

dance entre frontières de  $\Gamma$  et de  $\mathfrak{C}$  a donc lieu point par point, ce qui ne peut avoir lieu que si les fonctions  $x = R(t)$  et  $y = I(t)$  sont continues.

C. Q. F. D.

Le raisonnement précédent rattache l'énoncé de M. Carathéodory à des propriétés géométriques intrinsèques de  $\Gamma'$ ; il permet de construire un module de continuité pour la correspondance  $z = f(t)$  pour  $t$  réel, toutes les fois que la fonction  $\Lambda(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_4 \alpha_1})$ , ou une de ses minorantes, aura été explicitée<sup>(77)</sup>. Nous nous proposons maintenant d'appliquer ces généralités à quelques exemples<sup>(78)</sup>.

Considérons un arc de courbe de Jordan en étoile. D'après sa définition même, il existe un point  $\omega$  tel que l'intersection de toute demi-droite issue de  $\omega$  avec cette courbe se réduit à un point unique. On peut toujours supposer, sans restreindre la généralité (en effectuant au besoin une transformation homographique), que le point  $\omega$  est à l'infini. Dans ces conditions, toute parallèle à un axe fixe, que nous prendrons pour l'axe  $Ox, Oy$ , lui étant perpendiculaire, rencontre l'arc considéré en un seul point; tel serait, par exemple, le cas de la courbe sans tangente de Weierstrass. Relativement au système d'axes rectangulaires qu'on vient de définir, l'équation de l'arc  $\widehat{BC}$  pourra s'écrire

$$x = x(y),$$

$x(y)$  étant une fonction définie et continue dans un certain intervalle. La continuité étant uniforme, il existe une fonction  $\eta(\delta)$ , positive, décroissante de son argument et s'annulant avec lui, telle que

$$|x(y) - x(y')| \leq \eta(\delta).$$

pourvu que

$$|y - y'| \leq \delta.$$

Ceci posé, envisageons un domaine  $\Gamma$ , borné et d'un seul tenant

(77) Il y a lieu de noter que les raisonnements du texte peuvent rendre des services dans des cas plus compliqués. Nous nous proposons de les appliquer à l'étude de la théorie des *bouts premiers* (Primende) que l'on doit à M. Carathéodory.

(78) Pour cette partie de mon travail, je dois de nombreuses indications utiles à M. F. Roger.

dont la frontière se compose de l'arc  $\widehat{B'C'}$  jouissant de la propriété précédente et d'un arc  $\widehat{C'B'}$  complémentaire, appartenant à une courbe de Jordan quelconque. Soient B et C deux points de  $\widehat{B'C'}$  que l'on peut choisir aussi voisins de B' et C' respectivement, mais distincts de chacun d'eux; soient, d'autre part, M et M' deux points quelconques de BC. Nous supposons que le choix des points B', B, M, M', C, C' a été fait de manière qu'ils soient rencontrés dans cet ordre lorsqu'on décrit  $\Gamma'$  dans le sens direct.

Il résulte de la propriété caractéristique de l'arc  $\widehat{BC}$  et du choix de l'axe  $Ox$  que l'ordonnée  $y$  est monotone le long de  $\widehat{BC}$ ; d'après cela, les arcs  $\widehat{BM}$  et  $\widehat{M'C}$  sont séparés par la bande horizontale dont les bords sont constitués par des parallèles à  $Ox$  menées par M et M'.

Cela montre que la plus courte distance  $\Lambda(\widehat{BM}, \widehat{M'C})$  des arcs  $\widehat{BM}$  et  $\widehat{M'C}$  est minorée par la différence des ordonnées des points M et M', que nous désignerons respectivement par  $y_M$  et  $y_{M'}$ .

Soit alors A un point quelconque de l'arc  $\widehat{C'B'}$ , complémentaire de  $\widehat{B'C'}$ , mais autre que B' et C'. Il résulte des hypothèses faites sur le contour (sans points doubles) et le domaine  $\Gamma$  (borné) que le nombre  $\Lambda(\widehat{AB}, \widehat{M'C})$  est borné inférieurement alors que le nombre  $|y_M - y_{M'}|$  est borné supérieurement; cela montre que le quotient

$$\frac{\Lambda(\widehat{AB}, \widehat{M'C})}{|y_M - y_{M'}|}$$

est borné inférieurement tout le long de  $\widehat{BC}$ . Or, d'après la définition même de la fonction  $\Lambda$ , il est clair que le nombre  $\Lambda(\widehat{AM}, \widehat{M'C})$  est égal au plus petit des nombres  $\Lambda(\widehat{AB}, \widehat{M'C})$  et  $\Lambda(\widehat{BM}, \widehat{M'C})$ ; ce qui précède montre donc que l'on peut trouver une constante positive finie et non nulle, donc la valeur dépend du contour  $\Gamma'$  et du choix des points A, B et C, telle que

$$(3.4) \quad \Lambda(\widehat{AM}, \widehat{M'C}) \geq \text{const.} \cdot |y_M - y_{M'}|,$$

l'inégalité précédente sera valable le long de tout l'arc  $\widehat{BC}$ , extrémités comprises <sup>(79)</sup>

Ceci posé, considérons la fonction analytique  $z = f(t)$  qui réalise l'application conforme du domaine  $\Gamma$  précédemment défini sur le demi-plan  $\mathfrak{C}$  de manière qu'aux points A, B, C, correspondent respectivement les points d'affixe,  $t = \infty$ ,  $t = -1$ ,  $t = +1$ ; nous appellerons  $t$  et  $t'$  ( $-1 < t < t' < 1$ ) les affixes des images de  $M'$ . Appliquons le lemme du précédent paragraphe en prenant pour  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  les points M, M', C et A (ce qui revient à poser  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t'$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = \infty$ ). On trouve d'abord [cf. la relation (3.1)']

$$r = \frac{t' - t}{1 - t}.$$

Si l'on suppose, par exemple,  $t \leq \frac{1}{2}$ , on aura

$$|r| \leq 2|t' - t|,$$

en sorte  $r$  sera inférieur à  $\frac{1}{2}$  tant que  $t' - t \leq \frac{1}{4}$ .

D'un autre côté, l'arc  $\widehat{BC}$  peut maintenant être défini au moyen des équations paramétriques

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x[y(t)] \end{cases} \quad | -1 \leq t \leq 1,$$

les fonctions  $x[y(t)]$  et  $y(t)$ , étant respectivement égales aux parties réelles et imaginaires de la fonction complexe  $f(t)$  quand l'argument  $t$  de celle-ci est réel. Cela permet de mettre la minorante (3.4) de  $\Lambda(\widehat{AM}, \widehat{M'C})$  sous la forme

$$\text{const. } |y_M - y_{M'}| = \text{const. } |y(t) - y(t')|,$$

en sorte que l'inégalité (3.1) peut être remplacée par la suivante

$$(3.5) \quad |y(t) - y(t')| \leq \frac{2\sqrt{\pi}\sigma}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

---

<sup>(79)</sup> Elle peut même être étendue à tout l'arc  $\widehat{B'C'}$ , à l'exception de ses extrémités B' et C'.

dans laquelle  $\sigma$  désigne encore l'étendue intérieure de  $\Gamma$  et où rappelons-le, la constante est un nombre positif borné, tant inférieurement que supérieurement, dont la valeur dépend de  $\Gamma$  et du choix des points A, B, C. Il est aisé d'étendre l'inégalité (3.5) à la portion de  $\widehat{BC}$ , image du segment  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ ; il suffira d'appliquer le lemme du paragraphe 20 aux arcs  $\widehat{BM}$  et  $\widehat{M'A}$  en supposant, cette fois,  $t > \frac{1}{2}$ ; on vérifiera alors aisément que  $r$  sera inférieur à  $\frac{1}{2}$  moyennant la condition

$$t' - t \leq \frac{3}{4}.$$

Portons alors l'inégalité (3.5) dans celle que vérifie  $x(y)$  le long de  $\widehat{BC}$ , en vertu de la continuité de cet arc; on a, la fonction  $\eta(\delta)$  étant croissante,

$$(3.5') \quad |x(y) - x(y')| = |x[y(t)] - x[y(t')]| \\ \leq \eta |y(t) - y(t')| \leq \eta \left[ \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Or, on a vu que la fonction  $z = f(t)$ , analytique dans  $\mathfrak{G}$ , se réduit sur la frontière de son domaine de définition à  $x[y(t)] + iy(t)$  (c'est-à-dire pour  $t$  réel). Les inégalités (3.5) et (3.5') entraînent donc la suivante

$$(3.6) \quad |f(t) - f(t')| \leq |x[y(t)] - x[y(t')]| + |y(t) - y(t')| \\ \leq \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}} + \eta \left[ \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}} \right],$$

valable dans le voisinage et sur tout l'arc  $\widehat{BC}$ . C'est le résultat que nous voulions établir; ainsi, pour les arcs de courbes en « étoile », le module de continuité le long de l'arc de la fonction  $f(t)$  correspondante se relie très simplement au module de continuité de l'arc de courbe lui-même.

En appliquant ce résultat à quelques cas particuliers, on retrouve, par une voie que nous croyons nouvelle, une partie des remarquables résultats dus à MM. Seidel <sup>(80)</sup>, Lavrentieff <sup>(81)</sup>, Keldysch, Warschawski <sup>(82)</sup>, Ostrowski <sup>(83)</sup>. Prenons à titre d'exemple le cas des arcs  $\widehat{BC}$  vérifiant relativement à  $\gamma$  une condition de Lipschitz; la fonction  $\eta(\delta)$  est alors de la forme

$$\eta(\delta) = A\delta,$$

formule où  $A$  désigne une constante positive.

Rappelons l'interprétation géométrique de cette condition : elle exprime que les quatre nombres dérivés de la fonction  $x = x(y)$  sont bornés le long de l'arc  $BC$ . Pour de tels arcs, (3.6) fournit une inégalité du type

$$|f(t) - f(t')| \leq \frac{2\sqrt{\pi\sigma}(1+A)}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

dans laquelle le symbole constante a le sens précédemment défini. On sait que les arcs lipschitziens sont rectifiables; c'est par cette propriété que notre résultat se rattache aux travaux de MM. Seidel et Lavrentieff; ce dernier a obtenu d'ailleurs des inégalités plus précises <sup>(84)</sup>. Mais les arcs rectifiables possèdent une tangente presque partout. (Théorème de M. Lebesgue.) Cette propriété nous permettra, et ce sera l'objet d'un autre travail, d'améliorer le résultat précédent de

<sup>(80)</sup> *Über die Ränder-Zuordnung bei konformer Abbildung* (*Math. Ann.*, Band, 104, 1931, p. 275-300).

<sup>(81)</sup> *Sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, 184, 1927, p. 1407-1409); *Sur l'existence de la dérivée limite* (avec M. Bessonoff) (*Bull. Math. de France*, Vol. 58, fasc. 1-11, p. 175-198). Voir surtout l'important Mémoire des *Annales de l'École normale supérieure*, 1937, p. 1-35.

<sup>(82)</sup> *Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung* (*Math. Zeitschrift*, p. 321-426).

<sup>(83)</sup> M. Ostrowski a consacré un Mémoire fondamental au sujet qui nous occupe; mais il s'est placé au point de vue local; voir *Acta Mathematica*, Band, 64, p. 83-104. Je lui dois personnellement plusieurs indications précieuses.

<sup>(84)</sup> Voir son Mémoire des *Annales de l'École Normale*; cf. notamment p. 2.

manière à retrouver les estimations mêmes de MM. Lavrentieff et Keldysch. Notons, toutefois de suite, que les raisonnements de la première partie du paragraphe suivant s'étendent sans difficultés aux arcs lipschitziens dont nous venons de parler à condition de remplacer le mot tangente par celui de directions limites de P. Du Bois Reymond-Dini <sup>(85)</sup>, et de retoucher la démonstration d'un lemme <sup>(86)</sup>.

**22. CAS DES COURBES DE JORDAN A TANGENTES CONTINUES. FORMULE DE M. U. CISOTTI.** — En conservant les notations du précédent paragraphe, nous supposerons maintenant que la courbe  $\Gamma'$  possède une tangente en chacun de ses points. Dans ce cas, les résultats du paragraphe **21** peuvent être améliorés. Pour simplifier l'exposition et pour nous limiter aux cas susceptibles d'application à l'hydrodynamique, nous supposerons que la tangente varie continûment le long du contour  $\Gamma'$ . Mais nous marquerons l'étape du raisonnement à partir de laquelle cette hypothèse devient vraiment indispensable.

Orientons les tangentes à  $\Gamma'$  dans le sens des  $y$  croissants; nous désignerons par  $\Psi(l)$  son angle algébrique avec  $Ox$  exprimé en fonction de l'abscisse curviligne  $l$  sur  $\Gamma'$ ; la courbe  $\Gamma'$  étant rectifiable, d'après les hypothèses faites,  $l$  existe.

La fonction  $\Psi(l)$  sera, pour simplifier, supposée continue. Cela posé, considérons un arc  $\widehat{B'C'}$  de  $\Gamma'$  le long duquel  $\Psi(l)$  vérifie les inégalités suivantes :

$$(3.7) \quad \varepsilon \leq \Psi(l) \leq \pi - \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant un nombre positif, aussi petit qu'on le veut, mais fixe. Nous nous proposons de construire un module de continuité pour la cor-

<sup>(85)</sup> Voir, à ce sujet H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 67-73.

<sup>(86)</sup> M. Roger m'a signalé que le module de continuité  $\eta(\delta)$  de la courbe de Weierstrass, citée dans le texte, est de la forme :  $\text{const.} \times \delta^\alpha$ , avec  $0 < \alpha < 1$ ; il en résulte que, dans le voisinage d'un arc  $\widehat{BC}$  de cette courbe, la fonction  $f(t)$  correspondante vérifie une condition [cf. (3.6)] du type

$$|f(t) - f(t')| \leq \frac{\text{const.}}{|\text{Log } |t - t'| |^{\frac{\alpha}{2}}}.$$



respondance  $l(t)$  entre un arc  $\widehat{BC}$  (cf., pour les notations, le précédent paragraphe) intérieur à  $\widehat{B'C'}$ , d'une part, et le segment  $-1 \leq t \leq 1$  d'autre part, que la fonction  $z = f(t)$  établit entre ces éléments de frontière de  $\Gamma$  et de  $\mathfrak{C}$ ; on trouvera

$$\frac{|f(t) - f(t')|}{|l(t) - l(t')|} \leq \frac{\text{const.}}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^p} \quad (-1 \leq t \leq t' \leq 1),$$

où  $p$  désigne un nombre positif arbitrairement grand et où la constante est un nombre positif, borné dans les deux sens et qui dépend de l'aire  $\sigma$  du domaine, du contour, du choix de l'arc  $\widehat{BC}$  et de la quantité  $\varepsilon$  figurant dans l'inégalité (3.7), cette dernière quantité dépendant d'ailleurs elle-même du contour et de l'arc  $\widehat{BC}$ .

En effet, moyennant les inégalités (3.7),  $y[l(t)]$  est une fonction croissante de  $t$  dans l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ ; les résultats du paragraphe 21 s'appliquent et l'on a, en tout point de  $\widehat{BC}$  <sup>(87)</sup>,

$$|y[l(t)] - y[l(t')]| \leq \text{const.} \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

inégalité dans laquelle le symbole const. désigne un nombre inverse

<sup>(87)</sup> De la relation

$$dy(t) = \sin \Psi[l(t)] dl(t),$$

on tire, en tenant compte de (3.7),

$$|y(t) - y(t')| \geq \sin \varepsilon |l(t) - l(t')|,$$

inégalité qui, jointe à celle du texte, fournit pour  $l(t)$  un module de continuité dans tout l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ . Comme  $\Psi(l)$  envisagée comme fonction de  $l$  est continue,  $\Psi[l(t)]$ , envisagée comme fonction de  $t$ , sera aussi continue. Or,  $l(t)$  et  $\Psi[l(t)]$  sont reliées par la formule de M. Cisotti (cf. la fin de ce paragraphe); des raisonnements imités de ceux de M. Leray (cf. §§ 17-21 de son Mémoire des *Comment. Math. Helv.*) permettent alors d'en déduire que  $l(t)$  vérifie pour  $-1 \leq t \leq 1$  une condition de Hölder d'indice aussi voisin de 1 que l'on veut.

de celui qui figure au dénominateur de l'inégalité (3.5) et qui reste valable tant que la différence  $t' - t$  est suffisamment petite <sup>(88)</sup>.

Transportons les axes du plan  $z$  parallèlement à eux-mêmes de manière à amener l'origine en un point  $M$  <sup>(89)</sup> de  $\widehat{BC}$ . Nous appellerons (comme plus haut)  $t_2$  l'affixe réel de son image dans le plan  $\mathcal{C}$  : on a  $-1 \leq t_2 \leq 1$ . Considérons alors la fonction  $\arg z(t)$ ; l'intersection de  $\widehat{BC}$  avec  $Mx$  se réduisant à un point unique, on pourra, grâce aux inégalités (3.7), définir cette fonction de manière que

$$(3.7') \quad \begin{cases} \varepsilon \leq \arg z(t) \leq \pi - \varepsilon & \text{pour } t \text{ réel et tel que } t_2 \leq t \leq 1. \\ -\varepsilon \geq \arg z(t) \geq -\pi + \varepsilon & \text{»} \quad -1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

Il s'ensuit qu'au point  $M$ ,  $\arg z(t)$  subit une discontinuité égale à  $\pi$ .

Les valeurs de  $\arg z(t)$  en tout point de l'arc  $\widehat{CB}$  de  $\Gamma'$  complémentaires de  $\widehat{BC}$  se déduiront par continuité des valeurs précédentes; l'on suppose le demi-axe positif  $Mx$  orienté de manière à pénétrer à l'intérieur du domaine  $\Gamma$ ; la fonction  $\arg z(t)$ , continue dans  $\Gamma$  et sur  $\Gamma'$  (c'est-à-dire dans  $\mathcal{C}$ ) sauf au point  $M$ , sera aussi uniforme, le voisinage de  $z = 0$  excepté. De plus,  $\Gamma'$  étant un contour simple, on a

$$(3.7'') \quad |\arg z(t)| \leq 2\pi k,$$

$k$  étant un entier borné.

Effectuons alors une transformation du plan  $z$  définie par

$$(3.8) \quad z_1 = z^{\frac{1}{n}}, \quad (n \geq 2).$$

Le domaine  $\Gamma_1$ , transformé de  $\Gamma$  sera d'un seul tenant, puisque, d'une part,  $\Gamma$  est à connexion simple et que, d'autre part, la correspondance ponctuelle (3.8) et sa réciproque, sont dépourvues de points multiples. Le contour  $\Gamma'_1$  qui limite  $\Gamma_1$  est le transformé de  $\Gamma'$ ; c'est, par conséquent, une courbe de Jordan simple à tangente continue partout,

<sup>(88)</sup> Dans la suite, il sera toujours sous-entendu que cette dernière condition est remplie.

<sup>(89)</sup> Les points  $B$  et  $C$  étant distincts de  $B'$  et  $C'$ , le point  $M$  pourra coïncider avec  $B$  ou  $C$ .

le point M excepté. Nous appellerons  $y_1$  et  $\Psi_1(y_1)$  les éléments de  $\Gamma_1$  analogues aux éléments  $y$  et  $\Psi(y)$  de  $\Gamma$ . Soit  $\widehat{B_1C_1}$  l'arc transformé de  $\widehat{BC}$ ; nous allons montrer que  $\widehat{B_1C_1}$  possède la propriété suivante :

LEMME. — *Il existe un nombre positif  $\eta_1$ , non nul, tel que l'intersection avec  $\widehat{B_1C_1}$ , des droites d'équation*

$$y = \alpha,$$

*se réduit à un seul point pourvu que <sup>(90)</sup>*

$$|\alpha| \leq \eta_1.$$

La démonstration se décompose en deux parties.

1° On peut trouver un nombre positif non nul  $\eta_1$  jouissant de la propriété suivante : la portion  $\widehat{PN}$  de  $\widehat{BC}$ , comprise entre les droites  $y = \pm \eta_1$ , se transforme de manière que  $\Psi_1(y_1)$  soit compris entre 0 et  $\pi$  le long de  $\widehat{P_1M}$ , transformé de  $\widehat{PM}$  et aussi le long du transformé  $\widehat{MN_1}$  de  $\widehat{MN}$ .

Appelons, en effet,  $M'$  et  $M'_1$  les points courants correspondant sur  $\Gamma'$  et  $\Gamma'_1$ ,  $V(y)$  et  $V_1(y_1)$  les angles que font les tangentes à  $M'$  et à  $M'_1$  avec les rayons vecteurs  $\rho$  et  $\rho_1$ , respectivement, issus de l'origine M, commune aux plans  $z$  et  $z_1$ . La transformation (3.8) étant conforme en tout point autre que M, on a

$$V(y) = V_1(y_1)$$

aux points correspondants de  $\Gamma'$  et  $\Gamma'_1$ .

Cela posé,  $V(y)$  est, par hypothèse, une fonction continue de son argument, nulle à l'origine. Il existe donc un nombre positif non nul  $\eta_1$ , tel que

$$(3.9) \quad |V(y)| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

<sup>(90)</sup> Si le point M coïncide avec le point B, par exemple, la propriété ne subsiste que si

$$0 < \alpha < \eta_1.$$

pourvu que

$$|y| \leq \eta_1.$$

D'autre part, on a, en combinant l'équation (3.8) avec les inégalités (3.7'),

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\varepsilon}{n} \leq \arg z_1 \leq \frac{\pi}{n} - \frac{\varepsilon}{n} & \text{le long de } \widehat{MC}, \\ -\frac{\varepsilon}{n} \geq \arg z_1 \geq -\frac{\pi}{n} + \frac{\varepsilon}{n} & \text{le long de } \widehat{BM}. \end{array} \right.$$

L'ensemble des inégalités (3.9) et (3.10) permet d'écrire, en remarquant que

$$\Psi_1(y_1) = \arg z_1 \pm V_1(y_1) = \arg z_1 \pm V(y) \quad \text{pour } 0 \leq y \leq \eta_1,$$

$$\Psi_1(y_1) = \pi + \arg z_1 \pm V(y) \quad \text{pour } -\eta_1 \leq y \leq 0$$

l'inégalité

$$\pi > \Psi_1(y_1) > 0 \quad \text{pour } -\eta_1 \leq y \leq \eta_1,$$

ce qui justifie notre assertion.

2° Les points de BC d'ordonnée supérieure à  $\eta_1$  en valeur absolue auront pour transformés des points d'ordonnées supérieures, en valeur absolue, à

$$\eta_2 = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{n}}{\sin^n \varepsilon} \eta_1^{\frac{1}{n}}.$$

En effet, introduisons dans le plan  $z$  les coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$ ; pour un point quelconque de BC on a, en tenant compte des inégalités (3.7'),

$$|y| = \rho |\sin \theta| \geq \rho \sin \varepsilon,$$

puisque, sur  $\widehat{BC}$ ,  $|\theta|$  est compris entre  $\varepsilon$  et  $\pi - \varepsilon$ . Par ailleurs, le transformé  $M'_1$  de  $M'$  aura, d'après (3.8) et (3.10), une ordonnée  $y_1$ , telle que

$$|y_1| = |\rho|^{\frac{1}{n}} \left| \sin \frac{\theta}{n} \right|.$$

Dès lors, en éliminant  $\rho$  entre les expressions de  $y$  et de  $y_1$ , il vient

$$|y_1| = \left| y^{\frac{1}{n}} \frac{\sin \frac{\theta}{n}}{\sin^n \theta} \right|.$$

La dérivée, par rapport à  $\theta$ , de  $\frac{\sin \frac{\theta}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \theta}$  est égale à

$$\frac{\sin \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta}{n \sin^{\frac{n+1}{n}} \theta}.$$

Cette expression étant manifestement positive pour les valeurs considérées de  $\theta$ , nous pouvons écrire

$$\left| \frac{\sin \frac{\theta}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \theta} \right| \geq \frac{\sin \frac{\varepsilon}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \varepsilon},$$

ce qui établit notre lemme. [Notons que nous n'avons pas utilisé l'hypothèse de continuité de  $\Psi(l)$ .]

De là, il est aisé de conclure : il suffit de choisir pour  $\eta$  un nombre plus petit à la fois que  $\eta_1$  et  $\eta_2$ . En effet, d'après l'alinéa 1°, l'arc de  $\widehat{BC}$  intérieur à la bande  $y = \pm \eta_1$  et par suite à la bande  $y = \pm \eta$  se transformera en un arc de  $\Gamma'_1$  le long duquel  $\Psi_1(y_1)$  sera positif; d'après l'alinéa 2°, les portions restantes de  $\widehat{BC}$  auront pour transformés des arcs de  $\Gamma'_1$ , extérieurs à la bande

$$y = \pm \eta_2$$

et, *a fortiori*, à la bande  $y = \pm \eta$ .

Cela étant, considérons un point  $M'_1$  de  $\Gamma'_1$  d'ordonnée  $y_1$  telle que  $0 \leq y_1 \leq \eta$ , et soit  $A_1$  le transformé de  $A$ . On peut supposer  $A_1$  étranger à la bande  $y = \pm \eta$ . Le lemme précédent permet alors d'affirmer que  $\Lambda(\widehat{A_1 M_1}, \widehat{M'_1 C_1})$  est supérieur à la différence des ordonnées de  $M'_1$  et  $M$ ; soit

$$\Lambda(\widehat{A_1 M_1}, \widehat{M'_1 C_1}) \geq y_1.$$

La fonction  $z_1 = [z(t)]^{\frac{1}{n}}$  effectue la représentation conforme du domaine  $\Gamma'_1$  sur le demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}$  de la variable  $t$  de manière à faire correspondre les points  $A_1, B_1, C_1$  aux points  $t = \infty, -1, +1$ ;

soient  $t$  et  $t'$  les affixes (réels) des images de  $M$  et de  $M'$ ; on a, rappelons-le,

$$-1 \leq t \leq t' \leq 1.$$

Il résulte donc de l'inégalité précédente, en utilisant le lemme du paragraphe 21, en désignant par le symbole const. un nombre inverse de celui qui figure au dénominateur de l'inégalité (3.5) [en l'espèce, ce nombre dépend du contour  $\Gamma'$  et de l'arc de  $\Gamma'$  contenant  $M$  et compris entre les droites  $y = \pm \eta$ ; comme  $\eta$  est le même pour tous les points de  $\widehat{BC}$ , nous pouvons dire que la constante ci-dessus est une fonction de  $t$  supérieurement bornée dans l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ ] et, en posant encore  $t_4 = \infty$ ,  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t'$ ,  $t_3 = 1$ ,

$$|y_1(t')| \leq \frac{2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

où  $\sigma$  désigne l'étendue intérieure du domaine  $\Gamma_1$  considéré.

Or,

$$y_1(t') = \rho^n(t') \sin \frac{\theta(t')}{n},$$

en désignant par  $\rho$  et  $\theta$  les coordonnées polaires du point  $M'$  de  $\widehat{BC}$  dont  $M'_1$  est le transformé; on déduit donc de l'inégalité précédente, en y remplaçant  $y_1$  par sa valeur

$$\left| \rho(t') \sin^n \frac{\theta(t')}{n} \right| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{n}{2}}}.$$

D'après ce qu'on a vu,

$$\left| \sin^n \frac{\theta(t')}{n} \right| \geq \left| \sin^n \frac{\varepsilon}{n} \right| > 0,$$

on peut donc trouver une constante  $K$  qui dépendra de  $\varepsilon$  et qui sera bornée inférieurement de manière à pouvoir écrire

$$(3.11) \quad |\sin \theta(t')| \leq K \left| \sin^n \frac{\theta(t')}{n} \right|,$$

ce qui permet d'écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$|y(t')| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{K \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^2},$$

valable dans le voisinage suffisamment petit de chaque point de l'arc  $\widehat{BC}$ , extrémités comprises, à condition de désigner par  $\sigma$  la plus grande des aires des domaines  $\Gamma_i$  <sup>(91)</sup>.

Revenons alors au système des axes primitifs  $Oxy$ ; cela s'écrira

$$(3.12) \quad |y(t) - y(t')| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{K \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^2},$$

inégalité dans laquelle le nombre const. dépend de  $t$  et  $K$  est un nombre indépendant de  $t$ ; la valeur de  $K$  est fonction de  $\epsilon$  seulement, c'est-à-dire de l'arc  $\widehat{BC}$ . En résumé :

L'inégalité (3.12) est valable dans le voisinage fini de tout point,  $M(t)$ , appartient à l'arc  $\widehat{BC}$ ; ce voisinage est défini par

$$|y(t) - y(t')| \leq \eta(t),$$

l'ensemble des nombres positifs  $\eta(t)$  étant borné inférieurement pour  $-1 \leq t \leq 1$ .

Un raisonnement classique, que l'emploi du lemme de Borel-Lebesgue permet de simplifier, permet d'étendre cette propriété locale à tout l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ . En effet, l'arc  $\widehat{BC}$  peut être partagé en un nombre *fini* d'arcs partiels de manière que chaque point de  $\widehat{BC}$  soit intérieur à l'un au moins des arcs partiels, et que l'inégalité (3.12) soit vérifiée le long de chacun d'eux. Toutefois, la constante qui figure au numérateur de (3.12) peut, d'après ce que nous avons vu, changer d'un arc partiel à l'autre (le coefficient  $K$ , par contre, gardant la même valeur le long de  $\widehat{BC}$ ); comme ces constantes sont supérieu-

---

(91) Il est clair que le nombre  $\sigma$  ainsi défini est supérieurement borné.

rement bornées dans leur ensemble, il suffira de choisir celle dont la valeur est maximum pour qu'une même inégalité (3.12) soit valable le long de chacun des arcs partiels considérés. Dès lors, une discussion élémentaire permettrait d'assigner à la constante de la formule (3.12) une valeur telle qu'une même inégalité (3.12) demeure valable sur deux arcs partiels consécutifs, puis sur trois, etc.; on peut donc choisir la constante qui figure dans (3.12) de manière que cette inégalité soit valable quelles que soient les valeurs de  $t$  et de  $t'$  de l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ . [La constante de (3.12) dépendra donc, en dernière analyse de  $\Gamma'$  et du choix de l'arc  $\widehat{BC}$  seulement.] En d'autres termes, la fonction  $\gamma(t)$  appartient dans tout cet intervalle à l'espace  $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}}(t)$ <sup>(92)</sup> (cf. § 11, Chap. I) le nombre positif  $n$  pouvant être choisi aussi grand qu'on le veut. Notons qu'en combinant avec (3.11) l'inégalité

$$\frac{d\gamma(t)}{dl(t)} = \sin \Psi[l(t)] \geq \sin \varepsilon = \text{const.},$$

déduite de (3.7), on montrera que  $l(t)$  appartient également à l'espace  $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}}(t)$  et l'on établirait que  $l(t)$  vérifie une inégalité du type

$$(3.13) \quad |l(t) - l(t')| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{const.}]^n}{K \sin \varepsilon \left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{n}{2}}} \quad (1 \leq t \leq 1),$$

---

<sup>(92)</sup> Il convient de faire remarquer une fois encore (cf. la fin du paragraphe 21) que les raisonnements exposés jusqu'ici s'étendent au cas où les quatre nombres dérivés de la fonction  $x = x(\gamma)$  sont bornés le long de l'arc  $\widehat{B'C'}$  de  $\Gamma'$ . On peut donc s'affranchir de l'hypothèse de l'existence et de la continuité de la tangente le long de  $BC$  (la démonstration du lemme du présent paragraphe doit alors être retouchée). L'ordonnée  $\gamma(l)$  étant supposée monotone le long de l'arc  $B'C'$ , il suffit de remplacer dans les raisonnements  $\Psi(l)$  par les fonctions  $\Psi_{\min}(l)$ ,  $\Psi_{\max}(l)$ , égales respectivement aux angles algébriques des directions limites de  $P$ . du Bois Reymond-Dini (orientées dans le sens des  $l$  croissants) au point d'abscisse curviligne  $l$ . Il faut, par exemple, remplacer les inégalités (3.7) par les suivantes,

$$\varepsilon \leq \Psi_{\min}(l) \leq \Psi_{\max}(l) \leq \pi - \varepsilon \quad \text{le long de } \widehat{BC}.$$

Au fond, ce n'est donc pas la continuité des nombres dérivés qui importe, mais l'amplitude de leurs oscillations le long de l'arc considéré.



dans laquelle le symbole  $\text{const.}$  a même signification que pour (3. 12).

Des considérations toutes pareilles s'appliquent aux arcs de  $\Gamma'$  le long desquels  $x(t)$  est une fonction monotone de  $t$ , il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$(3. 14) \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \Psi'(l) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Le long de tels arcs on pourra construire pour  $x(t)$  un module de continuité du type (3. 12); on déduira, par un raisonnement identique au précédent, une inégalité du type (3. 13) pour  $l(t)$ . Supposons alors que l'on puisse décomposer le contour  $\Gamma'$  (c'est-à-dire l'axe réel de  $t$ ) en un nombre fini ou infini d'arcs le long desquels l'un des systèmes (3. 7) ou (3. 14) soit vérifié, le morcellement étant réalisé de telle sorte que chaque point de  $\Gamma'$  (c'est-à-dire de l'axe réel de  $t$ ) soit *intérieur* à l'un au moins des arcs considérés. L'inégalité (3. 13), étant alors vérifiée le long de chacun des arcs partiels, sera valable pour l'ensemble du contour (d'après le lemme de Borel-Lebesgue).

Les raisonnements précédents montrent en particulier qu'un tel morcellement de la frontière, est toujours possible lorsque  $\Psi'(l)$  existe et est bornée<sup>(93)</sup>. C'est l'hypothèse que nous ferons désormais; il vient alors, en utilisant (3. 13) et en désignant, pour simplifier l'écriture, par  $\text{const.}$  le facteur  $\frac{[2\sqrt{\pi\sigma \text{const.}}]^n}{K \sin \varepsilon}$ ,

$$(3. 15) \quad |\Psi[l(t)] - \Psi[l(t')]| \leq \text{const.} |l(t) - l(t')| \text{Max} |\Psi'(l)| \\ \leq \frac{\text{const.} \text{Max} |\Psi'(l)|}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{n}{2}}} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Cette inégalité fondamentale, valable le long de tout l'axe réel de  $t$ , va nous permettre d'améliorer le module de continuité (3. 13) de  $l(t)$  et de montrer que cette fonction possède le long de l'axe réel du plan  $t$  une dérivée finie et continue; c'est ce résultat que nous avons en vue.

---

<sup>(93)</sup> En modifiant légèrement les raisonnements on pourrait étendre ces conclusions au cas où  $\Psi'(l)$  serait dépourvue de dérivée mais admettrait des nombres dérivés bornés.

En effet, effectuons la transformation

$$t = i \frac{1-Z}{1+Z},$$

qui fait correspondre au domaine  $\mathfrak{C}$  l'intérieur du cercle unitaire du plan  $Z = X + iY$ . Soient  $s$  et  $s'$  les arguments des points  $Z = e^{is}$  et  $Z = e^{is'}$ , images des points d'affixes réels  $t$  et  $t'$  de  $\mathfrak{C}$ ; on a, d'après (3.15)<sup>(94)</sup>,

$$|\Psi[l(s)] - \Psi[l(s')]| < \frac{\text{const.} \cdot |\text{Max } \Psi'(l)|}{\left| \text{Log} \frac{1}{|s-s'|} \right|^{\frac{n}{2}}},$$

puisque la fonction  $t(Z)$  est analytique pour  $t$  réel.

Le nombre positif  $n$  étant arbitrairement grand, les intégrales du type (1.21) (cf. § 11) déduites de  $\Psi[l(s)]$  appartiennent à l'espace  $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}-1}(s)$ , l'indice  $\frac{n}{2} - 1$  étant positif.

En particulier, la fonction analytique de M. Villat,

$$(3.16) \quad F(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \Psi[l(s')] - s' \} \frac{1+Ze^{-is'}}{1-Ze^{-is'}} ds' - i \log a,$$

définie pour  $|Z| \leq 1$  et dont les parties réelle et imaginaire se réduisent respectivement à  $\Psi[l(s)] - s$  et à  $T(e^{is})$  pour  $Z = e^{is}$  avec

$$(3.16') \quad T(e^{is}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \Psi[l(s)] - s - \Psi[l(s')] + s' \} \frac{ds'}{\text{tang} \frac{s-s'}{2}} - \log a,$$

<sup>(94)</sup> La constante qui figure dans cette inégalité est égale au produit de la constante figurant dans (3.15) par le maximum de la fonction de deux variables  $s$  et  $s'$ ,

$$\left| \frac{\log \frac{1}{|t(s) - t(s')|}}{\log \frac{1}{|s - s'|}} \right|^{\frac{n}{2}}$$

avec

$$0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq s' \leq 2\pi.$$

où  $a$  désigne une constante réelle positive, vérifie pour  $|Z| \leq 1$  une condition  $\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}-1}(\mathbf{Z})$ .

Cela posé, la correspondance conforme entre le domaine  $\Gamma$  et le cercle  $|Z| = 1$ , sera donnée par la formule bien connue de M. U. Cisotti <sup>(95)</sup>

$$\frac{dz}{dZ} = e^{iF(Z)},$$

---

<sup>(95)</sup> Rappelons rapidement l'origine de cette formule. Étant donné le contour  $\Gamma$  du plan  $z$  et le cercle  $|Z| = 1$  du plan  $Z$ , supposons qu'on ait déterminé la fonction  $z(Z)$  qui réalise l'application conforme du premier de ces domaines sur l'autre; si la dérivée  $\frac{dz}{dZ}$  existe pour  $Z = e^{is}$ , nous aurons

$$\frac{dz}{dZ} = \left| \frac{dz}{dZ} \right| e^{i\{\Psi[l(s)]-s\}}.$$

Il suit de là que la partie réelle de la fonction  $\frac{1}{i} \log \frac{dz}{dZ}$  se réduit à  $\{\Psi[l(s)] - s\}$  pour  $Z = e^{is}$ ; cela veut dire que  $\frac{1}{i} \log \frac{dz}{dZ}$  est donnée par la formule (3.16) du texte; l'égalité ainsi obtenue est équivalente à la formule de M. Cisotti.

Il faut remarquer que la fonction  $\Psi_1(s) = \Psi[l(s)] - s$  est périodique de période  $2\pi$ . Choisissons, en effet,  $\Psi[l(s)]$  de manière que

$$-\pi \leq \Psi[l(0)] \leq \pi.$$

Toutes les autres valeurs de  $\pi$  se déduiront par continuité et nous aurons

$$\Psi[l(s + 2\pi)] = \Psi[l(s)] + 2\pi.$$

Cette relation fonctionnelle entraîne la périodicité de  $\Psi_1(s)$  et, par suite, la continuité de cette fonction pour  $s = 0$ ; les expressions (3.16) et (3.16'), introduites dans le texte, auront donc un sens pour  $s = 0$ . Il semble donc qu'il y a avantage à substituer  $\Psi_1(s)$  à  $\Psi[l(s)]$  dans les formules de M. Cisotti.

Notons encore que l'équation

$$\frac{dl(s)}{ds} = ae^{-T_1(e^{is})}$$

[où  $T_1(e^{is})$  est la fonctionnelle de  $l(s)$  définie par (3.16')] déduite de la formule de M. Cisotti, peut être considérée comme l'équation de définition de  $l(s)$  et peut servir de point de départ à l'étude du problème de représentation conforme de Riemann dans le cas de contours  $\Gamma'$  pourvus d'une tangente continue; en rapprochant les remarques qui précèdent avec les développements du paragraphe 23, on constatera que les formules de M. Cisotti sont au problème de Riemann ce que les formules de M. Villat sont au problème de Helmholtz.

où la constante réelle  $a$  est, *a priori*, inconnue et où  $F(Z)$  est la fonction définie par (3.16). D'après ce qu'on a vu, l'expression de  $F(Z)$  a un sens pour  $|Z|=1$ . On peut donc faire  $Z=e^{is}$  dans la relation précédente; il vient, en prenant les modules des deux membres

$$\frac{dl(s)}{ds} = a e^{-T_1(e^{is})},$$

égalité où l'on a posé

$$T_1(e^{is}) = T(e^{is}) + \log a.$$

Le coefficient de  $a$  du second membre appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}-1}^2(s)$  dans tout l'intervalle  $0 < s < 2\pi$ , extrémités  $0$  et  $2\pi$  comprises; on peut donc majorer le paramètre  $a$  en fonction de la longueur totale  $L$  <sup>(96)</sup> de  $\Gamma'$  en écrivant

$$L = a \int_0^{2\pi} e^{-T_1(e^{is})} ds \geq a \cdot \text{const.},$$

l'intégrale du second membre étant inférieurement bornée par une constante positive non nulle puisque son élément différentiel est continu en  $s$ . Il suit de là que  $\frac{dl(s)}{ds}$  existe et appartient également à l'espace  $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}-1}^2(s)$ .

Cela permet d'énoncer le résultat suivant : étant donné un contour  $\Gamma'$  du plan  $z$  situé à distance finie et donné par son équation intrinsèque

$$\Psi = \Psi(l),$$

où  $\Psi(l)$  désigne une fonction admettant une dérivée partout bornée, la fonction  $z = z(Z)$ , qui réalise l'application de l'intérieur  $\Gamma$  de  $\Gamma'$  sur le cercle unitaire du plan  $Z$ , possède une dérivée continue  $\frac{dz}{dZ}$  pour  $|Z| \leq 1$ ;

<sup>(96)</sup> Il importe de remarquer que la majoration du coefficient  $a$  de la formule de M. Cisotti peut être faite dans des cas beaucoup plus généraux. On consultera, à ce sujet, le mémoire de M. Leray et le paragraphe 25 de notre travail où cette majoration est rendue indépendante de la construction du module de continuité pour  $T(e^{is})$ .

on a

$$\left| \frac{dz(e^{is})}{dZ} - \frac{dz(e^{is'})}{dZ} \right| \leq \frac{\text{const.}}{\left| \text{Log} \frac{1}{|s-s'|} \right|^n},$$

inégalité dans laquelle la valeur de la constante ne dépend que du contour  $\Gamma'$  (notamment par l'intermédiaire de sa longueur, de la surface  $\sigma$  qu'elle délimite, de la grandeur  $[\text{Max } \Psi'(l)]$  et de  $n$  et où le nombre  $n$  peut être pris aussi grand qu'on le veut.

Il nous a paru intéressant de retrouver ce résultat par une méthode nouvelle. On généralise aisément; en supposant que  $\Psi^{(p)}(l)$  existe et appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(l)$ , on montrerait que  $\frac{d^{p+1}l}{ds^{p+1}}$  existe et appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(s)$ , lorsque le nombre  $n$  est supérieur à l'unité. On retombe ainsi, sous une forme moins large, mais plus précise, sur un théorème de MM. Holzmann et Lavrentieff<sup>(97)</sup>.

Il nous reste à étendre le résultat précédent à un cas particulier important en raison de ses applications en hydrodynamique. Respectons les notations anciennes et considérons un contour  $\Gamma'$  simple, fermé, et pourvu d'une tangente en chacun de ses points; supposons que la fonction  $\Psi(l)$  correspondante possède les propriétés suivantes le long d'un arc  $\widehat{B'C'}$  de  $\Gamma'$  :

1° La fonction  $\gamma(l)$  ne décroît pas le long de  $\widehat{B'C'}$ ; cela se traduit par les inégalités

$$(3.17) \quad 0 \leq \Psi(l) \leq \pi.$$

Cette fois,  $\Psi(l)$  peut atteindre les valeurs extrêmes de 0 et  $\pi$ ; mais en un nombre fini de points de  $\widehat{B'C'}$  seulement; d'après cela, l'arc  $\widehat{B'C'}$  ne peut pas comprendre de portions rectilignes horizontales.

2° On peut trouver sur  $\widehat{B'C'}$  deux points B et C, distincts de B' et C', d'abscisses  $l_1$  et  $l_2$  respectivement ( $l_1 < l_2$ ) et tels que la dérivée  $\Psi'(l)$  existe et reste continue dans l'intervalle  $l_1 \leq l \leq l_2$ , extrémités comprises; d'après cela  $\Psi'(l_1 + 0)$  existe et est finie.

---

(97) *Recueil de la Soc. Math. de Moscou*, 38, 1931, p. 51.

3° La dérivée  $\Psi'(l)$  existe le long de l'arc  $\widehat{B'B}$ ; elle est discontinue pour  $l = l_1$  <sup>(98)</sup>; on a

$$(3.18) \quad \Psi'(l_1 - 0) = \infty,$$

$$4^\circ \quad \Psi(l_1 + 0) = \Psi(l_1 - 0).$$

Nous supposons, de plus, que la direction  $Ox$  a été choisie de manière que toute demi-droite parallèle à  $Ox$ , issue d'un point quelconque de  $\widehat{B'C'}$ , pénètre dans l'intérieur du contour  $\Gamma'$ .

(Ainsi, les tangentes positives aux arcs,  $\widehat{B'B}$  et  $\widehat{BC}$  se raccordent en leur point commun  $B$ ; la disposition des deux arcs dans le voisinage de ce point est identique à celle que présente la ligne libre et l'obstacle dans le voisinage du point de détachement correspondant lorsque le détachement n'est pas en proue; *cf.* le paragraphe 13.)

Choisissons alors, comme plus haut, un point  $A$  sur l'arc  $\widehat{C'B'}$  complémentaire de  $\widehat{B'C'}$  et soit  $z = z(t)$  la fonction analytique qui réalise l'application conforme de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{E}$  de manière qu'aux points  $A, B, C$  correspondent les points  $t = \infty, t = -1, t = +1$  de l'axe réel. La fonction  $\Psi'(l)$  étant continue, les fonctions  $l(t)$  et  $\Psi[l(t)]$  vérifient respectivement (d'après le théorème ci-dessus) les inégalités (3.12) et (3.15) dans tout l'intervalle  $-1 < t < t' < 1$  et même en ses extrémités  $t = \pm 1$  pourvu que  $\Psi'(l_1)$  et  $\Psi'(l_2)$  soient distincts de 0 et de  $\pi$ . Nous nous proposons de compléter ce résultat en montrant que, moyennant les hypothèses faites, il subsiste pour  $t = -1$  si  $\Psi[l(-1)] = \Psi(l_1) = \pi$  et est en défaut si  $\Psi(l_1) = 0$ .

Observons d'abord qu'en vertu de (3.17) l'intersection de  $\widehat{B'C'}$  avec toute droite parallèle à l'axe des  $x$  se réduit à un point unique; mais la direction  $y = 0$  est la seule à jouir de cette propriété dans le voisinage du point  $B$ . En effet, d'après (3.18) la courbure de l'arc  $\widehat{B'B}$  y est infinie; il suit de là que toute droite issue de  $B$  coupe l'arc  $\widehat{B'C'}$

---

<sup>(98)</sup> En fait, il est inutile d'étendre les hypothèses 2° et 3° à l'ensemble de l'arc  $B'C'$ ; il suffirait de les supposer vérifiées dans le voisinage du point  $B$  seulement.

en deux points distincts, à moins d'être confondue avec la tangente en B à cet arc : il est donc impossible de trouver un système d'axes relativement auquel l'arc  $\widehat{B'C'}$  vérifie dans le voisinage de B les conditions (3.7).

Toutefois, les raisonnements du précédent paragraphe permettent de construire pour  $\gamma[l(t)]$  un module de continuité du type (3.5'), valable pour  $l = -1$ . Comme l'axe  $\widehat{BC}$  ne comprend, par hypothèse, aucune portion rectiligne parallèle à  $Ox$ , l'abscisse curviligne  $l$  est, par suite, une fonction continue  $l(\gamma)$  de  $\gamma$ . Soit  $\eta(\delta)$  le module de continuité de  $l(\gamma)$  [ $\eta(\delta)$ , en l'espèce, n'est pas lipschitzien, puisque  $\frac{dl}{d\gamma} = \frac{1}{\sin \Psi}$  n'est pas borné par  $\widehat{BC}$ ];  $l[\gamma(t)]$ , envisagée comme fonction de  $t$  possède le module de continuité de  $\eta \left[ \frac{\text{const}}{\left| \text{Log} \frac{1}{t-t'} \right|^{\frac{1}{2}}} \right]$ .

Cela posé, transportons les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à amener leur origine au point B. D'après les hypothèses faites, la direction  $Bx$  pénètre à l'intérieur de  $\Gamma'$ ; on peut donc définir la fonction  $\arg z(t)$  comme nous l'avons fait au début de ce paragraphe et attribuer aux points de  $\widehat{BC}$  des arguments  $\Theta(t)$  positifs. Effectuons alors la transformation (3.8); nous affecterons encore de l'indice 1 les éléments relatifs au plan  $z_1$  et au domaine  $\Gamma_1$  ainsi obtenus. Cette transformation permet de passer de (3.5') à (3.12) si

1° il existe un nombre positif  $\eta$  tel que l'intersection  $\widehat{BC}_1$  avec la droite d'équation  $\gamma = \alpha$  se réduit à un point unique lorsque

$$0 \leq \alpha \leq \eta;$$

2° il existe un nombre positif  $K$  borné supérieurement, vérifiant l'inégalité (3.11).

Or, il est clair que cette deuxième condition n'est pas remplie lorsque

$$\Psi[l(-1)] = \Psi(l_1) = \Theta(-1) = 0;$$

$n$  étant plus grand que 2 et  $\Theta(t)$  étant continue pour  $-1 \leq t \leq 1$ , le

rapport [cf. (3. 11)]

$$\frac{\sin \Theta(t)}{\sin^n \frac{\Theta(t)}{n}}$$

n'est pas borné pour  $t = -1$ ; cela justifie la première partie de notre assertion.

Au contraire, le rapport précédent est évidemment borné pour  $t = -1$  lorsque  $\Psi(l_1) = \pi$ . Dans ce cas le transformé  $\widehat{BC}_1$  de  $\widehat{BC}$  aboutira au point B en faisant avec  $Bx$  un angle égal à  $\frac{\pi}{n}$ ; l'existence et la continuité de  $\Psi'(l)$  assurent alors la croissance de l'ordonnée  $y_1$  de  $\widehat{BC}_1$  dans un voisinage fini du point B. D'autre part, l'ordonnée  $y$  d'un point M de  $\widehat{BC}$  peut être minorée en fonction de  $l - l_1$ , où  $l$  désigne l'abscisse curviligne de M <sup>(99)</sup>; il en sera donc de même de l'ordonnée  $y_1$  de sa transformée. Ces deux remarques entraînent l'existence du nombre  $\eta$  défini ci-dessus et achèvent la démonstration de notre théorème en ce qui concerne la fonction  $y[l(t)]$ ; l'inégalité (3. 12) est donc valable le long de tout l'arc  $\widehat{BC}$ , extrémités comprises.

Mais, en l'espèce, on ne peut pas passer de (3. 12) à (3. 13) dans le voisinage de  $t = -1$ , car la dérivée

$$\frac{dy(t)}{dl(t)} = \sin \Psi[l(t)]$$

<sup>(99)</sup> En effet, l'arc  $\widehat{BC}$  est dépourvu, par hypothèse, de portions rectilignes parallèles à  $Bx$ ; la mesure de l'ensemble des points de  $\widehat{BC}$  en lesquels  $\Psi(l)$  se réduit à 0 ou à  $\pi$  est donc nulle. La fonction  $\Psi(l)$  étant continue, il suit de là, qu'étant donné un nombre positif  $\varepsilon$  abstraitement petit, on peut trouver deux nombres  $\varepsilon_1$  et  $\delta(l)$  positifs et non nuls tels que la mesure de l'ensemble des points de  $\widehat{BM}$  sur lesquels

$$\sin \Psi(l) \geq \varepsilon_1$$

soit supérieure à  $\delta(l)$  moyennant la condition  $l - l_1 > \varepsilon$ ; le nombre  $\delta(l)$  est évidemment une fonction croissante de son argument  $l$ . On peut alors écrire

$$y = \int_{l_1}^l \sin \Psi(l) dl \geq (l - l_1) \delta(l) \quad \text{C. Q. F. D.}$$



n'est pas inférieurement bornée dans ce voisinage. On emploie alors un artifice pour déduire directement l'inégalité (3.15) de (3.12).

En effet, le long de  $\widehat{BC}$  (extrémités comprises), on peut écrire

$$\sin \Psi \, d\Psi = \Psi'(l) \, dy.$$

On en tire, en intégrant,

$$|\cos \Psi[l(t)] - \cos \Psi[l(t')]| \leq |\text{Maximum } \Psi'(l)| |y[l(t)] - y[l(t')]|$$

avec

$$(-1 \leq t \leq t' \leq 1).$$

En remarquant que

$$\frac{|\cos \pi - \cos \Psi|}{|\pi - \Psi|^2} \geq \frac{2}{\pi^2},$$

lorsque  $\Psi$  est compris entre 0 et  $\pi$ , l'inégalité précédente entraîne

$$|\Psi[l(-1)] - \Psi[l(t)]|^2 \leq \frac{\pi^2}{2} \text{Max} |\Psi'(l)| |y[l(-1)] - y[l(t)]|$$

ou encore

$$|\Psi[l(-1)] - \Psi[l(t)]| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\text{Max} |\Psi'(l)|} |y[l(-1)] - y[l(t)]|^{\frac{1}{2}} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

En combinant le résultat précédent avec (3.12), il vient, en conservant les notations de (3.12),

$$|\Psi[l(-1)] - \Psi[l(t)]| \leq \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}+1} (\sigma \text{const.})^{\frac{n}{2}} \text{Max} |\Psi'(l)|}{\sqrt{K} \left| \text{Log} \frac{1}{|-1-t|} \right|^{\frac{n}{4}}} \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

inégalité qui,  $n$  étant arbitrairement grand, fournit pour la fonction  $\Psi[l(t)]$  un module de continuité, valable pour  $t = -1$ , qui est bien du type (3.15).

La formule de M. Cisotti a donc un sens le long de tout l'arc  $\widehat{BC}$ , extrémités comprises; il suit de là qu'au point B de cet arc  $\frac{d l(t)}{dt}$  existe et vérifie encore une condition  $\mathcal{L}_{\frac{n}{4}-1}^2(t)$ .

Dans un travail ultérieur nous appliquerons les raisonnements de ces deux paragraphes à l'examen de cas plus compliqués; faute

de place, nous nous sommes borné à résumer les méthodes employées et à énoncer les préliminaires indispensables aux applications hydrodynamiques.

**23. PROBLÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME DE HELMHOLTZ.** — Nous nous proposons maintenant de résoudre le problème de représentation conforme de Helmholtz; ce problème consiste à déterminer un mouvement à la Helmholtz qui correspond à une configuration donnée des éléments rigides : parois planes et obstacles. D'une manière précise, soit un arc de courbe  $\widehat{BC}$  situé dans le plan  $z = x + iy$ . La courbe dont l'arc  $\widehat{BC}$  fait partie est supposée avoir une tangente en chacun de ses points <sup>(100)</sup>; on la définit au moyen de son équation intrinsèque

$$\Psi = \Psi(l),$$

qui relie l'abscisse curviligne  $l$  à l'angle  $\Psi$  que fait avec  $Ox$  la demi-tangente (orientée dans le sens des  $l$  croissants) à l'obstacle. Nous désignerons par  $\alpha$  et  $\beta$  les abscisses curvilignes des points B et C que nous choisissons de manière que  $0 < \alpha < \beta$  et qu'aux  $l$  croissants correspondent des ordonnées croissantes. On suppose que :

1° L'intersection de  $\widehat{BC}$  avec les droites d'équation  $y = \text{const.}$  se réduit à un point unique; toutefois,  $\widehat{BC}$  pourra comprendre des portions rectilignes parallèles aux parois; mais on suppose essentiellement que l'obstacle ne se réduit pas à une lame placée parallèlement à  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ; cette condition se traduira par des inégalités

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi \quad \text{pour } \alpha \leq l \leq \beta,$$

la fonction  $\Psi(l)$  ne pouvant se réduire identiquement à 0 ou à  $\pi$  dans tout l'intervalle  $\alpha \leq l \leq \beta$ . Nous supposerons de plus que  $\Psi(\alpha) \neq \pi$ ,  $\Psi(\beta) \neq 0$  (cf. § 26) <sup>(101)</sup>.

<sup>(100)</sup> Sous sa forme actuelle la théorie ne s'applique qu'aux obstacles lisses dépourvus de points anguleux. Mais des extensions sont possibles au cas des profils courbes, comportant des points anguleux.

<sup>(101)</sup> Ces hypothèses ne sont pas essentielles pour la démonstration du théorème

2° La courbure  $\frac{d\Psi(l)}{dl}$  existe et est continue pour  $\alpha \leq l \leq \beta$  <sup>(102)</sup>.

L'arc  $\widehat{BC}$  est placé à l'intérieur d'une bande parallèle à  $Ox$  dont les bords supérieur et inférieur seront désignés respectivement par  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ; les distances de  $C$  à  $\mu_1$ , de  $B$  à  $\mu_2$  seront respectivement appelées  $d_1$  et  $d_2$ ; les longueurs  $d_1$  et  $d_2$  sont données *a priori*; elles peuvent être infinies. Il est clair que la donnée de la fonction  $\Psi(l)$  et des quatre paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ , définit complètement la configuration des éléments rigides.

Ceci posé, les résultats du premier Chapitre permettent de formuler le problème de Helmholtz comme suit :

*Problème du sillage.* — Déterminer dans le plan de la variable

$$f = \varphi + i\psi$$

(plan du potentiel complexe) un domaine  $F$  (cf. *fig. 2*) formé d'une bande indéfinie, parallèle à  $Ox$ , entaillée le long de tout le demi-axe réel positif, et définir dans  $F$  une fonction analytique  $z = z(f)$  de manière que le domaine  $\mathcal{A}$  du plan  $z$ , que la fonction  $z = z(f)$  fait correspondre à  $F$ , ait les propriétés suivantes :

La frontière de  $\mathcal{A}$  se compose des parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de l'arc  $\widehat{BC}$  et de deux lignes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de forme inconnue *a priori*, joignant le point à l'infini en *aval* ( $x = +\infty$ ) aux points  $C$  et  $B$  respectivement. Les courbes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  possèdent en chacun de leurs points (extrémités  $B$  et  $C$  comprises) une tangente continue.

La transformation  $z = z(f)$  fait correspondre entre eux les éléments de frontière suivants :

D'abord, la paroi  $\mu_1$  au bord  $\psi = \psi_1$ , ( $\psi_1 > 0$ ), inconnu *a priori* de la bande  $F$ ; la paroi  $\mu_2$  au bord  $\psi = -\psi_2$  (la constante positive  $\psi_2$  est inconnue *a priori*) de la bande  $F$ . La courbe constituée par l'ensemble

d'existence : voir le travail de M. Leray; mais elles facilitent et simplifient l'exposition; sans elles, toutes les conclusions du paragraphe 29 tomberaient en défaut.

<sup>(102)</sup> Ces hypothèses ne sont pas indispensables : voir les travaux que publiera M. Oudart.

des lignes  $\lambda_1$ , l'arc  $\widehat{BC}$  (ou encore l'obstacle) et  $\lambda_2$  aura pour image l'ensemble des deux bords de la coupure pratiquée le long de  $O\varphi$ . L'origine  $f = 0$  doit être l'image d'un point de l'obstacle que nous appellerons  $O$ ; d'après cela, les points  $C$  et  $B$  auront pour images les points d'affixes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ( $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant des constantes réelles, positives, *a priori* inconnues) situés, le premier sur le bord supérieur, le second sur le bord inférieur de la coupure.

En outre, la transformation  $z = z(f)$  est assujettie à vérifier les conditions suivantes :

1° Le long de  $\lambda_1$  (ou de  $\lambda_2$ ), c'est-à-dire le long du segment  $(\varphi_1, +\infty)$  [ou du segment  $(\varphi_2, +\infty)$ ], la correspondance  $z = z(f)$  doit conserver les longueurs. Cela se traduit par la condition

$$\left| \frac{dz}{df} \right| = 1,$$

valable le long des lignes libres (ou de leurs images).

2° Aux points à l'infini de  $F$  où  $\varphi > 0$ , on doit avoir

$$z = f + \text{série entière en } \frac{1}{f}.$$

3° Aux points à l'infini de  $F$  où  $\varphi < 0$ , on doit avoir

$$z = kf + \text{série entière en } \frac{1}{f},$$

où  $k$  est une constante réelle, positive, et *a priori* inconnue.

Relativement à cet énoncé nous ferons observer que, dans le schéma du sillage, les points de détachements des lignes libres sont arbitrairement placés aux extrémités de l'obstacle. Les exemples de mouvements à la Helmholtz (notamment le cas de l'obstacle en accolade) nous incitent à assouplir le schéma précédent et à nous poser le problème suivant :

*Problème de la proue.* — Étant donné un obstacle  $\widehat{BC}$  de position

connue relativement aux parois  $\mu_1, \mu_2$  du canal, trouver un sillage correspondant à un obstacle  $P_1 P_2$  qui, soit coïncide avec l'arc  $\widehat{BC}$ , soit constitue une portion de cet arc. Si le point  $P_1$  (ou  $P_2$ ) coïncide avec  $C$  (ou  $B$ ), la ligne libre  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) qui aboutit en ce point y présente soit un détachement en proue, soit un détachement vers l'aval (cf. § 15). Si le point  $P_1$  (ou  $P_2$ ) est intérieur à l'arc  $\widehat{BC}$ , la ligne  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) y présente un détachement en proue. Il y a lieu de noter que ce problème ne se réduit pas à celui du sillage lorsque l'arc  $\widehat{P_2 P_1}$  coïncide avec l'obstacle  $\widehat{BC}$ ; nous imposons ici aux lignes libres des conditions de détachement (détachement vers l'aval) qui n'interviennent pas dans l'énoncé du problème du sillage.

Nous allons maintenant mettre ici en équation chacun de ces problèmes. Pour abrégier le langage, nous allons introduire l'espace abstrait  $E(a, b, s)$ ; par définition  $E(a, b, s)$  comprend toutes les fonctions réelles de la variable réelle  $s$  qui : 1° sont continues dans l'intervalle  $a \leq s \leq b$ ; 2° admettent dans l'intervalle  $ab$ , extrémités comprises, des dérivées continues. Nous appellerons *norme* d'une fonction  $f(s)$  appartenant à cet espace, la grandeur

$$\|f(s)\| = \text{Maximum de } |f(s)| + \text{Maximum de } |f'(s)|,$$

les maximums du second membre étant relatifs à l'intervalle  $a, b$ .

D'après cette définition de  $E(a, b, s)$ , cet espace est linéaire, normé, complet <sup>(103)</sup>.

En particulier, il résulte des hypothèses faites au début de ce paragraphe que  $\Psi(l)$  appartient à l'espace  $E(\alpha, \beta, l)$ .

*Mise en équation du problème du sillage.* — Considérons une configuration donnée (dans le plan  $z$ ), définie par la fonction  $\Psi(l)$  et les quatre paramètres  $\alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$ . Donnons-nous, d'autre part, un

<sup>(103)</sup> Voir au sujet de ces définitions le paragraphe 28. Il est essentiel de noter que les éléments  $l(s)$  de  $E(0, \pi, s)$  ne sont pas nécessairement des fonctions croissantes de  $s$ ; les solutions des problèmes du sillage et de la proue constituent donc des éléments très particuliers de cet espace.

élément  $l(s)$  de l'espace  $E(o, \pi, s)$  <sup>(104)</sup> et les valeurs de deux paramètres  $a$  et  $b$  tels que  $a < -1, b > 1$ . Nous poserons

$$\Psi(s) = \Psi[l(s)].$$

Dans ces conditions (*cf.* §§ 8 et 12) :

1° Les équations (1.6), (1.6'), (1.8), (1.8') définissent les demi-périodes  $\omega_1$  et  $\omega_3$ , le paramètre  $q$  des fonctions elliptiques qui interviendront dans les formules ci-dessous, ainsi que les paramètres  $\gamma$  et  $s_1$ .

2° L'équation (1.24), dans laquelle on substitue à  $\Psi(s)$  sa valeur  $\Psi[l(s)]$ , définit une constante  $s_0$ ; le domaine  $d$  correspondant est, dès lors, entièrement déterminé. La seconde relation (1.8') fait connaître le paramètre  $u_{01}$ , et par suite  $u_{01} + \omega_3 = u_0$ . Portons la valeur ainsi trouvée de  $u_0$  dans (1.6''); on détermine ainsi le paramètre  $t_0$ , et, par conséquent, d'après (1.4'), le quotient  $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ .

De la façon même dont la valeur de  $t_0$  a été obtenue, il résulte que  $|t_0| \leq 1$ ; ainsi, les paramètres  $a, b, t_0$  vérifient les conditions (1.4'').

3° Les équations (1.23), (1.27), (1.28) et (1.29), permettent de construire à partir des éléments  $\Psi[l(s)] = \Psi(s), s_0, \omega_1$  et  $\omega_3$  les fonctions  $\Omega(Z) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y)$  et  $T(e^{is})$  dans le domaine  $d$  précédemment défini.

4° La différentielle  $df(Z)$  [*cf.* les formules (1.10) et (1.10')] est maintenant connue, d'après l'alinéa 2, au facteur  $\psi_1 + \psi_2$  près. D'après l'alinéa 3, le second membre de l'équation (1.33'') de M. Villat est donc connu au même facteur près; l'équation en cause définit donc une famille de fonctions  $L(s)$  croissantes, dépendant d'une constante d'intégration additive et d'une constante multiplicative  $(\psi_1 + \psi_2)$ . Parmi les fonctions de cette famille, une et une seule vérifie les conditions

$$L(o) = \alpha, \quad L(\pi) = \beta,$$

qui permettent d'éliminer la constante additive et de déterminer le

<sup>(104)</sup> Au paragraphe 28 nous établirons que, moyennant les hypothèses faites sur la nature de l'obstacle, la fonction  $l(s)$  est nécessairement un élément de  $E(o, \pi, s)$ ; nous admettrons ce point pour le moment.

facteur  $\psi_1 + \psi_2$  au moyen de la relation <sup>(105)</sup>

$$(3.19) \quad \beta - \alpha = \int_0^\pi e^{-T(e^{is})} |df(s)|$$

déduite de (1.33'') et dans laquelle  $df(s)$  est supposée remplacée par les expressions (1.10) et (1.10').

Pour abrégé, nous écrivons désormais

$$L(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b],$$

en désignant par  $V$  l'ensemble des transformations fonctionnelles qui

<sup>(10a)</sup> C'est au sujet de la condition analogue à (3.19), imposée dans le cas du fluide indéfini à la constante multiplicative  $\lambda$ , analogue à  $\psi_1 + \psi_2$  et *a priori* inconnue, que M. Sekerj-Zenkowitch [cf. l'Introduction] nous semble avoir commis une erreur de raisonnement.

Dans le cas du fluide indéfini, en effet, le problème du sillage (tel qu'il a été énoncé dans le texte), peut se ramener à déterminer la fonction  $\Psi(s) = \Psi[l(s)]$  et la constante réelle  $\lambda$  (inconnue *a priori*) vérifiant un système de la forme

$$(1) \quad \Psi'(s) = \lambda F[\Psi'(s)],$$

$$(2) \quad \lambda = \Phi[\Psi'(s)],$$

où les symboles  $F$  et  $\Phi$  désignent deux transformations fonctionnelles convenables. Cela étant, un processus correct d'approximations successives doit consister en ceci : après avoir désigné les approximations successives des inconnues par  $\Psi'_1, \Psi'_2, \dots, \Psi'_n, \dots$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  respectivement, 1° choisir  $\Psi'_1$ ; 2° déterminer  $\lambda_1$  par la relation (2)

$$\lambda_1 = \Phi[\Psi'_1(s)];$$

3° évaluer  $\Psi'_2$  au moyen de (1)

$$\Psi'_2(s) = \Phi[\Psi'_1(s)] F[\Psi'_1(s)].$$

Dès lors, on aura les relations de récurrence

$$\lambda_{n-1} = \Phi[\Psi'_{n-1}(s)],$$

$$\Psi'_n(s) = \Phi[\Psi'_{n-1}(s)] F[\Psi'_{n-1}(s)].$$

Le processus ci-dessus revient, en définitive, à éliminer  $\lambda$  entre les équations

permettent de construire la fonction  $L(s)$ , précédemment définie, à partir des éléments  $l(s)$ ,  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$ .

5° Les équations (1.6'') et (3.19), faisant connaître la somme et le quotient de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , permettent de déterminer ces deux derniers paramètres. Par voie de conséquence, les domaines  $F$  et  $\mathcal{C}$  et le potentiel complexe  $f = f(Z, a, b, \psi_1, \psi_2)$  sont aussi bien déterminés.

6° Enfin les distances  $D_1$  et  $D_2$  des points  $C$  et  $B$  (qui sont dans notre cas confondus avec les points de détachement  $P_1$  et  $P_2$ ) sont

---

tions (1) et (2) et à résoudre ensuite l'équation en  $\Psi'(s)$  ainsi obtenue par la méthode des approximations successives.

Le procédé adopté par M. Sekerj-Zenkowitch est tout différent; regardant dans (1)  $\lambda$  comme un paramètre constant, il résout cette équation par approximations successives sans s'occuper de la condition (2); puis, une fois la solution obtenue sous la forme

$$\Psi' = \Psi'[(s, \lambda)],$$

il calcule  $\lambda$  en écrivant

$$(3) \quad \lambda = \Phi[\Psi'(s, \lambda)].$$

Il est évident que les deux processus ne sont pas équivalents; du reste, pour discuter l'équation (3) M. Sekerj-Zenkowitch se borne à y remplacer  $\Psi'(s, \lambda)$  par les premiers termes de son développement suivant les puissances de  $\lambda$ .

Ainsi, M. Sekerj-Zenkowitch ne nous paraît pas avoir résolu le problème que nous avons appelé *problème défini du sillage* et dont nous avons donné l'énoncé au cours de ce paragraphe; il a abordé l'étude d'une sorte de problème mixte; du reste sa méthode de résolution de l'équation (1) par approximations successives est très ingénieuse et paraît présenter de l'intérêt en soi.

Par ailleurs, il est certainement probable que les deux mécanismes d'approximations successives décrits dans cette Note donnent, pratiquement, des résultats voisins pour de petites valeurs de  $\lambda$ . Cela ajoute du prix au travail de M. Sekerj-Zenkowitch; les calculs, qu'il a poussés jusqu'aux applications numériques, fourniraient, dans ces conditions, d'excellentes solutions approchées du problème déterminé du sillage posé pour des contours tels qu'un arc de cercle, un arc de parabole, un arc de cycloïde, etc.

Toutefois, nous croyons devoir ajouter qu'à notre avis, il est impossible d'aborder l'étude du système (1), (2) de cette Note par la méthode des approximations successives; l'extrême complexité des fonctionnelles  $F$  et  $\Phi$  qui y figurent est, en tout cas, de nature à décourager bien des chercheurs.



données par les formules [cf. les équations (1.33) et (1.33')] ]

$$D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b] = \int_{-1}^{-a} \sin \Omega(X, 0) df + \psi_1,$$

$$D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b] = - \int_1^a \sin \Omega(X, 0) df + \psi_2.$$

En résumé, aux éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta$ , connus *a priori*, et aux éléments *arbitraires*  $l(s), a, b$ , nous avons attaché un régime à la Helmholtz; les points de détachements sont placés aux extrémités de l'obstacle; la configuration géométrique correspondante est définie par les éléments  $\Psi[l(s)], \alpha, \beta, D_1, D_2$ ; elle coïncidera avec la configuration donnée, caractérisée par les éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta, (\alpha < l < \beta), d_1$  et  $d_2$ , si la fonction  $l(s)$  et les paramètres  $a$  et  $b$  vérifient l'équation fonctionnelle

$$(3.20) \quad l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]$$

et le système de deux conditions *aux limites*

$$(3.21) \quad \begin{cases} d_1 = D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ d_2 = D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]. \end{cases}$$

Il est donc clair que le problème du sillage, tel qu'il a été énoncé au cours de ce paragraphe [la configuration du plan  $z$  étant caractérisée par les éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$ ] équivaut à la détermination d'un point  $l(s)$  de l'espace  $E(0, \pi, s)$  et de deux constantes  $a, b, a < -1, b > 1$  vérifiant le système des relations fonctionnelles (3.20) et (3.21). La fonction  $l(s)$  réalise la correspondance entre l'obstacle et la demi-circonférence  $|Z| = 1$  du domaine  $d$ .

Rappelons encore qu'en vertu des hypothèses faites  $\Psi(l)$  est un élément de l'espace  $E(\alpha, \beta, l)$  qui vérifie les inégalités

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi, \quad \alpha \leq l \leq \beta.$$

*Mise en équation du problème de la proue.* — Considérons encore dans le plan  $z$  une configuration des éléments rigides caractérisée par les éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$ . Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux paramètres tels que  $\alpha \leq p_2 \leq p_1 \leq \beta$ ; nous appellerons  $P_1$  et  $P_2$  les points de l'obstacle  $\widehat{BC}$

dont les abscisses curvilignes respectives sont  $p_1$  et  $p_2$ . Les distances respectives  $d'_1$  et  $d'_2$  des points  $P_1$  et  $P_2$  aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  seront données par les formules

$$(3.22) \quad \begin{cases} d'_1 = d_1 + \int_{p_1}^{\beta} \sin \Psi(l) dl, \\ d'_2 = d_2 + \int_{\alpha}^{p_2} \sin \Psi(l) dl. \end{cases}$$

Donnons-nous alors un élément  $l(s)$  de l'espace  $E(o, \pi, s)$  et deux constantes réelles  $a$  et  $b$  telle que  $a < -1$ ,  $b > 1$ . Les raisonnements que nous venons de développer permettent de construire un mouvement à la Helmholtz à partir des éléments  $\Psi(l)$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $a$ ,  $b$  et  $l(s)$ .

L'obstacle correspondant sera identique à l'arc  $\widehat{P_2 P_1}$  de  $\widehat{BC}$  si les éléments arbitraires  $l(s)$ ,  $a$  et  $b$  vérifient l'équation (3.20) et les conditions (3.21), dans lesquelles les données  $d_1$  et  $d_2$  sont supposées remplacées par les quantités  $d'_1$  et  $d'_2$ , définies par les équations (3.22).

Dans ces conditions, les arcs  $\widehat{P_1 C}$  et  $\widehat{BP_2}$  (en supposant que  $p_1$  et  $p_2$  soient distincts de  $\beta$  et de  $\alpha$  respectivement) doivent être nécessairement osculateurs aux lignes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ; on sait (cf. le § 13) qu'il en est ainsi lorsque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  présentent des détachements en proue. Or, ces conditions ne seront remplies que si les fonctionnelles  $P_1$  et  $P_2$  définies par les équations (C) et (C') du paragraphe 13 sont nulles.

Si, au contraire, l'un des paramètres  $p_1$  (ou  $p_2$ ), se réduit à  $\beta$  (ou  $\alpha$ ), le détachement de  $\lambda_1$  (ou de  $\lambda_2$ ) sera vers l'aval si la fonctionnelle  $P_1$  (ou  $P_2$ ) est négative.

Dans l'un comme dans l'autre cas, les nombres  $p_1$  et  $p_2$  sont assujettis à vérifier des conditions *aux limites*. En se reportant alors à l'énoncé du problème de la proue, on voit que, mathématiquement parlant, on peut formuler ce problème comme suit : étant donné quatre constantes réelles, positives,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) et un élément  $\Psi(l)$  de l'espace  $E(\alpha, \beta, l)$  assujetti à vérifier les conditions

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi, \quad \alpha \leq l \leq \beta,$$

trouver quatre constantes réelles  $a$ ,  $b$ ,  $p_1$  et  $p_2$  (telles que  $a < -1$ ,  $b > 1$ ) et un élément  $l(s)$  de l'espace  $E(o, \pi, s)$  qui vérifient l'un des

quatre systèmes suivants :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), p_2, p_1, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), p_2, p_1, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), p_2, p_1, a, b], \\ \alpha < p_2 < p_1 < \beta. \end{array} \right.$$

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, p_1, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, p_1, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, p_1, a, b], \\ \alpha = p_2 < p_1 < \beta. \end{array} \right.$$

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), p_2, \beta, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), p_2, \beta, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), p_2, \beta, a, b], \\ \alpha < p_2 < p_1 = \beta. \end{array} \right.$$

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ \alpha = p_2 < p_1 = \beta \end{array} \right.$$

Dans les équations qu'on vient d'écrire, nous avons explicité tous les arguments des fonctionnelles  $P_1$  et  $P_2$ ; nous rappelons, d'autre part, que  $d'_1$  et  $d'_2$  désignent les fonctionnelles de  $l(s)$ ,  $\Psi(l)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $p_1$  et  $p_2$  définies par les équations (3.22).

Soit  $B_1$  (ou  $C_1$ ) le point de BC où la valeur algébrique de l'angle de la courbe obstacle avec  $Ox$  atteint son minimum (ou maximum); si ce minimum (ou maximum) est atteint en plusieurs points de  $\widehat{BC}$ , on choisira pour  $B_1$  (ou  $C_1$ ) celui dont l'abscisse curviligne est minima (maxima); nous appellerons  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  les abscisses curvilignes respec-

tives de  $B_1$  et  $C_1$ . Au paragraphe 28, nous montrerons que le problème de la proue a une solution même si on s'impose les restrictions suivantes :

$$(3.27) \quad p_2 < \alpha_1, \quad p_1 > \beta_1.$$

Pour pouvoir appliquer aux problèmes du sillage et de la proue ainsi formulés la théorie des équations fonctionnelles de MM. Leray-Schauder, il est nécessaire de montrer *a priori* qu'aux éléments donnés  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ , satisfaisant aux conditions énumérées au début de ce paragraphe, ne peuvent correspondre que des éléments  $l(s)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , etc., qui assurent un sens aux équations du problème. Les paragraphes qui suivent ont pour but d'obtenir certaines limitations des éléments inconnus qui garantissent la régularité des formules en cause.

*Remarque.* — Il sera souvent plus commode de considérer à la place de  $l(s)$  la fonction  $l(t)$  qui réalise la correspondance entre l'obstacle d'une part, et le segment  $-1 \leq t \leq 1$  du domaine  $\mathfrak{C}$  d'autre part. Le groupe d'inconnues  $l(s)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  est équivalent au groupe  $l(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ .

24. LIMITATION DE  $q$ . — Les formules (1.6), (1.9), etc. perdent toute signification lorsqu'on y fait  $a = -1$  ou  $b = 1$ ; le paramètre  $q$  est alors égal à 1. En effet, en reprenant les formules et les notations utilisées au paragraphe 20 et en posant

$$\begin{aligned} t_1 &= a, & t_2 &= -1, \\ t_3 &= 1, & t_4 &= b, \end{aligned}$$

il vient, d'après (3.1'),

$$r = - \frac{(b-1)(1+a)}{(b+1)(1-a)}.$$

D'après cela,  $r$  est positif et compris entre 0 et 1 pour toute valeur finie ou infinie de  $a$  et de  $b$ , pourvu que

$$a \leq -1, \quad b \geq 1.$$

Dans ces conditions, le paramètre  $\chi$ , relié à  $r$  par la relation

$$\chi = 1 - r,$$

ne peut être égal à 1 que pour  $r=0$ ; c'est-à-dire pour  $a=-1$  ou  $b=1$  seulement. Or, au paragraphe 20, on a vu que

$$\frac{\omega_3}{i\omega_1} = \frac{X(1-\chi)}{X(\chi)} \quad \text{avec} \quad X(\chi) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\chi \sin^2 \varphi}}.$$

Cela montre que  $\frac{\omega_3}{i\omega_1}$  ne peut devenir nul et, par suite, que le paramètre  $q$ , lié au précédent par la formule (1.8) ne peut devenir égal à 1 que si  $a=-1$  ou  $b=1$ . C. Q. F. D.

La réciproque est vraie : on a nécessairement  $a < -1$  et  $b > 1$  lorsque  $q < 1$ . Par suite, trouver une borne inférieure pour  $|1+a|$  et  $b-1$  revient à trouver une majorante pour  $q$  en fonction des données géométriques de la configuration des éléments rigides.

Nous supposons donc le problème du sillage ou de la proue résolu pour la configuration  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ , supposée donnée; nous allons nous servir des résultats du paragraphe 20. Ces résultats s'appliquent à l'espèce, puisqu'en vertu de l'hypothèse  $0 \leq \Psi(l) \leq \pi$  le domaine  $\mathcal{A}$  correspondant sera d'un seul tenant.

L'inégalité (3.2) ne peut être utile que si l'aire  $\sigma$  du domaine  $\Gamma$  est finie. Aussi, nous commencerons par transformer conformément le domaine  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement en une portion d'une sphère de Riemann que nous allons définir.

Menons par  $P_1$  et  $P_2$  <sup>(106)</sup> des parallèles à  $Ox$  (*fig. 9*); menons également des parallèles à  $Oy$  par les points d'abscisses maxima et minima de l'obstacle. On obtient ainsi un rectangle  $A_1, B_1, C_1, D_1$  auquel les arcs  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne peuvent être extérieurs, puisque, par hypothèse, l'intersection d'une droite  $y = \text{const.}$  avec l'obstacle se réduit à un point au plus. Nous appelons  $H_1H_2$  l'axe vertical de ce rectangle. Pour fixer les idées, nous supposons que l'on a (*cf. § 12*)

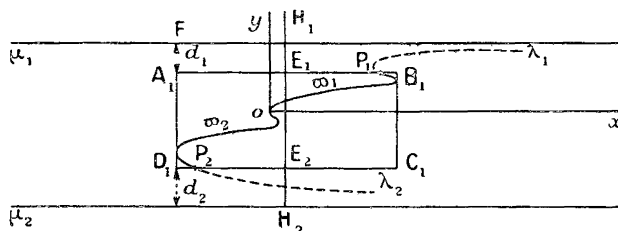
$$d_1 \leq d_2.$$

Ceci posé, considérons la sphère  $\Sigma$ , tangente au plan  $z$  au point  $H_1$  et

<sup>(106)</sup> Lorsque  $P_2$  et  $P_1$  ne coïncident pas avec les points  $B$  et  $C$ , il faudra remplacer dans le texte  $P_2$  et  $P_1$  par  $B$  et  $C$  respectivement.

dont le diamètre  $D$  est égal à  $D_1 H_1 = H_1 C_1$ ;  $D$  est donc borné dans les deux sens si les dimensions de l'obstacle sont finies et si  $d_1$  n'est

Fig. 9.



pas infinie. Soit  $P$  le point de  $\Sigma$  diamétralement opposé à  $H_1$ ; nous obtiendrons une correspondance conforme entre  $\mathcal{A}$  et une portion  $\Gamma$  de l'aire de la sphère, en projetant stéréographiquement  $\mathcal{A}$  sur  $\Sigma$ . Il est d'abord évident que

$$(3.27) \quad \frac{\pi d_1^2}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi D^2}{2},$$

cela montre que le facteur  $\frac{1}{\sigma}$  des formules (3.2) et (3.2') est borné dans les deux sens si les longueurs  $D$  et  $d_1$  sont finies, c'est-à-dire toutes les fois que l'obstacle n'est pas une longueur nulle et n'est pas à une distance nulle ou infinie de l'une des parois. Cela étant, nous poserons (*cf.* §§ 19 et 9)

$$t_1 = a, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = b,$$

cela revient à prendre pour  $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$  l'image de l'obstacle sur  $\Sigma$  et pour  $\widehat{\alpha_1 \alpha_4}$  l'image de l'ensemble des deux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Pour appliquer (3.2) il ne reste qu'à minorer la borne  $\Lambda$  correspondante.

Soient  $A_1, B_1, C_1$  et  $D_1$  les images des points  $A, B, C, D$  sur  $\Sigma$ ; au rectangle rectiligne  $A_1 B_1 C_1 D_1$  correspondra un rectangle curviligne dont les côtés sont des arcs de cercle et qui contiendra dans son intérieur l'image de l'obstacle. Il en résulte que la plus courte distance  $\Lambda$  évaluée sur la sphère entre l'image de l'obstacle et celle de l'ensemble des parois est minorée pour la plus courte distance *sphérique* entre l'image de  $\mu_1$  et de  $\mu_2$  d'une part, et le périmètre du rectangle  $A_1 B_1 C_1 D_1$  d'autre part. Or, cette plus courte distance est

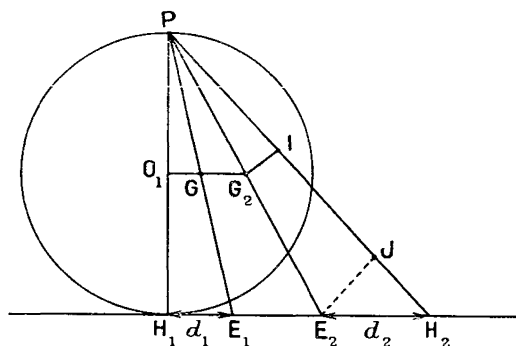
minorée à son tour pour la plus courte distance *rectiligne* du périmètre  $A_1 B_1 C_1 D_1$  aux plans  $P\mu_1$  et  $P\mu_2$  (dont les intersections avec  $\Sigma$  définissent les images de  $\mu_1$  et de  $\mu_2$ ) dont nous allons construire une borne inférieure.

A cet effet, considérons la section de  $\Sigma$  et de  $\mathcal{C}$  par le plan  $PH_1 H_2$  (*cf.* la figure 10) sur lequel les distances rectilignes considérées se projettent en vraie grandeur. Nous marquerons en  $E_1$  et  $E_2$  les traces respectives de  $AB$  et  $CD$ ; nous désignerons par  $G_1$  et  $G_2$  les intersections des  $PE_1$  et  $PE_2$  avec la parallèle à  $H_1 H_2$  menée par le centre  $O_1$  de  $\Sigma$ . Le rectangle  $A_1 B_1 C_1 D_1$  étant intérieur, par construction, au cercle de centre  $H_1$  et de rayon  $D$  du plan  $\alpha$ , les cotes des points intérieurs au périmètre  $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$  ne peuvent dépasser  $\frac{D}{2}$ . Par suite, l'aire limitée par ce périmètre se projette sur le plan de la figure à l'intérieur de la portion de surface commune au grand cercle et au quadrilatère  $E_1 E_2 G_1 G_2$ ; une simple inspection de la figure montre alors

1° que les distances des points de  $A', B', C', D'$ , au plan  $P\mu_1$  sont au moins égales à  $\frac{O_1 G_1}{2}$ , soit  $\frac{d_1}{2}$ ;

2° que les distances de ces points au plan  $P\mu_2$  sont minorées

Fig. 10,



par  $G_2 I$ ,  $I$  étant la projection de  $G_2$  sur  $PH_2$ . Il est aisé de relier cette dernière limitation à la première. On a, en appelant  $J$  la projection

de  $E_2$  sur  $PH_2$ ,

$$\frac{E_2 J}{2} = G_2 I;$$

d'où, en exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle  $PE_2 H_2$ ,

$$G_2 I = \frac{D d_2}{2 \sqrt{D^2 + (d_1 + d_2 + E_1 E_2)^2}}.$$

On vérifie aisément que le second membre est une fonction croissante de  $d_2$ ; on a donc

$$G_2 I \geq \frac{D d_1}{2 \sqrt{D^2 + (2d_1 + E_1 E_2)^2}}$$

puisque  $d_2 \geq d_1$ . Or, de par le choix même de  $D$ , on peut écrire

$$2D \geq 2d_1 + E_1 E_2.$$

Il en résulte

$$\frac{D}{\sqrt{D^2 + (2d_1 + E_1 E_2)^2}} > \frac{1}{\sqrt{5}},$$

et finalement

$$G_2 I \geq \frac{d_1}{2\sqrt{5}}.$$

En définitive,  $\Lambda$  est minoré par le plus petit des nombres  $\frac{d_1}{2}$  et  $\frac{d_1}{2\sqrt{5}}$ , soit par  $\frac{d_1}{2\sqrt{5}}$ . Dans ces conditions, l'inégalité (3.2) devient, en tenant compte de (3.27),

$$\frac{1}{10\pi} \frac{d_1^2}{D^2} \leq \frac{\omega_3}{i\omega_1},$$

ce qui s'écrit encore, d'après (1.8),

$$(3.28) \quad q \leq e^{-\frac{1}{10\pi} \frac{d_1^2}{D^2}},$$

le second membre étant inférieur à 1.

Cette inégalité fondamentale entraîne les conséquences suivantes :

1° Toutes les fois que les distances  $d_1, d_2$  de l'obstacle aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  admettent une minorante positive, le paramètre  $q$  correspondant admet une majorante positive inférieure à l'unité; par



suite, le domaine  $d$  correspondant aura une épaisseur inférieurement bornée<sup>(107)</sup>.

2° Supposons qu'on ait construit un régime à la Helmholtz, correspondant à une configuration donnée des éléments rigides; supposons que l'on déforme cette configuration de manière que le paramètre  $q$  correspondant tende vers 1; nous pouvons alors affirmer que ce fait ne peut se produire que si la déformation est telle que la distance  $d_1$  tend vers zéro. Nous établirons la réciproque de ce théorème un peu plus loin (*cf.* § 26).

*Remarque.* — Il y a lieu de noter que la démonstration précédente ne fait appel qu'à un minimum d'hypothèses concernant la nature géométrique de la configuration; l'inégalité (3.28) repose au fond sur deux faits: que le domaine du fluide en mouvement est d'un seul tenant<sup>(108)</sup>; que l'on peut enfermer l'obstacle dans un rectangle  $A_1 B_1 C_1 D_1$  intérieur au canal et dont les côtés  $A_1 B_1$  et  $C_1 D_1$  sont parallèles aux parois de celui-ci. Enfin, convenablement modifiée, l'inégalité (3.28) peut être étendue aux cas des parois courbes.

Nous nous servirons aussi de l'inégalité (3.2) pour établir le théorème suivant:

Soit un régime à la Helmholtz correspondant aux éléments intrinsèques  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$ ; si l'on fait varier les données de manière à faire tendre le paramètre  $q$  correspondant vers zéro, la configuration des éléments rigides se déformera de manière que les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  s'éloignent à l'infini.

*Remarque.* — Cet énoncé repose sur l'hypothèse de non-recoupement des lignes libres (sûrement satisfaite si  $|\Psi[l(s)]| < \pi$ ).

<sup>(107)</sup>  $\frac{d_1}{D}$  tend vers 1, lorsque  $d_1$  augmente indéfiniment, les dimensions de l'obstacle restant finies.

<sup>(108)</sup> Dans l'état actuel de la question cette prémisse a été établie seulement pour les obstacles pourvus d'une tangente assujettie à vérifier la condition

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi.$$

Mais toute extension à une nouvelle catégorie d'obstacles de la propriété de non-recoupement des lignes libres, avec elles-mêmes et avec l'obstacle correspondant, entraîne l'extension à la même catégorie d'obstacles de l'inégalité (3.28).

En effet, choisissons pour  $\Sigma$  une sphère de rayon fini quelconque, tangente au plan  $z$ , au point de bifurcation  $O$ , par exemple; l'image  $\Gamma$  du domaine  $\mathcal{A}$  est encore finie et d'un seul tenant; le lemme du paragraphe 20 s'applique. Posons (*cf.* § 19)

$$t_1 = a, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = +1, \quad t_4 = b.$$

Les éléments  $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$  et  $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$  de  $\Gamma'$  sont donc respectivement les images de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur  $\Sigma$ ; ce sont des courbes partant des images des points de détachement pour aboutir au pôle  $P$  de  $\Sigma$  où elles sont toutes deux tangentes au méridien de  $\Sigma$  parallèle aux parois.

Cela posé, (3.2) et (1.8) montrent que  $q$ , tendant vers zéro, la plus courte distance  $\Lambda$  entre les images de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (évaluée sur  $\Sigma$  à l'intérieur de  $\Gamma$ ) doit aussi tendre vers zéro. Or l'examen de la figure révèle que, dans le cas de non-recoupement de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , la borne  $\Lambda$  ne s'annule que si les petits cercles de  $\Sigma$ , images de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , se réduisent au point  $P$ , auquel cas les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont rejetées à l'infini.

C. Q. F. D.

La réciproque de ce théorème sera établie un peu plus loin (*cf.* § 26).

**25. LIMITATION DU QUOTIENT  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ .** — LEMME. — Soit  $T(t)$  une fonction réelle quelconque, définie, pour fixer les idées, dans l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ ; soit  $m(t)$  une fonction réelle, analytique et régulière dans le même intervalle <sup>(109)</sup>.

On a l'inégalité suivante :

$$(3.29) \quad \log \frac{\int_{-1}^{+1} e^{-T(t)} |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|} > - \frac{\int_{-1}^{+1} |T(t)| |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|}.$$

Associons, en effet, à chaque point  $t$  de l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ , le point

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t), \\ y(t) &= e^{-T(t)}, \end{aligned}$$

---

<sup>(109)</sup> Il serait aisé de se débarrasser de ces hypothèses de régularité sur  $m(t)$ .

de la courbe  $y = e^{-x}$  et plaçons en ce point la masse infinitésimale  $|dm(t)|$ ; les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  du centre de gravité  $G$  des masses ainsi réparties seront données par les formules

$$\xi = \frac{\int_{-1}^{+1} T(t) |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|},$$

$$\eta = \frac{\int_{-1}^{+1} e^{-T(t)} |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|}.$$

Or, la courbe  $y = e^{-x}$  tourne sa convexité vers l'axe des  $x$ ; il en résulte que les coordonnées  $x, y$  d'un point appartenant à une corde de  $y = e^{-x}$  et, par suite, celles  $\xi, \eta$  du centre de gravité  $G$ , vérifient l'inégalité  $y > e^{-x}$  ou l'inégalité équivalente  $\log y > -x$ . Il suffit, dès lors, de remplacer dans la dernière  $\xi$  et  $\eta$  par leurs valeurs pour retrouver (3.29).

*Remarque.* — La démonstration ne suppose nullement la continuité de  $T(t)$ ; la répartition des masses  $|dm(t)|$  peut donc être discontinue le long de  $y = e^{-x}$ . Enfin, il n'est même pas nécessaire de supposer la fonction  $T(t)$  bornée.

Cela posé, supposons encore le problème du sillage résolu pour la configuration  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$  donnée <sup>(110)</sup>; les éléments  $l(t)$  <sup>(111)</sup>,  $a, b, \psi_1$  et  $\psi_2$  correspondant à cette configuration sont alors connus. Dans ces conditions, la correspondance entre le segment  $-1 \leq t \leq 1$  d'une part et l'obstacle d'autre part sera donnée par la formule

$$dt = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} e^{-\tau} \frac{|t - t_0|}{(b - t)(t - a)} dt \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

que l'on obtient en combinant les équations (4.10) et (4.31). On

<sup>(110)</sup> Si le problème posé était celui de la proue, il suffirait de remplacer dans les raisonnements  $\alpha$  et  $\beta$  par  $p_2$  et  $p_1$ . Cette remarque s'applique encore au paragraphe 25.

<sup>(111)</sup> Voir la remarque finale du paragraphe 23.

tire de là

$$dl = \frac{1}{\pi} \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b} e^{-\mathbf{T}(t)} |t - t_0| \frac{|a|}{|t - a|} \frac{b}{(b - t)} dt.$$

Comme  $a \leq -1$  et  $b \geq 1$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , on a

$$\frac{|a|}{|t - a|} > \frac{1}{2}, \quad \frac{b}{b - t} \geq \frac{1}{2},$$

ces inégalités ayant un sens même pour  $|a| = 1$  et  $b = 1$ . Il suit de là que la longueur totale  $\beta - \alpha$  de l'obstacle donné vérifie l'inégalité

$$\beta - \alpha \geq \frac{1}{4\pi} \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b} \int_{-1}^{+1} e^{-\mathbf{T}(t)} |t - t_0| dt.$$

Cette inégalité permettra de majorer le facteur  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b}$  en fonction d'une minorante positive, non nulle de l'intégrale du second membre.

Or, on a

$$\int_{-1}^{+1} |t - t_0| dt = 1 + t_0^2,$$

d'où, puisque  $-1 \leq t_0 \leq 1$ ,

$$1 \leq 1 + t_0^2 \leq 2.$$

Dès lors, l'inégalité (3.29) permet d'écrire (en y posant  $|dm(t)| = |t - t_0| dt$ )

$$\log \left[ \int_{-1}^{+1} e^{-\mathbf{T}(t)} |t - t_0| dt \right] \geq -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}(t) |t - t_0| dt,$$

d'où l'on tire

$$\int_{-1}^{+1} e^{-\mathbf{T}(t)} |t - t_0| dt \geq e^{-\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}(t) |t - t_0| dt}.$$

Ainsi, l'intégrale du premier membre pourra être minorée par une constante positive non nulle si l'on sait majorer le module de l'expression

$$\int_{-1}^{+1} \mathbf{T}(t) |t - t_0| dt,$$

dont l'élément différentiel ne contient pas d'exponentielle; c'est là l'avantage qu'offre l'emploi du lemme.

Or, considérons la fonction analytique auxiliaire

$$(3.30) \quad \Pi(t) = \int_{t_0}^t \Omega(t) (t - t_0) dt$$

définie dans le domaine  $\mathfrak{C}$ ; d'après la définition même de  $\Omega(t)$  [cf. par exemple (1.23)] les parties réelle et imaginaire de  $\Pi(t)$  se réduisent respectivement pour  $t$  réel à

$$(3.30') \quad \left. \begin{aligned} \Re \Pi(t) &= \int_{t_0}^t \Theta(t) (t - t_0) dt \\ \Im \Pi(t) &= \int_{t_0}^t \mathbf{T}(t) (t - t_0) dt \end{aligned} \right\} \quad (t \text{ étant réel}).$$

Effectuons sur  $t$  la transformation

$$t = -\frac{1}{2} \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right)$$

qui substitue : 1° au domaine  $\mathfrak{C}$  le demi-cercle unitaire supérieur  $\mathfrak{C}_1$  du plan  $t_1$ ; les segments

$$-\infty \leq t_1 \leq -1 \quad \text{et} \quad 1 \leq t_1 \leq \infty$$

auront pour image les segments

$$0 \leq t_1 \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq t_1 \leq 0$$

respectivement; la demi-circonférence  $t_1 = e^{i\delta}$  ( $0 \leq \delta \leq \pi$ ) correspondra au segment  $-1 \leq t_1 \leq 1$ ; 2° à la fonction  $\Pi(t)$  la fonction

$$\Pi(t) = \Pi_1(t_1) = \frac{1}{2} \int_{e^{i\delta_0}}^{t_1} \Omega[t(t_1)] \left[ \frac{1}{2} \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) - \cos \delta_0 \right] \left( 1 - \frac{1}{t_1^2} \right) dt_1,$$

où l'on a posé

$$t_0 = -\cos \delta_0,$$

et où la fonction  $\Omega[t(t_1)]$  est donnée par la formule (1.53) dans laquelle il faudra remplacer  $t$  par sa valeur en fonction de  $t_1$ . De ce qui précède, il résulte que la fonction  $\Omega[t(t_1)]$  est réelle le long des segments

$$-1 \leq t_1 \leq -b + \sqrt{b^2 - 1} \quad \text{et} \quad -a - \sqrt{a^2 - 1} \leq t_1 \leq 1,$$

imaginaire pure le long des portions restantes du segment  $-1 \leq t_1 \leq 1$ , nulle en les points communs de ces deux éléments de frontière [cf. (1.13)]; la fonction  $\Omega[t(t_1)]$  est donc prolongeable à travers l'axe réel; elle peut donc être définie dans tout le cercle  $\mathfrak{C}_1$  à l'intérieur duquel elle est holomorphe, en sorte que la fonction  $\Pi_1(t_1)$  est également définie à l'intérieur de ce cercle, mais possédera au point  $t_1 = 0$  une singularité dont nous allons préciser la nature.

A cet effet, nous ferons observer qu'en retranchant du second membre de (1.53) la quantité

$$-\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)}}{1+t} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)}}$$

(dans laquelle le radical sous le signe d'intégration est pris avec le signe + et où le radical placé en facteur doit être pris avec le signe + pour de très grandes valeurs de  $t$ ) qui est nulle en vertu de (1.54), l'expression de  $\Omega(t)$  prend la forme

$$\Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)}}{(1+t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') dt'}{(t-t')\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)}}$$

valable même pour  $a = -1$  pourvu que  $b \neq 1$ ; au précédent paragraphe, nous avons vu que cette condition était remplie moyennant l'hypothèse  $d_1 \neq 0$  que nous adopterons désormais pour toute la suite du raisonnement. La fonction  $\Omega(t)$  étant régulière à l'infini, nous avons, en posant

$$R(t) = \sqrt{(t^2-1)(t-b)(t-a)}$$

et en remplaçant  $t$  par sa valeur en fonction de  $t_1$  <sup>(112)</sup>,

$$\begin{aligned} \Omega(t_1) = & -\frac{i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') dt'}{\sqrt{R(t')}} \\ & - 2\frac{i}{\pi} t_1 \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') \left[ (1-t') + \frac{1}{2}(a+b) \right] dt'}{\sqrt{R(t')}} \\ & + \frac{4i}{\pi} t_1^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') \left[ \frac{1}{2} - t' + t'^2 + \frac{1}{2}(a+b)(1-t') - \frac{1}{8}(a-b)^2 \right] dt'}{\sqrt{R(t')}} \\ & + t_1^3 [\text{série entière en } t_1]. \end{aligned}$$

---

<sup>(112)</sup> Ce développement suppose  $|a|$  et  $b$  borné supérieurement; il serait aisé

Portons ce développement limité dans l'expression de  $\Pi_1(t_1)$ ; on trouve, en désignant par des accents les dérivations effectuées relativement à la variable  $t_1$  au point  $t_1 = 0$ , en groupant convenablement les termes du second membre et en intégrant

$$(3.30'') \quad \Pi_1(t_1) = \frac{1}{2} \Omega(0) \left[ \frac{1}{4} \left( t_1^2 + \frac{1}{t_1^2} \right) - \cos \delta_0 \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right) \right] - \frac{1}{4} \Omega'(0) \left( t_1 - \frac{1}{t_1} \right) \\ + \frac{1}{2} \left[ \Omega'(0) \cos \delta_0 - \frac{1}{4} \Omega''(0) \right] \log t_1 + \Pi_2(t_1),$$

la fonction  $\Pi_2(t_1)$  étant holomorphe dans tout le cercle  $|t_1| < 1$ . Or, les quantités  $[\Omega(t_1)]_{t_1=0}$ ,  $\left( \frac{d\Omega}{dt_1} \right)_{t_1=0}$ ,  $\left( \frac{d^2\Omega}{dt_1^2} \right)_{t_1=0}$  sont imaginaires pures; d'après leurs expressions mêmes, elles sont bornées en modules si  $b \neq 1$  et si  $|a|$  et  $b$  sont bornés supérieurement. Il en résulte, en tenant compte de la définition de  $\Pi_1(t_1)$ , que le long du cercle  $t_1 = e^{i\delta}$  la partie réelle  $\mathcal{R}\Pi_2(t_1)$  de  $\Pi_2(t_1)$  se réduit à

$$- \int_{\delta_0}^{\delta} \Theta[t(e^{i\delta'})] (\cos \delta' - \cos \delta_0) \sin \delta' d\delta' + \frac{1}{2i} \left[ \Omega'(0) \cos \delta_0 - \frac{1}{4} \Omega''(0) \right] \delta \\ - \frac{1}{2i} \Omega'(0) \sin \delta.$$

La dérivée de  $\frac{d\mathcal{R}\Pi_2(e^{i\delta})}{d\delta}$  existe donc et reste inférieure en module à

$$2\pi^2 + \frac{\pi}{8} |\Omega''(0)| + \frac{\pi+1}{2} |\Omega'(0)|,$$

lorsque  $0 \leq \delta \leq \pi$ ; cette dérivée est, par suite, bornée tant que  $b \neq 1$  et tant que  $|a|$  et  $b$  sont bornés; cela montre que, moyennant les hypothèses faites sur  $a$  et  $b$ , la fonction  $\mathcal{R}\Pi_2(e^{i\delta})$  vérifie une condition de

de rendre le résultat final indépendant de cette hypothèse en effectuant sur  $t$  une transformation du type

$$\frac{kt-1}{k-t} = -\frac{1}{2} \left( t_1 + \frac{1}{t_1} \right),$$

où  $k$  désigne une constante réelle, supérieure à 1 mais inférieure au plus petit des paramètres  $|a|$  et  $b$ . Cette transformation n'altère pas l'image de l'obstacle dans le plan  $t_1$ ; mais au point  $t_1 = 0$  correspondra cette fois le point  $t = k$ ; on achèvera en reprenant les raisonnements du texte. Toutefois, dans ce cas, les formules et les calculs deviendraient plus compliqués.

Lipschitz dans tout l'intervalle  $0 \leq \delta \leq \pi$ . Comme  $\mathcal{R}\Pi_2(t_1)$  est une fonction harmonique régulière dans tout le cercle  $|t_1| < 1$ , il en résulte que la fonction conjuguée  $\mathcal{I}\Pi_2(t_1)$  vérifiera une condition de Hölder, d'exposant aussi voisin de l'unité qu'on le veut, pour  $|t_1| \leq 1$  (cf. le théorème de Fatou et de Priwaloff, § 11). Ainsi  $\Pi_2(t_1)$  est une fonction continue pour  $|t_1| \leq 1$ , nulle, d'après sa définition même pour  $t_1 = e^{i\delta_0}$ ; elle est donc bornée en valeur absolue pour  $|t_1| \leq 1$  <sup>(113)</sup>. D'un autre côté, l'expression (3.30') de  $\Pi_1(t_1)$  prouve que la fonction  $\mathcal{I}[\Pi_1(t_1) - \Pi_2(t_1)]$  est bornée le long du demi-cercle  $t_1 = e^{i\delta}$ ,  $0 \leq \delta \leq \pi$  moyennant les hypothèses faites; cela montre que le long de ce demi-cercle  $\Pi_1(t_1)$  est supérieurement bornée; il en est donc de même de l'expression

$$\int_{-1}^{+1} \Gamma(t) (t - t_0) dt. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons déjà fait observer que les hypothèses  $|a| \leq \text{const.}$  et  $b \leq \text{const.}$  ne sont pas essentielles à la démonstration. Nous pouvons donc énoncer :

Supposons qu'il existe une solution du problème du sillage posé relativement à la configuration caractérisée par les éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$  : lorsque la différence  $\beta - \alpha$  est supérieurement bornée et lorsque l'une, au moins, des distances  $d_1$  et  $d_2$ , pour fixer les idées,  $d_1$ , est bornée inférieurement par une constante positive non nulle, la valeur correspondante du paramètre  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$  sera inférieure à une quantité finie, dépendant d'ailleurs de  $(\beta - \alpha)$  et de  $d_1$ .

*Remarque.* — Il importe de noter que notre conclusion ne suppose pas : 1° que  $l(t)$  soit continue; 2° que les paramètres  $(b - 1)$  et  $|a + 1|$  soient majorés; il faut que l'un d'eux seulement soit minoré par un nombre positif non nul. Pour limiter  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$ , nous ne sommes appuyés que sur le fait que les quantités  $\Psi[l(t)]$  et  $\beta - \alpha$  étaient supérieurement bornées. Cette constatation met bien en lumière l'importance et la généralité du raisonnement que nous venons d'employer et qui

---

(113) Moyennant, bien entendu, les hypothèses faites sur  $b$  et  $a$ .



peut servir dans l'analyse de cas plus généraux [*cf.* § 22 et notamment le renvoi <sup>(96)</sup>].

**26. CONSTRUCTION D'UN MODULE DE CONTINUITÉ POUR LA FONCTION  $\Psi[l(t)]$ .**

— Supposons toujours le problème du sillage résolu; soient les éléments  $l(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  qui correspondent aux éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$  donnés *a priori*. D'après les hypothèses faites sur l'obstacle,  $\Psi[l(t)]$  vérifie les conditions

$$0 \leq \Psi[l(t)] \leq \pi.$$

Ces inégalités entraînent, d'après le théorème I du paragraphe 16, la conséquence fondamentale suivante : l'intersection de toute parallèle à  $Ox$  avec l'ensemble obstacle-lignes libres se réduit à un point unique <sup>(114)</sup>. Le domaine  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement sera limité par un contour sans points doubles.

Cela posé, considérons deux points,  $M$  et  $M'$ , de l'obstacle d'affixes respectifs  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ ; soient  $t$  et  $t'$  les affixes des points du segment  $(-1, +1)$  qui leur correspondent dans le plan  $z$ . Construisons alors la sphère de Riemann,  $\Sigma$ , dont le diamètre sera égal à la longueur  $\beta - \alpha$  du profil et tangente en  $M'$  au plan  $z$ . Comme au paragraphe 24, nous appellerons  $P$  le point de  $\Sigma$  opposé à  $M'$  et  $\Gamma$  la projection stéréographique relativement à  $P$  du domaine  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement. Le contour limitant  $\mathcal{A}$  étant, on l'a vu, dépourvu de points doubles, la frontière  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  sera une courbe fermée sans point double. L'usage que nous ferons de cette proposition montrera le rôle capital de l'hypothèse  $|\Psi[l]| \leq \pi$  qui nous a permis de l'établir. Appliquons aux domaines  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$ , représentés conformément l'un sur l'autre, le lemme du paragraphe 20, en admettant que  $t < t'$  (c'est-à-dire  $y < y'$ ) et en posant

$$t_1 = \infty, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = t, \quad t_4 = t'.$$

Cela revient à prendre respectivement pour arcs  $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$  et  $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$  de  $\Gamma'$

<sup>(114)</sup> Toutefois l'obstacle peut contenir des segments de droites parallèles à  $Ox$  pourvu que ces segments soient étrangers à ses extrémités  $B$  et  $C$ .

les images de l'arc  $\widehat{P_2M}$  de l'obstacle d'une part, et l'image de l'ensemble formé par l'arc  $\widehat{M'P_1}$  de  $\widehat{P_2P_1}$ , la ligne libre  $\lambda_1$  et la paroi  $\mu_1$ , d'autre part. De l'allure des lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  <sup>(115)</sup>, il résulte que leurs images  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$  sur  $\Sigma$  sont extérieures à la portion de  $\Sigma$  comprise entre deux plans parallèles à  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et passant l'un par P et P<sub>1</sub>, l'autre par P et P<sub>2</sub>, portion qui contient l'obstacle.

Une discussion analogue à celle du paragraphe 24 montre alors que la plus courte distance sphérique  $\Lambda(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1})$  est minorée par la quantité  $\frac{|y' - y|}{2}$ . Comme dans notre cas l'aire  $\sigma$  de  $\Gamma$  est majorée par  $\frac{\pi(\beta - \alpha)^2}{2}$ , (3. 1) et (3. 1') permettent d'écrire

$$|y(t') - y(t)| \leq \frac{2\sqrt{2}\pi(\beta - \alpha)}{\left|\log \frac{1}{|t - t'|}\right|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{pour } -1 \leq t \leq t' \leq +1,$$

inégalité qui fournit, pour l'ordonnée  $y(t)$ , un module de continuité tout le long de l'obstacle, points de détachement compris. Des hypothèses faites sur l'obstacle il résulte (cf. § 22) que  $l[\gamma(t)]$ , envisagée comme une fonction de  $t$ , est continue pour  $-1 \leq t \leq 1$ . Ce résultat reste valable même pour  $d_1 = 0$ ; il joue un rôle capital dans la suite (cf. § 29). En combinant de tels raisonnements avec ceux du paragraphe 21, on établirait tout pareillement l'existence d'une constante K telle que l'inégalité

$$\Lambda(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1}) \geq K |x(t) - x(t')|$$

soit vérifiée le long de tout arc de  $\widehat{P_2P_1}$  sur lequel  $x(t)$  serait une fonction monotone de son argument. (Toutefois, la limitation précédente serait en défaut lorsque l'image d'un des points  $\alpha_3$  ou  $\alpha_4$  de  $\Sigma$  se confond avec P<sub>2</sub> ou P<sub>1</sub>; voir les conclusions du paragraphe 22 concernant les voisinages des points de détachement.) Il en résulterait que  $x(t)$  le long de tels arcs appartient bien à l'espace  $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}(t)$ .

Utilisons maintenant l'hypothèse de l'existence et de la continuité

---

(115) Dont l'intersection avec les droites  $y = \text{const.}$  se réduit à un point unique.

de  $\Psi'(l)$  le long de  $\widehat{P_2 P_1}$  (<sup>116</sup>). De ce résultat, les méthodes du paragraphe **22** permettent de déduire, dans l'ordre, les conséquences suivantes : la fonction  $\Psi[l(t)]$  est continue et vérifie une condition  $\mathcal{L}_1(t)$  dans tout l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ , extrémités comprises;  $\Psi[l(t)]$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(t)$ , où  $n$  désigne un nombre positif arbitrairement grand, dans tout l'intervalle  $-1 < t < 1$ , extrémités exclues; enfin,  $\Psi[l(t)]$  vérifiera la condition  $\mathcal{L}_n(t)$  dans tout l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$  extrémités comprises lorsque  $\Psi[l(-1)] \neq \pi$  et  $\Psi[l(+1)] \neq 0$  (<sup>117</sup>).

Ainsi, toutes les fonctions  $\Psi[l(t)]$  correspondant à l'ensemble des obstacles de l'espèce considérée doivent posséder le même module de continuité  $\mathcal{L}_n(t)$ ; ces fonctions sont donc également continues. D'après le théorème d'Arzela (<sup>118</sup>), les  $\Psi[l(t)]$  forment une famille compacte de fonctions; cela veut dire que, de toute suite infinie de ces fonctions, on pourra extraire une suite partielle convergeant uniformément, sur tout l'intervalle commun de définition, vers une fonction limite appartenant à l'espace  $\mathcal{L}_n(t)$ .

Il est essentiel de noter que cet énoncé ne repose pas sur l'hypothèse que les éléments donnés  $d_1$  et  $d_2$  soient inférieurement bornés par une constante positive non nulle.

Le résultat précédent entraîne la conséquence fondamentale suivante. Étant donnée, dans le plan  $z$ , une configuration caractérisée par les éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ , supposons qu'on ait déterminé les éléments inconnus,  $l(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  correspondants; si les distances  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas nulles, je dis que la dérivée  $\frac{dl(t)}{dt}$  existe et vérifie, dans l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ , une condition  $\mathcal{L}_n(t)$ .

En effet : 1° l'inégalité (3.28), jointe aux relations (1.6) et (1.8), montre que  $d_1$  et  $d_2$  n'étant pas nuls, les paramètres  $q$ ,  $|a|$  et  $b$  sont

(<sup>116</sup>) Au paragraphe **22** nous avons vu que ces hypothèses ne sont pas nécessaires pour justifier les conclusions du texte; lorsque  $\Psi'(l)$  n'existe pas, celles-ci sont, en particulier, valables si  $\varepsilon < \Psi(l) < \pi - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant positif (*cf.* § **22**) et si les points  $P_1$  et  $P_2$  coïncident respectivement avec C et B.

(<sup>117</sup>) Rappelons que (*cf.* § **23**) ces hypothèses ne sont pas indispensables pour la démonstration des théorèmes d'existence.

(<sup>118</sup>) On trouvera un exposé de la question dans la thèse de M. Montel.

distincts de 1; le domaine  $d$  du plan  $Z$  ne dégénère pas; la correspondance  $t = t(Z)$  a un sens et est analytique pour  $q < |Z| \leq 1$ .

2° D'après le paragraphe 11 la fonction analytique  $\Omega_0(Z)$  définie dans  $d$  à l'aide des formules (1.23) et (1.27) vérifie dans la demi-couronne et sur les frontières  $|Z| = 1$  et  $|Z| = q$  de celle-ci une condition  $\mathcal{L}_n(Z)$ ; car la partie réelle  $\Theta_0(X, Y)$  de  $\Omega_0(Z)$  se réduit pour  $Z = e^{is}$  à  $\Psi[l(t[s])]$ , or cette dernière vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$ , donc aussi  $\mathcal{L}_n(t)$ , d'indice arbitrairement grand. Il en résulte que la fonction  $\Omega_0(t) = \Theta_0(t) + iT_0(t)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(t)$  dans tout son domaine de définition  $\mathfrak{C}$ , le point à l'infini excepté.

3° Moyennant les formules (1.14), (1.28) et (1.29), la correspondance entre les plans  $z$  et  $t$  s'écrit

$$(3.31) \quad |dz| = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi|a|.b} e^{-T_0(t)} \frac{|t - t_0| \left| \sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s_0 + s) \right] \right|}{\left| \sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right] \right|} \frac{|a|.b}{|t - a||t - b|} dt.$$

D'après l'alinéa 1°, les paramètres  $|a|$ ,  $b$  et  $q$  sont différents de 1; les facteurs

$$\frac{t - t_0}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \quad \text{et} \quad \frac{|a|.b}{|t - a||t - b|}$$

sont des fonctions analytiques régulières dans le voisinage et sur l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ , cela quel que soit  $t_0$  <sup>(119)</sup>. Le facteur  $e^{-T_0(t)}$  appartient, d'après l'alinéa 2°, à l'espace  $\mathcal{L}_n(t)$  dans tout son domaine de définition, le point à l'infini excepté. Enfin, le facteur  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$  est borné supérieurement (cf. le § 25). Le rapprochement de ces remarques justifie notre assertion <sup>(120)</sup>.

Du résultat précédent découle la conséquence suivante : la fonction inconnue  $l(t)$  possède une norme, au sens défini au paragraphe 25;

<sup>(119)</sup> Il résulte des raisonnements du paragraphe 14 que ces conclusions restent valables même lorsque  $|a|$  et  $b$  augmentent indéfiniment. Rappelons que  $t_0$  est compris entre  $-1$  et  $+1$ ; les points  $t = t_0$  et  $Z_0 = e^{is_0}$  se correspondent; le zéro de  $t - t_0$ , considéré comme fonction de  $s$ , pour  $s = s_0$  est simple.

<sup>(120)</sup> Voir le paragraphe 29 où l'on étend ce théorème à certain cas où  $|a|$  et  $b$  tendent vers 1.

cette norme est bornée supérieurement en fonction des bornes supérieures de  $(\beta - \alpha)$ ,  $\frac{1}{d_1}$ ,  $\frac{1}{d_2}$ , la fonction  $\Psi(l)$  vérifiant les conditions qui lui ont été imposées au paragraphe 23.

**27. ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES PARAMÈTRES  $a$  ET  $b$  LORSQUE LES DISTANCES  $d_1$  ET  $d_2$  TENDENT VERS ZÉRO OU DEVIENNENT INFINIES.** — Supposons encore le problème résolu; soient  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$  les éléments connus,  $l(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  les éléments inconnus *a priori*, supposés déterminés. Faisons varier les éléments connus de manière que les conditions qui leur ont été imposées au paragraphe 23 soient vérifiées au cours de cette transformation de la configuration. Nous allons montrer d'abord que si le paramètre  $d_1$  (ou  $d_2$ ) augmente indéfiniment, le paramètre correspondant  $b$  (ou  $|a|$ ) croît au delà de toute limite et réciproquement.

La démonstration repose sur la construction d'une minorante du quotient  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$  et sur un lemme. Traçons dans le domaine  $\mathcal{C}$  un chemin régulier  $C_1$ , joignant un point quelconque du segment  $(1, +\infty)$  de l'axe réel, mais autre que  $t=1$ ,  $t=b$ ,  $t=\infty$ , à un point quelconque du segment  $(-\infty, -1)$ , autre que  $t=-\infty$ ,  $t=a$ ,  $t=-1$ , tel que la longueur de la ligne  $C_1$  soit finie; il en résulte que chacun de ses points est à distance finie. Lorsque les paramètres  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas nuls, la correspondance  $z = z(t)$  fera correspondre à  $C_1$  un chemin régulier  $C$  situé à distance finie dans le domaine  $\mathcal{A}$  et reliant un point de  $\lambda_1$  ou de  $\mu_1$  à un point de  $\lambda_2$  ou de  $\mu_2$ . D'après cela, la longueur  $L$  du chemin  $C$  est bornée inférieurement par la différence des ordonnées des extrémités  $B$  et  $C$  de l'obstacle, différence qui, par hypothèse, n'est pas nulle (*cf.* le § 23). Tenant compte de (3.31), on peut écrire

$$(3.32) \quad \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a|.b} \int_{C_1} e^{-\tau |t - t_0|} \frac{|a|.b}{|t - a| |t - b|} |dt| \geq \text{const.}$$

La longueur du chemin d'intégration  $C_1$  étant finie et le facteur

$$\frac{|a|.b}{|t - a| |t - b|}$$

étant supérieurement borné le long de  $C_1$  ainsi que le module  $|t|$ , d'après la façon même dont  $C_1$  est défini, l'intégrale qui figure au premier membre est supérieurement bornée puisque  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas nuls (*cf.* le § 26); il en résulte que le facteur positif  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$  est borné inférieurement par une constante non nulle.

C. Q. F. D.

Ainsi, le paramètre  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$  est borné en module, tant supérieurement qu'inférieurement; mais il importe de noter que la deuxième limitation n'est valable que si les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont inférieurement bornées.

Sous cette dernière hypothèse, on peut énoncer le lemme suivant :

LEMME. — *La valeur de l'intégrale* <sup>(121)</sup>

$$(1.32) \quad I_1 = \int_1^b \sin \Omega(t) \frac{b}{b-t} \frac{|a|}{t-a} (t - t_0) dt$$

augmente indéfiniment si la configuration des éléments rigides dans le plan  $z$  se déforme de manière que le paramètre  $b$  correspondant croît au delà de toute limite.

La réciproque est vraie. Nous appellerons  $I_2$  la même intégrale étendue à l'intervalle  $(a, -1)$ ; un énoncé tout analogue s'applique à  $I_2$ . En effet : 1° d'après (1.51) et (1.16), on peut écrire

$$\Omega[t(Z)] = \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s) \left[ \begin{array}{l} \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)} + \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)} \\ - \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s_0}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s_0}{2\pi} \right)} - \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi} \right)} \end{array} \right] ds,$$

formule où la fonction  $\Phi(s)$  se déduit de  $\Psi[l(s)]$  au moyen des relations du paragraphe 12. Rappelons que d'après les raisonnements du paragraphe 16, l'élément différentiel de l'intégrale précédente,

---

(121) Voir le paragraphe 12 pour l'étude du comportement de  $I_1$  pour  $t = b$ .

divisé par  $i$ , n'est pas négatif dans l'intervalle  $-1 \leq Z \leq -q$ , c'est-à-dire le long de son image  $1 \leq t \leq b$  dans le plan  $t$ .

2° Les distances  $d_1$  et  $d_2$ , différant de zéro, le paramètre  $q$  est différent de 1; la fonction analytique  $\theta(\nu, q)$  correspondante est donc régulière en  $\nu$  et en  $q$  ( $\nu$  compris pour  $q = 0$ ). D'autre part, on a vu au paragraphe 16 que l'expression qui figure entre crochets au second membre, divisée par  $i$ , ne s'annule que pour  $s = s_0$ ; il suit de là que son module peut être borné inférieurement en fonction de  $|s - s_0|$  en tout point intérieur à l'intervalle  $-1 < Z < -q$ .

3° Par hypothèse (cf. § 23),  $\Psi(l)$  ne se réduit pas identiquement à zéro dans l'intervalle  $\alpha \leq l \leq \beta$ . Dès lors, la fonction  $\Psi[l(s)]$  étant continue pour  $0 \leq s \leq \pi$  (cf. § 26), il existe un nombre positif  $\varepsilon$  non nul tel que la mesure de l'ensemble des points de l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ , où  $|\Phi(s)|$  est supérieur à  $\varepsilon$ , est supérieure à une constante positive convenable.

4° En combinant les résultats des alinéas 1°, 2° et 3°, on voit que la fonction  $\Omega[t(Z)]$ , nulle pour  $Z = -q$ , est bornée inférieurement en tout point  $Z$  intérieur à l'intervalle  $-1 < Z < -q$ . Or, la correspondance  $t = t(Z)$  est analytique et régulière dans cet intervalle si  $q$  est distinct de 1 (cf. § 14); par suite, à tout point intérieur à l'intervalle  $-1 < Z < -q$ , correspondra un point intérieur à l'intervalle  $1 < t < b$ ;  $\Omega(t)$  peut donc être bornée inférieurement en tout point intérieur à l'intervalle  $1 < t < b$ .

5° Par hypothèse, on a

$$|\Phi(s)| \leq \pi;$$

le principe du maximum, appliqué à la fonction  $\Omega[t(Z)]$ , permet d'affirmer que  $\Omega(Z)$  est distincte de  $\pi$  en tout point  $Z$  intérieur à l'intervalle  $-1 < Z < -q$ .

6° En combinant les résultats des alinéas 4° et 5° on voit que le module de  $\sin \Omega(t)$  est inférieurement borné en tout point  $t$  du segment  $1, b$  distinct de ses extrémités  $b$  et 1. Il suit de là que la valeur absolue de l'élément différentiel de l'intégrale  $I_1$  est minorée en tout point intérieur de l'intervalle d'intégration  $1 < t < b$ ; cela montre que  $I_1$  augmente indéfiniment avec la mesure  $(b - 1)$  de cet intervalle.

La réciproque est évidente; le facteur

$$\frac{\sin \Omega(t)}{b-t}$$

de l'élément différentiel positif de  $I_1$  étant borné pour  $t=b$  (cf. § 12), l'intégrale  $I_1$  est supérieurement bornée si le paramètre  $b$  reste fini.

Tout pareillement, on établirait que  $I_2$  augmente indéfiniment avec  $|a|$ , et réciproquement. C. Q. F. D.

*Remarque.* — De la démonstration qui précède, il résulte que  $I_1$  et  $I_2$  sont inférieurement bornés si  $b$  et  $|a|$  sont différents de 1.

Cela étant, il vient, d'après (1.33), (1.33') et (3.32)

$$(3.33) \quad \begin{cases} d_1 = \psi_1 + \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a|.b} I_1 = \psi_1 + \gamma_1, \\ d_2 = \psi_2 + \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a|.b} I_2 = \psi_2 + \gamma_2. \end{cases}$$

Supposons que la configuration donnée dans le plan  $\varepsilon$  se déforme de manière que  $d_1$  augmente indéfiniment,  $d_2$  restant fini mais différent de zéro. La deuxième équation (3.33) montre alors que chacun des termes positifs

$$\psi_2 \quad \text{et} \quad \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b} I_2$$

reste borné. Comme le quotient

$$\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$$

est à la fois majoré et minoré, il en résulte que

1° l'intégrale  $I_2$  correspondante demeure supérieurement bornée au cours de la transformation envisagée; le lemme précédent montre alors que le paramètre  $|a|$  reste nécessairement fini;

2° la distance  $\gamma_1$  et l'intégrale  $I_1$  deviennent infinies simultanément. Par ailleurs, la première relation (3.33), dans laquelle les deux termes du second membre sont positifs, prouve que si  $d_1$  augmente indéfiniment, l'un, au moins, des paramètres  $\psi_1$  ou  $\gamma_1$ , c'est-à-dire  $\psi_1$  ou  $b$ , augmente indéfiniment. Or  $|a|$  et  $\psi_2$  étant bornés supérieurement et  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$  étant limité dans les deux sens, il est clair qu'au cours de la transformation considérée  $\psi_1$  et  $b$  doivent tendre vers



l'infini simultanément, et cela de manière que le quotient  $\frac{\psi_1}{b}$  soit borné tant supérieurement qu'inférieurement <sup>(122)</sup>.

Réciproquement, supposons que la configuration donnée dans le plan  $z$  se déforme de manière que le paramètre  $b$  correspondant augmente indéfiniment,  $|a + 1|$  restant limité dans les deux sens. Dans ces conditions l'un, au moins, des paramètres  $\psi_1$  ou  $\psi_2$  doit croître au delà de toute limite, puisque le rapport  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$  reste borné dans les deux sens; dans tous les cas, les quotients  $\frac{\psi_1}{b}$  et  $\frac{\psi_2}{b}$  restent finis. Or, de deux inégalités [cf. (1.4'')] ]

$$\text{const.} < \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b} < \text{const.} \quad \text{et} \quad \left| \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \right| < 1,$$

on déduit, en multipliant membre par membre,

$$\left| \frac{\psi_1}{b} - \frac{\psi_2}{|a|} \right| < \text{const.}$$

Cela montre que  $\frac{\psi_1}{b}$  et  $|a|$  étant bornés supérieurement,  $\psi_2$  est borné supérieurement. Les formules (3.33) prouvent alors qu'au cours de la transformation envisagée, la paroi  $\mu_1$  s'éloigne indéfiniment alors que la paroi  $\mu_2$  reste à distance finie.

Ainsi, lorsque la configuration donnée dans le plan se déforme de manière que l'un des paramètres correspondants  $d_1$ ,  $\psi_1$  ou  $b$  tende vers l'infini,  $d_2$  restant fini, les deux autres croissent au delà de toute limite, et cela de façon que le quotient de deux paramètres quelconques soit fini; les paramètres  $|a|$  et  $\psi_2$  restent bornés au cours de la transformation.

Tout pareillement, on établirait que si  $d_1$  et  $d_2$  (ou  $b$  et  $|a|$ , ou  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ) augmentent indéfiniment,  $b$ ,  $|a|$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  correspondants augmentent indéfiniment de manière que

$$\left| \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b} \right| < \text{const.}, \quad \left| \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \right| < 1.$$

---

<sup>(122)</sup> Ces conclusions résultent aussi, en partie, de la discussion du système (1.4'').

A la limite, on obtiendra un sillage correspondant à l'obstacle donné placé en fluide indéfini. On observera que tous ces résultats sont en complet accord avec les conclusions des paragraphes 14 et 24.

Il est bon de rappeler que la discussion qui précède repose essentiellement sur l'hypothèse suivante : la distance  $d_1$  (nous prendrons, pour fixer les idées  $d_1 \leq d_2$ ) ne devient pas nulle au cours des transformations du plan  $z$  que nous avons envisagées; dans ce cas (*cf.* § 24) les paramètres  $|a + 1|$  et  $b - 1$  sont bornés inférieurement et les formules de transformation utilisées ne deviennent pas illusoires. Nous nous proposons de compléter notre discussion en montrant que si la configuration du plan  $z$  se déforme de manière que  $d_1$  tende vers zéro, le paramètre  $b$  correspondant tend vers 1; le théorème réciproque a été déjà établi au paragraphe 24 [*cf.* (3.28)]. En effet, d'après (3.33), le terme

$$y_1 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a| \cdot b} I_1$$

doit s'annuler avec  $d_1$ . Or, raisonnons par l'absurbe et supposons que  $b$  ne tende pas dans ces conditions vers 1; il résulterait des minoration de  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$  et de  $I_1$ , que nous avons effectuées au cours de ce paragraphe (et qui seraient valables puisque  $b \neq 1$ ) que  $y_1$  ne tendrait pas vers zéro; cette contradiction justifie notre assertion.

**28. THÉORÈMES D'EXISTENCE.** — Rappelons brièvement les principaux résultats obtenus par MM. Leray et Schauder dans le domaine des équations fonctionnelles. Soit un espace abstrait  $E$  que nous supposons linéaire, normé, complet (au sens de M. Banach); soient  $x$  un élément de cet espace et  $F(x)$  une transformation fonctionnelle complètement continue<sup>(123)</sup> (vollstetig, au sens de M. F. Riesz) définie sur  $E$  et opérant sur  $x$ .

<sup>(123)</sup> Nous croyons utile de préciser le sens des termes employés.

Un espace abstrait  $E$  est dit linéaire si, étant donnés deux éléments  $x$  et  $x'$  de  $E$ ,

1° On peut définir la somme  $x + x'$ , l'élément résultant ainsi obtenu appar-

Ceci posé, envisageons l'équation fonctionnelle

$$(3.34) \quad x = F(x)$$

à laquelle nous associerons la transformation

$$(3.35) \quad y = x - F(x).$$

tenant à E; l'opération d'addition est commutative. Cela entraîne l'existence de l'élément zéro.

2°  $m$  et  $m'$  désignant deux nombres réels, on peut définir les produits tels que  $mx$ ,  $m'x'$ , etc.; les éléments ainsi introduits doivent appartenir à E. L'opération de multiplication ainsi définie est distributive; on doit donc avoir

$$(m + m')(x + x') = mx + m'x + mx' + m'x'.$$

Un espace abstrait est dit normé si, à tout élément  $x$  de E, on peut attacher un nombre positif ou nul, que nous désignerons par le symbole  $\|x\|$  et que nous appellerons « norme de  $x$  », tel que :

- 1° l'égalité  $\|x\| = 0$  entraîne  $x = 0$ ;
  - 2° l'axiome du « triangle »  $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$  est vérifié;
  - 3° on a,  $m$  étant un nombre réel,
- $$\|mx\| = |m| \|x\|.$$

Un espace abstrait est complet si l'égalité

$$\lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty} \|x_p - x_q\| = 0$$

entraîne l'existence d'un élément  $x$  tel que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x - x_p\| = 0.$$

Relativement à un espace linéaire, normé et complet, nous introduisons les définitions suivantes :

Un ensemble C d'un espace abstrait E est dit compact lorsque toute suite infinie d'éléments de C a au moins un élément limite qui appartient à E.

Une transformation fonctionnelle  $F(x)$ , définie dans l'espace E et opérant sur l'élément  $x$  de cet espace, est dite complètement continue si elle est continue relativement à son argument et si elle transforme tout ensemble borné de E en un ensemble compact de E. Lorsque E est constitué par l'ensemble des fonctions possédant un même module de continuité, on peut attacher la norme  $\|x\|$  à tout élément  $x$  de E en posant

$$\|x\| = \text{Max. } |x|;$$

alors la transformation  $F(x)$  sera, d'après le théorème d'Arzela, complètement

Soit alors  $D$  un domaine borné de l'espace  $E$  et supposons que la frontière  $D'$  de  $D$  ne contient aucune solution de (3.34); avec MM. Leray et Schauder, nous appellerons indice total  $i$  des solutions de l'équation (3.34) contenues dans  $D$  (<sup>124</sup>), le degré topologique  $d[x - F(x), D, 0]$  au point zéro de la transformation (3.35) opérant sur  $D$ . Cette définition est légitime puisque les hypothèses faites entraînent l'existence du nombre  $d[x - F(x), D, 0]$ . Admettons

---

continue si elle est continue. Dans ce cas, en effet, la transformation  $F(x)$  transforme toute famille bornée (en norme) de fonctions de  $E$  en une famille bornée (en vertu de la continuité) de fonctions possédant une égale continuité, c'est-à-dire compacte.

Cette remarque s'applique, en particulier, à la transformation  $V$  définie au paragraphe 23.

(<sup>125</sup>) Faute de place nous ne pouvons développer ici la théorie du degré topologique due à M. Brouwer (*Mathematische Annalen*, t. 71, 1911) et généralisée depuis par MM. Schauder et Leray; nous nous contenterons de rappeler les propriétés fondamentales du degré qui font comprendre l'importance de cette notion.

Considérons d'abord, avec M. Brouwer, un ensemble ouvert  $\omega$  situé dans l'espace à  $n$  dimensions  $E_n$ ; nous supposerons  $\omega$  borné et nous désignerons par  $\omega'$  sa frontière. Soit alors  $F(x)$  une transformation continue (et non plus complètement continue) opérant sur  $E_n$  et faisant correspondre à tout point  $x$  de  $E_n$  un point  $x'$  appartenant au même espace; nous appellerons  $F(\omega)$  et  $F(\omega')$  les ensembles de  $E_n$ , images respectives des ensembles  $\omega$  et  $\omega'$  dans la correspondance  $x' = F(x)$ . M. Brouwer montre que dans ces conditions on peut définir en chaque point  $x = a$  de  $F(\omega)$  étranger à  $F(\omega')$ , un nombre entier, positif ou négatif  $d[F, \omega, a]$  [la transformation  $x' = F(x)$  peut recouvrir le point  $a$  un certain nombre de fois; en affectant chaque recouvrement d'un signe, selon une loi que nous n'aurons pas à utiliser, le degré  $d[F, \omega, a]$  se définit, en gros, comme la différence entre les nombres de recouvrements positifs et négatifs; dans la suite, nous n'aurons à considérer que le cas où le degré  $d[F, \omega, a]$  correspondant vaut  $\pm 1$ ], que nous appellerons degré topologique de la transformation au point  $x = a$  relativement à  $\omega$  et qui possède trois propriétés suivantes :

1° Si  $d[F, \omega, a]$  n'est pas nul, le point  $a$  fait partie de l'ensemble  $F(\omega)$ .

2° Le degré  $d[F, \omega, a]$  reste constant lorsque le point  $a$ , la transformation  $F(x)$  et l'ensemble  $\omega$  varient continûment, pourvu que le point  $a$  demeure constamment étranger à l'ensemble  $F(\omega')$  au cours de la déformation envisagée.

3° Si  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  sont deux ensembles ouverts, sans points communs intérieurs,

alors que l'on puisse construire les transformations auxiliaires

$$(3.34') \quad \gamma = F(x, k)$$

$$(3.35') \quad \gamma = x - F(x, k) \quad \text{avec } 0 \leq k \leq 1,$$

dépendant d'un paramètre réel  $k$  et jouissant des propriétés suivantes :

1° Pour chaque valeur de  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) la transformation (3.35') est complètement continue relativement à l'élément  $x$  de  $D$  et uniformément continue relativement au paramètre  $k$ ; on peut donc définir l'indice  $i(k) = d[x - F(x, k), D, 0]$  pour toute valeur de  $k$  appartenant à l'intervalle  $0 \leq k \leq 1$ .

2° Pour toute valeur de  $k$ ,  $0 \leq k \leq 1$ , les solutions éventuelles de (3.34') (obtenue en remplaçant  $\gamma$  par  $x$ ) sont bornées *a priori*; pendant la déformation de l'équation qu'entraîne la variation de  $k$ , aucune de

dont les frontières seront notées  $\omega'_1$  et  $\omega'_2$ , on a

$$d[F, \omega, a] = d[F, \omega_1, a] + d[F, \omega_2, a],$$

pourvu que  $a$  soit étranger à  $F(\omega'_1)$  et à  $F(\omega'_2)$ .

Ceci posé, résoudre l'équation fonctionnelle

$$(a) \quad x = F(x)$$

revient, géométriquement, à chercher un point  $x$  de  $E_n$  qui soit sa propre image dans la correspondance  $x' = F(x)$ . Supposons qu'on ait réussi à montrer *a priori* que le module de la solution éventuelle  $x = a$  de l'équation (a) est borné; le point  $a$  appartient donc à un certain ensemble borné  $\omega$  de  $E_n$ . Ce résultat permet de définir le degré  $d[F, \omega, a]$  de la transformation  $x' = F(x)$  en chaque point de  $\omega$  puisque  $F(a)$  sera alors étranger à  $F(\omega')$ ; et pour établir l'existence d'une solution de (a) il suffira d'établir l'existence d'un point de  $a$  de  $\omega$  en lequel  $d[F, \omega, a]$  diffère de zéro (*cf.* la première propriété du degré). Pour mettre en évidence l'existence d'un tel point, on cherchera à faire varier continûment la transformation  $F(x)$  de manière que les solutions éventuelles de (a) restent intérieures au même ensemble  $\omega$ , c'est-à-dire n'en atteignent pas la frontière  $\omega'$ . D'après la deuxième propriété fondamentale du degré topologique, le nombre  $d[F, \omega, x]$ , où  $x$  désigne un point intérieur à  $\omega$ , reste invariant au cours de cette déformation de (a). Supposons que par ce procédé on puisse réduire (a) à une forme  $x = F_1(x)$  suffisamment simple pour pouvoir établir l'existence d'un point  $a_1$  de  $\omega$  en lequel  $d[F_1, \omega, a_1]$  diffère de zéro. Cela

ces solutions ne franchit la frontière  $D'$ ; dans ces conditions le nombre  $i(k) = d[x - F(x, k), D, 0]$  sera indépendant de  $k$ .

3° On a

$$F(x, 1) = F(x).$$

4° On peut déterminer le nombre  $i(0) = d[x - F(x, 0), D, 0]$  et, par suite, l'indice total  $i$  de la transformation (3.34) dans le domaine  $D$ . (Nous appellerons *conditions L* l'ensemble des conditions que nous venons d'énumérer.)

Dans ces conditions, si  $i(0)$  est différent de zéro,  $i = i(1)$  est différent de zéro; il résulte alors des propriétés fondamentales du degré que l'équation (3.34) possède au moins une solution dans  $D$ . Nous nous proposons d'appliquer ce critère d'existence de MM. Leray

montre qu'il existe au moins un point de  $a$  de  $\omega$  tel que

$$d[F, \omega, a] = d[F_1, \omega, a_1],$$

c'est-à-dire que l'équation (a) admet au moins la solution  $x = a$ . Pour effectuer pratiquement la réduction utilisée de  $F(x)$ , on introduira dans cette transformation un paramètre réel  $k$ , appartenant à l'intervalle  $0 \leq k \leq 1$ , pour fixer les idées. On écrira donc

$$x' = F(x, k)$$

avec

$$F(x, 1) = F(x) \quad \text{et} \quad F(x, 0) = F_1(x).$$

Il sera toujours supposé que la transformation  $F(x, k)$  est uniformément continue relativement à  $k$ ; d'une façon précise, cela veut dire qu'à toute valeur  $k$  telle que  $0 \leq k \leq 1$  et à tout nombre positif  $\varepsilon$  correspond un nombre  $\eta$  tel que l'inégalité  $|k - k'| < \eta$  entraîne

$$|F(x, k) - F(x, k')| < \varepsilon,$$

pourvu que  $x$  appartienne à l'ensemble  $\omega$ .

Lorsque  $F(x)$  désigne une transformation complètement continue (et non plus simplement continue), MM. Leray et Schauder ont réussi à étendre la définition et les propriétés de degré topologique aux transformations du type (3.35) dans le cas où celles-ci opèrent sur les éléments  $x$  d'un espace linéaire, normé, complet  $E$  (et non plus sur un élément de l'espace à  $n$  dimensions  $E_n$ ). Il suit de là que les critères d'existence, que nous venons de rappeler, s'appliquent aux équations (3.35), à condition de substituer partout au terme module celui de norme et au terme de degré celui d'indice, défini dans le texte.

et Schauder aux équations fonctionnelles du problème du sillage et de la proue.

Envisageons d'abord la transformation fonctionnelle

$$(3.36) \quad L(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b],$$

où le symbole  $V$  désigne l'opération définie par le second membre de (3.20). De par la définition même de  $V$ , il est clair qu'étant donné un groupe de ses arguments,  $\Psi(l)$  [ $\Psi(l)$  étant un élément de  $E(\alpha, \beta, l)$ ]  $\alpha, \beta, a$  et  $b$  ( $-\infty \leq a < -1 < 1 < b \leq +\infty$ ), la transformation (3.36) fait correspondre à chaque point  $l(s)$  de l'espace  $E(0, \pi, s)$  (*cf.* § 23) un élément  $L(s)$  du même espace <sup>(125)</sup>. Nous avons constaté par ailleurs que  $|a|$  et  $b$  étant distincts de 1 (*cf.* §§ 12 et 14), l'élément  $L(s)$  ainsi obtenu dépend continûment de  $l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a$  et  $b$ ; il s'ensuit que (3.36) est une transformation continue du type  $x' = F(x)$ . De plus, il suffit de se reporter aux calculs mêmes (*cf.* § 23) effectués pour déterminer les paramètres  $\psi_1$  et  $\psi_2$  à partir des éléments  $l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a$  et  $b$  pour constater que le paramètre  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b}$  et, par suite, les grandeurs  $\left| \frac{dL(s)}{ds} \right|$  et  $|L(s)|$  sont majorés au moyen des quantités  $\|l(s)\|, \|\Psi(l)\|, |\alpha|$  et  $|\beta|$ , les paramètres  $a$  et  $b$  correspondants étant astreints à être différents de 1 (*cf.* §§ 14, 23, 25, 26). Il en résulte qu'à tout ensemble borné <sup>(126)</sup> d'éléments  $l(s)$  de l'espace  $E(0, \pi, s)$ , l'opération (3.36) fait correspondre un ensemble borné situé dans le même espace; cet ensemble sera compact, puisque le principe de Bolzano-Weierstrass s'applique à  $E(0, \pi, s)$ ; cela montre

<sup>(125)</sup> Rappelons, en effet, que d'après la définition même de  $F$ , l'élément  $L(s)$  est obtenu à partir de l'équation (1.31) de M. Villat, où l'on remplace le premier membre par  $\frac{dL(s)}{ds}$ ; si donc  $|a|$  et  $b$  sont distincts de 1, et  $\Psi(l)$  et  $l(s)$  sont des éléments de  $E(\alpha, \beta, l)$  et  $E(0, \pi, s)$  respectivement,  $\frac{dL(s)}{ds}$  existe et est continue;  $L(s)$  appartient donc bien à  $E(0, \pi, s)$ .

Précisons aussi que  $l(s)$  désigne maintenant un élément quelconque de  $E(0, \pi, s)$ :  $l(s)$  n'est plus nécessairement une fonction croissante de  $s$  lorsque  $0 \leq s \leq \pi$ .

<sup>(126)</sup> Nous entendons par là que les éléments de l'ensemble considéré ont des normes bornées.

que (3.36) est une transformation complètement continue, opérant dans l'espace linéaire, normé, complet  $E(o, \pi, s)$ , à laquelle s'applique la théorie de l'indice total de MM. Leray et Schauder.

Moyennant les résultats qui précèdent, le lecteur vérifiera aisément que les fonctionnelles définies par les seconds membres des équations (A) et (A') du paragraphe 15 et des équations (3.21) et (3.22) sont continues relativement à chacun de leurs arguments toutes les fois que (3.36) est continue; comme aux éléments  $\Psi(l)$  de  $E(\alpha, \beta, l)$  et  $l(s)$  de  $E(o, \pi, s)$  correspondent des valeurs bornées des fonctionnelles en cause si  $b - 1 > 0$  et  $a + 1 < 0$ , les transformations qu'elles définissent sont même complètement continues.

Cela posé, envisageons dans le plan  $z$  une configuration des éléments rigides, définie par les éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$  assujettis à vérifier les conditions énumérées au paragraphe 23 (dans la suite nous supposerons toujours que ces conditions sont remplies). Au paragraphe 24 on a vu que les paramètres  $|a|$  et  $b$ , caractérisant un mouvement à la Helmholtz (proue ou sillage) correspondant à cette configuration, diffèrent de 1 lorsque aucune des distances  $d_1$  ou  $d_2$  n'est nulle (<sup>127</sup>); dans ce cas, les hypothèses faites sur la courbe-obstacle entraînent l'existence et la continuité de la dérivée  $\frac{dl(s)}{ds}$  (cf. §§ 25 et 26). Nous pouvons donc affirmer, *a priori*, qu'étant donné une configuration définie par  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$  ( $\alpha$  et  $\beta$  bornés,  $d_1$  et  $d_2$  distincts de zéro) :

- 1° les inconnues  $|a|$  et  $b$  correspondantes diffèrent de 1;
- 2° l'inconnue  $l(s)$  appartient à l'espace  $E(o, \pi, s)$ ; les normes des solutions  $l(s)$  éventuelles sont bornées *a priori*;
- 3° les relations fonctionnelles utilisées pour la mise en équation sont complètement continues.

*Problème du sillage.* — Introduisons, pour faciliter le langage, l'espace abstrait  $E(o, \pi, s, a, b)$  dont un élément  $x$  sera formé par l'ensemble de l'élément  $l(s)$  de  $E(o, \pi, s)$  et de deux constantes  $\frac{1}{b-1}$  et  $\frac{1}{a+1}$ .

---

(<sup>127</sup>) Au cours de ce paragraphe, cette hypothèse sera supposée remplie.



Étant donné deux éléments

$$x = \left[ l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1} \right] \quad \text{et} \quad x' = \left[ l'(s), \frac{1}{b'-1}, \frac{1}{a'+1} \right]$$

de l'espace  $E(o, \pi, s, a, b)$  et deux constantes réelles  $m$  et  $m'$ , nous appellerons combinaison linéaire à coefficients  $m$  et  $m'$  de  $x'$  et  $x$ , l'élément de  $E(o, \pi, s, a, b)$  défini par

$$mx + m'x' = \left[ ml(s) + m'l'(s), \frac{m}{b-1} + \frac{m'}{b'-1}, \frac{m}{a+1} + \frac{m'}{a'+1} \right].$$

Nous appellerons norme d'un point de  $E(o, \pi, s, a, b)$  la grandeur

$$\|x\| = \|l(s)\| + \left| \frac{1}{b-1} \right| + \left| \frac{1}{a+1} \right|.$$

Il est clair, dès lors, que l'espace  $E(o, \pi, s, a, b)$  ainsi défini est linéaire, normé et complet. Moyennant ces conventions, le problème du sillage, tel qu'il a été énoncé au paragraphe 23, peut se formuler comme il suit : étant donné un élément  $\Psi(l)$  et  $E(\alpha, \beta, l)$  et quatre constantes  $\alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$ , établir l'existence d'un élément de  $E(o, \pi, s, a, b)$  vérifiant les relations (3.20) et (3.21). Pour appliquer la théorie de MM. Leray et Schauder, nous allons réduire ce système de trois équations à une équation unique du type  $x' = F(x)$ .

Soit alors  $\nu$  une grandeur absolument constante, ayant les dimensions de la distance; les paramètres  $b$  et  $a$  étant des constantes numériques sans dimensions, le système des équations (3.20) et (3.21) peut s'écrire

$$(3.37) \quad \begin{cases} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ \frac{1}{(b-1)} = \frac{1}{(b-1)} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_1} - \frac{1}{D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]} \right\}, \\ \frac{1}{(1+a)} = \frac{1}{(1+a)} - \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_2} - \frac{1}{D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]} \right\}. \end{cases}$$

Grâce à cet artifice d'écriture, les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des relations précédentes feront correspondre à un ensemble d'éléments  $l(s), a, b$ , un ensemble d'éléments de même nature; nous pouvons, dès lors, considérer l'ensemble de ces transformations comme une transformation fonctionnelle unique opérant sur

les éléments  $x$  de l'espace  $E(o, \pi, s, a, b)$ , en sorte qu'en désignant cette transformation par le symbole  $\mathcal{F}\left[x, \Psi(l), \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \alpha, \beta\right]$  les équations (3.27) se réduisent à l'équation unique

$$(3.38) \quad x = \mathcal{F}\left[x, \Psi(l), \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \alpha, \beta\right]$$

du type même envisagé par MM. Schauder et Leray.

Envisageons alors dans le plan  $z$  la configuration auxiliaire, définie au moyen des éléments  $\Psi^*(l), d_1^*, d_2^*, \alpha$  et  $\beta$ ,

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi^*(l) = k\Psi(l) + (1-k)\frac{\pi}{2}, \\ d_1^* = \frac{d_1}{k}, \\ d_2^* = \frac{d_2}{k}, \end{array} \right.$$

dépendant d'un paramètre réel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 1$ ; nous affecterons d'un astérisque les éléments relatifs à cette configuration.

Il est clair que pour  $k = 1$ , la configuration auxiliaire se réduit à la configuration donnée; pour toute valeur de  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ), les éléments  $\Psi^*(l), d_1^*, d_2^*$  vérifient les conditions du paragraphe 23<sup>(128)</sup>; enfin, si  $k$  tend vers zéro, l'obstacle se déforme de manière à se réduire pour  $k = 0$  au segment rectiligne de longueur  $\beta - \alpha$ , placé en fluide indéfini ( $d_1 = d_2 = +\infty$ ) perpendiculairement à la direction générale du courant. Les paramètres  $d_1^*$  et  $d_2^*$  ne deviennent jamais nuls au cours de la déformation envisagée des éléments rigides : par suite, les paramètres  $|a^*|$  et  $b^*$  correspondants sont donc supérieurs à 1 et ne peuvent être égaux à 1. Dans ces conditions, l'équation du problème du sillage posé relativement à la configuration auxiliaire s'écrit, d'après (3.38),

$$(3.40) \quad x^* = \mathcal{F}[x^*, \Psi^*(l), d_1^*, d_2^*, \alpha, \beta],$$

le symbole  $\mathcal{F}$  désignant une transformation de l'espace  $E(o, \pi, s, a, b)$  complètement continue relativement à  $x^*$ .

<sup>(128)</sup> On vérifie aisément qu'on a, en particulier,

$$0 \leq \Psi^*(l) \leq \pi,$$

pourvu que

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Elle est, de plus, uniformément continue relativement au paramètre  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ). D'après les équations (3.39) cela est évident tant que  $k$  diffère de zéro. Si  $k$  tend vers zéro,  $d_1^*$  et  $d_2^*$  augmentent indéfiniment [cf. (3.39)] et, par suite (cf. § 27), les paramètres  $|a^*|$  et  $b^*$  correspondants augmentent aussi indéfiniment; or (cf. § 14) les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres de (3.37) sont continues pour  $b^* = \infty$  et  $|a^*| = \infty$ ; les quantités  $\frac{1}{d_1^*}$  et  $\frac{1}{d_2^*}$  sont, en effet, continues tant que les distances  $d_1^*$  et  $d_2^*$  sont différentes de zéro; d'un autre côté, les raisonnements du § 27 prouvent que les fonctionnelles  $D_1^*$  et  $D_2^*$ , définies au § 23, sont positives et sûrement différentes de zéro lorsque  $d_1^* \neq 0$  et  $d_2^* \neq 0$ ; la transformation  $\mathcal{F}$  est donc continue pour  $d_1^* = d_2^* = \infty$ , c'est-à-dire pour  $k = 0$ , puisque  $\frac{1}{a+1}$  et  $\frac{1}{b-1}$  le sont pour les valeurs correspondantes de  $b$  et de  $a$ .

D'autre part, il résulte de ce qui précède [cf. les formules (3.39) et le début de ce paragraphe], que les éléments  $l^*(s)$ ,  $a^*$  et  $b^*$  qui définissent la solution éventuelle  $x^*$  de (3.40) vérifient les inégalités

$$\|l^*(s)\| \leq \text{const.}, \quad |a^* + 1| \geq \text{const.} > 0, \quad (b^* - 1) \geq \text{const.} > 0.$$

Cela montre que la grandeur  $\|x^*\|$

$$\|x^*\| = \|l^*(s)\| + \frac{1}{|a^* + 1|} + \frac{1}{|b^* - 1|}$$

est supérieurement bornée quel que soit  $k$ ,  $0 \leq k \leq 1$ ; le point  $x$  de  $E(0, \pi, s, a, b)$  qui vérifie l'équation (3.40) reste donc intérieur à une certaine hypersphère  $\omega$  de cet espace. Dès lors, les résultats rappelés au début de ce paragraphe nous permettent d'affirmer :

- 1° que la théorie de l'indice total s'applique à l'équation (3.40);
- 2° que l'indice total des solutions intérieures à  $\omega$  de cette équation est indépendant de  $k$ ,  $0 \leq k \leq 1$ ;
- 3° pour  $k = 1$  l'équation (3.40) se réduit à (3.38) relative à la configuration donnée;
- 4° pour  $k = 0$  l'équation (3.40) est indépendante de l'élément  $l(s)$  puisque la configuration correspondante se réduit, on l'a vu, à une lame rectiligne placée orthogonalement au courant d'épaisseur infinie. On sait que pour un tel obstacle le problème du sillage admet une

solution et une seule <sup>(129)</sup>; cela montre que pour  $k = 0$  l'indice total des solutions de (3.40) est égal à 1; il en résulte que l'indice relatif à  $k = 1$ , c'est-à-dire relatif à l'équation (3.38), est égal à 1. L'équation (3.38) a donc au moins une solution. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Considérons une configuration des éléments rigides symétrique relativement à l'axe du canal. Les raisonnements précédents, légèrement retouchés, permettent d'énoncer le résultat suivant : il existe au moins un élément  $x = x \left[ l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$  de l'espace  $E(0, \pi, s, a, b)$  tel que

$$-a = b$$

qui vérifie les équations du problème du sillage posé par la configuration en cause. En d'autres termes, aux éléments rigides symétriques par rapport à l'axe du canal, on peut faire correspondre au moins un régime à la Helmholtz possédant la même symétrie. Dans ce cas le point de bifurcation est connu *a priori*, puisqu'il coïncide avec le milieu  $O$  de l'obstacle; celui-ci peut d'ailleurs présenter en  $O$  un point anguleux; l'image de  $O$  dans  $d$  sera le point  $Z = i$ . Nous choisirons  $O$  pour origine des abscisses curvilignes  $l$ ; les inconnues du problème seront : 1° la fonction  $l(s)$ , définie pour  $\frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi$  et assujettie à vérifier les conditions aux limites

$$l\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad l(\pi) = \frac{\beta - \alpha}{2};$$

2° le paramètre  $b > 1$ . Une fois ces conventions adoptées, les raisonnements qui précèdent s'appliqueront sans modification.

*Problème de la proue.* — Introduisons, encore pour simplifier l'exposition, un second espace abstrait  $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  dont un élément  $x$  sera constitué par l'ensemble de l'élément  $l(s)$  de  $E(0, \pi, s)$  et de quatre constantes  $\frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p_1$  et  $p_2$ . Étant donné deux éléments

$$x = \left[ l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p_1, p_2 \right] \quad \text{et} \quad x' = \left[ l'(s), \frac{1}{b'-1}, \frac{1}{a'+1}, p'_1, p'_2 \right].$$

---

<sup>(129)</sup> Cf. par exemple M. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* ou U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*.

de l'espace  $E(o, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  et deux constantes réelles  $m$  et  $m'$ , nous appellerons combinaison linéaire à coefficients constants de  $x$  et  $x'$ , l'élément

$$mx + m'x' = \left[ \begin{array}{c} m l(s) + m' l'(s), \frac{m}{b-1} + \frac{m'}{b'-1}, \frac{m}{a+1} + \frac{m'}{a'+1}, \\ mp_1 + m'p'_1, mp_2 + m'p'_2 \end{array} \right].$$

Nous appellerons norme d'un point  $x$  de  $E(o, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  la grandeur

$$\|x\| = \|l(s)\| + \left| \frac{1}{b-1} \right| + \left| \frac{1}{a+1} \right| + |p_1| + |p_2|.$$

Il est clair que l'espace  $E(o, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  ainsi défini est linéaire normé, complet. Moyennant ces conventions, le problème de la proue tel qu'il a été énoncé au paragraphe **23** peut se formuler comme il suit : étant donné un élément  $\Psi(l)$  de  $E(\alpha, \beta, l)$  et quatre constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ , établir l'existence d'un élément de  $E(o, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  vérifiant l'un des systèmes de relations fonctionnelles (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) et les inégalités <sup>(130)</sup>

$$(3.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_2 < p_1, \quad p_2 < \alpha_1, \quad \beta_1 < p_1, \\ b-1 > 0, \quad a+1 < 0. \end{array} \right.$$

Attachons alors à chaque nombre réel  $n$  le nombre  $n^+$ , défini par les relations suivantes :

$$n^+ = n, \quad \text{si } n > 0; \quad n^+ = 0, \quad \text{si } n \leq 0.$$

Nous allons montrer, à la suite de M. Leray, que la convention précédente ainsi que l'artifice d'écriture utilisé lors de l'étude du problème du sillage nous permettent de substituer aux systèmes (3.23),

<sup>(130)</sup> Rappelons que les quantités  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  ont été introduites à la fin du paragraphe **23**; nous prions le lecteur de se rapporter à ce passage.

D'après la définition même de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ , on peut avoir  $\beta_1 < \alpha_1$ ; c'est notamment le cas de l'obstacle convexe vers le courant où l'on a  $\alpha_1 = \beta$ ,  $\beta_1 = \alpha$ . Il est dès lors indispensable, pour donner un sens au problème, de compléter les inégalités  $p_2 < \alpha_1$ ,  $\beta_1 < p_1$  par la condition  $p_2 < p_1$ . En définitive, les inconnues  $p_1$  et  $p_2$  du problème appartiennent au domaine, non borné, du plan  $(p_1, p_2)$ , limité par les droites d'équations

$$p_2 = \alpha_1, \quad p_1 = \beta_1, \quad p_1 = p_2.$$

(3.24), (3.25) et (3.26) précédents, le système *unique*

$$(3.42) \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha + (p'_2 - \alpha)^+, \beta - (\beta - p'_1)^+, a, b], \\ \frac{(\alpha - p'_2)^+}{\nu} = -P_2[l(s), \Psi(l), a, b], \\ \frac{(p'_1 - \beta)^+}{\nu} = -P_1[l(s), \Psi(l), a, b], \\ \frac{1}{b-1} = \frac{1}{b-1} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d'_1} - \frac{1}{D_1[l(s), \Psi(l), \alpha + (p'_2 - \alpha)^+, \beta - (\beta - p'_1)^+, a, b]} \right\}, \\ \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d'_1} - \frac{1}{D_2[l(s), \Psi(l), \alpha + (p'_2 - \alpha)^+, \beta - (\beta - p'_1)^+, a, b]} \right\}, \end{array} \right.$$

dont les inconnues  $p'_1$  et  $p'_2$  sont astreintes à être intérieures au domaine non borné (3.41).

En effet, supposons que la solution éventuelle

$$x = x \left[ l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p'_1, p'_2 \right]$$

de (3.42) vérifie, outre (3.41), les inégalités

$$\alpha \leq p'_2, \quad p'_1 \leq \beta.$$

Alors, en posant

$$p'_2 = p_2, \quad p'_1 = p_1,$$

il vient

$$\begin{array}{ll} \alpha + (p_2 - \alpha)^+ = p_2, & \beta - (\beta - p_1)^+ = p_1, \\ (\alpha - p'_2)^+ = 0, & (p'_1 - \beta)^+ = 0. \end{array}$$

Ces inégalités, jointes aux conditions (3.41), montrent que la solution considérée de (3.42) vérifie aussi le système (3.23).

Supposons maintenant que la solution éventuelle

$$x = x \left[ l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p'_1, p'_2 \right]$$

de (3.42) vérifie, outre (3.41), les inégalités

$$p'_2 \leq \alpha, \quad p'_1 \leq \beta.$$

Alors, en posant

$$p_2 = \alpha, \quad p'_1 = p_1,$$

il vient

$$\begin{aligned} \alpha + (p'_2 - \alpha)^+ &= \alpha = p_2, & \beta - (\beta - p'_1)^+ &= p_1, \\ (\alpha - p'_2)^+ &\geq 0, & (p'_1 - \beta)^+ &= 0. \end{aligned}$$

Ces égalités, jointes aux conditions (3.41), montrent que l'élément  $x = \left[ l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, \alpha, p'_1 \right]$  vérifie le système (3.24).

Le cas  $p'_1 \geq \alpha, p'_2 \geq \beta$  sera étudié d'une manière toute analogue; il correspond au système (3.25).

Enfin supposons que la solution de (3.42) vérifie les inégalités

$$p'_2 \leq \alpha, \quad p'_1 \geq \beta.$$

Alors, en posant

$$p_2 = \alpha, \quad p_1 = \beta,$$

il vient

$$\begin{aligned} \alpha + (p'_2 - \alpha)^+ &= \alpha = p_2, & \beta - (\beta - p'_1)^+ &= \beta = p_1, \\ (\alpha - p'_2)^+ &\geq 0, & (p'_1 - \beta)^+ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ces relations, jointes aux conditions (3.41), montrent que l'élément  $x = x \left[ l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, \alpha, \beta \right]$  vérifie le système (3.26).

De plus, grâce à l'introduction du paramètre d'homogénéité  $\nu$ , les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des relations (3.42) feront correspondre à un ensemble d'éléments  $l(s), a, b, \alpha - p_2, p_1 - \beta$  un ensemble d'éléments de même nature; nous pouvons donc considérer l'ensemble de ces transformations comme une transformation fonctionnelle unique, opérant sur les éléments  $x$  de l'espace abstrait  $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ , en sorte qu'en désignant cette transformation par le symbole  $\mathfrak{F} \left[ x, \Psi(l), \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \alpha, \beta \right]$ , les équations (3.42) se réduisent encore à l'équation unique

$$(3.42') \quad x = \mathfrak{F} \left[ x, \Psi(l), \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \alpha, \beta \right]$$

du type  $x = F(x)$  déjà considéré.

Posons-nous alors le problème de la proue pour la configuration auxiliaire du plan  $z$ , dépendant du paramètre  $k(0 \leq k \leq 1)$  et définie au moyen des équations (3.3g); ce problème revient à chercher un point  $x^* [l^*(s), a^*, b^*, p_1^*, p_2^*]$  de  $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  vérifiant les

inégalités <sup>(131)</sup> (3.41) et le système de relations fonctionnelles

$$(3.43) \left\{ \begin{array}{l} l^*(s) = V[l^*(s), \Psi^*(l), \alpha + (p_2^* - \alpha)^+, \beta - (\beta - p_1^*)^+, a^*, b^*], \\ \frac{(\alpha - p_2^*)^+}{\nu} = -P_1[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*], \\ \frac{(p_1^* - \beta)^+}{\nu} = -P_2[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*], \\ \frac{1}{b^* - 1} = \frac{1}{b^* - 1} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_1^*} - \frac{1}{D_1[l^*(s), \Psi^*(l), \alpha + (p_2^* - \alpha)^+, \beta - (\beta - p_1^*)^+, a^*, b^*]} \right\}, \\ \frac{1}{a^* + 1} = \frac{1}{a^* + 1} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_2^*} - \frac{1}{D_2[l^*(s), \Psi^*(l), \alpha + (p_2^* - \alpha)^+, \beta - (\beta - p_1^*)^+, a^*, b^*]} \right\}, \end{array} \right.$$

équivalent à l'équation unique

$$(3.44) \quad x^* = \mathcal{F}[x^*, \Psi^*(l), d_1^*, d_2^*, \alpha, \beta].$$

Les raisonnements faits à propos du problème du sillage s'appliquent encore à la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  de (3.44); on établit ainsi <sup>(132)</sup> que cette fonctionnelle est complètement continue relativement à son argument  $x$  et uniformément continue relativement à  $k$  dans l'intervalle  $0 \leq k \leq 1$ ; la théorie de l'indice total s'applique donc à l'équation (3.44).

Cela posé, nous allons montrer que les solutions éventuelles de (3.44) ne peuvent atteindre les bornes que leur assignent les inégalités (3.41).

1° Les paramètres  $a^*$  et  $b^*$  vérifient les inégalités  $a^* < -1$ ,  $b^* > 1$  de par leur nature même; on a vu d'autre part que les quantités  $b^* - 1$  et  $|a^* + 1|$  sont bornées inférieurement tant que les distances  $d_1^*$  et  $d_2^*$  sont différentes de zéro, c'est-à-dire pour  $0 \leq k \leq 1$ .

<sup>(131)</sup> Le lecteur s'assurera aisément que la fonction  $\Psi^*(l)$ , définie par (3.49), atteint son maximum pour  $l = \beta_1$  et son minimum pour  $l = \alpha_1$ ; les inégalités (3.41) sont donc indépendantes de  $k$ .

<sup>(132)</sup> Les points essentiels de cette discussion, la minoration *a priori* des paramètres  $|a^* + 1|$  et  $b^* - 1$ , s'acquièrent comme pour le problème du sillage. Les raisonnements préliminaires aux théorèmes d'existence établissent alors la continuité complète des fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des équations (3.43).



2° On ne peut avoir  $p_1^* = p_2^*$ . Sinon, en effet, on aurait

$$\alpha + (p_2^* - \alpha)^+ = \beta - (\beta - p_2^*)^+$$

avec

$$p_2^* - \alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta - p_2^* \geq 0,$$

système de conditions qui admet la solution unique  $p_1^* = p_2^*$ . Dans ce cas la longueur de l'obstacle serait nulle; les constantes  $\psi_1^*$  et  $\psi_2^*$  déterminées par l'équation (3.19), dans laquelle on aurait remplacé  $\alpha$  et  $\beta$  par  $p_2^*$  et  $p_1^*$  respectivement, seraient égales toutes deux à zéro. Les équations (1.10), (1.10') et (1.31) montrent que  $\frac{dl(s)}{ds} = 0$ , la fonction  $l(s)$ , et par suite  $\Psi^*[l(s)]$ , est donc constante [cf. au paragraphe 23 la définition (3.20) de la transformation V] dans tout l'intervalle  $(0, \pi)$ ; d'après (1.24) on aurait

$$s_0^* = \Psi^*[l(s)], \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \pi.$$

Moyennant cette relation les fonctionnelles  $P_2[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*]$  et  $P_1[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*]$  [cf. les équations (A), (A'), (C), et (C') du paragraphe 13] se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned} & \frac{2\omega_1^*}{\pi} \left[ \frac{s_0^*}{\pi} \eta_1^* - \zeta \left( \frac{\omega_1^*}{\pi} s_0^* \right) \right] \sin \frac{s_0^*}{2}, \\ & \frac{2\omega_1^*}{\pi} \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1^*}{\pi} s_0^* + \omega_1 \right) - \frac{s_0^*}{\pi} \eta_1^* - \eta_1^* \right] \cos \frac{s_0^*}{2}, \end{aligned}$$

expressions où la fonction  $\zeta$  est supposée avoir été construite à partir des périodes  $2\omega_1^*$  et  $2\omega_3^*$ .

On constate alors que l'une, au moins, de ces quantités est négative quel que soit  $s_0^*$ ,  $0 \leq s_0^* \leq \pi$  (143); l'une, au moins, des égalités (3.43'') ou (3.43''') est impossible. C. Q. F. D.

(143) Posons, en effet,

$$\frac{s_0}{\pi} = \alpha,$$

et étudions le signe de la fonction  $f(\alpha) = \eta_1 \alpha - \zeta(\alpha \omega_1)$  dans l'intervalle  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Il vient

$$f'(\alpha) = \eta_1 + \omega_1 p(\alpha \omega_1);$$

comme  $p(\alpha \omega_1)$  décroît de  $+\infty$  à  $e_1$  lorsque  $\alpha$  croît de 0 à 1, le minimum de  $f'(\alpha)$  dans l'intervalle considéré est atteint pour  $\alpha = 1$ ; en tenant compte de la

3° On ne peut avoir

$$p_2^* = \alpha_1 \quad \text{ou} \quad p_1^* = \beta_1.$$

Si l'on avait  $p_2^* = \alpha_1$ , par exemple, le minimum de  $\Psi[l(s)]$  serait atteint pour  $s = 0$ ; on aurait

$$l^*(0) = \alpha_1.$$

L'intégrale qui figure au second membre de la formule (A) du paragraphe 13 ne serait pas alors positive.

D'un autre côté,  $p_1^* - p_2^*$  est une quantité inférieurement bornée (voir l'alinéa précédent); il en est dès lors de même de  $\left| \frac{d l^*(s)}{ds} \right|$  puisque la longueur de l'obstacle n'est pas nulle et que, dès lors, le paramètre  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b}$  est inférieurement borné (cf. § 27);  $l^*(s)$  est donc un élément de  $E(0, \pi, s)$  qui ne se réduit pas à une constante; comme  $\Psi^*(l)$  ne se réduit pas identiquement à  $\pi$  (cf. § 23),  $\pi - \Psi^*[l(s)]$  est supérieur à  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  étant un nombre positif assez petit) sur un ensemble de l'intervalle  $(0, \pi)$  dont la mesure  $\eta$  est positive et non nulle; d'après (1.24),  $s_0^*$  sera distinct de  $\pi$ . Il s'ensuit, en tenant

formule connue (cf. XXX<sub>1</sub> T. M.), on a

$$f'(1) = \eta_1 + \omega_1 p \omega_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1} \left[ \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{4q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} \right].$$

Il s'ensuit que  $f'(1)$  est positif;  $f'(\alpha)$  est donc positive pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ ; le maximum de  $f(\alpha)$  dans l'intervalle  $0 \leq \alpha \leq 1$ , atteint pour  $\alpha = 1$ , est égal à zéro;  $f(\alpha)$  croît donc de  $-\infty$  à 0 lorsque  $\alpha$  varie de 0 à 1. Ce résultat justifie les conclusions du texte toutes les fois que  $s_0$  diffère de 0 et de  $\pi$ . Pour traiter ces cas extrêmes, il suffit de noter que pour  $s_0 = 0$  ou  $\pi$  les expressions du texte se réduisent respectivement à  $-1$  et à 0 (ou à 0 et  $-1$ ); notre résultat est donc tout à fait général.

À la vérité, nous avons admis encore que les paramètres  $|a|$  et  $b$  étaient finis (cf. § 14); pour se débarrasser de cette restriction, il suffisait de raisonner sur les expressions (1.51'), (1.51'') des fonctionnelles  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$ , valables pour  $|a| = \infty$ ,  $b = \infty$ ; mais la discussion précédente aurait été un peu plus compliquée.

compte de l'alinéa précédent, que la quantité

$$\frac{2\omega_1^*}{\pi} \left[ \frac{s_0^*}{\pi} a_1^* - \zeta \left( \frac{\omega_1^*}{\pi} s_0^* \right) \right] \sin \frac{s_0^*}{2}$$

est négative et non nulle.

En combinant les deux résultats de cet alinéa on voit que la quantité

$$P_2[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*]$$

[*cf.* l'équation (C) du paragraphe 15] est égale à la somme de deux quantités négatives; l'équation (3.43''') ne peut alors pas être vérifiée. Un raisonnement tout identique prouverait que  $p_1^* \neq \beta_1$ .

C. Q. F. D.

Cela étant, observons que la configuration définie par les éléments  $\Psi^*(l), d_1^*, d_2^*, p_1^*, p_2^*$  (*cf.* § 15) qui vérifient les inégalités (3.41), satisfait aux conditions du § 25; dès lors, les raisonnements développés à propos du problème du sillage s'appliquent et montrent que les normes  $\|l^*(s)\|$  des solutions éventuelles  $l^*(s)$  de (3.44) sont bornées dans leur ensemble. Il s'ensuit que les valeurs prises par les fonctionnelles  $P_i[l^*(s), \Psi^*(l), p_1^*, p_2^*]$ , ( $i = 1, 2$ ) sont aussi bornées dans leur ensemble; il en sera donc de même des valeurs de  $p_1^*, p_2^*$  [*cf.* les équations (3.42''), (3.42''') et les inégalités (3.41), lesquelles sont satisfaites *a priori* d'après les alinéas 2 et 3].

Ces résultats montrent que la racine éventuelle de l'équation (3.44)

$$x^* = \left[ l^*(s), \frac{1}{b^* - 1}, \frac{1}{a^* + 1}, p_1^*, p_2^* \right]$$

est un élément de l'espace  $E(o, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  qui vérifie une inégalité du type

$$\|l(s)\| + \frac{1}{|b^* - 1|} + \frac{1}{|a^* + 1|} + |p_1^*| + |p_2^*| < \text{const.}$$

Par suite, la solution  $x^*$  en cause est un point intérieur à une hypersphère  $\omega$  de rayon borné, située dans l'espace  $E(o, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$  ( $x^*$  est donc étranger à la frontière  $\omega'$  de  $\omega$  quel que soit  $k, 0 \leq k \leq 1$ ). Cela montre que l'indice total des solutions de (3.34) relativement à  $\omega$ , indice dont nous avons établi plus haut l'existence, est indépendant de  $k$ ; nous allons le déterminer en faisant  $k = 0$  dans l'équation considérée.

Or, d'après ce que l'on a vu pour le problème du sillage, les para-

mètres  $|a|$  et  $b$  qui sont solutions de (3.44) pour  $k = 0$  ne peuvent être qu'infinis, puisque dans ce cas  $d_1^* = d_2^* = \infty$  [cf. (3.39)]. D'un autre côté, la fonction  $\Psi^*(l)$  se réduit alors à  $\frac{\pi}{2}$  [cf. (3.39)]; elle est donc indépendante de  $l$  pour  $k = 0$ ; il en est donc de même pour la première des transformations (3.43) <sup>(134)</sup>.

Dans ces conditions, l'équation (3.44) se réduit à l'ensemble de deux équations seulement, (3.43'') et (3.43'''); pour  $k = 0$ , les valeurs des fonctionnelles qui figurent au second membre de ces relations se réduisent à  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  <sup>(135)</sup>, en sorte que le système (3.43) peut s'écrire, lorsque  $k = 0$ ,

$$(3.45) \quad \begin{cases} -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (\alpha - p_2^*)^+ = 0, \\ -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (p_1^* - \beta)^+ = 0. \end{cases}$$

En définitive, il suffit, pour déterminer l'indice total des solutions de (3.44) relativement à  $\omega$ , d'évaluer cet indice pour l'équation  $x = F(x)$  équivalente à l'ensemble de deux équations (3.45). Or, de par sa définition même, l'indice en cause est égal au degré topologique au point  $x = 0$  de la transformation  $x' = x - F(x)$  (voir le début de ce paragraphe) équivalente à l'ensemble des transformations

$$(3.45') \quad \begin{cases} p_2' = -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (\alpha - p_2)^+, \\ p_1' = -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (p_1 - \beta)^+, \end{cases}$$

<sup>(134)</sup> En se reportant à la définition de l'opération  $V[l(s), \Psi(l), \alpha, b, \alpha, \beta]$  [cf. (3.20)], le lecteur constatera que  $l(s)$  intervient dans  $V$  par l'intermédiaire de la fonctionnelle  $\Psi[l(s)]$  seulement.

<sup>(135)</sup> En effet, pour  $k = 0$ ,  $\Psi^*[l(s)] = \frac{\pi}{2}$  pour  $0 \leq s \leq \pi$ ; donc  $s_0 = \frac{\pi}{2}$ , d'après (1.24). D'un autre côté, on a vu que pour  $|a| = b = \infty$ , les fonctionnelles  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  se réduisent aux expressions (1.52') et (1.52''), égales toutes les deux à  $-1$  pour  $\Psi^*[l(s)] = \frac{\pi}{2}$  et  $s_0^* = \frac{\pi}{2}$ ; il suffit de porter ces valeurs de  $s_0^*$ , de  $\Omega'(-1)$  et  $\Omega'(1)$  dans les relations (C) et (C') du paragraphe 13 pour justifier les résultats du texte.

opérant à l'intérieur du domaine E <sup>(136)</sup>

$$p_2 < \alpha_1, \quad \beta_1 < p_1, \quad p_2 < p_1,$$

dans l'espace à deux dimensions  $(p_1, p_2)$ . Considérons le domaine F de cet espace défini par les inégalités

$$\alpha - p_2 > 0, \quad p_1 - \beta > 0.$$

D'après la définition même du symbole  $m^+$ , les quantités  $(\alpha - p_2)^+$  et  $(p_1 - \beta)^+$  sont positives à l'intérieur de F, nulles à l'extérieur et sur ses frontières. Or, F est nécessairement intérieur à E, puisque  $\alpha < \alpha_1$ ,  $\beta_1 < \beta$ ,  $\alpha < \beta$ ; il en résulte que la transformation (3.45'), qui est biunivoque, fait correspondre à E le domaine défini par

$$-\nu \frac{\sqrt{2}}{2} < p_1, \quad -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} < p_2.$$

Le point  $p_1 = p_2 = 0$  est donc recouvert une fois et une seule,  $\nu$  étant positif, de par sa définition même; par suite, le degré topologique de (3.45') en ce point est égal à 1 (au signe près) <sup>(137)</sup>. Ainsi, l'indice total des solutions [intérieures à  $\omega$  et vérifiant (3.41)] de l'équation (3.44) est égal à 1 en valeur absolue; le problème de la proue, tel que nous l'avons énoncé, possède donc au moins une solution.

G. Q. F. D.

*Remarque.* — Il est intéressant de noter, avec M. Leray, que dans certains cas particuliers les raisonnements développés à propos du problème du sillage, manifestement plus simples que ceux qui précèdent, suffisent à établir le théorème d'existence pour le problème de la proue.

I. *Cas où  $\alpha_1 = \alpha$ .* — Dans ce cas les deux premières conditions (3.41) admettent la solution unique  $p_2 = \alpha_1 = \alpha$ ; l'inconnue  $p_2$  est donc déterminée a priori. Considérons alors dans le plan  $z$  la configuration

<sup>(136)</sup> Le lecteur est prié de faire la figure.

<sup>(137)</sup> D'une manière précise ce degré vaut  $-1$ ; le signe  $-$  tient à ce que la transformation (3.45'), égale au produit d'une translation par une symétrie, fait intervenir une symétrie.

des éléments rigides définis par les éléments

$$(3.46) \quad \Psi(l), \alpha, p_1, d_1, d_2; \beta_1 \leq p_1 \leq \beta.$$

[On se reportera à (3.22) pour la définition de  $d_1$ .] Le théorème d'existence que nous avons établi permet d'associer à chaque valeur de  $p_1$  ( $\beta_1 \leq p_1 \leq \beta$ ) au moins un élément  $x = x(p_1)$  de l'espace  $E(o, \pi, s, a, b)$  qui vérifie les équations du problème du sillage posé par la configuration (3.46). Or, les éléments (3.46) sont des fonctions continues du paramètre  $p_1$ ; chaque élément  $x(p_1)$  correspondant dépendra donc continûment de  $p_1$  <sup>(138)</sup>. Il s'ensuit que la fonctionnelle  $P_1[l(s), \Psi(l), a, b]$ , correspondant à l'élément choisi  $x(p_1)$  et que nous écrivons, pour abrégé,  $P_1[x(p_1)]$ , sera continue relativement à son argument  $p_1$ .

Observons, par ailleurs, que l'hypothèse  $\alpha = \alpha_1$  entraîne (*cf.* § 13),

$$(3.47) \quad P_0[x(p_1)] < 0,$$

pour  $\beta_1 \leq p_1 \leq \beta$ . Pour les mêmes raisons, il vient

$$(3.48) \quad P_1[x(\beta_1)] \leq 0.$$

Ceci posé, supposons que la solution  $x = x(\beta)$  du problème du sillage posé pour la configuration  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$  vérifie la condition <sup>(139)</sup>

$$P_1[x(\beta)] \leq 0.$$

Cette inégalité, jointe à (3.47), prouve que  $x = x(\beta)$  est solution du problème de la proue posé pour la configuration  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$ .

<sup>(138)</sup> Cela résulte des propriétés générales des équations fonctionnelles du type que nous considérons. Nous admettrons ce point essentiel du raisonnement. D'un autre côté, rappelons, que d'après le théorème d'existence démontré ci-dessus, à chaque groupe d'éléments (3.46) correspond au moins un élément  $x(p_1)$  qui résout le problème correspondant du sillage; mais rien ne prouve que cet élément soit unique et l'inconnue  $x(p_1)$  peut être à déterminations multiples; mais chacune de ces déterminations est une fonctionnelle continue de son argument  $p_1$ , et c'est une telle détermination que nous envisageons dans le texte.

<sup>(139)</sup> Nous supposons que  $x(\beta)$  est l'élément qui se déduit par continuité de la branche envisagée de la solution  $x(p_1)$  en y faisant  $p_1 = \beta$ .

Supposons, au contraire, que l'on ait

$$P_1[x(\beta)] > 0.$$

Jointe à (3.48), cette inégalité établit, en utilisant la propriété de continuité de la fonctionnelle  $P_1[x(p_1)]$  dans l'intervalle  $\beta_1 \leq p_1 \leq \beta$ , l'existence d'au moins un élément  $x(p_1)$  tel que

$$P_1[x(p_1)] = 0.$$

L'élément  $x = x(p_1)$  vérifie donc le système (3.42); il constitue encore une solution du problème de la proue posé pour la configuration donnée.

En résumé, le problème en cause admet toujours une solution, au moins, lorsque  $\alpha_1 = \alpha$  (ou  $\beta = \beta_1$ ). Observons, enfin, que le problème de la proue posé pour l'obstacle du type considéré, se réduit au problème du sillage posé pour le même obstacle lorsqu'on a, à la fois,

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1.$$

II. *Cas symétrique.* — Considérons le cas d'une configuration symétrique par rapport à l'axe du canal. Nous appellerons  $\beta_2$  (ou  $\alpha_2$ ) l'abscisse curviligne du point  $C_2$  (ou  $B_2$ ) de la moitié supérieure (ou inférieure) de l'obstacle en lequel  $\Psi(l)$  atteint sa valeur maxima (ou minima)<sup>(140)</sup>; il est clair que  $C_2$  ou  $B_2$  sont symétriques relativement à l'axe du canal. Nous nous proposons de montrer, en utilisant uniquement le théorème d'existence pour le problème du sillage, que le problème de la proue posé pour une telle configuration possède au moins une solution possédant le même axe de symétrie que les éléments rigides et assujettie, en outre, à vérifier la condition suivante : le point de détachement  $P_1$  devra être choisi sur l'arc  $\widehat{C_2 C}$  de l'obstacle;  $P_2$  sera placé symétriquement par rapport à l'axe du canal.

<sup>(140)</sup> Nous voudrions éviter les confusions entre les quantités  $\alpha_1, \beta_1$  d'une part et les quantités  $\alpha_2, \beta_2$  d'autre part. Dans le cas de l'obstacle symétrique convexe placé symétriquement par rapport à l'axe du canal, on a

$$\alpha_1 = \beta, \quad \beta_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

En effet, soient  $P_1$  un point d'abscisse  $p_1$ , de l'arc  $\widehat{C_2 C} (\beta_2 \leq p_1 \leq \beta)$  et  $P_2$  le point d'abscisse  $p_2$ , symétrique de  $P_1$  relativement à l'axe  $(\alpha \leq p_2 \leq \alpha_2)$ ; il est clair que

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

en sorte que la configuration symétrique formée de  $\widehat{P_2 P_1}$  et des parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  dépend d'un seul paramètre,  $p_1$  par exemple. Le théorème d'existence du problème symétrique du sillage permet d'affirmer l'existence d'au moins une solution  $x = x(p_1)$  <sup>(141)</sup> de ce problème posé pour cette configuration et admettant le même élément de symétrie, l'élément  $x = x(p_1)$  étant une fonctionnelle continue de son argument  $p_1$ . On vérifiera aisément, d'autre part, que la fonctionnelle  $P_1[x(\beta_2)]$  est négative <sup>(142)</sup>. Dès lors, le raisonnement se poursuit comme pour l'exemple précédemment traité; si  $P_1[x(\beta)] \leq 0$  vérifie le système (3.42) et, par suite, constitue une solution du problème de la proue posé pour la configuration symétrique donnée; si  $P_1[x(\beta)] > 0$ , il existe au moins un élément  $x = x(p_1)$  ( $\beta_2 \leq p_1 < \beta$ ) tel que

$$P_1[x(p_1)] = 0;$$

l'élément  $x = x(p_1)$  vérifie donc le système (3.42) et constitue encore une solution du problème de la proue posé pour la configuration donnée. En tout état de cause, le problème symétrique de la proue admet donc au moins une solution symétrique. C. Q. F. D.

<sup>(141)</sup> Rappelons que  $x(p_1)$  est un élément de l'espace  $E(0, \pi, s, a, b)$  tel que  $a = b$ .

<sup>(142)</sup> Il suffira de faire remarquer que, dans le cas envisagé, on a

$$\Psi[l(s)] + \Psi[l(\pi - s)] = \pi.$$

Cette relation permet de réduire l'intervalle d'intégration  $(0, \pi)$  à l'intervalle  $(0, \frac{\pi}{2})$  dans les formules (A) et (A') du paragraphe 13; l'hypothèse

$$\Psi[l(\pi)] = \Psi(\beta_2) > \Psi[l(s)] \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi$$

permet alors de conclure.



*Remarque.* — Le cas de l'obstacle en présence d'une seule paroi,  $\mu_1$ , pour fixer les idées, s'obtient, évidemment, comme cas particulier des théorèmes précédents; il suffit de faire  $d_2 = \infty$  dans les équations des problèmes du sillage et de la proue. L'inconnue  $|a|$  correspondant à cette configuration est infinie (*cf.* §§ 14 et 27); pour cette valeur de  $a$  les fonctionnelles utilisées ne subissent aucune discontinuité. Mais l'inconnue  $a$  étant déterminée *a priori*, le nombre des équations diminue d'une unité; par ailleurs les raisonnements et les conclusions subsistent intégralement.

**29. CAS OÙ  $d_1$  TEND VERS ZERO.** — Nous nous proposons maintenant d'étudier le comportement des solutions du problème du sillage, dont nous venons d'établir l'existence, lorsque l'une des parois,  $\mu_1$  par exemple, se rapproche indéfiniment de l'obstacle <sup>(143)</sup> alors que  $\mu_2$  demeure à une distance non nulle de celui-ci. Il est à peu près évident, *a priori*, que les difficultés analytiques ne sont pas essentiellement changées si l'on suppose la deuxième paroi rejetée à l'infini; nous ferons cette hypothèse qui nous permettra de simplifier sensiblement l'exposition

Considérons donc l'élément

$$e = e \left[ l(s), 0, \frac{1}{b-1} \right],$$

qui vérifie les équations du problème du sillage posé pour la configuration

$$\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2 = \infty$$

(nous savons, d'après le théorème du paragraphe 28, qu'un tel élément existe); le régime de Helmholtz correspondant est alors entièrement défini à l'aide des formules (1.23), (1.24), (1.43), (1.44), (1.50). Ceci posé, déformons cette configuration de manière à laisser l'obstacle fixe [c'est-à-dire en laissant fixes les éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta$ ] et en faisant tendre  $d_1$  vers zéro; nous avons constaté (*cf.* § 27) que l'élément  $e = e \left[ l(s), 0, \frac{1}{b-1} \right]$  correspondant dépend continûment de  $d_1$  tant

---

<sup>(143)</sup> Nous supposons essentiellement que l'obstacle vérifie les hypothèses que nous lui avons imposées au paragraphe 23.

que  $d_1 \neq 0$  et que le paramètre  $(b - 1)$  tend vers zéro en même temps que  $d_1$ . Or, les formules (1.43) montrent que, dans ce cas,  $\omega_1$  augmente indéfiniment alors que  $\frac{\omega_1}{l}$  reste fini; le paramètre  $q$  [cf. (1.8)] tend donc vers 1. Il s'ensuit que, pour  $d_1 = 0$ , la demi-couronne  $d$  du plan  $Z$  se réduit au demi-cercle supérieur  $|Z| = 1$ ; les fonctions elliptiques  $p, \zeta, \sigma$ , grâce auxquelles on réalise l'application conforme du domaine  $\mathcal{C}$  du fluide en mouvement sur  $d$ , dégénèrent, alors que leurs arguments, qui contiennent  $\omega_1$  en facteur [cf. par exemple (1.23)], deviennent infinis; les fonctions  $\theta(\nu, q)$  correspondantes ne sont pas définies, comme on sait, pour  $q = 1$ . Enfin, au paragraphe 26, on n'a établi l'existence et la continuité de  $\frac{d l(s)}{ds}$  que moyennant l'hypothèse  $b \neq 1$ . Ainsi, les formules de M. Villat perdent, telles quelles, toute signification pour  $d_1 = 0$ ; nous sommes donc contraints de renoncer à nous servir du plan  $Z$  et du domaine  $d$  et à n'utiliser que le plan  $t$  et le domaine  $\mathcal{E}$ . A l'élément  $l(s)$  nous substituons l'élément  $l(t)$  qui réalise la correspondance entre l'obstacle et le segment  $-1 \leq t \leq 1$  de  $\mathcal{E}$ . A l'élément  $e = e\left[l(t), 0, \frac{1}{b-1}\right]$  nous substituons l'élément  $e\left[l(t), 0, \frac{1}{b-1}\right]$  de l'espace  $E(-1, 1, t, \infty, b)$  qui variera continûment avec  $d_1$  tant que  $d_1 \neq 0$ . Mais il y a plus; au paragraphe 26, nous avons prouvé que la fonction  $l(t)$ , en admettant qu'elle admette une limite pour  $d_1 = 0$ , est continue par rapport à son argument  $t$  et que la fonction  $\Psi(t) = \Psi[l(t)]$  correspondante vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(t)$ ,  $n$  étant un nombre positif arbitrairement grand, même si  $d_1 = 0$ ; cela justifie le passage à la variable  $t$ . Tels quels, les raisonnements employés au paragraphe 28 ne nous permettent pas d'affirmer l'existence d'une solution correspondant à  $d_1 = 0$ . Mais nous pouvons conclure affirmativement en employant la méthode des images. La distance  $d_1$  étant nulle, complétons la figure en effectuant la symétrie relativement à  $\mu_1$ , et posons-nous le problème du sillage pour l'obstacle symétrique obtenu par la réunion de BC et de l'arc symétrique  $\widehat{CB}_1$ , placé dans un courant de largeur infinie parallèle à  $\mu_1$ . Ce problème possède au moins une solution symétrique par rapport à  $\mu_1$ ; la portion de cette droite située en amont de C constitue une ligne de courant pour le régime considéré;

le point de bifurcation correspondant est alors confondu avec le point C. Il en résulte que le problème du sillage posé pour l'obstacle donné fixé à la paroi  $\mu_1$  par son extrémité supérieure C possède au moins une solution. Il existe donc au moins un élément  $l(t)$  de l'espace  $E(0, 1, t)$  relatif à la configuration  $d_1 = 0$ ; la fonction correspondante  $\Psi(t) = \Psi[l(t)]$ , que nous représenterons désormais par le symbole  $\lim \Psi(t)$ , vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(t)$ ,  $n$  étant un nombre positif arbitrairement grand, dans tout l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ . Ces faits sont à la base des discussions qui suivent et nous permettront d'établir que la fonction  $\Psi'(t)$  converge continûment vers la fonction  $\lim \Psi(t)$  lorsque  $d_1$  tend vers zéro.

*Étude du paramètre  $t_0$  pour de petites valeurs de  $b - 1$ .* — Le point  $t = t_0$  étant l'image de  $Z_0 = e^{i\theta_0}$  (cf. § 9), l'équation de définition de  $t_0$  s'obtiendra en éliminant  $Z = e^{i\theta}$  entre les équations (1.24) et (1.50'); on trouve ainsi les relations <sup>(144)</sup>

$$(3.49) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t) dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = \pi \int_{-1}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}},$$

qu'on peut mettre sous la forme équivalente

$$(3.49') \quad \pi \int_{t_0}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = \int_{-1}^{+1} \frac{[\pi - \Psi(t)]}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} dt.$$

De ces équations nous allons déduire la conséquence fondamentale suivante : si la configuration, dans le plan  $z$ , se déforme de manière que  $d_1$  tende vers zéro (c'est-à-dire si le paramètre  $b$  correspondant tend vers 1) le paramètre  $t_0$  tend vers 1 et réciproquement.

On a d'abord

$$(3.50) \quad \int_t^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg ch} \left[ 1 + 2 \frac{1-t}{b-1} \right] + \sqrt{2} \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+t}} + \dots$$

en utilisant une formule d'approximation bien connue (cf. par exemple, G. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 271) et en désignant par  $+$ ... des fonctions qui s'annulent avec  $b - 1$ . D'un autre

---

<sup>(144)</sup> Cette relation résulte aussi immédiatement de l'équation (1.56), en y remplaçant  $\Phi(t)$  par  $\Psi(t)$ .

côté, on peut écrire

$$(3.51) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\pi - \Psi(t)}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} dt = [\pi - \Psi(1)] \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} + I$$

en posant

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(1) - \Psi(t)}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} dt.$$

L'intégrale I, ainsi définie, reste bornée même pour  $b=1$ , puisque la fonction  $\Psi(t)$  vérifie, on l'a vu, une condition  $\mathcal{L}_n(t)$  pour  $b \geq 1$ . (Notons que nous n'avons pas encore établi que I est une fonction nulle de  $d_1$ , continue pour  $d_1=0$ .) En utilisant (3.50) et (3.51) l'équation de définition (3.49') de  $t_0$  peut se mettre sous la forme

$$(3.52) \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \operatorname{arg ch} \left[ 1 + 2 \frac{1-t_0}{b-1} \right] + \pi \sqrt{2} \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+t_0}} \\ = [\pi - \Psi(1)] \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg ch} \left[ 1 + \frac{4}{b-1} \right] + \sqrt{2} \log 2 \right\} + 1 + \dots,$$

qui permet de discuter aisément le comportement du quotient  $\frac{1-t_0}{b-1}$  lorsque  $b-1$  tend vers zéro. Deux cas sont à considérer :

$$\Psi(1) \neq \pi \quad \text{et} \quad \Psi(1) = \pi.$$

*Cas où  $\Psi(1) \neq \pi$ .* — Dans ce cas, le facteur  $[\pi - \Psi(1)]$  n'étant pas nul, le second membre de (3.52) croît indéfiniment lorsque  $(b-1)$  tend vers zéro; I étant fini, le premier membre doit augmenter au delà de toute limite; cela exige que

$$\lim_{b \rightarrow 1} \frac{1-t_0}{b-1} = \infty.$$

En utilisant le développement limité

$$\operatorname{arg ch} x = \log x + \log 2 - \frac{1}{4x^2} + \dots,$$

valable pour de grandes valeurs de  $x$ , nous pourrions, dès lors, mettre l'équation (3.52) sous la forme

$$(3.53) \quad \log(1-t_0) + 2 \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+t_0}} \\ = - \frac{\Psi(1)}{\pi} \log \frac{1}{b-1} - 5 \frac{\Psi(1)}{\pi} \log 2 + \log 8 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} I + \dots$$

Le second membre de cette formule augmente indéfiniment comme  $\frac{\Psi(\mathfrak{r})}{\pi} \log(b - \mathfrak{r})$ ; cela exige que  $(\mathfrak{r} - t_0)$  tende vers zéro, de manière que la quantité

$$\frac{\mathfrak{r} - t_0}{(b - \mathfrak{r}) \frac{\Psi(\mathfrak{r})}{\pi}}$$

demeure bornée;  $(\mathfrak{r} - t_0)$  est donc d'un ordre infinitésimal inférieur à celui de  $b - \mathfrak{r}$ .

*Cas où  $\Psi(\mathfrak{r}) = \pi$ .* — Dans ce cas, la formule (3.52) se réduit à

$$(3.54) \quad \arg \operatorname{ch} \left[ 1 + 2 \frac{\mathfrak{r} - t_0}{b - \mathfrak{r}} \right] + 2 \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{\mathfrak{r} + t_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \mathfrak{I} + \dots$$

Le second membre reste fini pour  $b = \mathfrak{r}$ ; cela exige que le quotient  $\frac{\mathfrak{r} - t_0}{b - \mathfrak{r}}$  soit borné tant supérieurement qu'inférieurement, puisque l'intégrale  $\mathfrak{I}$  est bornée tant inférieurement que supérieurement <sup>(145)</sup>, les infiniment petits  $\mathfrak{r} - t_0$  et  $b - \mathfrak{r}$  sont donc de même ordre.

*Remarque.* — Au lieu d'envisager le cas d'un obstacle fixe  $\widehat{BC}$ , on aurait pu supposer  $\widehat{BC}$  variable en fonction de  $d_1$  (mais astreint à vérifier, pour chaque valeur de  $d_1$ , les conditions du paragraphe 23). Le paramètre  $t_0$  correspondant à chaque valeur de  $d_1$  serait encore défini par l'équation (3.52), mais dans laquelle  $\Psi(\mathfrak{r})$  désignerait une certaine fonction de  $d_1$ . Si cette fonction est telle que

$$\lim_{b \rightarrow \mathfrak{r}} [\Psi(\mathfrak{r}) - \pi] \log(b - \mathfrak{r}) = \infty,$$

l'équation (3.52) prend la forme (3.53). Si, au contraire, la limite de  $[\pi - \Psi(\mathfrak{r})] \log(b - \mathfrak{r})$  est finie pour  $b = \mathfrak{r}$ , (3.52) est équivalent à

$$(3.55) \quad \frac{\mathfrak{r} - t_0}{b - \mathfrak{r}} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Psi(\mathfrak{r})}{\pi} \right] \log \frac{\mathfrak{r}}{b - \mathfrak{r}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \mathfrak{I} \right\} - \frac{1}{2},$$

qui se réduit à (3.54) lorsque  $[\pi - \Psi(\mathfrak{r})] \log(b - \mathfrak{r})$  a une limite nulle.

---

<sup>(145)</sup> D'après les hypothèses faites,  $\Psi(t)$  étant continue, diffère de  $\pi$  d'une quantité non nulle sur un ensemble de mesure non nulle.

On peut préciser la manière dont  $\Psi(1)$  doit dépendre de  $d_1$  pour qu'une telle circonstance se produise; nous écrirons  $\Psi(1, d_1)$  à la place de  $\Psi(1)$  pour rendre évidente cette dépendance.

D'après (3.28) nous avons

$$\log g = \pi i \tau \leq -\frac{1}{10\pi} \frac{d_1^2}{D^2}.$$

On en tire

$$\frac{i\pi}{\tau} \leq \frac{10\pi^3 D^2}{d_1^2}.$$

Or, d'après T. M. CXXII<sub>11</sub>, on peut écrire

$$-\frac{i\pi}{\tau} = \log \frac{\chi_0}{16} + \chi_0 f(\chi_0),$$

où

$$\chi_0 = \frac{b-1}{b+1}$$

et où  $f(\chi_0)$  désigne une fonction holomorphe pour  $\chi_0 = 0$ .

En combinant ces deux derniers résultats, on est conduit à l'inégalité

$$\log \frac{1}{b-1} \leq \frac{10\pi^3 D^2}{d_1^2} + \log 32 + \chi_0 |f(\chi_0)|,$$

dont on tire

$$[\pi - \Psi(1, d_1)] \log \frac{1}{b-1} \leq \frac{10\pi^3 D^2}{d_1^2} [\pi - \Psi(1, d_1)] + \dots$$

où le symbole  $+\dots$  désigne encore des fonctions qui s'annulent ( $b-1$ ). Cela montre que l'on a sûrement

$$\lim_{d_1 \rightarrow 0} [\pi - \Psi(1, d_1)] \log \frac{1}{b-1} = 0,$$

moyennant la condition

$$\lim_{d_1 \rightarrow 0} \frac{[\pi - \Psi(1, d_1)]}{d_1^2} = 0.$$

La fonction  $l(t)$  étant continue, quel que soit  $d_1$ , les résultats précédents entraînent la conséquence suivante : lorsque la paroi  $\mu_1$  se rapproche indéfiniment de l'obstacle, le point de bifurcation  $z=0$  (dont l'image dans le plan  $t$  a pour affixe  $t_0$ ) tend vers une position

limite, confondue avec l'extrémité supérieure C de l'obstacle. La réciproque est vraie.

Raisonnons, en effet par l'absurde. Si  $\lim_{d_1=0} t_0 \neq 1$ , l'intégrale du second membre de (3.49) conserverait un sens lorsque  $b$  tend vers 1. Il s'ensuivrait que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t) dt}{\sqrt{(1-t)(b-t)(1+t)}},$$

qui figure au premier membre de cette formule, resterait bornée lorsque  $b$  convergerait vers 1; or, ce fait est incompatible avec l'hypothèse  $\Psi(1) \neq 0$  et celle de la continuité de  $\Psi(t)$ ; donc  $\lim_{d_1=0} t_0 = 1$ .

C. Q. F. D.

La fonction  $l(t)$  étant continue quel que soit  $d_1$ , le résultat annoncé est établi.

*Étude du paramètre  $\frac{b-t_0}{d_1}$  pour de petites valeurs de  $d_1$ .* Nous avons, en substituant  $\Psi(t)$  à  $\Phi(t)$  dans la formule (1.55),

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t-t')}} \\ & + i \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{t_0} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t-t')}}. \end{aligned}$$

Faisons alors  $t = t'$  dans la relation (3.49), multiplions-en les deux membres par

$$\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(b-t)}}{1-t},$$

et ajoutons le résultat membre à membre avec l'expression de  $\Omega(t)$  obtenue ci-dessus; il vient, après quelques transformations immédiates,

$$\begin{aligned} (3.56) \quad \Omega(t) = & -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t')(1-t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(1-t')}} \\ & + i \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{t_0} \frac{(1-t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(1-t')}} \end{aligned}$$

l'égalité précédente ayant un sens même pour  $b = 1$  pourvu que le point  $t$  soit étranger au segment réel  $(-1, +1)$ ; c'est là que réside l'utilité de la transformation que nous venons d'effectuer.

Il suit de là que  $\Omega(t)$ , et par suite  $T(t)$ , reste bornée dans tout le domaine  $b$ , excepté dans le voisinage du segment  $(-1, 1)$ ; il en est ainsi, en particulier, le long de la courbe  $C_1$ , considérée au paragraphe 27, qui joint dans  $\mathfrak{E}$  un point intérieur au segment  $(-\infty, 1)$  à un point intérieur au segment  $(b, +\infty)$ .

Nous avons déjà fait observer que la longueur de l'image de  $C_1$  dans le plan du mouvement était minorée par la quantité  $y_C - y_B$  différence des ordonnées, finie et non nulle, des extrémités B et C de l'obstacle. Comme d'après (1.55) et l'équation de définition de  $t_0$  <sup>(146)</sup>

$$\frac{df}{dt} = A \frac{t - t_0}{b - t},$$

il en résulte

$$y_C - y_B \leq |A| \int_1 e^{-T(t)} \left| \frac{t - t_0}{b - t} \right| dt.$$

La fonction  $T(t)$  étant supérieurement bornée sur  $C_1$ , les hypothèses faites sur  $C_1$  montrent que l'on peut trouver une constante positive  $K$ , non nulle et bornée supérieurement, telle que l'on ait en chaque point de  $C_1$ , extrémités comprises,

$$e^{-T(t)} \left| \frac{t - t_0}{b - t} \right| \leq K.$$

Il suit de là, en appelant  $L$  la longueur du chemin  $C_1$  ( $L$  étant finie, par hypothèse)

$$y_C - y_B \leq |A| KL,$$

inégalité qui fournit pour  $|A|$  une minorante non nulle; il faut remarquer que ce résultat ne suppose pas que la distance  $d_1$  soit minorée. D'un autre côté, les raisonnements du paragraphe 25 prouvent que le paramètre  $|A|$  est borné supérieurement quelle que soit  $d_1$ .

<sup>(146)</sup> Cf. le renvoi <sup>(45)</sup>. Les calculs de ce renvoi montrent que

$$\psi_1 = -A(b - t_0)\pi.$$



Cela posé, les relations (1.33) et (1.55) permettent d'écrire, en remplaçant  $\psi_1$  par sa valeur  $-\Lambda(b-t_0)\pi$ ,

$$\frac{d_1}{b-t_0} = |\Lambda| \left[ \pi + \int_1^b \sin \Omega(t) \frac{t-t_0}{(b-t)(t-t_0)} dt \right].$$

D'après (3.56) l'intégrale qui figure au second membre est bornée supérieurement quel que soit  $b$ , pourvu que  $b$  soit fini; comme elle est positive et comme, par ailleurs,  $|\Lambda|$  est majoré et minoré, le second membre est fini quelle que soit  $d_1$ ; les infiniment petits  $d_1$  et  $b-t_0$  sont donc équivalents. C'est ce résultat que nous avons en vue.

*Allure de la ligne libre étranglée entre l'obstacle et la paroi.* — Effectuons dans les plans  $z$  et  $t$  des homothéties ayant pour centres respectifs le point C d'ordonnée  $z_c$  et son image  $t=1$ , et de rapports respectifs  $\frac{1}{b-1}$  et  $\frac{1}{b-t_0}$ . Nous poserons

$$t_1 = \frac{t-1}{b-1}, \quad z_1 = \frac{z-z_c}{b-t_0}.$$

Nous admettrons, comme ci-dessus, que l'obstacle se déforme lorsque  $d_1$  varie. Deux cas limites sont alors à considérer.

1° Cas où

$$\lim_{d_1 \rightarrow 0} [\pi - \Psi(1, d_1)] \log \frac{1}{b-1} = \infty.$$

D'après (3.53) l'homothétique  $t_0$  du point  $t_0$  se réduirait alors à  $t_1 = -\infty$  pour  $b=1$ . La fonction  $\Psi(t)$  étant continue,  $\Psi(t_1)$  converge uniformément vers  $\Psi(1)$  dans tout l'intervalle  $-\infty \leq t \leq 1$ , lorsque  $t_0$  tend vers 1. L'image du point  $t=b$  a l'affixe constant  $t=1$ .

Dans le plan  $z_1$ , la distance du point C à l'image de  $\mu_1$  reste finie, en vertu des résultats du précédent alinéa.

La correspondance  $l(t)$  étant continue, l'homothétique du point de bifurcation s'éloigne indéfiniment lorsque  $t_0$  tend vers 1;  $\Psi(t_1)$  tendant vers  $\Psi(1)$ , l'image de l'obstacle dans le plan  $z_1$  converge vers un demi-plan d'extrémité C faisant avec  $\mu_1$  un angle égal à  $\Psi(1)$ . En définitive, on obtient dans le plan  $z_1$  la configuration représentée sur la figure 11; il serait facile de construire le mouvement avec sillage correspondant;

l'étude de la ligne libre correspondante ferait connaître le comportement de  $\lambda_1$  dans le voisinage de C.

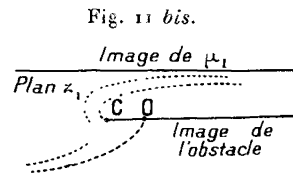
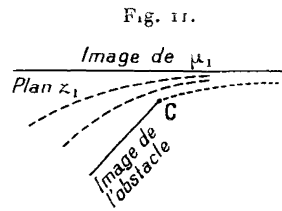
2° Cas où

$$\lim_{d_1=0} [\pi - \Psi(1, d_1)] \log \frac{1}{b-1} = 0.$$

D'après (3.54) l'homothétique  $t_{01}$  de  $t_0$  est à distance finie pour  $b=1$  : cette formule fournit la distance CO, puisqu'elle permet de calculer la valeur de  $t_{01}$  :

$$t_{01} = \frac{t_0 - 1}{b - t_0}.$$

Comme  $\lim \Psi(1) = \pi$  présentement,  $\Psi(t_1)$  converge uniformément vers  $\pi$  dans tout l'intervalle  $-\infty \leq t \leq 1$ . Quant au plan  $z_1$ , une discussion analogue à la précédente montre que l'image de l'obstacle se réduit à la limite au demi-plan parallèle à  $\mu_1$  et arrêté au point C;



l'image du point de bifurcation et celle de la paroi seront situées à des distances finies. La configuration correspondante est représentée sur la figure 11 bis.

*Étude de la fonction limite  $\Omega(t)$ .* — Envisageons maintenant une suite dénombrable de configurations  $C_i (i = 1, 2, \dots, \infty)$  caractérisées par les éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $d_{1i}$  dont les trois premiers, ne dépendant pas de  $i$ , définissent un obstacle fixe; nous admettrons que les distances  $d_{1i}$  forment une suite décroissante telle que

$$\lim_{i=\infty} d_{1i} = 0.$$

A chaque configuration  $C_i (i \neq \infty)$  correspond, d'après le théorème d'existence du paragraphe 28, au moins un sillage, c'est-à-dire au

moins un élément  $x = x\left[l_i(t), 0, \frac{1}{b_i - 1}\right]$  et, par suite, au moins une fonction  $\Psi[l_i(t)]$  et une fonction  $\Omega_i(t)$ . On a vu que les fonctions  $\Psi[l_i(t)]$  appartenant toutes à l'espace  $\mathcal{L}_n(t)$ , étaient également continues; d'après le théorème d'Arzela l'ensemble  $\Psi[l_i(t)]$  sera compact. De la suite infinie  $\Psi[l_i(t)]$  ( $i = 1, 2, \dots, \infty$ ), nous pouvons donc extraire une suite partielle  $\Psi[l_j(t)]$  ( $j = 1, 2, \dots, \infty$ ) convergeant uniformément sur tout l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$  vers une fonction limite  $\Psi[l(t)]$  de l'espace  $\mathcal{L}_n(t)$  <sup>(147)</sup>. Ces résultats permettent d'étudier le compartiment des fonctions  $\Omega_j(t)$  correspondantes. Chacune d'elles, en effet, est définie dans le demi-plan supérieur  $\mathcal{E}_j$  par les conditions frontières suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta_j(t) &= \Psi[l_j(t)] - \pi & \text{pour } -1 \leq t \leq t_{0j}, & \quad \Theta_j(t) = \Psi[l_j(t)] & \text{pour } t_{0j} \leq t \leq 1, \\ \Theta_j(t) &= 0 & \text{pour } b_j \leq t \leq \infty, & \quad \text{T}_j(t) = 0 & \text{pour } -\infty \leq t \leq -1 \text{ et } 1 \leq t \leq b_j, \end{aligned}$$

où  $t_{0j}$  désigne l'affixe de l'image du point de bifurcation dans le plan  $\mathcal{E}_j$ . Il suit de là que la suite  $\Omega_j(t)$  convergera vers une fonction limite  $\Omega(t)$  qui résout le problème mixte de Dirichlet suivant :

$$\begin{aligned} \Theta_j(t) &= \Psi[l(t)] & \text{pour } -1 \leq t \leq 1, & \quad \Theta(t) = 0 & \text{pour } 1 \leq t \leq \infty, \\ \text{T}(t) &= 0 & \text{pour } -\infty \leq t \leq -1, & \end{aligned}$$

la convergence est uniforme dans tout le demi-plan supérieur, le voisinage du point  $t = 1$  excepté. C'est ce qui résulte, en effet, de l'expression (3.56) de  $\Omega(t)$  qui fait correspondre à toute suite convergente de fonction  $\Psi[l_j(t)]$  une suite convergente de fonctions  $\Omega_j(t)$ ; des artifices analogues à ceux utilisés au paragraphe 10 permettent de transformer (3.56) de manière que l'expression correspondante de  $\Omega_j(t)$  ait un sens pour  $-1 \leq t < 1$ . En langage hydrodynamique, cela veut dire qu'il existe un sillage limite correspondant au cas de l'obstacle fixé à la paroi par son extrémité supérieure; les vitesses tendent uniformément vers leurs valeurs limites dans tout le domaine du fluide en mouvement, exception faite du voisinage du point  $t = 1$ .

<sup>(147)</sup> Cela n'implique nullement que l'ensemble  $\Psi[l_i(t)]$  ne possède qu'un seul élément limite  $\Psi[l(t)]$ .

## CHAPITRE IV.

### Unicité des solutions du problème de Helmholtz.

**30. GÉNÉRALITÉS. OBJET DU CHAPITRE.** — Au cours du précédent chapitre nous avons établi l'existence d'au moins une solution pour le problème du sillage et de la proue posé relativement à la configuration des parois rigides, définie dans le plan  $z$  au moyen des éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ . Dans ce chapitre, nous nous proposons de discuter le nombre de ces solutions et, en particulier, à signaler quelques cas où la solution est unique. Malheureusement, les résultats acquis dans cet ordre d'idées sont loin d'avoir la généralité de nos théorèmes d'existence; les modes de démonstration des théorèmes d'unicité reposent essentiellement sur quelques hypothèses supplémentaires de régularité et de forme [existence de la dérivée  $\Psi'(l)$  höldérienne, convexité ou symétrie de l'obstacle, etc.] dont les méthodes employées ne permettent guère de se passer <sup>(148)</sup>.

Signalons aussi que notre discussion d'unicité nous a permis de dégager quelques propriétés géométriques des régimes de Helmholtz relatifs à certaines configurations remarquables des éléments rigides (*cf.* §§ 34, 35). Parmi ces propriétés, citons la suivante : la distance  $d_1$  de l'obstacle à la paroi est une fonction croissante du débit  $\psi_1$  correspondant lorsque l'obstacle (symétrique ou convexe) reste fixe.

Le plan général des recherches qui suivent est dû en gros à M. Leray <sup>(149)</sup>.

Dans les premiers paragraphes de ce Chapitre, nous introduisons les hypothèses complémentaires de régularité de l'obstacle qui

---

<sup>(148)</sup> Signalons, toutefois, les résultats annoncés par M. Lavrentieff dans une Note récente des *C. R. de l'Acad. de l'U. R. S. S.* Les énoncés de M. Lavrentieff ne semblent concerner que le cas symétrique du problème du sillage. Les hypothèses que cet auteur fait sur la nature de l'obstacle ont été énumérées dans le renvoi en bas de la page 7.

<sup>(149)</sup> En particulier, les quatre derniers paragraphes de ce chapitre suivent de très près l'exposition de M. Leray.

légitimement la différentiation (au sens de M. Fréchet) des équations de M. Villat.

Nous réduisons ensuite la discussion de l'équation aux variations ainsi obtenue à un problème aux limites du type envisagé par M. Weinstein, et nous indiquons, en utilisant des raisonnements de M. Friedrichs, des cas où ce problème ne possède d'autres solutions que zéro <sup>(150)</sup>. Les méthodes de M. Leray permettent alors de conclure.

**31. NATURE DE L'OBSTACLE. DIFFÉRENTIATION DES ÉQUATIONS DE M. VILLAT.**

— Au cours de ce chapitre nous admettrons que les conditions imposées à l'obstacle au paragraphe 23 sont remplies; de plus, la fonction  $\Psi'(l)$  sera assujettie à vérifier la condition de Hölder

$$|\Psi'(l) - \Psi'(l_1)| \leq \text{const.} |l - l_1|^\mu \quad \text{pour } \alpha \leq l \leq l_1 \leq \beta,$$

d'exposant  $\mu$  supérieur à  $\frac{1}{2}$  <sup>(151)</sup>. Nous introduirons l'espace linéaire, normé et complet  $H_\mu(l)$ , qui se composera de l'ensemble des fonctions  $\varpi(l)$  définies sur un intervalle fini et vérifiant dans tout cet intervalle une condition de Hölder d'exposant  $\mu$ . Par norme  $\|\varpi(l)\|_\mu$  de  $\varpi(l)$  dans  $H_\mu(l)$ , nous entendons la grandeur

$$(4.1) \quad \|\varpi(l)\|_\mu = \text{Max} |\varpi(l)| + C,$$

C étant la plus petite constante vérifiant l'inégalité

$$|\varpi(l) - \varpi(l_1)| \leq C |l - l_1|^\mu.$$

D'après ce qui précède,  $\Psi'(l)$  est un élément de l'espace  $H_\mu(l)$ . Nous désignerons par  $E(\alpha, \beta, l, \mu)$  l'espace abstrait constitué par des fonctions  $\Psi(l)$  dont les dérivées  $\Psi'(l)$  soient des éléments de  $H_\mu(l)$ . Nous

<sup>(150)</sup> Pour cette partie de mon travail, je me suis servi de quelques résultats de M. Jacob.

<sup>(151)</sup> L'utilité de cette restriction apparaîtra au cours de ce paragraphe; notons, toutefois, que la discussion d'unicité du problème du sillage ne nécessite pas une hypothèse aussi stricte; nous n'avons introduit celle-ci que pour unifier notre exposé.

appellerons  $C_\Psi$  et  $C_{\Psi'}$  les plus petites constantes telles que

$$|\Psi(l) - \Psi(l_1)| \leq C_\Psi |l - l_1|^\mu, \quad |\Psi'(l) - \Psi'(l_1)| \leq C_{\Psi'} |l - l_1|^\mu,$$

et nous nommerons norme  $\|\Psi(l)\|_{1,\mu}$  de  $\Psi(l)$  dans  $E(\alpha, \beta, l, \mu)$  la grandeur

$$\|\Psi(l)\|_{1,\mu} = \{ \text{Maximum de } |\Psi(l)| \text{ dans l'intervalle } (\alpha, \beta) + C_\Psi \} \\ + \{ \text{Maximum de } |\Psi'(l)| \text{ dans l'intervalle } (\alpha, \beta) + C_{\Psi'} \}.$$

Dès lors, il est clair que l'espace  $E(\alpha, \beta, l, \mu)$  est linéaire, complet et normé au sens de M. Banach. Nous allons montrer que moyennant les hypothèses faites, les fonctionnelles des problèmes du sillage et de la proue peuvent être différentiées au sens de M. Fréchet toutes les fois que  $(a + 1)$  et  $(b - 1)$  sont distinctes de zéro.

*Problème du sillage.* — Au cours de ce paragraphe  $l(s)$ ,  $a$ ,  $b$  ne désigneront plus nécessairement les inconnues du problème du sillage posé pour la configuration du plan  $z$  définie au moyen des éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ ; la fonction  $l(s)$  sera un élément quelconque de l'espace  $E(0, \pi, s)$  — (ce qui implique, rappelons-le, l'existence de la dérivée  $\frac{dl(s)}{ds}$  vérifiant une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  dans tout l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ ) — et ne sera donc pas nécessairement croissante dans son intervalle de définition;  $a$  et  $b$  seront deux paramètres assujettis à vérifier les inégalités

$$a + 1 < 0, \quad b - 1 > 0,$$

moyennant lesquelles les fonctions elliptiques considérées par M. Villat et construites à partir des demi-périodes  $\omega_1$  et  $\omega_3$  correspondantes [cf. (1.6)] ne seront pas dégénérées; les symboles tels que

$$\frac{\partial p[\omega_1 u, \omega_1, \omega_3]}{\partial \omega_1}, \quad \frac{\partial p[\omega_1 u, \omega_1, \omega_3]}{\partial \omega_3},$$

par exemple, auront un sens.

Soient alors deux systèmes voisins d'éléments

$$\Psi(l), \quad \alpha, \quad \beta, \quad l(s), \quad a, \quad b, \quad d_1, \quad d_2, \\ \Psi^*(l), \quad \alpha^*, \quad \beta^*, \quad l^*(s), \quad a^*, \quad b^*, \quad d_1^*, \quad d_2^*.$$

Nous nous proposons de comparer les deux configurations dans le plan  $z$  que les formules de M. Villat font correspondre à chacun d'eux; pour abrégier les écritures, nous poserons <sup>(152)</sup>

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta l(s) = l^*(s) - l(s), \quad \delta a = a^* - a, \quad \delta b = b^* - b, \\ \Delta \Psi(l) = \Psi^*(l) - \Psi(l), \quad \Delta \Psi'(l) = \Psi'^*(l) - \Psi'(l), \\ \Delta \alpha = \alpha^* - \alpha, \quad \Delta \beta = \beta^* - \beta, \quad \Delta d_1 = d_1^* - d_1, \quad \Delta d_2 = d_2^* - d_2. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions  $\Psi[l(s)]$  subit au point  $Z = e^{i\theta}$  une variation [puisque la fonction  $\Psi(l)$  et son argument  $l(s)$  varient], dont la partie principale <sup>(153)</sup> est donnée par la formule

$$(4.3) \quad \delta \Psi[l(s)] = \Delta \Psi[l(s)] + \Psi'[l(s)] \delta l(s).$$

De ces définitions, il résulte que  $\Delta \Psi(l)$  est un élément de l'espace  $E(\alpha, \beta, l, \mu)$ , puisque cette fonction est égale à la différence de deux éléments de cet espace. D'autre part, les fonctions  $l(s)$  envisagées appartenant à l'espace  $E(0, \pi, s)$  <sup>(154)</sup>,  $\delta l(s)$  seront donc aussi un élément de cet espace [cf. (4.2)]. Il suit de là que  $\Delta \Psi[l(s)]$  et  $\Delta \Psi'[l(s)]$  envisagées comme fonctions de  $s$ , vérifieront les conditions de Hölder d'exposant  $\mu$ ; cela montre que  $\Psi'[l(s)] \delta l(s)$ , et donc, d'après (4.3),  $\delta \Psi[l(s)]$ , sont des éléments de l'espace  $H_\mu(s)$  dans tout l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ . En se reportant aux définitions des normes dans les espaces  $H_\mu(s)$ ,  $E(0, \pi, s)$  et  $E(\alpha, \beta, l, \mu)$  et en notant que

$$\|\Delta \Psi'(l)\|_{\mu} \leq \|\Delta \Psi(l)\|_{1, \mu},$$

<sup>(152)</sup> Le symbole  $\Delta$  est réservé de façon exclusive aux variations subies par les éléments du plan du mouvement, c'est-à-dire par les éléments connus à l'avance; les quantités telles que  $\Delta \Psi(l)$ ,  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \beta$ , etc., joueront dans la suite le rôle des variables indépendantes; au contraire, la variation  $\delta l(s)$ , par exemple, correspondant à deux configurations voisines données du plan  $z$  sera, dans le paragraphe suivant, considérée comme inconnue a priori. Au cours du paragraphe suivant,  $\delta l(s)$  ne désignera d'ailleurs plus la différence  $l^*(s) - l(s)$ , mais seulement sa partie principale.

<sup>(153)</sup> Relativement aux éléments  $\Delta \Psi(l)$  et  $\delta l(s)$ .

<sup>(154)</sup> On pourrait même affirmer que  $\frac{d^2 l(s)}{ds^2}$  existe, puisque  $\Psi'(l)$  vérifie une condition de Hölder (cf. § 22); nous n'aurons pas à utiliser cette propriété.

on établira aisément l'inégalité

$$(4.3') \quad \|\delta \Psi[l(s)]\|_{\mu} \leq \{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi(l)\|_{1,\mu} \}.$$

*Remarque.* — En vue de la différentiation des équations du problème de la proue, il est essentiel de noter que les résultats qui précèdent, et qui concernent la correspondance entre les plans  $z$  et  $Z$ , peuvent être appliqués à la correspondance  $z = z(t)$ . La fonction  $l(t)$  qu'on envisagerait alors serait un élément de l'espace  $E(-1, 1, t)$ ; il s'ensuivrait que  $\delta \Psi[l(t)]$  vérifierait une condition de Hölder d'exposant  $\mu$  dans tout l'intervalle  $-1 \leq t \leq 1$ . On aurait notamment

$$(4.3'') \quad |\delta \Psi[l(t)] - \delta \Psi[l(-1)]| \leq \text{const.} \cdot |1 + t|^{\mu} \leq \text{const.} \cdot s^{2\mu},$$

puisque, d'après (1.10'), la fonction  $l(Z) + 1$  présente pour  $Z = 1$  un zéro double.

Grâce à l'introduction de  $l(t)$ , on peut donc établir que pour  $s = 0$  ou  $s = \pi$ ,  $\delta \Psi[l(s)]$  vérifie une condition de Hölder relative à  $s$  et d'exposant  $2\mu$ .

Ceci posé, nous allons évaluer les parties principales des accroissements subis par tous les éléments (paramètres et fonctions) qui interviennent dans les formules de M. Villat.

L'équation (1.24), différenciée, définit la constante  $\delta s_0$ ,

$$(4.4) \quad \pi \delta s_0 = \int_0^{\pi} \delta \Psi[l(s)] ds.$$

égale à la partie principale de  $(s_0^* - s_0)$ .

Des relations (1.6), (1.6'), (1.8), (1.8'), on tirera les expressions de  $\delta \omega_1$ ,  $\delta \omega_3$ ,  $\delta \gamma$ ,  $\delta q$  et  $\delta s_1$ , en fonction de  $\delta a$  et  $\delta b$ , expressions qu'il est inutile de former explicitement. Dès lors, la partie principale  $\delta \Omega(Z)$  de l'accroissement  $\Omega^*(Z) - \Omega(Z)$  subi par la fonction  $\Omega(Z)$ , définie par (1.23) ou (1.51), est donnée, en un point  $Z$  fixe, par la formule

$$(4.5) \quad \delta \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \delta \Psi[l(s)] \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right] ds \\ - \frac{i\omega_1}{\pi} \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] \delta s_0 \\ - \frac{i\delta \log q}{8\pi^3} \int_0^{\pi} \Phi(s) \left\{ \frac{d}{d(\nu + \nu_1)} \left[ \frac{\theta''(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] \right. \\ \left. + \frac{d}{d(\nu - \nu_1)} \left[ \frac{\theta''(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} \right] \right\} ds.$$



où  $\Phi(s)$  désigne la fonction associée à  $\Psi[l(s)]$  (cf. § 12),  $\theta(\nu)$  la fonction  $\theta(\nu, q)$  de Jacobi,  $\nu$  et  $\nu_1$  les quantités  $\frac{\log Z}{2i\pi}$  et  $\frac{s}{2\pi}$ .

L'interprétation de ce résultat, dont le lecteur trouvera plus loin la justification, est la suivante :

1° L'ensemble de deux premiers termes du second membre de (4.5) définit une fonction  $F(Z)$  analytique dans la couronne  $C(q \leq |Z| < 1)$ , régulière partout sauf pour  $Z = Z_0$  et  $Z = \bar{Z}_0$  ( $Z_0 = e^{is_0}$ ,  $\bar{Z}_0 = e^{-is_0}$ ) et dont la partie réelle, nulle sur  $|Z| = q$ , est égale à  $\delta\Psi[l(s)]$  sur  $|Z| = 1$ .

2° Le troisième terme du second membre de (4.5) représente une fonction  $F_1(Z)$ , analytique dans  $C$ , dont la partie réelle, nulle sur  $|Z| = 1$ , est égale à  $-\frac{dT(qe^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q}$  pour  $Z = qe^{is}$ . [ $T(qe^{is})$  étant la partie imaginaire de  $\Omega(Z) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y)$  sur  $|Z| = q$ .]

Enfin  $F(Z)$  et  $F_1(Z)$  sont toutes deux réelles pour  $Z$  réel. L'ensemble de ces conditions suffit pour déterminer sans ambiguïté chacune des fonctions  $F(Z)$  et  $F_1(Z)$  et, par suite, la fonction  $\delta\Omega(Z)$ .

Pour établir les résultats qui précèdent, nous partirons de l'expression (4.51) de  $\Omega(Z)$ , valable pour  $q \leq |Z| < 1$ ; en différentiant (4.51) on trouve

$$(4.6) \quad \delta\Omega(Z) = \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \delta\Psi[l(s)] \left[ \frac{\theta'(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} + \frac{\theta'(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] ds$$

$$+ \frac{i \delta \log q}{2\pi^2} \int_0^\pi \Psi[l(s)] \left\{ \frac{\theta(\nu - \nu_1) \frac{\partial^2 \theta(\nu - \nu_1)}{\partial \nu \partial \log q} - \theta'(\nu - \nu_1) \frac{\partial \theta(\nu - \nu_1)}{\partial \log q}}{\theta^2(\nu - \nu_1)} \right.$$

$$+ \left. \frac{\theta(\nu + \nu_1) \frac{\partial^2 \theta(\nu + \nu_1)}{\partial \nu \partial \log q} - \theta'(\nu + \nu_1) \frac{\partial \theta(\nu + \nu_1)}{\partial \log q}}{\theta^2(\nu + \nu_1)} \right\} ds$$

$$+ i \delta \log q \left\{ \frac{\partial \theta(\nu - \nu_0)}{\partial \log q} - \frac{\partial \theta(\nu + \nu_0)}{\partial \log q} \right\} - \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{\theta'(\nu + \nu_0)}{\theta(\nu + \nu_0)} + \frac{\theta'(\nu - \nu_0)}{\theta(\nu - \nu_0)} \right\} \delta s_0,$$

relation où l'on a posé encore

$$\nu = \frac{\log Z}{2i\pi}, \quad \nu_1 = \frac{s}{2\pi}, \quad \nu_0 = \frac{s_0}{2\pi}.$$

Or, la fonction  $\theta(\nu, q)$  vérifie, comme il est bien connu, l'équation de

la chaleur

$$\frac{\partial^2 \theta(\nu, q)}{\partial \nu^2} = -4\pi^2 \frac{\partial \theta}{\partial \log q},$$

dont on tire

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial \log q} = -\frac{1}{4\pi^2} \theta'''(\nu).$$

Ces deux relations permettent de remplacer les dérivées de  $\theta(\nu, q)$  relativement à  $q$  par les dérivées de cette fonction relativement à  $\nu$ ; la somme des second et troisième termes de (4.6) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} & -i \frac{\delta \log q}{8\pi^4} \int_0^\pi \Psi[l(s)] \left\{ \frac{d}{d(\nu - \nu_1)} \left[ \frac{\theta''(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} \right] + \frac{d}{d(\nu + \nu_1)} \left[ \frac{\theta''(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] \right\} ds \\ & - \frac{i \delta \log q}{4\pi^2} \left[ \frac{\theta''(\nu - \nu_0)}{\theta(\nu - \nu_0)} - \frac{\theta''(\nu + \nu_0)}{\theta(\nu + \nu_0)} \right], \end{aligned}$$

ou encore, en passant à la fonction  $\Phi(s)$  au moyen des relations

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \Psi[l(s)] && \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi, \\ \Phi(s) &= \Psi[l(s)] - \pi && \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \end{aligned}$$

établies au paragraphe 12,

$$(4.7) \quad F_1(Z) = -\frac{i \delta \log q}{8\pi^4} \int_0^\pi \Phi(s) \left\{ \frac{d}{d(\nu - \nu_1)} \left[ \frac{\theta''(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} \right] + \frac{d}{d(\nu + \nu_1)} \left[ \frac{\theta''(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] \right\} ds.$$

Cette expression est identique au dernier terme  $F_1(Z)$  de la formule (4.5). Dans (4.7) nous pouvons substituer aux fonctions  $\theta(\nu, q)$ , les fonctions  $\zeta u$  et  $p u$  (avec  $u = 2\omega_1 \nu$ ,  $u_1 = 2\omega_1 \nu_1$ ,  $u_0 = 2\omega_1 \nu_0$ ) de Weierstrass. On a, en effet,

$$\zeta u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)}, \quad - \left( p u + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right) = \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{d}{d\nu} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)}.$$

On en tire successivement

$$\begin{aligned} \frac{\theta''(\nu)}{\theta(\nu)} &= 4\omega_1^2 \left[ \left( \zeta u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u \right)^2 - p u - \frac{\eta_1}{\omega_1} \right], \\ \frac{d}{d\nu} \left[ \frac{\theta''(\nu)}{\theta(\nu)} \right] &= -8\omega_1^3 \left[ 2 \left( \zeta u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u \right) \left( p u + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right) + p' u \right]; \end{aligned}$$

en sorte qu'il vient finalement

$$(4.7') \quad F_1(Z) = \frac{i\omega_1^3}{\pi^4} \delta \log q \int_0^\pi \Phi(s) \\ \times \left\{ 2 \left[ \zeta(u + u_1) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(u + u_1) \right] \left[ p(u + u_1) + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] \right. \\ \left. + 2 \left[ \zeta(u - u_1) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(u - u_1) \right] \left[ p(u - u_1) + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] \right. \\ \left. + p'(u + u_1) + p'(u - u_1) \right\} ds.$$

Pour achever l'identification de (4.5) et de (4.6), il suffira de transformer la somme des premier et dernier termes de (4.6) en y substituant à  $\frac{\theta'(v)}{\theta(v)}$  son expression en  $\zeta u$  (rappelée ci-dessus) et en se servant de l'équation (4.4). Ainsi, la formule (4.5) est complètement vérifiée. Pour abrégier, nous poserons

$$(4.8) \quad F(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \delta \Psi[l(s)] [\zeta(u - u_1) + \zeta(u + u_1)] ds \\ - \frac{i\omega_1}{\pi} [\zeta(u - u_0) + \zeta(u + u_0)] \delta s_0.$$

D'après sa définition même,  $F(Z)$  est une fonction analytique, régulière pour  $q \leq |Z| < 1$  et uniforme dans la couronne  $C$ ; si, en effet, l'argument de  $Z$  varie de  $2\pi$ , l'intégrale de (4.8) s'accroît de la quantité

$$\frac{4\eta_1\omega_1 i}{\pi^2} \int_0^\pi \delta \Psi[l(s)] ds$$

[car  $\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1$ ] égale précisément, en vertu de (4.4), à l'accroissement — changé de signe — du terme fini de cette formule.

Nous allons maintenant indiquer les conditions aux limites qui déterminent la partie réelle de  $F(Z)$  dans la demi-couronne  $d$ .

1° La partie réelle de  $F(Z)$  est nulle pour  $Z = q e^{i\theta}$ . L'expression (4.8) de  $F(Z)$  est, en effet, valable pour  $|Z| = q$ . Faisons donc  $Z = q e^{i\theta}$  dans cette formule et utilisons la relation

$$(4.9) \quad \zeta(u + \omega_1) = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p'u}{p u - e} + \eta$$

(*cf.* VII<sub>0</sub> T. M.);  $\eta_3$  étant une imaginaire pure,  $\zeta u$ ,  $p u$  et  $p' u$  étant réels pour  $u$  réel, la partie réelle de  $F(z)$  le long de  $|Z| = q$  se réduit à

$$\frac{2\eta_1 \omega_1 i}{\pi^2} \int_0^\pi \delta \Psi[l(s)] ds - \frac{2\eta_3 \omega_1 i}{\pi} \delta s_0,$$

quantité égale à zéro en vertu de (4.4).

2° La fonction  $F(Z)$  est réelle pour  $Z$  réel. Cela résulte de la formule d'addition de la fonction  $\zeta u$

$$i[\zeta(u + u_1)] + \zeta(u - u_1) = \frac{i p' u}{p u - p u_1} + 2i \zeta u$$

(*cf.* CIII<sub>1</sub> T. M.). Pour  $Z$  réel et positif, par exemple,  $u = \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z$  est une imaginaire pure;  $u_1 = \frac{\omega_1}{\pi} s$  est réel; le second membre de la formule précédente est réel, puisque  $i p' u$  et  $i \zeta u$  sont réels. Notons que la contribution de  $2 \zeta u$  dans (4.8) est nulle en vertu de (4.4).

3° La partie réelle de  $F(Z)$  au point  $Z = e^{s_0}$  est égale à  $\delta \Psi[l(s)]$ . Cela résulte du fait que le second terme de (4.8) est imaginaire pour  $Z = e^{s_0}$  et de la formule (1.15) de M. Villat qui résout le problème de Dirichlet dans un anneau. Il s'ensuit que la partie imaginaire de la fonction

$$F(Z) + \frac{i\omega_1}{\pi} \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] \delta s_0$$

est égale, pour  $Z = e^{s_0}$ , à

$$\int_0^\pi \left\{ \delta \Psi[l(s')] - \delta \Psi[l(s)] \right\} \left\{ \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s') \right] + \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s') \right] \right\} ds' + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s \delta \Psi[l(s)].$$

D'après le théorème de Fatou et Priwaloff (*cf.* § 11) cette expression est un élément de l'espace  $H_\mu(s)$ , puisque  $\delta \Psi[l(s)]$  appartient à cet espace.

Il résulte de ce qui précède que la fonction  $F(Z)$ , définie dans  $d$ , est prolongeable à travers l'axe réel; elle est donc complètement définie

dans  $C$  par la donnée de l'élément  $\delta \Psi[l(s)]$ , pour une solution donnée du problème de Helmholtz.

Nous allons maintenant étudier les conditions limites que vérifie dans  $d$  la fonction  $F_1(Z)$ , définie par (4.7').

1° La partie réelle de  $F_1(Z)$  est nulle pour  $Z = e^{i\epsilon}$ . Telle quelle, l'expression (4.7) n'est pas valable pour  $Z = e^{i\epsilon}$ , puisque, alors  $u = u_1$  pour  $s = s_1$  et l'élément différentiel de (4.7') devient infini pour cette valeur de l'argument  $s$ . Comme la quantité  $[2\zeta u p u + p' u]$  est régulière pour  $u = 0$ , l'expression (4.7') de  $F_1(Z)$  se scinde en deux parties; la première  $F_2(Z)$ ,

$$F_2(Z) = - \frac{2i\omega_1^2 \eta_1}{\pi'} \delta \log q \int_0^\pi \Phi(s) [(u - u_1) p(u - u_1) + (u + u_1) p(u + u_1) - \zeta(u - u_1) - \zeta(u + u_1)] ds,$$

n'a pas de sens pour  $Z = e^{i\epsilon}$ ; l'élément différentiel de la seconde, qu'il est inutile d'écrire, est fini et réel pour  $Z = e^{i\epsilon}$ , en sorte que sa contribution à la partie réelle de  $F_1(Z)$  est nulle à cause du facteur  $i$  de (4.7').

Pour étudier les valeurs frontières de  $F_2(Z)$ , nous nous servirons de l'artifice classique (cf. § 10) et nous écrirons le second membre de (4.9) en y supposant d'abord  $|Z| \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} (4.10) \quad F_2(Z) = & -i \frac{2\omega_1^2 \eta_1}{\pi'} \delta \log q \int_0^\pi [\Phi(s) - \Phi(\epsilon)] \\ & \times [(u - u_1) p(u - u_1) + (u + u_1) p(u + u_1) - \zeta(u - u_1) - \zeta(u + u_1)] ds \\ & - i \frac{2\omega_1^2 \eta_1}{\pi'} \Phi(\epsilon) \delta \log q \int_0^\pi \\ & \times [(u - u_1) p(u - u_1) + (u + u_1) p(u + u_1) - \zeta(u - u_1) - \zeta(u + u_1)] ds. \end{aligned}$$

Comme  $du_1 = \frac{\omega_1}{\pi} ds$ , le deuxième terme de (4.10) s'intègre sans difficulté grâce à la formule

$$\int (u - u_1) p(u - u_1) du_1 = (u - u_1) \zeta(u - u_1) + \int \zeta(u - u_1) du_1$$

et celle qu'on en déduit en changeant  $u_1$  en  $-u_1$ ; on trouve aussi que pour  $Z = e^{i\varepsilon}$  sa contribution à  $F_2(Z)$ , égale à

$$-i \frac{2\omega_1^2 \eta_1}{\pi^3} \Phi(\varepsilon) \delta \log q \left\{ \left( \frac{\varepsilon}{\pi} - 1 \right) \zeta \left[ \omega_1 \left( \frac{\varepsilon}{\pi} - 1 \right) \right] - \left( \frac{\varepsilon}{\pi} + 1 \right) \zeta \left[ \omega_1 \left( \frac{\varepsilon}{\pi} + 1 \right) \right] \right\},$$

est purement imaginaire. Quant au premier terme de (4.10), observons que le facteur entre accolades qui figure dans son élément différentiel est réel pour  $Z = e^{i\varepsilon}$  et présente un pôle de premier ordre seulement lorsque  $\varepsilon = s$ ; l'intégrale correspondante a donc un sens, puisque  $\Phi(s)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$  pour  $s_0 \leq s \leq \pi$  et  $0 \leq s \leq s_0$  et est réelle; le terme considéré est donc, pour  $Z = e^{i\varepsilon}$  ( $\varepsilon \neq s_0$ ), imaginaire pure.

C. Q. F. D.

2° La fonction  $F_1(Z)$  est réelle pour  $Z$  réel. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce point, évident a priori. Il suffit de s'appuyer sur les formules d'addition pour les fonctions  $\zeta u$  et  $p u$ .

3° La partie réelle de  $F_1(Z)$  est égale à  $-\frac{d\Gamma(q e^{i\varepsilon})}{ds} \frac{\delta q}{q}$  pour  $Z = q e^{i\varepsilon}$ . En effet, l'expression (4.7') de  $F_1(Z)$  a un sens pour  $Z = q e^{i\varepsilon}$ . La formule (cf. VII<sub>2</sub> T. M.)

$$\zeta(u - u_1) = \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) + \omega_1 \right] = \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) \right] + \eta_1 + \frac{1}{2} \frac{p' \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) \right]}{p \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) \right] - e_3}$$

montre que les quantités  $p(u + u_1)$ ,  $p(u - u_1)$ ,  $p'(u - u_1)$ ,  $p'(u + u_1)$  sont réelles le long de  $|Z| = q$  (455), la partie imaginaire de  $\zeta(u - u_1)$  étant égale à  $\eta_3$ . Dans ces conditions, la partie réelle de l'expression (4.7') de  $F_1(Z)$  sera donnée, pour  $Z = q e^{i\varepsilon}$ , par la formule

$$(4.11) \quad \operatorname{Re} F_1(Z) = 2i \left( \eta_1 - \frac{\eta_1 \omega_1}{\omega_1} \right) \frac{\omega_1^3}{\pi^3} \delta \log q \int_0^\pi \Phi(s) \\ \times \left\{ p \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) + \omega_1 \right] + p \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon + s) + \omega_1 \right] \right\} ds,$$

(455) On se rappellera que, pour  $Z = q e^{i\varepsilon}$ , on a

$$u = \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_1.$$

en remarquant que la contribution des termes constants de l'accroissement (4.7') est nulle en vertu de (1.16). Or, la relation de Legendre (X<sub>6</sub> T.M.) donne

$$\eta_1 - \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} = - \frac{\pi i}{2 \omega_1},$$

ce qui permet d'identifier le second membre de (4.11) avec la quantité  $-\frac{dT(q e^{i\varepsilon})}{d\varepsilon} \delta \log q$  calculée directement, à partir de (1.15).

C. Q. F. D.

Nous écrirons

$$(4.12) \quad \delta \Omega(Z) = \delta \Omega_1(Z) - \frac{i \omega_1}{\pi} \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] \delta s_0.$$

D'après ce que nous avons vu,  $\delta \Omega_1(Z)$  vérifiera le long de  $|Z| = 1$  une condition de Hölder d'exposant  $\mu$ , puisque sa partie réelle, égale à  $\delta \Psi[l(s)]$  pour  $|Z| = 1$ , vérifie aussi une telle condition. Il s'ensuit qu'au point  $Z = Z_0 = e^{i s_0}$  on a le développement limité

$$(4.12') \quad \delta \Omega(Z) = \frac{Z_0 \delta s_0}{Z - Z_0} + \dots,$$

où le symbole ... désigne une fonction de  $Z$  hölderienne, nulle pour  $Z = Z_0$ .

*Remarque.* — L'expression (4.6), et, par suite, (4.5), de  $\delta \Omega(Z)$  ne dépend de  $a, b, \delta a$  et  $\delta b$  que par l'intermédiaire de  $q(a, b)$  et de  $\delta q(a, b)$ ; d'après ce que nous avons vu au paragraphe 14 la fonction  $q(a, b)$  se comporte régulièrement lorsque l'un des paramètres  $a$  et  $b$  (ou les deux à la fois) augmentent indéfiniment; la formule (4.6) restera donc valable au cours de cette transformation. Nous allons maintenant étudier la partie principale de l'accroissement  $f^*(Z) - f(Z)$ , égale à la différentielle  $\delta f(Z)$  calculée en un point  $Z$  fixe. Nous avons, en différentiant (1.4), la relation

$$(4.13) \quad \delta f(Z) = - \frac{\delta \psi_2}{\pi} \log(t-a) - \frac{\delta \psi_1}{\pi} \log(t-b) + \frac{\psi_2}{\pi} \frac{\delta a}{(t-a)} \\ + \frac{\psi_1}{\pi} \frac{\delta b}{t-b} - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t-t_0}{(t-a)(t-b)} \delta t(Z) + \delta D + i \delta \psi_1,$$

dans laquelle les logarithmes interviennent avec les déterminations

choisies au paragraphe 9, et le symbole  $\delta t(Z)$  désigne la différentielle de la fonction  $t(Z)$  [cf. (1.9)] prise en un point  $Z$  fixe.

Pour évaluer  $\delta t(Z)$  nous utiliserons la formule <sup>(156)</sup>

$$(4.14) \quad \delta p u = \frac{1}{16\pi^2 \omega_1^2} \frac{d^2}{d\nu^2} \left[ \frac{\theta''(\nu)}{\theta(\nu)} \right] \delta \log q - \left[ 2 p u + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] \frac{\delta \omega_1}{\omega_1} - \frac{\delta \eta_1}{\omega_1} + 2 \omega_1 p' u \delta \nu$$

(où le premier membre représente la variation subie en un point  $u$  fixe) et celle qu'on en déduit en la dérivant par rapport à  $u$ ; suivant l'usage,  $u$  et  $\nu$  sont reliés par la relation  $u = 2 \omega_1 \nu$ . Nous poserons

$$(4.14') \quad \delta p u = \delta p_1 u + 2 \omega_1 p' u \delta \nu.$$

D'après cela, le symbole  $\delta p_1 u$  représente la variation subie par  $p(2 \omega_1 \nu)$  en un point  $\nu$  fixe. On aurait, avec les mêmes notations, une formule analogue pour  $\delta p' u$ .

Dans ces conditions, la formule (1.10), dans laquelle on pose [cf. (1.7)]

$$(4.14'') \quad u = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \quad \nu = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{\gamma}{4\omega_1} - \frac{1}{2i\pi} \log Z$$

donne, après différentiation

$$(4.15) \quad \delta t(Z) = \frac{\delta a + \delta b}{4} + \frac{1}{2} \frac{\delta p_1 u - \delta p_1 \gamma}{p u - p \gamma} - \frac{1}{2} \frac{(p' u - p' \gamma)}{(p u - p \gamma)^2} (\delta p_1 u - \delta p_1 \gamma) \\ + \frac{dt}{du} 2 \omega_1 \delta \nu + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{p' u - p' \gamma}{p u - p \gamma} \right) \omega_1 \delta \gamma.$$

<sup>(156)</sup> Le lecteur vérifiera sans peine la formule du texte en différentiant la relation

$$p(2 \omega_1 \nu, \omega_1, \omega_3) = p(u, \omega_1, \omega_3) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{d}{d\nu} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)}$$

dans laquelle  $\nu$  reste fixe; on utilisera l'équation

$$\frac{d^2 \theta}{d\nu^2} = -4\pi^2 \frac{\partial \theta}{\partial \log q},$$

et l'on introduira dans l'expression de la dérivée un terme additif en  $\delta \nu$  pour tenir compte de la variation subie par la fonction  $\nu = \frac{u}{2\omega_1} = \nu(Z, \omega_2, \omega_3, \gamma)$  en un point  $Z$  fixe.



De l'ensemble des formules (4.13), (4.14') et (4.14'') et (4.15), résultent les conséquences suivantes que, presque toujours, nous pourrons vérifier directement.

1° La fonction  $\delta f(Z)$  est analytique et régulière sur le cercle  $Z = e^{is}$ ;  $\delta f(e^{is})$  est d'ailleurs réelle; ce résultat est évident *a priori* puisque  $f(e^{is})$  est une fonction réelle de  $s$ .

Au point  $Z = Z_0 = e^{is_0}$ , nous avons le développement limité

$$(4.16) \quad \delta f(Z) = - \left( \frac{d^2 f}{dZ^2} \right)_{Z=Z_0} (Z - Z_0) \delta Z_0 + \dots,$$

formule où le symbole  $\dots$  désigne une fonction analytique présentant pour  $Z = Z_0$  un zéro d'ordre 2 au moins. Pour justifier directement (4.16), il suffira de différentier la relation (2.11) que l'on peut encore écrire

$$(4.16') \quad f(Z) = \frac{(Z - Z_0)^2}{1.2} \left( \frac{d^2 f}{dZ^2} \right)_{Z=Z_0}$$

2° La fonction  $f(Z)$  est régulière le long des segments  $(-1, -q)$ ,  $(q, 1)$  de l'axe des  $X$ , les points  $Z = \pm q$  exceptés; dans les voisinages de ces points on a

$$(4.17) \quad \delta f(Z) = - \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{\delta q}{(Z+q)} - \frac{2\delta\psi_1}{\pi} \log(Z+q) + \text{série entière en } (Z+q),$$

$$(4.17') \quad \delta f(Z) = + \frac{2\psi_2}{\pi} \frac{\delta q}{(Z-q)} - \frac{2\delta\psi_2}{\pi} \log(Z-q) + \text{série entière en } (Z-q).$$

Ces développements limités peuvent se justifier directement en différentiant (2.9).

3° La partie imaginaire  $I \delta f(Z)$  de  $\delta f(Z)$  est égale à

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} I \delta f(Z) = \delta\psi_1 + \frac{df(e^{is})}{ds} \delta \log q \quad \text{le long de l'arc } s_1 \leq s \leq \pi \text{ du cercle } Z = qe^{is}, \\ \text{et à} \\ I \delta f(Z) = -\delta\psi_2 + \frac{df(e^{is})}{ds} \delta \log q \quad \text{le long de l'arc } 0 \leq s \leq s_1 \text{ du cercle } Z = qe^{is}. \end{array} \right.$$

La présence des constantes additives  $\delta\psi_1$  et  $\delta\psi_2$  dans les formules (4.18) se justifie par la simple inspection de l'expression (4.13) de  $\delta f$ ,

compte tenu des déterminations choisies pour les logarithmes de  $(t - a)$  et de  $(t - b)$  qui y figurent (*cf.* § 9). Quant au terme variable de (4. 12), il ne peut provenir que de la partie imaginaire du terme

$$-\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t - a)(t - b)} \delta t(Z) = \frac{df}{dt} \delta t(Z)$$

de (4. 13) [*cf.* (1. 10)] puisque  $t$  est réel pour  $Z = q e^{is}$  et que la constante  $\delta D$  est réelle. Tout revient donc à établir l'égalité

$$(4. 19) \quad \frac{df(q e^{is})}{dt(q e^{is})} \text{Imag. } \delta t(q e^{is}) = \frac{df(q e^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q}.$$

Or, l'argument  $u$  est réel pour  $Z = q e^{is}$  [*cf.* (4. 14')]; il s'ensuit que les différentielles  $\delta p, u$  et  $\delta p', u$  correspondantes sont aussi réelles, ainsi que  $\delta p, \gamma$  et  $\delta p', \gamma$  [*cf.* par exemple (1. 6')].

La contribution à  $I \delta t(q e^{is})$  ne peut donc provenir que du terme  $\frac{dt}{du} {}_2\omega_1 \delta v$  de (4. 15), égal pour  $Z = q e^{is}$  à [*cf.* (4. 14'')]

$$\frac{dt}{ds} \frac{ds}{dZ} \frac{dZ}{du} {}_2\omega_1 \delta v = - {}_2\omega_1 \frac{dt(q e^{is})}{ds} \frac{\pi}{\omega_1} \left( \frac{\delta \tau}{4} - \frac{1}{2} \delta \frac{\gamma}{\omega_1} \right).$$

On en tire la relation, valable pour  $Z = q e^{is}$ ,

$$I \frac{dt}{du} {}_2\omega_1 \delta v = \frac{dt(q e^{is})}{ds} \delta(i\tau) = \frac{dt(q e^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q}$$

qui justifie (4. 19) et par suite (4. 18).

4° La fonction  $\delta f(Z)$  n'est pas régulière pour  $Z_1 = q e^{is}$  (*cf.* le § 9); dans le voisinage de ce point, on peut écrire

$$(4. 20) \quad \delta f(Z) = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\delta Z_1}{Z - Z_1} + \frac{\delta \psi_1 + \delta \psi_2}{\pi} \log(Z - Z_1) + \dots$$

Pour vérifier directement (4. 20), il suffit d'observer que les points  $t = \infty$  et  $Z = Z_1$  se correspondant, on a, dans le voisinage de  $Z = Z_1$ , d'après (1. 4),

$$f = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \log t(Z) + \dots,$$

tandis que (1.9) et (1.10') permettent d'écrire

$$t(Z) = \frac{-\frac{i\pi}{4\omega_1} Z_1}{Z - Z_1} + \dots$$

On a donc, en définitive, le développement limité

$$f(Z) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \log(Z - Z_1) + \dots$$

qui, différentié, conduit à la relation (3.18).

En résumé,  $\delta f(Z)$  est une fonction analytique de  $Z$ , définie dans le domaine  $d$ ;  $\delta f(Z)$  est régulière en chaque point intérieur de  $d$  et sur ses frontières, exception faite des points  $Z = \pm q$  et  $Z = Z_1$ .

*Remarque.* — Les expressions (4.13) et (4.15) de  $\delta f(Z)$  et  $\delta t(Z)$  font intervenir explicitement les paramètres  $\delta\psi_1$ ,  $\delta\psi_2$ ,  $\delta a$  et  $\delta b$ ; telles quelles, ces formules ne sont donc valables que si  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ,  $a$  et  $b$  restent finis; nous laissons au lecteur le soin de lever cette indétermination apparente en utilisant les transformations du paragraphe 14.

Dans la suite nous aurons encore à nous servir de la différentielle  $\frac{d\delta f(Z)}{dZ}$ .

Il serait aisé d'en former l'expression explicite en dérivant par rapport à  $Z$  les formules (4.13), (4.14) et (4.15); mais nous nous contenterons de signaler les propriétés suivantes de  $d\delta f(Z)$ , faciles à vérifier directement.

1°  $\frac{d\delta f(Z)}{dZ}$  est une fonction analytique de  $Z$ , réelle le long des frontières de la demi-couronne  $d$ , le demi-cercle  $|Z| = q$  excepté. Elle est régulière pour  $Z = e^{i\theta}$ ; elle n'est pas holomorphe pour  $Z = Z_1$  et  $Z = \pm q$ .

2°  $\frac{d\delta f(Z)}{dZ}$  est régulière pour chacun des segments  $-1 \leq X < -q$ ,  $q < X \leq 1$ , les points  $Z = \pm q$  exceptés. Dans le voisinage de ces points on a, en différentiant (3.17') et (3.17),

$$(4.21) \quad \frac{d\delta f(Z)}{dZ} = \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{\delta q}{(Z+q)^2} - \frac{2\delta\psi_1}{\pi} \frac{1}{Z+q} + \dots$$

$$(4.21') \quad \frac{d\delta f(Z)}{dZ} = -\frac{2\psi_2}{\pi} \frac{\delta q}{(Z-q)^2} - \frac{2\delta\psi_2}{\pi} \frac{1}{Z-q} + \dots$$

3°  $\frac{d\delta f(Z)}{dZ}$  est régulière le long du cercle  $Z = q e^{is}$ , les points  $Z = \pm q$  [cf. (4.21) et (4.21')] et  $Z = Z_1$  exceptés; en ce dernier point, on a le développement limité

$$\frac{d\delta f(Z)}{dZ} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\delta Z_1}{(Z - Z_1)^2} + \frac{\delta\psi_1 + \delta\psi_2}{\pi} \frac{1}{Z - Z_1} + \dots$$

qu'on retrouve directement en différentiant (4.20).

*Remarque.* — Il serait aisé de vérifier que les différentielles  $\delta\Omega(Z)$ ,  $\delta f(Z)$ ,  $\frac{d\delta f(Z)}{dZ}$  relatives aux cas du courant fluide limité par la seule paroi  $\mu_1$  ou au courant illimité, s'obtiendraient en effectuant sur les formules obtenues au cours de ce paragraphe le passage à la limite utilisé au paragraphe 14. Lorsque  $\mu_2$  s'éloigne indéfiniment,  $\mu_1$  restant à distance finie,  $Z_1$  tend, on l'a vu, vers  $+q$ ; les relations (1.43) et (1.50) montrent qu'à la limite  $f(Z)$  possédera pour  $Z = q$  un pôle d'ordre 2; dans le voisinage de ce point, on aura

$$(4.22) \quad f = -A \frac{\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{1}{(Z - q)^2} + \frac{2\psi_1}{\pi} \log(Z - q) + \dots$$

en sorte qu'en dérivant il vient

$$(4.22') \quad df = -2A \frac{\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{\delta q}{(Z - q)^3} - \frac{\pi^2}{(Z - q)^2} \delta \left( A \frac{q^2}{\omega_1^2} \right) - \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{\delta q}{Z - q} + \frac{2\delta\psi_1}{\pi} \log(Z - q) + \dots$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la transformation fonctionnelle  $V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]$  définie par (3.36) possède une différentielle au sens de M. Fréchet. On tire, en effet, de (3.36), en tenant compte de (1.33''),

$$(4.23) \quad \frac{d\delta L(s)}{ds} = e^{-T_0(e^{is})} \left[ \frac{d\delta f(e^{is})}{ds} - \frac{df(e^{is})}{ds} \delta T(e^{is}) \right] \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)},$$

le premier membre désignant la partie principale de l'accroissement  $\frac{dL^*(s)}{ds} = \frac{dL(s)}{ds}$  que  $\frac{dL(s)}{ds}$  subit en un point  $Z = e^{is}$  fixe. Le deuxième

facteur du second membre de (4.23) s'annule pour  $s = s_0$ ; d'après (4.12) il se présente, en effet, sous forme de la somme de la quantité

$$\frac{df}{ds} \left\{ \frac{\omega_1}{\pi} \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right] \delta s_0 - \delta T_1(e^{is}) \right\}$$

[qui possède un zéro simple pour  $s = s_0$  en vertu de (2.11) et de la continuité hölderienne de  $\delta T_1(e^{is})$ ] et de la quantité

$$\frac{d \delta f(e^{is})}{ds} + \frac{\omega_1}{\pi} \frac{df}{ds} \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right] \delta s_0.$$

qui s'annule comme  $s - s_0$  pour  $s = s_0$  en vertu de (2.11) et (4.16). Il suit de là que l'expression (4.23) de  $\frac{d \delta L(s)}{ds}$  est régulière pour  $s = s_0$  malgré la discontinuité du facteur  $\frac{1}{\sigma \left[ \frac{\omega_2}{\pi} (s - s_0) \right]}$  pour cette valeur

de  $s$ , et vérifie une condition de Hölder d'exposant  $\mu$  pour  $0 \leq s \leq \pi$ .

La relation (4.23) définit la fonction  $\delta L(s)$ , à une constante additive près; pour déterminer celle-ci, nous utiliserons l'une ou l'autre des équations donnant  $\alpha$  ou  $\beta$  [cf. l'égalité (3.19) et les précédentes] qui fournissent, après différentiation, les conditions

$$(4.24) \quad \begin{cases} \delta L(0) = \Delta\alpha, \\ \delta L(\pi) = \Delta\beta. \end{cases}$$

Les deux fonctions  $\delta L(s)$  que l'on détermine ainsi sont identiques entre elles; en effet, en différentiant (3.19), on obtient la relation

$$(4.24') \quad (\Delta\beta - \Delta\alpha) = \int_0^\pi e^{-T_0(e^{is})} \left[ \frac{d \delta f(e^{is})}{ds} - \frac{df(e^{is})}{ds} \delta T_1(e^{is}) \right] \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_2}{\pi} (s - s_0) \right]} ds$$

qui exprime la compatibilité de (4.23) et de chacune des équations (4.24).

Nous ferons remarquer que les parties principales  $\delta\psi_1$  et  $\delta\psi_2$  des accroissements  $\psi_1^* - \psi_1$  et  $\psi_2^* - \psi_2$  de  $\psi_1$  et  $\psi_2$  interviennent dans les formules (4.23), (4.24) et (4.24') par l'intermédiaire de  $d \delta f(e^{is})$ , c'est-à-dire par l'intermédiaire de  $(\delta\psi_1 + \delta\psi_2)$  seulement; on s'en assure aisément en dérivant par rapport à  $Z$  l'expression (4.11)

de  $\delta f(Z)$ . A cet égard la relation (4.24') peut être considérée comme équation de définition de  $\delta\psi_1 + \delta\psi_2$ ; résolue par rapport à cette différentielle, (4.24') en fournira une expression linéaire et homogène relativement à  $\delta\Psi[l(s)]$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\delta a$ ,  $\delta b$  et  $\delta s_0$ .

Ces résultats entraînent les conséquences suivantes :

1° la fonction  $\delta L(s)$  est définie à partir des éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l(s)$ ,  $a$ ,  $b$  et de leurs accroissements  $\Delta\Psi(l)$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\delta l(s)$ ,  $\delta a$  et  $\delta b$  [cf. (4.2)]; nous pouvons donc poser

$$(4.24a) \quad \delta L(s) = W[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta\Psi(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \delta a, \delta b];$$

2° la transformation fonctionnelle  $W$  ainsi définie est complètement continue par rapport à tous ses arguments et est, de plus, linéaire et homogène par rapport aux six derniers d'entre eux;

3° la transformation  $W$  fournit des fonctions  $\delta L(s)$  appartenant à l'espace  $E(0, \pi, s, \mu)$ .

Observons que  $\delta l(s)$  n'intervient pas dans  $W$  que par l'intermédiaire de  $\delta\Psi[l(s)]$ ; d'après (4.3)  $W$  ne dépendra pas de  $\delta l(s)$  lorsque  $\Psi'(l)$  est nul, c'est-à-dire dans le cas d'un obstacle rectiligne.

Nous nous proposons maintenant de montrer que la transformation  $W$  définie par l'équation (4.24a) est la différentielle, au sens de M. Fréchet, de la transformation  $V$  définie par (3.36).

Pour abrégier l'exposition des calculs qui suivent, nous conviendrons de représenter par  $K$  des fonctions bornées des caractéristiques géométriques de deux configurations voisines que nous envisageons. Posons [cf. (4.2)]

$$(4.25) \quad \gamma(h, s) = \Psi'^*[l(s) + h \delta l(s)] - \Psi'[l(s)].$$

Comme  $\gamma(h, s)$  peut encore s'écrire

$$\gamma(h, s) = \Psi'^*[l(s) + h \delta l(s)] - \Psi'^*[l(s)] + \Psi'^*[l(s)] - \Psi'[l(s)],$$

il vient, d'après (4.1) et (4.2) et pour  $|h|$  borné,

$$|\gamma(h, s)| \leq K \{ |\delta l(s)|^\mu + |\Delta\Psi'[l(s)]| \},$$

donc, *a fortiori*,  $\mu$  étant inférieur à 1 (<sup>157</sup>),

$$(4.26) \quad |\gamma(h, s)| \leq K \{ |\delta l(s)|^\mu + |\Delta\Psi'[l(s)]|^\mu \} \leq K \{ |\delta l(s)| + |\Delta\Psi'[l(s)]| \}^\mu,$$

---

(<sup>157</sup>) La dernière inégalité s'obtient en remarquant que, pour  $|x| < 1$ , on peut

La première de ces inégalités donne

$$(4.27) \quad |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \right\}^\mu$$

puisque, d'après les définitions mêmes des normes dans les espaces  $E(0, \pi, s)$  — dont  $\delta l(s)$  est un élément — et  $E(\alpha, \beta, l, \mu)$  auquel appartient  $\Delta \Psi(l)$ , on peut écrire

$$\left| \|\delta l(s)\|^\mu - \|\delta l(s')\|^\mu \right| \leq 2 \|\delta l(s)\|^\mu$$

et

$$\left| \|\Delta \Psi[l(s)]\|^\mu - \|\Delta \Psi[l(s')]\|^\mu \right| \leq 2 \|\Delta \Psi[l(s)]\|^\mu.$$

D'un autre côté,  $\gamma(h, s)$ , envisagé comme fonction de  $s$ , se présente sous forme de différence de deux fonctions hölderiennes; on a, en effet, d'après (4.1) et (4.2),

$$\begin{aligned} & |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \\ &= \left| \left\{ \Psi'^*[l(s') + h \delta l(s')] - \Psi'^*[l(s) + h \delta l(s)] \right\} - \left\{ \Psi'[l(s')] - \Psi'[l(s)] \right\} \right| \\ &\leq \left\{ \text{const.} \cdot |l(s) - l(s') + h \delta l(s) - h \delta l(s')|^\mu - \text{const.} \cdot |l(s) - l(s')|^\mu \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$(4.28) \quad |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \leq \text{const.} \cdot |s - s'|^\mu$$

puisque les fonctions  $l(s)$  et  $\delta l(s)$  vérifient chacune une condition de Lipschitz.

Appelons alors  $\rho$  une constante positive inférieure à 1; pour des raisons qui apparaîtront plus tard nous la choisirons de manière que  $\rho > \frac{1}{2\mu}$ . Les inégalités (4.27) et (4.28) permettent d'écrire

$$(4.29) \quad |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \right\}^{\mu(1-\rho)} |s - s'|^{\mu\rho}.$$

Cela posé, on tire de (4.25)

$$(4.30) \quad \delta^2 \Psi[l(s)] = \Psi^*[l^*(s)] - \Psi[l(s)] - \delta \Psi[l(s)] = \delta l(s) \int_0^1 \gamma(h, s) dh.$$

choisir une constante bornée telle que

$$|1 + x| \leq \text{const.} \cdot |1 + x|^\mu.$$

Notons que les symboles  $K$  des deuxième et troisième termes de l'inégalité peuvent n'avoir pas la même valeur.

En remplaçant  $[\gamma(h, s)]$  par sa majorante (4.26), on déduit de (4.30)

$$\begin{aligned}
 (4.31) \quad \|\delta^2 \Psi[l(s)]\| &\leq \|\delta l(s)\| \int_0^1 |\gamma(h, s)| dh \\
 &\leq K \|\delta l(s)\| \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \right\}^\mu \\
 &\leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \right\}^{1+\mu} \\
 &\leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}
 \end{aligned}$$

puisque  $1 - \rho$  est positif.

De plus, (4.30) donne

$$\begin{aligned}
 &\|\delta^2 \Psi[l(s)] - \delta^2 \Psi[l(s')]\| \\
 &\leq \|\delta l(s)\| \int_0^1 |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| dh + \text{Max} |\gamma(h, s)| \cdot \|\delta l(s) - \delta l(s')\|.
 \end{aligned}$$

Comme  $\delta l(s)$  vérifie une condition de Lipschitz, l'inégalité précédente entraîne, en tenant compte de (4.26) et (4.29),

$$(4.32) \quad \|\delta^2 \Psi[l(s)] - \delta^2 \Psi[l(s')]\| \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)} |s - s'|^\mu.$$

Les inégalités (4.31) et (4.32) expriment que  $\delta^2 \Psi[l(s)]$  constitue un élément de l'espace  $H_\mu(s)$  (cf. le début de ce paragraphe); on peut donc les condenser en une seule en écrivant

$$(4.33) \quad \|\delta^2 \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1, \mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}.$$

Considérons alors une fonction  $\omega(s)$  définie par la relation

$$(4.34) \quad \omega(s) = \int_0^\pi \frac{\Psi[l(s)] - \Psi[l(s')]}{(s - s')} K(s, s') ds',$$

dans laquelle  $K(s, s')$  désigne une fonction analytique, régulière de ses arguments; d'après le théorème de Fatou et Priwaloff  $\omega(s)$  est un élément de  $H_\mu(s)$ . Nous avons, en appelant  $\delta \omega(s)$  la partie principale de l'accroissement  $\omega^*(s) - \omega(s)$  que subit  $\omega(s)$  lorsque  $\Psi[l(s)]$  s'accroît de  $\Psi^*[l(s)] - \Psi[l(s)]$ :

$$\omega^*(s) - \omega(s) - \delta \omega(s) = \int_0^\pi \frac{\delta^2 \Psi[l(s)] - \delta^2 \Psi[l(s')]}{s - s'} K(s, s') ds'.$$



D'après (4.32) ou (4.33), le second membre de cette relation est un élément de  $H_\mu(s)$  vérifiant l'inégalité

$$(4.34') \quad \|\varpi^*(s) - \varpi(s) - \delta\varpi(s)\|_{\mu} \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}.$$

Ce résultat général acquis, revenons aux équations du problème du sillage. On tire de (1.24) et (4.4), eu égard à (4.31) ou à (4.33),

$$(4.35) \quad |s_0^* - s_0 - \delta s_0| \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}.$$

Or, en combinant (1.33''), (4.12), (4.23), (4.24') et (4.33), on trouvera, pour les parties principales de  $L^*(s) - L(s) - \delta L(s)$  et  $\frac{d[L^*(s) - L(s) - \delta L(s)]}{ds}$ , des expressions de la forme

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi K \frac{\partial^2 \Psi[l(s)] - \partial^2 \Psi[l(s')]}{s - s'} ds' + \delta a \int_0^\pi K_1 \frac{\partial \Psi[l(s)] - \partial \Psi[l(s')]}{s - s'} ds' \\ & + \delta b \int_0^\pi K_2 \frac{\partial \Psi[l(s)] - \partial \Psi[l(s')]}{s - s'} ds' \\ & + \Delta \alpha \int_0^\pi K_1' \frac{\partial \Psi[l(s)] - \partial \Psi[l(s')]}{s - s'} ds \\ & + \Delta \beta \int_0^\pi K_2' \frac{\partial \Psi[l(s)] - \partial \Psi[l(s')]}{s - s'} ds \\ & + K_2 \delta a^2 + K_3 \delta b^2 + K_4 \Delta \alpha \delta b + K_5 \Delta \beta \Delta b + \dots \end{aligned}$$

où  $K_1, K_2$ , etc. désignent des fonctions de  $s$  et  $s'$  qui seront, en outre, des fonctionnelles continues des éléments  $\Psi(\alpha), l(s), a, b, \alpha$  et  $\beta$  (lorsque ceux-ci sont assujettis aux restrictions du paragraphe 23, précisées au début de ce paragraphe) qu'il est inutile d'expliciter.

La première intégrale qui figure dans cette expression est du type (4.34); d'après (4.32) elle constitue un élément de  $H_\mu(s)$  dont la norme vérifie l'inégalité (4.33). D'après (4.3'), la somme des normes du second et du troisième terme est inférieure à

$$K [|\delta a| + |\delta b|] \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}.$$

Il en résulte, l'exposant  $1 + \mu(1 - \rho)$  étant inférieur à 2, que les normes de chaque terme de l'expression ci-dessus sont, au plus, égales à

$$K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\Delta \alpha| + |\Delta \beta| + |\delta a| + |\delta b| \right\}^{1+\mu(1-\rho)}$$

de sorte, qu'en définitive,

$$\begin{aligned} & \text{Max. } |L^*(s) - L(s) - \delta L(s)| + \text{Max. } \left| \frac{d[L^*(s) - L(s) - \delta L(s)]}{ds} \right| \\ & \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\Delta\alpha| + |\Delta\beta| + |\delta a| + |\delta b| \right\}^{1+\mu(1-\rho)}. \end{aligned}$$

Cette inégalité exprime que la fonction  $[L^*(s) - L(s) - \delta L(s)]$  constitue un élément de  $E(o, \pi, s)$ ; elle montre, de plus, que

$$\begin{aligned} & \lim \|\delta l(s) - L(s) - \delta L(s)\| \\ & \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\Delta\alpha| + |\Delta\beta| + |\delta a| + |\delta b| \right\}^{-1} = 0, \end{aligned}$$

lorsque  $l^*(s)$ ,  $\Psi^*(l)$ ,  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $a^*$  et  $b^*$  tendent respectivement vers  $l(s)$ ,  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  et  $b$ . En se reportant aux équations de définition (3.36) de V, (4.24'') de W et (4.2) de  $\delta l(s)$ ,  $\Delta \Psi(l)$ , etc., il en résulte que la transformation W est, au sens de M. Fréchet, la différentielle de la transformation V (158).

*Remarque.* — Les conclusions précédentes subsistent encore lorsqu'on remplace  $l(s)$  par la fonction  $l(t)$ ; cette remarque nous sera bientôt utile.

Lorsque l'un des paramètres  $a$  ou  $b$  (ou les deux à la fois) augmente indéfiniment, les inégalités précédentes cessent d'être valables. Mais il suffirait de retoucher légèrement notre exposition pour établir

(158) Rappelons la définition de la différentielle au sens de M. Fréchet. Étant donné un espace linéaire, normé, complet E, envisageons une transformation  $x' = F(x)$  opérant dans cet espace. Nous dirons que  $F(x)$  possède au point  $x = a$  une différentielle de M. Fréchet si l'on peut écrire

$$F(x) = F(a) + dF(x - a) + R(x - a)$$

où la transformation  $dF(x - a)$  est linéaire et homogène par rapport à son argument et où la transformation  $R(x - a)$  vérifie la condition

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|R(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Revenant à la transformation W, nous avons déjà noté qu'elle est linéaire et homogène par rapport aux arguments  $\delta l(s)$ ,  $\Delta \Psi[l(s)]$ ,  $\delta a$ ,  $\delta b$ ,  $\Delta\alpha$  et  $\Delta\beta$ ; l'inégalité du texte permet alors de conclure.

l'existence et la continuité complète de  $W$  pour  $a = -\infty$  (ou  $b = \infty$ ). On peut, du reste, vérifier rapidement ce point essentiel au moyen du raisonnement direct que voici.

D'après la définition même de  $V$ , on peut écrire, en utilisant la variable auxiliaire  $t(Z)$ ,

$$L(t) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a|b} \int_{-1}^{t(e^{i\pi})} e^{-T(t')} \frac{t' - t_0}{\left(1 - \frac{t'}{a}\right) \left(1 - \frac{t'}{b}\right)} dt' \quad [-1 \leq t' \leq t(e^{i\pi})],$$

formule dans laquelle le facteur  $\psi_1 + \psi_2$  a été défini au moyen de l'équation (3. 19). On a vu que :

- 1° le quotient  $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b}$  est une fonction bornée des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  lorsque ceux-ci sont bornés ;
- 2° la fonction  $T(t')$  est hölderienne pour  $-1 \leq t' \leq 1$  sauf pour  $t' = t_0$  ;
- 3°  $\delta T(t')$  est hölderienne dans le même intervalle et présente pour  $t' = t_0$  un pôle simple ;
- 4°  $\delta t(e^{is})$  est une fonction analytique de  $s$  pour  $0 \leq s \leq \pi$  ;
- 5° les résultats précédents subsistent pour  $a = -\infty$ , ou pour  $b = \infty$  ou pour  $a = -\infty$  et  $b = \infty$ .

De l'ensemble de ces faits, on entraîne l'existence et la continuité de  $\delta L(s)$  pour les valeurs infinies de  $a$  et de  $b$ . C. Q. F. D.

Pour achever, il nous reste à différentier les fonctionnelles  $D_i[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]$ ,  $i = 1, 2$  [cf. le paragraphe 23 et notamment (3. 21)].

On trouve, pour la partie principale  $\Delta_2$  de  $D_2^* - D_1$ , l'expression

$$(4.36) \quad \Delta_2 \{ l(s), \Psi[l(s)], \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \delta a, \delta b \} \\ = - \int_1^{\eta} [\cos \Omega(X, 0) \delta \Omega(X, 0) df(X, 0) + \sin \Omega(X, 0) d \delta f(X, 0)] \\ + \frac{2\psi_2}{\pi} \Omega'(q) \delta q + \delta \psi_2$$

en utilisant (2. 9) et les développements limités

$$\Omega(Z) = \Omega'(q) (Z - q) + \dots \quad \text{et} \quad \delta \Omega(Z) = - \Omega'(q) \delta q + \dots$$

valables dans le voisinage de  $Z = q$ . On vérifie aisément que l'élément

différentiel de l'intégrale (4.36) est fini pour  $Z = q$ ; d'après (3.21') et (2.9) la partie principale de cet élément est égale, en effet, à

$$\delta \Omega(X, o) df(X, o) + \Omega(X, o) d\delta f(X, o) = - \frac{2\Omega'(q)}{\pi} \delta \psi_2 + \dots$$

On trouverait, pour la partie principale  $\Delta_1$  de  $D_1^* - D_1$ , une expression tout analogue.

Nous n'explicitons pas l'expression (4.36) de  $\Delta_2$  en y remplaçant  $\delta \Omega$ ,  $df$  et  $d\delta f$  par leurs valeurs (4.5) et (4.13). Nous nous contenterons de faire remarquer que cette opération permettrait de définir  $\Delta_2$  comme une fonctionnelle complètement continue des arguments  $l(s)$ ,  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta l(s)$ ,  $\Delta \Psi(l)$ ,  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \beta$ ,  $\delta a$  et  $\delta b$ , linéaire et homogène par rapport aux six derniers d'entre eux. Les raisonnements développés à propos de la transformation  $W$ , raisonnements qui se simplifient du fait de l'analyticité de  $\delta \Omega(Z)$  pour  $Z$  réel, permettraient d'établir que la transformation  $\Delta_2$  définie par (4.36) est la différentielle, au sens de M. Fréchet, de la transformation  $D_2$ , toutes les fois que le paramètre  $a$  est fini; on a vu, en effet, que moyennant cette hypothèse  $\psi_2$  et, par suite  $\delta \psi_2$ , sont finis (cf. § 27);  $\delta b$ , d'autre part, n'intervient dans  $\delta D_2$  que par l'intermédiaire de  $df$  et  $d\delta f$ , expressions qui sont régulières pour  $a = -\infty$ .

*Problème de la proue.* — D'après ce que nous avons vu au paragraphe 23, le problème de la proue fait intervenir, outre  $V$ ,  $D_1$  et  $D_2$ , les fonctionnelles  $P_1$  et  $P_2$  que nous allons maintenant différentier.

Il vient, en différentiant (1.51'), et en tenant compte de l'équation

$$\frac{d^2 \theta(v, q)}{dv^2} = -4\pi^2 \frac{\partial \theta(v, q)}{\partial \log q}$$

que vérifie  $\theta(v, q)$ ,

$$(4.37) \quad \begin{aligned} \delta \Omega'(1) = & \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \{ \delta \Psi[l(o)] - \delta \Psi[l(s)] \} \frac{\theta'^2 - \theta\theta''}{\theta^2} ds \\ & + \frac{\delta \log q}{4\pi^2} \frac{\theta(v_0)\theta''(v_0) - \theta'(v_0)\theta''(v_0)}{\theta^2(v_0)} \\ & - \frac{\delta \log q}{8\pi^2} \int_0^\pi \{ \Psi[l(o)] - \Psi[l(s)] \} \frac{[2\theta\theta'\theta''' + \theta\theta''^2 - \theta^2\theta^{(iv)} - 2\theta'^2\theta'']}{\theta^2} ds \\ & - \frac{1}{2\pi^2} \frac{\theta(v_0)\theta''(v_0) - \theta'^2(v_0)}{\theta^2(v_0)} \delta s_0. \end{aligned}$$

Dans cette formule les symboles  $\theta, \theta',$  etc. désignent les fonctions  $\theta(\nu, q)$  et leurs dérivées par rapport à la variable  $\nu = \frac{s}{2\pi}$  et où l'on a posé  $\nu_0 = \frac{s_0}{2\pi}$ .

La première intégrale du second membre de (4.37) a un sens; en effet, son élément différentiel se comporte comme  $s^{2\mu-2}$  dans le voisinage de  $s = 0$ , puisque  $\theta\left(\frac{s}{2\pi}\right)$  y possède un zéro d'ordre deux, alors que  $\delta\Psi[l(s)]$  y vérifie l'inégalité (4.3''); or,  $\mu$  étant par hypothèse une constante comprise entre  $\frac{1}{2}$  et 1,  $2 - 2\mu$  est inférieur à 1; cela justifie notre assertion <sup>(159)</sup>.

Un raisonnement analogue au précédent s'applique aussi à la dernière intégrale du second membre de (4.37); dans le voisinage de  $s = 0$  le premier facteur de son élément différentiel se comporte comme  $s^2$  — puisque  $\Psi[l(s)]$  est lipschitzienne et que, d'autre part,  $\frac{dl(s)}{ds}$  s'annule pour  $s = 0$  (cf. § 13, remarque finale) — et le second comme  $s^{-2}$  puisque son numérateur y possède un zéro simple [la fonction  $\theta(\nu)$  étant impaire].

Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier en détail que  $\delta\Omega'(\Gamma)$  définie par (4.37) est la différentielle au sens de M. Fréchet de  $\Omega'(\Gamma)$ ; il suffira de former l'expression

$$|\Omega^*(\Gamma) - \Omega'(\Gamma) - \delta\Omega'(\Gamma)| \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\delta q| \right\}^{-1},$$

en utilisant les raisonnements développés pour  $W$  et de montrer qu'elle tend vers zéro avec

$$\|\delta l(s)\|, \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu}, |\delta a|, |\delta b|.$$

Nous nous contenterons de le vérifier pour le terme de  $\delta^2\Omega'(\Gamma)$  qui, d'après (4.30) et (4.37), s'écrit

$$\frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \left\{ \delta^2\Psi[l(0)] - \delta^2\Psi[l(s)] \right\} \frac{\theta'^2 - \theta\theta''}{\theta^2} ds.$$

<sup>(159)</sup> C'est ici qu'apparaît la nécessité des restrictions que nous avons dû imposer à l'obstacle dès le début de ce Chapitre et qu'il ne semble pas possible d'écartier sans que la formule (4.37) cesse d'avoir un sens. Or, les raisonnements de M. Leray, dont nous allons nous servir dans la discussion d'unicité, reposent essentiellement sur l'hypothèse d'existence de  $\delta\Omega'(-\Gamma)$  et de  $\delta\Omega'(\Gamma)$ .

Or,  $\delta^2 \Psi(s)$  vérifie l'inégalité (4.32) dans laquelle, comme on l'a fait remarquer, on peut remplacer la variable  $s$  par  $t$ ; compte tenu de (4.3''), il en résulte que le module du terme envisagé est inférieur à

$$K \{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \}^{1+\mu(1-\rho)} \left| \int_0^\pi \frac{ds}{s^{2(1-\mu\rho)}} \right|,$$

c'est-à-dire, *a fortiori*, à

$$K \{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\delta q| \}^{1+\mu(1-\rho)}$$

puisque l'intégrale du second membre est bornée en vertu du choix même de  $\rho$ ; on a, en effet,  $2\mu\rho \geq 1$ . Cette remarque justifie notre assertion.

Nous laissons également au lecteur le soin de vérifier que l'expression (4.37) de  $\delta \Omega'(1)$  peut aussi s'obtenir en dérivant par rapport à  $Z$  l'expression (4.5) de  $\delta \Omega(Z)$ , après avoir rendu celle-ci valable jusqu'à la frontière  $|Z|=1$  du domaine  $d$ .

Nous remarquerons enfin, que la formule (4.37) est valable pour  $a = -\infty$  et  $b = \infty$ ; la fonctionnelle  $\delta \Omega'(1)$  ne dépend, en effet, de ces paramètres que par l'intermédiaire de  $q(a, b)$ . L'ensemble des conclusions qui précèdent s'étend sans difficulté à  $\delta \Omega'(-1)$ .

*Remarque.* — Au cours de ce paragraphe, nous avons considéré deux symboles de différentiation  $\frac{d}{dZ}$  et  $\delta$ ; il importe de noter qu'ils sont permutables; cela résulte sans difficulté de leur définition même. En particulier, on a

$$\frac{d \delta f(Z)}{dZ} = \delta \frac{df(Z)}{dZ}; \quad \delta \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{d}{dZ} \delta \Omega(Z),$$

relations que nous avons déjà utilisées au cours de ce Chapitre.

**52. ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DU PROBLÈME DU SILLAGE. PROBLÈME D'UNICITÉ.** — Considérons dans le plan  $z$  une configuration des parois rigides définies au moyen des éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$ ; nous avons vu (*cf.* § 28) qu'il existe au moins un élément  $x = x \left[ l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$  de l'espace  $E(0, \pi, s, a, b)$  vérifiant les équations (3.37) du problème du sillage posé pour cette configuration. Les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres de (3.37) possèdent (*cf.* § 51) les

différentielles de Fréchet puisque  $\Psi(l)$  est un élément de  $E(\alpha, \beta, l, \mu)$ ; le système *des équations aux variations de* (3.37), ou de l'équation unique équivalente (3.38), s'écrira, d'après (1.24') et (4.36),

$$(4.38) \left\{ \begin{array}{l} \delta l(s) = W[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta\Psi(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \delta a, \delta b], \\ \delta\left(\frac{1}{b-1}\right) = \delta\left(\frac{1}{b-1}\right) + \frac{1}{\nu}\{\Delta d_1 - \Delta_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta\Psi(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \delta a, \delta b]\}, \\ \delta\left(\frac{1}{a+1}\right) = \delta\left(\frac{1}{a+1}\right) + \frac{1}{\nu}\{\Delta d_2 - \Delta_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta\Psi(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \delta a, \delta b]\}, \end{array} \right.$$

où  $l(s)$ ,  $a$ ,  $b$  désignent, répétons-le, les solutions de (3.37),  $\Delta\Psi(l)$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\Delta d_1$  et  $\Delta d_2$  les variations des données et dont les éléments  $\delta l(s)$ ,  $\delta a$  et  $\delta b$  sont les inconnues <sup>(160)</sup>.

Afin de conserver au système (4.38) un sens pour les valeurs infinies de  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $a$  et  $b$ , nous le transcrivons sous la forme équivalente

$$(4.38') \left\{ \begin{array}{l} \delta l(s) = W, \\ \delta\left(\frac{1}{b-1}\right) = \delta\left(\frac{1}{b-1}\right) + \nu\left(\frac{\Delta d_1}{d_1^2} - \frac{\Delta_1}{D_1^2}\right) \\ \delta\left(\frac{1}{a+1}\right) = \delta\left(\frac{1}{a+1}\right) + \nu\left(\frac{\Delta d_2}{d_2^2} - \frac{\Delta_2}{D_2^2}\right), \end{array} \right.$$

où nous avons omis, pour abrégé, d'explicitier les arguments des fonctionnelles du second membre. Pareillement, aux inconnues  $\delta a$  et  $\delta b$  et aux paramètres  $d_1$  et  $d_2$ , nous substituerons les éléments  $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$ ,  $\frac{\delta b}{(b+1)^2}$ ,  $\frac{1}{d_1}$  et  $\frac{1}{d_2}$  respectivement. Les facteurs  $\frac{\delta a}{a+1}$ ,  $\frac{\delta b}{(b-1)}$  étant numériques, l'ensemble des inconnues  $\delta l(s)$ ,  $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$  et  $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$  peut être considéré comme un élément

$$\delta x = \delta x \left[ \delta l(s), \frac{\delta a}{(a+1)^2}, \frac{\delta b}{(b-1)^2} \right],$$

---

<sup>(160)</sup> Précisons, pour éviter toute confusion, que les définitions des éléments  $\Delta\Psi(l)$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\Delta d_1$  et  $\Delta d_2$ , utilisées dans le texte, coïncident avec celles données par le système (4.2); ces éléments sont donc *donnés* lorsqu'on déforme la configuration des éléments rigides d'une manière connue. Dans ce cas, les éléments  $l(s)$ ,  $a$ ,  $b$  correspondants subissent des accroissements  $l^*(s) - l(s)$ ,  $a^* - a$ ,  $b^* - b$  dont les parties principales  $\delta l(s)$ ,  $\delta a$ ,  $\delta b$  sont définies par (4.38); cela montre que les inconnues du système (4.38) sont des différentielles équivalentes, mais non identiques, aux différentielles définies par (4.2).

de l'espace  $E(o, \pi, s, a, b)$ . Dans ces conditions, les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des équations du système (4.38), seront, compte tenu de ce que nous avons vu au précédent paragraphe, linéaires par rapport aux arguments  $\Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta\left(\frac{1}{d_1}\right), \Delta\left(\frac{1}{d_2}\right)$ , et aussi par rapport aux nouvelles inconnues  $\frac{\partial a}{(a+1)^2}, \frac{\partial b}{(b-1)^2}$ ; l'ensemble de ces fonctionnelles définit donc une transformation opérant dans l'espace  $E(o, \pi, s, a, b)$ , complètement continue relativement à tous ses arguments et notamment à l'argument

$$\delta x = \delta x \left[ \delta l(s), \frac{\partial a}{(a+1)^2}, \frac{\partial b}{(b-1)^2} \right],$$

y compris pour les valeurs infinies des paramètres  $a, b, d_1$  et  $d_2$ . Il suit de là que le système (4.38') est équivalent à une équation unique du type de Fredholm

$$(4.39) \quad \delta x = d\mathcal{F} \left[ \delta x, x, \Psi(l), \alpha, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta\left(\frac{1}{d_1}\right), \Delta\left(\frac{1}{d_2}\right) \right],$$

où le symbole  $d\mathcal{F}$  désigne une fonctionnelle linéaire en  $\delta x$ ; d'après ce que nous avons vu,  $d\mathcal{F}(\delta x, x)$  peut alors être envisagée comme la différentielle de Fréchet de la transformation  $\mathcal{F}(x)$  figurant au second membre de (3.38).

Cela étant, supposons que l'équation (4.39) admette une solution unique; la théorie des équations fonctionnelles de MM. Leray et Schauder permet alors d'énoncer les résultats suivants <sup>(161)</sup> (cf. pour les notations le paragraphe 28) :

1° l'élément  $x = x \left[ l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$  de  $E(o, \pi, s, a, b)$  est une solution isolée du système (3.37), où de l'équation équivalente (3.38) dont (4.39) est l'équation aux variations; à l'intérieur de  $\omega$  l'équa-

<sup>(161)</sup> Nous allons rappeler brièvement le sens de certaines locutions dont nous aurons à faire usage. En reprenant les notations du paragraphe 28, nous appellerons  $E$  un espace abstrait, linéaire, normé complet;  $\omega$  un ensemble ouvert, borné de  $E$  et  $\omega'$  la frontière de  $\omega$ ;  $a$  et  $x$  des points intérieurs de  $\omega$ ;



tion (3.38) ne peut donc avoir qu'un nombre fini de solutions  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ;

2° lorsque les accroissements  $\Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta\left(\frac{1}{d_1}\right), \Delta\left(\frac{1}{d_2}\right)$  sont petits en valeur absolue, il existe au moins une solution

$$x^* = x^* \left[ l^*(s), \frac{1}{(a^* + 1)}, \frac{1}{b^* - 1} \right]$$

$F(x)$  une transformation complètement continue, définie sur  $E$  et qui fournit des éléments de  $E$ .

Cela étant, posons

$$y = \Phi(x) = x - F(x).$$

L'élément  $a$  étant une solution de l'équation  $y = 0$ , on aura

$$a - F(a) = \Phi(a) = 0.$$

Admettons alors qu'il existe un nombre positif, non nul,  $\rho$  jouissant de la propriété suivante :  $x = a$  est la seule solution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = 0,$$

intérieure à l'hypersphère

$$\|x - a\| \leq \rho.$$

Nous dirons, dans ce cas, que  $x = a$  est une solution *isolée* de l'équation considérée. Soit alors l'hypersphère  $S(\theta)$  définie, dans  $E$ , par l'équation

$$\|x - a\| \leq \theta \rho \quad (0 \leq \theta \leq 1);$$

l'hypothèse précédente étant remplie, le degré  $d = d[\Phi, S(\theta), 0]$  (cf. § 28) existera et sera indépendant de  $\theta$ ; en passant à la limite  $\theta \rightarrow 0$ , nous appellerons indice topologique  $i[\Phi, a]$  de  $\Phi(x)$  au point  $a$  le nombre entier  $i$  ainsi défini; il est essentiel de noter que cette définition de  $i[\Phi, a]$  perd toute signification lorsque la solution  $x = a$  de  $\Phi(x) = 0$  n'est pas isolée.

Supposons maintenant que l'équation  $\Phi(x) = 0$  n'admette dans  $\omega$  qu'un nombre fini de solutions isolées  $x = a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) intérieures à  $\omega$  (donc étrangère à sa frontière  $\omega'$ ); dans ce cas, on peut définir  $n$  entiers tels que  $i[\Phi, a_j]$ ; on démontre ensuite la relation

$$d[\Phi, \omega, 0] = \sum_{j=1}^n i[\Phi, a_j].$$

L'égalité précédente fait donc connaître une relation entre les  $i[\Phi, a_j]$ , d'une

du problème du sillage posé pour la configuration des parois rigides (voisine de la configuration initiale) définie par

$$\Psi^*(t) = \Psi(t) + \Delta \Psi(t), \quad \alpha^* = \alpha + \Delta \alpha, \quad \beta^* = \beta + \Delta \beta,$$

$$\frac{1}{d_1^*} = \frac{1}{d_1} + \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right), \quad \frac{1}{d_2^*} = \frac{1}{d_1} + \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right),$$

qui est voisine de  $x = x \left[ l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$ ; il y a plus : la solution  $\delta x$

part, et le nombre  $d[x - F(x), \omega, 0]$ , égal à l'indice total des solutions de l'équation fonctionnelle

$$(I) \quad x = F(x),$$

sur l'ensemble  $\omega$  (cf. § 28), d'autre part.

Un critère d'unicité résulte de cette remarque. Admettons que l'on ait réussi, à établir *a priori* et relativement à l'équation (I) les propriétés suivantes :

1° L'équation (I) n'admet dans  $\omega$  qu'un nombre fini de solutions isolées  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). On peut donc définir l'indice  $i[\Phi, a_j]$  de chacune d'elles.

2° L'indice  $i(\Phi, a_j)$ , de chacune de ces solutions vaut  $+1$ .

3° L'indice total  $d$  des solutions de l'équation (I) dans  $\omega$  est égal à  $+1$ .

Le théorème rappelé ci-dessus permet dès lors d'écrire

$$d = \sum_{j=1}^n i[\Phi, a_j] = n = 1.$$

Cette égalité entraîne  $j = 1$ ; elle exprime donc que l'équation (I) ne possède dans  $\omega$  qu'une seule solution.

Du point de vue de la discussion d'unicité, il y a donc grand intérêt à savoir former des conditions suffisantes pour qu'une solution éventuelle  $x = a$  (intérieure à  $\omega$ ) de l'équation (I) soit isolée et, dans l'affirmative, à savoir déterminer l'indice  $i[\Phi, a]$  d'une telle solution. Dans cet ordre d'idée nous utiliserons le résultat suivant, établi par MM. Leray et Schauder à la suite des travaux de M. F. Riesz.

Si la transformation  $F(x)$  admet dans le voisinage de la solution  $x = a$  de (I) une différentielle de Fréchet  $dF(x - a)$  (celle-ci étant, rappelons-le, une fonctionnelle linéaire et homogène), complètement continue et telle que la seule solution de l'équation linéaire auxiliaire [(équation aux variations de (I)]

$$(II) \quad (x - a) - dF(x - a) = 0,$$

soit  $x = a$ , on peut affirmer : 1° que la solution  $x = a$  de (I) est isolée, ce qui

de (4.39) est la partie principale de la différence  $(x^* - x)$  de  $x$  avec l'une quelconque de ces solutions voisines;

3° l'indice topologique  $i[\delta x - d\mathcal{F}(\delta x, x), \delta x]$  de la solution  $\delta x$  de (4.39), supposée unique, est égal à celui de la solution  $x$  de (3.38) correspondante;

4° l'indice total  $d[x - \mathcal{F}(x), \omega, 0]$  des solutions de (3.38) dans  $\omega$  est égal à la somme des indices de chacune de ces solutions  $x_i$ ; d'après l'alinéa précédent, on peut en déduire

$$(4.40) \quad d[x - \mathcal{F}(x), \omega, 0] = \sum_1^n i[x - \mathcal{F}(x), x_i] = \sum_1^n i[\delta x - d\mathcal{F}(\delta x, x_i), \delta x].$$

Or, le premier membre de cette relation est égal à  $+1$  (cf. § 28).

Dès lors, les critères d'unicité pour l'équation (3.38) résulteront de la confrontation de deux points suivants :

a. Former les catégories d'obstacles auxquels s'appliquent l'ensemble des résultats précédents. D'après ce que nous avons vu, la théorie de MM. Leray et Schauder sera valable pour un obstacle donné lorsque l'équation aux variations (4.39) correspondante ne

entraîne l'existence de l'indice  $i[\Phi, a]$ ; 2° que l'indice  $i[\Phi, a]$  est égal à l'indice en  $a$  de la transformation *linéaire*  $x - a - dF(x - a)$  au point considéré  $a$ .

Supposons, dès lors, que  $dF(x)$  existe en chaque point de  $\omega$  et y vérifie les conditions de régularité que l'énoncé précédent lui impose. D'après la première partie de ce théorème, toutes les solutions de (I), intérieures à  $\omega$ , sont dans ce cas isolées; elles sont donc en nombre fini; sinon elles admettraient dans  $\omega$  au moins un point d'accumulation (le raisonnement de Bolzano-Weierstrass reste, en effet, valable dans un espace complet) et l'une, au moins, d'entre elles ne serait pas isolée, contrairement à l'hypothèse. D'un autre côté, la deuxième partie de l'énoncé nous permet de réduire la détermination de l'indice  $i[\Phi, a]$  d'une solution éventuelle  $x = a$  de (I) à la détermination de l'indice  $x = a$  d'une transformation linéaire, plus simple, que la transformation donnée. Ainsi, dans le cas envisagé [existence et régularité de  $dF(x)$  sur  $\omega$ ] le problème d'unicité revient à discuter le nombre des solutions de l'équation aux variations (II), de montrer que  $x = a$  en est l'unique solution et à en déterminer enfin l'indice.

Ces remarques justifient les raisonnements du texte.

possède qu'une seule solution. L'alinéa 2° permet de donner à ce critère d'applicabilité une forme plus pratique. Les solutions éventuelles  $\delta x$  de l'équation linéaire (4.39) varient, en effet, continûment lorsque les variations  $\Delta \Psi(l)$ ,  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \beta$ ,  $\Delta d_1$  et  $\Delta d_2$  des données tendent vers zéro.

L'indice de la solution  $\delta x$  de (4.39) reste constant au cours de cette transformation des données. Il suffira, dès lors, de vérifier que l'équation homogène en  $\delta x$

$$(4.41) \quad \delta x = d\mathcal{F} \left[ \delta x, x, \Psi(l), \alpha, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

n'a pas d'autre solution que  $\delta x = 0$ .

*b.* Déterminer l'indice  $i[\delta x - d\mathcal{F}(\delta x, x), 0]$  d'une solution éventuelle de l'équation (4.39) correspondante à un obstacle de l'espèce visée au précédent alinéa.

Supposons que cet indice soit égal à  $+1$ ; l'équation (4.40) prouve qu'alors  $n=1$ , puisque son premier membre vaut  $+1$ ; cela veut dire que l'équation (3.38) n'admet qu'une seule solution; nous avons donc bien un critère d'unicité.

Nous allons, maintenant, traiter les problèmes posés par les alinéas *a* et *b*.

*Problème de M. Weinstein.* — Nous nous proposons, en utilisant une idée dont M. Weinstein s'est servi avec grand succès dans ses travaux sur les jets liquides, de ramener l'étude de l'équation (4.39) à celle d'un problème mixte aux limites de la théorie des fonctions harmoniques.

Reprenons les deux groupes d'éléments voisins du plan  $z$  définies par (4.2). Nous rappellerons que les symboles  $\partial \Omega(Z)$  et  $\partial f(Z)$ , définis par (4.5), (4.13) et (4.15) désignent les parties principales des variations que subissent  $\Omega(Z)$  et  $f(Z)$  en un point fixe  $Z$  du plan de la demi-couronne  $d$ . Il en résulte que la partie principale  $\partial z(Z)$  de la variation que subit en ce point la fonction  $z(Z)$  s'obtient en différentiant (1.14); il vient

$$(4.42) \quad \frac{d \partial z(Z)}{dz} = \partial \Omega(Z) + \frac{d \partial f(Z)}{df(Z)}.$$

Cela étant, posons <sup>(162)</sup>

$$(4.43) \quad \gamma(Z) = \alpha + i\beta = \partial f(Z) - \frac{df}{dz} \partial z(Z),$$

La fonction  $\gamma(Z)$  ainsi définie fournit, en fonction de  $Z$ , la partie principale de la variation qui subit le potentiel complexe  $f$  en un point fixe  $z$  du plan du mouvement. Pour le vérifier, il suffit de différencier la fonction  $f = f[z(Z)]$ ; il vient

$$\partial f(Z) = \gamma + \frac{df}{dz} \partial z(Z).$$

En éliminant  $\partial z$  entre (4.42) et (4.43) on trouve la relation entre  $\gamma$ ,  $\delta\Omega$  et  $\delta f$

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{dz}{df} (\gamma - \partial f) \right] + \frac{d\delta f}{df} = -i \delta\Omega;$$

compte tenu de (1.14), cette relation s'écrit

$$(4.44) \quad \frac{d\gamma}{df} + i \frac{d\Omega}{df} (\gamma - \partial f) = -i \delta\Omega,$$

en regardant  $f$  comme variable indépendante, ou encore

$$(4.44') \quad \frac{d\gamma}{dZ} + i \frac{d\Omega}{dZ} (\gamma - \partial f) = -i \delta\Omega \frac{df}{dZ},$$

en multipliant les deux membres de (3.44) par  $\frac{df}{dZ}$ , ou encore, sous forme finie ou la variable indépendante n'est pas mise en évidence,

$$(4.45) \quad \gamma = ie^{-i\Omega} \left\{ \int e^{i\Omega} [\partial f d\Omega - \delta\Omega df] \right\}.$$

Ces différentes formules prouvent que  $\gamma(Z)$  est une fonction analytique et régulière de  $Z$  pour  $q \leq |Z| < 1$  sauf, peut-être, pour  $Z = Z_1$ ,  $Z = \pm q$ . D'autre part, les fonctions  $\delta\Omega(e^{i\Omega})$  et  $\frac{d\Omega(e^{i\Omega})}{ds}$  étant hólde-

<sup>(162)</sup> Nous avons respecté les notations de M. Weinstein, mais nous devons mettre le lecteur en garde contre la confusion possible entre les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  définies par (4.43), d'une part, et les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , abscisses curvilignes des extrémités B et C de l'obstacle, d'autre part.

riennes pour  $0 < s < s_0$ ,  $s_0 < s < \pi$ , il en résulte que les coefficients de l'équation linéaire (4.44') le sont aussi tout le long du cercle  $|Z| = 1$ , sauf, peut-être pour  $Z = Z_0$ ; par suite, la solution  $\gamma(Z)$  de (4.44') est aussi hölderienne, en même temps que sa dérivée  $\frac{d\gamma(Z)}{dZ}$ , pour  $q \leq Z \leq 1$  sauf, peut-être pour  $Z = Z_0$ ,  $Z = \pm 1$ ,  $Z = \pm q$  et  $Z = Z_1$ .

Nous nous proposons maintenant de faire connaître les conditions limites que vérifie la fonction analytique  $\gamma(Z)$  [cf. (4.43)], définie dans  $d$  lorsque les accroissements  $\Delta \Psi(l)$ ,  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \beta$ ,  $\Delta \left(\frac{1}{d_1}\right)$  et  $\Delta \left(\frac{1}{d_2}\right)$  sont supposés donnés; nous verrons : 1° que ces conditions frontières déterminent  $\gamma(Z)$ ; 2° que la détermination de  $\gamma(Z)$  à partir de ces données équivaut à la résolution de l'équation (4.39).

1° *Conditions le long du cercle*  $Z = e^{is}$  ( $0 \leq s \leq \pi$ ). — Éliminons  $T_0(e^{is})$  entre (4.33'') et la première équation (4.38), il vient, compte tenu des équations de définition (4.23) et (4.24') de  $W$

$$\frac{d \delta l(s)}{d l(s)} = \frac{d \delta f(e^{is})}{d f(e^{is})} - \delta T(e^{is}).$$

Cela permet d'écrire, en utilisant la définition même de  $\delta \Omega(Z)$  et la formule (4.3),

$$\delta \Omega(e^{is}) = \Psi'(l) \delta l + \Delta \Psi(l) + i \frac{d \delta f}{d f} - i \frac{d \delta l}{d l}.$$

Portons la valeur de  $\delta \Omega(e^{is})$  ainsi obtenue dans (4.42) et servons-nous de la relation

$$dz = e^{i\Psi} dl,$$

valable le long de l'obstacle; il vient, en intégrant,

$$\delta z(e^{is}) = \int e^{i\Psi} (i \delta l d\Psi + d \delta l) + i \int e^{i\Psi} \Delta \Psi(l) dl$$

ou encore

$$\delta z(e^{is}) = e^{i\Psi} \delta l + \Delta z(l),$$

en désignant par  $\Delta z(l)$  la variation qui subit l'affixe  $z(l)$  du point de l'obstacle d'abscisse curviligne  $l$ . La constante d'intégration a été choisie ici de manière que  $\delta z$  s'annule avec  $\delta l$  et  $\Delta z(l)$ ;  $\gamma$ ,  $\delta z$  et  $\delta \Omega$  se correspondront alors biunivoquement.

Portons maintenant la valeur de  $\delta z(e^{is})$  ainsi obtenue dans (4.43)

et tenons compte des égalités

$$\Omega(e^{is}) = \Psi - \pi + iT \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_0$$

et

$$\Omega(e^{is}) = \Psi + iT \quad \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi;$$

on obtient la relation suivante, valable le long de l'obstacle

$$(4.46) \quad \gamma(e^{is}) = je^{i(e^{is})} \partial l(s) - e^{-i\Omega(e^{is})} \Delta z(l) + \partial f \quad \left( j = \begin{cases} +1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \\ -1 & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi \end{cases} \right).$$

Comme  $\partial f(e^{is})$  est réel, on en tire, en séparant le réel de l'imaginaire dans la formule précédente et en tenant compte de (4.43),

$$(4.46') \quad \beta(e^{is}) = -\text{Imag.} [e^{-i\Omega(e^{is})} \Delta z(l)].$$

Ainsi, la fonction harmonique  $\beta$  prend des valeurs connues le long de  $Z = e^{is}$ , lorsque l'obstacle subit une variation donnée.

2° *Étude du voisinage du point  $Z = 1$ .* — Nous venons de voir que la fonction  $\gamma(Z)$  est hölderienne dans le voisinage du point  $Z = 1$ ; d'après (4.46) on peut donc écrire le développement limité

$$(4.47) \quad \gamma - \partial f = \Delta \alpha + e^{-i\Psi(\alpha)} \Delta z(\alpha) + \varepsilon(Z - 1),$$

où  $\varepsilon(Z - 1)$  désigne une fonction hölderienne, nulle avec  $(Z - 1)$ .

Nous nous proposons d'approfondir l'étude de  $\gamma(f)$  dans le voisinage considéré; à cet effet portons la valeur de  $\gamma - \partial f$  ainsi obtenue dans (4.44');  $\frac{df}{dZ}$  étant nul pour  $Z = 1$  [cf. (4.10')], il vient

$$\frac{d\gamma}{dZ} = -i\Omega'(1) [\Delta \alpha + e^{-i\Psi(\alpha)} \Delta z(\alpha)] + \varepsilon(Z - 1),$$

le premier membre désignant encore une fonction hölderienne. Comme

$$\left[ \frac{d \partial f(Z)}{dZ} \right]_{Z=1} = 0$$

[ceci en vertu de l'égalité  $\left( \frac{df}{dZ} \right)_{Z=1} = 0$ ] la relation précédente permet de former pour le premier membre de (4.47) le développement limité

$$\begin{aligned} \gamma(Z) - \partial f(Z) &= \gamma(1) - \partial f(1) + \left[ \left( \frac{d\gamma}{dZ} \right)_{Z=1} + \varepsilon(Z - 1) \right] (Z - 1) \\ &= [\Delta \alpha + e^{-i\Psi(\alpha)} \Delta z(\alpha)] \{ 1 - i\Omega'(1) (Z - 1) [1 + \varepsilon(Z - 1)] \}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, la fonction  $\delta\Omega(Z)$  est hölderienne et de partie principale réelle dans le voisinage du point  $Z = 1$ ; on peut donc y écrire

$$\delta\Omega(Z) = \Psi'(z) \Delta z + \Delta\Psi(z) + \varepsilon(Z - 1).$$

Portons alors dans la formule (4.44) les valeurs de  $(\gamma - \delta f)$  et de  $\delta\Omega(Z)$  que nous venons de trouver et remplaçons-y  $\frac{d\Omega}{df}$  par son développement limité (1.36), il vient <sup>(163)</sup>

$$(4.48) \quad \frac{d\gamma}{df} = [\Delta z + e^{-i\Psi(z)} \Delta z(\alpha)] \left\{ i\Psi'(z) - \frac{i\Omega'(1)}{2N} \frac{Z+1}{Z-1} - \frac{[\Omega'(1)]^2}{2N} (Z+1) \right\} \\ - i[\Psi'(z) \Delta z + \Delta\Psi(z)] + \varepsilon(Z - 1).$$

C'est la relation que nous voulions établir; pour  $Z = -1$  on obtiendrait, évidemment, un développement tout analogue.

3° *Étude du voisinage du point  $Z = Z_0$ .* — Les développements (2.10) — où  $\alpha$  doit être pris égal à  $\frac{1}{2}$  puisque l'obstacle étudié est à tangente continue — (4.12'), (4.16) et (4.16') permettent d'écrire l'égalité

$$(4.49) \quad \frac{d\Omega}{dZ} \delta f - \frac{df}{dZ} \delta\Omega = \varepsilon(Z - Z_0),$$

où  $\varepsilon(Z - Z_0)$  a la même signification qu'au précédent alinéa. D'un autre côté, il vient, d'après (1.23) et (1.27),

$$e^{i\Omega(Z)} = \frac{K(Z)}{Z - Z_0},$$

la fonction  $K(Z)$  étant hölderienne pour  $Z = Z_0$ ; en combinant ces deux résultats avec (4.49), on voit que

$$\int e^{i\Omega(Z)} [\delta f d\Omega - \delta\Omega df] = \int \frac{\varepsilon(Z - Z_0)}{Z - Z_0} K(Z) dZ;$$

d'après le théorème de Fatou et Priwaloff le second membre appartient à l'espace  $H_\mu(Z)$  pour  $Z = Z_0$  puisque la fonction  $\varepsilon(Z - Z_0)$  appar-

<sup>(163)</sup> Dans la formule (1.36) le terme complémentaire  $\gamma_{n-1}(Z - 1)$  doit être remplacé par une fonction  $\varepsilon(Z - 1)$ ; cela résulte, en effet, des hypothèses de régularité faites au début de ce paragraphe.



tient à cet espace et qu'elle est nulle pour  $Z = Z_0$ . Or, le premier membre de l'égalité précédente est égal à  $-i e^{i\Omega} \gamma$  [cf. (4.45)]; il en résulte que la fonction  $\gamma(Z)(Z - Z_0)^{-1}$  et, par suite,  $\gamma(Z) \frac{d\Omega}{dZ}$  [cf. (2.10)] sont hölderiennes dans le voisinage de  $Z = Z_0$ .

Cela étant, observons que l'équation (4.44') peut s'écrire

$$\frac{d\gamma}{dZ} = i \left( \delta f \frac{d\Omega}{dZ} - \delta \Omega \frac{df}{dZ} \right) - i \gamma \frac{d\Omega}{dZ}.$$

D'après ce que nous venons de voir, chacun des termes du second membre de l'égalité précédente est hölderien [cf. (4.49)] pour  $Z = Z_0$ ; il s'ensuit que  $\frac{d\gamma(Z)}{dZ}$  vérifie dans le voisinage du point de bifurcation une condition de Hölder; la dérivée  $\frac{d\gamma(e^{is})}{ds}$  y existe donc et appartient à l'espace  $H_\mu(s)$ .

Remarquons enfin que la quantité  $\gamma(e^{is_0})$  est nulle; cela résulte, en effet, de ce que  $T(e^{is_0}) = -\infty$  et  $\delta f(e^{is_0}) = 0$  [cf. (4.16)]; l'équation de définition (4.46) de  $\gamma(e^{is_0})$  permet enfin de conclure.

4° *Conditions le long de l'axe réel  $Y = 0$  du plan  $Z$ .* — On a vu que les fonctions  $\frac{d\Omega}{df}$ ,  $\delta \Omega$  et  $\delta f$  sont holomorphes et réelles pour  $Z$  réel, sauf pour  $Z = \pm 1$ ,  $Z = \pm q$ ;  $\gamma(X, 0)$  est donc holomorphe pour  $-1 < X < -q$  et  $q < X < 1$ . Cela étant, séparons le réel de l'imaginaire dans (4.44); en tenant compte de (4.43), on obtient la relation

$$\frac{d\alpha}{df} = \beta \frac{d\Omega}{df} = \frac{d\theta}{df} \beta,$$

valable sur les portions rectilignes de la frontière du domaine  $d$ .

Désignons alors par  $\vec{n}$  la normale à cette frontière orientée vers l'intérieur de  $d$  et utilisons les relations classiques entre les dérivées des fonctions harmoniques conjuguées prises suivant deux directions orthogonales; l'égalité précédente se transforme alors en la condition

$$(4.50) \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dn} = \frac{dT}{dn} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} -1 < X < -q, \\ q < X < 1. \end{cases}$$

5° *Conditions le long du demi-cercle  $Z = qe^{is}$  ( $0 \leq s \leq \pi$ ).* — Nous

avons vu que les fonctions  $\delta f$ ,  $\frac{d\Omega}{df}$  et  $\delta\Omega$  sont holomorphes pour  $|Z|=q$  sauf pour  $Z=\pm q$  et  $Z=Z_1$ ;  $\gamma$  est donc holomorphe sur la portion considérée de la frontière, les voisinages de ces points, peut-être, exceptés. Séparons alors le réel de l'imaginaire dans l'équation (4.44') supposée écrite avec la variable  $s(Z=q e^{is})$ , il vient

$$\frac{d\beta(q e^{is})}{ds} - \frac{dT(q e^{is})}{ds} [\beta(q e^{is}) - \delta\psi(q e^{is})] = -\delta\Theta(q e^{is}) \frac{df}{ds}(q e^{is}),$$

après avoir posé

$$\delta f = \delta\varphi + i\delta\psi, \quad \delta\Omega = \delta\Theta + i\delta\Gamma.$$

En remplaçant dans l'égalité précédente  $\delta\Theta(q e^{is})$  et  $\delta\psi(q e^{is})$  par leurs valeurs tirées de (4.5) et (4.18)  $\left[ \delta\Theta(q e^{is}) = -\frac{dT(q e^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q} \right]$ , on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(q e^{is})}{ds} - \frac{dT(q e^{is})}{ds} [\beta(q e^{is}) - \delta\psi_1] &= 0 & \text{pour } s_1 < s < \pi, \\ \frac{d\beta(q e^{is})}{ds} - \frac{dT(q e^{is})}{ds} [\beta(q e^{is}) + \delta\psi_2] &= 0 & \text{pour } 0 < s < s_1, \end{aligned}$$

qui définit  $\beta(q e^{is})$ ; en intégrant, on trouve

$$(4.51) \quad \begin{cases} \beta(q e^{is}) = \delta\psi_1 - k_1 e^{1(\gamma e^{is})} & \text{pour } s_1 < s < \pi, \\ \beta(q e^{is}) = -\delta\psi_2 - k_2 e^{\mathbb{R}(\gamma e^{is})} & \text{pour } 0 < s < s_1, \end{cases}$$

où  $k_1$  et  $k_2$  désignent des constantes réelles dont nous allons préciser les valeurs.

6° *Voisinages des points*  $Z = \mp q$ . — Portons dans (4.45) le développement (4.17) ainsi que les suivants :

$$\Omega(Z) = \Omega'(-q)(Z+q) + \dots, \quad \delta\Omega(Z) = \Omega'(-q)\delta q + \dots,$$

il vient

$$\gamma(Z) = \frac{2\delta\psi_1}{i\pi} \Omega'(-q) \int \log(Z+q) dZ + \text{const.} + \text{série entière en } (Z+q).$$

Cela montre que  $\gamma(Z)$  est continue dans le voisinage du point  $Z = -q$  (ou  $Z = q$ ); en particulier, les valeurs de  $\beta(X, Y)$  calculées le long de  $Y = 0$  et le long de  $|Z| = q$  tendront vers une limite

commune lorsqu'on atteint le point  $Z = -q$ , en suivant l'un ou l'autre de ces chemins. Or, d'une part, on a, d'après (4.51),

$$\lim_{s \rightarrow \pi} \beta(q e^{is}) = \delta\psi_1 - k_1$$

et, d'autre part, on trouve, en séparant le réel de l'imaginaire dans la formule (4.43), où l'on a posé au préalable  $Z = X(-1 < X < q)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -q} \beta(X, 0) = -\delta\gamma_1.$$

Le symbole  $\delta\gamma_1$  désigne la variation subie par le paramètre  $\gamma_1$  défini par (1.33').

En égalant les deux premières de  $\beta(-q, 0)$  ainsi obtenues, on aboutit à la condition

$$k_1 = \delta\psi_1 + \delta\gamma_1$$

ou encore, en tenant compte de (1.33), (3.21) et (4.36),

$$(4.52) \quad k_1 = \Delta d_1 = \Delta_1.$$

D'une manière toute analogue, on trouverait

$$(4.52') \quad k_2 = -\Delta d_2.$$

7° *Voisinage du point  $Z = Z_1$ .* — Les fonctions  $\Omega'(Z)$  et  $\delta\Omega(Z)$  sont holomorphes pour  $Z = Z_1$ ; par contre les fonctions  $\frac{df(Z)}{dZ}$  et  $\delta f(Z)$  possèdent en ce point un pôle simple [cf. (4.20)]; la formule (4.45) montre alors que  $\gamma(Z)$  présente, pour  $Z = Z_1$ , une singularité logarithmique

$$(4.53) \quad \gamma(Z) = -\frac{i(\psi_1 + \psi_2)}{\pi} [\Omega'(Z_1) \delta Z_1 + \delta\Omega(Z_1)] \log(Z - Z_1) \\ + \text{fonction continue.}$$

La nature de la discontinuité de  $\beta(q e^{is})$  pour  $s = s_1$  [cf. (4.51), (4.52) et (4.52')] laissait d'ailleurs prévoir ce résultat.

*Remarque.* — Les conclusions précédentes doivent être légèrement modifiées lorsque l'une des parois,  $\mu_2$  pour fixer les idées, s'éloigne à l'infini. Dans ce cas (cf. §§ 14 et 27) le paramètre  $s_1$  se réduit à zéro;  $Z_1$  se confond avec  $q$  et le point  $Z = q$  devient un point singulier de  $\gamma(Z)$ . Portons alors, dans (4.45), les développements (4.22),

(4.22') et les suivants :

$$\Omega(Z) = \Omega'(q)(Z - q) + \dots, \quad \delta \Omega(Z) = -\Omega'(q) \delta q + \dots$$

On trouvera ainsi, en désignant par  $a_1$  et  $a_2$  des constantes qu'il est inutile d'expliciter,

$$(4.53') \quad \gamma(Z) = \frac{a_1}{(Z - q)} + a_2 \log(Z - q) + \text{fonction continue.}$$

En résumé, les calculs précédents conduisent à la conclusion suivante : envisageons, dans le plan  $z$ , deux configurations voisines caractérisées respectivement au moyen des éléments  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$  et  $\Psi^*(l), \alpha^*, \beta^*, d_1^*, d_2^*$ ; soient

$$x = x \left[ l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right], \quad x^* = x^* \left[ l^*(s), \frac{1}{a^*-1}, \frac{1}{b^*-1} \right],$$

les solutions voisines des problèmes du sillage correspondants,  $\delta x$  la partie principale de  $x^* - x$ , solution de l'équation (4.39) [cf. aussi (4.2)]; la donnée de ces éléments suffit à déterminer complètement la fonction analytique  $\gamma(Z)$  et réciproquement, la donnée de  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2, \Delta\Psi(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta d_1, \Delta d_2$  de  $x$  et de  $\gamma(Z)$  détermine la solution  $\delta x$  de (4.39). La première partie de cette affirmation est évidente, puisque les seconds membres des équations de définition (4.43) et (4.45) de  $\gamma$  sont définis justement à partir de  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$ , de leurs accroissements, de  $x$  et de  $\delta x$ . Réciproquement, donnons-nous  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$ , leurs accroissements respectifs, l'élément  $x = x \left[ l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$  et la fonction  $\gamma(Z)$ . L'équation (4.46) permet d'exprimer  $\delta l(s)$  sous forme de fonction linéaire de  $\gamma, \frac{\delta a}{(a+1)^2}$  et  $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$ . Portons alors la valeur de  $\delta l(s)$  ainsi obtenue dans (4.51); le second membre de cette formule sera linéaire relativement à  $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$  et  $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$  (164); d'après (4.52) et (4.52') il en sera de même des constantes  $k_1$  et  $k_2$ .

---

(164) Rappelons, en effet, que les paramètres tels que  $\delta\psi_1, \delta\psi_2$ , qui figurent au second membre de (4.46), supposé explicité, s'expriment sous forme linéaire et homogène de  $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$  et  $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$ .

Ainsi, les seconds membres des équations (4.51) sont des fonctions linéaires des différentielles  $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$  et  $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$  dont les coefficients sont connus; comme par hypothèse,  $\beta(qe^{is})$  est donné, on obtient, en faisant  $s=\pi$  dans la première et  $s=0$  dans la seconde des équations (4.51) un système résoluble de deux équations linéaires à deux inconnues  $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$  et  $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$ . Les valeurs de ces deux différentielles ayant été ainsi déterminées en fonction de  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ , des accroissements respectifs de ces éléments et de  $x$ , la condition (4.46) fera connaître  $\delta l(s)$  en fonction des mêmes éléments. La résolution de l'équation aux variations (4.39) équivaut donc bien à la détermination de la fonction analytique  $\gamma(Z)$  de M. Weinstein.

Cela posé, résumons les conditions frontières imposées à la fonction  $\gamma(Z)$  définie dans la demi-couronne  $d$  et holomorphe dans son intérieur <sup>(165)</sup>:

1°  $\gamma(e^{is})$  et  $\frac{d\gamma(e^{is})}{ds}$  existent et vérifient une condition de Hölder;

on a

$$\gamma(e^{i0}) = 0;$$

d'après (4.46') la partie imaginaire  $\beta(e^{is})$  de  $\gamma(e^{is})$  est une donnée;

2°  $\frac{d\gamma}{df}$ , envisagée comme fonction de  $Z$ , possède un pôle simple aux points  $Z = \pm 1$ ; dans le voisinage de chacun de ces points on peut écrire [cf. (4.48)] les développements respectifs

$$\frac{d\gamma}{df} = m \frac{Z-1}{Z+1} + m' + \varepsilon(Z-1), \quad \frac{d\gamma}{df} = n \frac{Z+1}{Z-1} + n' + \varepsilon(Z-1),$$

dans lesquels les symboles  $m$ ,  $m'$ ,  $n$  et  $n'$  désignent des constantes complexes données;

3° le long de l'axe réel  $Y=0$ ,  $\beta(X, 0)$  vérifie la condition (4.50);

<sup>(165)</sup> Rappelons que nous considérerons comme donnés les éléments  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  et leurs accroissements respectifs; il en résulte que toutes les fonctionnelles explicites de ces éléments doivent être regardées comme connues. Nous regarderons aussi comme déterminé l'élément  $x$  qui est solution du problème du sillage posé pour la configuration donnée.

4° la fonction  $\gamma(q e^{is})$  est analytique, régulière dans chacun des intervalles  $0 < s < s_1$ ,  $s_1 < s < \pi$ , extrémités exclues; sur chacun d'eux elle est définie à une constante additive près, *a priori* inconnue (égale à  $-\delta\psi_2$  sur le premier intervalle, à  $\delta\psi_1$  sur le second);  $\gamma(Z)$  est continue pour  $Z = \pm q$  lorsque les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont finies;  $\gamma(Z)$  présente pour  $Z = Z_1$  une singularité logarithmique tant que  $Z_1 \neq \pm q$  [c'est-à-dire tant que  $d_1, d_2 \neq \infty$ , cf. (4.53)]; toutefois le coefficient du logarithme est une constante *a priori* inconnue. La formule (4.54) précise la singularité de  $\gamma(Z)$  lorsque  $d_2 = \infty$ ; enfin, le cas  $d_1 = d_2 = \infty$  a été déjà traité par M. Leray.

Nous appellerons *problème de M. Weinstein* le problème qui consiste à déterminer la fonction  $\gamma(Z)$  assujettie à vérifier l'ensemble des conditions précédentes.

*Remarque.* — Dans le cas du problème du sillage symétrique la fonction  $\beta$ , nulle le long de la portion de l'axe des  $Y$  intérieure à  $d$ , prendrait, par définition, des valeurs opposées aux points symétriques relativement à cet axe.

**53. LEMME DE M. K. FRIEDRICHS.** — Pour discuter le problème de M. Weinstein, nous aurons besoin d'un lemme très important, dû à M. Friedrichs, que nous allons faire connaître.

Envisageons la solution  $x = x\left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}\right]$  d'un problème du sillage posé pour les données  $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$  et  $d_2$ ; nous dirons que cette solution vérifie l'hypothèse de M. Friedrichs lorsque, dans la couronne  $d$  correspondante, on peut définir une fonction  $B(X, Y)$  assujettie à vérifier les conditions suivantes :

- 1°  $B(X, Y)$  est positive dans son domaine de définition;
- 2°  $B(X, Y)$  possède dans son domaine de définition les dérivées partielles de premier ordre hölderiennes dans  $d$  et le long de ses frontières;
- 3°  $B(X, Y)$  est surharmonique dans son domaine de définition; cela veut dire qu'en tout point intérieur de ce domaine on a

$$\frac{\partial^2 B}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial Y^2} \leq 0;$$

4° Le long des segments  $1 \leq X \leq -q$  et  $q \leq X \leq 1$  de l'axe  $Y = 0$ , on a

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dn} = \frac{dT}{dn},$$

relation où  $T(X, Y)$  est la fonction de M. Villat construite à partir des éléments  $\Psi(l), l(s), a$  et  $b$ .

*Remarque.* — Dans le cas du problème symétrique du sillage le domaine de définition de  $B(X, Y)$  se réduit à la moitié  $X \geq 0, Y \geq 0$  de la demi-couronne  $d$ ;  $B(X, Y)$  vérifiera la relation (4.50) le long du segment  $q \leq X \leq 1$  seulement.

Nous allons indiquer les catégories des profils qui vérifient l'hypothèse de M. Friedrichs. Pour cela notons que la fonction  $\beta(X, Y)$  de M. Weinstein, correspondante à une déformation quelconque de la configuration des éléments rigides, satisfait à toutes les conditions imposées à  $B(X, Y)$  à l'exception de la première <sup>(166)</sup>. Dès lors, on pourra prendre  $B = \beta$  toutes les fois que l'on saura définir une variation des données de manière que la fonction  $\beta(X, Y)$  correspondante soit positive dans son domaine de définition et régulière pour  $Z = Z_1, Z = \pm q$ . Or, faisons en particulier, subir à l'ensemble obstacle-parois une translation  $\Delta z = \text{const.}$  Il est clair que les équations aux variations des équations de M. Villat correspondantes admettent les solutions évidentes

$$\delta \Omega(Z) = 0, \quad \delta f(Z) = 0.$$

D'après (4.45) la fonction  $\gamma(Z)$  correspondante sera égale à  $e^{-i\Omega(Z)}$  à un facteur constant près; ce dernier se détermine au moyen de (4.46); on a donc

$$(4.54) \quad \gamma(Z) = - e^{-i\Omega(Z)} \Delta z.$$

La fonction  $\gamma(Z)$  ainsi définie sera régulière pour  $Z = Z_1$  et pour  $Z = \pm q$ .

Cela posé, envisageons le cas du problème symétrique; d'après ce que nous avons vu au paragraphe 28, il existe au moins une solution

---

<sup>(166)</sup> Rappelons, toutefois, que  $\beta$  est, en général, discontinue au point  $Z = Z_1$  où  $B$  doit être régulière et que les dérivées de  $\beta$  ne sont pas, en général, régulières pour  $Z = \pm q$ .

symétrique; celle-ci vérifie l'inégalité

$$-\pi \leq \Theta(X, Y) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} X \geq 0, \\ Y \geq 0. \end{cases}$$

Donnons alors à  $\Delta z$  une valeur réelle et négative; (4.54) montre que

$$\beta(X, Y) = e^{\Delta z} \sin \Theta \Delta z \geq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} X \geq 0, \\ Y \geq 0. \end{cases}$$

*Ainsi les solutions du problème symétrique du sillage vérifient toujours l'hypothèse de Friedrichs.*

Passons à l'examen du cas général. D'après les résultats du précédent paragraphe,  $\gamma(Z)$  est continue dans le voisinage du point  $Z = e^{i s_0}$  et nulle en ce point; c'est ce qu'on vérifie directement sur (4.54) en remarquant que  $T(e^{i s_0}) = -\infty$ . Toutefois la fonction  $\arg \gamma(Z)$  subit en ce point une discontinuité égale à  $\pi$ ; elle varie entre les valeurs extrêmes

$$\arg \Delta z - \Psi[l(s_0)] \quad \text{et} \quad \arg \Delta z - \Psi[l(s_0)] + \pi.$$

Il s'ensuit que, dans le voisinage de  $Z = Z_0$ ,  $\arg \gamma(Z)$  ne pourra être compris entre 0 et  $\pi$  que si  $\arg \Delta z = \Psi[l(s_0)]$ ; pour que  $\beta$  soit positive dans  $d$ , il sera donc nécessaire de prendre

$$\Delta z = -|\Delta z| e^{i \Psi[l(s_0)]},$$

ce qui revient à faire subir à l'ensemble des éléments rigides une translation parallèle à la tangente à l'obstacle au point de bifurcation. D'après (4.54), on a alors

$$(4.55) \quad \beta(X, Y) = e^{\Delta z} |\Delta z| \sin \{ \Psi[l(s_0)] - \Theta(X, Y) \}.$$

La fonction  $\beta(X, Y)$  ne peut donc être positive dans  $d$  que moyennant la double inégalité

$$0 \leq \Psi[l(s_0)] - \Theta(X, Y) \leq \pi,$$

qui sera satisfaite si

$$(4.56) \quad 0 \leq \Psi[l(s_0)] - \Phi(s) \leq \pi,$$

puisque  $\Theta(X, Y)$  atteint ses maximum et minimum sur  $|Z| = 1$ . Or, les inégalités (4.56) sont sûrement satisfaites si l'obstacle vérifie la



condition suivante :

$$(4.57) \quad \Psi[l(s_0)] - \Psi[l(s)] \geq 0 \quad \text{pour } s - s_0 \geq 0$$

(dans laquelle les signes supérieurs et inférieurs se correspondent respectivement), car  $\Psi[l(s)]$  est compris entre 0 et  $\pi$ .

Dans ce cas on peut donc prendre encore  $B(X, Y) = \beta(X, Y)$ . Une difficulté se présente toutefois. Le cas symétrique excepté, la position du point de bifurcation sur l'obstacle est *a priori* inconnue; il sera donc impossible de décider, en général, si l'obstacle donné vérifie ou non la condition précédente; mais celle-ci est sûrement satisfaite lorsque  $\Psi(l)$  est une fonction décroissante de  $l$ , c'est-à-dire lorsque l'obstacle est convexe vers le courant. Nous pouvons donc énoncer : *les obstacles convexes vérifient l'hypothèse de Friedrichs.*

*Remarque.* — Les inégalités (4.55) sont, au contraire, toujours en défaut lorsque

$$(4.57') \quad \Psi[l(s_0)] - \Psi[l(s)] \geq 0 \quad \text{pour } s - s_0 \leq 0.$$

Dans ce cas, en effet, on a

$$\begin{aligned} \Psi[l(s_0)] - \Phi[l(s)] &< 0 && \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi, \\ \Psi[l(s_0)] - \Phi(s) = \Psi[l(s_0)] - \Psi[l(s)] + \pi &> \pi && \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \end{aligned}$$

Cela montre que la fonction  $\beta$  est négative le long de l'arc de  $|Z| = 1$  appartenant à  $d$ . De plus,  $\beta$  change sûrement de signe à l'intérieur de  $d$ , puisque  $\beta(\pm q, 0)$  est positive d'après (4.55) et l'égalité  $\Theta(\pm q, 0) = 0$  alors que  $\gamma(Z)$  est, d'après (4.54) holomorphe dans le voisinage des points  $Z = \pm q$ . En particulier, la condition (4.57') est sûrement vérifiée lorsque l'obstacle est concave vers le courant; dans ce cas l'hypothèse de Friedrichs n'est pas satisfaite.

Donnons-nous alors une configuration des éléments rigides vérifiant l'hypothèse de Friedrichs; considérons une solution  $\beta(X, Y)$  du problème de M. Weinstein correspondant à une déformation quelconque des données [nous excluons, toutefois, le cas où  $\beta$  serait proportionnelle à la fonction  $B(X, Y)$  dont nous avons postulé l'existence]; nous appellerons  $\Delta$  tout domaine d'un seul tenant en lesquels les lignes d'équation  $\beta(X, Y) = 0$  décomposent la demi-couronne  $d$ ;

d'après cela, la frontière  $\Delta'$  d'un domaine  $\Delta$  pourra comprendre, outre des lignes  $\beta = 0$ , des portions de la frontière de  $d$ . Cela étant, on a le résultat suivant :

LEMME DE M. FRIEDRICHS. — *Toute frontière  $\Delta'$  qui ne comprend aucun arc des cercles  $|Z| = 1$  et  $|Z| = q$  le long duquel  $\beta$  serait différente de zéro, contient nécessairement le point  $Z = Z_1$ ; dans ce cas,  $\gamma(Z)$  ne peut pas être holomorphe en ce point <sup>(167)</sup>.*

La démonstration repose sur l'inégalité

$$(4.58) \quad I = \int_C \left[ \beta \frac{d\beta}{dn} - \frac{\beta^2}{\beta_0} \frac{d\beta_0}{dn} \right] ds \geq 0,$$

dans laquelle  $C$  désigne un contour d'intégration fermé et rectifiable,  $\beta$  une fonction harmonique *quelconque*, régulière à l'intérieur de  $C$  et dérivable le long de  $C$ ,  $\beta_0$  une fonction surharmonique et positive quelconque définie à l'intérieur de  $C$ ; le quotient  $\frac{\beta^2}{\beta_0}$  est supposé borné dans  $C$ ; l'égalité ne peut avoir lieu que si  $\beta$  et  $\beta_0$  sont proportionnels. Pour établir (4.58), il suffit de transformer le premier membre en l'intégrale double étendue à l'intérieur de  $C$ ; moyennant les hypothèses faites, cette transformation sera légitime; il vient

$$I = \iint \left[ \left( \frac{\partial\beta}{\partial X} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial\beta_0}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial\beta}{\partial Y} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial\beta_0}{\partial Y} \right)^2 - \frac{\beta^2}{\beta_0} \left( \frac{\partial^2\beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\beta_0}{\partial Y^2} \right) \right] dX dY.$$

Les deux premiers termes du crochet qui figurent sous le signe  $\iint$  sont manifestement positifs; ils ne s'annulent que si  $\beta$  et  $\beta_0$  sont proportionnels; enfin le terme

$$- \frac{\beta^2}{\beta_0} \left( \frac{\partial^2\beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\beta_0}{\partial Y^2} \right),$$

est positif puisque  $\beta_0$  est surharmonique et positive; ce terme est nul

<sup>(167)</sup> Cela veut dire, lorsque les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont toutes les deux à distance finie et lorsque les hypothèses de l'énoncé sont vérifiées, que la différentielle  $\Omega'(Z_1) \delta Z_1 + \delta \Omega'(Z_1)$  ne peut être nulle [cf. l'équation (4.53)]; si  $\mu_2$  est rejeté à l'infini, les constantes  $a_1$  et  $a_2$  ne peuvent pas être nulles toutes les deux [cf. (4.53')].

si  $\beta$  est proportionnelle à  $\beta_0$ , c'est-à-dire si  $\beta_0$  est une fonction harmonique; cela démontre l'inégalité (4.58). Ceci étant, raisonnons par l'absurde et supposons que le lemme de Friedrichs soit en défaut; il existerait alors un domaine  $\Delta$  le long de la frontière  $\Delta'$  duquel la fonction  $\beta$  de M. Weinstein serait régulière et nulle — à moins que  $\Delta'$  ne contienne des portions de l'axe  $Y = 0$ . Soit la fonction  $B$  correspondante à la configuration donnée dont nous avons admis l'existence; comme les fonctions  $B \pm \beta$  sont surharmoniques et comme, par hypothèse,  $\beta$  ne change pas de signe dans  $\Delta$ , nous pouvons poser

$$\beta_0 = B + \beta \quad \text{si } \beta > 0 \text{ dans } \Delta$$

ou

$$\beta_0 = B - \beta \quad \text{si } \beta < 0 \text{ dans } \Delta.$$

Grâce à ce choix de  $\beta_0$ , on a

$$\left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| \leq 1,$$

la formule (4.58) s'applique donc au domaine  $\Delta$  puisque les fonctions  $\beta$  et  $\frac{\beta^2}{\beta_0}$  sont régulières dans  $\Delta$  et bornées sur  $\Delta'$  en même temps que les dérivées  $\frac{d\beta}{dn}$  et  $\frac{d\beta_0}{dn}$ . Dans ces conditions la contribution au premier membre de (4.58) des portions de  $\Delta'$  le long desquelles  $\beta = 0$  est nulle. Il en est de même du restant éventuel de la frontière  $\Delta'$ , constituée par des segments de l'axe des  $X$ ; en effet, nous avons, en chaque point de cet axe,

$$\frac{dB}{B} = \frac{d\beta}{\beta} = \frac{dB \pm d\beta}{B \pm \beta} = \frac{d\beta_0}{\beta_0}$$

[cf. l'équation (4.50) et la 4<sup>e</sup> condition imposée à  $B$ ]; cela montre que l'élément différentiel de (4.58) est nul le long de  $Y = 0$ .

Ainsi l'intégrale (4.58) est nulle lorsqu'on prend pour contour d'intégration  $C$  une frontière  $\Delta'$  de l'espèce visée par l'énoncé. L'une des deux conséquences suivantes en résulte : 1<sup>o</sup> ou bien  $\beta$  et  $\beta_0$  (c'est-à-dire  $\beta$  et  $B$ ) sont proportionnels; 2<sup>o</sup> ou bien  $\Delta'$  atteint le point  $Z = Z_1$ ,

où  $\beta$  ne doit pas être régulière, auquel cas l'emploi de la formule (4.58) devient illégitime <sup>(168)</sup>.

C. Q. F. D.

**34. UNE PROPRIÉTÉ DES CONFIGURATIONS VÉRIFIANT L'HYPOTHÈSE DE M. FRIEDRICH.** — Considérons une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs. Modifions-la infiniment peu en laissant l'obstacle invariable de forme et de position (ce qui se traduit par les conditions :  $\Delta\Psi(l) \equiv 0$ ,  $\Delta z(l) \equiv 0$ ,  $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0$ ) et en faisant subir aux parois (supposées d'abord situées à des distances finies) les translations  $\Delta d_1$  et  $\Delta d_2$  dont l'une au moins n'est pas nulle. Nous nous proposons d'étudier certaines propriétés de la solution  $\beta$  du problème correspondant de Weinstein :

1° D'après (4.46')  $\beta(X, Y) = 0$  le long de  $|Z| = 1$ .

2° D'après (4.48) la dérivée  $\frac{d\gamma}{df}$  est nulle pour  $Z = \pm 1$ .

3° D'après (4.51) et (4.52), on a

$$\begin{aligned} \beta(q e^{is}) &= \delta\psi_1 - \Delta d_1 e^{T(qe^{is})} && \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi, \\ \beta(q e^{is}) &= -\delta\psi_2 + \Delta d_2 e^{T(qe^{is})} && \text{pour } 0 \leq s \leq s_1. \end{aligned}$$

Les alinéas 1° et 2° prouvent que les points  $Z = \pm 1$  sont les origines des lignes d'équations  $\beta(X, Y) = \beta(1, 0) = 0$  intérieurs au domaine  $d$ .

En effet, la correspondance  $z = z(f)$  permet de définir la fonction  $\gamma(f)$  dans le domaine  $F$  (cf. la figure 2) qui possède dans le voisinage du point  $f = \varphi_2$  une tangente continue. L'emploi du théorème de M. Magnier devient alors légitime; des relations

$$\gamma(\varphi_1) = \left( \frac{d\gamma}{df} \right)_{f=\varphi_1} = 0,$$

on peut donc conclure que  $\beta(\varphi, \psi)$  prend des valeurs de signes opposés dans le voisinage  $\psi \leq 0$  du point  $f = \varphi_2$ ; cela veut dire qu'une ligne d'équation  $\beta = 0$  est issue de ce point vers l'intérieur de  $F$ . Il en résulte que le point  $Z = 1$  (image de  $\varphi_2$ ) est commun aux frontières

<sup>(168)</sup> Dans le cas du problème symétrique les raisonnements sont les mêmes, sauf qu'il y a lieu de remplacer le domaine  $d$  par la demi-couronne circulaire  $|Z| = 1$ ,  $X \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ;  $\beta$  est nulle le long du segment  $(q, 1)$  de  $OY$ ; on a, de plus,  $Z_1 = iq$ .

de deux domaines  $\Delta$  définis au paragraphe 33; cela justifie notre assertion. Aucune des lignes  $\beta = 0$  issues de  $Z = \pm 1$  ne peut aboutir à un point  $Z = e^{i\alpha}$ ; sinon elle formerait avec l'arc correspondant de ce cercle  $|Z| = 1$  un domaine sur la frontière duquel la fonction harmonique  $\beta$  (régulière à l'intérieur) serait nulle et continue, donc nulle dans tout le domaine  $d$ ; or ceci est contredit par les équations (4.51) et (4.52);  $\beta(qe^{i\alpha})$  est variable sur  $|Z| = q$  puisque les variations  $\Delta d_1$  et  $\Delta d_2$  ne sont pas nulles toutes les deux.

D'autre part, en vertu du lemme Friedrichs, aucune des lignes  $\beta = 0$  issues de  $Z = \pm 1$  ne peut atteindre l'axe des  $X$ ; elles ne peuvent donc aboutir qu'à des points du cercle  $|Z| = q$ . Cela étant, donnons-nous une configuration symétrique et déplaçons les parois, sans modifier toutefois l'obstacle, de manière que  $\Delta d_1 = \Delta d_2$ . Dans ce cas l'hypothèse de Friedrichs est satisfaite; de plus les conditions frontières imposées à  $\beta$  seront symétriques par rapport à l'axe  $Y = 0$  (si l'on se borne aux solutions symétriques dont nous avons établi l'existence); on aura, en particulier :  $\delta\psi_1 = \delta\psi_2$ ;  $Z_1 = iq$ . Les lignes  $\beta = 0$ , issues des points  $Z = \pm 1$  ne peuvent aboutir au point  $Z = iq$  <sup>(169)</sup>; elles atteignent donc les points  $Z = qe^{i\alpha}$  et  $Z = qe^{i(\pi-\alpha)}$  où  $\beta$  est régulière; cela exige que la fonction  $\beta$  y soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait en ce point (cf. l'alinéa 3°)

$$\delta\psi_1 = \delta\psi_2 = \Delta d_1 e^{T(\eta^{i\alpha})} = \Delta d_2 e^{T(\eta^{e^{i\alpha}})}.$$

Cela montre que les accroissements  $\delta\psi_1$  et  $\Delta d_1$  sont de même signe. Il y a plus; d'après les théorèmes I et II du paragraphe 17  $T(qe^{i\alpha})$  est négatif; on en tire

$$|\delta\psi_1| < |\Delta d_1|.$$

Or, nous avons vu que

$$\Delta d_1 = \delta\psi_1 + \delta\gamma_1$$

[cf. la démonstration de la formule (4.52)]. Nous pouvons donc énoncer :

*Si l'on déforme une configuration symétrique de manière que*

---

<sup>(169)</sup> En ce point, en effet, la fonction  $\gamma$  présente une singularité logarithmique [cf. (4.53)] : d'après le théorème de M. Magnier,  $Z = iq$  peut être l'origine d'une seule ligne d'équation  $\beta = 0$  au plus.

*l'obstacle demeure invariable de forme et de position alors que les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  subissent des translations égales et de sens contraires ( $\Delta d_1 = \Delta d_2$ ), les accroissements correspondants des paramètres  $\delta\psi_1$  et  $\delta\gamma_1$  (donc des paramètres  $\delta\psi_2$  et  $\delta\gamma_2$ ) sont du signe de  $\Delta d_1$  (de  $\Delta d_2$ ).*

Envisageons maintenant une configuration dissymétrique vérifiant l'hypothèse de Friedrichs; modifions-la infiniment peu de manière que

$$\Delta\Psi[l(s)] \equiv 0; \quad \Delta z(l) \equiv 0; \quad \Delta\alpha = \Delta\beta = 0; \quad \Delta d_1 = 0; \quad \Delta d_2 \neq 0.$$

Cela revient à laisser l'obstacle invariable de forme et de position, de laisser la paroi  $\mu_1$  fixe et à imprimer à la paroi  $\mu_2$  une translation  $\Delta d_2$  dans le sens  $Oy$ . Étudions la solution  $\beta$  du problème de M. Weinstein correspondant. Seules les conditions frontières le long de  $|Z| = q$  changent par rapport au précédent alinéa; nous avons en l'espèce

$$\begin{aligned} \beta(qe^{is}) &= \delta\psi_1 && \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi \\ \beta(qe^{is}) &= -\delta\psi_2 + \Delta d_2 e^{i(qe^{is})} && \text{pour } 0 \leq s \leq s_1. \end{aligned}$$

Chacune des lignes d'équation  $\beta = 0$ , issues des points  $Z = \pm 1$ , aboutit nécessairement à un point  $Z = qe^{i\varepsilon}$ ; soient  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les arguments des extrémités de ces lignes. Les raisonnements développés à propos du cas symétrique prouvent que les quantités  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ne peuvent être égales et que l'une d'elle,  $\varepsilon_1$ , par exemple, est égale à  $s_1$ . Je dis qu'alors  $\varepsilon_2$  est nécessairement inférieur à  $s_1$ . Sinon, en effet, la fonction  $\beta$  serait continue pour  $Z = qe^{i\varepsilon_2}$ ,  $\varepsilon_2 \neq s_1$ , et par suite nulle en ce point; cela entraîne, eu égard aux conditions frontières imposées à  $\beta$  et à l'hypothèse  $s_1 < \varepsilon_2$ ,

$$\delta\psi_1 = 0.$$

La fonction  $\beta$  serait donc nulle sur tout l'arc  $\varepsilon_2 \leq s \leq \pi$  de  $|Z| = q$ ; d'après le lemme de Friedrichs, cela exige que le domaine  $\Delta$  attenant à cet arc, atteigne le point  $Z = Z_1$ ; comme on ne peut avoir  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , notre assertion se trouve justifiée.

Il suit de là que  $\beta(qe^{is})$  s'annule dans l'intervalle  $0 \leq s \leq s_1$ ; cela veut

dire que  $\delta\psi_2 - \Delta d_2 e^{\gamma(qe^{i\theta})}$  possède un zéro dans l'intervalle considéré. Le raisonnement s'achève alors comme au précédent alinéa et nous pouvons conclure :

*Si l'on déforme une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs de manière que l'obstacle et l'une des parois demeurent invariables de forme et de position alors que la deuxième paroi,  $\mu_2$  (ou  $\mu_1$ ), pour fixer les idées, subit une translation égale à  $\Delta d_2$  (ou à  $\Delta d_1$ ), les accroissements correspondants des paramètres  $\delta\psi_2$  et  $\delta\gamma_2$  (ou  $\delta\psi_1$  et  $\delta\gamma_1$ ) sont du signe de  $\Delta d_2$ .*

Cet énoncé s'applique, en particulier, au cas de l'obstacle convexe placé dans un canal de largeur finie <sup>(170)</sup>.

Ne supposons plus que la configuration soit symétrique, mais admettons toujours qu'elle vérifie l'hypothèse de Friedrichs; je dis que si l'obstacle demeure invariable de forme et de position, les égalités  $\Delta d_1 = \Delta d_2 = 0$  entraînent  $\beta \equiv 0$  (donc, en particulier,  $\delta\psi_1 = 0$  et  $\delta\psi_2 = 0$ ).

<sup>(170)</sup> Ce théorème a déjà été établi dans les cas particuliers suivants : obstacle symétrique concave vers le courant (M. Weinstein); obstacle circulaire convexe (M. Jacob). Les méthodes de ces auteurs sont sans rapport avec celles du texte.

Voici comment on adapte le raisonnement au cas du courant de largeur infinie. Considérons un obstacle vérifiant l'hypothèse de Friedrichs placé dans un courant limité par une seule paroi plane  $\mu_1$ , par exemple,  $\mu_2$  étant supposée rejetée à l'infini. Laissons l'obstacle invariable de forme et de position et imprimons à  $\mu_1$  une translation  $\Delta d_1$ ; nous allons étudier la solution du problème de Weinstein correspondant. Dans ce cas,  $\delta\psi_1 - \Delta d_1 e^{\gamma(qe^{i\theta})} = \beta(qe^{i\theta})$  pour  $0 \leq \theta \leq \pi$ ; le point  $Z_1$  est confondu avec  $Z = q$  et la fonction  $\gamma(Z)$  peut y posséder, outre une singularité logarithmique, un pôle de premier ordre [cf. (4.53')]. D'après le théorème de M. Magnier une seule des lignes d'équation  $\beta = 0$ , issue de  $Z = \pm 1$ , peut atteindre  $Z = q$ ; d'après le lemme de Friedrichs, une ligne  $\beta = 0$  doit aboutir nécessairement à un point  $|Z| = q$  en lequel  $\beta$  soit continue. Le raisonnement s'achève, dès lors, comme dans le texte; il prouve en outre que  $\beta \equiv 0$  si  $\Delta d_1 = 0$  (cf. la démonstration de ce fait dans le cas où la distance  $d_2$  est finie). Les résultats ci-dessus s'appliquent, en particulier, au cas d'un obstacle convexe vers le courant, placé en fluide indéfini limité par une seule paroi plane.

D'après l'alinéa 3°, en effet, nous avons, dans le cas actuel,

$$(4.59) \quad \beta(q e^{is}) = \begin{cases} \delta\psi_1 & \text{pour } s_1 < s \leq \pi, \\ -\delta\psi_2 & \text{pour } 0 \leq s < s_1. \end{cases}$$

Nous noterons encore  $Z = q e^{is_1}$  et  $Z = q e^{is_2}$  les affixes des points auxquels aboutissent les lignes d'équation  $\beta = 0$  issues de  $Z = \pm 1$ . Si l'on a  $s_1 \neq \varepsilon_1$ , la fonction  $\beta$  est continue pour  $Z = q e^{is_1}$ ; elle est donc nulle en ce point puisqu'une ligne  $\beta = 0$  y aboutit; d'après (4.59) cela exige que l'un, au moins, des accroissements  $\delta\psi_1$  ou  $\delta\psi_2$  soit nul. Ainsi,  $\beta$  est nulle le long de l'un, au moins, des arcs  $0 \leq s < s_1$  ou  $s_1 < s \leq \pi$  du cercle  $|Z| = q$ ; d'après le lemme de Friedrichs, le domaine  $\Delta$ , dont cet arc fait partie, doit atteindre le point  $Z = Z_1$ ; cela entraîne  $\varepsilon_1 = s_1$ . D'une manière toute semblable on établirait l'égalité  $\varepsilon_2 = s_1$ ; cela montre que le point  $Z = Z_1$  est l'origine de deux lignes d'équation  $\beta = 0$ . Or, le théorème de M. Magnier prouve qu'une telle disposition des lignes  $\beta = 0$  dans le voisinage de  $Z = Z_1$  est incompatible avec l'existence d'une singularité logarithmique en ce point; [cf. (4.43)]. La contradiction à laquelle nous venons d'aboutir ne peut être levée que si  $\beta \equiv 0$ . C. Q. F. D.

*Ainsi, le problème de M. Weinstein n'admet pas de solutions autres que  $\beta \equiv 0$  lorsqu'il est posé pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs et lorsque les variations des données  $\Delta\Psi(l)$ ,  $\Delta z(l)$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\left(\frac{1}{a_1}\right)$  et  $\Delta\left(\frac{1}{a_2}\right)$  sont identiquement nulles. D'après les résultats du paragraphe 32 cela revient à dire que l'équation aux variations (4.41) admet la seule solution  $\delta x = 0$ ; par suite l'équation (4.39) possède une seule solution lorsqu'elle est posée pour un obstacle vérifiant l'hypothèse de Friedrichs.*

Ce théorème, fondamental dans notre discussion d'unicité, constitue une extension d'un résultat analogue obtenu par M. Leray dans le cas du fluide illimité <sup>(171)</sup>; d'après ce que nous avons vu au

---

<sup>(171)</sup> Signalons, toutefois, que ce théorème avait déjà été établi par M. Weinstein dans le cas de l'obstacle symétrique concave et de courbure suffisamment faible et étendu depuis aux obstacles concaves symétriques de plus en plus généraux par MM. Hamel, Weyl et Friedrichs.



paragraphe **31**, il permet d'appliquer les critères d'unicité de MM. Leray et Schauder à l'équation (4.39). Il nous reste maintenant, pour pouvoir conclure, à préciser les indices topologiques des solutions éventuelles de celle-ci.

**35. DÉTERMINATION DE L'INDICE TOPOLOGIQUE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION AUX VARIATIONS DU PROBLÈME DU SILLAGE. THÉORÈMES D'UNICITÉ.** — L'étude de l'indice de l'équation (4.39) que nous allons entreprendre repose sur la propriété d'invariance qu'exprime l'énoncé suivant :

Reprenons l'équation (3.34')

$$x = F(x, k)$$

et supposons encore qu'elle satisfait à toutes les conditions énumérées au début du paragraphe **28**; supposons maintenant, en plus, que pour toute valeur de  $k$ , appartenant à l'intervalle  $0 \leq k \leq 1$ , cette équation admette l'unique solution  $x = x(k)$ ; dans ce cas, l'indice topologique  $i[x - F(x, k), x(k)]$  de celle-ci est indépendant de  $k$ . Dès lors, admettons que l'on ait réussi à construire une équation

$$(4.60) \quad \partial x = dF(\partial x, x, k),$$

vérifiant toutes les hypothèses de l'énoncé précédent et qui se réduise, pour  $k=1$ , à l'équation (4.39) <sup>(172)</sup> et pour  $k=0$  à une équation dont la solution ait un indice connu; celui-ci sera alors égal, d'après le théorème d'invariance, à l'indice de la solution de (4.39).

Voici comment nous procéderons pour construire l'équation (4.60). Étant donné une configuration  $\Psi(l)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_1$  et  $d_2$ , envisageons la solution  $x = x\left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}\right]$  du problème du sillage correspondant,  $\Phi(s)$  et  $\Omega(Z)$  les fonctions de M. Villat et de M. Levi-Civita correspondantes. Nous associons à cette configuration un sillage

<sup>(172)</sup> L'équation (4.39) est supposée correspondre à une configuration assujettie à vérifier l'hypothèse de Friedrichs; d'après les résultats du paragraphe précédent, ce fait assure l'unicité de la solution de (4.39) et par suite l'existence de l'indice topologique de celle-ci.

auxiliaire (dont les éléments seront marqués de l'indice 1) tel que

$$a = a^1, \quad b = b^1, \quad s_0 = s_0^1.$$

Pour vérifier cette dernière condition, il suffira de prendre, et c'est le choix que nous ferons, un obstacle rectiligne d'inclinaison  $\Psi^1(l^1) = s_0$  [cf. l'équation (1.24)]; les paramètres  $\psi_1^1$  et  $\psi_2^1$  pourront être quelconques; on peut prendre  $\psi_1^1 = \psi_1$ ;  $\psi_2^1 = \psi_2$ . Cela étant, considérons la configuration  $C(k)$  dépendant du paramètre  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ), construite à partir des éléments de M. Villat

$$\Phi(s, k) = k \Phi(s) + (1 - k) \Phi^1(s), \quad a, \quad b, \quad \psi_1 \quad \text{et} \quad \psi_2$$

et qui se réduit pour  $k = 1$  à la configuration donnée  $C(1)$  et pour  $k = 0$  à la configuration auxiliaire  $C(0)$  que nous avons associée à  $C(1)$ . D'après les formules (1.6) et (1.15) on a

$$(4.61) \quad \Omega(Z, k) = k \Omega(Z) + (1 - k) \Omega^1(Z).$$

Je dis maintenant que si  $C(0)$  et  $C(1)$  vérifient toutes les deux l'hypothèse de Friedrichs <sup>(173)</sup>,  $C(k)$  la vérifie aussi pour toute valeur de  $k$ ,  $0 \leq k \leq 1$ . Soient, en effet,  $B_1(Z)$  et  $B(Z)$  les fonctions de Friedrichs de  $C(0)$  et de  $C(1)$  respectivement; nous allons vérifier que l'on peut prendre pour la fonction  $B(Z, k)$  de  $C(k)$

$$B(Z, k) = B^k(Z) B_1^{(1-k)}(Z).$$

Il est clair d'abord que la fonction  $B(Z, k)$  est réelle et positive.

Nous allons établir que cette fonction est surharmonique. Pour cela, observons que les expressions

$$\frac{1}{[B(Z)]^a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{[B_1(Z)]^a} \quad (a > 0),$$

ont toujours un sens, puisque  $B(Z)$  et  $B_1(Z)$  ne s'annulent pas, par hypothèse, dans le domaine  $d$ ; il en résulte que les dérivées partielles de deux premiers ordres de  $(BZ, k)$  existent et sont continues à l'intérieur de  $d$ , puisque les dérivées de  $B(Z)$  et  $B_1(Z)$  le sont. Ceci posé,

<sup>(173)</sup> Il en est bien ainsi en ce qui concerne  $C(0)$  si l'on choisit, comme nous l'avons fait, pour obstacle correspondant un profil rectiligne.

un calcul facile conduit à la relation

$$\begin{aligned} \Delta B(Z, k) = & k B^{k-1} B_1^{1-k} \Delta B + (1-k) B^k B_1^{-k} \Delta B_1 + k(k-1) B^{k-2} B_1^{-(1+k)} \\ & \times \left\{ B_1^2 \left[ \left( \frac{\partial B}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial Y} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - 2 B B_1 \left( \frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial B_1}{\partial X} + \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial B_1}{\partial Y} \right) + B_1^2 \left[ \left( \frac{\partial B_1}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial B_1}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du second nombre sont évidemment négatifs, puisque, par hypothèse, les fonctions  $B$  et  $B_1$  sont surharmoniques. D'autre part, le facteur  $k(k-1)$  n'est pas positif, puisque

$$0 \leq k \leq 1.$$

Tout revient, dès lors, à prouver que l'accolade qui figure au second membre est positive; or, cette accolade est une forme quadratique en  $B, B_1$ ; son discriminant, égal à

$$-\left( \frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial B_1}{\partial Y} - \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial B_1}{\partial X} \right)^2,$$

est négatif; la forme est donc définie négative tant que les fonctions  $B$  et  $B_1$  ne se réduisent pas à des constantes. Cela montre que la fonction  $B(Z, k)$  est bien surharmonique.

Enfin on a, en dérivant logarithmiquement l'équation de définition de  $B(Z, k)$  (le long des segments  $-1 \leq X \leq -q$  et  $q \leq X \leq 1$  de l'axe  $Y = 0$ ) et en tenant compte de (4.61),

$$\frac{1}{B(Z, k)} \frac{dB(Z, k)}{dn} = k \frac{1}{B} \frac{dB}{dn} + (1-k) \frac{1}{B_1} \frac{dB_1}{dn} = k \frac{dT}{dn} + (1-k) \frac{dT_1}{dn} = \frac{dT(X, Y, k)}{dn}.$$

Cela achève de justifier notre assertion.

Dans ces conditions, le résultat final du précédent paragraphe s'applique à  $C(k)$ ; nous pouvons donc affirmer que l'équation aux variations (4.39), posée relativement à la configuration  $C(k)$ , possède une seule solution, quel que soit  $k$ ,  $0 \leq k \leq 1$ ; cette équation, dépendant continûment du paramètre  $k$ , est du type (4.60); par suite, l'indice de la solution de (4.39) supposée écrite pour  $C(1)$  est égal à l'indice de la solution de cette équation supposée écrite pour  $C(0)$ , c'est-à-dire pour un obstacle rectiligne placé dans un canal à bords rectilignes. Or,

dans ce cas, la première équation du système (4.38'), équivalente à l'équation unique (4.39), est indépendante de  $\partial l(s)$  (cf. § 31); l'indice cherché ne change pas si l'on déforme la configuration de manière à éloigner à l'infini les deux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ; à la limite, en fluide illimité, l'équation (4.39) ne dépendra pas de  $\partial x$ , ce qui veut dire que l'indice de la solution de l'équation (4.39) posée pour la configuration donnée est aussi égal à  $+1$ . Nous pouvons conclure :

*L'indice topologique d'une solution de l'équation aux variations (4.39) supposée écrite pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs est égal à  $+1$ .*

Les résultats rappelés au paragraphe 32 permettent d'en déduire successivement les énoncés suivants :

*L'indice topologique d'une solution de l'équation (3.37), c'est-à-dire de l'équation du problème du sillage, posée pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs est égal à  $+1$ .*

*Le problème du sillage posé pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs possède une seule solution.*

A l'heure actuelle, on connaît deux espèces de configurations auxquelles s'appliquent les énoncés qui précèdent : les configurations symétriques (obstacle symétrique placé symétriquement dans un canal) et les configurations (symétriques ou dissymétriques) avec obstacle convexe vers le courant (y compris le cas du fluide limité par une seule paroi plane).

**36. PROBLÈME DE M. WEINSTEIN POSE POUR UN SILLAGE EN PROUE.** — Considérons la solution d'un problème du sillage. Nous nous proposons de discuter le problème de M. Weinstein correspondant au cas suivant :

- 1° La configuration donnée vérifie l'hypothèse de Friedrichs.
- 2° L'une des lignes libres, la ligne libre  $\lambda_2$ , pour fixer les idées, présente à l'extrémité inférieure de l'obstacle un détachement en proue.

3° La déformation de la configuration est caractérisée par les données suivantes :

$$\Delta \Psi(l) = 0, \quad \Delta z(l) = 0, \quad \Delta \left( \frac{1}{d_1} \right) = \Delta \left( \frac{1}{d_2} \right) = 0, \quad \Delta \beta = 0, \quad \Delta \alpha \neq 0.$$

Cela revient à prolonger tangentiellement l'obstacle <sup>(174)</sup> d'un arc infiniment petit  $\Delta \alpha$  et à laisser invariables les autres données. Dans ces conditions, la dérivée  $\frac{d\gamma}{df}$  est nulle au point  $Z = 1$  puisque la quantité  $\Omega'(1)$  est nulle [cf. (4.48)]. Dès lors, les conditions frontières imposées à  $\beta$  sont identiques à celles qu'on obtiendrait en faisant  $\Delta \alpha = 0$ . Il s'ensuit que le problème de Weinstein, que nous avons envisagé, ne possède d'autres solutions que  $\beta \equiv 0$ . Aussi la fonction  $\gamma(Z)$  correspondante est constante dans  $d$ ; elle est donc identiquement nulle puisqu'elle vaut zéro au point  $Z = e^{i\alpha}$  (cf. § 52) où elle est continue. D'après (4.44), il vient alors

$$\delta \Omega(Z) = \frac{d\Omega}{df} \delta f(Z),$$

le second membre de cette relation ayant un sens pour  $Z = 1$  puisque la quantité  $\Omega'(1)$  est nulle [cf. (1.36)]. En différentiant l'égalité précédente et en se rappelant que les opérations  $\delta$  et  $\frac{d}{dZ}$  sont permutable, on trouve

$$\delta \Omega'(Z) - \frac{d\Omega}{df} \delta \frac{df(Z)}{dZ} = \frac{d}{dZ} \left( \frac{d\Omega}{df} \right) \delta f(Z).$$

Le premier membre de cette relation a encore un sens pour  $Z = 1$  (cf. § 31), où nous avons établi l'existence de la différentielle  $\delta \Omega'(1)$ ; il en est par suite de même du second membre. Or, d'après (4.46), on peut écrire

$$\delta f(1) + \Delta \alpha = 0$$

et l'on a, par ailleurs,

$$\delta \left\{ \left[ \frac{df(Z)}{dZ} \right]_{Z=1} \right\} = 0,$$

---

<sup>(174)</sup> Avec une courbure nécessairement finie puisque nous nous bornons aux profils le long desquels  $\Psi'(l)$  est continue. Nous ne nous préoccupons pas pour le moment de la validité physique de cette configuration (cf. § 13).

puisqu'en vertu de (1.10') la quantité  $\left[ \frac{df(Z)}{dZ} \right]_{z=1}$  est nulle. En portant ces résultats dans la formule précédente, on établit le résultat fondamental suivant

$$(4.62) \quad \delta \Omega'(1) = - \left\{ \frac{d}{dZ} \left[ \frac{d\Omega}{df} \right] \right\}_{z=1} \Delta\alpha = - c'_2 \Delta\alpha,$$

en reprenant la notation déjà utilisée au paragraphe 13 [cf. (1.37)].

Le raisonnement précédent montre, en outre, que l'on a, en même temps,

$$(4.62') \quad \delta \Omega'(-1) = 0,$$

toutes les fois que la ligne  $\lambda_1$  présente aussi un détachement en poue.

**37. THÉORÈMES D'UNICITÉ POUR LE PROBLÈME DE LA PROUE.** — L'égalité (4.62) va nous permettre de faire connaître quelques cas où le problème de la poue possède une seule solution.

I. *Cas de la configuration symétrique.* — Considérons un obstacle symétrique placé symétriquement dans un canal. Nous prendrons le milieu O de l'obstacle pour origine des arcs. Nous appellerons  $P_1$  (ou  $P_2$ ) le point de la moitié supérieure (inférieure) de l'obstacle d'abscisse  $p_1$  (ou  $p_2$ ); on pose  $p_1 = -p_2$  et l'on a  $0 \leq p_1 \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$ . Posons-nous le problème symétrique du sillage pour la configuration symétrique formée par les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et l'obstacle  $\widehat{P_2 P_1}$  (contenu, de par sa définition même, dans l'arc donné  $\widehat{BC}$ ); d'après le paragraphe 35 ce problème n'admet qu'une seule solution symétrique  $x \left[ l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{-1}{a+1} \right]$  qui variera continûment avec  $p_1$ ; il en résulte qu'à chaque valeur de  $p_1$ , il correspond une valeur et une seule de la quantité  $(175)$ ,  $P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega'(1)$  que nous noterons

$$P_2 = P_2(p_1),$$

---

(175) Cf. la formule (C) du paragraphe 13; on se rappellera que, dans le cas symétrique,  $s_0 = \frac{\pi}{2}$ .

la fonction du second membre étant continue. Représentons alors dans un système d'axes rectangulaires  $p_1, P_2$  les variations de  $P_2$  en fonction de  $p_1$ . A chaque intersection de la courbe  $P_2(p_1)$  avec l'axe des  $p_1$  correspondra une solution du problème de la proue posée pour l'obstacle  $\widehat{BC}$  donné (solution dont nous aurons à discuter la validité); aux racines de l'équation  $P_2(p_1) = 0$ , il y aura lieu d'adjoindre  $p_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$  si la quantité  $P_2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$  est négative (cf. § 25). Or, d'après l'équation (A) du paragraphe 15, on a, compte tenu des changements de notations <sup>(176)</sup>

$$P_2(0) = \frac{\sqrt{2}\omega_1}{\pi} \left\{ \eta_1 \frac{\Psi\left[\iota\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\right]}{\pi} - \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right\} < 0$$

Cela montre que le problème symétrique de la proue posé pour la configuration donnée admet au moins une solution. Si, en effet,  $P_2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \leq 0$ , la solution symétrique du problème du sillage posé pour l'obstacle  $\widehat{BC}$  résout le problème de la proue posé relativement à cet obstacle. Si, au contraire,  $P_2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \geq 0$  la fonction continue  $P_2(p_1)$  admet au moins un zéro dans l'intervalle  $\frac{\beta - \alpha}{2} \geq p_1 \geq 0$ ; à chacun de ces zéros correspondant une solution du problème de la proue.

Occupons-nous maintenant de la validité des solutions du problème de la proue dont nous venons d'établir l'existence. Au paragraphe 15

<sup>(176)</sup> La dernière inégalité du texte résulte du fait que la fonction  $\zeta \frac{\omega_1}{\pi} s$  est

décroissante dans l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$  et que la quantité  $\frac{\Psi\left[\iota\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\right]}{\pi}$  est inférieur à l'unité. On se rappellera aussi que [cf. CVI, TM]

$$\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2p}}{1 + q^{4p}} > 0$$

et que

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1).$$

nous avons vu que l'inégalité (4.42)

$$c'_2 > 0$$

constitue une condition nécessaire de validité locale; or, d'après (4.62) et (4.62'), cette inégalité exprime [en remplaçant dans (4.62)  $\Delta\alpha$  par  $-\Delta p_1$ ] que la pente  $\frac{\delta P_2}{\delta p_1}$  de la courbe  $P_2$  en un point d'intersection avec l'axe des  $p_1$  est positive; au contraire, aux points communs à  $P_2$  et à  $O p_1$  en lesquels  $\frac{\delta P_2}{\delta p_1} < 0$  correspondront des solutions inacceptables du problème de la proue<sup>(177)</sup>. Considérons alors le cas d'un obstacle symétrique en accolade; pour de telles configurations, la quantité  $c'_2$  est nécessairement positive lorsque la ligne libre  $\lambda_2$  présente un détachement en proue [cf. (2.12)]; il s'ensuit que la pente  $\frac{\delta P_2}{\delta p_1}$  de  $P_2$  sera positive en les points où  $P_2(p_1) = 0$  [cf. (4.62)]. Cela montre que l'équation  $P_2 = 0$  ne peut avoir qu'une seule solution; il suffit de se rappeler que la fonction  $P_2(p_1)$  est continue, et que, d'autre part, elle ne fait correspondre qu'une seule valeur de  $P_2$  à toute valeur de la variable. Nous pouvons dès lors conclure<sup>(178)</sup> :

*Le problème symétrique de la proue posé pour un obstacle symétrique en accolade, placé symétriquement dans un canal, possède une seule solution; d'après le théorème du paragraphe 18 cette solution est nécessairement acceptable.*

II. *Cas de l'obstacle circulaire convexe vers le courant.* — Pour pouvoir appliquer le lemme de Friedrichs à des obstacles non symétriques nous sommes obligé (dans l'état actuel de la théorie) de les supposer convexes vers le courant. Le théorème du paragraphe 18 justifie d'autre part l'intérêt qu'il y a à se limiter aux profils en accolade; dans ce cas chacun des arcs  $\widehat{OC_1}$  et  $\widehat{B_1O}$  (cf. la figure 8)

<sup>(177)</sup> Dans le cas du fluide indéfini, M. Leray, en partant des formules de M. Villat, a construit un obstacle symétrique auquel correspondent trois solutions, au moins, du problème de la proue, certaines d'entre elles pouvant être inacceptables.

<sup>(178)</sup> Dans le cas de l'obstacle circulaire convexe ce résultat avait été établi par M. Jacob avant les travaux de M. Leray.



doit être réduit à l'unique point O en lequel le profil doit posséder une tangente continue. Or, étant donné une configuration dissymétrique, le point de bifurcation O a une position *a priori* inconnue; il s'ensuit que les résultats des paragraphes 18, 33 et 35 ne pourront s'appliquer simultanément *a priori* que si le profil donné  $\widehat{BC}$  vérifie la condition suivante : quel quel soit le point O, intérieur à  $\widehat{BC}$ , la courbure des arcs  $\widehat{BO}$  et  $\widehat{OC}$  n'est pas croissante lorsqu'on se déplace sur chacun d'eux de B ou de C vers O; il est clair que le profil constitué par un arc de cercle est le seul à jouir de cette propriété. Supposons donc notre obstacle circulaire et admettons, pour plus de simplicité, que son rayon est égal à 1; dans ce cas, il sera défini par l'équation intrinsèque

$$(4.63) \quad \Psi(l) = \pi - l \quad (0 \leq \alpha \leq l \leq \beta \leq \pi).$$

Les parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont à des distances quelconques de ses extrémités B et C (en particulier l'une d'elles, ou les deux à la fois, peuvent être à des distances infinies); nous supposerons que les valeurs de  $d_1$  et de  $d_2$  sont fixées une fois pour toutes <sup>(179)</sup>; dans ces conditions, la configuration des éléments rigides est entièrement déterminée par le couple des paramètres  $(\alpha, \beta)$  vérifiant les inégalités

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi;$$

<sup>(179)</sup> Nous supposerons de plus que les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont assez grandes pour que le demi-cercle

$$\Psi(l) = \pi - l \quad (0 \leq l \leq \pi)$$

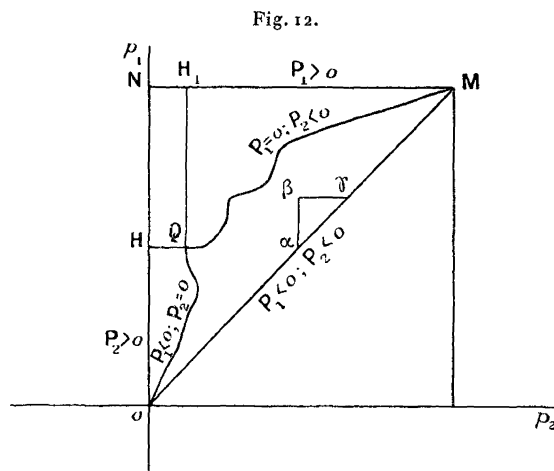
soit tout entier intérieur au canal. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, le raisonnement se simplifie (*cf.* la fin de ce paragraphe).

Notons que le demi-cercle ne rentre pas dans la catégorie des obstacles visés par l'énoncé du paragraphe 23; en effet, dans le cas envisagé nous avons

$$\Psi[l(0)] = \pi, \quad \Psi[l(\pi)] = 0,$$

en sorte  $\frac{dl(s)}{ds}$  ne vérifie pas une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  ( $n > 1$ ) pour  $s = 0$  ou  $s = \pi$ ; les raisonnements du paragraphe 28 tombent alors en défaut. Toutefois, les raisonnements exposés par M. Leray dans son *Mémoire des Commentarii Mathematici Helvetici* permettent encore de tourner cette difficulté et d'établir tous les théorèmes d'existence et de validité dont nous aurons à faire usage au cours de cet alinéa.

d'après le théorème du paragraphe 35 le problème correspondant du sillage admet une solution et une seule. Nous pouvons donc caractériser celle-ci par le point de coordonnées  $\alpha, \beta$  intérieur au triangle OMN dont les sommets



M et N ont pour coordonnées respectives  $(\pi, \pi)$  et  $(0, \pi)$ . Tous les obstacles  $\widehat{P_2 P_1}$  intérieurs à l'obstacle BC donné, et, par suite, les sillages qui leur correspondent, seront caractérisés par un point  $(p_2, p_1)$  intérieur au triangle  $\alpha\beta\gamma$ . Nous aurons donc discuté le problème de la proue posé pour  $\widehat{BC}$  si nous savons déterminer les signes des quantités  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  ou encore, ce qui revient au même, les signes des quantités  $P_2$  et  $P_1$ , fonctions de  $p_1$  et de  $p_2$  [pour la signification de  $p_1$  et  $p_2$  (cf. § 23)]; nous écrivons donc

$$P_2 = P_2(p_1, p_2), \quad P_1 = P_1(p_1, p_2).$$

Or, considérons un point  $(p_2, p_1)$  tel que

$$P_2(p_1, p_2) = 0, \quad P_1(p_1, p_2) < 0.$$

L'arc correspondant  $\widehat{P_1 P_2}$  étant en accolade, la condition (2. 12) de M. Leray est satisfaite; (4. 62) montre que l'on a, dans ce cas,

$$(4. 64) \quad P_2(p_1, p_2 + \delta p_2) \delta p_2 < 0.$$

Au contraire, si en un point  $(p_2, p_1)$  on a

$$P_2(p_1, p_2) < 0, \quad P_1(p_1, p_2) = 0,$$

on aurait, en un point  $(p_2 + \hat{c}p_2, p_1)$  infiniment voisin,

$$(4.65) \quad P_1(p_1 + \hat{\delta}p_1, p_2) \hat{\delta}p_1 > 0.$$

Le même raisonnement prouve qu'en un point  $(p_2 + \hat{c}p_2, p_1 + \hat{\delta}p_1)$  voisin du point  $(p_2, p_1)$  en lequel on aurait  $P_1 = P_2 = 0$ , on a les inégalités

$$P_1(p_1 + \hat{\delta}p_1, p_2 + \hat{\delta}p_2) \hat{\delta}p_1 > 0, \quad P_2(p_1 + \hat{\delta}p_1, p_2 + \hat{\delta}p_2) \hat{\delta}p_2 < 0.$$

Les fonctions  $P_1$  et  $P_2$  étant continues<sup>(180)</sup> dans OMN, il suit de là que les points du triangle OMN, dont les coordonnées vérifient le système  $P_1 = P_2 = 0$ , sont isolés et, par suite, en nombre fini.

D'après (4.64) et (4.65) chacun d'eux est commun à un arc de courbe d'équation  $P_1 = 0$ , le long de laquelle  $P_2 < 0$ , qui y possède une tangente horizontale et à un arc de courbe  $P_2 = 0$ , le long de laquelle  $P_1 < 0$ , qui y possède une tangente verticale<sup>(181)</sup>.

Cela posé, désignons par  $\Delta$  tout domaine appartenant à OMN à l'intérieur duquel on aurait

$$P_1(p_1, p_2) < 0, \quad P_2(p_1, p_2) < 0.$$

Nous appellerons  $\Delta'$  la frontière de  $\Delta$  et nous l'orienterons dans le sens des rotations positives. Je dis, d'abord, qu'il existe au moins un domaine  $\Delta$ . En effet, d'après (4.63),  $\Psi(l)$  atteint ses maximum et minimum pour  $l = \alpha$  et  $l = \beta$  respectivement; la nature des détachements en ces points est connue. Nous pouvons, dès lors, écrire

$$\begin{aligned} P_2(p_1, 0) &> 0 && (0 \leq p_1 \leq \pi), \\ P_1(\pi, p_2) &> 0 && (0 \leq p_2 \leq \pi) \end{aligned}$$

<sup>(180)</sup> Cf. les formules (C) et (C') de la remarque finale du paragraphe 13. Nous introduisons ces quantités à la place de  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  pour assurer un sens à nos formules en les points M et O. Pour  $\alpha = \beta = \pi$  par exemple, l'obstacle se réduit à un segment infiniment petit horizontal;  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  sont alors infinies alors que les expressions de  $P_2$  et  $P_1$  correspondantes ont encore un sens.

<sup>(181)</sup> La forme des expressions des différentielles  $\delta \Omega(-1)$  et  $\delta \Omega(1)$  montre que les dérivées partielles  $\frac{\partial P_2}{\partial p_1}$  et  $\frac{\partial P_1}{\partial p_2}$  existent dans tout le triangle OMN; les relations (4.62) et (4.62') prouvent que les dérivées  $\frac{\partial P_1}{\partial p_1}$  et  $\frac{\partial P_2}{\partial p_2}$  existent le long des lignes d'équation  $P_1 = 0$  et  $P_2 = 0$  respectivement. Nous pouvons donc affirmer que ces lignes possèdent des tangentes en chacun de leurs points.

et puis, si l'on fait  $p_1 = p_2$ ,

$$\frac{P_1(p_1, p_1)}{\cos \frac{s_0}{2}} = -\frac{2\omega_1}{\pi} \left\{ \eta_1 \left[ 1 + \frac{\Psi(p_1)}{\pi} \right] - \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \omega_1 \right) \right\} < 0,$$

$$\frac{P_2(p_1, p_1)}{\sin \frac{s_0}{2}} = \frac{2\omega_1}{\pi} \left[ \eta_1 \frac{\Psi(p_1)}{\pi} - \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] < 0,$$

car il vient [cf. (4.14)]<sup>(182)</sup>

$$0 \leq \Psi(l) = \Psi(p_1) = \Psi(p_2) = s_0 \leq \pi.$$

Les fonctions  $P_1(p_1, p_2)$  et  $P_2(p_1, p_2)$  étant continues dans le triangle OMN, il existe un domaine  $\Delta$  attenant au côté OM du triangle OMN et dont la frontière  $\Delta'$  contient le segment OM.

Je dis maintenant que le domaine  $\Delta$  dont nous venons d'établir l'existence est unique. Étudions, en effet, la portion  $\Delta''$  de la frontière  $\Delta'$  de  $\Delta$  (supposé quelconque) qui soit intérieure au triangle OMN. Cette portion se compose : 1° d'arcs  $L_1$  d'équation  $P_1 = 0$  le long desquels on aura :  $P_2 < 0$ ; 2° d'arcs  $L_2$  d'équation  $P_2 = 0$  le long desquels on aura :  $P_1 < 0$ ; 3° de points en nombre fini, communs à un arc  $L_1$  et à un arc  $L_2$ .

a. La portion  $\Delta''$  ne peut se réduire à une courbe  $L_1$  (ou  $L_2$ ). En effet, aucun arc  $L_1$  ne peut joindre deux points différents du contour du triangle OMN, les valeurs de  $P_1$  étant différentes de zéro le long de ce contour, le point M excepté. Il s'ensuit que si  $\Delta''$  se réduisait à  $L_1$ , on aurait dû avoir  $\Delta' \equiv \Delta''$ ;  $\Delta''$  serait une courbe fermée, intérieure au triangle OMN (le point M éventuellement excepté), admettant en chacun de ses points une tangente. L'intersection de  $\Delta''$  avec les droites d'équation  $p_2 = \varepsilon$  (convenablement choisies) se composerait de deux points au moins; appelons alors  $\varepsilon, \eta$  celui d'entre eux dont l'ordonnée  $\eta$  soit minima; le point  $\varepsilon, \eta + \delta\eta$  serait alors intérieur à  $\Delta$  si l'on prend  $\delta\eta$  positif et assez petit; nous aurions

$$P_1(\varepsilon, \eta) = 0$$

---

<sup>(182)</sup> On se reportera au renvoi <sup>(176)</sup> pour la démonstration des inégalités du texte.

et

$$P_1(\varepsilon, \gamma_1 + \delta\eta) \delta\eta < 0.$$

Or, cette inégalité est contredite par (4.65). La ligne  $L_1$  (ou  $L_2$ ) ne peut donc avoir de tangente verticale (ou horizontale). Nous pouvons, dès lors, affirmer que chaque  $\Delta''$  (et, par suite chaque  $\Delta'$ ) contient au moins un arc  $L_1$  et au moins un arc  $L_2$ ; cela montre que chaque  $\Delta'$  contient un point  $Q$  au moins.

*b.* La portion  $\Delta''$  ne peut contenir qu'un point  $Q$ . L'alinéa *a* établit l'existence d'au moins un point  $Q$  [de coordonnées  $(q_2, q_1)$ ] sur la portion  $\Delta''$  considérée. Les conditions  $P_1 = 0, P_2 < 0$  valables le long de  $L_1$  et les conditions  $P_2 = 0, P_1 < 0$ , combinées avec les inégalités (4.64) et (4.64') prouvent qu'en ce point les arcs  $L_1$  et  $L_2$  se croisent de manière que la portion de  $\Delta$  attenante à  $Q$  contienne l'angle  $p_1 \leq q_1; p_2 \geq q_2$ ; c'est cette disposition qu'indique la figure 12. Il s'ensuit (et compte tenu de la façon dont  $\Delta'$  a été orientée), que chaque point  $Q$  sera l'*extrémité* de l'arc  $L_1$  qui y aboutit et l'*origine* de l'arc  $L_2$  issu de ce point. Or, ceci n'est possible que si chaque portion  $\Delta''$  ne contient qu'un seul point  $Q$ .

*c.* Toute frontière  $\Delta'$  atteint les deux points  $O$  et  $M$ . Sinon, en effet,  $\Delta'$  serait ou bien complètement intérieure au triangle  $OMN$ , ou bien contiendrait l'unique point  $M$  (ou  $O$ ) de son contour. Dans l'un comme dans l'autre cas,  $\Delta'$  contiendrait au moins un arc  $L_1$  et au moins un arc  $L_2$ , l'un de ces arcs étant complètement intérieur à  $OMN$ ; il s'ensuivrait que  $\Delta'$  posséderait deux points  $Q$ , ce qui, d'après l'alinéa *b* est impossible.

*d.* Toute frontière  $\Delta'$  ne contient qu'un seul arc  $\widehat{MQO}$  intérieur au triangle  $OMN$ . D'après les alinéas *b* et *c*,  $\Delta'$  contient au moins un arc  $\widehat{MQN}$  composé de l'arc  $\widehat{MQ}$  et de l'arc  $\widehat{QM}$ ; d'après l'alinéa *b*, le sens positif sur chaque arc  $\widehat{MQO}$  est  $MO$ ; or, cela n'est possible que si  $\Delta$  ne contient qu'un seul arc de cette espèce.

De l'alinéa *d*, il résulte bien que le domaine  $\Delta$  contigu au segment  $MO$  est l'unique domaine  $\Delta$ . C. Q. F. D.

En résumé, l'arc  $\widehat{OQM}$  partage le triangle  $OMN$  en deux régions.

A l'intérieur du triangle mixtiligne OMQ et sur son côté rectiligne OM, nous avons

$$P_1 < 0, \quad P_2 < 0.$$

Le long du côté curviligne MQ (arc  $L_1$ ), on peut écrire

$$P_1 = 0, \quad P_2 < 0$$

et, le long du côté curviligne  $\widehat{QO}$  (arc  $L_2$ ), on a

$$P_2 = 0, \quad P_1 < 0.$$

Dans aucun point de OMN extérieur au domaine OMQ (domaine  $\Delta$ ) on ne peut avoir

$$\begin{aligned} P_1 &\leq 0, \\ P_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Il n'existe qu'un seul point Q dont les coordonnées vérifient le système  $P_1 = P_2 = 0$ .

Cela étant, abaissons de M les perpendiculaires MH et  $MH_1$  sur ON et MN respectivement. Le triangle OMQ n'empiète pas sur le rectangle  $MHNH_1$ , ainsi construit; il suffit de rappeler, en effet, que l'arc  $\widehat{QO} = L_2$  (ou l'arc  $\widehat{MQ} = L_2$ ) ne possède pas de tangente parallèle à  $Op_2$  (ou à  $Op_1$ ) [cf. l'alinéa a]. L'ensemble des résultats qui précèdent se lit sur la figure 12.

Nous sommes maintenant en mesure de discuter les solutions du système

$$(4.66) \quad \begin{cases} P_1(p_1, p_2) \leq 0, \\ P_2(p_1, p_2) \leq 0, \end{cases}$$

intérieur au triangle  $\alpha\beta\gamma$ . Plusieurs cas sont à distinguer.

1° Le sommet  $\gamma$ , est intérieur au triangle mixtiligne OMQ. Nous avons alors

$$P_1(\beta, \alpha) < 0, \quad P_2(\beta, \alpha) < 0.$$

Le système  $p_1 = \beta, p_2 = \alpha$  constitue donc une solution du problème de la proue. Cette solution est unique. En effet, le point Q est extérieur au triangle  $\alpha\beta\gamma$ ; l'un des points de détachement, au moins, doit être confondu avec l'extrémité de l'obstacle; nous devons donc

prendre ou  $p_1 = \beta$ ,  $p_2 = p_2$  ou  $p_2 = \alpha$ ,  $p_1 = p_1$ . Or, en un point  $(p_1 = \beta, p_2 = p_2)$  commun à l'arc  $\widehat{MQ}$  et au côté  $\beta\gamma$ , nous avons (de par la définition de  $L_2 = \widehat{MQ}$ )

$$P_1(\beta, p_2) = 0, \quad P_2(\beta, p_2) < 0.$$

Comme  $p_2 < \alpha$ , les coordonnées du point envisagé ne résolvent pas le problème de la proue; on écartera de même les points communs à  $L_1$  et à  $\alpha\gamma$ . C. Q. F. D.

2° Le sommet  $\gamma$  est intérieur au triangle mixtiligne  $OQH$ . Le point  $\gamma$  est, dans ce cas, extérieur au domaine  $\Delta$ ; ses coordonnées  $\alpha, \beta$  ne vérifient plus le système (4.66). Le point  $Q$ , d'autre part, est extérieur à  $\alpha\beta\gamma$ ; on doit avoir encore

$$p_1 = \beta \quad \text{ou} \quad p_2 = \alpha.$$

Une discussion analogue à celle de l'alinéa 1 montre que l'hypothèse  $p_2 = \alpha$  est à écarter. Au contraire, les coordonnées  $p_1 = \beta$ ,  $p_2 = p_2$  d'un point commun à  $\beta\gamma$  et à  $L_2$  vérifient le système

$$P_1(\beta, p_2) < 0, \quad P_2(\beta, p_2) = 0,$$

Comme, dans ce cas,  $p_2 > \alpha$ , le point considéré est une solution du problème de la proue posé pour l'obstacle donné. Et cette solution est encore unique, puisque l'intersection de  $\widehat{OQ}$  avec une droite d'équation  $p_1 = \text{const.}$  se réduit à un point unique. Les conclusions précédentes subsistent si  $\gamma$  fait partie de l'arc  $\widehat{OQ}$ .

3° Le point  $\gamma$  est intérieur au triangle mixtiligne  $QMH_1$ . Une discussion analogue à la précédente montre que, dans ce cas, le problème admet encore une solution, et une seule dont l'image est à l'intersection de l'arc  $\widehat{MQ}$  avec la droite d'équation  $p_2 = \alpha$ . Les conclusions subsistent si le point  $\gamma$  est situé sur l'arc  $\widehat{QM}$ .

4° Le point  $\gamma$  est intérieur au rectangle  $MHNH_1$ , ou situé sur le périmètre de celui-ci. Le point  $Q$  est alors, ou intérieur au triangle  $\alpha\beta\gamma$ , ou situé sur son pourtour. Une discussion analogue

aux précédentes montre que, dans ce cas, le problème admet une seule solution dont l'image est confondue avec le point Q.

Nous pouvons donc conclure :

*Le problème de la proue, posé par un arc de cercle situé dans un canal à bords rectilignes (ceux-ci étant à distance finie ou non) admet une seule solution lorsque le demi-cercle d'équation (4.63), dont l'obstacle donné fait partie, est intérieur au domaine du fluide.*

L'extension de ce résultat au cas général est immédiate; les raisonnements qui précèdent ne sont pas, en gros, à modifier. Toutefois, l'existence des points du triangle ONM dont les coordonnées vérifient les inégalités (ou l'une d'elles)  $P_1 > 0$ ,  $P_2 > 0$ , n'est plus certaine *a priori*, puisque la fonction  $\Psi(s)$  ne devient ni nulle, ni égale à  $\pi$ ; en particulier, le domaine  $\Delta$  peut recouvrir tout le triangle OMN; cela permet de simplifier la discussion.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 16 septembre 1939.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
CH. MAURAIN.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 16 septembre 1939.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
G. ROUSSY.

