THÈSE D'ÉTAT
N° 71

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Vladimir BARANOV

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES FONCTIONS DE MATHIEU NORMEES

2e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1941 devant la Commission d'examen

MM. HUMBERT . . . *Président.*
SOULA . . . . } *Examinateurs.*
VASILESCO . . . }

IMPRIMERIE R. BUSSIÈRE

1941

A Monsieur le Professeur
Hadamard, Membre de
l'Institut
Hommage respectueux
Ic. Baranau

FACULTÉ DES SCIENCES

DE

L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Membres du Jury

MM.	
HUMBERT	*Président.*
SOULA	*Assesseurs.*
VASILESCO	*Assesseurs.*

INTRODUCTION

Le principal but de ce travail est d'étudier une méthode simple pour obtenir les développements des fonctions de Mathieu normées en séries *trigonométriques*.

On sait que les fonctions de Mathieu appelées également « fonctions du cylindre elliptique » ont été définies par Émile Mathieu en 1868 (1). Whittaker et son école, à laquelle nous devons la plus grande partie de nos connaissances sur ces fonctions, ont adopté la même définition.

Les fonctions de Mathieu sont les solutions périodiques de l'équation

$$\text{(M)} \qquad \frac{d^2\Omega}{d\omega^2} + (u - 2z\cos 2\omega)\Omega = 0$$

où z est un paramètre connu défini par les conditions du problème conduisant à l'équation (M), et u est une fonction inconnue de z qu'il s'agit de déterminer de façon à ce que l'équation (M) admette une intégrale périodique de période 2π.

Si l'on pose $z = 0$, l'équation (M) devient

$$(\mathrm{M}_0) \qquad \frac{d^2\Omega}{d\omega^2} + u\Omega = 0.$$

Elle admet alors deux solutions périodiques

$$\cos \nu\omega, \qquad \sin \nu\omega$$

à la condition de poser $u = \nu^2$, ν étant un nombre entier (ou zéro). Ainsi, à une suite de carrés $0, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ correspondent deux suites d'intégrales de (M_0) admettant 2π comme période

$$1, \qquad \cos\omega, \qquad \cos 2\omega, \qquad \cos 3\omega, \cdots$$

et

$$\sin\omega, \qquad \sin 2\omega, \qquad \sin 3\omega, \cdots$$

(1) Emile Mathieu. — Mémoire sur le Mouvement Vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *Journ. de Liouv.*, t. XIII, 1868.

L'ensemble de ces fonctions forme un système complet orthogonal dans l'intervalle $(0,2\pi)$, mais non normé. Le système trigonométrique normé s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\sin \omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos \omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2\omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2\omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3\omega}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

L'équation générale (M) admet également deux suites de solutions périodiques. La première suite est composée de fonctions paires de ω que nous désignerons avec Whittaker par la notation

$$\Omega = ce_\nu(\omega,z) \qquad \nu = 0,1,2,3,\cdots$$

Ces fonctions correspondent à des valeurs particulières de u fonctions du paramètre z, qui forment une suite infinie

$$u = u_0(z), \qquad u_1(z), \qquad u_2(z),\cdots \qquad u_\nu(z),\cdots$$

Lorsque z s'annule, la fonction $ce_\nu(\omega, z)$ se réduit à $\cos \nu\omega$ et la fonction associée $u_\nu(z)$ devient $u_\nu(0) = \nu^2$.

La seconde suite d'intégrales périodiques de l'équation (M) est formée des fonctions impaires de ω désignées par

$$\Omega = se_\nu(\omega,z) \qquad \nu = 1,2,3\cdots\cdot$$

Ces solutions s'obtiennent lorsque la fonction u est égale au terme $v_\nu(z)$ d'une seconde suite de fonctions associées

$$u = v_1(z), \qquad v_2(z), \qquad v_3(z),\cdots \qquad v_\nu(z),\cdots$$

Lorsque z s'annule, la fonction $se_\nu(\omega, z)$ se réduit à $\sin \nu\omega$ tandis que la fonction associée $v_\nu(z)$ tend vers la même limite $v_\nu(o) = \nu^2$.

Ces conditions ne définissent les fonctions de Mathieu qu'à un facteur près, ce facteur étant une fonction arbitraire de z se réduisant à l'unité pour $z = 0$. Pour achever la définition, Mathieu et, ensuite, Whittaker ont admis que le coefficient de $\cos \nu\omega$ dans le développement de $ce_\nu(\omega, z)$ en série trigonométrique, où le coefficient de $\sin \nu\omega$ dans le développement de $se_\nu(\omega, z)$ reste constamment égal à l'unité quelle que soit la valeur de z. Les fonctions définies de cette façon sont orthogonales dans l'intervalle $(0,2\pi)$, mais elles ne sont pas normées dans cet intervalle, ce qui présente certains inconvénients dont nous allons parler tout à l'heure. C'est Goldstein (1) qui a modifié l'ancienne définition. Il a demandé que le système des fonctions de Mathieu

$$\frac{ce_0(\omega,z)}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{se_1(\omega,z)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{ce_1(\omega,z)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{se_2(\omega,z)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

reste constamment orthogonal et normé dans l'intervalle $(0,2\pi)$ et qu'il se réduise au système trigonométrique normé

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\sin\omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos\omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2\omega}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

pour $z = 0$, c'est-à-dire, lorsque le cylindre elliptique se réduit à un cylindre circulaire.

Au point de vue pratique cette définition s'est avérée beaucoup moins simple et beaucoup moins commode en tant que point de départ pour obtenir les développements des fonctions de Mathieu en séries, que l'ancienne définition de Mathieu. Les développements des fonctions de Goldstein en séries trigonométriques étaient inconnus jusqu'à présent.

Rappelons les principes des méthodes de Mathieu et de Whittaker.

Mathieu part de l'équation différentielle (M) et cherche à développer une intégrale de (M), ainsi que la fonction associée $u(z)$ en séries procédant suivant les puissances de z. S'il s'agit, par exemple, de la fonction $ce_\nu(\omega, z)$, il pose

$$u_\nu(z) = \nu^2 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$$
$$ce_\nu(\omega,z) = \cos\nu\omega + zA_1(\omega) + z\,A_2(\omega) + \cdots$$

Le terme en $\cos\nu\omega$ se trouve ainsi isolé, et son coefficient est égal à l'unité par définition. Les coefficients $A_n(\omega)$ sont des fonctions périodiques qui peuvent être développées en séries de Fourier, mais ces séries ne comporteront plus de terme en $\cos\nu\omega$. C'est cette condition initiale qui permet de calculer de proche en proche les coefficients $A_n(\omega)$. Ce calcul ne présente pas de difficultés (2).

Whittaker a montré que les fonctions de Mathieu sont solu-

(1) S. Goldstein. — Mathieu Functions. *Transactions of the Cambridge Phil. Soc.*, t. XXIII, nº 11, 1927.

(2) Les détails du calcul se trouvent dans l'ouvrage de M. P. Humbert *Fonctions de Mathieu et Fonctions de Lamé.*

tions de certaines équations intégrales homogènes dont voici un exemple

$$\Omega(\omega,z) = \lambda \int_0^{2\pi} e^{2\sqrt{z}\sin\omega\sin\varphi}\,\Omega(\varphi,z)d\varphi.$$

La fonction (u, z) n'intervient pas dans cette équation, mais elle se trouve remplacée par le paramètre λ qui est aussi une fonction de z. En partant de cette équation intégrale Whittaker a réussi, grâce à un calcul assez laborieux, à développer quelques fonctions de bas ordres en séries trigonométriques dont les coefficients sont des séries procédant suivant les puissances de z. Voici, à titre d'exemple, la série pour la fonction $ce_0(\omega, z)$

$$ce_0(\omega,z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{z^n}{n\,!\,n\,!} - \right.$$
$$\left. - \frac{n(3n+4)}{(n+1)\,!\,(n+1)\,!}\,z^{n+2} + O(z^{n+4})\right]\cos 2n\omega.$$

Le principal défaut de ces méthodes est une conséquence de la définition assez arbitraire de Mathieu-Whittaker. Les fonctions ainsi définies ne sont pas normées. La valeur des intégrales

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[ce_\nu(\omega,z)]^2d\omega, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[se_\nu(\omega,z)]^2d\omega$$

n'est pas connue. Pour cette raison, le système des fonctions de Mathieu ne peut pas servir commodément pour développer des fonctions arbitraires en séries de Fourier-Mathieu. Or, l'utilité de tels développements se fait sentir chaque fois que l'on a affaire à un problème de propagation dont les conditions aux limites présentent une symétrie elliptique. Goldstein (2) a attiré l'attention sur un autre défaut des séries de Mathieu et de Whittaker. Il a remarqué que pour certaines valeurs de z tous les coefficients de ces séries deviennent infinis sauf celui du terme en $\cos\nu\omega$ (ou en $\sin\omega\nu$), ce dernier étant égal à l'unité par définition. Par contre, si l'on adopte la définition de Goldstein, tous les coefficients restent finis, tandis que celui de $\cos\nu\omega$ (ou de $\sin\nu\omega$) s'annule pour ces valeurs de z. Les anciennes fonctions de Mathieu s'obtiennent en divisant les fonctions de Goldstein par le coefficient de $\cos\nu\omega$ (ou de $\sin\nu\omega$). Or, ce coefficient est une fonction de z qui admet les valeurs de z en question comme zéros. Par conséquent, en divisant les séries par ces coefficients on risque de réduire artificiellement leur rayon de convergence. Notons à cette occasion qu'il est très difficile de discuter la convergence des séries de Whittaker. G. M. Watson (1) a démontré que dans le cas de la fonction $ce_0(\omega, z)$, le coefficient de $\cos 2n\omega$ est une série qui converge au moins pour $|z^2| < 2$. La démonstration ne s'applique qu'à la fonction $ce_0(w, z)$.

On a essayé souvent (2) d'utiliser des relations de récurrence auxquelles satisfont les coefficients des séries trigonométriques représentant les fonctions de Mathieu. Ces relations se trouvent très aisément. Pour en donner un exemple, cherchons une solution de l'équation différentielle (M) sous la forme suivante

$$\Omega = A_0 + A_1 \cos 2\omega + A_2 \cos 4\omega + \cdots$$

En portant cette expression dans l'équation on arrive facilement à un système récurrent fort simple

$$\begin{gathered} -uA_0 + zA_1 = 0 \\ 2zA_0 + (4 - u)A_1 + zA_2 = 0 \\ zA_{n-1} + (4n^2 - u)A_n + zA_{n+1} = 0 \\ n = 2, 3, \cdots \end{gathered}$$

Or, il a paru difficile d'utiliser ce système pour le calcul effectif des coefficients $A_n(z)$. La difficulté vient du fait que les coefficients A_n dépendent de deux variables u et z dont l'une est fonction inconnue de l'autre. La relation entre u et z peut se mettre sous des formes différentes. On peut, par exemple, considérer le système récurrent comme un système d'équations linéaires et homogènes à une infinité d'inconnues. Pour que ce système admette une solution non identiquement nulle, il faut que le déterminant du système soit nul. Ainsi, on obtient

$$\begin{vmatrix} -u & z & 0 & 0 & \cdots \\ 2z & 4-u & z & 0 & \cdots \\ 0 & z & 16-u & z & \cdots \\ 0 & 0 & z & 36-u & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

(1) G. M. Watson. — The Convergence of the Series in Mathieu's Functions. *Proceed. of the Edingburgh Math. Soc.*, Vol. 33, 1914-1915.

(2) Voir, par exemple, John Dougall. — « The Solution of Mathieu's Differential Equations », *Proceed. of the Edingburgh Math. Soc.*, Vol. 33, 1914-

On peut aussi former les rapports $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ et en les éliminant arriver à une fraction continue infinie

$$\frac{u}{2} = \frac{z^2}{|u-4} - \frac{z^2}{|u-16} - \frac{z^2}{|u-36} - \dots$$

C'est précisément la méthode suivie par Goldstein. La valeur de z étant donnée cette dernière relation permet de calculer u par approximations successives. Ce calcul numérique est assez pénible. Après avoir calculé la valeur de u on peut calculer les coefficients A_n à un facteur près. Ceci fait, il ne restera plus qu'à diviser tous les coefficients par un nombre convenable de façon à ce que la fonction Ω soit normée. Cette méthode convient aux calculs numériques, mais ne permet pas d'obtenir les expressions semblables aux séries de Whittaker.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode dont le point de départ est également un système récurrent. Elle permet de développer facilement les fonctions normées de Mathieu-Goldstein en séries trigonométriques.

L'application de cette méthode nous a conduit à examiner en détail les suites des fonctions définies au moyen des systèmes récurrents linéaires. Rappelons un cas déjà étudié par Poincaré [1]. Considérons une relation récurrente

$$B_{n-1}x_{n-1} + A_n x_n + C_n x_{n+1} = 0$$

où A_n, B_n, C_n sont trois polynômes en n de même degré. Alors, quand n croît, le rapport $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ tend en général vers une limite. Par contre, si le polynôme A_n est de degré supérieur à celui de C_n, le rapport $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ croît avec n au delà de toute limite. C'est précisément le cas auquel nous sommes arrivés en cherchant une intégrale périodique de l'équation (M). En effet,

1915, — où les relations de récurrence sont considérées comme des équations fonctionnelles. Mentionnons également un mémoire de A. G. Burgess, — « Determinants connected with the Periodic Solutions of Mathieu's Equations », — *ibid.*, 1915. Cet auteur trouve en partant des relations récurrentes de nombreux déterminants infinis divergents et s'annulant lorsque la valeur de u correspond à une solution périodique.

(1) Voir E. Picard, *Analyse*, III, p. 419.

le coefficient de A_n est $4n^2 - u$ donc un polynôme du second degré en n, tandis que le coefficient de A_{n+1} est du degré zéro. Par conséquent, *en général*, le rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ croît au delà de toute limite avec n. La série $\Sigma A_n \cos 2n\omega$ est donc en général divergente. Or, les coefficients du système récurrent dépendent des paramètres u et z. La question qui se pose alors est de savoir s'il n'existe pas de valeurs particulières de u et de z, pour lesquelles le rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ serait d'un ordre inférieur.

Nous sommes donc amenés à étudier les systèmes récurrents au point de vue de la convergence des suites qu'ils définissent. Nous nous occuperons principalement des relations à coefficients d'ordres différents en n, fonctions analytiques de deux variables u et z. Nous nous limiterons au cas de relations récurrentes homogènes et linéaires à trois termes, bien qu'il soit facile de généraliser la théorie en considérant des relations à un nombre de termes plus élevé. Le nombre de variables peut être également supérieur à deux. D'ailleurs, au lieu de nous limiter à l'étude des systèmes récurrents particuliers tels que le système auquel nous sommes arrivés tout à l'heure il nous a semblé préférable d'établir une théorie plus générale, dépassant en généralité les cas strictement nécessaires pour l'étude des fonctions de Mathieu. En effet, comme nous allons le voir, les relations récurrentes elles-mêmes, indépendamment de toute équation différentielle, conduisent à des fonctions possédant des propriétés intéressantes. Ces fonctions généralisent en quelque sorte les fonctions de Mathieu et permettent d'étudier ces dernières à un point de vue différent. Par exemple, il est intéressant de considérer les fonctions de Mathieu comme fonctions de la variable complexe z. Alors on aperçoit que les fonctions de Mathieu formant la suite

$$ce_0(\omega, z), \qquad ce_2(\omega, z), \qquad ce_4(\omega, z), \cdots$$

(et trois suites analogues $[ce_{2\nu+1}\omega]$, $[se_{2\nu}\omega]$, $[se_{2\nu+1}\omega]$), ne sont que de diverses branches d'une même fonction multiforme de z. Il existe des valeurs critiques $z = z_c$, pour lesquelles deux fonctions d'une même suite deviennent identiques. Lorsque la variable z en partant d'un point ordinaire décrit un lacet autour d'un point critique z_c, deux fonctions de la suite s'échangent. La théorie jette quelques lumières également sur la question de la convergence des séries qui représentent les coefficients de Fourier. On verra que le rayon de convergence est égal à l'éloignement du point critique le plus proche de l'origine.

Dans la première partie de ce mémoire nous étudierons les relations récurrentes dont les coefficients forment trois suites données de fonctions analytiques de deux variables u et z. Les suites des fonctions définies par ces relations admettent zéro comme limite lorsque u et z sont liés par une relation $F(u, z) = 0$, la fonction F étant holomorphe dans les domaines d'holomorphie des trois suites données. Si F est une fonction entière de u, elle est de genre zéro, l'équation $F(u, z) = 0$ admet une infinité de racines, et à chaque racine correspond une suite convergente. Dans certains cas que nous allons préciser, ces suites forment un système orthogonal et normé. Les termes de ces suites peuvent être considérés comme composantes des vecteurs unitaires de l'espace de Hilbert formant un système orthogonal de coordonnées. L'étude de ces systèmes de suites est grandement facilitée par l'emploi des notations matricielles dont nous ferons usage dans la seconde moitié de la première partie. Ces systèmes de suites forment des matrices qui satisfont à des équations matricielles très simples et facilement résolubles. Ces matrices peuvent être considérées également comme des tableaux de coefficients de Fourier d'un système de on ctions orthogonal et normé résultant d'une rotation du système orthogonal donné dans l'espace fonctionnel. C'est ainsi qu'on obtient le système des fonctions de Mathieu en faisant subir une rotation au système trigonométrique.

Dans la seconde partie, on déduira les systèmes récurrents particuliers, ainsi que les équations matricielles, auxquelles conduisent les fonctions de Mathieu, et en se servant des résultats établis dans la première partie, on calculera les développements des fonctions de Mathieu normées en séries trigonométriques. On discutera la convergence de ces séries.

PREMIÈRE PARTIE

I

ÉTUDE DES SYSTÈMES RÉCURRENTS A TROIS TERMES

Nous allons commencer par établir un théorème général concernant la convergence des suites définies par des relations récurrentes. Nous nous occuperons uniquement des relations dont les coefficients ne sont pas de même ordre de grandeur lorsque n devient grand.

Considérons une suite de fonctions

$$X_0, X_1, X_2, \cdots \tag{1}$$

dont les termes sont définis par le système récurrent suivant

$$\left\{\begin{array}{c} A_0X_0 + C_0X_1 = 0 \\ B_{n-1}X_{n-1} + A_nX_n + C_nX_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2. 3, \cdots \end{array}\right. \tag{2}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} A_0, A_1, A_2, \cdots \\ B_0, B_1, B_2, \cdots \\ C_0, C_1, C_2, \cdots \end{array}\right. \tag{3}$$

sont trois suites données de fonctions de deux variables u et z. On sait que si B_{n-1}, A_n et C_n sont trois polynômes en n de même degré, le rapport $\left|\frac{X_{n+1}}{X_n}\right|$ tend, en général, vers une limite fixe (Picard, Analyse III, p. 419). Par contre, si le coefficient de X_n est d'un ordre de grandeur supérieur à celui des coefficients de X_{n-1} et de X_{n+1}, le rapport $\frac{X_{n+1}}{X_n}$ croît, en général, au delà de toute limite avec n. Toutefois, il peut arriver que ce rapport peut tendre vers zéro même si l'ordre de grandeur de A_n est supérieur à celui de B_n et de C_n. Nous nous proposons d'étudier ici ces cas exceptionnels.

Supposons que les termes A_n, B_n, C_n des suites données sont des fonctions holomorphes de u et de z, lorsque u et z se trouvent respectivement dans les domaines (D_u) et (D_z). Nous serons conduits au cours de cette étude à faire d'autres restrictions que nous préciserons au fur et à mesure qu'elles s'introduiront et dont on trouvera le résumé à la fin de ce paragraphe. Fixons d'abord l'ordre de grandeur de A_n pour les grandes valeurs de n. Supposons qu'on puisse trouver une suite numérique

$$e_0, e_1, e_2, \cdots$$

telle que le rapport $\frac{A_n}{e_n}$ tende uniformément vers l'unité. Pour préciser, posons

$$\frac{A_n}{e_n} = 1 + 0\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \qquad \varepsilon > 0 \tag{4}$$

En d'autres termes, nous demandons que le produit infini

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{e_n}$$

converge uniformément vers sa limite, lorsque u et z sont dans leurs domaines d'holomorphie respectifs. En ce qui concerne les suites $[B_n]$ et $[C_n]$ nous supposons que leurs ordres de grandeurs soient définis par les conditions

$$\frac{B_{n-1}}{e_n} = 0\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right), \qquad \frac{C_n}{e_n} = 0\left(\frac{1}{n^{\gamma}}\right) \tag{5}$$

avec

$$\beta > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \beta + \gamma > 1.$$

Ceci étant posé nous pouvons énoncer la proposition suivante. Le rapport $\frac{X_{n+1}}{X_n}$ tend uniformément vers zéro, quand u et z satisfont à une équation de la forme

$$F(u, z) = 0 \tag{6}$$

où F est une fonction de u et de z, holomorphe, lorsque u et z se trouvent dans les domaines (D_u) et (D_z).

Pour le faire voir, considérons une suite $[f_n]$ définie à partir de $[X_n]$ par les relations

$$(7)\qquad \begin{cases} X_0 = f_0(u, z) \\ X_n = (-1)^n \dfrac{e_0 e_1 e_2 \cdots e_{n-1}}{C_0 C_1 C_2 \cdots C_{n-1}} f_n(u, z) \end{cases}$$

Les termes de cette suite satisfont au système récurrent suivant

$$(8)\qquad \begin{cases} f_1(u, z) = \dfrac{A_0}{e_0} \cdot f_0 \\ f_{n+1}(u, z) = \dfrac{A_n}{e_n} f_n(u, z) - \dfrac{B_{n-1} C_{n-1}}{e_{n-1} e_n} f_{n-1}(u, z) \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

On aperçoit que les fonctions f_n s'expriment sous la forme de déterminants. On a, en effet,

$$f_2 = f_0 \begin{vmatrix} \dfrac{A_0}{e_0} & \dfrac{B_0}{e_0} \\ \dfrac{C_0}{e_1} & \dfrac{A_1}{e_1} \end{vmatrix}$$

et, en général,

$$(9)\qquad f_{n+1} = f_0 \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{A_0}{e_0} & \dfrac{B_0}{e_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{C_0}{e_1} & \dfrac{A_1}{e_1} & \dfrac{B_1}{e_1} & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{C_1}{e_2} & \dfrac{A_2}{e_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{A_n}{e_n} \end{vmatrix}$$

On vérifie immédiatement que le développement de ce déterminant suivant les éléments de la dernière ligne conduit à la relation (8). Par conséquent, nous pouvons considérer les termes de la suite $[f_n]$ comme les réduits du déterminant infini $F(u, z)$ défini par

$$(10)\qquad F(u, z) = f_0 \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{A_0}{e_0} & \dfrac{B_0}{e_0} & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{C_0}{e_1} & \dfrac{A_1}{e_1} & \dfrac{B_1}{e_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \dfrac{C_1}{e_2} & \dfrac{A_2}{e_2} & \dfrac{B_2}{e_2} & \cdots \\ 0 & 0 & \dfrac{C_2}{e_3} & \dfrac{A_3}{e_3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est absolument et uniformément convergent en même temps que le produit infini $\prod_{u=0}^{\infty} \frac{A_n}{e_n}$ et la série $\sum_{n+0}^{\infty} \frac{B_nC_n}{e_ne_{n+1}}$ (Riesz, F., Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, p. 35).

Or, nous avons déjà remarqué que le produit infini converge en vertu de nos hypothèses. De même la série converge, car

$$\frac{B_nC_n}{e_ne_{n+1}} = 0\left(\frac{1}{n^{\beta+\gamma}}\right)$$

et c'est ici qu'intervient l'inégalité $\beta + \gamma < 1$. La suite des fonctions f_n est donc uniformément convergente et admet comme limite la fonction $F(u, z)$. L'expression (9) montre que les fonctions $f_n(u, z)$ sont holomorphes dans (D_u, D_z). Dans ces conditions, la fonction-limite $F(u, z)$ est aussi holomorphe dans les mêmes domaines en même temps que les coefficients A_n, B_n, C_n du système récurrent. Formons maintenant le rapport

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = -\frac{e_n}{C_n} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n}.$$

Il croît avec n au delà de toute limite, car en vertu des conditions (5)

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = 0(n^\gamma), \qquad \gamma > 0$$

Nous allons montrer que ce rapport tend vers zéro, si u et z vérifient l'équation (6).

Désignons par $F_n(u, z)$ le déterminant infini partiel commençant par l'élément $\frac{A_n}{e_n}$

$$(11) \qquad F_n(u, z) = f_0 \cdot \begin{vmatrix} \frac{A_n}{e_n} & \frac{B_n}{e_n} & 0 & \cdots \\ \frac{C_n}{e_{n+1}} & \frac{A_{n+1}}{e_{n+1}} & \frac{B_{n+1}}{e_{n+1}} & \cdots \\ 0 & \frac{C_{n+1}}{e_{n+2}} & \frac{A_{n+2}}{e_{n+2}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Le déterminant (10) étant uniformément convergent, nous avons droit de le traiter comme un déterminant fini. Développons-le suivant les éléments de la n^e ligne et ceux de la n^e colonne. On obtiendra

$$F = \frac{A_n}{e_n} f_n F_{n+1} - \frac{B_{n-1}C_{n-1}}{e_{n-1}e_n} f_{n-1}F_{n+1} - \frac{B_nC_n}{e_ne_{n+1}} f_nF_{n+2}$$

ou, compte tenu de (8)

$$F = f_{n+1}F_{n+1} - \frac{B_nC_n}{e_ne_{n+1}} f_nF_{n+2}.$$

Si l'équation $F(u, z) = 0$ est satisfaite, on aura

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{B_nC_n}{e_ve_{n+1}} \cdot \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

Cette relation a lieu pour toutes les valeurs de u et de z telles que $F(u, z) = 0$. Considérons de nouveau le rapport

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = -\frac{e_n}{C_n} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n}.$$

Il devient maintenant

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = -\frac{B_n}{e_{n+1}} \cdot \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

Or, la suite des fonctions $F_n(u, z)$ tend uniformément vers l'unité (Riesz, F., *ibid.*, p. 30). Donc, pour n grand

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = 0\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \qquad \beta > 0$$

en vertu de nos hypothèses (5). Ce rapport tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, si l'équation (6) est satisfaite. Notre proposition est donc démontrée.

Résumons maintenant nos hypothèses ainsi que les résultats obtenus.

Une suite de fonctions $[X_n]$ est définie par le système récurrent

$$A_0X_0 + C_0X_1 = 0$$
$$B_{n-1}X_{n-1} + A_nX_n + C_nX_{n+1} = 0$$
$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

où les coefficients A_n, B_n, C_n sont les termes successifs de trois suites données, fonctions de u et de z, holomorphes dans les domaines (D_u, D_z) et possédant les propriétés suivantes : Les termes de la suite $[A_n]$ pour n grand s'approchent asymptotiquement des termes d'une suite numérique $[e_n]$ de façon à ce que

$$\frac{A_n}{e_n} = 1 + 0\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \qquad \varepsilon > 0$$

Les termes des suites $[B_n]$ et $[C_n]$ croissent moins vite (ou décroissent plus vite) de sorte que

$$\frac{B_{n-1}}{e_n} = 0\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \qquad \frac{C_n}{e_n} = 0\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

avec

$$\beta > 0; \qquad \lambda > 0, \qquad \beta + \gamma > 1.$$

Dans ces conditions, le rapport $\frac{X_{n+1}}{X_n}$ croît, en général, avec n au delà de toute limite. Exceptionnellement, et ceci lorsque u et z satisfont à l'équation $F(u, z) = 0$, le rapport $\frac{X_{n+1}}{X_n}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La fonction $F(u, z)$ est holomorphe dans les domaines (D_u, D_z) et s'exprime à l'aide des termes des suites A_n, B_n, C_n et e_n sous la forme d'un déterminant infini uniformément convergent.

Si l'équation $F(u, z) = 0$ admet plusieurs racines

$$u_0(z), \qquad u_1(z), \qquad u_2(z),\ldots$$

en nombre fini ou infini, à chaque racine $u_\nu(z)$ correspond une suite

$$X_0^\nu(z), \qquad X_1^\nu(z), \qquad X_2^\nu(z),\ldots$$

définie par le système récurrent à un facteur près et dont les propriétés de convergence viennent d'être discutées.

Dans cette analyse, on aurait pu remplacer la suite numérique $[e_n]$ par la suite $[A_n]$ elle-même, mais la fonction $F(u, z)$ ne serait plus holomorphe. Nos conclusions ne conservent leur valeur que si les termes de la suite $[e_n]$ sont des fonctions n'admettant aucun zéro dans les régions d'holomorphie (D_u, D_z). Les termes de la suite inverse $\left[\frac{1}{e_n}\right]$ sont alors holomorphes et la fonction $F(u, z)$ l'est aussi. Pour faire voir l'importance de ce fait, considérons le cas, où le coefficient A_n est un polynôme en n. Posons

$$A_n = p_0 n^k + p_1 n^{k-1} + \cdots + p_k.$$

Si p_0 est un coefficient numérique, p_1, p_2, ... étant fonction de u et de z, on peut prendre

$$e_0 = 1$$
$$e_n = p_0 n^k e^{\frac{p_1}{p_0 n}} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

de sorte que

$$\frac{A_n}{e_n} = \left(1 + \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{1}{n} + \cdots\right) e^{-\frac{p_1 n}{p_0}} = 1 + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La condition (4) est satisfaite. La suite $[e_n]$ n'est pas numérique, mais ses termes sont des fonctions n'admettant pas de zéros. Par conséquent, la fonction $F(u, z)$ est holomorphe.

II

SUR LES SUITES $[Y_n^\nu]$ ASSOCIÉES AUX SUITES $[X_n^\nu]$. RELATION GÉNÉRALE A LAQUELLE SATISFONT CES SUITES

Après avoir défini la suite numérique $[e_n]$ nous pouvons diviser les égalités successives du système récurrent par les termes successifs de cette suite, pour donner au système une forme plus commode. A cet effet posons

$$\frac{A_n}{e_n} = 1 - a_n, \qquad \frac{B_{n-1}}{e_n} = - b_{n-1}, \qquad \frac{C_n}{e_n} = - c_n.$$

Le système récurrent qui vient d'être envisagé prend la forme suivante

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} -(1-a_0)X_0 + c_0X_1 = 0 \\ b_{n-1}X_{n-1} - (1-a_n)X_n + c_nX_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{array} \right.$$

Les ordres de grandeurs de trois suites données $[a_n]$, $[b_n]$, $[c_n]$ pour n grand sont

$$a_n = 0\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \qquad b_n = 0\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \qquad c_n = 0\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

avec

$$\varepsilon > 0, \qquad \beta > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \beta + \gamma > 1.$$

Ces suites convergent donc toutes les trois et admettent zéro comme limite. La convergence de la suite $[b_nc_n]$ est comparable à celle de la suite $[a_n]$. L'expression de la fonction $F(u, z)$ est

$$\text{(2)} \qquad F(u_1z) = \begin{vmatrix} 1-a_0 & c_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & 1-a_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & 1-a_2 & c_2 & \cdots \\ 0 & 0 & b_2 & 1-a_3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

Nous allons maintenant définir une nouvelle suite $[Y_n]$ associée à la suite $[X_n]$. Elle sera définie par un système récurrent aux mêmes coefficients, mais disposés dans un ordre inverse.

$$\text{3)} \quad \left\{ \begin{array}{c} -(1-a_0)Y_0 + b_0 Y_1 = 0 \\ c_{n-1} Y_{n-1} - (1-a_n)Y_n + b_n Y_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{array} \right.$$

Le rapport $\frac{Y_{n+1}}{Y_n}$ tend vers zéro pour les mêmes valeurs des variables u et z que le rapport $\frac{X_{n+1}}{X_n}$. En effet, remplacer b_n par c_n et inversement dans l'expression de F revient à remplacer les lignes du déterminant par les colonnes. Nous admettons que pour une valeur donnée de z, l'équation $F(u, z) = 0$ admet une suite de racines différentes

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \cdots \quad u_\nu, \cdots \quad u_\mu, \cdots$$

en nombre fini ou infini. Ces racines sont les différentes branches d'une fonction multiforme de z_ν. A chaque racine u correspond une suite

$$X_0^\nu, \quad X_1^\nu, \quad X_2^\nu, \cdots \quad X_n^\nu, \cdots$$

et une suite

$$Y_0^\nu, \quad Y_1^\nu, \quad Y_2^\nu, \cdots \quad Y_n^\nu, \cdots$$

telles que les rapports $\frac{X_{n+1}^\nu}{X_n^\nu}$ et $\frac{X_{n+1}^\nu}{X_n^\nu}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Nous allons montrer que les termes de la suite $[X_n^\nu]$ d'une part et ceux de la suite associée $[Y_\mu^\nu]$ d'autre part satisfont à une relation chaque fois quand les indices ν et μ sont différents. A cet effet considérons deux familles de fonctions auxiliaires

$$\text{(4)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_\nu(s, z) = \sum\limits_0^\infty X_n^\nu(z) \cdot s^n \\ \Psi_\nu(s, z) = \sum\limits_{n=0}^\infty Y_n^\nu(z) \cdot s^n. \end{array} \right.$$

En vertu de la propriété qui vient d'être démontrée ces deux fonctions sont fonctions entières de s. Nous allons montrer tout d'abord que chacune de ces deux fonctions est solution d'une équation intégrale linéaire homogène. Pour cela mettons le système (1) sous la forme

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} a_0 X_0 + c_0 X_1 = X_0 \\ b_{n-1} X_{n-1} + a_n X_n + c_n X_{n+1} = X_n \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy la définition (4) est équivalente à

$$\text{(6)} \qquad X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \Phi(t, z), \frac{dt}{t^{n+1}}$$

où le circuit d'intégration (C) est un chemin quelconque entourant le point $t = 0$ dans le plan de la variable t. En tenant compte de (6) les égalités (5) peuvent s'écrire

$$X_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_c \Phi(t, z) \left(a_0 + \frac{c_0}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \Phi(t, z) \left(\frac{b_{n-1}}{t^{n-1}} + \frac{a_n}{t^n} + \frac{c_n}{t^{n+1}}\right)\frac{dt}{t}.$$

Multiplions par s^n et sommons de $n = 0$ à ∞. Il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n s^n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \Phi(t, z) \frac{dt}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \left. b_n \frac{s^{n+1}}{t^n} + a_n \frac{s^n}{t^n} + c_n \frac{s^n}{t^{n+1}}\right)$$

ou

$$\text{(7)} \qquad \Phi(s, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} K(s, t; u, z)\, \Phi(t, z) \frac{dt}{t}$$

avec

$$\text{(8)} \qquad K(s, t; u, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n s + a_n + \frac{c_n}{t}\right)\frac{s^n}{t^n}.$$

Les trois séries figurant dans l'expression (8) convergent uniformément pour toute valeur de u et de z dans les domaines (D_u, D_z) et pour toutes les valeurs de s et de t telles que

$$|s| < |t|$$

L'équation intégrale (7) n'admet, en général, que la solution banale $\Phi = 0$, car la série (4) n'est, en général, qu'une solution formelle. Elle ne devient convergente que si u et z sont liés par l'équation $F(u, z) = 0$.

En répétant les mêmes raisonnements pour la fonction $\Psi(s)$ nous obtiendrons l'équation intégrale

$$\Psi(s, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \mathrm{H}(s, t; u, z)\Psi(t, z)\frac{dt}{t} \tag{9}$$

où

$$\mathrm{H}(s, t; u, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n s + a_n + \frac{b_n}{t}\right)\frac{s^n}{t^n}. \tag{10}$$

Les fonctions $\Psi(s, t)$ sont solutions de l'équation intégrale (9) pour les mêmes valeurs propres de u.

En comparant les expressions (8) et (10) de deux noyaux on aperçoit que

$$\mathrm{H}(s, t) = \mathrm{K}\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right). \tag{11}$$

Faisons dans (9) un changement des variables en posant

$$t' = \frac{1}{t}, \qquad s' = \frac{1}{s}.$$

L'intégration doit se faire dans le sens contraire, et

$$\frac{dt}{t} = -\frac{dt'}{t'}.$$

Alors, en supprimant les accents et en tenant compte de (11), on obtient

$$\Psi\left(\frac{1}{s}, z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \Psi\left(\frac{1}{t}, z\right)\mathrm{K}(t, s; u, z)\frac{dt}{t} \tag{12}$$

une équation intégrale satisfaite par les fonctions $\Psi_\nu\left(\frac{1}{s}, z\right)$ pour les mêmes valeurs propres de u.

Nous allons nous servir des équations (7) et (12) pour démontrer une propriété des suites $[\mathrm{X}_n]$ et $[\mathrm{Y}_n^\nu]$.

Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \Phi_\mu(s)\cdot\Psi_\nu\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s} \tag{13}$$

prise le long d'un contour (C′) entourant le point $s = 0$ dans le plan de la variable s. Les indices μ et ν correspondent aux valeurs propres u_μ et u_ν telles que $u_\mu \neq u_\nu$. Posons d'abord $u = u_\mu$

dans (7), multiplions par $\Psi_\nu\left(\frac{1}{s}\right) ds$ et intégrons dans le plan de la variable s. Il vient

$$(14) \qquad I = -\frac{1}{4\pi i}\int_{C'}\frac{ds}{s}\int_{C}\frac{dt}{t}\cdot\Psi_\nu\left(\frac{1}{s}\right)\Phi_\mu(t)K(s,\, t;\, u_\mu,\, z).$$

D'autre part posons dans (12) $u = u_\nu$, multiplions par $\Phi_\mu(s)\frac{ds}{s}$ et intégrons. Il vient

$$(15) \qquad I = -\frac{1}{4\pi i}\int_{C'}\frac{ds}{s}\int_{C}\frac{dt}{t}\cdot\Psi_\nu\left(\frac{1}{t}\right)\Phi_\mu(s)\cdot K(t,\, s;\, u_\nu,\, z).$$

Nous pouvons intervertir ici les lettres t et s et en même temps les contours (C) et (C′). Ensuite, en retranchant (15) de (16) on obtient

$$(16) \qquad \frac{1}{4\pi^2}\iint_{CC'}\Phi_\mu(t)\cdot\Psi_\nu\left(\frac{1}{s}\right)\cdot[K(s, t; u_\mu, z) - K(s, t; u_\nu, z)]\frac{ds}{s}\cdot\frac{dt}{t} = 0.$$

Il est facile de calculer cette intégrale. On a d'abord

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\Phi_\mu(t)[K(s,\, t;\, u_\mu,\, z) - K(s,\, t;\, u_\nu,\, z)]\frac{dt}{t}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(b_n X_n^\mu s^{n+1} + a_n X_n^\mu s^n + c_{n-1} X_{n-1}^\nu s^{n-1}).$$

et, ensuite, la deuxième intégration conduit à la relation

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\big\{[b_n(u_\mu, z) - b_n(u_\nu, z)]X_n^\mu Y_{n+1}^\nu \\ &\quad + [a_n(u_\mu, z) - a_n(u_\nu, z)]X_n^\mu Y_n^\nu \\ &\quad + [c_n(u_\mu, z) - c_n(u_\nu, z)]X_{n+1}^\mu Y_n^\nu\big\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est la relation générale à laquelle satisfont les suites $[X_n^\mu]$ et $[Y_n^\nu]$. Il est évident que toutes les séries figurant dans cette expression convergent uniformément. Ce fait résulte immédiatement des propriétés des suites $[X_n]$ et $[Y_n]$. Les différences

$$b_n(u_\mu, z) - b_n(u_\nu, z)$$
$$a_n(u_\mu, z) - a_n(u_\nu, z)$$
$$c_n(u_\mu, z) - c_n(u_\nu, z)$$

figurant dans (17) dépendent du choix des indices μ et ν, c'est-à-dire des racines u_μ et u_ν.

Cette relation prend une forme particulièrement simple, lorsque les fonctions a_n, b_n, c_n, sont linéaires en u. En effet, si

$$\begin{aligned} a_n &= a'_n + a''_n u \\ b_n &= b'_n + b''_n u \\ c_n &= c'_n + c''_n u \end{aligned}$$

où a_n, $a'_n, \ldots, c''_n$ sont fonctions de z et ne dépendent plus de u, on obtient

$$a_n(u_\mu, z) - a_n(u_\nu, z) = (u_\mu - u_\nu)a''_n.$$

Après la division par $u_\mu - u_\nu$ la relation (17) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b'_n X_n^\mu Y_{n+1}^\nu + a''_n X_n^\mu Y_n^\nu + c''_n X_{n+1}^\mu Y_n^\nu) = 0. \tag{18}$$

Les coefficients c'', a'', b'' sont fonctions uniquement de z et ne dépendent plus du choix des indices μ et ν.

III

SUR LES SYSTÈMES RÉCURRENTS DONNANT NAISSANCE AUX SYSTÈMES DE SUITES BIORTHOGONALES

Les systèmes récurrents qui présentent un intérêt immédiat pour les applications sont ceux dont le coefficient de X_n est le seul qui dépend linéairement de u, les coefficients de X_{n-1} et de X_{n+1} étant fonctions de z seul. Nous allons donc examiner plus en détail le système.

$$(1)\qquad \begin{cases} -(1 - a_0 - p_0 u)X_0 + c_0 X_1 = 0 \\ b_{n-1}X_{n-1} - (1 - a_n - p_n u)X_n + c_n X_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Nous avons mis en évidence la variable u, $[a_n]$ et $[p_n]$ étant deux suites données de fonctions de z telles que

$$a_n = 0\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \qquad p_n = 0\left(\frac{1}{n^{1+\eta}}\right)$$
$$\varepsilon > 0, \qquad \eta > 0.$$

Les suites $[b_n]$ et $[c_n]$ ne dépendent plus de u et satisfont aux conditions

$$b_n = 0(n^{-\beta}), \qquad c_n = 0(n^{-\gamma})$$

avec

$$\beta > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \beta + \gamma > 1.$$

Le système récurrent qui définit les suites associées est

$$(2)\qquad \begin{cases} -(1 - a_0 - p_0 u)Y_0 + b_0 Y_1 = 0 \\ c_{n-1}Y_{n-1} - (1 - a_n - p_n u)Y_n + b_n Y_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

La fonction $F(u, z)$ définie dans les §§ précédents est une fonction de z holomorphe dans le même domaine (D) que les fonctions a_n, p_n, b_n, c_n. De plus, dans le cas actuel, elle est une fonction entière de u. Nous allons voir que cette fonction est de genre zéro et admet une suite infinie de zéros

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \cdots \quad u_\nu, \cdots$$

simples en général. A chacune de ces valeurs correspond une paire de suites associées $[X_n^\nu]$ et $[Y_n^\nu]$ dont les propriétés viennent d'être étudiées. Dans le cas actuel la relation (18) du § 2 se simplifie et devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n X_n^\mu Y_n^\nu = 0 \tag{3}$$

pour toute paire d'indices μ et ν tels que $u_\nu \neq u_\nu$. Cette relation montre que les deux systèmes de suites X et Y sont biorthogonales avec le poids p_n. Nous nous proposons de calculer maintenant la valeur de l'expression

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n X_n^\nu Y_n^\nu$$

pour le cas, où les suites $[X_n^\nu]$ et $[Y_n^\nu]$ correspondent à une même racine $u_\nu(z)$.

Nous allons établir d'abord une formule auxiliaire. Désignons comme précédemment par F_n le déterminant infini partiel, mineur de F commençant par l'élément $1 - a_n - p_n u$

$$F_n(u, z) = \begin{vmatrix} 1-a_n-p_n u, & c_n & 0 & \cdots \\ b_n & 1-a_{n+1}-p_{n+1}u, & c_{n+1} & \cdots \\ 0 & b_{n+1} & 1-a_{n+2}-p_{n+2}u & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{4}$$

Les termes de la suite F_n satisfont à la relation récurrente

$$F_n = (1 - a_n - p_n u)F_{n+1} - b_n c_n F_{n+2} \tag{5}$$

ou

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 - a_n - p_n u - \frac{b_n c_n}{\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}.$$

En dérivant par rapport à u on obtient

$$F_n \frac{\partial F_{n+1}}{\partial u} - F_{n+1} \frac{\partial F_n}{\partial u} = p_n F_{n+1}^2 + b_n c_n \left(F_{n+1} \frac{\partial F_{n+2}}{\partial u} - F_{n+2} \frac{\partial F_{n+1}}{\partial u} \right)$$

une formule permettant l'itération. Pour $n = 0$, elle donne naissance à une série

$$(6) \quad \begin{cases} F\dfrac{\partial F_1}{\partial u} - F_1\dfrac{\partial F}{\partial u} = p_0F_1^2 + b_0c_0p_1F_2^2 + b_0b_1c_0c_1p_2F_3^2 + \cdots \\ \qquad = p_0F_1^2 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(b_0b_1\cdots b_n)(c_0c_1\cdots c_n)p_{n+1}F_{n+2}^2. \end{cases}$$

Cette série converge uniformément pour tout u fini et pour les valeurs de z dans (D). En effet, le rapport de deux termes consécutifs

$$b_nc_n\frac{p_{n+1}}{p_n}\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)^2$$

tend vers zéro comme $\dfrac{1}{n^{\beta+\gamma}}$.

Reprenons l'étude des suites $[X_n]$ et $[Y_n]$.

Ces deux suites sont liées à la même suite f_n des déterminants réduits de $F(u,z)$, polynômes de degré n en u. Les expressions (7) du § 1 deviennent dans le cas actuel

$$X_0 = f_0, \qquad X_n = \frac{f_n}{c_0c_1\cdots c_{n-1}}$$

et

$$Y_n = f_0, \qquad Y_n = \frac{f_n}{b_0b_1\cdots b_{n-1}}.$$

Par conséquent la série (6) peut s'écrire ainsi

$$(8) \qquad \frac{F}{F_1^2}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{1}{F_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial u} = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_{n+1}}{X_{n+1}Y_{n+1}}\left(\frac{f_{n+1}F_{n+2}}{F_1}\right)^2.$$

D'autre part nous avons vu que si u est une racine u_ν de l'équation $F(u,z) = 0$, la relation suivante a lieu

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{B_nC_n}{e_{n+1}e_n}\cdot\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

qui devient avec nos notations actuelles

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = b_nc_n\cdot\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

Posons $n = 0,1,2,\ldots$ et faisons le produit

$$\frac{f_{n+1}}{f_1} = (b_0b_1\cdots b_n)(c_0c_1\cdots c_n)\frac{F_{n+2}}{F_1}$$

d'où, compte tenu de (7) et de (7')

$$\frac{f_{n+1} \cdot F_{n+2}}{F_1} = \frac{X_{n+1} Y_{n+1}}{f_0}.$$

En portant cette expression dans (8), en remplaçant f_0^2 par X_0Y_0 et en remarquant que $F(u_\nu, z) = 0$, on obtient finalement

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n X_n^\nu Y_n^\nu = -\frac{X_0^\nu Y_0^\nu}{F_1(u_\nu, z)} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u=u_\nu}$$

Les systèmes récurrents (1) et (2) ne définissent les suites $[X_n^\nu]$ et $[Y_n^\nu]$ qu'à un facteur près. Pour achever leur définition, demandons qu'on ait :

$$(10) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n X_n^\nu Y_n^\nu = 1.$$

A cet effet il suffit de poser

$$(11) \qquad X_0^\nu Y_0^\nu = -\frac{F_1(u_\nu, z)}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u=u_\nu}}.$$

Notons que $F_1(u,z)$ ne peut pas s'annuler en même temps que F. Nous avons en effet

$$F = (1 - a_0 - p_0 u)F_1 - b_0 c_0 F_2.$$

Par conséquent, en admettant que F_1 et F s'annulent en même temps, il faut que F_2 soit nul aussi. La formule de récurrence (5) montre que tous les termes de la suite $[F_n]$ s'annulent. Or, c'est impossible, car cette suite admet l'unité comme limite. D'autre part la fonction entière $\frac{\partial F}{\partial u}$ est borne pour u borné ; par conséquent X_0 et Y_0 ne s'annulent pas. Par contre $\frac{\partial F}{\partial u}$ peut s'annuler en même temps que $F(u,z)$. L'équation $F(u,z) = 0$ admet alors des racines doubles ou multiples. Désignons par z_c la valeur de z pour laquelle deux fonctions u_ν et $u_{\nu'}$, — deux zéros de $F(u,z)$, prennent la même valeur.

C'est un point critique, où deux déterminations de la fonction multiforme définie par l'équation $F(u,z) = 0$ coïncident. Lorsque e point z décrit un lacet autour du point de ramification z_c

en partant d'un point ordinaire z_0 deux déterminations de u peuvent s'échanger. Les suites $[X_n^\nu]$ et $[X_n^\mu]$ ainsi que $[Y_n^\nu]$ et $[Y_n^\mu]$ s'échangent également. Par conséquent ces suites ne sont que de diverses déterminations d'une suite de fonctions multiformes de z. Enfin, (9) montre qu'au point critique la valeur de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n X_n^\nu Y_n^\nu.$$

est nulle. Les suites $[X_n^\nu]$ et $[Y_n^\nu]$ ne peuvent pas être normées au point critique sans que les termes de ces suites deviennent infinis.

IV

ÉTUDE DE LA FONCTION F(u, z)

La fonction entière de u, $F(u,z)$ est la limite d'une suite de polynômes f_n définis par le système récurrent

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 = (1 - a_0 - p_0 u) f_0 \\ f_{n+1} = (1 - a_n - p_n u) f_n - b_{n-1} c_{n-1} f_{n-1} \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Désignons par les lettres majuscules A_n, P_n, B_n, C_n et U les modules de a_n, p_n, b_n, c_n et de u. Alors, de la première relation on obtient

$$|f_1| \leqslant (1 + A_0 + P_0 U) |f_0|$$

et de

$$f_2 = (1 - a_1 - p_1 u) f_1 - b_0 c_0 f_0$$

on tire

$$\begin{aligned} |f_2| &\leqslant (1 + A_1 + P_1 U) |f_1| + B_0 C_0 |f_0| \leqslant \\ &\leqslant (1 + A_0 + P_0 U)(1 + A_1 + P_1 U) + B_0 C_0 |f_0|. \end{aligned}$$

A fortiori

$$|f_2| < (1 + A_0 + P_0 U)(1 + A_1 + P_1 U + B_0 C_0) |f_0|.$$

Posons

$$\begin{aligned} 1 + A_0 + P_0 U &= R_0 \\ 1 + A_n + P_n U + B_{n-1} C_{n-1} &= R_n. \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} |f_1| &< R_0 |f_0| \\ |f_2| &< R_0 R_1 |f_0|. \end{aligned}$$

Démontrons qu'en général

$$(2)\qquad |f_{n+1}| < R_0 R_1 R_2 \cdots R_n |f_0|.$$

En effet, en admettant que l'inégalité (2) a lieu pour $f_1, f_2, \ldots f_n$ on trouve

$$\begin{aligned} |f_{n+1}| &< (1 + A_n + P_n)\,|f_n| + B_{n-1}C_{n-1}\,|f_{n-1}| \\ &< R_0R_1 \cdots R_{n-2} \left\{ (1 + A_n + P_nU)R_{n-1} + B_{n-1}C_{n-1} \right\} |f_0| \end{aligned}$$

et *à fortiori*

$$|f_{n+1}| < R_0R_1 \cdots R_{n-2}R_{n-1}(1 + A_n + P_nU + B_{n-1}C_{n-1})\,|f_0|.$$

Donc, l'inégalité (2) est valable pour toute valeur de n.

En passant à la limite, pour $n = \infty$ on aura donc

$$(3) \qquad |F(u, z)| < f_0 \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (1 + A_n + P_nU + B_{n-1}C_{n-1}).$$

Ce produit infini converge, car d'après nos hypothèses

$$A_n = 0\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right); \quad P_n = 0\left(\frac{1}{n^{1+\eta}}\right); \quad B_{n-1}C_{n-1} = 0\left(\frac{1}{n^{\beta+\gamma}}\right)$$

avec

$$\varepsilon > 0 \qquad \eta > 0 \qquad \beta + \gamma > 1.$$

L'inégalité (3) montre encore que la fonction entière de u, $F(u,z)$ est de genre zéro. En renforçant encore l'inégalité (3) on peut écrire

$$(4) \qquad |F(u, z)| < |f_0| \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (1 + A_n + B_{n-1}C_{n-1}) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + P_nU).$$

Donc, si

$$p_n(z) = 0\left(\frac{1}{n^{1+\eta}}\right), \qquad \eta > 0$$

a fonction entière $F(u)$ est de l'ordre $\dfrac{1}{1+\eta}$.

$F(u,z)$ étant de genre zéro l'équation $F = 0$ admet nécessairement une suite infinie de racines $u_0, u_1, \ldots, u_\nu, \ldots$ Elle définit une fonction u multiforme à une infinité de branches.

V

SYSTÈMES RÉCURRENTS PARTICULIERS DONNANT NAISSANCE A DES SUITES ORTHOGONALES ET NORMÉES

Nous avons défini les suites associées $[X_n]$ et $[Y_n]$ à l'aide de deux systèmes récurrents qui ne diffèrent que par le fait que le coefficient de X_{n+1} dans le premier système récurrent prend la place du coefficient de Y_{n-1} dans le second système et inversement. Les suites associées ainsi définies sont biorthogonales avec un poids p_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n X_n^\nu Y_n^\mu = 0 \qquad (\mu \neq \nu)$$

Dans des cas particuliers, où les termes de la suite $[p_n]$ ne s'annulent pas dans le domaine considéré du plan de la variable z il est possible de modifier la définition des suites associées de façon à obtenir une propriété plus simple. En effet, dans ce cas, il est possible de remplacer la relation récurrente

$$c_{n-1} Y_{n-1} - (1 - a_n - p_n u) Y_n + b_n Y_{n+1} = 0$$

par celle-ci

$$c_{n-1} \frac{p_n}{p_{n-1}} p_{n-1} Y_{n-1} - (1 - a_n - p_n u) p_n Y_n + b_n \frac{p_n}{p_{n+1}} p_{n+1} Y_{n+1} = 0$$

ou

$$\bar{c}_{n-1} \overline{Y}_{n-1} - (1 - a_n - p_n u) \overline{Y}_n + \bar{b}_n \overline{Y}_{n+1} = 0$$

en posant

$$\bar{c}_n = c_n \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad \bar{b}_n = b_n \frac{p_n}{p_{n+1}}$$

et

$$\overline{Y}_n = p_n Y_n.$$

Ces nouvelles suites $[\overline{Y}_n^\mu]$ associées aux $[X_n^\nu]$ satisfont une propriété de biorthogonalité plus simple

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^\nu \overline{Y}_n^\mu = 0 \qquad (\mu \neq \nu)$$

Les nouvelles suites associées convergent pour les mêmes valeurs de la variable u. En effet, la fonction $F(u, z)$ ne subit pas de changement si l'on remplace b_n et c_n par $\bar{b}_n$ et $\bar{c}_n$, puisqu'elle ne dépend que des produits $b_n c_n$. Or, $b_n c_n = \bar{b}_n \bar{c}_n$.

Il nous reste à examiner les cas où les suites de deux systèmes associés sont identiques. Nous aurons affaire alors à un seul système de suites orthogonales.

Pour obtenir l'égalité

$$X_n^\nu = \overline{Y}_n^\nu = p_n Y_n^\nu$$

il faut que deux systèmes récurrents qui définissent les suites X et Y deviennent identiques. Ils doivent satisfaire aux conditions

$$\bar{b}_n = c_n, \qquad \bar{c}_n = b_n$$

équivalentes à une condition unique

$$b_n p_n = c_n p_{n+1}.$$

Si une telle restriction est imposée aux coefficients, les suites définies par le système récurrent sont orthogonales et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^\nu X_n^\mu = 0 \qquad (\mu \neq \nu).$$

Nous avons vu comment il faut choisir la valeur à donner aux premiers termes X_n^ν et Y_n^ν pour que le système des suites soit normé. La formule (10) du § 3 devient ici

$$(X_0^\nu)^2 = -\frac{p_0 \cdot F_1(us,z)}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u=u_\nu}}.$$

Les suites sont maintenant complètement définies orthogonales et normées

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n^\mu)^2 = 1.$$

Au début de cette analyse nous sommes partis d'un système récurrent qui dépendait de trois suites données $[A_n]$, $[B_n]$ et $[C_n]$ de fonctions holomorphes de u et de z. Au cours de l'analyse nous avons défini un système récurrent associé donnant naissance à des suites de fonctions Y qui sont liées avec les suites X par la relation (17) du § 2. Cette relation se simplifie considérablement, si les fonctions A_n sont linéaires en u

$$A_n = A'_n + A''_n u$$

et si B_n et C_n sont indépendants de u. Enfin, nous avons constaté que dans des cas particuliers, les deux systèmes de suites X et Y deviennent identiques et que la relation en question exprime alors l'orthogonalité de ces suites. Le système récurrent (2) du § 1 qui les définit, reçoit dans ces conditions une forme particulière que nous allons préciser.

Si l'on pose

$$b_n p_n = c_n p_{n+1} = q_n$$

d'où

$$b_n = \frac{q_n}{p_n}, \qquad c_n = \frac{q_n}{p_{n+1}}$$

la relation

$$b_{n-1} X_{n-1} - (1 - a_n - u_n p) X_n + c_n X_{n+1} = 0$$

après la division par p_n devient

$$\frac{q_{n-1}}{p_{n-1} p_n} \cdot X_{n-1} - \left(\frac{1 - a_n}{p_n} - u\right) X_n + \frac{q_n}{p_n p_{n+1}} X_{n+1} = 0.$$

Par conséquent, pour que le système de suites définies par le système soit orthogonal, il faut que le système récurrent soit de la forme suivante

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} (A_0 - u) X_0 + B_0 X_1 = 0 \\ B_{n-1} X_{n-1} + (A_n - u) X_n + B_n X_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{array} \right.$$

Ce système dépend de deux suites données $[A_n]$ et $[B_n]$ de fonctions holomorphes de z remplissant les conditions

$$\frac{A_n - u}{e_n} = 1 + 0\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \qquad \varepsilon > 0$$

$$\frac{B_n}{e_n} = 0\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right), \qquad \beta > \frac{1}{2}$$

$[e_n]$ étant une suite numérique ou une suite de fonctions holomorphes et dépourvues de zéros dans le domaine considéré.

L'expression de la fonction $F(u, z)$ devient maintenant

$$F(u, z) = \begin{vmatrix} \frac{A_0 - u}{e_0} & \frac{B_0}{e_0} & 0 & \cdots \\ \frac{B_0}{e_1} & \frac{A_1 - u}{e_1} & \frac{B_1}{e_1} & \cdots \\ 0 & \frac{B_1}{e_1} & \frac{A_2 - u}{e_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{2}$$

Cette fonction de u entière de genre zéro peut également se mettre sous la forme d'un produit infini

$$F(u,z) = F(o,z)\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\left(1 - \frac{u}{u_2}\right)\cdots \tag{3}$$

VI

APPLICATION DU CALCUL MATRICIEL A L'ÉTUDE DES SYSTÈMES RÉCURRENTS LINÉAIRES

Pour pousser plus loin l'étude des systèmes des suites $[\mathbf{X}_n']$ il est très commode de recourir aux notations matricielles. Considésons une suite $x_0, x_1, x_2, \cdots$, telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ converge absolument. Les termes x_n sont alors les coordonnées d'un point x de l'espace de Hilbert. Nous désignerons par x une matrice comportant une seule colonne

$$x = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \cdots \end{matrix} \right\|$$

et par x^{T} la matrice transposée ne comportant qu'une seule ligne

$$x^{\mathrm{T}} = \| \, x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \, \| \, .$$

Soit a une matrice carrée infinie

$$a = \left\| \begin{matrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots \end{matrix} \right\| .$$

Un système d'équations linéaires tel que

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x_n \qquad (k = 0, 1, 2 \cdots)$$

peut s'écrire alors

$$y = ax. \tag{1}$$

On convient en faisant le produit des matrices de multiplier toujours les lignes de la première matrice par les colonnes de la seconde. La matrice-produit comprend donc autant de lignes que le premier facteur et autant de colonnes que le second.

La matrice y est aussi un point de l'espace de Hilbert, c'est-à-dire, la série Σy_n^2 est absolument convergente, si la matrice a est bornée. Une matrice a est bornée, s'il existe un nombre M tel que l'inégalité

$$x^{\mathrm{T}} a^{\mathrm{T}} a x \leqslant \mathrm{M} \cdot x^{\mathrm{T}} x \tag{2}$$

a lieu pour tout point x de l'espace de Hilbert.

Si le système (1) est résoluble par rapport à x, on écrit

$$x = a^{-1} y \tag{3}$$

où a^{-1} est la matrice réciproque ou inverse de a, et qui satisfait à la relation

$$a a^{-1} = a^{-1} a = \mathrm{E}$$

E est la matrice unitaire dont les éléments sont

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots \quad i = k \\ 0 & \cdots\cdots \quad i \neq k. \end{cases}$$

La réciproque a^{-1} existe et est unique s'il est possible de trouver un nombre positif m tel que les inégalités suivantes

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}} a^{\mathrm{T}} a x \geqslant m^2 \\ x^{\mathrm{T}} a a^{\mathrm{T}} x \geqslant m^2 \end{cases} \tag{4}$$

ont lieu pour tout point x tel que $x^{\mathrm{T}} x = 1$ (F. Riesz, *ibid.*, p. 88.)

En particulier, les matrices ρ telles que

$$\rho \rho^{\mathrm{T}} = \rho^{\mathrm{T}} \rho = \mathrm{E}$$

satisfont aux conditions (2) et (4). Elles conservent les distances et définissent des rotations.

Nous allons maintenant traduire en langage des matrices le système récurrent

$$\begin{cases} (\mathrm{A}_0 - u)\mathrm{X}_0 + \mathrm{B}_0 \mathrm{X}_1 = 0 \\ \mathrm{B}_{n-1} \mathrm{X}_{n-1} + (\mathrm{A}_n - u)\mathrm{X}_n + \mathrm{B}_n \mathrm{X}_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{5}$$

considéré à la fin du paragraphe précédent. Écrivons ce système de la façon suivante

$$\begin{array}{ll}
A_0X_0 + B_0X_1 & = uX_0 \\
B_0X_0 + A_1X_1 + B_1X_2 & = uX_1 \\
\qquad B_1X_1 + A_2X_2 + B_2X_3 & = uX_2 \\
\qquad\qquad B_2X_2 + A_3X_3 + \cdots & = uX_3 \\
\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

Désignons par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les matrices symétriques

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{array}{ccccc} A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\|, \quad \mathcal{B} = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & B_0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_0 & 0 & B_1 & 0 & \cdots \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 & \cdots \\ 0 & 0 & B_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\|$$

dont la première ne comporte qu'une seule diagonale non nulle, et par ξ la matrice-point transposée

$$\xi = \| X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \cdots \| .$$

Le système (5) à l'aide de ces notations s'écrit ainsi

$$\xi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = u\xi. \tag{6}$$

Posons ici $u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$

Cette suite étant celle des zéros de la fonction entière $F(u, z)$, on aura une suite de relations matricielles

$$\begin{array}{l}
\xi^{(0)}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = u_0\xi^{(0)} \\
\xi^{(1)}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = u_1\xi^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi^{(\nu)}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = u_\nu\xi^{(\nu)}. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Les notations matricielles permettent d'écrire ce système d'une façon plus abrégée

$$\left\| \begin{array}{c} \xi^{(0)} \\ \xi^{(1)} \\ \cdots \\ \xi^{(\nu)} \\ \cdots \end{array} \right\| (\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \left\| \begin{array}{ccccc} u_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_\nu & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \xi^{(0)} \\ \xi^{(1)} \\ \cdots \\ \xi^{(\nu)} \\ \cdots \end{array} \right\|$$

Nous allons désigner par $\mathcal{U}$ la matrice diagonale

$$\mathcal{U} = \begin{Vmatrix} u_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

et par $\mathcal{X}$ la matrice

$$\mathcal{X} = \begin{Vmatrix} \xi^{(0)} \\ \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \\ \cdots \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} X_0^0 & X_1^0 & X_2^0 & \cdots \\ X_0^1 & X_1^1 & X_2^1 & \cdots \\ X_0^2 & X_1^2 & X_2^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

Finalement le système récurrent (5) se traduit par une équation matricielle

$$(7) \qquad \mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \mathcal{U}\mathcal{X},$$

les éléments de la matrice $\mathcal{X}$ figurant dans ses lignes forment, comme nous avons vu, des suites convergentes admettant zéro comme limite et telles que les rapports $\frac{X_{n+1}^{\nu}}{X_n^{\nu}}$ tendent vers zéro.

Démontrons que la matrice $\mathcal{X}$ est orthogonale. En multipliant l'équation (7) à droite par la matrice transposée ($\mathcal{X}^{\tau}$) on obtient

$$\mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{X}^{\tau} = \mathcal{U}\mathcal{X}\mathcal{X}^{\tau}.$$

Transposons cette relation. Il vient

$$\mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{X}^{\tau} = \mathcal{X}\mathcal{X}^{\tau} \cdot \mathcal{U}$$

car les matrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{U}$ sont symétriques. En comparant ces deux relations on trouve

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{X}\mathcal{X}^{\tau} = \mathcal{X}\mathcal{X}^{\tau} \cdot \mathcal{U}.$$

La matrice-produit $\mathcal{X}\mathcal{X}^{\tau}$ étant permutable avec une matrice diagonale est diagonale elle-même. C'est la traduction du fait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{\nu} X_n^{\mu} = 0$$

si

$$n_{\nu} \neq n_{\mu}$$

ce qui signifie que la matrice $\mathcal{X}$ est orthogonale.

Nous avons vu que, si $\nu \neq \mu$ on peut normer les suites, c'est-à-dire, les lignes de la matrice $\mathfrak{X}$ de façon à ce qu'on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n^\nu)^2 = 1.$$

Avec les notations matricielles ce fait s'exprime par l'équation

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}^T = E \tag{8}$$

où E désigne la matrice unitaire.

Le système de deux équations matricielles (7) et (8) détermine complètement les matrices $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{U}$.

L'équation (8) montre que $\mathfrak{X}$ est une matrice qui définit une rotation. On en tire

$$\partial et \mid \mathfrak{X} \mid = 1$$

et

$$\mathfrak{X}^{-1} = \mathfrak{X}^T$$
$$\mathfrak{X}^T\mathfrak{X} = E$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} X_n^\nu X_m^\nu = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 \cdots m \neq n \\ 1 \cdots m = n \end{cases}$$

Par conséquent, les colonnes du tableau $\mathfrak{X}$ forment également un système des suites orthogonal et normé.

Il est facile de voir que ce système est complet. Sinon, il existerait une suite

$$\xi = \| \; x_0, \; x_1 \; x_2 \; \cdots \; \|$$

orthogonale à toutes les autres, on aurait

$$\xi\mathfrak{X}^T = 0.$$

Or, en multipliant par $\mathfrak{X}$ on trouve

$$\xi\mathfrak{X}^T\mathfrak{X} = \xi E = 0$$

donc $\xi = 0$

Introduisons encore la matrice diagonale

$$\mathcal{E} = \begin{Vmatrix} e_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

La matrice inverse $\mathcal{E}^{-1}$ est

$$\mathcal{E}^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{e_0} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{e_1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{e_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

Avec ces notations l'expression (2) du § 5 devient

$$\text{(10)} \qquad F(u, z) = \mathfrak{d}et \mid \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{A} - u + \mathcal{B}) \mid$$

et l'expression (3)

$$\text{(11)} \qquad F(u, z) = \mathfrak{d}et \mid \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \mid \cdot \mathfrak{d}et \mid E - \mathcal{U}^{-1} \cdot u \mid$$

Démontrons que la suite $u_0, u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$ s'approche asymptotiquement de $[e_\nu]$. De (7) en multipliant par $\mathcal{E}^{-1}$ à droite et en intercalant l'unité $\mathcal{E}^{-1}\,\mathcal{E} = E$ entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{X}$, on obtient

$$\mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{E}^{-1} = \mathcal{U}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{E}^{-1}$$

d'où

$$\mathfrak{d}et \mid \mathcal{X} \mid \mathfrak{d}et \mid (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{E}^{-1} \mid = \mathfrak{d}et \mid \mathcal{U}\mathcal{E}^{-1} \mid \mathfrak{d}et \mid \mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{E}^{-1} \mid.$$

Il est facile à démontrer que le dernier déterminant est

$$\mathfrak{d}et \mid \mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{E}^{-1} \mid = \mathfrak{d}et \mid \mathcal{X} \mid = 1.$$

Par conséquent,

$$F(0, z) = \mathfrak{d}et \mid \mathcal{U}\mathcal{E}^{-1} \mid = \frac{u_0}{e_0} \cdot \frac{u_1}{e_1} \cdot \frac{u_2}{e_2} \cdots$$

Le produit infini $\prod \frac{u_\nu}{e_\nu}$ converge vers la fonction $F(0, z)$. Donc, la suite $u_0, u_1, \ldots$ tend asymptotiquement vers la suite $e_0, e_1, e_2, \ldots$

Par conséquent u_n pour n grand est de même ordre que A_n.

VII

SYSTÈMES ORTHOGONAUX DES FONCTIONS ATTACHÉES AUX SYSTÈMES RÉCURRENTS LINÉAIRES

Nous venons de définir une matrice $\mathfrak{X}$ orthogonale normée et complète qui satisfait aux équations

$$(1) \qquad \mathfrak{X}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \mathfrak{U}\mathfrak{X}$$

$$(2) \qquad \mathfrak{X}\mathfrak{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E}.$$

Elle représente une rotation dans l'espace ponctuel de Hilbert.

Considérons maintenant un système de fonctions

$$\varphi_0(s),\ \varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots\ \varphi_n(s),\ \cdots$$

orthogonal dans un intervalle (0,1), normé, complet ou non. Désignons ce système d'une façon abrégée par $\varphi(s)$ en posant

$$(3) \qquad \varphi(s) = \left\| \begin{matrix} \varphi_0(s) \\ \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \\ \cdots \end{matrix} \right\|$$

ou

$$\varphi^{\mathrm{T}}(s) = \|\ \varphi_0(s),\ \varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots\ \|.$$

La propriété du système $\varphi(s)$ d'être orthogonal et normé s'exprime par la relation

$$(4) \qquad \int_0^1 \varphi(s)\varphi^{\mathrm{T}}(s)ds = \mathrm{E}.$$

Appliquons au système $\varphi(s)$ la rotation définie par la matrice $\mathfrak{X}$. On obtiendra un autre système de fonctions que nous désignerons par

$$(5) \qquad \theta(s, z) = \mathfrak{X}(z)\cdot\varphi(s).$$

Ce système est également orthogonal et normé dans l'intervalle (0,1). En effet, on a

$$\int_0^1 \theta(s, z)\theta^{\mathrm{T}}(s, z)ds = \mathcal{X} \int_0^1 \varphi(s)\varphi^{\mathrm{T}}(s)ds\mathcal{X}^{\mathrm{T}} = \mathcal{X}\mathcal{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E}.$$

Le système transformé $\theta(s, z)$ résulte d'une rotation du système coordonné φ dans l'espace fonctionnel. Il est facile de voir que si le système donné $\varphi(s)$ est complet, le système transformé est complet également. En effet, supposons que le contraire ait lieu. Alors il existerait une fonction $\Theta(s)$ orthogonale à toutes les fonctions du système $\theta(s, z)$. Les intégrales

$$\int_0^1 \Theta(s)\theta^{\mathrm{T}}(s, z)ds = 0$$

auraient des valeurs nulles. Alors, en remplaçant $\theta^{\mathrm{T}}(s, z)$ par $\varphi^{\mathrm{T}}(s)\mathcal{X}^{\mathrm{T}}$ et en multipliant à droite par $\mathcal{X}$ on devrait avoir

$$\int_0^1 \Theta(s)\varphi^{\mathrm{T}}(s)ds = 0$$

ce qui est impossible le système $\varphi(s)$ étant complet.

VIII

DÉVELOPPEMENT DES MATRICES $\mathfrak{X}$ ET $\mathfrak{U}$ EN SÉRIES

Nous allons procéder à la résolution du système d'équations matricielles envisagé dans les paragraphes précédents. A cet effet, il est commode d'introduire un paramètre auxiliaire λ en mettant le système d'équations sous la forme suivante

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda) = \mathfrak{U}\mathfrak{X} \tag{1}$$

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E}. \tag{2}$$

Ceci revient à remplacer la suite $[\mathrm{B}_n]$ par $[\lambda \mathrm{B}_n]$.

Nous allons chercher à développer les matrices $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{U}$ en séries procédant suivant les puissances de λ

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1\lambda + \mathfrak{X}_2\lambda^2 + \cdots \tag{3}$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1\lambda + \mathfrak{U}_2\lambda^2 + \cdots \tag{4}$$

La fonction caractéristique $\mathrm{F}(u, z; \lambda)$ dépendra du paramètre λ, les fonctions $u_\nu(z, \lambda)$ également. Il est d'ailleurs facile de voir que F sera une fonction entière de λ, car les fonctions f_n seront des polynômes en λ. Pour que les développements (3) et (4) soient possibles, il faut que le point $\lambda = 0$ ne soit pas un point critique de la fonction multiforme $u(\lambda)$ définie par l'équation

$$\mathrm{F}(u, z; \lambda) = 0.$$

Portons les expressions (3) et (4) dans l'équation (1) et égalons les coefficients de λ^n. On aura une suite de relations

$$\mathfrak{X}_0\mathfrak{A} = \mathfrak{U}_0\mathfrak{X}_0 \tag{5}$$

$$\mathfrak{X}_n\mathfrak{A} + \mathfrak{X}_{n-1}\mathfrak{B} = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{U}_{n-k}\mathfrak{X}_k. \tag{6}$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

De même de l'équation (2) on obtient une suite de relations

$$\mathcal{X}_0\mathcal{X}_0^T = E \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{X}_k\mathcal{X}_{n-k}^T = 0. \tag{8}$$

Commençons par déterminer $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{U}_0$. La matrice $\mathcal{U}_0$ se compose des racines de l'équation $F(u, z\,;\,o) = 0$ dans laquelle on supprime tous les termes en B_n en posant $\lambda B_n = 0$. Par conséquent, l'expression de $F(u, z\,;\,o)$ dans ce cas particulier devient

$$F(u, z\,;\,0) = \begin{vmatrix} \frac{A_0 - u}{e_0} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{A_1 - u}{e_1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{A_2 - u}{e_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Les racines de $F = 0$ sont donc $u_0 = A_0$, $u_1 = A_1$, ...

En d'autres termes

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{A}.$$

Pour que les séries (3) et (4) existent, il faut que les racines soient simples. Nous admettrons donc que pour des valeurs de z considérées, tous les termes de la suite $[A_n]$ sont différents.

Portons la valeur $\mathcal{U}_0 = \mathcal{A}$ dans (5). Il vient

$$\mathcal{X}_0\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{X}_0.$$

La matrice $\mathcal{X}_0$ étant permutable avec une matrice diagonale est diagonale elle-même. D'après (7) le carré de chaque élément de cette matrice est égal à un. Donc

$$\mathcal{X} = \pm E.$$

Nous avons d'autre part défini le système des fonctions

$$\theta(s) = \mathcal{X}\varphi(s)$$

qui peut être considéré comme un système orthogonal résultant d'une rotation $\mathcal{X}$ appliquée au système orthogonal $\varphi(s)$. Cette rotation dépend maintenant du paramètre λ, et pour $\lambda = 0$ on a

$$\theta(s) = \pm E\varphi(s) = \pm \varphi(s).$$

Cette remarque nous conduit à adopter le signe $+$ et posant

$$\mathcal{X}_0 = \mathrm{E}.$$

De cette façon, à la valeur $\lambda = 0$ correspond une transformation identique.

Remplaçons $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{X}_0$ par $\mathcal{A}$ et E dans les relations (6) et (8). On aura

$$\mathcal{A}\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_n\mathcal{A} + \mathcal{U}_n = \mathcal{C}_{n-1} \tag{9}$$

avec

$$\mathcal{C}_{n-1} = \mathcal{X}_{n-1}\mathcal{B} - \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{U}_{n-k}\mathcal{X}_k \tag{10}$$

et

$$\mathcal{X}_n + \mathcal{X}_n^{\mathrm{T}} = \mathcal{D}_{n-1} \tag{11}$$

avec

$$\mathcal{D}_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{X}_k\mathcal{X}_{n-k}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathcal{D}_0 = 0. \tag{12}$$

Les matrices $\mathcal{C}_{n-1}$ et $\mathcal{D}_{n-1}$ ne dépendent que de n premiers coefficients $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots \mathcal{X}_{n-1}$ et $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ des séries (3) et (4). Par conséquent, les relations (9) et (11) constituent un système récurrent qui permet de calculer de proche en proche les coefficients $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{U}_n$.

Il convient de noter que les équations (1) et (2) ne sont pas complètement indépendantes. Nous avons vu, en effet, que le fait que la matrice-produit $\mathcal{X}\mathcal{X}^{\mathrm{T}}$ est diagonale est une conséquence de l'équation (1). Par conséquent, nous devons nous attendre à trouver une relation qui lie les matrices $\mathcal{C}_{n-1}$ et $\mathcal{D}_{n-1}$. En effet, en transposant la relation (9) on obtient

$$\mathcal{A}\mathcal{X}_n^{\mathrm{T}} - \mathcal{X}_n^{\mathrm{T}}\mathcal{A} = \mathcal{U}_n - \mathcal{C}_{n-1}^{\mathrm{T}}. \tag{9'}$$

Faisons la somme de (9) et de (9′). Alors, en tenant compte de (11) on obtient la relation cherchée

$$\mathcal{A}\mathcal{D}_{n-1} - \mathcal{D}_{n-1}\mathcal{A} = \mathcal{C}_{n-1} - \mathcal{C}_{n-1}^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système de deux équations

$$\mathcal{A}\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_n\mathcal{A} + \mathcal{U}_n = \mathcal{C}_{n-1}. \tag{9}$$

$$\mathcal{X}_n + \mathcal{X}_n^{\mathrm{T}} = \mathcal{D}_{n-1} \tag{11}$$

A cet effet il convient de mettre en évidence les éléments qui figurent dans la diagonale principale des matrices. Nous allons donc poser

$$a = \tilde{a} + \operatorname{diag} a$$

où a est une matrice quelconque, diag a est une matrice diagonale dont les éléments sont ceux qui figurent dans la diagonale principale de a, et $\tilde{a}$ est la matrice a dans laquelle les éléments de la diagonale principale sont remplacés par les zéros. A l'aide de ces notations on écrit

$$\mathcal{A}\mathcal{X}_n = \mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n + \mathcal{A} \operatorname{diag} \mathcal{X}_n$$

et

$$\mathcal{X}_n\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A} + \operatorname{diag} \mathcal{X}_n \cdot \mathcal{A}$$

Mais

$$\mathcal{A} \cdot \operatorname{diag} \mathcal{X}_n = \operatorname{diag} \mathcal{X}_n \cdot \mathcal{A}.$$

Donc

$$\mathcal{A}\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_n\mathcal{A} = \mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n - \widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A}$$

et enfin (9) devient

$$\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n - \widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A} + \mathcal{U}_n = \widetilde{\mathcal{C}}_{n-1} + \operatorname{diag} \mathcal{C}_{n-1}$$

Or, la matrice $\mathcal{U}_n$ est diagonale et les éléments de la diagonale principale de $\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n - \widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A}$ sont nuls. Par conséquent, cette dernière équation se dissocie en deux

$$\mathcal{U}_n = \operatorname{diag} \mathcal{C}_{n-1} \tag{14}$$

et

$$\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n - \widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{C}}_{n-1} \tag{15}$$

Nous avons donc trouvé l'expression (14) de la matrice $\mathcal{U}_n$. L'équation (15) nous fournira l'expression de la matrice $\widetilde{\mathcal{X}}_n$. En effet, si x_i^k désigne l'élément (i, k) de la matrice $\widetilde{\mathcal{X}}_n$ l'élément correspondant du produit $\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n$ sera

$$[\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n]_i^k = \mathrm{A}_k x_i^k$$

tandis que l'élément (i, k) du produit $\widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A}$ est

$$[\widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A}]_i^k = \mathrm{A}_i x_i^k$$

Nous avons donc

$$[\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{X}}_n - \widetilde{\mathcal{X}}_n\mathcal{A}]_i^k = (A_k - A_i)x_i^k = [\widetilde{\mathcal{C}}_{n-1}]_i^k$$

d'où

$$x_i^k = \frac{1}{A_k - A_i} \cdot [\widetilde{\mathcal{C}}_{n-1}]_i^k \tag{16}$$

La division est toujours possible, car d'après notre hypothèse

$$A_k \neq A_i$$

Désignons par $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ la matrice suivante

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{A_0 - A_1} & \frac{1}{A_0 - A_2} & \cdots \\ \frac{1}{A_1 - A_0} & 0 & \frac{1}{A_1 - A_2} & \cdots \\ \frac{1}{A_2 - A_0} & \frac{1}{A_2 - A_1} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

dont le mode de formation à partir de la matrice $\mathcal{A}$ est évident. D'autre part, désignons par $\overline{ab}$ la matrice dont les éléments sont les produits des éléments correspondants des matrices a et b. de sorte que

$$[\overline{ab}]_i^k = a_i^k b_i^k.$$

Alors, le système des égalités (16) peut se noter d'une façon abrégée

$$\widetilde{\mathcal{X}}_n = \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}_{n-1}} \tag{17}$$

Il nous reste à chercher la diagonale principale de la matrice $\mathcal{X}_n$. Or, en utilisant l'équation (11) nous obtenons

$$\widetilde{\mathcal{X}}_n + \widetilde{\mathcal{X}}_n^{\mathrm{T}} + 2 \operatorname{diag} \mathcal{X}_n = \widetilde{\mathcal{D}}_{n-1} + \operatorname{diag} \mathcal{D}_{n-1}$$

d'où

$$\operatorname{diag} \mathcal{X}_n = \frac{1}{2} \operatorname{diag} \mathcal{D}_{n-1} \tag{18}$$

Nous avons encore à vérifier que l'équation

$$\widetilde{\mathcal{X}}_n + \widetilde{\mathcal{X}}_n^{\mathrm{T}} = \widetilde{\mathcal{D}}_{n-1} \tag{19}$$

est satisfaite par (17). En portant (17) dans (19) et en remarquant que

$$\widetilde{\mathcal{X}}_n^{\mathrm{T}} = -\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}_{n-1}^{\mathrm{T}}}$$

on trouve

$$\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_{n-1} - \mathcal{C}_{n-1}^{T})} = \widetilde{\mathcal{D}}_{n-1}$$

mais ce n'est qu'une traduction de la relation (13) trouvée précédemment, dans nos nouvelles notations.

Ainsi donc les matrices-coefficients des séries (3) et (4) se calculent de proche en proche à l'aide des formules

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathcal{U}_0 = \mathcal{A}\,; \qquad \mathcal{X}_0 = E \\ \mathcal{U}_n = \operatorname{diag} \mathcal{C}_{n-1} \\ \mathcal{X}_n = \overline{\mathcal{X}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}_{n-1}} + \dfrac{1}{2} \operatorname{diag} \mathcal{D}_{n-1} \end{cases}$$

avec

$$(21) \qquad \begin{cases} \mathcal{C}_{n-1} = \mathcal{X}_{n-1}\mathcal{B} - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n-k}\mathcal{X}_k \\ \mathcal{D}_{n-1} = - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{X}_k\mathcal{X}_{n-k}^{T} \\ \mathcal{C}_0 = \mathcal{B}, \qquad \mathcal{D}_0 = 0. \end{cases}$$

Remarque. — Il est évident qu'il existe plusieurs façons d'introduire le paramètre supplémentaire λ. Par exemple, la suite $[A_n]$ peut être remplacée par la suite $[A_n + \alpha_n - \lambda\alpha_n]$ où $[\alpha_n]$ est une suite donnée arbitraire. L'équation matricielle (1) se trouvera donc remplacée par

$$\mathcal{X}[(\mathcal{A} + \alpha) + (\mathcal{B} - \alpha)\lambda = \mathcal{U}\mathcal{X}.$$

On peut profiter de cette faculté pour ramener au problème qui vient d'être traité le cas où plusieurs termes de la suite $[A_n]$ prennent les mêmes valeurs. En effet, on peut choisir la matrice α, de façon à ce que tous les éléments de $\mathcal{A} + \alpha$ soient différents.

DEUXIÈME PARTIE

IX

ÉQUATION DE MATHIEU

Les fonctions de Mathieu que l'on a désignées aussi sous le nom des Fonctions du cylindre elliptique ont été définies par Émile Mathieu en 1868. Dans son mémoire intitulé : « Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique » (*J. de Liouv.*, XIII, 1868, p. 137) il a été conduit à leur équation en étudiant les mouvements d'une membrane élastique de forme elliptique.

On sait que ce problème se réduit en dernière analyse à la résolution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{1}$$

où V représente l'élongation du point (x, y), t le temps et c la vitesse de propagation définie par les conditions physiques du problème.

La méthode usuelle de la résolution consiste à ramener l'étude de l'équation aux dérivés partielles à trois variables (1) à l'étude d'équations différentielles ordinaires à une variable. A cet effet, on élimine d'abord la variable t, soit en supposant que le phénomène est sinusoïdal, soit en se donnant la loi de la vibration en un point de la membrane. Dans les deux cas on est ramené à chercher une solution particulière de (1) de la forme

$$V = U(x, y)\, e^{pt} \tag{2}$$

où p sera considéré comme une constante. Le facteur e^{pt} dépendant du temps, disparaît et l'équation (1) reçoit une forme plus simple

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p^2}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{3}$$

où ne figurent que les deux variables d'espace (x, y).

C'est ici qu'interviennent les conditions de symétrie. Les coordonnées cartésiennes ne sont pas, en général, compatibles avec la symétrie du problème. Il faut, par conséquent, introduire un système de coordonnées curvilignes qui permettraient d'exprimer les conditions aux limites du problème d'une façon la plus simple. Dans le cas où le problème est caractérisé par une symétrie elliptique, il est commode de poser

$$z = \zeta + \frac{h^2}{4\zeta} \tag{4}$$

avec

$$z = x + yi$$

$$\zeta = \rho e^{\omega i}.$$

On en tire

$$\left\{\begin{aligned} x &= \left(\rho + \frac{h^2}{4\rho}\right)\cos\omega \\ y &= \left(\rho - \frac{h^2}{4\rho}\right)\sin\omega. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

On aperçoit que les courbes coordonnées $\rho = C^{te}$ sont des ellipses homofocales dont les longueurs des demi-axes sont

$$\rho + \frac{h^2}{4\rho} \qquad \text{et} \qquad \rho - \frac{h^2}{4\rho}$$

h étant une distance focale. Les courbes $\omega = C^{te}$ sont des hyperboles homofocales

$$\frac{x^2}{h^2\cos^2\omega} - \frac{y^2}{h^2\sin^2\omega} = 1$$

Avec les nouvelles variables définies par (5), l'équation (3) s'écrit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = \frac{p^2}{c^2}\left(1 - \frac{h^2}{2\rho^2}\cos 2\omega + \frac{h^4}{16\rho^4}\right). \tag{6}$$

Cherchons des solutions à variables séparées en posant

$$U = R\left(\frac{ic\rho}{p}\right)\Omega(\omega).$$

Il est aisé de voir que les fonctions $R\left(\frac{ic\rho}{p}\right)$ et $\Omega(\omega)$ satisfont aux équations différentielles

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{u}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^4}\right)R = 0$$

$$\text{(M)} \qquad \frac{d^2\Omega}{d\omega^2} + (u - 2z\cos 2\omega)\Omega = 0$$

où on a posé pour abréger

$$\frac{p^2h^2}{2c^2} = -2z$$

z est donc déterminé par les conditions physiques du problème. Au contraire, u désigne une constante arbitraire qui s'introduit naturellement au cours de la séparation des variables. Elle n'a pas de signification physique immédiate et doit être considérée comme une inconnue du problème.

Notons que l'équation (M) se transforme en (B), si l'on pose

$$\text{(8)} \qquad \rho = \sqrt{z}\,e^{\omega i}.$$

Dans le cas particulier, où $h = z = 0$ le système (5) définit les coordonnées polaires, la famille des ellipses homofocales $\rho = C^{te}$ devient une famille de cercles concentriques de rayon ρ et la famille des hyperboles $\omega = C^{te}$ dégénère en un faisceau de droites issues de l'origine. L'équation (B) perd le terme en ρ^{-4}.

$$\text{(B}_0\text{)} \qquad \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{u}{\rho^2}\right)R = 0$$

et définit les fonctions de Bessel, tandis que l'équation (M) devient

$$\text{(M}_0\text{)} \qquad \frac{d^2\Omega}{d\omega^2} + u\Omega = 0$$

et admet comme solutions

$$\cos\sqrt{u}\,\omega \qquad \text{et} \qquad \sin\sqrt{u}\,\omega.$$

Dans le cas d'un problème physique, tel que l'étude des vibrations d'une membrane, il est clair que $\Omega(\omega)$ doit être une fonction périodique de ω admettant 2π comme période. C'est cette condition de périodicité qui permet de donner une valeur convenable à la constante u. Ainsi, dans le système (B_0, M_0) on doit poser

$u = \nu^2$, ν étant un entier quelconque. Dans ces conditions, aux solutions périodiques de (M_0) correspondent les intégrales uniformes de (B_0) : Fonctions de Bessel d'ordre entier.

Si l'on effectue un changement de variable défini par

$$z = e^{\omega i} \qquad \text{ou} \qquad \rho = \sqrt{z}\, x$$

les équations (B) et (M) se transforment en une même équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(z - \frac{u}{x^2} + \frac{z}{x^4}\right)y = 0$$

et le problème se réduit à la recherche des intégrales uniformes de cette équation.

L'équation (E), comme on constate aisément, est invariante par le changement de x en $-x$ ou en $\frac{1}{x}$.

Transformons-la en posant

$$s = x^2.$$

Il vient

$$\text{(E')} \qquad \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{s}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{s} - \frac{u}{s^2} + \frac{z}{s^3}\right)y = 0.$$

X

ÉTUDE DE L'ÉQUATION (E). FONCTIONS DE MATHIEU

Nous allons chercher une solution formelle de l'équation (E′) sous la forme

$$y = s^{\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n s^n.$$

On démontre facilement que les coefficients A_n satisfont à la formule de récurrence suivante

$$(1) \qquad \begin{cases} zA_{n-1} + [4(n+\mu)^2 - u]A_n + zA_{n+1} = 0 \\ n = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

L'intégrale de l'équation (E) s'écrit

$$(2) \qquad y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^{2n+2\mu}.$$

Pour que cette fonction soit uniforme, il faut que 2μ soit entier. Si cet entier est pair, on obtiendra une solution paire, dans le cas contraire on aura une solution impaire.

Considérons séparément ces deux cas.

a) *Solutions paires.*

Posons $\mu = 0$. L'intégrale (2) devient

$$(3) \qquad y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^{2n}.$$

L'équation (E) étant invariante par rapport au changement de x en $\frac{1}{x}$, nous aurons une nouvelle intégrale

$$(4) \qquad \bar{y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^{-2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{-n} x^{2n}.$$

A l'aide de ces deux solutions formons deux autres

$$y_1 = \frac{y + \bar{y}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n + A_{-n}}{2} x^{2n} \tag{5}$$

$$y_2 = \frac{y - \bar{y}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n - A_{-n}}{2} x^{2n}. \tag{6}$$

La première est caractérisée par le fait que les coefficients des termes en x^{2n} et en $\frac{1}{x^{2n}}$ sont les mêmes, dans la seconde solution ils sont de signe contraire.

Examinons d'abord l'expression (5) qui se transforme de la façon suivante

$$y_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{A_n + A_{-n}}{2} x^{2n} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n + A_{-n}}{2} x^{2n}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n + A_{-n}}{2}\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right).$$

Maintenant, nous n'avons à considérer que les valeurs positives de n. Posons

$$A_n + A_{-n} = X_{2n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

En ce qui concerne le premier terme, on apercevra dans la suite qu'il est commode de poser

$$A_0 = \frac{X_0}{\sqrt{2}}.$$

Dans ces conditions, l'intégrale considérée devient

$$y_1 = \frac{X_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}}{2}\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right). \tag{7}$$

Les coefficients X_{2n} peuvent se calculer de proche en proche à l'aide d'un système récurrent que l'on trouve facilement à partir de la relation générale (1). Ainsi, on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} -uX_0 + z\sqrt{2}X_2 = 0 \\ z\sqrt{2}X_0 + (4 - u)X_2 + zX4 = 0 \\ zX_{2n-2} + (4n^2 - u)X_{2n} + zX_{2n+2} = 0 \\ n = 2, 3, \cdots \end{array}\right. \tag{8}$$

Passons à la seconde solution paire (6)

$$y_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{A_n - A_{-n}}{2} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n - A_{-n}}{2} x^{2n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n - A_{-n}}{2} \left(x^{2n} - \frac{1}{x^{2n}} \right)$$

ou

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{2n}}{2} \left(x^{2n} - \frac{1}{x^{2n}} \right) \tag{9}$$

si l'on pose

$$A_n - A_{-n} = Y_{2n}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Les coefficients Y_{2n} vérifient le système récurrent

$$\left\{ \begin{array}{c} (4 - u)Y_2 + zY_4 = 0 \\ zY_{2n-2} + (4n^2 - u)Y_{2n} + zY_{2n+2} = 0 \\ n = 2, 3, \cdots \end{array} \right. \tag{10}$$

qui se déduit de la relation générale (1).

b) *Solutions impaires.*

En posant $\mu = \frac{1}{2}$, dans (2) on obtient

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^{2n+1}. \tag{11}$$

Remplaçons x par $\frac{1}{x}$. Vu l'invariance de (E) par rapport à ce changement on obtient une autre intégrale

$$\bar{y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^{-2n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{-n-1} x^{2n+1}. \tag{12}$$

A l'aide de ces deux intégrales nous pouvons former deux autres

$$y_3 = \frac{y + \bar{y}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n + A_{-n-1}}{2} x^{2n+1} \tag{13}$$

$$y_4 = \frac{y - \bar{y}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n - A_{-n-1}}{2} x^{2n+1}. \tag{14}$$

La première est caractérisée par le fait que les coefficients des termes en x^{2n+1} et en $\frac{1}{x^{2n+1}}$ sont les mêmes, dans la seconde ils sont de signe contraire.

La première de ces séries se transforme de la façon suivante :

$$y_3 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{A_n + A_{-n-1}}{2} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n + A_{-n-1}}{2} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n} + A_{-n-1}}{2} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n + A_{-n-1}}{2} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n + A_{-n-1}}{2} \left(x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}} \right)$$

ou

$$y_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_{2n+1}}{2} \left(x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}} \right) \tag{15}$$

en posant

$$A_n + A_{-n-1} = X_{2n+1}.$$

Les coefficients X_{2n+1} vérifient le système récurrent

$$\left\{ \begin{array}{c} (1 - u + z)X_1 + zX_3 = 0 \\ zX_{2n-1} + [(2n + 1)^2 - u]X_{2n+1} + zX_{2n+3} = 0. \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{array} \right. \tag{16}$$

Enfin, transformons de la même manière l'intégrale (14)

$$y_4 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{A_n - A_{-n-1}}{2} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n - A_{-n-1}}{2} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n} - A_{n-1}}{2} x^{-2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n - A_{-n-1}}{2} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n - A_{-n-1}}{2} \left(x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}} \right)$$

ou

$$y_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_{2n+1}}{2} \left(x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}} \right) \tag{17}$$

avec

$$Y_{2n+1} = A_n - A_{-n-1}.$$

Ces coefficients vérifient le système récurrent

$$(18) \qquad \begin{cases} (1 - u - z)Y_1 + zY_3 = 0 \\ zY_{2n+1} + [(2n+1)^2 - u]Y_{2n+1} + zY_{2n+3} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Ainsi, nous avons défini quatre types de solutions formelles uniformes de l'équation (E). Leurs expressions sont données par les séries (7), (9), (15), et (17). Les coefficients de chaque terme de ces séries satisfont aux systèmes récurrents linéaires (8), (10), (16) et (18) qui sont du type étudié dans la première partie de ce mémoire.

Les séries formelles ainsi construites sont en général divergentes. Elles ne deviennent convergentes que pour certaines valeurs de u fonctions de z. Nous désignerons ces fonctions par $u_\nu(z)$ lorsqu'il s'agit d'une solution paire et par $\rho_\nu(z)$ lorsqu'il s'agit d'une solution impaire. Nous avons déjà dit qu'habituellement ces solutions sont désignées par $ce_\nu(\omega, z)$ et par $se_\nu(\omega, z)$. Pour passer aux solutions de l'équation de Mathieu, il suffit de poser $x = e^{\omega i}$ dans (7), (9), (15) et (17). On obtiendra ainsi quatre types de solutions de l'équation (M).

$$(19) \qquad ce_{2\nu}(\omega, z) = \frac{X_0^{2\nu}}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}^{2\nu} \cos 2n\omega$$

$$(20) \qquad ce_{2\nu+1}(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n+1}^{2\nu+1} \cos (2n+1)\omega$$

$$(21) \qquad se_{2\nu}(\omega, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}^{2\nu} \sin 2n\omega$$

$$(22) \qquad se_{2\nu+2}(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n+1}^{2\nu+1} \sin (2n+1)\omega$$

$$\nu = 1, 2, 3, \cdot$$

Par exception, pour $\nu = 0$ nous poserons

$$(19') \qquad \frac{ce_0(\omega, z)}{\sqrt{2}} = \frac{X_0^0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}^0 \cos 2n\omega.$$

Enfin, pour définir complètement ces fonctions, nous demandons avec Goldstein que le système de fonctions

$$\frac{ce_0(\omega, z)}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{se_1(\omega, z)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{ce_1(\omega, z)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{se_2(\omega, z)}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots$$

soit normé dans l'intervalle $(0,2\pi)$, où il est orthogonal. En d'autres termes, on doit avoir, quelle que soit la valeur de z.

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} [ce_0(\omega, z)]^2 d\omega = 1 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} [ce_\nu(\omega, z)]^2 d\omega = 1 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} [se_\nu(\omega, z)]^2 d\omega = 1 \end{cases} \qquad (\nu \neq 0)$$

Les coefficients des séries trigonométriques (19) à (20) doivent satisfaire aux conditions

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(X_{2n}^{2\nu}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(X_{2n+1}^{2\nu+1}\right)^2 = 1 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(Y_{2n+1}^{2\nu+1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_{2n}^{\nu}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Rappelons que ces conditions remplacent l'ancienne définition de Mathieu-Whittaker

$$X_\nu^\nu = Y_\nu^\nu = 1.$$

XI

FONCTIONS DE MATHIEU COMME CAS PARTICULIERS DES FONCTIONS θ ATTACHÉES AUX SYSTÈMES RÉCURRENTS

Considérons les fonctions de Mathieu du premier type

$$ce_{2\nu}(\omega, z) = \frac{X_0^{2\nu}}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}^{2\nu} \cos 2n\omega. \tag{1}$$

Pour $\nu = 0$ nous avons posé

$$\frac{ce_0(\omega, z)}{\sqrt{2}} = \frac{X_0^0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}^0 \cos 2n\omega. \tag{1'}$$

Cette façon d'écrire permet de passer aux fonctions normées

$$\frac{ce_0(\omega, z)}{\sqrt{2\pi}} = X_0^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}^0 \frac{\cos 2n\omega}{\sqrt{\pi}} \tag{2}$$

$$\frac{ce_{2\nu}(\omega, z)}{\sqrt{2\pi}} = X_0^{2\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}^{2\nu} \frac{\cos 2n\omega}{\sqrt{\pi}}. \tag{2'}$$

En ayant recours aux notations matricielles posons

$$\varphi(\omega) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \dfrac{\cos 2\omega}{\sqrt{\pi}} \\ \dfrac{\cos 4\omega}{\sqrt{\pi}} \\ \cdots\cdots \end{matrix} \right\|, \qquad \theta(\omega, z) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{ce_0(\omega, z)}{\sqrt{2\pi}} \\ \dfrac{ce_2(\omega, z)}{\sqrt{\pi}} \\ \dfrac{ce_4(\omega, z)}{\sqrt{\pi}} \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right\|$$

Et

$$\mathcal{X} = \left\| \begin{matrix} X_0^0 & X_2^0 & X_4^0 & \cdots \\ X_0^2 & X_2^2 & X_4^2 & \cdots \\ X_0^4 & X_2^4 & X_4^4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

Le système des fonctions (2′) — (2) devient

$$\theta(\omega, z) = \mathcal{X}(z) \cdot \varphi(\omega). \tag{3}$$

La matrice $\mathcal{X}(z)$ résulte du système récurrent linéaire à trois termes

$$\left\{ \begin{array}{c} -uX_0 + z\sqrt{2}\,X_2 = 0 \\ z\sqrt{2}\,X_0 + (4-u)X_2 + zX_4 = 0 \\ zX_{2n-2} + (4n^2-u)X_{2n} + zX_{2n+2} = 0 \\ n = 2, 3, \cdots \end{array} \right. \tag{4}$$

Il est de la forme étudiée au § 5 avec

$$\begin{array}{lll} A_0 = 0, & A_1 = 4, \cdots\cdots & A_n = 4n^2 \\ B_0 = z\sqrt{2}, & B_1 = z, \cdots\cdots & B_n = z. \end{array}$$

En ce qui concerne la suite $[e_n]$ nous pouvons poser

$$e_0 = 1, \qquad e_n = A_n = 4n^2, \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

car la suite $[A_n]$ est numérique. On aura

$$\frac{A_n}{e_n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{B_n}{e_n} = \frac{z}{4n^2}.$$

Les conditions imposées aux suites $[A_n]$ et $[B_n]$ sont donc remplies. Les séries formelles (1′) — (1) convergent chaque fois quand u et z satisfont à l'équation $F_0(u, z) = 0$. La fonction $F_0(u, z)$ est dans le cas actuel une fonction entière de u et de z. Son expression est

$$F_0(u, z) = \left| \begin{matrix} -u & \frac{z}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & 1-\frac{u}{2^2} & \frac{z}{2\cdot 4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{z}{2\cdot 4} & 1-\frac{u}{4^2} & \frac{z}{4\cdot 6} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{z}{4\cdot 6} & 1-\frac{u}{6^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right| \tag{5}$$

L'équation matricielle, à laquelle satisfait la matrice est

$$\mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B}z) = \mathcal{U}\mathcal{X}. \tag{6}$$

Nous mettons ainsi en évidence la variable z qui joue ici le rôle du paramètre auxiliaire λ envisagé dans le § 8. Les matrices numériques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 4^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 6^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

A l'équation (6) il faut adjoindre la condition

$$\mathcal{X}\mathcal{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E}.$$

qui est une traduction en langage matriciel de la définition de Goldstein.

Passons au second type de fonctions de Mathieu

$$ce_{2\nu+1}(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{X}_{2n+1}^{2\nu+1} \cos (2n + 1)\omega. \tag{7}$$

Les coefficients $\mathrm{X}_{2n+1}^{2\nu+1}$ satisfont au système récurrent

$$\left\{ \begin{array}{c} (1 + z - u)\mathrm{X}_1 + z\mathrm{X}_3 = 0 \\ z\mathrm{X}_{2n-1} + [(2n + 1)^2 - u]\, \mathrm{X}_{2n+1} + z\mathrm{X}_{2n+3} = 0 \\ n = 1, 2, \cdots \end{array} \right. \tag{8}$$

Dans le cas présent les systèmes orthogonaux $\varphi(\omega)$ et $\theta(\omega, z)$ sont

$$\varphi(\omega) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\cos \omega}{\sqrt{\pi}} \\ \dfrac{\cos 3\omega}{\sqrt{\pi}} \\ \cdots\cdots \end{Vmatrix}, \qquad \theta(\omega, z) = \begin{Vmatrix} \dfrac{ce_1(\omega, z)}{\sqrt{\pi}} \\ \dfrac{ce_3(\omega, z)}{\sqrt{\pi}} \\ \cdots\cdots \end{Vmatrix}$$

Le système récurrent (8) satisfait encore aux conditions imposées. On peut poser $e_n = \mathrm{A}_n$, de sorte que

$$\frac{\mathrm{B}_n}{e_n} = \frac{z}{(2n + 1)^2}.$$

La suite (7) converge lorsque u est un zéro d'une fonction entière de u et de z que nous désignerons par $G_0(\omega, z)$ pour la distinguer de la fonction $F_0(\omega, z)$ relative aux fonctions du premier type. L'expression de $G_0(\omega, z)$ est

$$(9) \qquad G_0(u, z) = \begin{vmatrix} 1+z-u & z & 0 & 0 & \cdots \\ z & 1-\frac{u}{3^3} & \frac{z}{1\cdot 3} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{z}{1\cdot 3} & 1-\frac{u}{5^2} & \frac{z}{3\cdot 5} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{z}{3\cdot 5} & 1-\frac{u}{7^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

La matrice

$$\mathcal{X} = \begin{Vmatrix} X_1^1 & X_3^1 & X_5^1 & \cdots \\ X_1^3 & X_3^3 & X_5^3 & \cdots \\ X_1^5 & X_3^5 & X_5^5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

satisfait à l'équation matricielle

$$(6) \qquad \mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B}z) = \mathcal{U}\mathcal{X}$$

ayant toujours la même forme. Mais les matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont dans le cas présent :

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 7^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

Les fonctions de Mathieu du troisième groupe sont

$$(10) \qquad se_{2\nu}(\omega, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}^{2\nu} \sin 2n\omega.$$

Les coefficients de ces séries sont définis par le système récurrent

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{c} (1-u)Y_2 + zY_4 = 0 \\ zY_{2n-2} + (4n^2 - u)Y_{2n} + zY_{2n+2} = 0 \\ n = 2, 3, \cdots \end{array} \right.$$

possédant les mêmes propriétés que les systèmes (4) et (8). Les variables u et z doivent satisfaire à l'équation $F_1(\omega, z) = 0$, où F_1 est une fonction entière de u et de z dont l'expression est

$$(12) \qquad F_1(u, z) = \begin{vmatrix} 1-\frac{u}{2^2} & \frac{z}{2\cdot 4} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{z}{2\cdot 4} & 1-\frac{u}{4^2} & \frac{z}{4\cdot 6} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{z}{4\cdot 6} & 1-\frac{u}{6^2} & \frac{z}{6\cdot 8} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{z}{6\cdot 8} & 1-\frac{u}{8^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

On aperçoit que ce déterminant est le mineur relatif au premier élément du déterminant (5). Les fonctions $F_0(u, z)$ et $F_1(u, z)$ sont liées par la relation

$$(13) \qquad F_0(u, z) = -uF_1(u, z) - \frac{z^2}{2} F_2(u, z)$$

les notations étant identiques à celles de la première partie. Si $z \neq 0$, les fonctions $F_0(u, z)$ et $F_1(u, z)$, comme nous avons vu, ne peuvent pas s'annuler en même temps. Ceci rend clair le fait (connu depuis 1922, Ince, *Proc. Camb. Ph. S.*, t. XXI) que l'équation de Mathieu ne peut pas admettre pour la même valeur de z non nulle deux solutions des types $ce_{2\nu}$ et $se_{2\nu}$. La matrice de coefficients des séries (10)

$$\mathcal{X} = \begin{Vmatrix} Y_2^2 & Y_4^2 & Y_6^2 & \cdots \\ Y_2^4 & Y_4^4 & Y_6^4 & \cdots \\ Y_2^6 & Y_4^6 & Y_6^6 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

satisfait à l'équation matricielle

$$(14) \qquad \mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B}z) = \mathcal{U}\mathcal{X}.$$

Les expressions des matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 2^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 4^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 6^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 8^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}; \qquad \mathcal{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

Considérons enfin les fonctions de 4e type

$$(15) \qquad se_{2\nu+1}(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n+1}^{2\nu+1} \sin(2n+1)\omega$$

avec le système récurrent

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1 - z - u)Y_1 + zY_3 = 0 \\ zY_{2n-1} + &[(2n + 1)^2 - u]Y_{2n+1} + zY_{2n+3} = 0 \\ &n = 1.\ 2, \cdots \end{aligned}\right.$$

Il ne diffère que par le signe de z dans la première parenthèse du système récurrent (8). Par conséquent, la fonction entière de u et de z qui fournit les valeurs caractéristiques de u s'obtient de $G_0(u, z)$ en remplaçant z par $-z$

$$(17)\qquad G_0(u, -z) = \begin{vmatrix} 1 - z - u & -z & 0 & \cdots \\ -z & 1 - \frac{u}{3^2} & -\frac{z}{1 \cdot 3} & \cdots \\ 0 & -\frac{z}{1 \cdot 3} & 1 - \frac{u}{6^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Les deux équations

$$G_0\,(u, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad G_0(u, -z) = 0$$

ne peuvent avoir de racines communes, si $z \neq 0$. En effet, en désignant par G_1, G_2, ... les déterminants infinis partiels, mineurs de $G_0(u, z)$, on aurait

$$G_0(u, z) = (1 - u + z)G_1(u, z) - z^2G_2(u, z) = 0$$
$$G_0(u, -z) = (1 - u - z)G_1(u, z) - z^2G_2(u, z) = 0$$

et comme $G_1(u, z)$ et $G_2(u, z)$ ne peuvent pas, en général, s'annuler en même temps, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} 1 - u + z & z^2 \\ 1 - u - z & z^2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui n'est possible que si $z = 0$.

La matrice composée des coefficients des séries (15) satisfait à l'équation matricielle toujours de la même forme avec

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 7^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE MATHIEU NORMEES EN SÉRIES

Le système d'équations matricielles

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B}z) = \mathcal{U}\mathcal{X} \\ \mathcal{X}\mathcal{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E} \end{cases}$$

est un cas particulier du système résolu au § 8. La variable z joue ici le rôle du paramètre auxiliaire λ. On peut développer les matrices $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$ en séries procédant suivant les puissances de z

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{X} = \mathrm{E} + \mathcal{X}_1 z + \mathcal{X}_2 z^2 + \cdots \\ \mathcal{U} = \mathcal{A} + \mathcal{U}_1 z + \mathcal{U}_2 z^2 + \cdots \end{cases}$$

en se servant des formules générales de récurrence.

D'ailleurs, pour le calcul effectif des matrices $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$ on n'a nullement besoin de les considérer en bloc. Le calcul d'une fonction isolée est possible. Reprenons, en effet, les formules (20) du § 8

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathcal{U}_n = \operatorname{diag} \mathcal{C}_{n-1} \\ \mathcal{X}_n = \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}_{n-1}} + \dfrac{1}{2} \operatorname{diag} \mathcal{D}_{n-1}. \end{cases}$$

Considérons une seule ligne de chacune de ces expressions, la ν^e ligne relative à la fonction $\theta_\nu(\omega, z)$ qu'on veut calculer. Désignons la ν^e ligne de la matrice $\mathcal{X}_n$ par $\xi^{(n)}$

$$\xi^{(n)} = \left\| \xi_0^{(n)}, \ \xi_1^{(n)}, \ \xi_2^{(n)}, \ \ldots \xi_\nu^{(n)} \ldots \right\|$$

celle de la matrice $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ par h

$$h = \left\| \frac{1}{\mathrm{A}_\nu - \mathrm{A}_0}, \ \frac{1}{\mathrm{A}_\nu - \mathrm{A}_1}, \ \cdots \frac{1}{\mathrm{A}_\nu - \mathrm{A}_{\nu-1}}, \ 0, \ \frac{1}{\mathrm{A}_\nu - \mathrm{A}_{\nu+1}}, \cdots \right\|$$

et celle de $\mathcal{C}_{n-1}$ par $\gamma^{(n-1)}$

$$\gamma^{(n-1)} = \left\| \gamma_0^{(n-1)}, \gamma_1^{(n-1)}, \cdots \gamma_\nu^{(n-1)} \right\|.$$

De la diagonale de $\mathcal{D}_{n-1}$ il ne restera que le seul ν^e élément que nous désignerons par δ_{n-1}. Enfin, en ce qui concerne les matrices diagonales $\mathcal{U}_n$, un seul de leurs éléments interviendra. Nous le désignerons par u_n en omettant l'indice de l'ordre ν qui reste toujours le même. Les formules générales (3) seront remplacées par les suivantes

$$(4) \qquad \begin{cases} u_n = \gamma_\nu^{(n-1)} \\ \xi_i^{(n)} = h_i \gamma_i^{(n-1)} & (i = 0, 1, \cdots \nu-1, \nu+1 \cdots) \\ \xi_\nu^{(n)} = \frac{1}{2} \delta_{n-1}. \end{cases}$$

Il nous reste encore à calculer δ_{n-1} et $\gamma^{(n-1)}$. A cet effet, il suffit d'isoler la ν^e ligne des expressions

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathcal{C}_{n-1} = \mathcal{X}_{n-1}\mathcal{B} - \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{U}_k \mathcal{X}_{n-k} \\ \mathcal{D}_{n-1} = - \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{X}_k^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{n-k}. \end{cases}$$

on aura alors immédiatement

$$(6) \qquad \begin{cases} \gamma^{(n-1)} = \xi^{(n-1)}\mathcal{B} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \xi^{(n-k)} \\ \delta_{n-1} = - \sum_{k=1}^{n-1} \xi^{(n)} \xi^{(n-k)\mathrm{T}}. \end{cases}$$

Pour illustrer d'un exemple ce procédé de calcul, développons la fonction $\frac{ce_0(\omega, z)}{\sqrt{2}}$, pour laquelle

$$u_0 = 0 \, ; \qquad \xi^{(0)} = \| 1, \ 0, \ 0, \ 0, \ \cdots \|$$

et

$$h = \left\| 0, \ -\frac{1}{4}, \ -\frac{1}{16}, \ -\frac{1}{36}, \cdots \right\|.$$

Commençons par établir une règle de multiplication d'une matrice ξ quelconque par $\mathcal{B}$. En faisant ce produit on obtient

$$\| \xi_0 \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \cdots \| \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdot\cdot \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{Vmatrix} =$$

$$= \| \xi_1\sqrt{2}, \quad \xi_0\sqrt{2} + \xi_2, \quad \xi_1 + \xi_3, \quad \xi_2 + \xi_4, \cdots \| .$$

Pour calculer δ_{n-1}, il faut faire les produits $\xi^{(k)}\xi^{(n-k)\tau}$, c'est-à-dire, former les sommes des produits des éléments d'après le schéma suivant

$$\xi'\xi^{\tau} = \| \xi_0' \quad \xi_1' \quad \xi_2' \cdots \| \cdot \begin{Vmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \end{Vmatrix} =$$

$$= \xi_0'\xi_0 + \xi_1'\xi_1 + \xi_2'\xi_2 + \cdots$$

On a vu que $\mathcal{D}_0 = 0$, donc $\delta_0 = 0$ et, par suite, $\xi_0^{(1)} = 0$.

On calcule ensuite

$$\gamma^{(0)} = \xi^{(0)}\mathcal{B} = \| 0, \quad \sqrt{2}, \quad 0, \quad 0, \cdots \|$$

d'où

$$u_1 = \gamma_0^{(0)} = 0$$

et

$$\xi^{(1)} = \left\| 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2^2}, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\| .$$

En faisant la somme des carrés des éléments de cette matrice on obtient

$$-\delta_1 = \xi^{(1)}\xi^{(1)\tau} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2^2}\right)^2 = \frac{1}{2^3}$$

et

$$\gamma^{(1)} = \xi^{(1)}\mathcal{B} = \left\| -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2^2}, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\| .$$

Par conséquent

$$\xi^{(2)} = \left\| -\frac{1}{2^4}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2^6}, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\|$$

et

$$u_2 = -\frac{1}{2}; \qquad \xi_0^{(2)} = \frac{1}{2}\delta_1 = -\frac{1}{2^4}.$$

Voici la suite de ce calcul clair sans d'autres explications

$$\gamma^{(2)} = \xi^{(2)}\mathcal{B} - u_1\xi^{(2)} - u_2\xi^{(1)} = \xi^{(2)}\mathcal{B} + \frac{1}{2}\xi^{(1)} =$$

$$= \left\| 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2^4} + \frac{\sqrt{2}}{2^6}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2^6}, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\| +$$

$$+ \left\| 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2^3}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\| =$$

$$= \left\| 0, \quad -\frac{11\sqrt{2}}{2^6}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2^6}, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\|;$$

$$-\delta_2 = 2\xi^{(1)}\xi^{(2)\mathrm{T}} = 0$$

$$u_3 = 0$$

$$\xi^{(3)} = \left\| 0, \quad \frac{11\sqrt{2}}{2^8}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2^8 \cdot 3}, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\|$$

$$\gamma^{(3)} = \xi^{(3)}\mathcal{B} - u_1\xi^{(3)} - u_2\xi^{(2)} - u_3\xi^{(1)} = \xi^{(3)}\mathcal{B} + \frac{1}{2}\xi^{(2)}$$

$$= \left\| \frac{11}{2^7}, \quad 0, \quad \frac{11\sqrt{2}}{2^8} - \frac{\sqrt{2}}{2^8 \cdot 3^2}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2^8 \cdot 3^2}, \quad 0, \cdots \right\|$$

$$+ \left\| -\frac{1}{2^5}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2^7}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\|$$

$$= \left\| \frac{7}{2^7}, \quad 0, \quad \frac{29\sqrt{2}}{2^6 \cdot 3^2}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2^8 \cdot 3^2}, \quad 0, \cdots \right\|;$$

$$-\delta_3 = 2\xi^{(1)}\xi^{(3)\mathrm{T}} + \xi^{(2)\mathrm{T}} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2^4}\right)\frac{11\sqrt{2}}{2^8} + \left(-\frac{1}{2^4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2^6}\right)^2 = -\frac{79}{2^{11}};$$

$$u^4 = \frac{7}{2^7}$$

$$\xi^{(4)} = \left\| \frac{79}{2^{12}}, \quad 0, \quad -\frac{29\sqrt{2}}{2^{10} \cdot 3^2}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2^{14} \cdot 3^2}, \quad 0, \quad 0, \cdots \right\|$$

Composons maintenant un tableau des coefficients calculés

$$\begin{array}{r} \xi^{(0)} = \\ \xi^{(1)} = \\ \xi^{(2)} = \\ \xi^{(3)} = \\ \xi^{(4)} = \\ \\ \end{array}
\left\| \begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\sqrt{2}}{2^2} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2^4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2^6} & 0 & 0 \\
0 & \frac{11\sqrt{2}}{2^8} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2^8 \cdot 3^2} & 0 \\
\frac{79}{2^{12}} & 0 & -\frac{29\sqrt{2}}{2^{10} \cdot 3^2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2^{14} \cdot 3^2} \\
\hline
\frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos 2\omega, & \cos 4\omega, & \cos 6\omega, & \cos 8\omega
\end{array} \right\|
\begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^1 \\ \cdots \\ \cdots \end{array}$$

Nous avons écrit à droite les puissances de z et en bas les fonctions par lesquelles il faut multiplier ces coefficients pour obtenir la fonction $\frac{ce_0(\omega, z)}{\sqrt{2}}$. Voici comment se présente cette série

$$\frac{ce_0(\omega,z)}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{z^2}{2^4} + \frac{79}{2^{12}} z^4\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$- \left(\frac{\sqrt{2}}{2^2} z - \frac{11\sqrt{2}}{2^8} z^3\right) \cos 2\omega$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2^6} z^2 - \frac{29\sqrt{2}}{2^{10}.3^2} z^4\right) \cos 4\omega$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{2^8.3^2} z^3 \cos 6\omega + \frac{\sqrt{2}}{2^{14}.3^2} z^4 \cos 8\omega.$$

Ce procédé de calcul permet d'aller plus vite et plus loin que ne le permettaient les méthodes de Mathieu et de Whittaker. De plus, on obtient les fonctions normées.

Voici quelques expressions obtenues en appliquant ce procédé.

$$ce_0(\omega,z) = \left(1 - \frac{z^2}{2^4} + \frac{79}{2^{12}} z^4 - \frac{36919}{2^{16}.3^4} z^6 + \frac{58304143}{2^{28}.3^4} z^8\right)$$
$$- \left(\frac{z}{2} - \frac{11}{2^7} z^3 + \frac{1891}{2^{13}.3^2} z^5 - \frac{1521691}{2^{21}.3^4} z^7\right) \cos 2\omega$$
$$+ \left(\frac{z^2}{2^5} - \frac{29}{2^9.3^2} z^4 + \frac{8941}{2^{19}.3^2} z^6 - \frac{11239489}{2^{23}.3^4.5^2} z^8\right) \cos 4\omega$$
$$- \left(\frac{z^3}{2^7.3^2} - \frac{55}{2^{15}.3^2} z^5 + \frac{26641}{2^{21}.3^2.5^2} z^7\right) \cos 6\omega$$
$$+ \left(\frac{z^4}{2^{13}.3^2} - \frac{89}{2^{17}.3^2.5^2} z^6 + \frac{62299}{2^{25}.3^4.5^2} z^8\right) \cos 8\omega$$
$$- \left(\frac{z^5}{2^{15}.3^2.5^2} - \frac{131}{2^{21}.3^4.5^2} z^7\right) \cos 10\omega$$
$$+ \left(\frac{z^6}{2^{19}.3^4.5^2} - \frac{181}{2^{23}.3^4.5^2.7^2} z^8\right) \cos 12\omega$$
$$- \frac{z^7}{2^{21}.3^4.5^2.7^2} \cos 14\omega + \frac{z^8}{2^{29}3^4.5^2.7^2} \cos 16\omega ;$$

$$u_0 = -\frac{1}{2} z^2 + \frac{7}{2^7} z^4 - \frac{29}{2^8.3^2} z^6 + \frac{618183}{2^{21}.3^4} z^8 - 0(z^{10}).$$

$$\begin{aligned} se_1(\omega, z) = {} & \left(1 - \frac{z^2}{2^7} + \frac{z^3}{2^9} - \frac{37}{2^{15}.3^2}z^4 - \frac{121}{2^{16}.3^2}z^5 + \frac{8105}{2^{22}.3^4}z^6\right) \sin \omega \\ & - \left(\frac{z}{2^3} - \frac{z^2}{2^6} - \frac{z^3}{2^{10}.3} + \frac{49}{2^{13}.3^2}z^4 - \frac{317}{2^{18}.3^2}z^5 - \frac{103}{2^{21}.3^3}z^6\right) \sin 3\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^6.3} - \frac{z^3}{2^7.3^2} + \frac{41}{2^{17}.3^2}z^5 - \frac{731}{2^{21}.3^2.5}z^6\right) \sin 5\omega \\ & - \left(\frac{z^3}{2^{10}.3^2} - \frac{z^4}{2^{14}.3} + \frac{z^5}{2^{17}.3^2.5} + \frac{1137}{2^{21}.3^3.5^2}z^6\right) \sin 7\omega \\ & + \left(\frac{z^4}{2^{14}.3^2.5} - \frac{z^5}{2^{14}.3^2.5^2} + \frac{z^6}{2^{21}.3^3.5}\right) \sin 9\omega \\ & - \left(\frac{z^5}{2^{17}.3^3.5^2} - \frac{z^6}{2^{20}.3^4.5}\right) \sin 11\omega + \frac{z^6}{2^{20}.3^4.5^2.7} \sin 13\omega \end{aligned}$$

$$v_1(z) = 1 - z - \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^6} - \frac{z^4}{2^9.3} - \frac{11}{2^{12}.3}z^5 + \frac{49}{2^{16}.3^2}z^6$$

$$\begin{aligned} ce_1(\omega, z) = {} & \left(1 - \frac{z^2}{2^7} - \frac{z^3}{2^9} - \frac{37}{2^{15}.3^2}z^4 + \frac{121}{2^{16}.3^2}z^5 + \frac{8105}{2^{22}.3^4}z^6\right) \cos \omega \\ & - \left(\frac{z}{2^3} + \frac{z^2}{2^6} - \frac{z^3}{2^{10}.3} - \frac{49}{2^{13}.3^2}z^4 - \frac{317}{2^{18}\,3^2}z^5 + \frac{103}{2^{21}.3^3}z^6\right) \cos 3\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^6.3} + \frac{z^3}{2^7.3^2} - \frac{41}{2^{17}.3^2}z^5 - \frac{731}{2^{21}.3^2.5}z^6\right) \cos 5\omega \\ & - \left(\frac{z^3}{2^{10}.3^2} + \frac{z^4}{2^{14}.3} + \frac{z^5}{2^{17}.3^2.5} - \frac{1137}{2^{21}.3^3.5^8}z^6\right) \cos 7\omega \\ & + \left(\frac{z^4}{2^{14}.3^2.5} + \frac{z^5}{2^{14}.3^2.5^2} + \frac{z^6}{2^{21}.3^3.5}\right) \cos 9\omega \\ & - \left(\frac{z^5}{2^{17}.3^3.5^2} + \frac{z^6}{2^{20}.3^4.5}\right) \cos 11\omega + \frac{z^6}{2^{20}.3^4.5^2.7} \cos 13\omega. \end{aligned}$$

$$u_1(z) = 1 + z - \frac{z^2}{2^3} - \frac{z^3}{2^6} - \frac{z^4}{2^9.3} + \frac{11}{2^{12}.3^2}z^5 + \frac{49}{2^{16}.3^2}z^6 - \cdots$$

$$\begin{aligned} se_2(\omega, z) = {} & \left(1 - \frac{z^2}{2^5.3^2} + \frac{119}{2^{15}.3^4}z^4 - \frac{1003}{2^{21}.3^3.5^2}z^6\right) \sin 2\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^2.3} - \frac{z^3}{2^9.3} + \frac{1373}{2^{17}.3^5.5^2}z^5\right) \sin 4\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^7.3} - \frac{19}{2^{14}.3^2.5}z^4 + \frac{4043}{2^{21}.3^5.5^2}z^6\right) \sin 6\omega \\ & - \left(\frac{z^3}{2^9.3^2.5} - \frac{z^5}{2^{10}.3^4.5^2}\right) \sin 8\omega \\ & + \left(\frac{z^4}{2^{14}.3^3.5} - \frac{37}{2^{22}.3^5.7}z^6\right) \sin 10\omega \\ & - \frac{z^5}{2^{16}.3^3.5^2.7} \sin 12\omega + \frac{z^6}{2^{22}.3^4.5^2.7} \sin 14\omega. \end{aligned}$$

$$v_2(z) = 4 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 3} + \frac{5}{2^9 \cdot 3^3} z^4 - \frac{1751}{2^{18} \cdot 3^5 \cdot 5} z^6 + \cdots$$

$$\begin{aligned} ce_2(\omega, z) = & \left(\frac{z}{2^2} - \frac{49}{2^7 \cdot 3^2} z^3 + \frac{134855}{2^{17} \cdot 3^4} z^5\right) \\ & + \left(1 - \frac{19}{2^5 \cdot 3^2} z^2 + \frac{51191}{2^{15} \cdot 3^4} z^4 - \frac{88995077}{2^{21} \cdot 3^5 \cdot 5^2} z^6\right) \cos 2\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^2 \cdot 3} - \frac{11}{2^9 \cdot 3} z^3 + \frac{181193}{2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5} z^5\right) \cos 4\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^7 \cdot 3} - \frac{29}{2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5} z^4 + \frac{778189}{2^{22} \cdot 3^5 \cdot 5^2} z^6\right) \cos 6\omega \\ & - \left(\frac{z^3}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{23}{2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^2} z^5\right) \cos 8\omega \\ & + \left(\frac{z^4}{2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5} - \frac{247}{2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7} z^6\right) \cos 10\omega \\ & - \frac{z^5}{2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} \cos 12\omega + \frac{z^6}{2^{22} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7} \cos 14\omega. \end{aligned}$$

$$u_2(z) = 4 - \frac{5}{2^2 \cdot 3} z^2 - \frac{763}{2^9 \cdot 3^3} z^4 + \frac{1002401}{2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5} z^6.$$

$$\begin{aligned} ce_3(\omega, z) = & \left(\frac{z}{2^3} + \frac{z^2}{2^6} - \frac{z^3}{2^{12}} - \frac{21}{2^{15}} z^4\right) \cos \omega \\ & + \left(1 - \frac{5}{2^9} z^2 - \frac{z^3}{2^9} - \frac{1621}{2^{19} \cdot 5^2} z^4\right) \cos 3\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^4} - \frac{11}{2^{13} \cdot 5} z^3 - \frac{z^4}{2^{14}}\right) \cos 5\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^7 \cdot 5} - \frac{11}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5} z^4\right) \cos 7\omega \\ & - \frac{z^3}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cos 9\omega + \frac{z^4}{2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cos 11\omega. \end{aligned}$$

$$u_3(z) = 9 + \frac{z^2}{2^4} + \frac{z^3}{2^6} + \frac{13}{2^{12} \cdot 5} z^4 + \cdots$$

$$\begin{aligned} se_3(\omega, z) = & \left(\frac{z}{2^3} - \frac{z^2}{2^6} - \frac{z^3}{2^{12}} + \frac{21}{2^{15}} z^4\right) \sin \omega \\ & + \left(1 - \frac{5}{2^9} z^2 + \frac{z^3}{2^9} - \frac{1621}{2^{19} \cdot 5^2} z^4\right) \sin 3\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^4} - \frac{11}{2^{13} \cdot 5} z^3 + \frac{z^4}{2^{14}}\right) \sin 5\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^7 \cdot 5} - \frac{11}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5} z^4\right) \sin 7\omega \\ & - \frac{z^3}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5} \sin 9\omega + \frac{z^4}{2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \sin 11\omega. \end{aligned}$$

$$v_3(z) = 9 + \frac{z^2}{2^4} - \frac{z^3}{2^6} + \frac{13}{2^{12}.5} z^4 - \cdots$$

$$\begin{aligned} ce_4(\omega, z) = & \left(\frac{z^2}{2^6.3} + \frac{z^4}{2^{10}.3^2.5^2}\right) + \left(\frac{z}{2^2.3} + \frac{7}{2^7.3^2.5} z^3\right) \cos 2\omega \\ & + \left(1 - \frac{17}{2^4.3^2.5^2} z^2 + \frac{22411}{2^{13}.3^4.5^4} z^4\right) \cos 4\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^2.5} - \frac{29}{2^8.3^2.5} z^3\right) \cos 6\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^6.3.5} - \frac{z^4}{2^{10}.5^3.7}\right) \cos 8\omega \\ & - \frac{z^3}{2^8.3^2.5.7} \cos 10\omega + \frac{z^4}{2^{15}.3^2.5.7} \cos 12\omega \end{aligned}$$

$$u_4(z) = 16 + \frac{z^2}{2.3.5} + \frac{433}{2^8.3^3.5^3} z^4 - \cdots$$

$$\begin{aligned} se_4(\omega, z) = & \left(\frac{z}{2^2.3} - \frac{z^3}{2^6.5^2}\right) \sin 2\omega \\ & + \left(1 - \frac{17}{2^4.3^2.5^2} z^2 + \frac{18839}{2^{13}.3^4.5^4} z^4\right) \sin 2\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^2.5} - \frac{29}{2^8.3^2.5^3} z^3\right) \sin 6\omega \\ & + \left(\frac{z^2}{2^6.5.3} - \frac{z^4}{2^{10}.5^3.7}\right) \sin 8\omega \\ & - \frac{z^3}{2^8.3^2.5.7} \sin 10\omega + \frac{z^4}{2^{15}.3^2.5.7} \cdot \sin 12\omega \end{aligned}$$

$$v_4(z) = 16 + \frac{z^2}{2.3.5} - \frac{2477}{2^8.3^3.5^3} \cdot z^4 + \cdots$$

$$\begin{aligned} ce_5(\omega, z) = & \left(\frac{z^2}{2^7.3} + \frac{z^3}{2^{10}.3^2} - \frac{z^4}{2^{16}.3^2}\right) \cos \omega + \left(\frac{z}{2^4} - \frac{7}{2^{13}.3^2} z^3 + \frac{z^4}{2^{14}.3^2}\right) \cos 2\omega \\ & + \left(1 - \frac{13}{2^9.3^2} z^2 + \frac{803}{2^{19}.3^4.7^2} z^4\right) \cos 5\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^3.3} - \frac{13}{2^{12}.3^2.7} z^3\right) \cos 7\omega + \left(\frac{z^2}{2^6.3.7} - \frac{z^4}{2^{15}.3^2.7}\right) \cos 9\omega \\ & - \frac{z^3}{2^{11}.3^2.7} \cos 11\omega + \frac{z^4}{2^{16}.3^3.7} \cos 13\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} se_5(\omega, z) = & \left(\frac{z^2}{2^7.3} - \frac{z^3}{2^{10}.3^2} - \frac{z^4}{2^{16}.3^2}\right) \sin \omega + \left(\frac{z}{2^4} - \frac{7}{2^{13}.3^2} z^3 - \frac{z^4}{2^{14}.3^2}\right) \sin 3\omega \\ & + \left(1 - \frac{13}{2^9.3^2} z^2 + \frac{803}{2^{19}.3^4.7^2} z^4\right) \sin 5\omega \\ & - \left(\frac{z}{2^3.3} - \frac{13}{2^{12}.3^2.7} z^3\right) \sin 7\omega + \left(\frac{z^2}{2^6.3.7} - \frac{z^4}{2^{15}.3^2.7}\right) \sin 9\omega \\ & - \frac{z^3}{2^{11}.3^2.7} \sin 11\omega + \frac{z^4}{2^{16}.3^3.7} \sin 13\omega. \end{aligned}$$

$$u_5(z) = v_5(z) = 25 + \frac{z^2}{2^4 \cdot 3} + \frac{11}{2^{12} \cdot 3^3 \cdot 7} z^4 + \cdots$$

$$u_6(z) = v_6(z) = 36 + \frac{z^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{187}{2^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^3} z^4 + \cdots$$

$$u_7(z) = v_7(z) = 49 + \frac{z^2}{2^5 \cdot 3} + \frac{7}{2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5} \cdot z^4 + \cdots$$

$$u_8(z) = v_8(z) = 64 + \frac{z^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 7} + \frac{109}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7^3} \cdot z^4 + \cdots$$

$$u_9(z) = v_9(z) = 81 + \frac{z^2}{2^5 \cdot 5} + \frac{103}{2^{15} \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11} z^4 + \cdots$$

$$u_{10}(z) = v_{10}(z) = 100 + \frac{z^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 11} + \frac{169}{2^{10} \cdot 3^6 \cdot 11^3} z^4 + \cdots$$

Il est possible en se servant des mêmes relations de récurrence (4) d'obtenir les développements un peu plus généraux dans le genre de ceux obtenus par Whittaker. Pour en donner une idée, nous examinerons de nouveau la fonction $ce_0(\omega, z)$ prise comme exemple.

Le tableau des coefficients de cette fonction est triangulaire. Ce fait permet de calculer d'un seul coup les éléments des diagonales successives de ce tableau. Commençons par calculer l'élément ξ_n^n figurant dans la diagonale principale. On aura d'après (4)

$$\xi_n^n = h_n \gamma_n^{(n-1)}$$

mais

$$\gamma_n^{(n-1)} = [\xi^{(n-1)}\mathfrak{B}]_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \xi_n^{(n-k)}.$$

Or, tous les termes figurant sous le signe Σ sont nuls, car

$$\xi_n^k = 0 \qquad \text{si} \qquad n > k.$$

Il reste

$$[\xi^{(n-1)}\mathfrak{B}]_n = \xi_{n-1}^{n-1} + \xi_{n+1}^{n-1}.$$

Pour la même raison $\xi_{n+1}^{n-1} = 0$ et, par conséquent,

$$\xi_n^n = h_n \xi_{n-1}^{n-1}$$

avec

$$h_n = -\frac{1}{n^2}.$$

Nous avons obtenu une formule de récurrence qui permet de calculer immédiatement l'expression générale des éléments figurant dans la diagonale principale. Cette expression est

$$\xi_n^n = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{4^n \cdot n!\, n!}$$

Pour aller plus loin, nous cherchons la formule de récurrence, à laquelle satisfont les éléments figurant dans la deuxième diagonale non nulle du tableau. Voici cette formule

$$\xi_n^{n+2} = h_n \xi_{n-1}^{n+1} + h_n \xi_{n+1}^{n+1}.$$

Elle ne diffère de la précédente que par la présence du terme $h_n \xi_{n+1}^{n+1}$ qui vient d'être calculé. L'expression de l'élément de la seconde diagonale s'obtient aussi aisément

$$\xi_n^{n+2} = (-1)^{n+1} \frac{4n^2 + 6n + 1}{4^{n+2}(n+1)!^2} \sqrt{2}.$$

Ainsi, on peut continuer aussi loin qu'on veut. Le seul inconvénient qui se présente consiste dans l'obligation de manier des nombres trop grands.

Nous avons calculé pour la fonction $ce_0(\omega, z)$ quatre diagonales. La série obtenue peut se mettre sous cette forme :

$$ce_0(\omega, z) = P_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,n!} P_n(z) \left(\frac{z}{4}\right)^n \cos 2n\omega$$

avec

$$P_n(z) = 1 - B_n \left(\frac{z}{4}\right)^2 + C_n \left(\frac{z}{4}\right)^4 - D_n \left(\frac{z}{4}\right)^6 + \cdots$$

où

$$B_n = \frac{4n^2 + 6n + 1}{(n+1)^2}$$

$$C_n = \frac{79n^4 + 428n^3 + 782n^2 + 523n + 79}{4(n+1)^2 (n+2)^2}$$

$$D_n = \frac{d_n}{4 \cdot 3^4 \cdot (n+1)^2 (n+2)^2 (n+3)^2}$$

d_n est un polynôme de 6e degré en n

$$d_n = 35884 \cdot n^6 + 409098 \cdot n^5 + 1838767 \cdot n^4 + 4098732 \cdot n^3 + 4632178 \cdot n^2 + 2348289 \cdot n + 322271.$$

Voici encore quelques séries

$$ce_1(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} P_n(z) \left(\frac{z}{4}\right)^2 \cos (2n+1)\omega$$

avec

$$P_n(z) = 1 + B_n \cdot \frac{z}{4} + C_n \left(\frac{z}{4}\right)^2 - D_n \left(\frac{z}{4}\right)^3 - E_n \left(\frac{z}{4}\right)^4 + \cdots$$

où

$$B_n = \frac{n}{n+1}$$

$$C_n = \frac{n-2}{2^3 \cdot (n+1)}$$

$$D_n = \frac{5n^3 + 20n^2 + 20n + 4}{2^3 \cdot (n+1)(n+2)^2}$$

$$E_n = \frac{251 \cdot n^4 + 1632n^3 + 3357n^2 + 2220n + 148}{2^{15} \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)^2(n+3)}$$

$$se_1(\omega, z) = \sum_{n\,0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} P_n(z) \cdot \left(\frac{z}{4}\right)^n \sin(2n+1)\omega$$

avec

$$P_n(z) = 1 - B_n \frac{z}{4} + C_n \left(\frac{z}{4}\right)^2 + D_n \left(\frac{z}{4}\right)^3 - E_n \left(\frac{z}{4}\right)^4 - \cdots$$

les valeurs de B_n, C_n, ... étant les mêmes que pour la fonction $ce_1(\omega, z)$.

XIII

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE MATHIEU

Il est difficile de discuter la convergence de ces séries. Malgré quelques simplifications apportées par le calcul matriciel à leur construction, la loi de formation des termes successifs reste très compliquée. Néanmoins, on peut se faire une idée sur la convergence en examinant les points singuliers des fonctions de Mathieu considérées comme fonctions du paramètre complexe z. Nous allons présenter ici quelques raisonnements qui ont pour but de montrer que le problème sera résolu par une étude approfondie des racines multiples de l'équation $F(u, z) = 0$, ou, en d'autres termes, par une étude des points critiques de la fonction multiforme $u = \psi(z)$ définie par cette équation.

Les fonctions associées $u_\nu(z)$ sont des branches de cette fonction $\psi(z)$. Or, la fonction entière $F(u, z)$ est la limite des polynômes $f_n(u, z)$ de degré n caractérisées par le fait que coefficient du terme en u^n est indépendant de z. D'ailleurs, plus généralement, on aperçoit que le coefficient du terme en u^{n-k} est un polynôme en z de degré k ou $k - 1$. Dans ces conditions la fonction $\psi(z)$ est multiforme entière en ce sens qu'elle reste finie dans tout domaine borné du plan de la variable z. Par conséquent, les seuls points singuliers de la fonction $\psi(z)$ sont les points critiques. Ils sont les racines multiples de l'équation $F(u, z) = 0$ et, par conséquent, sont solutions du système

$$F(u, z) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

La fonction $\psi(z)$ n'admet aucun point critique transcendant.

Si l'on développe une branche quelconque de $\psi(z)$ en série procédant suivant les puissances de z, le cercle de convergence de cette série sera limité par le point de ramification le plus rapproché de l'origine, où la branche considérée coupe l'une des autres branches de la fonction $\psi(z)$. Par conséquent, pour calculer le rayon de convergence il suffit de déterminer les zéros multiples de la fonction $F(u, z)$.

Considérons maintenant les séries trigonométriques. Leurs coefficients sont également des séries ordonnées suivant les puissances de z. Ils satisfont à un système récurrent qui est de la forme suivante

$$\begin{gathered}(A_0 - u)X_0 + B_0X_1 = 0 \\ B_{n-1}X_{n-1} + (A_n - u)X_n + B_nX_{n+1} = 0 \\ n = 1, 2, 3, \cdots\end{gathered}$$

On en tire successivement

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{u - A_0}{B_0} X_0 \\ X_2 &= \left[\frac{(u - A_0)(u - A_1)}{B_0B_1} - \frac{B_0}{B_1}\right] X_0.\end{aligned}$$

Ces expressions sont des fonctions de z dont les points singuliers peuvent être de trois espèces :

1) Les points critiques de la fonction $u = \psi(z)$, dont nous venons de parler.

2) Les points singuliers de la fonction $X_0(z)$, cette fonction n'étant pas définie par le système récurrent.

3) Éventuellement les zéros des fonctions de la suite $[B_n]$. Ces derniers n'entrent pas en considération pour les fonctions de Mathieu ($B_n = z$). En ce qui concerne la fonction X_0, nous avons vu qu'elle est définie par la relation

$$X_0^\nu(z) = \sqrt{-\frac{F_1(u_\nu, z)}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u=u_\nu}}}$$

où l'indice ν est relatif à la branche considérée de $\psi(z)$. La fonction $F_1(u, z)$ est entière en u et de z. Elle reste donc bornée pour toute valeur finie de z. Si l'on remplace u_ν par son expression sous la forme d'une série, la fonction F_1 aura pour expression une série dont le rayon de convergence sera le même que celui de la série de u_ν. La fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ conduit à la même conclusion en ce qui concerne les points critiques, mais les zéros de cette fonction sont également les points singuliers de $X_0^\nu(z)$. Or, nous venons de remarquer que les zéros de $\frac{\partial F}{\partial u}$ coïncident précisément avec les points critiques de $\psi(z)$. Enfin, la détermination de la racine carrée peut changer lorsque z décrit un lacet autour d'un zéro de la fonction $F_1(u, z)$, mais nous avons vu que cette fonction de z ne s'annule jamais tant que l'équation $F(u, z) = 0$ est satisfaite. En résumé, nous constatons que les seuls points singuliers des coefficients X_n^ν sont les racines du système

$$F(u, z) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Pour déterminer le rayon de convergence des coefficients de Fourier d'une fonction $\theta(\omega)$, par exemple, de la fonction $ce_0(\omega, z)$, il faut trouver un point z_c le plus rapproché de l'origine et tel que

$$u_0(z_c) = u_{2\nu}(z_c)$$

u_0 désignant la branche de $\psi(z)$ associée à $ce_\nu(\omega, z)$ et $u_{2\nu}$ l'une des autres branches.

Avant de passer au calcul de z_c rappelons quelques propositions concernant les zéros d'une suite de fonctions,

Considérons une suite uniformément convergente $[f_n(z)]$ des fonctions $f_n(z)$, holomorphes dans un domaine (D) du plan de la variable z et admettant une fonction $F(z)$ comme limite (par conséquent holomorphe aussi dans le même domaine). On sait que l'ensemble des zéros des fonctions $f_n(z)$ admet un dérivé composé des zéros de la fonction limite $F(z)$. Pour la démonstration on partage le domaine (D) en deux parties : la première (δ) est composée de petits cercles entourant les zéros de F, le reste sera désigné par (D$'$). Alors ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on a partout dans (δ) et dans (D$'$)

$$| F(z) - f_n(z) | < \varepsilon$$

ou

$$| f_n(z) | > F(z) - \varepsilon$$

pourvu que n soit suffisamment grand. Mais dans le domaine (D$'$) la fonction $F(z)$ ne s'annule pas. Donc

$$F(z) | > \mu \qquad \text{dans } (D')$$

et par suite

$$| f_n(z) | > \mu - \varepsilon.$$

Or, μ étant donné en même temps que rayon ρ des petits cercles, on peut choisir N suffisamment grand, pour que l'inégalité $n > N$ entraîne $| F(z) - f_n(z) | < \varepsilon$, ε étant plus petit que μ. A partir de $n \geqslant N$, les fonctions $f_n(z)$ n'auront plus de racines en dehors des cercles (δ) et on aura, par conséquent

$$| z - z_n | < \rho.$$

Chaque zéro de F(z) est donc la limite d'une suite convenable des zéros des fonctions $f_n(z)$. On peut démontrer également qu'un zéro double de F(z) est un point limite commun de deux suites de zéros des fonctions $f_n(z)$, etc.

Considérons maintenant une suite convergente de nombres z_n admettant z comme limite. On démontre aisément que la limite de $[f_n(z_n)]$ est F(z).

Examinons le cas de deux suites de deux variables admettant deux fonctions limites

$$\begin{array}{l} f_1(u, z), \quad f_2(u, z), \cdots f_n(u, z), \cdots \to F(u, z) \\ g_1(u, z), \quad g_2(u, z), \cdots g_n(u, z), \cdots \to G(u, z). \end{array}$$

En donnant à z une valeur arbitraire mais fixe, considérons les termes de la seconde suite comme fonctions de u seul.

Alors, d'après ce que nous venons de dire les zéros des fonctions $g_n(u)$ tendent vers les zéros de la fonction limite G(u). On a ainsi

$$\psi_1(z), \quad \psi_2(z), \cdots \psi_n(z), \cdots \to \psi(z).$$

Portons ces valeurs à la place de u dans la première suite. On aura

$$f_1[\psi_1(z), z], \quad f_2[\psi_2(z), z], \cdots f_n[\psi_n(z), z], \cdots \to F[\psi(z), z].$$

Ce sont des fonctions de z holomorphes dans tout domaine ne comprenant pas de points critiques de $\psi_n(z)$. Elles forment une suite convergente vers la fonction $F[\psi(z), z]$. L'ensemble des zéros de ces fonctions admet les zéros de F comme points limites. Il en résulte que, si une suite de systèmes d'équations

$$f_n(u, z) = 0, \qquad g_n(u, z) = 0$$

tend vers le système

$$F(u, z) = 0, \qquad G(u, z) = 0$$

les racines de $f_n = g_n = 0$ tendent vers celles de $F = G = 0$. En particulier, si

$$G(u, z) = \frac{\partial F}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad g_n(u, z) = \frac{\partial f_n}{\partial u}$$

où $f_n(u, z)$ désignent les réduits du déterminant $F(u, z)$, il en résulte que les zéros doubles des polynômes $f_n(u, z)$ tendent vers les zéros doubles de la fonction $F(u, z)$. Les points critiques de la fonction $u = \psi(z)$ définie par l'équation $F(u, z) = 0$ peuvent être considérés comme des limites des points critiques des fonctions algébriques $u = \psi_n(z)$ définies par les équations $f_n(u, z) = 0$. C'est là un moyen de déterminer les points critiques dont nous nous occupons.

Ainsi, considérons un système d'équations

$$f_n(u, z) = 0, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial u} = 0$$

et soit

$$u = u_{cn}, \qquad z = z_{cn}$$

une solution de ce système. Le point z_{cn} est un point critique de la fonction $\psi_n(z)$. Pour passer à la résolution du système suivant

$$f_{n+1}(u, z) = 0, \qquad \frac{\partial f_{n+1}}{\partial u} = 0$$

dont les racines diffèrent peu des valeurs u_n et z_{cn}, posons

$$u = u_{cn} + \tau, \qquad z = z_{cn} + \zeta$$

et considérons τ et ζ comme des quantités petites en négligeant leurs carrés et leurs produits. Alors, en se servant des formules de récurrence, on peut calculer les expressions des polynômes $f_k(u, z)$ et des dérivées $\frac{\partial f_k}{\partial n}$ qui seront linéaires en τ et en z

$$f_k(u, z) = A_k + B_k\tau + P_k\zeta$$
$$\frac{\partial f_k}{\partial u} = B_k + C_k\tau + Q_k\zeta.$$

En particulier, pour $k = n$, on aura $A_n = B_n = 0$ et pour $k = n + 1$ il faudra poser

$$A_{n+1} + B_{n+1}\tau + P_{n+1}\zeta = 0$$
$$B_{n+1} + C_{n+1}\tau + Q_{n+1}\zeta = 0$$

si nous voulons que τ et ζ soient les corrections nécessaires pour passer à la solution du système $f_{n+1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial u} = 0$. Ces deux équations linéaires fournissent les valeurs de τ et de ζ et nous obtenons ainsi une solution approchée du système $(n + 1)$. On recommencera le calcul en partant de ces valeurs approchées et on continuera ainsi jusqu'au moment, où on jugera la précision suffisante. On en sera averti par le fait que les valeurs de A_{n+1} et de B_{n+1} deviendront nulles.

Nous allons appliquer cette méthode pour calculer le rayon de convergence des séries relatives à la fonction $ce_0(\omega, z)$.

Les polynômes $f_n(u, z)$ associés aux fonctions du type $ce_{2\nu}(\omega, z)$ sont donnés par les expressions

$$f_1 = -u$$

$$f_2 = \frac{u_2}{4} - u - \frac{z^2}{2}$$

$$f_{n+1} = \left(1 - \frac{u}{4n^2}\right) f_n - \frac{z^2}{16(n-1)^2n^2} f_{n-1}.$$

Examinons d'abord le système

$$f_2 = \frac{u^2}{4} - u - \frac{z^2}{2} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{u}{2} - 1 = 0$$

On en tire $u = 2$, $z^2 = -2$. L'équation $f_2 = 0$ définit une fonction algébrique à deux branches

$$2 - \sqrt{4 + 2z^2} \qquad \text{et} \qquad 2 + \sqrt{4 + 2z^2}.$$

Pour $z = 0$, les racines de $f_2 = 0$ sont 0 et 4. Ces valeurs correspondent aux fonctions

$$ce_0(\omega, 0) = 1 \qquad \text{et} \qquad ce_2(\omega, 0) = \cos 2\omega.$$

A la valeur $z^2 = -2$ correspond un point de ramification $u = 2$

Passons au système $f_3 = \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0$ en posant

$$u = 2 + \tau, \qquad z^2 = -2 + \zeta.$$

On calculera d'abord

$$f_2 = -\frac{1}{2}\zeta, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{2}\tau$$

et, ensuite

$$f_3 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\tau - \frac{13}{32}\zeta$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = -\frac{1}{32} + \frac{7}{16}\tau + \frac{3}{64}\zeta$$

ce qui conduit au système

$$\frac{1}{2}\tau + \frac{13}{32}\zeta = -\frac{1}{16}$$
$$\frac{7}{16}\tau + \frac{3}{64}\zeta = -\frac{1}{32}$$

d'où

$$\tau = 0{,}088 \qquad \text{et} \qquad \zeta = -0{,}161$$

et, par suite

$$u = 2{,}088 \qquad \text{et} \qquad z^2 = -2{,}161.$$

Reprenons le calcul en posant

$$u = 2{,}088 + \tau, \qquad z^2 = -2{,}161 + \zeta.$$

Avec ces valeurs on obtient d'abord

$$f_2 = 0{,}082436 + 0{,}044\tau - \frac{1}{2}\zeta$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = 0{,}044 + \frac{1}{2}\tau$$

et ensuite

$$f_3 = 0{,}0010754 - 0{,}000653\tau - 0{,}402\zeta$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = -0{,}000653 + 0{,}429\tau - 0{,}046875\zeta.$$

En annulant ces deux dernières expressions on obtient les nouvelles valeurs de τ et de ζ

$$\tau = 0{,}001230, \qquad \zeta = 0{,}002672$$

donc

$$u = 2{,}089230, \qquad z^2 = -2{,}159328.$$

En partant de ces valeurs approchées on recommence le calcul et on aboutit aux valeurs suivantes

$$u = 2{,}089198, \qquad z^2 = -2{,}156977.$$

Enfin, comme cinquième approximation on trouve

$$u = 2{,}089226, \qquad z^2 = -2{,}158076.$$

En ce moment, en recommençant le calcul on obtient pour f_3 et $\frac{\partial f_3}{\partial u}$ les expressions

$$f_3 = -0{,}0000003 + 0{,}0000037\tau - 0{,}402068\zeta$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = 0{,}0000037 + 0{,}429136\tau + 0{,}046875\zeta.$$

Les termes constants étant très petits on peut passer au système suivant $f_4 = \frac{\partial f_4}{\partial_4} = 0$ sans recommencer le calcul. En continuant ces approximations on arrive à la solution du système

$$f_6 = \frac{\partial f_6}{\partial u} = 0.$$

En passant au calcul des racines du système $f_6 = \frac{\partial f_6}{\partial u} = 0$ on constate qu'on n'affecte plus les sept premiers décimales. Par conséquent, l'équation $F = 0$ admet une racine double pour

$$z^2 = -2{,}1572813$$

ou pour

$$z = \pm 1{,}468768 \cdot i.$$

Ce sont deux points de ramification de la fonction $\psi(z)$. En ce point deux fonctions $u_0(z)$ et $u_2(z)$ associées aux fonctions $ce_0(\omega, z)$ et $ce_2(\omega, z)$ se trouvent confondues.

Cette analyse est un peu sommaire. Elle mériterait d'être approfondie. Ainsi, il manque une démonstration rigoureuse du fait que le point critique que nous venons de calculer est le plus rapproché de l'origine. Néanmoins, il nous semble très probable que le système $F(u, z) = \frac{\partial F}{\partial u} = 0$ n'admet aucune autre racine plus rapprochée de l'origine en raison de la rapidité et de la régularité de la convergence des polynômes $f_n(u, z)$.

Dans ces conditions nous pouvons admettre que les séries en z relatives à la fonction $ce_0(\omega, z)$ convergent pour

$$|z| < 1{,}468768.$$

En connaissant les valeurs de u et de z pour ce point critique nous pouvons calculer à l'aide des relations récurrentes les coefficients de la fonction

$$\frac{ce_0(\omega\,;\,1{,}468768i)}{\sqrt{2}} = ce_2(\omega\,;\,1{,}468768i) = 1 - 1{,}42206i \cos 2\omega -$$
$$- 0{,}14947 \cos 4\omega + 0{,}00646i \cos 6\omega + 0{,}00016 \cos 8\omega - \cdots$$

Pour effectuer ce calcul, nous sommes partis de la valeur $X_0 = \sqrt{2}$ arbitrairement choisie. La fonction obtenue n'est donc pas normée. Il est d'ailleurs impossible de la normer, car la somme des carrés de ses coefficients est nulle.

$$(\sqrt{2})^2 + (1{,}42206 \cdot i)^2 + (0{,}14947)^2 + (0{,}00646 \cdot i)^2 + (0{,}00016)^2 + \cdots = 0.$$

En effet, nous avons vu que pour obtenir la fonction normée, il aurait fallu partir de la valeur

$$X_0 = \sqrt{-\frac{F_1(u, z)}{\frac{\partial F}{\partial u}}} = \infty.$$

Au voisinage de leurs points critiques les fonctions de Mathieu normées deviennent indéterminées.

Naturellement, il n'existe aucun point critique sur l'axe des z réels. C'est une conséquence de la relation (6) du § 3.

XIV

CONCLUSION

Nous voulons dire quelques mots sur d'autres possibilités de la méthode qui nous a permis de développer les fonctions de Mathieu normées en séries trigonométriques. Commençons par examiner quelle est la signification des matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui interviennent dans les équations matricielles.

La matrice $\mathcal{A}$ diagonale est composée des valeurs propres de u pour le cas où $z = 0$. Elle figure dans l'équation différentielle dont le système trigonométrique est la solution. Ainsi, si l'on pose par exemple

$$\varphi^{T}(\omega) = \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos 2\omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 4\omega}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots \right\|$$

la matrice

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 4^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

figure dans l'équation différentielle matricielle

(1) $$\varphi''(\omega) + \mathcal{A}\varphi(\omega) = 0$$

dont l'intégrale est le système $\varphi(\omega)$. En ce qui concerne la matrice

$$\mathcal{B} = \left\| \begin{matrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

elle est définie par la relation

(2) $$(2 \cos 2\omega - \mathcal{B})\varphi(\omega) = 0.$$

On vérifie, en effet

$$2\cos 2\omega \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 2\omega \\ \cos 4\omega \\ \cdots\cdots \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sqrt{2}\ \mathrm{cas}\ 2\omega \\ 1 + \cos 4\omega \\ \cos 2\omega + \cos 6\omega \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{Vmatrix} = \mathcal{B} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 2\omega \\ \cos 4\omega \\ \cdots\cdots \end{Vmatrix}$$

Cette matrice peut être calculée directement à partir de la relation (2). En effet, en multipliant (2) par $\varphi^{\mathrm{T}}(\omega)$ à droite et en intégrant de 0 à 2π, on obtient l'expression de $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = 2\int_0^{2\pi} \cos 2\omega \cdot \varphi(\omega)\varphi^{\mathrm{T}}(\omega)d\omega \tag{3}$$

L'équation de Mathieu sous la forme matricielle s'écrit

$$\theta''(\omega) + (\mathcal{U} - 2z\cos 2\omega)\theta(\omega) = 0 \tag{4}$$

où $\theta(\omega)$ désigne un groupe des fonctions de Mathieu et $\mathcal{U}$ est la matrice diagonale inconnue définie précédemment. Cherchons une intégrale de (4) sous la forme d'un système de séries

$$\theta(\omega) = \mathcal{X} \cdot \varphi(\omega) \tag{5}$$

$\mathcal{X}$ étant une matrice inconnue définie au § 6. En tenant compte de (1) on obtient

$$\theta''(\omega) = -\mathcal{X}\mathcal{A}\varphi(\omega)$$

et l'équation (4) devient

$$-\mathcal{X}\mathcal{A}\varphi(\omega) + (\mathcal{U} - 2z\cos 2\omega)\mathcal{X}\varphi(\omega) = 0.$$

Multiplions cette relation par $\varphi^{\mathrm{T}}(\omega)$ et intégrons de 0 à 2π. Il vient

$$-\mathcal{X}\mathcal{A} + \mathcal{U}\mathcal{X} - \mathcal{X}\cdot 2z\int_0^{2\pi} \cos 2\omega \cdot \varphi(\omega)\varphi^{\mathrm{T}}(\omega)d\omega = 0.$$

L'intégrale est précisément la matrice $\mathcal{B}$. Donc, finalement on obtient

$$\mathcal{X}(\mathcal{A} + \mathcal{B}z) = \mathcal{U}\mathcal{X} \tag{6}$$

c'est-à-dire, l'équation matricielle qui définit les matrices $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$. Bien entendu, cette analyse est trop succincte pour être complète. Il a l'avantage de montrer l'idée directrice d'une méthode susceptible d'autres applications.

Illustrons cette affirmation par quelques exemples.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse de trouver des solutions périodiques d'une équation de Hill généralisée

$$y'' + [u - z_1 f_1(\omega) - z_2 f_2(\omega) - \cdots]\, y = 0. \tag{7}$$

Ici z_1, z_2, ... désignent des paramètres connus, $f_k(\omega)$ des fonctions périodiques intégrables de période 2π et u une fonction inconnue de z_1, z_2... qu'il s'agit de déterminer de façon à ce que l'équation (7) admette une intégrale périodique. Ceci peut avoir lieu pour des valeurs u_0, u_1, u_2... qui forment la diagonale d'une matrice $\mathfrak{U}$. A chaque valeur u_ν correspond une intégrale périodique $\theta_\nu(\omega)$. L'ensemble de ces intégrales est un système de fonctions $\theta(\omega)$, solution de l'équation différentielle matricielle

$$\theta''(\omega) + [\mathfrak{U} - z_1 f_1(\omega) - \cdots]\, \theta(\omega) = 0 \tag{8}$$

dont on cherchera la solution sous forme d'un système de séries de Fourier

$$\theta(\omega) = \mathfrak{X} \cdot \varphi(\omega).$$

Alors, en tenant compte de (1) on aura

$$-\mathfrak{X}\mathfrak{A}\varphi(\omega) + [\mathfrak{U} - z_1 f_1(\omega) - z_2 f_2(\omega) \cdots]\, \mathfrak{X}\varphi(\omega) = 0$$

d'où l'on tirera comme dans le cas de l'équation de Mathieu

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{A} + S_1 z_1 + S_2 z_2 + \cdots) = \mathfrak{U}\mathfrak{X}.$$

Les matrices S_k se calculent aisément

$$S_k = \int_0^{2\pi} f_k(\omega)\varphi(\omega)\varphi^{\mathrm{T}}(\omega)d\omega.$$

On démontrera comme au § 6 que la matrice $\mathfrak{X}\mathfrak{X}^{\mathrm{T}}$ est permutable avec $\mathfrak{U}$, donc diagonale. Par conséquent, le système de fonctions $\theta(\omega)$ est orthogonal et peut être normé en posant

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}^{\mathrm{T}} = E$$

ce qui le définit complètement.

Notons à cette occasion que la matrice S_k est une matrice dont chaque élément est une fonctionnelle. Elle possède des propriétés très intéressantes qui facilitent son calcul. Ainsi, par exemple, en posant

$$S[f] = \int_0^{2\pi} f(\omega)\varphi(\omega)\varphi^{\mathrm{T}}(\omega)d\omega$$

on peut démontrer que

$$S[fg] = S[f] \cdot S[g].$$

Comme un second exemple, considérons un système $\varphi(s)$ de fonctions orthogonales et normées dans un intervalle (a, b) et solution d'une équation différentielle linéaire

$$L[\varphi(s)] + \mathcal{A}\varphi(s) = 0 \tag{9}$$

où L est une expression différentielle linéaire et $\mathcal{A}$ une matrice diagonale (dans cette catégorie rentrent, par exemple, fonctions de Legendre, polynômes de Laguerre, fonctions paraboliques, etc.). Ceci étant posé, l'équation

$$L[\theta(s)] + [\mathcal{U} - zf(s)]\theta(s) = 0 \tag{10}$$

peut se traiter de la même façon que l'équation de Mathieu, pourvu que la fonction $f(s)$ soit intégrable dans l'intervalle (a, b). On posera

$$\theta(s) = \mathcal{X} \cdot \varphi(s)$$

et en tenant compte de (9) on aura

$$L[\theta(s)] = \mathcal{X}L[\varphi(s)] = -\mathcal{X}\mathcal{A}\varphi(s)$$

donc

$$-\mathcal{X}\mathcal{A}\varphi(s) + \mathcal{U}\mathcal{X}\varphi(s) - zf(s)\mathcal{X}\varphi(s) = 0.$$

En multipliant par $\varphi^T(s)$ et en intégrant on obtiendra

$$\mathcal{X}(\mathcal{A} + zS[f]) = \mathcal{U}\mathcal{X}$$

avec

$$S[f] = \int_a^b f(s)\varphi(s)\varphi^T(s)ds.$$

Ainsi, on est ramené à la résolution d'une équation matricielle de la forme étudiée.

TABLE DES MATIÈRES