KY FAN

Sur quelques notions fondamentales de l'analyse générale

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1941

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1941__240__1_0>

Série A,
n° 1963
N° d'ordre :
2830

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Ky FAN

1re THÈSE. — Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 23 mai 1941 devant la Commission d'examen.

MM. M. FRÉCHET, *Président.*
J. PERÈS } *Examinateurs.*
H. CARTAN }

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1941

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires.......... M. MOLLIARD, Ch. MAURAIN.

Doyen...................... Paul MONTEL, *Professeur*, Théorie des Fonctions.

Professeurs honoraires :

H. LEBESGUE.	DANGEARD.	G. BERTRAND.	BOHN.	E. BOREL.
Émile PICARD.	LESPIEAU.	Ch. FABRY.	RABAUD.	A. COTTON.
Léon BRILLOUIN.	VESSIOT.	Léon BERTRAND.	CAULLERY.	J. DRACH.
PÉCHARD.	PORTIER.	WINTREBERT.	J. PERRIN.	H. GUICHARD.
FREUNDLER.	MOLLIARD.	DUBOSCQ.	E. CARTAN.	LABROUSTE.
AUGER.	LAPICQUE.			

PROFESSEURS

Charles PÉREZ.....	T	Zoologie.
L. BLARINGHEM....	T	Botanique.
G. JULIA............	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN........	T	Minéralogie.
A. DENJOY.........	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD.........	T	Géographie physique et géologie dynamique.
G. BRUHAT.........	T	Physique théorique et physique céleste.
E. DARMOIS........	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE.......	T	Physique Générale et Radioactivité.
L. DUNOYER.......		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.
M. JAVILLIER......	T	Chimie Biologique.
Henri VILLAT......	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB..........	T	Géologie.
P. PASCAL..	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET........	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.........	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH...............	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER.......	T	Électrotechnique générale.
De BROGLIE........	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN..........		Optique appliquée.
PRENANT...........	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY.......... ..	'	Mécanique physique et expérimentale.
COMBES.............	T	Physiologie végétale.
GARNIER......... .	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.
PÉRÈS..............	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL.........	T	Chimie minérale.
TOUSSAINT.........		Technique Aéronautique.
M. CURIE...........		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD..........	T	Hautes températures.
CHAZY..............	T	Mécanique rationnelle.
GAULT..............		Chimie (P.C.B.).
CROZE..............	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT............	T	Théories chimiques.
LANQUINE..........	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON...........	T	Calcul différentiel et intégral.
BARRABÉ...........		Géologie structurale et Géologie appliquée.
MILLOT.............		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN..........		Théories physiques.
VAVON..............	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS........	T	Mathématiques générales.
CHATTON...........	T	Biologie maritime.
AUBEL..............		Chimie biologique.
Jacques BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL........	T	Botanique.
CABANNES.........	T	Recherches physiques.
GRASSÉ............	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
PRÉVOST...........		Chimie (P. C. B.).
BOULIGAND....... .		Mathématiques.
CHAUDRON.........		Chimie (P. C. B.).
WYART		Minéralogie.
TEISSIER...........		Zoologie.
MANGENOT.........		Biologie végétale (P. C. B.).
P. AUGER...........		Physique.
MONNIER......... ..		Physiologie générale.
PIVETEAU		Géologie.
ROCARD............		Physique.
H. CARTAN.........		Calcul différentiel.
SCHAEFFER........	T	Physiologie générale.
LAFFITTE..........		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire.......................... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire............... D. TOMBECK.

A MONSIEUR

MAURICE FRÉCHET

PROFESSEUR A LA SORBONNE

Hommage de profonde reconnaissance,

KY FAN.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES

DE

L'ANALYSE GÉNÉRALE

INTRODUCTION.

L'Analyse générale a pour objet l'étude des transformations d'un élément abstrait de nature quelconque en un élément également abstrait. Sa première notion fondamentale est donc celle de transformation. Les transformations les plus importantes sont celles qui sont continues ou bicontinues. L'étude des transformations continues embrasse les théories sur les transformations linéaires, les polynomes abstraits, les différentielles abstraites, etc. L'étude des transformations à la fois biunivoques et bicontinues, c'est-à-dire des homéomorphies, permet d'introduire la notion de dimension et celle de ligne dans l'Analyse générale.

Le présent travail constitue une tentative pour étudier systématiquement quelques notions fondamentales de l'Analyse générale. Parmi ces recherches, les unes concernent des notions qui se rattachent aux transformations continues. Les autres ont pour objet l'étude de notions qui relèvent de la notion de transformation bicontinue.

Le premier Chapitre est consacré à la notion de polynome abstrait et surtout à la recherche d'une représentation d'une fonction abstraite continue par une limite de polynomes abstraits, avec convergence uniforme, ce qui constitue un prolongement de travaux de M. M. Fréchet [3], [4], [5] (¹). Nous sommes parvenu à résoudre ce problème pour les espaces d'une certaine catégorie, assez étendue, laquelle comprend plusieurs espaces fonctionnels importants.

Le second Chapitre est destiné à la notion de différentielle. La définition adoptée est une généralisation de la définition opératoire donnée par M. J. Hadamard [1] dans l'Analyse classique. M. Fréchet [10] a généralisé cette définition de M. Hadamard à l'Analyse fonctionnelle et indiqué la possibilité d'une généralisation à l'Analyse générale. Nous montrerons que la différentielle au sens de MM. Hadamard-Fréchet dans l'Analyse générale conserve les propriétés les plus importantes de la différentielle classique.

(¹) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie rejetée à la fin du Mémoire.

Dans le troisième Chapitre, nous nous occuperons de la notion du type homogène de dimensions, notion obtenue par la localisation de la notion du type de dimensions de M. Fréchet. D'ailleurs, l'idée de formuler cette nouvelle notion a été brièvement indiquée par M. Fréchet [13]. Nous ferons voir les avantages que présente cette nouvelle notion sur l'ancienne. Nous montrerons ensuite qu'on peut étendre tout ce qu'il y a d'essentiel dans la théorie du type de dimensions, à la théorie du type homogène de dimensions.

Enfin, nous étudierons dans le dernier Chapitre, la notion de ligne. Nous donnerons une caractérisation topologique pour l'arc simple, ainsi que pour la demi-droite topologique, dans des espaces abstraits très généraux. Nos caractérisations présentent l'avantage de ne pas faire intervenir la considération de compacité. De sorte que, même dans le cas très particulier des espaces distanciés, nos caractérisations nous paraissent encore nouvelles.

Les espaces où nous nous placerons dans les divers Chapitres sont de plus en plus généraux. Dans le premier Chapitre, les espaces considérés sont certains espaces distanciés affines vérifiant cinq conditions supplémentaires. Pour le second Chapitre, nous envisagerons d'abord les espaces distanciés vectoriels, et ensuite les espaces distanciés affines. Dans le cours du troisième Chapitre, nous nous placerons dans les espaces distanciés. Enfin, pour le dernier Chapitre, les espaces considérés sont ceux que nous appellerons espaces de F. Riesz. La catégorie des espaces de F. Riesz est d'une extrême généralité. Elle comprend comme cas particuliers les espaces ($\mathcal{L}$) de M. Fréchet ([1], p. 163) ainsi que les espaces accessibles de M. Fréchet ([1], p. 185) et par suite les espaces de M. Hausdorff.

Les principaux résultats des Chapitres I, III ont été énoncés dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (K. Fan, [1], [2]). Pour ne pas être trop long, j'ai laissé de côté des recherches se rapportant à la notion d'espace dans l'Analyse générale, dont les résultats ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (K. Fan, [3]) et dont le détail sera publié ailleurs [1].

J'exprime ici ma profonde reconnaissance à M. M. Fréchet qui m'a guidé dans mes premières recherches et n'a jamais cessé de me donner des précieux conseils et des encouragements, sans parler du parti que j'ai tiré de l'étude de ses travaux qui sont à la base de toute l'Analyse générale. J'adresse également mes vifs remerciements à MM. J. Hadamard, E. Cartan, E. Borel, H. Villat, J. Pérès, G. Bouligand et H. Cartan pour le bienveillant intérêt qu'ils ont bien voulu me témoigner.

---

(1) Au cours de l'impression du présent travail, nous avons publié ailleurs deux Notes (Fan, [4], [5]) et un Mémoire (Fan, [6]), qui constituent un prolongement du Chapitre IV du présent Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

Les transformations continues.

CHAPITRE I.

NOTION DE POLYNOME ABSTRAIT.

Ce Chapitre est consacré à la notion de polynome abstrait et surtout à une représentation d'une fonction abstraite continue par une limite de polynomes abstraits.

1. Polynome abstrait. — Nous appellerons *fonction abstraite* toute transformation ponctuelle $Y = F(X)$ d'un point X d'un espace abstrait en un point Y d'un espace abstrait distinct ou non du premier. Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces distanciés affines (¹) et $Y = F(X)$ une fonction abstraite définie sur l'espace $\mathcal{E}_1$ tout entier et ayant ses valeurs appartenant à $\mathcal{E}_2$. Nous dirons, avec M. Fréchet ([2], p. 75), que $Y = F(X)$ est une *fonction abstraite d'ordre entier n* ou un *polynome abstrait d'ordre n* (²), lorsqu'elle est continue sur $\mathcal{E}_1$ et telle que sa différence $\Delta^{(n+1)}F(X)$ d'ordre $n+1$ est identiquement nulle sans qu'il en soit de même de sa différence d'ordre n. Nous posons ici

$$\Delta^{(n+1)}F(X) = \Delta_{n+1}\Delta_n\ldots\Delta_2\Delta_1 F(X) \tag{1}$$

avec, en général

$$\Delta_m G(X) = G(X+\Delta_m X) - G(X), \tag{2}$$

de sorte que $\Delta^{(n+1)}F(X)$ dépend de $n+1$ accroissements $\Delta_1 X, \ldots, \Delta_{n+1} X$ de X qui sont indépendants.

2. Une question de M. Fréchet. — On sait, depuis Weierstrass, que toute fonction ordinaire continue peut être représentée comme limite d'une suite de polynomes. M. Fréchet [3], [4] a étendu ce théorème aux fonctionnelles continues qui sont définies : 1° dans l'espace (C) des fonctions continues (³); 2° dans l'espace (L^2) des fonctions de carrés sommables (⁴). Pour traiter un

---

(¹) *Cf.* M. Fréchet, [1], p. 144.

(²) M. Fréchet a introduit la notion de polynome abstrait dans le cas beaucoup plus général où les espaces $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ sont deux de ceux qu'il a appelés *espaces algébrophiles*. *Cf.* M. Fréchet, [2], p. 76.

(³) *Cf.* M. Fréchet, [1], p. 88.

(⁴) Dans M. Fréchet, [1], p. 90, l'espace (L^2) est désigné par (Ω_1).

cas beaucoup plus général, le même auteur (M. Fréchet, [5]) a envisagé une certaine catégorie d'espaces qu'il a appelée la *catégorie* T. Ce sont certains espaces distanciés affines, à savoir ceux qui satisfont aux quatre conditions suivantes :

I. *Les distances sont inaltérées dans toute translation.*

II. *A chaque point* X *est associée une suite (finie ou infinie) de nombres réels* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *qu'on peut appeler les coordonnées du point* X. *Un point* X *avec coordonnées* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *sera désigné par* $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

III. *Ces coordonnées étant des fonctionnelles du point* X :

$$x_1 = \theta_1(X), \quad x_2 = \theta_2(X), \quad \ldots, \quad x_n = \theta_n(X), \quad \ldots,$$

on suppose que ces fonctionnelles sont du premier ordre au sens donné plus haut.

IV. *Il existe des points* E_i^k *tels que pour tout point* X *avec coordonnées* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *on ait*

$$X = \lim_{n \to \infty} X^{(n)},$$

où

$$X^{(n)} = x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n.$$

Il est facile de voir que tout espace de la catégorie T est séparable. On sait qu'il existe des espaces distanciés affines non séparables, tel est par exemple l'espace $(D_{(0)})$ de M. Fréchet ([1], p. 97). Il en résulte donc qu'*il existe des espaces distanciés affines restant en dehors de la catégorie* T.

Pour toute fonction abstraite continue $Y = F(X)$, dont les variables X et Y restent dans deux espaces de la catégorie T, M. Fréchet [5] a donné une représentation de F(X) par une limite triple de polynomes abstraits. Et il a proposé de chercher à obtenir un énoncé plus rapproché de celui de Weierstrass en remplaçant la triple limite par une simple limite et en précisant les conditions de convergence uniforme. Nous allons donner une solution de la question ainsi posée par M. Fréchet en remplaçant la catégorie T par une certaine catégorie T′. Cependant, même en restant dans la catégorie T, on peut déjà remplacer la triple limite, comme nous allons le montrer, par une double limite (Th. 3), et dans un cas particulier par une simple limite (Th. 1).

3. Développement d'une fonctionnelle continue. — Dans un espace de la catégorie T, nous appellerons *ensemble borné* tout ensemble de points dont les coordonnées de rang n sont bornées, quel que soit n, les bornes pouvant d'ailleurs varier avec n.

Tout ensemble compact et fermé (appartenant à un espace de la catégorie T) est un ensemble borné. En effet, pour un rang n fixe, la coordonnée $x_n = \theta_n(X)$ est une fonctionnelle continue du point X. Et l'on sait que toute fonctionnelle continue dans un ensemble compact et fermé est bornée dans cet ensemble (1).

D'après un théorème dû à M. Fréchet ([7], p. 5), tout ensemble compact d'un espace distancié peut être considéré comme faisant partie d'un ensemble compact et fermé. On en déduit alors que *tout ensemble compact (appartenant à un espace de la catégorie* T) *est un ensemble borné.*

THEORÈME I. — *Soient* $\mathcal{E}$ *un espace de la catégorie* T *et* D *un ensemble borné et fermé de points de* $\mathcal{E}$. *Toute fonctionnelle* $Y = F(X)$ *qui est définie, bornée et continue sur* D, *peut être représentée sur* D *sous la forme*

$$Y = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(X) \tag{3}$$

d'une limite de fonctionnelles d'ordres entiers $\varphi_n(X)$ (2).

Démonstration. — On sait que la fonctionnelle $F(X)$ continue et bornée sur l'ensemble fermé D peut être prolongée par une fonctionnelle $\mathcal{F}(X)$ continue et bornée sur l'espace $\mathcal{E}$ tout entier (3). On a, d'après la condition IV du paragraphe **2**,

$$X = \lim_{n \to \infty} (x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n).$$

En vertu de la continuité de $\mathcal{F}(X)$, on a

$$\mathcal{F}(X) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{F}(x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n) \tag{4}$$

pour tout point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de $\mathcal{E}$.

La valeur de $\mathcal{F}(u_1 E_1^n + \ldots + u_n E_n^n)$ pour n fixe, ne dépend que des nombres $u_1, \ldots, u_n$. On peut donc écrire

$$\Phi_n(u_1, \ldots, u_n) = \mathcal{F}(u_1 E_1^n + \ldots + u_n E_n^n). \tag{5}$$

$\Phi_n(u_1, \ldots, u_n)$ est une fonction ordinaire réelle de n variables réelles $u_1, \ldots, u_n$; elle est définie pour tout point $(u_1, \ldots, u_n)$ de l'espace cartésien (R_n) à n coordonnées. Elle est même continue sur l'espace (R_n) tout entier [en vertu de la continuité de $\mathcal{F}(X)$ et en tenant compte que le point $u_1 E_1^n + \ldots + u_n E_n^n$ dépend continûment du système de nombres $u_1, \ldots, u_n$, quand n reste fixe (4)].

---

(1) *Cf.* M. FRÉCHET, [6], p. 8, ou [1], p. 236.

(2) On verra dans la démonstration que $\varphi_n(X)$ sont définies et continues non seulement dans l'ensemble D, mais dans l'espace $\mathcal{E}$ tout entier. Sans cela la proposition « $\varphi_n(X)$ sont d'ordres entiers » n'aurait pas de sens.

(3) Ce théorème a été démontré d'abord par M. H. Tietze [1] dans le cas d'un espace distancié et plus tard par P. Urysohn ([1], p. 293), dans le cas plus général d'un espace normal.

(4) *Cf.* M. FRÉCHET, [5], p. 187.

L'ensemble D étant borné, il existe une suite de nombres positifs M_1, $M_2, \ldots, M_n, \ldots$ telle que, pour tout point X de D, on ait

$$(6) \qquad |x_n| = |\theta_n(X)| \leqq M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'après le théorème classique de Weierstrass, pour toute valeur fixe de l'entier n, on pourra trouver un polynome $P_n(u_1, \ldots, u_n)$ tel qu'on ait

$$|P_n(u_1, \ldots, u_n) - \Phi_n(u_1, \ldots, u_n)| < \frac{1}{n}$$

pour

$$|u_1| \leqq M_1, \qquad |u_2| \leqq M_2, \qquad \ldots, \qquad |u_n| \leqq M_n.$$

On a alors, en vertu de (6),

$$(7) \qquad |P_n(x_1, \ldots, x_n) - \Phi_n(x_1, \ldots, x_n)| < \frac{1}{n}$$

pour tout point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de l'ensemble D, quel que soit l'entier n.

En combinant les relations (4), (5), (7), on obtient

$$(8) \qquad Y = \lim_{n \to \infty} P_n(x_1, \ldots, x_n).$$

En posant

$$(9) \qquad \varphi_n(X) = P_n(x_1, \ldots, x_n) = P_n\big(\theta_1(X), \ldots, \theta_n(X)\big),$$

on obtient la représentation (3). $\varphi_n(X)$ sont des fonctionnelles du point X; elles sont définies pour tout point X de $\mathcal{E}$. Chaque $\varphi_n(X)$ est continue dans l'espace $\mathcal{E}$ tout entier, car $P_n(x_1, \ldots, x_n)$ est continue par rapport à l'ensemble des nombres $x_1, \ldots, x_n$ et les $x_i = \theta_i(X)$ sont des fonctionnelles continues du point X.

Considérons maintenant le polynome

$$P_n(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma A_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Soit d la plus grande valeur de la somme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Si l'on donne à X des accroissements $\Delta_1 X, \Delta_2 X, \ldots, \Delta_d X, \Delta_{d+1} X$, les coordonnées $x_k = \theta_k(X)$ recevront des accroissements $\Delta_1 x_k, \Delta_2 x_k, \ldots, \Delta_d x_k, \Delta_{d+1} x_k$, où $x_k + \Delta_i x_k = \theta_k(X + \Delta_i X)$. Les fonctionnelles $\theta_k(X)$ étant du premier ordre, on a

$$\Delta^{(2)}\theta_k(X) \equiv \theta_k(X + \Delta_1 X + \Delta_2 X) - \theta_k(X + \Delta_1 X) - \theta_k(X + \Delta_2 X) + \theta_k(X) \equiv 0,$$

et par conséquent

$$\theta_k(X + \Delta_1 X + \Delta_2 X) \equiv x_k + \Delta_1 x_k + \Delta_2 x_k,$$

et de même pour les autres combinaisons analogues de $X, \Delta_1 X, \ldots, \Delta_d X, \Delta_{d+1} X$. Il en résulte que

$$\Delta^{(d+1)}\varphi_n(X) \equiv \Sigma A_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} (\Delta^{(d+1)} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}).$$

Ici, $\Delta^{(d+1)} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ s'obtient en donnant au point $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace cartésien (R_n) à n coordonnées $d+1$ accroissements $(\Delta_1 x_1, \ldots, \Delta_1 x_n), \ldots,$ $(\Delta_{d+1} x_1, \ldots, \Delta_{d+1} x_n)$ suivant les formules usuelles et comme $\alpha_1+\ldots+\alpha_n<d+1$, cette différence $(d+1)^{\text{ième}}$ est nulle. On a alors

$$\Delta^{(d+1)}\varphi_n(X) \equiv 0.$$

Les $\varphi_n(X)$ sont donc des fonctionnelles d'ordres entiers. C. Q. F. D.

4. Catégorie T′. — Comme cas particulier du théorème 1, toute fonctionnelle $Y = F(X)$, qui est définie et continue sur un ensemble C compact et fermé de $\mathcal{E}$, peut être représentée sous la forme (3) d'une limite de fonctionnelles d'ordres entiers (¹). Pour assurer la convergence uniforme dans l'ensemble compact et fermé C, nous imposerons aux espaces considérés des conditions supplémentaires qui sont d'ailleurs réalisées par beaucoup d'espaces de la catégorie T.

Au lieu de la condition III de M. Fréchet (§ **2**), nous imposerons la condition plus commode :

III *bis*. *Ces coordonnées étant des fonctionnelles du point* X

$$x_1 = \theta_1(X), \qquad x_2 = \theta_2(X), \qquad \ldots, \qquad x_n = \theta_n(X), \qquad \ldots.$$

on suppose que ces fonctionnelles sont continues et additives au sens restreint, c'est-à-dire

$$\theta_n(X_1+X_2) = \theta_n(X_1)+\theta_n(X_2) \quad (^2).$$

Nous imposerons, en outre, et surtout, une nouvelle condition :

V. *En posant*

$$X^{(n)} = x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n,$$

on a l'inégalité

$$(O, X^{(n)}) \leqq (O, X)$$

entre les distances (*où* O *est le point d'origine de l'espace*), *quel que soit n et quel que soit le point* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

La catégorie des espaces distanciés affines satisfaisant aux conditions I, II, IV de M. Fréchet (§ **2**) et III *bis*, V sera appelée *la catégorie* T′. Tout espace de la catégorie T′ est évidemment un espace de la catégorie T.

(¹) Car tout ensemble compact est borné (§ **3**) et toute fonctionnelle continue sur un ensemble compact et fermé est bornée sur cet ensemble.

(²) Toute fonctionnelle continue et additive est nécessairement du premier ordre au sens indiqué au paragraphe **1**, mais la réciproque n'est pas vraie.

5. Deux lemmes. — Il nous sera utile pour la suite de démontrer les deux lemmes suivants qui sont intéressants par eux-mêmes. Notre raisonnement pour les deux lemmes est exactement analogue à celui que M. Fréchet ([3], p. 199-201) a employé pour le cas où $\mathcal{E}$ est l'espace (C) des fonctions continues (1).

Lemme 1. — *Dans un espace $\mathcal{E}$ de la catégorie* T', *la convergence de*

$$X = \lim_{n\to\infty} X^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n)$$

est uniforme dans tout ensemble compact de points X.

Démonstration. — Si C est un ensemble compact de points X, et $\varepsilon > 0$ est un nombre donné, il faut prouver qu'il existe un entier p tel que

$$(X, X^{(n)}) < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > p,$$

quel que soit le point X de C.

En effet, dans le cas contraire, il y aurait une valeur $\varepsilon_0 > 0$ telle que, pour toute valeur positive de l'entier i, il existe un entier $n_i > i$ et un point X_i de C pour lesquels on ait

(10) $$(X_i, X_i^{(n_i)}) \geqq \varepsilon_0.$$

Or, C étant compact, on peut supposer que $\lim\limits_{i\to\infty} X_i = X_0$ (en remplaçant au besoin la suite des points X_i par une suite extraite des X_i). En posant $Z_i = X_i - X_0$, on a, d'après la condition I du paragraphe **2**,

$$(Z_i, O) = (X_i - X_0, O) = (X_i, X_0),$$

donc $\lim\limits_{i\to\infty} Z_i = O$, où O est le point d'origine de l'espace. Or, d'après la condition III *bis*, on a

$$Z_i^{(n_i)} = X_i^{(n_i)} - X_0^{(n_i)};$$

d'où (en appliquant la condition I)

$$\begin{aligned}(X_i, X_i^{(n_i)}) &= (Z_i, X_i^{(n_i)} - X_0) \\ &\leqq (Z_i, Z_i^{(n_i)}) + (Z_i^{(n_i)}, X_i^{(n_i)} - X_0) \\ &= (Z_i, Z_i^{(n_i)}) + (X_0, X_0^{(n_i)}) \\ &\leqq (O, Z_i) + (O, Z_i^{(n_i)}) + (X_0, X_0^{(n_i)}).\end{aligned}$$

D'après la condition V, on a alors

$$(X_i, X_i^{(n_i)}) \leqq 2(O, Z_i) + (X_0, X_0^{(n_i)}).$$

---

(1) Nous verrons plus tard que (C) est un espace de la catégorie T'. Pour la définition de l'espace (C), *voir* M. Fréchet [1], p. 88.

Comme $\lim\limits_{i \to \infty} Z_i = O$ et $\lim\limits_{i \to \infty} X_0^{(n_i)} = X_0$ (car $n_i > i$), le second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$. On voit alors que l'inégalité (10) ne peut pas être vraie pour toutes les valeurs de l'entier i. C. Q. F. D.

Lemme 2. — *Si* C *est un ensemble compact de points d'un espace de la catégorie* T′, *il reste compact quand on lui adjoint tous les points de la forme*

$$X^n = x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n,$$

où n est un entier positif quelconque et $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *un point quelconque de* C.

Démonstration. — Il faut démontrer que si

$$\text{(11)} \qquad X_1^{(n_1)}, \quad X_2^{(n_2)}, \quad \ldots, \quad X_i^{(n_i)}, \quad \ldots$$

est une suite infinie de tels points (où X_i sont des points de C), on peut en extraire une suite convergente. L'ensemble C étant compact, on peut supposer, comme précédemment, que la suite $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ converge vers un point Z. Alors deux cas se présentent :

1^er^ *cas.* — Ou bien les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ sont tous inférieurs à un même entier N, il y en a donc une infinité qui sont égaux à un même nombre $n < N$. En extrayant de la suite (11) une suite convenable, on sera ramené au cas où ils sont tous égaux à n :

$$X_{\nu_1}^{(n)}, \quad X_{\nu_2}^{(n)}, \quad \ldots, \quad X_{\nu_i}^{(n)}, \quad \ldots$$

Cette suite convergera vers le point $Z^{(n)}$ (1).

2^e^ *cas.* — Ou bien en extrayant de la suite (11) une suite convenable, on peut supposer que n_i croît constamment. Or, d'après le lemme 1, on peut faire correspondre à tout entier k un entier q_k tel qu'on ait

$$(X, X^{(n)}) < \frac{1}{k}$$

(1) En posant

$$X_{\nu_i} = (x_{\nu_i,1}, \ldots, x_{\nu_i,n}, \ldots), \qquad Z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots),$$

on a

$$(X_{\nu_i}^{(n)}, Z^{(n)}) = (x_{\nu_i,1} E_1^n + \ldots + x_{\nu_i,n} E_n^n, \; z_1 E_1^n + \ldots + z_n E_n^n).$$

D'autre part,

$$\lim_{i \to \infty} x_{\nu_i,j} = \lim_{i \to \infty} \theta_j(X_{\nu_i}) = \theta_j\left(\lim_{i \to \infty} X_{\nu_i}\right) = \theta_j(Z) = z_j.$$

Comme le point $x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n$ (n étant fixe) dépend continûment du système de nombres $x_1, \ldots, x_n$, on a donc $\lim\limits_{i \to \infty} (X_{\nu_i}^{(n)}, Z^{(n)}) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{i \to \infty} X_{\nu_i}^{(n)} = Z^{(n)}$.

pour $n > q_k$, X quelconque dans C. Si maintenant n_{p_1} est le premier des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$, qui est supérieur à q_1; n_{p_2} le premier des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$, qui est supérieur à q_2 et à n_{p_1}; ...; n_{p_k} est le premier des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$, qui est supérieur à q_k et à $n_{p_{k-1}}$, etc., on aura, quel que soit k,

$$(X_{p_k}, X_{p_k}^{(n_{p_k})}) < \frac{1}{k}.$$

Comme la suite $X_{p_1}, X_{p_2}, \ldots, X_{p_k}, \ldots$ converge vers le point Z(1), il en sera de même de la suite

$$X_{p_1}^{(n_{p_1})}, \quad X_{p_2}^{(n_{p_2})}, \quad \ldots, \quad X_{p_k}^{(n_{p_k})}, \quad \ldots.$$

Dans les deux cas, on a bien extrait de la suite (11) une suite convergente.

C. Q. F. D.

6. Convergence uniforme. — Appliquons maintenant les deux lemmes précédents à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 2. — *Soient $\mathcal{E}$ un espace de la catégorie* T′ *et* C *un ensemble compact et fermé de points de $\mathcal{E}$. Toute fonctionnelle* $Y = F(X)$, *qui est définie et continue dans* C, *peut être représentée sous la forme* (3) *d'une limite de fonctionnelles d'ordres entiers, avec convergence uniforme dans* C.

Démonstration. — D'après le théorème 1 et la remarque faite au début du paragraphe **4**, il nous reste seulement à prouver que la convergence de (3) est uniforme dans C.

Soit C_1 l'ensemble obtenu en adjoignant à l'ensemble C tous les points de la forme $X^{(n)} = x_1 E_1^n + \ldots + x_n E_n^n$, où n est un entier positif quelconque et $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ un point quelconque de C. On a vu que C_1 est aussi compact. Soit C_2 l'ensemble obtenu en adjoignant à C_1 tous ses points d'accumulation, C_2 est compact et fermé (2). Donc, la fonctionnelle $\mathcal{F}(X)$ [c'est le prolongement de la fonctionnelle F(X) sur l'espace $\mathcal{E}$ tout entier] continue dans C_2 y sera uniformément continue (3). Dès lors, à tout nombre $\varepsilon > 0$ on pourra faire correspondre un nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité

$$(X, X^{(n)}) < \eta, \tag{12}$$

vérifiée pour une valeur arbitraire de l'entier n et un point X quelconque de C, entraîne

$$|\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}(X^{(n)})| < \varepsilon. \tag{13}$$

---

(1) Car $p_k > p_{k-1}$, puisque $n_{p_k} > n_{p_{k-1}}$ et n_i croît constamment.

(2) Dans un espace distancié, un ensemble compact reste compact quand on lui adjoint tous ses points d'accumulation. *Cf.* M. Fréchet, [7], p. 4, ou [1], p. 270.

(3) *Cf.* M. Fréchet, [6], p. 29, ou [1], p. 271.

Or, d'après le lemme 1, on peut trouver un entier q tel que l'inégalité $n > q$ entraîne (12) et par suite (13), *quel que soit le point* X *de* C. Par conséquent, la convergence de (4) ou de

$$Y = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est uniforme dans C. Comme l'inégalité (7) est vraie pour tout point X de C, la convergence de (8), c'est-à-dire de (3), est aussi uniforme dans C.

C. Q. F. D.

7. Développement d'une fonction abstraite continue. — Nous avons terminé l'étude d'une représentation d'une fonctionnelle continue, passons maintenant à l'étude d'une représentation d'une fonction abstraite continue. Nous commençons par le cas où les espaces considérés appartiennent à la catégorie T de M. Fréchet.

Théorème 3. — *Soient* $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ *deux espaces (distincts ou non) de la catégorie* T *et* C *un ensemble compact et fermé de points de* $\mathcal{E}_1$. *Toute fonction abstraite* $Y = F(X)$ *qui transforme chaque point* X *de* C *en un point* Y *de* $\mathcal{E}_2$ *et qui est continue sur* C, *peut être représentée sur* C, *sous la forme*

$$Y = \lim_{s \to \infty} \left[\lim_{r \to \infty} Q_{r,s}(X) \right] \tag{14}$$

d'une limite double de fonctions abstraites $Q_{r,s}(X)$ *qui sont définies sur tout l'espace* $\mathcal{E}_1$ *et d'ordres entiers.*

Démonstration. — On a, par hypothèse,

$$X = \lim_{r \to \infty} (x_1 E_1^r + \ldots + x_r E_r^r), \tag{15}$$

$$Y = \lim_{s \to \infty} (y_1 G_1^s + \ldots + y_s G_s^s), \tag{16}$$

où G_k^s sont des points fixes de l'espace $\mathcal{E}_2$ (d'après la condition IV), et y_k sont les coordonnées du point Y.

La coordonnée y_k étant une fonctionnelle continue $y_k = \psi_k(Y)$ du point Y, $y_k = \psi_k[F(X)]$ est une fonctionnelle du point X, qui est définie et continue dans l'ensemble compact et fermé C. D'après le théorème 1 et la remarque faite au début du paragraphe 4, cette fonctionnelle peut être représentée sous la forme

$$y_k = \psi_k[F(X)] = \lim_{r \to \infty} \varphi_{r,k}(X) \tag{17}$$

d'une limite de fonctionnelles d'ordres entiers $\varphi_{r,k}(X)$. De (16) et (17), on tire

$$Y = \lim_{s \to \infty} \left\{ \lim_{r \to \infty} [\varphi_{r,1}(X) G_1^s + \ldots + \varphi_{r,s}(X) G_s^s] \right\}.$$

En posant

$$Q_{r,s}(X) = \varphi_{r,1}(X)G_1^s + \ldots + \varphi_{r,s}(X)G_s^s, \tag{18}$$

on obtient (14).

$Q_{r,s}(X)$ dépend continûment du système $\varphi_{r,1}(X), \ldots, \varphi_{r,s}(X)$ (quand r, s restent fixes) et les $\varphi_{r,k}(X)$ sont des fonctionnelles continues du point X. Par conséquent, $Q_{r,s}(X)$ sont des fonctions abstraites continues. On voit aisément que $Q_{r,s}(X)$ sont d'ordres entiers, puisque les $\varphi_{r,k}(X)$ sont des fonctionnelles d'ordres entiers. C. Q. F. D.

Si l'on suppose que $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ sont deux espaces de la catégorie T′, la représentation (14) peut être remplacée par une limite simple, avec convergence uniforme dans C. Ainsi nous obtiendrons un énoncé plus rapproché de celui de Weierstrass :

Théorème 4 (Théorème fondamental). — *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces de la catégorie* T′ *et* C *un ensemble compact et fermé de points de $\mathcal{E}_1$. Toute fonction abstraite* $Y = F(X)$ *qui transforme chaque point* X *de* C *en un point* Y *de $\mathcal{E}_2$ et qui est continue sur* C, *peut être représentée sur* C, *sous la forme*

$$Y = \lim_{n \to \infty} R_n(X) \tag{19}$$

d'une limite de fonctions abstraites $R_n(X)$ *qui sont définies sur tout l'espace $\mathcal{E}_1$ et d'ordres entiers. Et la convergence est uniforme dans l'ensemble* C.

Démonstration. — On voit dans la démonstration du théorème 3, que la représentation (14) peut être décomposée en

$$Y = \lim_{s \to \infty} Y^{(s)} \tag{20}$$

et

$$Y^{(s)} = \lim_{r \to \infty} Q_{r,s}(X), \tag{21}$$

où

$$Y^{(s)} = y_1 G_1^s + \ldots + y_s G_s^s.$$

D'après le théorème 2, pour chaque valeur de k, la convergence de (17) est uniforme dans l'ensemble C. Par suite, pour chaque valeur fixe de s, la convergence de (21) est uniforme dans C. Alors, pour chaque valeur positive de l'entier s, on pourra faire correspondre un entier r_s tel que

$$\left(Y^{(s)}, Q_{r_s,s}(X)\right) < \frac{1}{s}, \tag{22}$$

quel que soit le point X de C. En vertu de (20) et (22), on voit immédiatement que

$$Y = \lim_{s \to \infty} Q_{r_s,s}(X). \tag{23}$$

En posant

$$R_n(X) = Q_{r_n, n}(X),$$

on obtient la représentation (19).

Soit D l'ensemble de tous les points Y qui sont les transformés des points X de C par la transformation donnée $Y = F(X)$. L'ensemble C étant compact et fermé, d'après une propriété des transformations continues, l'ensemble D est aussi compact et fermé ([1]). Par suite, la convergence de (20) est uniforme dans D (lemme 1). C'est-à-dire, la convergence de

$$F(X) = \lim_{s \to \infty} [F(X)]^{(s)}$$

est uniforme dans C. Alors, en vertu de (22), la convergence de (23) ou bien de (19) est uniforme dans C. C. Q. F. D.

8. Classification de Baire pour les fonctions abstraites. — En généralisant la classification de Baire pour les fonctions ordinaires, nous appellerons *fonctions abstraites de classe* 0, toutes les fonctions abstraites continues, et ensuite *fonctions abstraites de classe* 1 toutes les fonctions abstraites discontinues qui sont limites de fonctions abstraites continues. Plus généralement, on peut appeler *fonction abstraite de classe n* toute limite de fonctions abstraites de classe $n-1$, qui n'appartient à aucune des classes $0, 1, \ldots, n-1$. Enfin, on peut définir des fonctions abstraites de classe $\omega, \omega+1, \ldots, \omega', \ldots, \omega^{\omega}, \ldots$ en désignant par ces symboles les divers nombres transfinis de Cantor; mais nous n'y insistons pas.

Le théorème 4 nous permet d'énoncer le théorème suivant dont la démonstration est immédiate :

Théorème 5. — *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces de la catégorie* T' *et* C *un ensemble compact et fermé de points de $\mathcal{E}_1$. Si les variables* X *et* Y *restent dans $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, les fonctions abstraites* $Y = F(X)$ *définies dans* C *et de classe* 0 *ou* 1 *sont les seules qui soient représentables par des limites simples de polynomes abstraits. Plus généralement, toute fonction abstraite* $Y = F(X)$ *définie dans* C *et de classe* $n (> 1)$ *est représentable par une limite multiple de n itérations de polynomes abstraits.*

9. Fonctionnelles semi-continues. — Toute fonctionnelle semi-continue est de classe 0 ou 1 au sens donné plus haut. On en conclut, d'après le théorème 5, que toute fonctionnelle, qui est définie et semi continue sur un ensemble C compact et fermé d'un espace de la catégorie T', peut être représentée sur C comme la limite d'une suite de fonctionnelles d'ordres entiers. On verra même qu'on peut préciser certains détails sur une telle représentation.

([1]) *Cf.* M. Fréchet, [1], p. 247.

THÉORÈME 6. — *Soient $\mathcal{E}$ un espace de la catégorie* T′ *et* C *un ensemble compact et fermé de points de $\mathcal{E}$. Toute fonctionnelle* $Y = F(X)$, *qui est définie et semi-continue supérieurement sur* C, *peut être représentée sur* C, *sous la forme*

$$Y = F(X) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(X), \tag{24}$$

où les $\varphi_n(X)$ *sont des fonctionnelles définies sur $\mathcal{E}$ tout entier et d'ordres entiers et forment une suite monotone constamment décroissante*

$$\varphi_1(X) > \varphi_2(X) > \ldots > \varphi_n(X) > \varphi_{n+1}(X) > \ldots.$$

Démonstration. — On sait que (¹) toute fonctionnelle F(X) semi-continue supérieurement sur C peut être considérée comme la limite d'une suite non croissante de fonctionnelles continues sur C

$$F(X) = \lim_{n \to \infty} F_n(X),$$

$$F_1(X) \geqq F_2(X) \geqq \ldots \geqq F_n(X) \geqq F_{n+1}(X) \geqq \ldots.$$

En posant

$$G_n(X) = F_n(X) + \frac{1}{n},$$

on a

$$F(X) = \lim_{n \to \infty} G_n(X),$$

$$G_n(X) - G_{n+1}(X) \geqq \frac{1}{n(n+1)}.$$

$G_n(X)$ étant des fonctionnelles continues sur C, d'après le théorème 2, pour chaque valeur de n, on peut trouver une fonctionnelle $\varphi_n(X)$, définie sur $\mathcal{E}$ et d'ordre entier et telle que

$$|G_n(X) - \varphi_n(X)| < \frac{1}{2n(n+1)}$$

pour tout point X de C. On a évidemment

$$F(X) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(X).$$

De plus, on a

$$\varphi_n(X) - \varphi_{n+1}(X) > G_n(X) - G_{n+1}(X) - \frac{1}{n(n+1)} \geqq 0.$$

C'est-à-dire, les $\varphi_n(X)$ forment une suite monotone constamment décroissante.

C. Q. F. D.

On obtiendra un théorème analogue sur les fonctionnelles semi-continues inférieurement, si l'on remplace dans le théorème 6 les mots *supérieurement* et *décroissante* par *inférieurement* et *croissante*.

(¹) *Cf.* M. F. HAUSDORFF, [1], p. 293.

Soit E un ensemble appartenant à un espace distancié. Étant données une fonctionnelle $G(X)$, définie et semi-continue inférieurement sur E et une fonctionnelle $H(X)$, définie et semi-continue supérieurement sur E et telles que $G(X) \geqq H(X)$ partout dans E. On sait, d'après un théorème dû à H. Hahn [1], qu'il existe une fonctionnelle $F(X)$, définie et continue sur E telle que $G(X) \geqq F(X) \geqq H(X)$ partout dans E.

Si l'on suppose que $G(X) > H(X)$ partout dans E, on peut démontrer, par le même raisonnement que M. Hausdorff ([1], p. 295) a utilisé pour prouver le théorème de Hahn, qu'il existe une fonctionnelle $F(X)$, définie et continue sur E et telle que $G(X) > F(X) > H(X)$ partout dans E.

Ceci étant, nous allons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Soient* $\mathcal{E}$ *un espace de la catégorie* T′ *et* C *un ensemble compact et fermé de points de* $\mathcal{E}$. *Étant données une fonctionnelle* $G(X)$, *définie et semi-continue inférieurement sur* C *et une fonctionnelle* $H(X)$, *définie et semi-continue supérieurement sur* C *et telles que* $G(X) > H(X)$ *partout dans* C, *il existe alors une fonctionnelle* $P(X)$, *définie sur tout l'espace* $\mathcal{E}$ *et d'ordre entier et telle que* $G(X) > P(X) > H(X)$ *partout dans* C.

Démonstration. — D'après ce qui précède, il existe une fonctionnelle $F(X)$, définie et continue sur C telle que $G(X) > F(X) > H(X)$ partout dans C. Maintenant $G(X) - F(X) > 0$ et $F(X) - H(X) > 0$ sont deux fonctionnelles semi-continues inférieurement sur l'ensemble compact et fermé C. Elles atteignent leurs bornes inférieures b_1, b_2 en au moins un point de C. b_1, b_2 sont alors nécessairement positifs. Soit b le plus petit entre les deux nombres positifs b_1, b_2. On a

$$G(X) \geqq F(X) + b > F(X) > F(X) - b \geqq H(X)$$

pour tout point X de C. Or, d'après le théorème 2, on peut trouver une fonctionnelle $P(X)$, définie sur tout l'espace $\mathcal{E}$ et d'ordre entier, telle que

$$|P(X) - F(X)| < b$$

pour tout point X de C. $P(X)$ satisfait bien aux inégalités

$$G(X) > P(X) > H(X),$$

quel que soit le point X de C. C. Q. F. D.

10. EXEMPLES D'ESPACES DE LA CATEGORIE T′. — La définition de la catégorie T′ peut paraître complexe, mais pour en justifier la considération, il suffit d'observer qu'*elle comprend*, *outre les espaces cartésiens* (R_n) $(n = 1, 2, \ldots)$,

---

(1) *Cf.* H. HAHN, [1], p. 103, ou M. FRÉCHET, [1], p. 272.

beaucoup d'espaces fonctionnels importants, soit en Analyse, soit en Topologie, et dont nous allons citer quelques-uns :

Exemple 1. — *Espace* (C) *des fonctions continues* $X(t)$ *d'une variable réelle* t, $0 \leqq t \leqq \pi$ (1).

C'est un espace distancié affine (M. Fréchet, [1], p. 142-143), où les distances sont inaltérées dans toute translation. La condition I (§ 2) est donc vérifiée.

A chaque point $X(t)$ de l'espace (C) on peut faire correspondre une suite de nombres $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ comme ses coordonnées où les x_n sont déterminés de la manière suivante : si $\mathfrak{X}(t)$ est la fonction continue de période 2π égale à $X(t)$ dans $0 \leqq t \leqq \pi$ et à $X(-t)$ dans $-\pi \leqq t \leqq 0$, les x_n seront les coefficients de la série de Fourier de $\mathfrak{X}(t)$:

$$\mathfrak{X}(t) \sim \frac{x_0}{\sqrt{2}} + x_1 \cos t + x_2 \cos 2t + \ldots + x_n \cos nt + \ldots.$$

On sait que

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi X(t)\,dt, \qquad x_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi X(t) \cos nt\,dt \qquad \text{pour } n \geqq 1. \tag{25}$$

D'après (25), on voit immédiatement que les conditions II et III *bis* sont réalisées.

D'après un théorème bien connu de Fejér, l'expression

$$\sigma_{n,X}(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}} + x_1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cos t + \ldots$$
$$+ x_p\left(1 - \frac{p}{n}\right)\cos pt + \ldots + x_{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\cos(n-1)t$$

tend uniformément vers $X(t)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. Si l'on pose

$$E_0^n = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad E_1^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cos t, \qquad \ldots, \qquad E_p^n = \left(1 - \frac{p}{n}\right)\cos pt, \qquad \ldots,$$
$$E_{n-1}^n = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\cos(n-1)t,$$

on a alors

$$X = \lim_{n \to \infty} (x_0 E_0^n + \ldots + x_{n-1} E_{n-1}^n),$$

ce qui montre que la condition IV est aussi vérifiée.

On sait que les expressions $\sigma_{n,X}(t)$ de Fejér restent toujours comprises entre le maximum et le minimum de $X(t)$ (2), alors la condition V est aussi réalisée. Ainsi l'espace (C) appartient à la catégorie T'.

---

(1) Pour la définition de l'espace (C), *voir* M. Fréchet, [1], p. 88.

(2) *Cf.* M. H. Lebesgue, [1], p. 98.

Appliquons le théorème 6 au cas où l'espace $\mathcal{E}$ est l'espace (C). Toute fonctionnelle $Y = F(X)$ semi-continue supérieurement sur un ensemble compact et fermé de (C) peut être représentée sous la forme

$$Y = F(X) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(X),$$

où les $\varphi_n(X)$ sont des fonctionnelles d'ordres entiers formant une suite monotone constamment décroissante. Dans la démonstration du théorème 1, on peut voir qu'on a ici

$$\varphi_n(X) = P_n(x_0, x_1, \ldots, x_{q_n}),$$

où P_n sont des polynomes en $x_0, x_1, \ldots, x_{q_n}$ et les x_i sont définis par (25). M. Fréchet ([3], p. 197) a démontré qu'on peut exprimer $P_n(x_0, x_1, \ldots, x_{q_n})$ par une somme d'intégrales multiples

$$P_n(x_0, x_1, \ldots, x_{q_n}) = K_n^{(0)} + \int_0^\pi K_n^{(1)}(t_1) X(t_1)\, dt_1 + \ldots$$
$$+ \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi K_n^{(r_n)}(t_1, \ldots, t_{r_n}) X(t_{r_n}) \ldots X(t_1)\, dt_1 \ldots dt_{r_n},$$

où les $K_n^{(j)}$ sont des fonctions continues qui sont déterminées par la fonctionnelle $F(X)$ *indépendamment* de la fonction $X(t)$.

En résumé, *toute fonctionnelle $Y = F(X)$ qui est définie et semi-continue supérieurement (inférieurement) sur un ensemble compact et fermé de* (C) *peut être représentée, sur cet ensemble, sous la forme*

$$(26) \qquad F(X) = \lim_{n \to \infty} \Big\{ K_n^{(0)} + \int_0^\pi K_n^{(1)}(t_1) X(t_1)\, dt_1$$
$$+ \int_0^\pi \int_0^\pi K_n^{(2)}(t_1, t_2) X(t_2) X(t_1)\, dt_1\, dt_2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi K_n^{(r_n)}(t_1, \ldots, t_{r_n}) X(t_{r_n}) \ldots X(t_1)\, dt_1 \ldots dt_{r_n} \Big\},$$

où les $K_n^{(j)}$ sont des fonctions continues qui sont déterminées par la fonctionnelle $F(X)$ indépendamment de la fonction $X(t)$. De plus, en désignant par $\varphi_n(X)$ l'expression entre l'accolade de (26), *la suite des $\varphi_n(X)$ est constamment décroissante (croissante).*

Exemple 2. — *Espace (l^p) $(p \geq 1)$ des suites de nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ est convergente, la distance de deux points*

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ *étant définie par*

$$(X, Y) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Dans les cas particuliers $p = 2$ et $p = 1$, on a respectivement *l'espace* (l^2) *de Hilbert* et *l'espace* (l^1) *des séries absolument convergentes* (1).

On vérifie facilement que l'espace (l^p) appartient à la catégorie T′, quel que soit $p \geqq 1$.

Exemple 3. — *Espace* (L^2) *des fonctions de carrés sommables* (2).

Exemple 4. — *Espace* (S) *des séries convergentes* (3).

Exemple 5. — *Espace* (E_ω) *de M. Fréchet* ([1], p. 81).

M. Fréchet ([8], p. 48-49) a démontré que cet espace est un espace distancié affine. On vérifie facilement qu'il appartient à notre catégorie T′.

Exemple 6. — *Espace* (R) *où chaque point a un nombre fini non borné de coordonnées* (M. Fréchet, [1], p. 76).

C'est un espace distancié affine (M. Fréchet, [8], p. 49) qui appartient à la catégorie T′.

11. Remarques. — 1° Dans le théorème 1, nous avons supposé que l'ensemble D est fermé et que la fonctionnelle F(X) est bornée sur D; ces deux hypothèses ont été utilisées seulement pour prolonger la fonctionnelle F(X) sur l'espace $\mathcal{E}$ tout entier. Donc, *le théorème* 1 *restera vrai, si l'on suppose* D *seulement borné (fermé ou non) et* F(X) *définie et continue (bornée ou non) sur tout l'espace* $\mathcal{E}$.

2° De même, *le théorème* 2 *subsistera, si l'on suppose* C *seulement compact (fermé ou non) et* F(X) *définie et continue sur l'espace* $\mathcal{E}$ *tout entier (au lieu de* C). Après cette modification, notre théorème 2 devient, pour le cas de l'espace (C), celui de M. Fréchet ([3], p. 195-202; *voir* aussi MM. Volterra et Pérès, [1], p. 61-63) bien connu en Calcul fonctionnel.

3° D'après la remarque 1° que nous venons de faire, *le théorème* 3 *restera valide, si l'on suppose l'ensemble* C *borné (au lieu d'être compact et fermé) et* F(X) *définie et continue sur tout l'espace* $\mathcal{E}_1$ *(au lieu de* C).

---

(1) Dans M. Fréchet, [1], p. 83, 86, l'espace (l^2) de Hilbert est désigné par (Ω) et l'espace (l^1) des séries absolument convergentes est désigné par (A).

(2) L'espace (L^2) est désigné par (Ω_1) dans M. Fréchet, [1], p. 90.

(3) Pour la définition de l'espace (S), *voir* M. Fréchet, [1], p. 84.

4° *Le théorème 4 subsistera, si l'on suppose* C *seulement compact (fermé ou non) et* F(X) *définie et continue dans tout l'espace* $\mathcal{E}_1$ *(au lieu de* C).

5° Nous avons vu que tout espace de la catégorie T′ appartient à la catégorie T de M. Fréchet. On pourrait se demander si la catégorie T′ est effectivement plus restreinte que T. Nous n'avons pu ni trouver un exemple d'espace appartenant à T et restant en dehors de la catégorie T′, ni démontrer que les deux catégories sont identiques.

CHAPITRE II.

NOTION DE DIFFÉRENTIELLE.

12. Introduction. — MM. Hadamard et Fréchet se sont occupés, à plusieurs reprises, de la notion de différentielle. M. Hadamard [1] a proposé dans l'Analyse classique une définition opératoire de la différentielle. M. Fréchet, ayant donné en 1925 [9] une définition de la différentielle dans l'Analyse générale, a introduit, dans un Mémoire paru en 1937 [10], la généralisation de la définition opératoire de M. Hadamard dans l'Analyse fonctionnelle. Il a écrit à la fin de ce Mémoire :

« L'intérêt de la définition de M. Hadamard n'est pas épuisé par son utilisation en Analyse fonctionnelle. Il est peut-être plus encore dans la possibilité de son extension en Analyse générale.... La définition au sens de M. Hadamard généralisé présente sur notre définition (¹) l'avantage de garder un sens pour des espaces abstraits vectoriels non distanciés où notre définition ne s'applique pas (ou, tout au moins, ne s'applique pas littéralement). Il reste à voir si elle conserve les propriétés les plus importantes de la différentielle classique en dehors de la propriété essentielle (généralisant le théorème des fonctions composées) qui lui sert de définition. C'est un point sur lequel nous reviendrons ultérieurement. »

M. Fréchet a eu l'obligeance de me conseiller d'étudier cette question qu'il avait d'abord l'intention de traiter lui-même. Nous allons montrer dans le présent Chapitre que la différentielle au sens de M. Hadamard généralisé par M. Fréchet en Analyse générale conserve les propriétés les plus importantes de la différentielle classique, si l'on se borne aux espaces distanciés vectoriels (²). La définition gardera encore un sens pour des espaces plus généraux, par exemple pour les espaces distanciés affines. Mais les propriétés les plus importantes ne subsisteront plus.

(¹) C'est-à-dire la définition que M. Fréchet [9] a proposée en 1925.

(²) Pour la définition des espaces distanciés vectoriels, *voir* M. Fréchet, [1], p. 140.

13. Notations. — Dans l'étude de la notion de polynome abstrait, on a affaire à des opérations effectuées sur les points d'un espace distancié affine (à savoir l'addition de deux points et la multiplication d'un point par un nombre réel). Dans le présent chapitre, pour définir la différentielle, nous aurons affaire à des opérations effectuées sur les vecteurs (*non sur les points*), à savoir l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

D'après la définition des espaces distanciés affines (M. Fréchet, [1], p. 144), à tout espace distancié affine $\mathcal{E}$ est associé un champ σ de vecteurs. A tout couple ordonné x_1, x_2 de points de $\mathcal{E}$ correspond un vecteur v déterminé de σ. Nous exprimerons cette correspondance par la notation $\overrightarrow{x_1 x_2} = v$ ou $x_2 - x_1 = v$.

Inversement, étant donnés un vecteur v de σ et un point x_1 de $\mathcal{E}$, il existe un point x_2 et un seul tel que $\overrightarrow{x_1 x_2} = v$. Le point x_2 ainsi déterminé par x_1 et v sera désigné par $x_2 = x_1 + v$.

La somme et la différence de deux vecteurs v_1, v_2 de σ seront désignées par $v_1 \pm v_2$. Le produit d'un vecteur v par un nombre réel λ sera désigné par λv. Enfin, $\|v\|$ désignera la longueur du vecteur v.

Soient λ un paramètre numérique réel et λ_0 une valeur fixe de λ. Si $\{u(\lambda)\}$ est une famille de vecteurs de σ dépendant du paramètre λ et v est un vecteur fixe de σ, la notation

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} u(\lambda) = v$$

devra signifier

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| u(\lambda) - v \| = 0.$$

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces distanciés affines et σ_1, σ_2 les champs de vecteurs respectivement associés à $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Une transformation vectorielle $\Psi(v)$ qui fait correspondre à chaque vecteur v de σ_1 un vecteur $\Psi(v)$ de σ_2 sera dite *continue*, si la longueur $\|\Psi(v)\|$ tend vers zéro avec $\|v\|$. La transformation vectorielle $\Psi(v)$ sera dite *linéaire*, si elle est continue et additive au sens restreint, c'est-à-dire telle que, pour deux vecteurs v_1, v_2 quelconques de σ_1, on ait

$$\Psi(v_1 + v_2) = \Psi(v_1) + \Psi(v_2).$$

14. Définition. — Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces distanciés affines, distincts ou non. Soit $X = F(x)$ une transformation ponctuelle qui est définie pour les points x d'un voisinage V_{x_0} d'un point x_0 de $\mathcal{E}_1$ et qui transforme chaque point x de V_{x_0} en un point X de $\mathcal{E}_2$.

La transformation ponctuelle $X = F(x)$ sera dite *différentiable au point* x_0, s'il existe une transformation vectorielle linéaire $\Psi(v)$ qui transforme chaque vecteur v du champ σ_1 associé à $\mathcal{E}_1$ en un vecteur du champ σ_2 associé à $\mathcal{E}_2$ et qui est telle que la condition suivante soit vérifiée :

Si l'on considère une transformation $x = g(\lambda)$ d'un nombre réel λ en un point x de V_{x_0} telle que

1° $x_0 = g(0)$;

2° $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\overrightarrow{g(0)\, g(\lambda)}}{\lambda}$ existe, c'est un vecteur du champ σ_1, qu'on peut écrire par $\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}$;

on aura

1° $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{F(g(\lambda)) - F(g(0))}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\overrightarrow{F(x_0)\, F(g(\lambda))}}{\lambda}$ existe. C'est un vecteur du champ σ_1, qu'on peut écrire par $\frac{dF(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}$;

2° $\frac{dF(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = \Psi\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right)$.

Cette définition est une généralisation de la définition de M. Hadamard [1], celle-ci étant donnée pour les fonctions ordinaires. Comme M. Fréchet ([10], p. 244) a déjà généralisé la définition de M. Hadamard à l'Analyse fonctionnelle, l'extension formulée ici à l'Analyse générale est immédiate.

Théorème 8. — *Si* $X = F(x)$ *est différentiable en* x_0, *il n'y a aucune transformation vectorielle linéaire* $\Theta(v)$, *outre que* $\Psi(v)$, *qui puisse jouer le rôle de* $\Psi(v)$.

Démonstration. — Supposons que $\Theta(v)$ joue le même rôle que $\Psi(v)$. Soit v un vecteur arbitrairement choisi du champ σ_1, considérons la transformation $x = g(\lambda)$ d'un nombre réel λ en un point x de V_{x_0}

$$x = g(\lambda) = x_0 + \lambda v \quad (^1).$$

On a

$$x_0 = g(0) \quad \text{et} \quad \frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} = v.$$

Donc, $\frac{dF(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}$ existe et l'on a nécessairement

$$\frac{dF(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = \Psi(v) = \Theta(v).$$

Mais v est un vecteur arbitraire de σ_1, les deux transformations vectorielles $\Psi(v)$ et $\Theta(v)$ sont donc identiques. C. Q. F. D.

D'après ce théorème, la transformation vectorielle $\Psi(v)$ est seule de son espèce; nous l'appellerons *la transformation tangentielle de* $F(x)$ *en* x_0. Le vecteur v peut être considéré comme un accroissement Δx de l'argument x.

---

(1) Le vecteur v étant fixe, le point x appartient donc au voisinage V_{x_0} de x_0 quand $|\lambda|$ est assez petit.

On aura souvent avantage à appeler $\Psi(\Delta x)$ *la différentielle de* $F(x)$ *en* x_0 *correspondant à un accroissement* Δx. Nous la représenterons par $dF(x)$ ou plus précisément par $\delta_{\Delta x}^{x_0} F(x)$:

$$(27) \qquad dF(x) \qquad \delta_{\Delta x}^{x_0} F(x) = \Psi(\Delta x).$$

Remarquons toutefois que la longueur

$$\left\| \delta_{\Delta x}^{x_0} F(x) - \overrightarrow{F(x_0)\, F(x_0 + \Delta x)} \right\|$$

n'est pas nécessairement infiniment petite par rapport à la longueur $\|\Delta x\|$. Tel est le cas, comme M. Fréchet ([10], p. 247-249) l'a démontré, où $X = F(x)$ est la fonctionnelle numérique définie sur l'espace (C) des fonctions $x(t)$ continues dans $a \leqq t \leqq b$:

$$F(x) = \operatorname*{Max}_{a \leqq t \leqq b} x(t),$$

et où x_0 est une fonction $x_0(t)$ n'atteignant son maximum qu'en un seul point.

15. Continuité d'une fonction abstraite différentiable. — Bien que la définition de la différentielle ait été donnée dans le cas où les espaces considérés sont les espaces distanciés affines, *nous allons supposer dans les paragraphes* **15-22** *que les espaces considérés sont non seulement distanciés affines, mais aussi distanciés vectoriels* [1], ce qui nous permettra d'établir les propriétés les plus importantes de la différentielle classique. Et nous verrons plus tard (§ **25**) comment on peut modifier la définition de la différentielle dans le cas plus général des espaces distanciés affines, de sorte que les théorèmes contenus dans les paragraphes **15-17** et **19-21** restent vrais.

Théorème 9. — *Si la fonction abstraite* $X = F(x)$ *est différentiable au point* x_0, *elle est continue en ce point.*

Démonstration. — Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite infinie de points distincts de V_{x_0} telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. On peut déterminer une suite d'entiers positifs

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_m < N_{m+1} < \ldots$$

telle que la distance

$$(x_0, x_n) \leqq \frac{1}{m^2} \qquad \text{pour tous les } n \geqq N_m,$$

quel que soit $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Définissons maintenant la transformation $x = g(\lambda)$ d'un nombre réel $\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$ en un point x de V_{x_0} comme il suit : D'abord, pour $\lambda = 0$,

[1] Tout espace distancié vectoriel est aussi distancié affine, mais pas réciproquement.

on pose $g(0) = x_0$. Pour $\frac{1}{m} \geqq \lambda > \frac{1}{m+1}$ et $k = 0, 1, 2, \ldots, (N_{m+1} - N_m - 1)$, on définit $g(\lambda) = x_{N_m + k}$, quand

$$\frac{1}{m} - \frac{k}{N_{m+1} - N_m}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) \geqq \lambda > \frac{1}{m} - \frac{k+1}{N_{m+1} - N_m}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right).$$

On a alors

$$\frac{(g(0), g(\lambda))}{\lambda} \leqq \frac{m+1}{m^2} \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{m} \geqq \lambda > \frac{1}{m+1};$$

$$\frac{(g(0), g(\lambda))}{\lambda} \leqq \frac{m+2}{(m+1)^2} < \frac{m+1}{m^2} \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{m+1} \geqq \lambda > \frac{1}{m+2};$$

. . . .

Il en résulte que

$$\frac{(g(0), g(\lambda))}{\lambda} \leqq \frac{m+1}{m^2} \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{m} \geqq \lambda > 0.$$

Alors

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{(g(0), g(\lambda))}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{\overrightarrow{g(0)\, g(\lambda)}}{\lambda} \right\| = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = 0, \quad \text{le zéro-vecteur de } \sigma_1.$$

On en conclut que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(g(\lambda)) - F(g(0))}{\lambda} \quad \text{existe et} = \Psi(0) = 0$$

(c'est-à-dire, le zéro-vecteur de σ_2) (¹). D'où l'on a

$$\lim_{\lambda \to 0} \big(F(x_0), F(g(\lambda))\big) = 0$$

ou bien

$$\lim_{n \to \infty} \big(F(x_0), F(x_n)\big) = 0.$$

$F(x)$ est donc continue en x_0. C. Q. F. D.

Si les espaces considérés sont seulement supposés distanciés *affines*, notre théorème 9 n'est pas vrai : *une fonction abstraite* $F(x)$ *différentiable en* x_0 *n'est pas nécessairement continue en* x_0 [même dans le cas où $F(x)$ est une fonctionnelle numérique]. Ceci résultera de l'exemple suivant.

Soit (R) l'espace où chaque point a un nombre fini non borné de coordonnées (*voir* § **10**, Ex. 6). Il revient au même de supposer que chaque point x

(¹) Car toute transformation vectorielle linéaire transforme le zéro-vecteur de σ_1 en zéro-vecteur de σ_2.

de (R) a une suite infinie de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, nulles à partir d'un certain rang variable avec le point. La distance de deux points $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ et $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ est définie par

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|y_n - x_n|}{1+|y_n - x_n|}.$$

A tout couple ordonné de points x, y, faisons correspondre le vecteur

$$\overrightarrow{xy}=\{y_1-x_1, y_2-x_2, \ldots, y_n-x_n, \ldots\}.$$

Définissons l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel de la façon habituelle. La longueur d'un vecteur $\overrightarrow{xy}$ est définie par

$$\|\overrightarrow{xy}\|=\sum_{n=1}^{\infty}|y_n - x_n|.$$

On voit aisément que l'espace (R) est un espace distancié affine.

Considérons maintenant la fonctionnelle

$$X=F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

qui transforme chaque point $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de (R) en un point X de l'espace cartésien linéaire (R_1). L'espace (R_1) est un espace distancié vectoriel avec une interprétation évidente des vecteurs. Il est manifeste que $F(x)$ n'est pas continue au point $o=(o, o, \ldots, o, \ldots)$ de (R).

Soit $x=g(\lambda)=(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_n(\lambda), \ldots)$ une transformation d'un nombre réel λ en un point x de (R) telle que $g(o)=(o, o, \ldots, o, \ldots)$ et

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(\lambda)-g(o)}{\lambda}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

On a alors

$$\lim_{\lambda \to 0}\left\|\left\{\frac{x_1(\lambda)}{\lambda}-a_1, \ldots, \frac{x_n(\lambda)}{\lambda}-a_n, \ldots\right\}\right\|=o$$

ou

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n(\lambda)}{\lambda}-a_n\right|=o.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n(\lambda)}{\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

D'autre part,

$$\frac{F(g(\lambda))-F(g(o))}{\lambda}=\left\{\frac{\sum_{n=1}^{\infty}x_n(\lambda)}{\lambda}\right\}, \quad \text{un vecteur de } (R_1) \ (^1)$$

On a alors

$$\frac{dF(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}=\lim_{\lambda\to 0}\left\{\frac{\sum_{n=1}^{\infty}x_n(\lambda)}{\lambda}\right\}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right\}.$$

La transformation vectorielle

$$\Psi(v)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right\}, \qquad \text{où} \quad v=\{x_1, x_2, \ldots x_n,$$

est évidemment linéaire et l'on a

$$\frac{dF(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}=\Psi\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right).$$

$F(x)$ est donc différentiable au point $o=(o, o, \ldots, o, \ldots)$, bien qu'elle y soit discontinue.

16. Théorème des fonctions abstraites composées. — Soient maintenant $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ trois espaces distanciés vectoriels et x, X, Y les variables appartenant respectivement à $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$. Supposons que $X=F(x)$ est définie dans un voisinage V_{x_0} d'un point x_0 de $\mathcal{E}_1$ et différentiable en x_0, avec la transformation tangentielle $\Psi(v)$. Supposons encore que $Y=G(X)$ est définie dans un voisinage V_{X_0} du point $X_0=F(x_0)$ et différentiable en X_0, avec la transformation tangentielle $\Theta(u)$.

D'après le théorème 9, $F(x)$, $G(X)$ sont continues en x_0 et X_0 respectivement. Donc, $H(x)=G(F(x))$ est défini dans un voisinage W_{x_0} du point x_0.

Considérons une transformation $x=g(\lambda)$ d'un nombre réel λ en un point x de W_{x_0} telle que $x_0=g(o)$ et $\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}$ existe. Posons $g_1(\lambda)=F(g(\lambda))$. On a $g_1(o)=X_0$. De plus, d'après la différentiabilité de $F(x)$,

$$\begin{aligned}\frac{dg_1(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}&=\lim_{\lambda\to 0}\frac{g_1(\lambda)-g_1(o)}{\lambda}\\&=\lim_{\lambda\to 0}\frac{F(g(\lambda))-F(g(o))}{\lambda} \text{ existe} \quad \text{et} \quad =\Psi\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right).\end{aligned}$$

(1) Un point ou un vecteur de l'espace cartésien linéaire (R_1) est toujours représenté par un nombre réel. Nous écrivons par la notation $\{r\}$ pour désigner le vecteur de (R_1) représenté par le nombre réel r.

Comme $G(X)$ est différentiable en X_0, il en résulte que

$$\frac{d\,G(g_1(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} \text{ existe et } = \Theta\left(\frac{dg_1(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right) = \Theta\left(\Psi\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right)\right).$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{d\,G(g_1(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{G(g_1(\lambda))-G(g_1(0))}{\lambda}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{G\big(F(g(\lambda))\big)-G\big(F(g(0))\big)}{\lambda}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{H(g(\lambda))-H(g(0))}{\lambda} = \frac{dH(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}.\end{aligned}$$

La fonction composée $H(x) = G\big(F(x)\big)$ est donc différentiable en x_0 et sa transformation tangentielle est $\Theta\big(\Psi(v)\big)$ [1]. On a ainsi le théorème suivant :

THEORÈME 10. — *La composition de deux fonctions abstraites* $F(x)$, $G(X)$ *différentiables successives donne une fonction abstraite différentiable* $G\big(F(x)\big)$. *Et la transformation tangentielle de* $G\big(F(x)\big)$ *s'obtient par la composition des deux transformations tangentielles successives de* $F(x)$ *et de* $G(X)$.

17. LA FORMULE $dX = \Psi(dx)$. — Nous avons introduit la notation

$$dF(x) = \delta_{\Delta x}^{x_0} F(x) = \Psi(\Delta x) \tag{27}$$

pour désigner la différentielle de $F(x)$ en x_0 correspondant à un accroissement Δx. Dans le cas particulier de la transformation identique $F(x) = x$, la différentielle de $F(x)$ en x_0 correspondant à un accroissement Δx est évidemment Δx. On a donc

$$dx = \Delta x, \tag{28}$$

lorsque x est la variable indépendante et, par suite on a aussi

$$dX = dF(x) = \Psi(dx), \tag{29}$$

toujours quand x est la variable indépendante.

Or, si x est une fonction abstraite d'une variable abstraite y, $x = G(y)$, qui est différentiable en y_0 [où $x_0 = G(y_0)$] et qui a $\Theta(\Delta y)$ comme sa différentielle en y_0 correspondant à un accroissement Δy, on a vu (théorème 10) que la fonction abstraite $F\big(G(y)\big)$ est différentiable en y_0 et que sa différentielle correspondant à un accroissement Δy est $\Psi\big(\Theta(\Delta y)\big)$. On a donc

$$dX = \delta_{\Delta y}^{y_0} F\big(G(y)\big) = \Psi\big(\Theta(\Delta y)\big) = \Psi\big(\delta_{\Delta y}^{y_0} G(y)\big) = \Psi(dx).$$

(1) La transformation vectorielle $\Theta\big(\Psi(v)\big)$ est évidemment linéaire.

Ainsi, *lorsque* $\Psi(\Delta x)$ *est la différentielle d'une fonction abstraite* X *de* x, *la relation*

$$dX = \Psi(dx) \tag{30}$$

a lieu, non seulement quand x *est une variable indépendante, mais même quand c'est une fonction abstraite différentiable d'une autre variable abstraite* y. L'avantage précieux de la notation différentielle consiste précisément en la possibilité de ne pas préciser quelle est la variable que l'on considérera comme indépendante.

18. LA DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION ABSTRAITE CONSTANTE. — THÉORÈME 11. — *Soit* $X = F(x)$ *une fonction abstraite différentiable pour tous les points* x *d'une sphère ouverte* S, $(x_0, x) < r$, *de l'espace* $\mathcal{E}_1$ (x_0 étant un point fixe de $\mathcal{E}_1$ et r un nombre positif). *La condition nécessaire et suffisante pour que* $X = F(x)$ *soit une constante abstraite sur* S (c'est-à-dire que X soit fixe quand x décrit S) *est que* $\delta^{x}_{\Delta x} F(x)$ *soit identiquement le zéro-vecteur pour tout point* x *de* S *et tout accroissement* Δx *de* x.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est aussi suffisante. Soit x_1 un point arbitrairement choisi de S. Appelons

$$x_\lambda = x_0 + \lambda \overrightarrow{x_0 x_1} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1).$$

Les points x_λ appartiennent évidemment à S. Posons $g(\lambda) = x_\lambda$. C'est une transformation d'un nombre réel λ en un point x_λ de S. On a, pour un λ_0 fixe ($0 \leqq \lambda_0 \leqq 1$),

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \overrightarrow{x_0 x_1}.$$

Alors, d'après la différentiabilité de $F(x)$ en x_{λ_0} et d'après la condition $\delta^{x}_{\Delta x} F(x) \equiv 0$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\overrightarrow{F(x_{\lambda_0})\, F(x_\lambda)}}{\lambda - \lambda_0} = \delta^{x_{\lambda_0}}_{\overrightarrow{x_0 x_1}} F(x) = 0.$$

D'où

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\left\| \overrightarrow{F(x_{\lambda_0}) F(x_\lambda)} \right\|}{|\lambda - \lambda_0|} = 0.$$

Considérons maintenant la fonction ordinaire numérique

$$h(\lambda) = \left\| \overrightarrow{F(x_0)\, F(x_\lambda)} \right\| \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1).$$

On a

$$\left| \frac{h(\lambda) - h(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| = \frac{\left| \left\| \overrightarrow{F(x_0)\, F(x_\lambda)} \right\| - \left\| \overrightarrow{F(x_0)\, F(x_{\lambda_0})} \right\| \right|}{|\lambda - \lambda_0|} \leqq \frac{\left\| \overrightarrow{F(x_{\lambda_0})\, F(x_\lambda)} \right\|}{|\lambda - \lambda_0|},$$

et par suite

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=\lambda_0)} = 0.$$

Or, λ_0 est un nombre arbitrairement choisi dans l'intervalle $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $h(\lambda)$ est donc une constante dans cet intervalle. D'autre part, on a

$$h(0) = \|\overrightarrow{F(x_0)\,F(x_0)}\| = 0.$$

Donc, $h(\lambda) \equiv 0$ pour $0 \leqq \lambda \leqq 1$. C'est-à-dire $F(x_\lambda) \equiv F(x_0)$ pour $0 \leqq \lambda \leqq 1$. On en conclut que $F(x)$ est une constante abstraite dans S. C. Q. F. D.

Nous dirons qu'un ensemble ouvert A d'un espace distancié est *d'un seul tenant* si, pour tout couple de points x_1, x_2 de A, il existe au moins une suite d'un nombre fini de sphères ouvertes appartenant à A dont la première contient x_1, dont la dernière contient x_2 et ayant chacune au moins un point commun avec la précédente.

On déduit facilement du théorème 11 le théorème suivant :

Théorème 12. — *Si* $X = F(x)$ *est défini sur un ensemble ouvert d'un seul tenant* A, *de l'espace* $\mathcal{E}_1$, *et si* $F(x)$ *est différentiable sur cet ensemble, la condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction abstraite soit constante sur* A *est que* $\delta^r_{\Delta x} F(x)$ *soit identiquement le zéro-vecteur pour tout point* x *de* A *et tout accroissement* Δx *de* x.

19. Composition d'un nombre fini d'espaces distanciés vectoriels. — Supposons qu'un point X d'un espace distancié vectoriel $\mathcal{E}$ dépende de plusieurs points x_1, x_2, ..., x_n en nombre fini et appartenant chacun à un espace distancié vectoriel $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$. On pourra écrire $X = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pour définir la différentielle totale d'une fonction abstraite de plusieurs variables, nous rappelons d'abord la construction due à M. Fréchet ([9], p. 317) d'un espace distancié vectoriel E composé à partir de n espaces distanciés vectoriels $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$.

Nous considérons l'ensemble des points x_1, x_2, ..., $x_n (x_i \in \mathcal{E}_i)$ comme définissant un point $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un espace E. La distance de deux points α et $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de E est définie par

$$(\alpha, \beta) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \ldots + (x_n, y_n).$$

Soient σ_1, σ_2, ..., σ_n les champs de vecteurs respectivement associés aux espaces $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$. Nous considérons l'ensemble de vecteurs u_1, u_2, ..., $u_n (u_i \in \sigma_i)$ comme définissant un vecteur $\xi = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ du champ Σ associé à E. Soient ξ et $\eta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ deux vecteurs de Σ et r un nombre réel, posons

$$\begin{aligned} \xi+\eta &= \{u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \dots,\ u_n+v_n\}, \\ r\xi &= \{ru_1,\ ru_2,\ \dots,\ ru_n\}, \\ \|\xi\| &= \|u_1\|+\|u_2\|+\dots+\|u_n\|. \end{aligned}$$

On voit que $\mathbf{E}$ est un espace distancié vectoriel.

Soit $\Psi_i(u_i)$ une transformation vectorielle linéaire de σ_i en σ $(i=1, 2, \dots, n)$, où σ désigne le champ de vecteurs associé à un espace distancié vectoriel $\mathcal{E}$. La transformation vectorielle $\Psi(\xi)$ définie par

$$\Psi(\xi)=\Psi(\{u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n\})=\Psi_1(u_1)+\Psi_2(u_2)+\dots+\Psi_n(u_n)$$

est linéaire de Σ en σ.

Inversement, si $\Psi(\xi)=\Psi(\{u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n\})$ est une transformation vectorielle linéaire de Σ en σ et

$$\Psi_i(u_i)=\Psi(\{0,\ \dots,\ 0,\ u_i,\ 0,\ \dots,\ 0\}) \qquad (1\leqq i\leqq n);$$

$\Psi_i(u_i)$ est une transformation vectorielle linéaire de σ_i en σ et l'on a

$$\Psi(\{u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n\})=\Psi_1(u_1)+\Psi_2(u_2)+\dots+\Psi_n(u_n).$$

20. Différentielle totale. — Nous dirons qu'une fonction abstraite de plusieurs variables

$$X=F(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \qquad (x_i\in\mathcal{E}_i,\ X\in\mathcal{E})$$

est différentiable par rapport à l'ensemble des variables $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ au point $(x_{10},\ x_{20},\ \dots,\ x_{n0})$ si, considérée comme une fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ d'une variable α de l'espace composé $\mathbf{E}$, elle est différentiable au point $\alpha_0=(x_{10},\ x_{20},\ \dots,\ x_{n0})$.

Soient $X=\mathcal{F}(\alpha)=F(x_1,\ x_2,\ \dots,x_n)(x_i\in\mathcal{E}_i,\ X\in\mathcal{E})$ une fonction abstraite différentiable par rapport à l'ensemble des variables $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ au point $\alpha_0=(x_{10},\ x_{20},\ \dots,\ x_{n0})$ et $\Psi(\Delta\alpha)$ la différentielle de $\mathcal{F}(\alpha)$ en α_0 correspondant à un accroissement $\Delta\alpha$. En faisant varier seulement x_1,

$$F(x_1,\ x_{20},\ \dots,\ x_{n0})=F_1(x_1)$$

est une fonction abstraite d'une variable x_1 de $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}$. Je dis que $F_1(x_1)$ *est différentiable au point* x_{10}.

En effet, soit $x_1=h_1(\lambda)$ une transformation d'un nombre réel λ en un point x_1 de $\mathcal{E}_1$ telle que $x_{10}=h_1(0)$ et que

$$\frac{d\,h_1(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\overrightarrow{x_{10}h_1(\lambda)}}{\lambda} \text{ existe.}$$

Considérons maintenant la transformation $\alpha=g(\lambda)$ d'un nombre réel λ en un point $\alpha = (x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_n(\lambda))$ de E définie comme il suit

$$x_1(\lambda) = h_1(\lambda), \qquad x_2(\lambda) \equiv x_{20}, \qquad \ldots, \qquad x_n(\lambda) \equiv x_{n0}.$$

On a alors

$$\alpha_0 = g(0) = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$$

et

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \frac{\overrightarrow{x_{10}h_1(\lambda)}}{\lambda}, 0, 0, \ldots, 0 \right\} = \left\{ \frac{dh_1(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}, 0, 0, \ldots, 0 \right\}.$$

Alors, d'après la différentiabilité de $\mathcal{F}(\alpha)$ en α_0,

$$\frac{d\mathcal{F}(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} \text{ existe} \qquad \text{et} \qquad = \Psi\left(\left\{ \frac{dh_1(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}, 0, 0, \ldots, 0 \right\} \right).$$

Mais, $\mathcal{F}(g(\lambda)) = F_1(h_1(\lambda))$; on a donc

$$\frac{dF_1(h_1(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = \Psi\left(\left\{ \frac{dh_1(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}, 0, 0, \ldots, 0 \right\} \right).$$

D'autre part, $\Psi(\xi)$ étant une transformation vectorielle linéaire d'un vecteur $\xi = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de Σ en σ,

$$\Psi_1(u_1) = \Psi(\{u_1, 0, 0, \ldots, 0\})$$

est une transformation vectorielle linéaire de σ_1 en σ. On a enfin

$$\frac{dF_1(h_1(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = \Psi_1\left(\frac{dh_1(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)} \right).$$

Ainsi, $F_1(x_1)$ *est différentiable au point* x_{10} *et sa différentielle en* x_{10} *correspondant à un accroissement* Δx_1 *est* $\Psi_1(\Delta x_1)$. Il en sera de même quand on fait varier seulement x_2 ou seulement $x_3 \ldots$ dans $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
&\delta^{\alpha_0}_{\Delta\alpha}\mathcal{F}(\alpha) = \Psi(\Delta\alpha),\\
&\delta^{x_{10}}_{\Delta x_1} F_1(x_1) = \Psi_1(\Delta x_1) = \Psi(\{\Delta x_1, 0, 0, \ldots, 0\}),\\
&\delta^{x_{20}}_{\Delta x_2} F_2(x_2) = \Psi_2(\Delta x_2) = \Psi(\{0, \Delta x_2, 0, \ldots, 0\}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\delta^{x_{n0}}_{\Delta x_n} F_n(x_n) = \Psi_n(\Delta x_n) = \Psi(\{0, 0, 0, \ldots, \Delta x_n\}).
\end{aligned}$$

En posant

$$\Delta\alpha = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\},$$

on a

$$\Psi(\Delta\alpha) = \Psi_1(\Delta x_1) + \Psi_2(\Delta x_2) + \ldots + \Psi_n(\Delta x_n),$$

et par conséquent

$$\delta^{\alpha_0}_{\Delta\alpha}\mathcal{F}(\alpha) = \delta^{x_{10}}_{\Delta x_1} F_1(x_1) + \delta^{x_{20}}_{\Delta x_2} F_2(x_2) + \ldots + \delta^{x_{n0}}_{\Delta x_n} F_n(x_n).$$

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

THEORÈME 13. — *Une fonction abstraite* $X = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *différentiable par rapport à l'ensemble des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *est différentiable par rapport à chacune d'elles et sa différentielle totale correspondant à un accroissement* $\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ *est la somme des différentielles partielles (par rapport à chacune de ces variables) chacune correspondant à l'accroissement partiel* Δx_i

$$\delta^{(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})}_{\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta^{x_{i0}}_{\Delta x_i} F(x_{10}, \ldots, x_{i-1,0}, x_i, x_{i+1,0}, \ldots, x_{n0}), \tag{31}$$

ou bien

$$d F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta^{x_{i0}}_{\Delta x_i} F(x_{10}, \ldots, x_{i-1,0}, x_i, x_{i+1,0}, \ldots, x_{n0}).$$

Lorsque l'on prend pour $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ successivement chacune des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on voit que

$$dx_1 = \Delta x_1, \qquad dx_2 = \Delta x_2, \qquad \ldots, \qquad dx_n = \Delta x_n$$

et par suite dans le cas général

$$d F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta^{x_{i0}}_{dx_i} F(x_{10}, \ldots, x_{i-1,0}, x_i, x_{i+1,0}, \ldots, x_{n0}). \tag{32}$$

21. CHANGEMENT DE VARIABLES. — La formule (32) est démontrée en supposant indépendantes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons maintenant que

$$x_i = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

$[x_{i0} = f_i(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})]$ sont des fonctions différentiables par rapport à l'ensemble de nouvelles variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$ pour $t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0}$. C'est-à-dire, en considérant l'ensemble des points $t_1, t_2, \ldots, t_m$ comme définissant un point $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ d'un espace distancié vectoriel composé e, les fonctions abstraites

$$x_i = f_i(\tau) = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

d'une variable τ sont différentiables en $\tau_0 = (t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})$. Désignons par $\Phi_i(\Delta\tau)$ la différentielle de $f_i(\tau)$ en τ_0 correspondant à un accroissement $\Delta\tau = \{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_m\}$.

Je dis que $X = F(f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_m))$, considérée comme fonction des variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$, est différentiable par rapport à l'ensemble de ces variables pour $t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0}$. Autrement dit,

$$X = G(\tau) = F(f_1(\tau), f_2(\tau), \ldots, f_n(\tau)),$$

considérée comme fonction de τ, est différentiable en τ_0.

En effet, soit $\tau = g(\lambda)$ une transformation d'un nombre réel λ en un point τ de l'espace e telle que $\tau_0 = g(0)$ et $\dfrac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}$ existe. En vertu de la différentiabilité de $f_i(\tau)$ en τ_0, $\dfrac{df_i(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}$ existe et est égal à $\Phi_i\left(\dfrac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right)$.

Considérons maintenant la transformation

$$\alpha = h(\lambda) = \big(f_1(g(\lambda)), \ldots, f_n(g(\lambda))\big)$$

d'un nombre réel λ en un point $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace composé E. On a $\alpha_0 = h(0) = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ et

$$\begin{aligned}
\frac{dh(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)} &= \lim_{\lambda \to 0}\left\{\frac{f_1(g(\lambda)) - f_1(g(0))}{\lambda}, \ldots, \frac{f_n(g(\lambda)) - f_n(g(0))}{\lambda}\right\}, \\
&= \left\{\frac{df_1(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}, \ldots, \frac{df_n(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right\} \\
&= \left\{\Phi_1\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right), \ldots, \Phi_n\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

D'après la différentiabilité de $\mathcal{F}(\alpha) = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\alpha_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, on en conclut que

$$\frac{d\mathcal{F}(h(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} \quad \text{existe} \quad \text{et} \quad = \Psi\left(\frac{dh(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right).$$

Or,

$$\mathcal{F}(h(\lambda)) = \mathrm{F}\big(f_1(g(\lambda)), \ldots, f_n(g(\lambda))\big) = \mathrm{G}(g(\lambda)).$$

On a donc

$$\frac{d\mathrm{G}(g(\lambda))}{d\lambda}_{(\lambda=0)} = \Psi\left(\left\{\Phi_1\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right), \ldots, \Phi_n\left(\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda=0)}\right)\right\}\right).$$

La transformation vectorielle

$$\Theta(\Delta\tau) = \Psi(\{\Phi_1(\Delta\tau), \ldots, \Phi_n(\Delta\tau)\}) \tag{33}$$

du champ associé à l'espace e (où se trouve le point τ) en champ σ associé à l'espace $\mathcal{E}$ (où se trouve le point X) est évidemment linéaire.

Ainsi, $\mathrm{X} = \mathrm{G}(\tau) = \mathrm{F}(f_1(\tau), \ldots, f_n(\tau))$, *considéré comme fonction abstraite de* τ, *est différentiable en* τ_0 *et sa différentielle correspondant à un accroissement* $\Delta\tau$ *est* $\Theta(\Delta\tau)$ [défini dans (33)].

En posant

$$\Psi_i(u_i) = \Psi(\{0, \ldots, 0, u_i, 0, \ldots, 0\}) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

(c'est une transformation vectorielle linéaire du champ σ_i associé à $\mathcal{E}_i$ en champ σ associé à $\mathcal{E}$), on peut écrire

$$\Theta(\Delta\tau) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\Phi_i(\Delta\tau)). \tag{34}$$

D'autre part, on a les relations

$$dX = \delta_{\Delta\tau}^{\tau_0} F(f_1(\tau), \ldots, f_n(\tau)) = \Theta(\Delta\tau),$$

$$dx_i = \delta_{\Delta\tau}^{\tau_0} f_i(\tau) = \Phi_i(\Delta\tau),$$

$$\delta_{dx_i}^{x_{i0}} F(x_{10}, \ldots, x_{i-1,0}, x_i, x_{i+1,0}, \ldots, x_{n0}) = \Psi_i(dx_i) \quad (^1).$$

L'égalité (34) prouve donc que

$$dX = \sum_{i=1}^{n} \delta_{dx_i}^{x_{i0}} F(x_{10}, \ldots, x_{i-1,0}, x_i, x_{i+1,0}, \ldots, x_{n0}).$$

En résumé, nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 14. — *La formule* (32) *subsiste lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions abstraites différentiables de nouvelles variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$, pourvu qu'on remplace $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ dans la formule* (32) *par leurs expressions en fonction de $dt_1, dt_2, \ldots, dt_m$.*

22. COMPARAISON AVEC D'AUTRES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIELLE. — Nous dirons que la différentielle étudiée précédemment est au sens de MM. Hadamard-Fréchet. M. Fréchet [9] a proposé en 1925 une autre définition, que nous appellerons la définition au sens de M. Fréchet. Une fonction abstraite $X = F(x)$ définie dans un voisinage d'un point x_0 est différentiable au sens de M. Fréchet en x_0, s'il existe une transformation vectorielle linéaire $\Psi(\Delta x)$ de l'accroissement Δx de la variable x telle que

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\left\| \overrightarrow{F(x_0)F(x_0 + \Delta x)} - \Psi(\Delta x) \right\|}{\|\Delta x\|} = 0. \tag{35}$$

$\Psi(\Delta x)$ sera appelé la différentielle au sens de M. Fréchet de $F(x)$ en x_0 correspondant à l'accroissement Δx. La définition de M. Fréchet pour la différentielle met en évidence sa propriété de constituer une sorte de partie principale de l'accroissement de la fonction abstraite. La définition de MM. Hadamard-Fréchet met plutôt l'accent sur ses propriétés opératoires.

THÉORÈME 15. — *Une fonction abstraite différentiable au sens de M. Fréchet est aussi différentiable au sens de MM. Hadamard-Fréchet et les deux différentielles sont égales.*

---

(1) *Voir* paragraphe **17**.

Démonstration. — Soit $X = F(x)$ une fonction abstraite différentiable au sens de M. Fréchet en x_0. Il existe alors une transformation vectorielle linéaire $\Psi(\Delta x)$ satisfaisant à la condition (35). Considérons maintenant une transformation $x = g(\lambda)$ d'un nombre réel λ en un point x telle que $x_0 = g(o)$ et

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\overrightarrow{g(o)\,g(\lambda)}}{\lambda} = v. \tag{36}$$

Il s'agit de prouver que

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{\overrightarrow{F(x_0)\,F(g(\lambda))}}{\lambda} - \Psi(v) \right\| = o. \tag{37}$$

En effet, on peut d'abord exprimer la condition (35) sous la forme

$$\lim_{\|\overrightarrow{g(o)\,g(\lambda)}\| \to 0} \frac{\left\| \overrightarrow{F(x_0)F(g(\lambda))} - \Psi\left(\overrightarrow{g(o)g(\lambda)}\right) \right\|}{\left\| \overrightarrow{g(o)\,g(\lambda)} \right\|} = o.$$

D'après (36), on en tire

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\left\| \overrightarrow{F(x_0)F(g(\lambda))} - \Psi\left(\overrightarrow{g(o)g(\lambda)}\right) \right\|}{|\lambda|} = o.$$

C'est-à-dire

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{\overrightarrow{F(x_0)\,F(g(\lambda))}}{\lambda} - \Psi\left(\frac{\overrightarrow{g(o)\,g(\lambda)}}{\lambda} \right) \right\| = o.$$

En appliquant encore une fois (36), on obtiendra (37). C. Q. F. D.

Comme l'a fait remarquer M. Fréchet ([10], p. 245), la réciproque du théorème 15 n'est pas vraie. *La différentielle au sens de MM. Hadamard-Fréchet est plus générale que celle au sens de M. Fréchet.*

Dans l'Analyse fonctionnelle, M. Paul Lévy ([1], p. 51) a proposé une définition de la différentielle qui peut être généralisée en Analyse générale de la façon suivante : Une fonction abstraite $X = F(x)$ sera dite différentiable au sens de M. Paul Lévy pour $x = x_0$, s'il existe une transformation vectorielle linéaire $\Psi(\Delta x)$ de l'accroissement Δx telle que, pour chaque vecteur Δx,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\overrightarrow{F(x_0)\,F(x_0 + \lambda\,\Delta x)}}{\lambda} \text{ existe} \quad \text{et} \quad = \Psi(\Delta x).$$

Et, $\Psi(\Delta x)$ est, par définition, la différentielle au sens de M. Paul Lévy de $F(x)$ en x_0 correspondant à l'accroissement Δx.

On voit facilement qu'*une fonction abstraite différentiable au sens de MM. Hadamard-Fréchet est différentiable au sens de M. Paul Lévy et a la même différentielle.* Comme l'a fait observer M. Fréchet ([10], p. 240), la définition de M. Paul Lévy est effectivement plus générale que celle de MM. Hadamard-Fréchet.

23. La différentielle d'une fonction abstraite entre deux espaces distanciés affines. — Jusqu'à présent, nous n'avons envisagé que le cas où les espaces considérés sont distanciés vectoriels. Passons maintenant au cas plus général des espaces distanciés affines. Il peut arriver, comme nous avons vu sur un exemple (§ **15**), qu'une fonction abstraite $X = F(x)$ entre deux espaces distanciés affines, différentiable en x_0 au sens de MM. Hadamard-Fréchet n'est pas continue en x_0. Cette circonstance ne se présente dans aucune des définitions classiques de la différentielle. Cette remarque nous conduit à imposer la continuité comme une condition supplémentaire dans la définition de la différentiabilité, quand les espaces considérés sont des espaces distanciés affines.

Alors, quand les espaces considérés sont seulement supposés distanciés affines, une fonction abstraite $X = F(x)$ sera dite *différentiable au sens strict* en un point x_0, si elle y est continue et différentiable au sens de MM. Hadamard-Fréchet. Dans le cas particulier où les espaces sont distanciés vectoriels, il y a identité entre la différentiabilité au sens de MM. Hadamard-Fréchet et la différentiabilité au sens strict (*voir* le théorème 9).

Après cette modification, les théorèmes 9, 10, qui sont démontrés en supposant distanciés vectoriels les espaces considérés, subsistent évidemment pour le cas des espaces distanciés affines, si l'on ajoute partout les mots « au sens strict » après le mot « différentiable ».

Pour définir la différentielle totale au sens strict d'une fonction abstraite de plusieurs variables, observons d'abord le fait suivant : Si les espaces $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ sont distanciés affines, l'espace $\mathbf{E}$ composé à partir de ces n espaces (d'après la même construction donnée dans le paragraphe **19**) est aussi distancié affine. Alors, une fonction abstraite de plusieurs variables, $X = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_\iota \in \mathcal{E}_\iota, X \in \mathcal{E}$; $\mathcal{E}_\iota$, $\mathcal{E}$ étant des espaces distanciés affines) est différentiable au sens strict par rapport à l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour $x_1 = x_{10}, \ldots, x_n = x_{n0}$, si, considérée comme une fonction abstraite $\mathcal{F}(\alpha)$ d'une variable $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace composé $\mathbf{E}$, elle est différentiable au sens strict pour le point $\alpha_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.

Les théorèmes 13, 14, qui sont démontrés en supposant distanciés vectoriels les espaces considérés, resteront vrais pour le cas des espaces distanciés affines, si l'on ajoute partout les mots « au sens strict » après le mot « différentiable ». Dans la démonstration du théorème 13, pour pouvoir conclure que la fonction abstraite $F_1(x_1) = F(x_1, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ est différentiable au sens strict en x_{10}, on n'a qu'à ajouter la mention que $F_1(x_1)$ est continue en x_{10}. [C'est évident, puisque $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue par rapport à l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour $x_1 = x_{10}, \ldots, x_n = x_{n0}$.] De même, dans la démonstration du théorème 14, pour conclure que

$$X = G(\tau) = F(f_1(\tau), f_2(\tau), \ldots, f_n(\tau))$$

est différentiable au sens strict en τ_0, il faut ajouter la mention que $G(\tau)$ est continue en τ_0. (C'est aussi évident, car on sait que la composition de deux fonctions abstraites continues fournit une fonction abstraite continue.)

Ainsi nous avons pu étendre la notion de différentielle aux fonctions abstraites entre deux espaces distanciés affines.

DEUXIÈME PARTIE.

Les transformations bicontinues.

CHAPITRE III.

NOTION DE DIMENSION.

Les notions étudiées dans les Chapitres précédents se rattachent aux transformations univoques et continues. Passons maintenant aux transformations biunivoques et bicontinues. Dans l'étude des transformations biunivoques et bicontinues, les notions de dimension et de ligne s'introduisent en premier lieu. C'est la notion de dimension, qui nous occupera dans le présent Chapitre.

24. Les diverses définitions de la dimension. — Un grand nombre de définitions de la dimension ont été proposées. Les définitions adoptées jusqu'à une époque assez récente, basées sur le nombre de paramètres déterminant un point de l'espace, ont dû être abandonnées en raison du théorème de G. Cantor sur la correspondance biunivoque entre les points de la droite et du plan. Nous ne nous occuperons que des définitions modernes échappant à cette difficulté. On voit apparaître en 1909 la première définition qui est due à M. Fréchet ([11], [12] et [1], p. 30). D'après lui, *le type de dimensions* d'un ensemble E est au plus égal à celui d'un ensemble F, s'il existe une homéomorphie entre E et une partie de F. Nous représenterons, avec M. Fréchet, une telle circonstance par la notation $d\mathrm{E} \leqq d\mathrm{F}$, ou aussi bien $d\mathrm{F} \geqq d\mathrm{E}$ (où la lettre d rappelle l'initial du mot « dimension »). Si l'on a à la fois $d\mathrm{E} \leqq d\mathrm{F}$ et $d\mathrm{F} \leqq d\mathrm{E}$, on dira que E et F ont même type de dimensions et l'on écrira $d\mathrm{E} = d\mathrm{F}$. Si l'on a $d\mathrm{E} \leqq d\mathrm{F}$ sans avoir $d\mathrm{F} \leqq d\mathrm{E}$, on dira que le type de dimensions de E est inférieur à celui de F et l'on écrira $d\mathrm{E} < d\mathrm{F}$ ou $d\mathrm{F} > d\mathrm{E}$. Enfin, il peut arriver qu'il n'existe aucune homéomorphie entre E et une partie de F, ni entre F et une partie de E; dans ce cas les types de dimensions dE et dF sont incomparables. D'après un théorème bien connu de M. L. E. Brouwer, on a

$$d(R_1) < d(R_2) < \ldots < d(R_n) < d(R_{n+1}) < \ldots,$$

où (R_n) désigne l'espace cartésien à n coordonnées. Dès lors, M. Fréchet a proposé de repérer, au moyen des nombres entiers positifs, les types de dimensions ci-dessus. De sorte que l'espace cartésien (R_n) à n coordonnées peut prendre le nom d'espace cartésien à n dimensions : $d(R_n) = n$. On est alors amené à dire qu'un ensemble E a un type infini de dimensions, si l'on a $dE > d(R_n)$, quel que soit l'entier n.

Une autre catégorie de définitions a pour but de définir le nombre de dimensions par voie de récurrence en passant de n à $n+1$. Ce principe a été donné par H. Poincaré en 1912. Sa mise au point a été réalisée par les travaux bien connus de MM. Brouwer, K. Menger et P. Urysohn sous des formes différentes, mais équivalentes dans les cas les plus importants. Les définitions de cette catégorie ne fournissent que des nombres entiers de dimensions. Elles ne se prêtent donc pas à la classification des champs fonctionnels.

Enfin, MM. F. Hausdorff et G. Bouligand ont indépendamment proposé une définition, basée sur la notion de mesure des ensembles. Cette définition a pu trouver des applications dans la théorie du potentiel, mais elle n'est pas topologique, du moins à première vue.

La définition de M. Fréchet permet une classification topologique intéressante des ensembles abstraits et particulièrement des champs fonctionnels. La possibilité d'utiliser cette définition pour la distinction des divers types infinis de dimensions est un de ses avantages essentiels du point de vue de l'Analyse générale.

25. Le type local de dimensions. — La notion due à M. Fréchet du type de dimensions repose sur la comparaison de deux ensembles pris chacun en bloc. Il en résulte, comme M. Fréchet l'a fait remarquer, qu'une droite a un type de dimensions inférieur à celui d'une circonférence; qu'un plan a un type de dimensions inférieur à celui de la surface d'une sphère; que les surfaces de la sphère et du tore ont deux types de dimensions incomparables, etc. M. H. Tietze ([2], p. 44) y a remédié en appelant figure homogène à n dimensions, un ensemble E tel que, pour chaque point a de E, il existe un voisinage de a sur E (c'est-à-dire la partie commune de E et d'un voisinage de a) qui soit homéomorphe à un « intervalle » de l'espace cartésien (R_n) à n coordonnées, le centre de l' « intervalle » et le point a se correspondant par cette homéomorphie.

M. Fréchet ([13], p. 289 ou [1], p. 111), poussant plus avant, a introduit le type local de dimensions. Soient E, F deux ensembles appartenant à deux espaces distanciés et a, b deux points de E et de F respectivement. *Le type local de dimensions de* E *en* a est au plus égal à celui de F en b, si, quel que soit un voisinage V_b de b sur F, il existe un voisinage V_a de a sur E tel que V_a soit homéomorphe à une partie de V_b. *Dans cette homéomorphie, le point b n'est pas nécessairement le transformé de a.* Pour désigner une telle circonstance, nous écrirons, avec M. Fréchet, $d_a\mathrm{E} \leqq d_b\mathrm{F}$ ou $d_b\mathrm{F} \geqq d_a\mathrm{E}$. Ceci posé, l'égalité $d_a\mathrm{E} = d_b\mathrm{F}$ devra signifier la coexistence des relations $d_a\mathrm{E} \leqq d_b\mathrm{F}$ et $d_b\mathrm{F} \leqq d_a\mathrm{E}$. Et l'on écrira $d_a\mathrm{E} < d_b\mathrm{F}$ ou $d_b\mathrm{F} > d_a\mathrm{E}$, si l'on a $d_a\mathrm{E} \leqq d_b\mathrm{F}$ sans avoir $d_b\mathrm{F} \leqq d_a\mathrm{E}$.

26. Le type homogène de dimensions. — En développant une indication que M. Fréchet ([13], p. 289 et [1], p. 112) a donnée brièvement, nous dirons qu'un ensemble E non vide est (*dimensionnellement*) *homogène*, si l'on a $d_a\mathrm{E} = d_b\mathrm{E}$ pour tout couple de points a, b de E. La définition suivante est évidemment équivalente : un ensemble E non vide est homogène, si l'on a $d_a\mathrm{E} \leqq d_b\mathrm{E}$ pour tout couple de points a, b de E.

Soient E, F deux ensembles homogènes appartenant à deux espaces distanciés, distincts ou non. Nous dirons que *le type homogène de dimensions de* E est au plus égal à celui de F et nous écrirons

$$\partial \mathrm{E} \leqq \partial \mathrm{F} \quad \text{ou} \quad \partial \mathrm{F} \geqq \partial \mathrm{E},$$

si, pour un certain point a de E et un certain point b de F, on a $d_a\mathrm{E} \leqq d_b\mathrm{F}$.

Si cette condition est vérifiée pour un certain point a de E et un certain point b de F, il en sera de même pour un point quelconque x de E et un point quelconque y de F : $d_x\mathrm{E} \leqq d_y\mathrm{F}$, puisque E et F sont homogènes.

Cette définition est purement topologique et indépendante du choix des familles de voisinages.

Si l'on a à la fois $\partial \mathrm{E} \leqq \partial \mathrm{F}$ et $\partial \mathrm{F} \leqq \partial \mathrm{E}$, nous dirons que les types homogènes de dimensions $\partial \mathrm{E}$ et $\partial \mathrm{F}$ sont égaux et nous écrirons

$$\partial \mathrm{E} = \partial \mathrm{F}.$$

Si l'on a $\partial \mathrm{E} \leqq \partial \mathrm{F}$ et si la relation $\partial \mathrm{F} \leqq \partial \mathrm{E}$ ne peut pas avoir lieu, nous dirons que $\partial \mathrm{E}$ est inférieur à $\partial \mathrm{F}$ (ou bien : $\partial \mathrm{F}$ est supérieur à $\partial \mathrm{E}$) et nous écrirons

$$\partial \mathrm{E} < \partial \mathrm{F} \quad \text{ou} \quad \partial \mathrm{F} > \partial \mathrm{E}.$$

La définition du type homogène de dimensions présente sur celle du type de dimensions les avantages : a. de rendre souvent comparables des ensembles dont les types de dimensions sont incomparables (par exemple dans le cas des surfaces de la sphère et du tore); *b. de transformer souvent des inégalités en égalités* (1)

(1) A vrai dire, cet avantage est en même temps un défaut. La classification des ensembles homogènes au moyen de leurs types homogènes de dimensions est plus grossière que celle au moyen de leurs types de dimensions.

(par exemple dans le cas de la droite et de la circonférence ou dans le cas du plan et de la surface d'une sphère). Nous verrons plus tard (§ **34**) un exemple d'un ensemble homogène K tel que, pour tout ensemble séparable (1) non isolé E, les types de dimensions dK et dE soient incomparables et que le type homogène de dimensions ∂K soit comparable à celui de n'importe quel ensemble homogène. Nous verrons même que, étant donné un ensemble séparable et homogène E, il existe toujours un ensemble homogène F tel que $\partial F = \partial E$ et $dF > dE$ (*voir* § **34**).

Nous supposons dans le présent Chapitre que tout ensemble considéré appartient à un espace distancié et nous allons montrer que, pour un grand nombre de propriétés des types de dimensions, il existe des propriétés analogues des types homogènes de dimensions.

27. Quelques proprietes immédiates. — Nous allons d'abord signaler quelques propriétés immédiates :

1° *Soient* E, F, G *trois ensembles homogènes. Alors :*

a. $E \subset F$ *entraîne* $\partial E \leqq \partial F$;
b. $\partial E \leqq \partial F$ *et* $\partial F \leqq \partial G$ *entraîne* $\partial E \leqq \partial G$;
c. $\partial E < \partial F$ *et* $\partial F \leqq \partial G$ *entraîne* $\partial E < \partial G$;
d. $\partial E = \partial F$ *et* $\partial F = \partial G$ *entraîne* $\partial E = \partial G$.

2° *Si* E *est un ensemble homogène et* F *est un ensemble homéomorphe à* E, F *est aussi homogène et* $\partial E = \partial F$.

3° *Soient* $E \subset F$ *et* F *un ensemble homogène. Si* E *est non vide et ouvert dans* F, E *est aussi homogène et* $\partial E = \partial F$.

4° *Tout ensemble isolé est homogène. Pour un ensemble isolé* J *et un ensemble homogène* E *quelconque, on a toujours* $\partial E \geqq \partial J$. *Deux ensembles isolés ont toujours le même type homogène de dimensions.*

5° *Un ensemble homogène est nécessairement dense en soi, s'il n'est pas isolé.*

6° *En désignant par* E_γ *l'ensemble de tous les points de condensation de* E, *on n'a que deux cas possibles pour un ensemble homogène* E : *soit* $EE_\gamma = 0$, *soit* $E \subset E_\gamma$.

7° Si pour tout couple de points a, b d'un ensemble E, il existe une homéomorphie de E en lui-même tout entier et transformant a en b. (On dit alors que E est *topologiquement homogène*), E est nécessairement homogène.

(1) *Cf.* M. Fréchet, [1], p. 72.

Autrement dit, *tout ensemble topologiquement homogène est dimensionnellement homogène.*

La réciproque de 7° n'est pas vraie. Il suffit de s'adresser à un exemple aussi simple que l'ensemble linéaire constitué des points d'un intervalle fermé.

Comme tout espace distancié affine est topologiquement homogène (¹), on a alors :

8° *Tout espace distancié affine est homogène.*

Ainsi, les espaces suivants sont tous homogènes et leurs types homogènes de dimensions sont bien définis : l'espace cartésien (R_n) à n coordonnées, l'espace (R) où chaque point a un nombre fini non borné de coordonnées (*voir* §§ **10**, **15**), l'espace polynomial (P) (²), l'espace (E_ω) de M. Fréchet (cité au paragraphe **10**), l'espace (C) des fonctions continues (cité au paragraphe **10**), l'espace (C^n) des fonctions ayant une n^{ieme} dérivée continue (²), l'espace (l^p), $p \geqq 1$ (cité au paragraphe **10**), l'espace (L^p) des fonctions à $p^{\text{ième}}$ puissance sommable, $p \geqq 1$ (³), l'espace (S) des séries convergentes (§ **10**), l'espace (I) des fonctions entières (²), l'espace (M) des fonctions mesurables (²) et l'espace (D_ω) de M. Fréchet (²).

De plus, on déduit de 3° et 8° :

9° *Tout ensemble non vide et ouvert d'un espace distancié affine est homogène.*

28. Relations entre le type de dimensions et le type homogène de dimensions. — D'après 1°, 2° du paragraphe **27**, on a immédiatement le

Théorème 16. — *Soient* E, F *deux ensembles homogènes. Si les types de dimensions* dE *et* dF *sont comparables, les types homogènes de dimensions* ∂E *et* ∂F *sont aussi comparables. Si* $dE \leqq dF$, *on a* $\partial E \leqq \partial F$. *Si* $dE = dF$, *on a* $\partial E = \partial F$.

Pour mieux voir des relations entre le type de dimensions et le type homogène de dimensions, la notion d'ensemble réfléchi qui a été introduite par M. K. Kunugui ([1], p. 31) dans un autre but, est fort utile. D'après lui, un ensemble E contenant au moins deux points est *réfléchi*, si, quel que soit le point a de E, tout voisinage de a sur E contient un ensemble homéomorphe à E.

On établit facilement les propositions suivantes :

1° *Tout ensemble réfléchi est homogène.*

(¹) *Cf.* M. Fréchet, [1], p. 274.

(²) Pour les définitions de ces espaces, *voir* M. Fréchet, [1], p. 78, 89, 87, 91, 97.

(³) Pour la définition de l'espace (L^p), *voir* M. S. Banach, [1], p. 12. D'ailleurs, (L^p) a été déjà cité au paragraphe **10**.

Mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, la circonférence d'un cercle de l'espace (R_2) est un ensemble homogène sans être réfléchi.

2° *Soient* E, F *deux ensembles homogènes tels que* $dE = dF$. *Si* E *est réfléchi*, F *est aussi réfléchi* (1).

3° *Soient* E *un ensemble homogène et* F *un ensemble réfléchi. Alors*

a. $\partial E \geqq \partial F$ *entraîne* $dE \geqq dF$;
b. $\partial E > \partial F$ *entraîne* $dE > dF$;
c. $dE < dF$ *entraîne* $\partial E < \partial F$ (2).

4° *Soient* E, F *deux ensembles réfléchis. Si l'on a* $\partial E = \partial F$, dE *et* dF *sont aussi comparables et* $dE = dF$.

D'après 3°, 4° et le théorème 16, on peut énoncer

Théorème 17. — *Les deux notions du type de dimensions et du type homogène de dimensions seront équivalentes, quand on se borne aux ensembles réfléchis.*

29. Échelle de types homogènes de dimensions. — Tous les espaces cartésiens (R_n) sont évidemment réfléchis. Alors, d'après les inégalités connues

$$d(R_1) < d(R_2) < \ldots < d(R_n) < d(R_{n+1}) < \ldots,$$

on a, en vertu de 3° du paragraphe **28**,

$$\partial(R_1) < \partial(R_2) < \ldots < \partial(R_n) < \partial(R_{n+1}) < \ldots. \tag{38}$$

Il n'y a donc aucun inconvénient à poser

$$\partial(R_n) = n. \tag{39}$$

De sorte qu'on peut convenir de dire que *le type homogène de dimensions de l'espace cartésien* (R_n) *à n coordonnées est égal à n*. Nous verrons plus loin une définition de l'addition des types homogènes de dimensions qui nous fournira une raison de plus pour légitimer la notation (39).

Il est tout naturel de dire qu'un ensemble homogène E a un type homogène *infini* de dimensions, si l'on a $\partial E > \partial(R_n)$ pour tout n. Il reste à prouver qu'il existe de tels ensembles.

Je dis que *l'espace* (R) (cité aux paragraphes **10**, **15**) *a un type homogène*

---

(1) En appliquant le théorème **16**.

(2) La réciproque de *a.* est vraie d'après le théorème **16**. Mais la réciproque de *b.* n'est pas vraie. On le voit en prenant E = la circonférence d'un cercle dans le plan (R_2) et F = la droite (R_1). De même, la réciproque de *c.* n'est pas vraie non plus. Pour s'en assurer, il suffit de prendre E = l'ensmble K dont nous allons parler dans le paragraphe **34** et F = un ensemble réfléchi séparable.

infini de dimensions. Il suffit de prouver que, quel que soit n, on a

$$d_0(R_n) \leqq d_0(R), \tag{40}$$

où le premier zéro désigne le point d'origine $o = (o, o, \ldots, o)$ de (R_n) et le second zéro désigne le point d'origine $o = (o, o, \ldots, o, \ldots)$ de (R).

Soit S une sphère ouverte dans (R) dont le centre est $o = (o, o, \ldots)$ et le rayon est $\varepsilon > 0$. Pour une valeur fixe de n, on peut trouver un nombre a tel que

$$a > 0 \quad \text{et} \quad \frac{a}{1+a}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < \varepsilon.$$

Tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de (R_n) tels que $|x_i| < a$ forment un voisinage V de $o = (o, o, \ldots, o)$. A chaque point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de V faisons correspondre le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, o, o, \ldots)$ de (R). Appelons W l'ensemble de tous ces points $(x_1, x_2, \ldots, x_n, o, o, \ldots)$. L'ensemble V de (R_n) et l'ensemble W de (R) sont évidemment homéomorphes. D'après $|x_i| < a$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{|x_k|}{1+|x_k|} < \frac{a}{1+a}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < \varepsilon.$$

Donc W appartient à la sphère ouverte S. Ainsi V est homéomorphe à une partie de S. Il en résulte l'inégalité (40) et par conséquent $\partial(R_n) \leqq \partial(R)$. Comme cette inégalité est vraie pour tout n, (R) a donc un type homogène infini de dimensions.

Il est facile de voir que l'espace (E_ω) de M. Fréchet est réfléchi. Alors, d'après l'inégalité connue $d(R) < d(E_\omega)$ (*voir* M. Kunugui, [1], p. 38), on a $\partial(R) < \partial(E_\omega)$ [1]. Nous avons ainsi

$$\partial(R_n) < \partial(R) < \partial(E_\omega). \tag{41}$$

M. Fréchet ([1], p. 83-92) a établi les égalités suivantes :

$$d(E_\omega) = d(C) = d(C^n) = d(l^1) = d(l^2) = d(L^2) = d(S) = d(I) = d(M).$$

D'autre part, M. S. Mazur [1] a démontré un théorème intéressant, d'après lequel les espaces (l^p) et (L^q) sont homéomorphes, quels que soient $p, q \geqq 1$. Il en résulte alors les égalités suivantes :

$$d(E_\omega) = d(C) = d(C^n) = d(l^p) = d(L^q) = d(S) = d(I) = d(M). \tag{42}$$

Tous ces espaces sont homogènes. Il vient donc, en appliquant le théorème 16,

$$\partial(E_\omega) = \partial(C) = \partial(C^n) = \partial(l^p) = \partial(L^q) = \partial(S) = \partial(I) = \partial(M). \tag{43}$$

On constate de plus que *presque tous les espaces importants considérés par les*

---

(1) D'après 3°, *c*, § **28**.

analystes sont réfléchis. En effet, en appliquant 2° du paragraphe **28** aux égalités (42), on voit que tous les espaces figurant dans ces égalités sont réfléchis, puisque (E_ω) l'est.

30. Les types homogènes de dimensions des ensembles homogènes et localement séparables ont un maximum. — M. Fréchet ([14] ou [1], p. 83; *voir* aussi P. Urysohn, [2]) a démontré un théorème important, d'après lequel le plus grand des types de dimensions des ensembles séparables (appartenant à des espaces distanciés) est celui de l'espace (E_ω). On pourra tirer de là un théorème analogue pour les types homogènes de dimensions.

En employant une notion due à P. Urysohn ([3]; *voir* aussi M. W. Sierpinski, [1]), nous dirons qu'un ensemble E (appartenant à un espace distancié) est *localement séparable en un de ses points*, a, s'il existe un voisinage V_a de a sur E tel que V_a soit séparable. Un ensemble sera dit *localement séparable*, s'il est localement séparable en tous ses points. Un ensemble sera dit *nulle part séparable*, s'il n'est localement séparable en aucun de ses points. Il est facile de voir qu'*un ensemble homogène est soit localement séparable, soit nulle part séparable*.

Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 18. — *Parmi les types homogènes de dimensions des ensembles homogènes et localement séparables* (appartenant à des espaces distanciés), *il y en a un qui est le plus grand. Ce dernier est égal au type homogène de dimensions de l'espace* (E_ω).

Démonstration. — Soient E un ensemble homogène et localement séparable (d'un espace distancié) et a un point arbitraire de E. Soit b un point arbitraire de l'espace (E_ω). L'espace (E_ω) étant réfléchi, tout voisinage V_b de b contient un ensemble homéomorphe à (E_ω). On a donc $d(E_\omega) = dV_b$, quel que soit un voisinage V_b de b. D'autre part, d'après la séparabilité locale de l'ensemble E, il existe un voisinage V_a de a sur E tel que V_a soit séparable. On a alors, en appliquant le théorème de M. Fréchet (cité au début de ce paragraphe) $dV_a \leqq d(E_\omega)$, d'où $dV_a \leqq dV_b$. Donc, $d_a E \leqq d_b(E_\omega)$ et par conséquent, $\partial E \leqq \partial(E_\omega)$. C'est-à-dire, le type homogène de dimensions d'un ensemble homogène et localement séparable (appartenant à un espace distancié) est au plus égal à celui de (E_ω). Or, l'espace (E_ω) est lui-même localement séparable. On a ainsi le résultat annoncé. C. Q. F. D.

Il est évident que tout ensemble homogène E tel que $\partial E \leqq \partial(E_\omega)$ est localement séparable. Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble homogène* E (appartenant à un espace distancié) *soit localement séparable est* $\partial E \leqq \partial(E_\omega)$.

M. Sierpinski ([2], p. 192) a démontré que l'espace (D_ω) (§ **27**) est nulle part séparable. La relation $\partial(D_\omega) \leqq \partial(E_\omega)$ ne peut donc pas avoir lieu. D'autre part, M. Fréchet ([1], p. 98) a établi l'inégalité $d(E_\omega) < d(D_\omega)$. On a donc, d'après le théorème 16, $\partial(E_\omega) \leqq \partial(D_\omega)$. Ainsi nous avons l'inégalité

$$(44) \qquad \partial(E_\omega) < \partial(D_\omega).$$

31. Type homogène de dimensions de l'ensemble des nombres rationnels. — Dans l'espace cartésien linéaire (R_1), l'ensemble C_1 des nombres rationnels est évidemment homogène (même réfléchi). Nous allons déterminer les ensembles homogènes qui ont le même type homogène de dimensions que C_1.

Théorème 19. — *L'ensemble homogène* (appartenant à un espace distancié) *le plus général dont le type homogène de dimensions est égal à celui de l'ensemble* C_1 *des nombres rationnels, est n'importe quel ensemble dense en soi tel qu'aucun de ses points n'en soit point de condensation.*

Cette condition peut être exprimée par

$$(45) \qquad E \subset E' - E_\gamma,$$

où E' désigne l'ensemble dérivé de E et E_γ désigne l'ensemble des points de condensation de E.

Démonstration. — 1° Soit E un ensemble homogène tel que $\partial E = \partial C_1$. Nous allons prouver qu'il vérifie (45).

D'abord, E est dense en soi. Sans quoi, E serait isolé (d'après 5°, § **27**) et $\partial E < \partial C_1$.

Soient $a \in E$, $c \in C_1$ et V_c un voisinage de c sur C_1. En vertu de $\partial E = \partial C_1$, il existe un voisinage V_a de a sur E tel que V_a soit homéomorphe à une partie de V_c. Or, V_c contient seulement une infinité dénombrable de points. V_a contient donc une infinité dénombrable de points (1), et par conséquent a n'est pas point de condensation de E. E vérifie donc la condition (45).

2° Soit E un ensemble vérifiant (45). Nous allons prouver qu'il est homogène et $\partial E = \partial C_1$.

Il suffit de montrer que, quels que soient un point a de E et un point c de C_1, on a $d_a E = d_c C_1$.

On constate d'abord que l'on peut toujours supposer que les familles de voisinages de l'espace distancié auquel appartient E, sont exclusivement constituées par des ensembles ouverts (par exemple, par des sphères ouvertes). Soient V_a un voisinage de a sur E et V_c un voisinage de c sur C_1 D'après $E.E_\gamma = 0$, il existe un voisinage W_a de a sur E tel que $W_a \subset V_a$ et que W_a

(1) D'abord V_a contient au plus une infinité dénombrable de points. Et puis, comme E est dense en soi, V_a contient au moins une infinité dénombrable de points.

contienne au plus une infinité dénombrable de points. D'autre part, W_a contient au moins une infinité dénombrable de points, puisque E est dense en soi. W_a est donc un ensemble dénombrable infini. De plus, E étant dense en soi et W_a étant ouvert dans E (puisque nous avons supposé les familles de voisinages exclusivement constituées par des ensembles ouverts), W_a est dense en soi (¹).

En résumé, W_a est un ensemble dénombrable dense en soi. V_c est évidemment aussi dénombrable dense en soi.

En généralisant un théorème de M. Sierpinski [3], M. Fréchet ([1], p. 103) a démontré que deux ensembles dénombrables, chacun dense en soi, et appartenant à deux espaces distanciés, sont homéomorphes. Donc, W_a et V_c sont homéomorphes et par conséquent, $d_a E = d_c C_1$. Il en résulte que E est homogène et $\partial E = \partial C_1$. C. Q. F. D.

On sait que dans un espace distancié séparable, pour qu'un ensemble E vérifie la relation $E . E_\gamma = 0$, il faut et il suffit que E soit au plus dénombrable (*Cf.* M. Fréchet, [1], p. 265; M. Hausdorff, [2], p. 268). Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Si nous envisageons seulement les ensembles appartenant à des espaces distanciés séparables, l'ensemble homogène le plus général dont le type homogène de dimensions est égal à celui de* C_1, *est n'importe quel ensemble dénombrable dense en soi.*

A titre d'exemple, l'ensemble des nombres algébriques, réels ou complexes, de l'espace (R_2) est un ensemble dénombrable dense en soi. Ainsi *l'ensemble des nombres algébriques, réels ou complexes, dans le plan* (R_2) *est homogène et du même type homogène de dimensions que* C_1. De même, *l'ensemble des nombres algébriques réels sur la droite* (R_1) *est homogène et du même type homogène de dimensions que* C_1.

En se servant encore une fois du théorème cité plus haut de MM. Sierpinski-Fréchet, on obtient un résultat intéressant :

Corollaire 2. — *Les ensembles homogènes appartenant à des espaces distanciés séparables et ayant le même type homogène de dimensions que* C_1 *ne sont autres que les ensembles homéomorphes à* C_1.

En d'autres termes, au point de vue topologique, parmi les ensembles homogènes appartenant à des espaces distanciés séparables, il n'en existe qu'un seul qui est du même type homogène de dimensions que C_1.

Théorème 20. — *Tout ensemble* E *homogène non isolé appartenant à un espace distancié séparable possède un type homogène de dimensions supérieur ou égal à celui de* C_1, *suivant que* E *est non dénombrable ou dénombrable.*

(¹) *Cf.* M. Hausdorff, [2], p. 241.

Démonstration. — Soit E un ensemble homogène non isolé d'un espace distancié séparable. Nous allons d'abord démontrer que $\partial E \geqq \partial C_1$.

On peut supposer comme précédemment que les familles de voisinages de l'espace auquel appartient E, sont exclusivement constituées par des ensembles ouverts (par exemple, par des sphères ouvertes). Soient $a \in E$ et V_a un voisinage de a sur E. V_a est ouvert dans E et l'ensemble E est dense en soi (puisque E est homogène non isolé, *voir* 5°, § **27**). Donc V_a est aussi dense en soi : $V_a \subset (V_a)'$. D'autre part, V_a étant séparable, il existe un ensemble dénombrable D tel que

$$D \subset V_a \subset D + D'.$$

On tire de là

$$D \subset V_a \subset (V_a)' = D'.$$

D est donc dense en soi et dénombrable. Alors, D est homéomorphe à C_1, $dV_a \geqq dD = dC_1$ et par conséquent, $\partial E \geqq \partial C_1$.

D'après le corollaire 1, $\partial E > \partial C_1$ ou $\partial E = \partial C_1$ suivant que E est non dénombrable ou dénombrable. C. Q. F. D.

Corollaire 3. — *Parmi les types homogènes de dimensions des ensembles homogènes non isolés appartenant à des espaces distanciés séparables, il y en a un qui est le plus petit. Ce dernier est égal au type homogène de dimensions de l'ensemble* C_1 *des nombres rationnels.*

32. Type homogène de dimensions de l'ensemble des nombres irrationnels. — Nous allons maintenant envisager le type homogène de dimensions de l'ensemble linéaire H_1 des nombres irrationnels. On a évidemment les inégalités

$$\partial C_1 < \partial H_1 < \partial(R_1), \tag{46}$$

puisque $dC_1 < dH_1 < d(R_1)$ et les ensembles C_1, H_1 et (R_1) sont tous réfléchis. Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit homogène et ait le même type homogène de dimensions que H_1. Dans ce but, considérons d'abord l'ensemble linéaire triadique de Cantor. C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots \qquad (a_n = 0 \text{ ou } 2).$$

Désignons-le par T [1]. T est évidemment homogène, même réfléchi. Il est bien connu que T est parfait discontinu [2]. On sait que tout ensemble linéaire

---

[1] Il n'y a aucun rapport entre la catégorie T (dont nous avons parlé dans le Chapitre I) et l'ensemble triadique T de Cantor.

[2] Rappelons qu'un *continu* est un ensemble fermé connexe et contenant plus d'un point. Un ensemble est *discontinu*, s'il ne contient aucun continu. M. Hausdorff ([3], p. 152) appelle *ensemble punctiforme* (punkthafte Menge) tout ensemble tel qu'aucun de

parfait discontinu est du même type de dimensions que H_1 (*cf.* M. Fréchet, [1], p. 41). Il vient donc, d'après le théorème 16,

$$\partial T = \partial H_1. \tag{47}$$

Ceci étant, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 21. — *Pour qu'un ensemble* E *appartenant à un espace distancié quelconque soit homogène et du même type homogène de dimensions que l'ensemble* H_1 *des nombres irrationnels, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : Pour tout point* a *de* E *et tout voisinage* V_a *de* a *sur* E, *il existe un ensemble* P *et un voisinage* W_a *de* a *sur* E *tels que*

1° $P \subset V_a$;
2° P *soit parfait compact et discontinu;*
3° W_a *soit homéomorphe à une partie de* P.

Démonstration. — 1° Supposons que E soit homogène et $\partial E = \partial H_1$. Nous allons prouver que la condition du théorème est vérifiée.

On a d'abord, en vertu de (47), $\partial E = \partial T$. Soient $a \in E$, $t \in T$ et V_a un voisinage de a sur E. Il existe alors un voisinage V_t de t sur T tel que V_t soit homéomorphe à une partie de V_a. Or, T étant parfait compact discontinu et réfléchi, V_t contient un ensemble parfait compact et discontinu (1). Alors V_a contient aussi un ensemble P parfait compact et discontinu (1).

D'autre part, il existe un voisinage W_a de a sur E tel que W_a soit homéomorphe à une partie de V_t. Par suite, W_a est homéomorphe à une partie de T. Mais T et P sont homéomorphes, car deux ensembles parfaits compacts discontinus et appartenant à deux espaces distanciés sont toujours homéomorphes (2). Donc W_a est homéomorphe à une partie de P.

2° Inversement, supposons que E vérifie la condition du théorème, nous allons prouver que E est homogène et $\partial E = \partial H_1$.

---

ses sous ensembles contenant plus d'un point ne soit connexe. Il est facile de voir que, pour tout ensemble fermé d'un espace distancié, la propriété d'être discontinu coïncide avec celle d'être punctiforme. Les ensembles punctiformes au sens de M. Hausdorff sont aussi appelés *ensembles dispersés* par Urysohn ([4], p. 74).

(1) Car un ensemble homéomorphe à un ensemble parfait compact et discontinu est encore un tel ensemble.

(2) On trouvera dans M. Hausdorff ([3], p. 197), la démonstration du théorème suivant : deux ensembles parfaits compacts punctiformes et appartenant à deux espaces distanciés sont homéomorphes. Comme il n'y a aucune distinction entre un ensemble fermé punctiforme (d'un espace distancié) et un ensemble fermé discontinu, deux ensembles parfaits compacts discontinus et appartenant à deux espaces distanciés sont homéomorphes.

Soient a, t deux points arbitraires de E et de T respectivement. Il suffit de montrer qu'on a $d_a E = d_t T$.

Étant donné un voisinage V_a quelconque de a sur E, V_a contient un ensemble parfait compact et discontinu. Or, cet ensemble parfait compact et discontinu est homéomorphe à T, on a alors $dV_a \geqq dT$. Il en résulte $d_a E \geqq d_t T$.

Réciproquement, étant donné un voisinage V_t de t sur T, V_t contient un ensemble P_1 parfait compact et discontinu (car T est un tel ensemble et réfléchi). D'après notre condition, il existe un voisinage W_a de a sur E tel que W_a soit homéomorphe à une partie d'un ensemble P parfait compact et discontinu. Or, P et P_1 sont homéomorphes, W_a est alors homéomorphe à une partie de P_1 et, par suite, homéomorphe à une partie de V_t. Donc, $d_a E \leqq d_t T$. En résumé, on a $d_a E = d_t T$. E est donc homogène et $\partial E = \partial T = \partial H_1$.

C. Q. F. D.

Si E est un ensemble, homogène ou non, tel que $d_a E \leqq d_h H_1$ pour tout point a de E et tout point h de H_1, on a aussi $d_a E \leqq d_t T$, quels que soient $a \in E$ et $t \in T$. Pour un point a quelconque d'un tel ensemble E, il existe un voisinage W_a de a sur E tel que W_a soit homéomorphe à une partie de T. W_a est évidemment aussi homéomorphe à une partie de n'importe quel ensemble parfait compact et discontinu. Ainsi, le théorème 21 peut s'énoncer sous la forme suivante :

Théorème 21 *bis*. — *Pour qu'un ensemble* E *appartenant à un espace distancié soit homogène et du même type homogène de dimensions que l'ensemble* H_1 *des nombres irrationnels, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées simultanément :*

1° *Pour tout point a de* E *et tout voisinage* V_a *de a sur* E, V_a *contient un ensemble parfait compact et discontinu.*

2° *Quels que soient un point a de* E *et un point h de* H_1, *on a l'inégalité entre les types locaux de dimensions* $d_a E \leqq d_h H_1$.

Il y a lieu de remarquer que dans la dernière condition, nous n'imposons pas l'homogénéité de E.

On déduit facilement du théorème 21 *bis* le corrollaire suivant :

Corollaire 4. — *Pour qu'un ensemble* E *homogène (appartenant à un espace distancié) tel que* $\partial E \leqq \partial H_1$ *soit du même type homogène de dimensions que* H_1, *il faut et il suffit que, pour tout point a de* E *et tout voisinage* V_a *de a sur* E, V_a *contienne un ensemble parfait compact* (1).

Les conditions dans les théorèmes 21, 21 *bis* peuvent paraître complexes.

(1) Ici, on n'a pas besoin d'imposer que cet ensemble parfait compact soit discontinu.

Cependant, il en résultera une condition simple quand on se borne aux ensembles linéaires [c'est-à-dire les ensembles de l'espace cartésien linéaire (R_1)] :

THÉORÈME 22. — *Pour qu'un ensemble linéaire* E *soit homogène et du même type homogène de dimensions que* H_1, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées simultanément :*

1° E *est discontinu.*

2° *Pour tout point* a *de* E *et tout voisinage* V_a *de* a *sur* E, *il existe un ensemble parfait contenu dans* V_a.

Démonstration. — La condition 2° est nécessaire, d'après le théorème 21. La condition 1° est aussi nécessaire. En effet, si E n'était pas discontinu, E contiendrait un intervalle de la droite (R_1) et par suite $dE = d(R_1)$. On aurait alors $\partial E = \partial(R_1) > \partial H_1$.

Reste à démontrer que l'ensemble des conditions 1°, 2° est suffisant. D'abord il est facile de voir qu'un ensemble linéaire E satisfaisant aux conditions 1°, 2° du présent théorème vérifie aussi la condition 1° du théorème 21 *bis*. Puis, pour un ensemble linéaire discontinu E, on a toujours $dE \leqq dH_1$ (*voir* M. Fréchet, [1], p. 40). Comme H_1 est réfléchi, on a $d_a E \leqq d_h H_1$, quels que soient $a \in E$ et $h \in H_1$. C'est-à-dire E vérifie la condition 2° du théorème 21 *bis*. En résumé, tout ensemble linéaire E satisfaisant aux conditions 1°, 2° du présent théorème vérifie aussi les conditions 1°, 2° du théorème 21 *bis*, et, par suite, est homogène et du même type homogène de dimensions que H_1. Ainsi, l'ensemble des conditions 1°, 2° du présent théorème est suffisant.

C. Q. F. D.

Le théorème suivant généralise l'égalité $\partial T = \partial H_1$:

THÉORÈME 23. — *Dans un espace distancié et localement compact* (¹), *tout ensemble* E *parfait discontinu est homogène et* $\partial E = \partial H_1$.

Démonstration. — Soient $a \in E$ et V_a un voisinage de a sur E. Il existe un voisinage U_a de a sur E tel que $U_a \subset V_a$ et U_a soit compact. On peut supposer que U_a est l'ensemble de tous les points de E qui sont intérieurs à une sphère S_ε de centre a et de rayon ε. Prenons un nombre η tel que $\varepsilon > \eta > 0$. Désignons par Q l'ensemble de tous les points de E qui sont intérieurs à la sphère S_η de centre a et de rayon η. Q est ouvert dans E. Comme E est dense en soi, Q est aussi dense en soi. Donc, la fermeture $P = \bar{Q}$ de Q est un ensemble parfait.

(¹) Un espace est *localement compact*, si tout point est intérieur à au moins un ensemble compact et fermé.

E étant fermé, on a $P = \overline{Q} \subset E$. Tout point de P est nécessairement intérieur à S_η ou sur la frontière de cette sphère. Donc, on a $P \subset U_a \subset V_a$. De plus, P est compact (car U_a est compact) et discontinu (car E est discontinu). Le voisinage V_a de a sur E contient donc un ensemble P parfait compact et discontinu. D'autre part, $P \supset Q$ et Q est un voisinage de a sur E. La condition du théorème 21 est donc bien vérifiée. E est alors homogène et $\partial E = \partial H_1$.

C. Q. I. D.

Théorème 24. — *Si* E *est un ensemble homogène appartenant à un espace distancié quelconque tel que* $\partial E < \partial(R_1)$, ∂E *et* ∂H_1 *sont comparables et l'on a* $\partial E \leqq \partial H_1$. *En d'autres termes, le type homogène de dimensions de* H_1 *est le plus grand de ceux qui sont plus petits que le type homogène de dimensions de la droite* (R_1).

Démonstration. — Soient $a \in E$, $h \in H_1$ et V_h un voisinage de h sur H_1. Il faut chercher un voisinage V_a de a sur E tel que V_a soit homéomorphe à une partie de V_h.

En vertu de $\partial E < \partial(R_1)$, il existe un voisinage V_a de a sur E tel que V_a soit homéomorphe à un ensemble linéaire L. On a $dV_a = dL \leqq d(R_1)$.

Si $dL = d(R_1)$, on aurait $dV_a = d(R_1)$, $dE \geqq d(R_1)$, et par conséquent, $\partial E \geqq \partial(R_1)$, ce qui est absurde. Donc : $dL < d(R_1)$. Alors, on a nécessairement $dL \leqq dH_1$ (*voir* M. Fréchet, [1], p. 40), et $dV_a \leqq dH_1$. Or, H_1 est réfléchi, $dH_1 = dV_h$. Il en résulte que $dV_a \leqq dV_h$ et $\partial E \leqq \partial H_1$. C. Q. F. D.

Finalement il est intéressant d'observer que *l'ensemble des nombres transcendants réels sur la droite* (R_1) *est homogène et du même type homogène de dimensions que* H_1. D'ailleurs *cet ensemble est homéomorphe à* H_1. En effet, l'ensemble C_1 des nombres rationnels et l'ensemble des nombres algébriques réels sont dénombrables et chacun dense sur toute la droite (R_1). On sait que, pour deux ensembles linéaires dénombrables chacun dense sur toute la droite, il existe une homéomorphie de (R_1) en lui-même tout entier et transformant le premier ensemble dans le second (1). Il en résulte donc que l'ensemble des nombres transcendants réels est homéomorphe à H_1.

33. Composition d'espaces et composition d'ensembles. — Nous avons utilisé l'opération de composition d'espaces distanciés vectoriels (ou distanciés affines) pour définir la différentielle totale (§ **19**). C'est une méthode de M. Fréchet qu'il avait employée pour définir la différentielle totale à son sens. Le même auteur ([12], p. 146 ou [1], p. 107), s'est servi de la composition d'espaces distanciés pour définir l'addition du type de dimensions. Pour introduire l'addition du type homogène de dimensions, nous suivrons la même marche que M. Fréchet.

---

(1) *Cf.* M. Fréchet, [1], p. 40.

Soit $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$ une suite finie ou dénombrable infinie d'espaces distanciés. Construisons un nouvel espace désigné par $[\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots]$, dont les points sont toutes les suites de points

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

où x_n est un point de $\mathscr{E}_n (n = 1, 2, \ldots)$. La définition de convergence est donnée comme il suit : pour qu'une suite de points

$$X^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

tende vers un point

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

il faut et il suffit que, pour chaque valeur de n,

$$\lim_{m \to \infty} x_n^{(m)} = x_n \text{ dans l'espace } \mathscr{E}_n.$$

L'espace $[\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots]$ ainsi défini s'appelle *espace composé* des espaces $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$.

L'espace (E_ω) de M. Fréchet est un espace composé :

$$(E_\omega) = [(R_1), (R_1), \ldots, (R_1), \ldots].$$

En employant un raisonnement analogue à celui que M. Fréchet a utilisé pour l'espace (E_ω) [1], on peut prouver la proposition suivante :

1° *L'espace* $[\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots]$ *composé à partir des espaces distanciés* $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$ *est lui-même un espace distancié.*

En effet, on peut définir la distance de deux points

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \qquad \text{et} \qquad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

par

$$(X, Y) = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{(x_n, y_n)}{1 + (x_n, y_n)},$$

où (x_n, y_n) désigne la distance de x_n et de y_n dans l'espace $\mathscr{E}_n$. Dans le cas particulier où l'espace est composé à partir d'un nombre fini n d'espaces, on peut aussi prendre une autre expression pour la distance, à savoir :

$$(X, Y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \ldots + (x_n, y_n).$$

Soient $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$ une suite (finie ou infinie) d'espaces distanciés et $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ une suite d'ensembles tels que $E_i \subset \mathscr{E}_i$. On définira *l'ensemble composé* $[E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots]$ comme l'ensemble de l'espace

---

[1] *Cf.* M. Fréchet, [6], p. 39-41.

$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots]$ formé par tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ avec $x_i \in E_i$.

Rappelons ici quelques propriétés simples dont nous ferons usage plus loin :

2° *Soient* $\mathcal{E}_n$ *et* $\mathcal{F}_n (n = 1, 2, \ldots)$ *deux suites d'espaces distanciés homéomorphes respectivement. Alors, les espaces composés* $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots]$ *et* $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n, \ldots]$ *sont aussi homéomorphes* (¹).

3° *Soit* $\mathcal{E}_n (n = 1, 2, \ldots)$ *une suite finie ou infinie d'espaces distanciés réfléchis. Alors l'espace composé* $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots]$ *est aussi réfléchi.*

4° *Soit* V_X *un voisinage d'un point* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *de l'espace composé* $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots]$. *Alors il existe une suite de voisinages* V_{x_n} *de* x_n *dans* $\mathcal{E}_n$ *tels que*

$$[V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}, \ldots] \subset V_X.$$

Remarquons que les propositions 1°-4° sont valides, que l'espace $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots]$ soit composé à partir d'un nombre fini ou dénombrable infini d'espaces $\mathcal{E}_n$.

5° *Soient* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ *un nombre fini d'espaces distanciés. Soient* x_k *un point de* $\mathcal{E}_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ et V_{x_k} *un voisinage de* x_k *dans l'espace* $\mathcal{E}_k$. *Il existe alors un voisinage* V_X *du point* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dans l'espace composé* $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n]$ *tel que*

$$V_X \subset [V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}].$$

Théorème 25. — *Soient* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ *n espaces distanciés homogènes. Alors l'espace composé* $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n]$ *est aussi homogène.*

Démonstration. — Soient $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux points de l'espace composé $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n]$ et V_Y un voisinage de Y dans cet espace composé. D'après 4°, il existe des voisinages V_{y_k} de y_k dans l'espace $\mathcal{E}_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ tels que

$$[V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}] \subset V_Y.$$

Les espaces $\mathcal{E}_k$ sont homogènes, il existe des voisinages V_{x_k} de x_k dans $\mathcal{E}_k$ tels que V_{x_k} soit homéomorphe à une partie de V_{y_k}. D'après 2°, $[V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}]$ est homéomorphe à une partie de $[V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}]$ et, par suite, homéomorphe à une partie de V_Y. D'autre part, d'après 5°, il existe un voisinage V_X de X dans l'espace composé $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n]$ tel que

$$V_X \subset [V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}].$$

Ainsi V_X est homéomorphe à une partie de V_Y. L'espace composé est donc homogène. C. Q. F. D.

(¹) Les propositions 2°-4° sont dues à M. Kunugi, [1], p. 30-32.

Comme tout ensemble de points d'un espace distancié peut lui-même être considéré comme un espace distancié, toutes les propriétés précédentes pour la composition d'espaces distanciés resteront évidemment vraies pour la composition d'ensembles appartenant à des espaces distanciés.

34. Addition des types homogènes de dimensions. — Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n ensembles homogènes chacun appartenant à un espace distancié, l'ensemble composé $[E_1, E_2, \ldots, E_n]$ est aussi homogène. Donc le type homogène de dimensions de cet ensemble composé est bien défini. Nous appellerons *somme des types homogènes de dimensions* $\partial E_1, \partial E_2, \ldots, \partial E_n$ le type homogène de dimensions de $[E_1, E_2, \ldots, E_n]$ et nous écrirons

$$\partial E_1 + \partial E_2 + \ldots + \partial E_n = \partial [E_1, E_2, \ldots, E_n].$$

Pour que cette définition soit légitime, il nous faut démontrer la proposition suivante :

1° *Si* $\partial E_k = \partial F_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, *on a*

$$\partial [E_1, E_2, \ldots, E_n] = \partial [F_1, F_2, \ldots, F_n].$$

En effet, cette propriété peut être facilement démontrée en appliquant 2°, 4°, 5° du paragraphe **33**.

On peut aussi aisément établir les propositions suivantes :

2° *Soit* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *une certaine permutation de n premiers entiers* 1, 2, ..., *n*. *On a*

$$\partial E_1 + \partial E_2 + \ldots + \partial E_n = \partial E_{\nu_1} + \partial E_{\nu_2} + \ldots + \partial E_{\nu_n}.$$

3° *Si l'on a* $\partial E_k \geqq \partial F_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, *on a*

$$\partial E_1 + \partial E_2 + \ldots + \partial E_n \geqq \partial F_1 + \partial F_2 + \ldots + \partial F_n.$$

4° *Quels que soient les ensembles homogènes* E, F, *on a*

$$\partial E + \partial F \geqq \partial E.$$

5° *Pour tout ensemble isolé* J *et tout ensemble homogène* E, *on a* $\partial E + \partial J = \partial E$. *Inversement, si un ensemble homogène* F *satisfait à la relation* $\partial E + \partial F = \partial E$ *pour n'importe quel ensemble homogène* E, F *est nécessairement isolé.*

Ainsi il est naturel de dire que *le type homogène de dimensions d'un ensemble isolé* J *est zéro* et nous écrirons

$$\partial J = 0. \tag{48}$$

Mais cela ne peut nous conduire à considérer le type de dimensions dJ d'un ensemble isolé J comme zéro. Deux ensembles isolés ne sont pas nécessairement du même type de dimensions. D'ailleurs, *on peut donner un ensemble isolé* K *tel que, pour tout ensemble séparable non isolé* E, *les types de dimensions* dK *et* dE *soient incomparables*. Considérons par exemple l'ensemble suivant qui a été considéré par M. Fréchet ([7], p. 13). Faisons correspondre à chaque fraction décimale

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

le point X de l'espace (D_ω) qui a pour coordonnées :

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n, \quad \ldots.$$

Tous ces points X forment un ensemble K isolé ayant la puissance du continu. K est un ensemble non séparable, car tout ensemble isolé séparable est au plus dénombrable. Donc, pour tout ensemble séparable non isolé E, les types de dimensions dK et dE sont incomparables.

6° *Étant donné un ensemble homogène* E, *il existe toujours un ensemble homogène non séparable* F *tel que* $\partial E = \partial F$.

En effet, nous n'avons qu'à prendre $F = [E, K]$.

Si l'ensemble E dans 6° est séparable, on a évidemment $dE < dF$. Donc :

7° *Étant donné un ensemble homogène séparable* E, *il existe toujours un ensemble homogène* F *tel que* $\partial E = \partial F$ *et* $dE < dF$.

Citons finalement, à titre d'exemples, les formules suivantes :

$$\partial(R_{n+m}) = \partial(R_n) + \partial(R_m), \tag{49}$$

$$\partial C_{n+m} = \partial C_n + \partial C_m = \partial C_1, \tag{50}$$

$$\partial H_{n+m} = \partial H_n + \partial H_m = \partial H_1, \tag{51}$$

où C_n désigne l'ensemble des points de (R_n) dont les coordonnées sont toutes rationnelles et H_n désigne l'ensemble des points de (R_n) dont les coordonnées sont toutes irrationnelles [1]. L'égalité (49) justifie une fois de plus la notation $\partial(R_n) = n$. D'après 3°, 4° et (51), on a

$$\partial H_1 = \partial H_1 + \partial H_1 \geqq \partial H_1 + \partial C_1 \geqq \partial H_1,$$

d'où

$$\partial H_1 + \partial H_1 = \partial H_1 + \partial C_1.$$

On voit donc que *l'ensemble des inégalités* $\partial E_1 \geqq \partial F_1$ *et* $\partial E_2 > \partial F_2$ *peut ne pas entraîner l'inégalité* $\partial E_1 + \partial E_2 > \partial F_1 + \partial F_2$.

35. Retour au type homogène de dimensions de l'ensemble des nombres irrationnels. — Pour l'addition du type homogène de dimensions, nous n'avons utilisé que la composition d'un nombre fini d'ensembles. Nous allons appliquer la composition d'une infinité dénombrable d'ensembles pour étudier quelques ensembles homogènes ayant le même type homogène de dimensions que H_1.

---

[1] On sait que l'ensemble C_n est homéomorphe à C_1. De même, les ensembles H_n et H_1 sont homéomorphes. *Voir* M. Fréchet [1], p. 60.

Nous avons vu (§ **31**) que tout ensemble homogène appartenant à un espace distancié séparable et ayant le même type homogène de dimensions que C_1 est homéomorphe à C_1. Considérons maintenant le type homogène de dimensions ∂H_1. Nous avons l'ensemble triadique T de Cantor qui est du même type homogène de dimensions que H_1. Il est facile de voir que T et H_1 ne sont pas homéomorphes, car le premier ensemble est compact en soi, tandis que le second ne l'est pas. Il existe donc au moins deux ensembles homogènes linéaires qui sont non homéomorphes et qui ont le même type homogène de dimensions que H_1.

Soit C_ω l'ensemble de ceux des points de l'espace (E_ω) dont les coordonnées sont toutes rationnelles. C_ω peut être considéré comme un ensemble composé

$$C_\omega = [C_1, C_1, \ldots, C_1, \ldots].$$

Alors, d'après 3° du paragraphe **35**, l'ensemble C_ω est réfléchi, puisque C_1 est réfléchi. On sait que $dC_\omega = dH_1$ (1), alors $\partial C_\omega = \partial H_1$.

Il serait intéressant de savoir si l'ensemble C_ω est homéomorphe à H_1. Nous ne savons pas répondre à cette question. Cependant, nous montrerons que C_ω est une image biunivoque et continue de H_1. Pour ce faire, nous allons d'abord construire un espace homéomorphe à C_ω tel que les points de cet espace soient les suites infinies d'entiers positifs.

Commençons par un espace donné par M. L. Vietoris ([1], p. 174) : Soit (N_1) l'ensemble des entiers positifs (2). Tout point x de (N_1) possède une suite de voisinages $V_x^{(m)}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. $V_x^{(m)}$ est l'ensemble des entiers positifs y tels que $y \equiv x \pmod{m}$. M. H. Tietze [3] a démontré que (N_1) est un espace distancié. En désignant par $(\gamma(n))!$ le plus grand diviseur de n contenu dans la suite des nombres

$$1! = 1, \qquad 2! = 2, \qquad 3! = 6, \qquad 4! = 24, \qquad \ldots,$$

il a défini la distance de deux points x, y par l'expression

$$(x, y) = \frac{1}{\gamma(y - x)}, \qquad (x, x) = \frac{1}{\gamma(0)} = 0.$$

On voit facilement que (N_1) est dense en soi. Il s'ensuit que (N_1) et C_1 sont homéomorphes, car deux ensembles dénombrables, chacun dense en soi et appartenant à deux espaces distanciés sont homéomorphes.

Considérons maintenant l'espace (N_ω), où chaque point est défini par une

---

(1) M. Fréchet, [1], p. 103.

(2) M. Vietoris a considéré l'ensemble de tous les entiers $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Nous avons modifié cet ensemble en considérant seulement les entiers positifs, parce que c'est plus commode en envisageant des relations entre l'espace (N_ω) (défini plus loin) et l'espace (B) de Baire.

suite infinie d'entiers positifs et où la distance de deux points $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ est définie par

$$(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1 + \gamma(y_n - x_n)}.$$

On voit que (N_ω) est l'espace composé

$$(N_\omega) = [(N_1), (N_1), \ldots, (N_1), \ldots].$$

Comme (N_1) et C_1 sont homéomorphes, (N_ω) et C_ω sont aussi homéomorphes (d'après 2° du § 33). Ainsi nous arrivons au théorème suivant :

THÉORÈME 26. — *Soit* (N_ω) *l'espace où chaque point est défini par une suite infinie d'entiers positifs et où la distance de deux points* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *et* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ *est définie par*

$$(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1 + \gamma(y_n - x_n)}.$$

L'espace (N_ω) *est homéomorphe à l'ensemble* C_ω *de ceux des points de l'espace* (E_ω) *dont toutes les coordonnées sont rationnelles* (1).

Il en résulte que l'espace (N_ω) est réfléchi et $\partial(N_\omega) = \partial H_1$.

Ceci étant, nous pouvons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 27. — *L'ensemble* C_ω *est une image biunivoque et continue de l'ensemble* H_1.

Démonstration. — Il suffit de prouver que l'espace (N_ω) est une image biunivoque et continue de l'espace (B) de Baire (2), car il est bien connu que l'espace (B) de Baire est homéomorphe à H_1.

---

(1) Dans l'espace (N_ω), on peut aussi prendre une autre expression un peu plus simple pour la distance (fournissant cependant une définition équivalente de la convergence), à savoir :

$$(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\gamma(y_n - x_n)}.$$

(2) Chaque point de l'espace (B) de Baire est défini par une suite infinie d'entiers positifs. La distance de deux points $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ et $\eta = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ est définie par

$$(\xi, \eta) = \frac{1}{m}, \qquad (\xi, \xi) = 0,$$

où m est l'entier positif déterminé par les conditions suivantes :

$$x_m \neq y_m, \qquad x_k = y_k \quad \text{pour tout } k < m.$$

Faisons correspondre à chaque point $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de (B) le point de (N_ω) $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ avec les mêmes coordonnées. Étant donné un nombre positif ε, on peut déterminer un entier M assez grand tel que

$$\frac{1}{(M+1)!} + \frac{1}{(M+2)!} + \ldots < \varepsilon.$$

Prenons $\rho = \frac{1}{M}$. Pour un point $\eta = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ de (B) tel que $(\xi, \eta) < \rho = \frac{1}{M}$, on a nécessairement

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad \ldots, \qquad x_M = y_M.$$

Alors la distance entre les points

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \qquad \text{et} \qquad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

de (N_ω) est

$$\begin{aligned}(X, Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1 + \gamma(y_n - x_n)} \\ &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1 + \gamma(y_n - x_n)} < \frac{1}{(M+1)!} + \frac{1}{(M+2)!} + \ldots < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi (N_ω) est une image biunivoque et continue de (B). Et par suite, l'ensemble C_ω est une image biunivoque et continue de H_1. C. Q. F. D.

36. Conclusion. — Nous avons montré, dans ce qui précède, qu'on peut étendre tout ce qu'il y a d'essentiel dans la théorie du type de dimensions, à la théorie du type homogène de dimensions. Dans le cours de ce Chapitre, nous nous sommes borné aux ensembles appartenant à des espaces distanciés. Cependant, la définition du type homogène de dimensions peut aussi bien s'appliquer aux ensembles appartenant à des espaces (v) de M. Fréchet ([1], p. 172).

Naturellement le type homogène de dimensions n'est défini que pour les ensembles homogènes. Mais, parmi les ensembles les plus importants qui se sont présentés d'eux-mêmes dans la Topologie ou dans l'Analyse, la plupart sont homogènes. Comme exemples d'espaces homogènes, on peut citer, en outre des espaces distanciés affines, les groupes topologiques. On sait que tout groupe topologique, étant un espace (v) particulier, est topologiquement homogène. Il s'ensuit, à plus forte raison, que tout groupe topologique est dimensionnellement homogène. Il serait intéressant d'étudier la classification des groupes topologiques au moyen de leurs types homogènes de dimensions.

CHAPITRE IV.

NOTION DE LIGNE.

37. L'OBJET DU PRÉSENT CHAPITRE. — Dans l'Analyse générale, comme dans l'Analyse classique, la notion de ligne est d'une importance non moins fondamentale que celle de dimension. D'ailleurs, ces deux notions sont intimement liées. A partir des importants travaux de C. Jordan, L. Zoretti [1], N. J. Lennes [1] et S. Janiszewski [1], de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la notion de ligne. Ces travaux ont non seulement énormément élucidé la notion de ligne, mais ont encore contribué dans une large mesure au développement général de la Théorie des ensembles. Dans ces nombreux Mémoires sur la notion de ligne, les divers auteurs supposent souvent qu'on a affaire soit à un espace cartésien, soit à un espace distancié. Le besoin incontestable de fixer la notion de ligne dans des espaces plus généraux se fait sentir immédiatement. Nous sommes ainsi amenés à étudier cette notion dans une certaine catégorie d'espaces que nous définirons plus loin sous le nom d'espaces de F. Riesz. La catégorie des espaces de F. Riesz comprend comme cas particuliers les espaces ($\mathcal{L}$) de M. Fréchet (1) ainsi que les espaces accessibles de M. Fréchet (2) et par suite les espaces de M. Hausdorff (3). L'intérêt de nos résultats consiste non seulement dans la généralité des espaces considérés, mais aussi dans ce fait que nos principaux résultats même dans le cas très particulier des espaces distanciés sont encore nouveaux.

38. LES ESPACES DE F. RIESZ. — Un ensemble $\mathcal{E}$ d'éléments quelconques, appelés points, étant donné, faisons correspondre à tout sous-ensemble E de $\mathcal{E}$ un sous-ensemble $\overline{\mathrm{E}}$ de $\mathcal{E}$ par une loi déterminée. L'ensemble $\overline{\mathrm{E}}$ s'appelle *fermeture* de E. Un point a est dit *point d'accumulation* d'un ensemble E, si l'on a $a \in \overline{\mathrm{E}-(a)}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ sera dit *espace de F. Riesz*, s'il est formé de plus d'un point et si la loi de correspondance de E à $\overline{\mathrm{E}}$ satisfait aux deux conditions suivantes dues à M. F. Riesz ([1], p. 19) :

1° E *et* F *étant deux ensembles quelconques compris dans* $\mathcal{E}$, *on a toujours*

$$\overline{\mathrm{E}+\mathrm{F}}=\overline{\mathrm{E}}+\overline{\mathrm{F}}. \tag{52}$$

2° *La fermeture d'un ensemble* (a) *formé d'un seul point* a *est l'ensemble* (a)

(1) *Cf.* M. FRÉCHET, [1], p. 163.
(2) *Cf.* M. FRÉCHET, [1], p. 185.
(3) *Cf.* M. FRÉCHET. [1], p. 204; M. HAUSDORFF, [2], p. 213.

lui-même :

$$\overline{(a)} = (a) \quad (53)$$

([1]).

Si l'on prend, au lieu de l'opération de fermeture, l'opération de dérivation comme la notion primitive, on peut définir les espaces de F. Riesz comme il suit : Un espace de F. Riesz est un ensemble $\mathcal{E}$ contenant au moins deux points, où l'on a défini une opération faisant correspondre à chaque sous-ensemble E de $\mathcal{E}$ un sous-ensemble E′ de $\mathcal{E}$, appelé *ensemble dérivé* de E, telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1° E *et* F *étant deux ensembles quelconques compris dans* $\mathcal{E}$, *on a toujours*

$$(E + F)' = E' + F'. \quad (52\ bis)$$

2° *Un ensemble* (a) *formé d'un seul point* a *a pour dérivé l'ensemble vide :*

$$(a)' = 0. \quad (53\ bis)$$

Tout espace de F. Riesz est un espace (v) de M. Fréchet ([1], p. 172). Comme M. Fréchet ([15], p. 144) a montré qu'on peut traduire les conditions (52 *bis*), (53 *bis*) imposées à l'opération de dérivation sous forme de conditions imposées au choix de familles de voisinages, on peut dire qu'un espace de F. Riesz est un espace (v) où les familles de voisinages satisfont aux deux conditions suivantes :

1° *Pour tout point* a, *quels que soient les voisinages* V_a *et* W_a *de* a, *il existe au moins un voisinage de* a *qui appartient entièrement à la fois à* V_a *et* W_a.

2° *Pour tout point* a, *les voisinages de* a, *envisagés simultanément, n'ont en commun que le seul point* a.

Il est facile de voir que tout espace $(\mathcal{L})$ de M. Fréchet est un espace de F. Riesz. Mais la réciproque n'est pas vraie. Il suffit de rappeler l'espace suivant donné par M. F. Riesz ([1], p. 19) : L'espace est formé des points d'une droite, mais où un point a ne serait considéré comme point d'accumulation d'un ensemble E, que si tout intervalle de milieu a contenait une infinité non dénombrable de points de E. C'est un espace de F. Riesz sans être un espace $(\mathcal{L})$. Donc, *la catégorie des espaces de F. Riesz est effectivement plus générale que celle des espaces* $(\mathcal{L})$.

D'autre part, tout espace accessible de M. Fréchet est un espace de F. Riesz. En effet, un espace accessible n'est autre qu'un espace de F. Riesz vérifiant la condition supplémentaire suivante :

---

[1] D'après 1° et 2°, on peut démontrer les formules $E \subset \overline{E}$ et $\overline{O} = O$. (Pour déduire cette dernière formule, on utilise l'hypothèse que $\mathcal{E}$ ne se réduit pas à un seul point.)

3° *Quel que soit* E, *on a*

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}, \tag{54}$$

en désignant par $\overline{\overline{E}}$ *la fermeture de* $\overline{E}$.

Mais un espace de F. Riesz n'est pas nécessairement un espace accessible. M. Fréchet ([1], p. 162) a appelé espace (Q) l'espace dont chaque point est une fonction numérique $f(x)$ d'une variable numérique x (variable dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$) et où une suite de points $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ est considérée comme convergeant vers un point f, si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ *en chaque point* x *considéré individuellement sur* $0 \leq x \leq 1$. Et il a indiqué que (Q) est un espace ($\mathcal{L}$) sans vérifier (54). Cet espace (Q) fournit donc un exemple simple et non artificiel d'un espace de F. Riesz qui n'est pas un espace accessible. Donc, *la catégorie des espaces de F. Riesz est aussi effectivement plus large que celle des espaces accessibles.*

39. L'ARC SIMPLE. — Un ensemble de points d'un espace (v) quelconque sera appelé *arc simple*, s'il est homéomorphe à un segment fermé de la droite (R_1). Cette définition est exactement celle qu'on a adoptée habituellement dans le cas des espaces distanciés. Il y a toutefois des différences essentielles entre le cas des espaces distanciés et le cas infiniment plus général des espaces (v). On sait que tout arc simple dans un espace distancié est un continu, c'est-à-dire un ensemble connexe fermé et contenant plus d'un point. *Mais un arc simple dans un espace* (v) (*même dans un espace accessible*) *peut ne pas être un ensemble fermé*, ce qui résultera de l'exemple suivant : Considérons, avec M. P. Alexandroff (¹), l'espace dont les points sont ceux d'une droite indéfinie avec les voisinages habituels et en outre un point a pris hors de la droite. On prend comme voisinage de ce point a tout ensemble obtenu en supprimant de l'espace total un nombre fini de points de la droite. On voit facilement que c'est un espace accessible (et par suite aussi un espace de F. Riesz). Dans cet espace, l'ensemble formé par les points d'un segment fermé de la droite est un arc simple, sans être un ensemble fermé.

Une autre différence essentielle consiste dans le fait suivant : Dans un espace distancié, une image biunivoque et continue d'un segment fermé de la droite (R_1) est toujours un arc simple. *Mais, dans un espace accessible, une image biunivoque et continue d'un segment fermé de* (R_1) *peut ne pas être un arc simple.* Considérons encore l'espace de M. Alexandroff dont nous venons de parler. Soit A l'ensemble de cet espace formé par le point a (qui est pris hors de la droite) et les points t de la droite tels que $0 < t \leq 1$. Faisons correspondre à chaque point t de (R_1) tel que $0 < t \leq 1$ le point t de A et au point $t = 0$ de (R_1)

(¹) *Cf.* M. FRÉCHET, [1], p. 245.

le point a de A. A est alors une image biunivoque et continue du segment fermé $S = [0, 1]$ de (R_1), mais cette correspondance n'est pas bicontinue. D'ailleurs il est facile de voir que l'ensemble A n'est pas homéomorphe à S.

Revenons maintenant à la définition des arcs simples. La définition précédente n'est pas géométrique, car elle affirme l'existence d'une certaine homéomorphie. D'autre part, la définition fait intervenir le segment fermé de la droite, de sorte qu'on utilise les rapports entre les points de l'ensemble en question et ceux d'un ensemble fixe pris comme un modèle. Ainsi, à partir de Janiszewski, on est amené à poser le problème de chercher une définition purement géométrique des arcs simples. Autrement dit, il s'agit de caractériser les arcs simples par leurs propriétés qui sont à la fois géométriques et topologiques.

Dans la Thèse de Janiszewski [1], sa caractérisation topologique des arcs simples repose sur la notion importante due à Zoretti de continu irréductible entre deux points. Cette caractérisation ne peut pas s'étendre au cas des espaces de F. Riesz (ni même au cas des espaces accessibles), puisqu'un arc simple dans un espace de F. Riesz (ou dans un espace accessible) n'est pas nécessairement un continu.

Une autre caractérisation est la suivante : pour qu'un ensemble d'un espace distancié soit un arc simple, il faut et il suffit qu'il soit compact, fermé et connexe irréductible entre deux points ([1]). Cette caractérisation est plus propre à la généralisation. Nous montrerons qu'il est possible d'obtenir une caractérisation topologique et purement géométrique, pour les arcs simples appartenant à des espaces de F. Riesz, basée sur les notions d'ensemble connexe irréductible entre deux points et d'ensemble localement connexe, *sans faire intervenir la considération de compacité.*

Nous adoptons dans un espace (v) quelconque les définitions suivantes :

Un ensemble E est dit *connexe irréductible entre deux points* a_0, a_1, s'il est connexe, contient a_0, a_1 et tel que tout vrai sous-ensemble de E contenant a_0, a_1 cesse d'être connexe.

Un ensemble E est dit *localement connexe en un de ses points*, soit a, si pour tout voisinage V_a de a, il existe un ensemble G connexe et ouvert dans E tel que $a \in G \subset V_a . E$. Un ensemble est dit *localement connexe*, s'il est localement connexe en chacun de ses points.

On démontre facilement le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient* $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ *deux espaces* (v) *et* f *une homéomorphie transformant un ensemble* E *de* $\mathcal{E}_1$ *en un ensemble* F *de* $\mathcal{E}_2$: $F = f(E)$. *Alors :*

([1]) Ces conditions sont dues à M. N. J. LENNES, [1], p. 308. *Voir* aussi M. HAUSDORFF, [3], p. 219 223.

1° *Si* E *est connexe irréductible entre deux points* a_0, a_1, F *est aussi connexe irréductible entre deux points* $b_0 = f(a_0)$, $b_1 = f(a_1)$.

2° *Si* E *est localement connexe en un point* $a \in E$, F *est aussi localement connexe en* $b = f(a)$.

Comme un segment fermé de la droite (R_1) est un ensemble connexe irréductible entre deux points et localement connexe, il s'ensuit que *tout arc simple dans un espace* (v) *quelconque est un ensemble connexe irréductible entre deux points et localement connexe*. D'autre part, il est facile de voir que tout arc simple A dans un espace (v) est un ensemble séparable, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dénombrable infini D tel que $D \subset A \subset \bar{D}$. Nous verrons plus loin que ces trois propriétés des arcs simples suffisent à les caractériser parmi les ensembles appartenant à des espaces de F. Riesz.

40. Une décomposition d'un ensemble connexe irréductible entre deux points. — Énonçons d'abord le lemme suivant qui est bien connu dans le cas des espaces distanciés [1] :

Lemme 4. — *Dans un espace de F. Riesz, soient* E, F *deux ensembles non disjoints et fermés dans leur somme* $S = E + F$. *Si leur somme* S *et leur produit* $P = EF$ *sont connexes*, E *et* F *sont aussi connexes.*

Démonstration. — Si E n'était pas connexe, on aurait

$$E = E_1 + E_2, \qquad E_1.\bar{E}_2 + \bar{E}_1.E_2 = 0, \qquad E_1 \neq 0 \neq E_2.$$

On a alors

$$P = E_1.F + E_2.F, \qquad E_1F.\overline{E_2F} + \overline{E_1F}.E_2F \subset E_1\bar{E}_2 + \bar{E}_1E_2 = 0.$$

Mais, P est connexe, il en résulte qu'au moins une des égalités $E_1F = 0$, $E_2F = 0$ a lieu. Soit $E_2F = 0$. Considérons maintenant la décomposition

$$S = (E_1 + F) + E_2. \tag{55}$$

En appliquant (52), compte tenu que E et F sont fermés dans $S(E = \bar{E}S$, $F = \bar{F}S)$, on a

$$\overline{(E_1 + F)}.E_2 \subset \overline{(E_1 + F)}.S = \bar{E}_1.S + \bar{F}.S = \bar{E}_1.(E_1 + E_2 + F) + F = E_1 + F$$

et par conséquent

$$\overline{(E_1 + F)}.E_2 \subset (E_1 + F).E_2 = 0. \tag{56}$$

D'autre part

$$(E_1 + F).\bar{E}_2 = F.\bar{E}_2 \subset S.\bar{E}_2 = S.(\bar{E}.\bar{E}_2) = (S.\bar{E}).\bar{E}_2 = E.\bar{E}_2 = (E_1 + E_2).\bar{E}_2 = E_2$$

[1] *Cf.* M. Hausdorff, [3], p. 151.

et par suite

$$(\mathrm{E}_1 + \mathrm{F}).\overline{\mathrm{E}}_0 = \mathrm{F}.\overline{\mathrm{E}}_0 = \mathrm{F}.\mathrm{E}_2 = 0. \tag{57}$$

Or, S est connexe. D'après (55), (56), (57) et $\mathrm{E}_1 + \mathrm{F} \neq 0$, on en conclut que $\mathrm{E}_0 = 0$. Ceci est une contradiction. Donc, E est connexe.

C. Q. F. D.

Les théorèmes 28, 29 que nous allons exposer dans ce paragraphe et dans le suivant, sont bien connus dans le cas des espaces distanciés [1].

Théorème 28. — *Soit* A *un ensemble connexe irréductible entre deux points a_0, a_1 et appartenant à un espace de F. Riesz. Pour tout point b de* A *tel que $a_0 \neq b \neq a_1$,* A *peut être décomposé en deux ensembles fermés dans* A, *connexes, l'un contenant a_0, l'autre a_1 et n'ayant en commun que le seul point b.*

Démonstration. — Soit b un point de A tel que $a_0 \neq b \neq a_1$. L'ensemble $\mathrm{A} - (b)$ est un vrai sous-ensemble de A et contient a_0, a_1. Il est donc non connexe. On a alors une décomposition

$$\mathrm{A} - (b) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}, \qquad \mathrm{P}.\overline{\mathrm{Q}} + \overline{\mathrm{P}}.\mathrm{Q} = 0, \qquad \mathrm{P} \neq 0 \neq \mathrm{Q}.$$

En appliquant (52) et (53), on a

$$\begin{aligned}\overline{(\mathrm{P} + (b))}.\mathrm{A} &= \big(\overline{\mathrm{P}} + \overline{(b)}\big).\mathrm{A} \\ &= \overline{\mathrm{P}}.\mathrm{A} + (b) = \overline{\mathrm{P}}.\big(\mathrm{P} + \mathrm{Q} + (b)\big) + (b) = \mathrm{P} + (b).\end{aligned}$$

C'est-à-dire, l'ensemble $\mathrm{P} + (b)$ est fermé dans A. De même, on peut prouver que $\mathrm{Q} + (b)$ est fermé dans A.

La somme et le produit des ensembles $\mathrm{P} + (b)$, $\mathrm{Q} + (b)$ sont respectivement A et (b), qui sont tous les deux connexes. D'après le lemme 4, il en résulte que $\mathrm{P} + (b)$ et $\mathrm{Q} + (b)$ sont aussi connexes.

Les ensembles $\mathrm{P} + (b)$ et $\mathrm{Q} + (b)$ sont des vrais sous-ensembles connexes de A. Aucun de ces deux ensembles ne peut contenir à la fois a_0, a_1. Donc, l'un d'eux contient a_0, l'autre a_1. Le théorème est ainsi démontré.

C. Q. F. D.

41. Un ensemble connexe irreductible entre deux points consideré comme un ensemble ordonne. — Énonçons maintenant le théorème suivant :

Theorème 29. — *Dans un espace de F. Riesz, tout ensemble* A *connexe irréductible entre deux points a_0, a_1 peut être ordonné de la façon suivante :*

1° *Pour deux points $b \neq c$ de* A, *une et seulement une des relations $b < c$, $c < b$ est vraie.*

---

(1) *Cf.* M. Hausdorff, [3], p. 220-222; M. K. Menger, [1], p. 42-47; MM. B. Knaster et C. Kuratowski, [1], p. 219 221; C. Zarankiewicz, [1], p. 136.

2° *Pour tout point b de* A *tel que $a_0 \neq b \neq a_1$, on a toujours les relations $a_0 < b < a_1$.*

3° *Quels que soient les points b, c, d de* A, *les relations $b < c$, $c < d$ impliquent $b < d$.*

4° *Soit b un point de* A *tel que $a_0 \neq b \neq a_1$. Soit $A = B_0 + B_1$ une décomposition de* A *en deux ensembles fermés dans* A, *connexes et tels que*

$$B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni a_1 \quad (^1).$$

Alors tout point de $B_0 - (b)$ est $< b$, et tout point de $B_1 - (b)$ est $> b$.

Démonstration. — Soient b, c deux points de A tels que

$$b \neq c, \qquad a_0 \neq b \neq a_1, \qquad a_0 \neq c \neq a_1.$$

Nous posons $b < c$, si et seulement si A est somme de deux ensembles fermés dans A, connexes, n'ayant en commun que le seul point b et tels que l'un contienne a_0, l'autre contienne a_1 et c.

Pour un point b de A tel que $a_0 \neq b \neq a_1$, nous posons toujours $a_0 < b$ et $b < a_1$. Enfin nous posons $a_0 < a_1$. Nous allons prouver que la relation $<$ ainsi définie vérifie les conditions 1°-4°.

1° *a. Pour deux points $b \neq c$ de* A, *les deux relations $b < c$ et $c < b$ sont incompatibles.*

Évidemment on peut se borner au cas où

$$a_0 \neq b \neq a_1, \qquad a_0 \neq c \neq a_1.$$

Supposons $b < c$. On a alors

$$A = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni a_1, c,$$

où B_0, B_1 sont deux ensembles fermés dans A et connexes.

Considérons maintenant une décomposition

$$A = C_0 + C_1, \qquad C_0 . C_1 = (c), \qquad C_0 \ni a_0, \qquad C_1 \ni a_1,$$

où C_0, C_1 sont deux ensembles fermés dans A et connexes (²). Il s'agit de montrer que $b \in C_0$.

On peut considérer l'ensemble A comme un sous-espace et désigner par *front.*$_A C_0$ la frontière de C_0 relative à ce sous-espace A. On a

$$\text{front.}_A C_0 = \overline{C}_0 . \overline{(C_1 - (c))} . A \subset \overline{C}_0 . \overline{C}_1 . A = C_0 . C_1 = (c).$$

(¹) Une telle décomposition de A est possible, d'après le théorème **28**.

(²) Dans le Chapitre III, nous avons désigné par C_1 l'ensemble des nombres rationnels. Ici, la lettre C_1 n'a aucun rapport avec l'ensemble des nombres rationnels.

D'autre part, on a $c \notin B_0$. Donc,

$$B_0(\text{front.}_A C_0) = 0.$$

Or, $a_0 \in B_0 . C_0 \neq 0$. Il en résulte que $B_0 \subset C_0$, puisque B_0 est un ensemble connexe ([1]). Donc, $b \in C_0$. Ainsi, $b < c$ implique $c \not< b$.

1° *b. Pour deux points $b \neq c$ de* A, *au moins une des relations $b < c$, $c < b$ est vraie.*

On peut encore se borner au cas où

$$a_0 \neq b \neq a_1, \qquad a_0 \neq c \neq a_1.$$

Supposons que $c \not< b$. Alors, pour toute décomposition

$$A = C_0 + C_1, \qquad C_0 . C_1 = (c), \qquad C_0 \ni a_0, \qquad C_1 \ni a_1,$$

où C_0, C_1 sont deux ensembles fermés dans A et connexes, on a nécessairement $b \notin C_1$.

Soit maintenant

$$A = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni a_1,$$

où B_0, B_1 sont deux ensembles fermés dans A et connexes. On a

$$\text{front.}_A B_1 = \overline{B}_1 . \overline{(B_0 - (b))} . A \subset \overline{B}_0 . \overline{B}_1 . A = B_0 B_1 = (b),$$
$$C_1 . (\text{front.}_A B_1) = 0 \qquad (\text{car } b \notin C_1),$$
$$a_1 \in C_1 . B_1 \neq 0.$$

Donc, $C_1 \subset B_1$ et par conséquent, $c \in B_1$. C'est-à-dire : $b < c$.

La condition 1° du théorème résultera immédiatement de 1° *a* et 1° *b*. La condition 2° du théorème est évidemment réalisée.

3° *$b < c$, $c < d$ impliquent $b < d$.*

D'après $b < c$ et $c < d$, on a $a_0 \neq c \neq a_1$, $b \neq a_1$, $d \neq a_0$. On peut évidemment supposer que $b \neq a_0$, $d \neq a_1$. On a alors

$$A = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni a_1, c,$$
$$A = C_0 + C_1, \qquad C_0 . C_1 = (c), \qquad C_0 \ni a_0, \qquad C_1 \ni a_1, d;$$

où B_0, B_1, C_0, C_1 sont des ensembles fermés dans A et connexes. On a $b \notin C_1$, puisque $c \not< b$. Donc :

$$C_1 . (\text{front.}_A B_1) = 0.$$

---

(1) M. Fréchet ([**1**], p. 229) a démontré pour l'espace (v) le plus général le théorème suivant : Si un ensemble C connexe contient au moins un point d'un ensemble E et au moins un point du complémentaire de E, alors C contient au moins un point de la frontière de E.

Mais, $a_1 \in C_1 . B_1 \neq o$. Il en résulte que $C_1 \subset B_1$ et par suite, $d \in B_1$. On a donc $b < d$.

4° *Soit b un point de* A *tel que $a_0 \neq b \neq a_1$. Soit*

$$A = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni a_1,$$

où B_0, B_1 *sont des ensembles fermés dans* A *et connexes. Alors, tout point de* $B_0 - (b)$ *est* $< b$ *et tout point de* $B_1 - (b)$ *est* $> b$.

Tout point de $B_1 - (b)$ est évidemment $> b$. Il reste à prouver que tout point de $B_0 - (b)$ est $< b$. Soit x un point de $B_0 - (b)$. On peut se borner au cas où $x \neq a_0$. Considérons la décomposition

$$A = X_0 + X_1, \qquad X_0 . X_1 = (x), \qquad X_0 \ni a_0, \qquad X_1 \ni a_1,$$

où X_0, X_1 sont deux ensembles fermés dans A et connexes. On a

$$B_1 . (\text{front.}_A X_1) = o,$$

puisque x n'appartient pas à B_1. Or, B_1 est connexe et $a_1 \in B_1 . X_1 \neq o$. Donc, $B_1 \subset X_1$ et par conséquent $b \in X_1$. C'est-à-dire $x < b$. Ainsi tout point x de $B_0 - (b)$ est $< b$.

Le théorème 29 est ainsi complètement établi. C. Q. F. D.

42. Quelques lemmes. — Supposons qu'un ensemble A connexe irréductible entre deux points a_0, a_1 et appartenant à un espace de F. Riesz est ordonné d'après le théorème 29. Nous allons établir quelques propriétés de cet ensemble ordonné.

Pour un point b de A, nous désignerons par $A(< b)$ l'ensemble des points x de A tels que $x < b$. D'une façon analogue, on définit les notations $A(> b)$, $A(\leqq b)$, $A(\geqq b)$. Dans le cas particulier où $b = a_0$ ou $b = a_1$, on a évidemment

$$A(< a_0) = o, \qquad A(\leqq a_0) = (a_0), \qquad A(> a_1) = o, \qquad A(\geqq a_1) = (a_1).$$

En employant ces notations, on a, d'après le théorème 29, pour tout point b de A tel que $a_0 \neq b \neq a_1$:

$$A(< b) = B_0 - (b) = A - B_1, \qquad A(> b) = B_1 - (b) = A - B_0,$$
$$A(\leqq b) = B_0, \qquad A(\geqq b) = B_1.$$

On voit immédiatement qu'on a le lemme suivant (1) :

Lemme 5. — *Quel que soit le point b de* A, *les ensembles* $A(< b)$ *et* $A(> b)$ *sont ouverts dans* A; *les ensembles* $A(\leqq b)$ *et* $A(\geqq b)$ *sont fermés dans* A (2). *Et,*

(1) Dans les lemmes 5-10, on fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 29.

(2) Car les ensembles B_0, B_1 sont fermés dans A.

quels que soient les points $b < c$ *de* A, *l'ensemble* $A(> b).A(< c)$ *est ouver dans* A, *l'ensemble* $A(\geqq b).A(\leqq c)$ *est fermé dans* A [1].

Lemme 6. — *Quels que soient les deux points* $b < c$ *de* A, *l'ensemble* $A(> b).A(< c)$ *n'est pas vide.*

Démonstration. — Si $A(> b).A(< c) = 0$, on aurait

$$A = A(\geqq c) + A(\leqq b).$$

A serait alors somme de deux ensembles non vides, disjoints et fermés dans A. Ceci est impossible puisque A est connexe. C. Q. F. D.

Lemme 7. — *Soit* $A = L + M$ *une décomposition de* A *en somme de deux ensembles non vides disjoints tels que*

$$x < y \quad \textit{quels que soient} \quad x \in L, \quad y \in M.$$

Alors, ou bien L *possède un dernier élément* [2], *ou bien* M *possède un premier élément.* (Ces deux cas sont d'ailleurs incompatibles, d'après le lemme 6.)

Démonstration. — Dans le cas contraire où L n'a pas de dernier élément et M n'a pas de premier élément, on aurait

$$L = \sum_{x \in L} A(< x), \qquad M = \sum_{y \in M} A(> y).$$

Or, d'après le lemme 5, chaque $A(< x)$ ou $A(> y)$ est ouvert dans A. Les ensembles L, M seraient donc ouverts dans A. A serait alors somme de deux ensembles non vides disjoints et ouverts dans A. Ceci est une contradiction, puisque A est connexe. C. Q. F. D.

Lemme 8. — *Pour tout point* $x \neq a_0$ *de* A *et pour tout voisinage* V_x *de* x, *il existe au moins un point* y *de* $V_x.A$ *tel que* $y < x$. *De même, pour tout point* $x \neq a_1$ *de* A *et pour tout voisinage* V_x *de* x, *il existe au moins un point* y *de* $V_x.A$ *tel que* $y > x$.

Démonstration. — Nous démontrerons le cas où $x \neq a_0$. (Pour le cas où $x \neq a_1$,

---

(1) Dans un espace ($\mathcal{V}$) quelconque, si F et G sont deux ensembles fermés dans un ensemble E, le produit F.G est aussi fermé dans E. En appliquant (52), on peut démontrer la proposition suivante : Dans un espace de F. Riesz, si F et G sont deux ensembles ouverts dans un ensemble E, le produit F.G est aussi ouvert dans E. (*Cf.* M. Appert, [1], p. 28.)

(2) C'est-à-dire : L possède un point d tel que pour tout point $x \neq d$ de L, on ait $x < d$.

la démonstration est analogue.) Soient $x \neq a_0$ et V_x un voisinage de x. Si l'on avait

$$V_x . A(<x) = 0,$$

on aurait

$$x \notin \overline{A(<x)}.$$

D'autre part, on a

$$A(\leqq x) = A(<x) + (x), \qquad a_0 \in A(<x) \neq 0.$$

Alors, l'ensemble $A(\leqq x)$ serait non connexe, ce qui est une contradiction (¹).

C. Q. F. D.

Lemme 9. — *Soient $b < c$ deux points de* A *et*

$$H = A(\geqq b) . A(\leqq c).$$

Tout sous-ensemble K *de* A *qui est connexe et contient b, c, contient* H *entièrement.*

Démonstration. — Soit h un point de A tel que $b < h < c$. On a

$$A = H_0 + H_1, \qquad H_0 . H_1 = (h), \qquad H_0 \ni a_0, b, \qquad H_1 \ni a_1, c,$$

où H_0, H_1 sont deux ensembles fermés dans A et connexes (²). Considérons maintenant la décomposition

$$K = K . H_0 + K . H_1.$$

Comme K est connexe et $b \in K . H_0 \neq 0$, $c \in K . H_1 \neq 0$, on a nécessairement

$$0 \neq KH_0 . \overline{KH_1} + \overline{KH_0} . KH_1 \subset K . H_0 . \overline{H}_1 + \overline{H}_0 . K . H_1$$
$$\subset H_0 . (A . \overline{H}_1) + (\overline{H}_0 . A) . H_1 = H_0 . H_1 = (h),$$

et, par suite,

$$0 \neq KH_0 . \overline{KH_1} + \overline{KH_0} . KH_1 \subset K . (h).$$

C'est-à-dire, $h \in K$. Ainsi, l'ensemble H appartient entièrement à K.

C. Q. F. D.

Lemme 10. — *Si* D *est un ensemble tel que* $D \subset A \subset \overline{D}$, *pour tout couple de points $b < c$ de* A, *il existe un point d de* D *tel que $b < d < c$.*

Démonstration. — L'ensemble $A(>b) . A(<c)$ est ouvert dans A (lemme 5) et non vide (lemme 6). Soit x un point de cet ensemble. Il existe un voisinage V_x de x tel que

$$V_x . A \subset A(>b) . A(<c).$$

(¹) L'ensemble $A(\leqq b)$ est toujours connexe. Dans le cas où $b = a_0$ ou $b = a_1$, cela est évident. Dans le cas où $a_0 \neq b \neq a_1$, on a vu dans le théorème 29 que $A(\leqq b) = B_0$ et que B_0 est connexe.

(²) Dans le Chapitre III, nous avons désigné par H_1 l'ensemble des nombres irrationnels. Ici, la lettre H_1 n'a aucun rapport avec l'ensemble des nombres irrationnels.

Or, $x \in \overline{D}$. On a $V_x . D \neq 0$. Soit $d \in V_x . D$. On a alors

$$d \in V_x . D \subset V_x . A \subset A(> b) . A(< c).$$

Donc :

$$b < d < c. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Tous ces lemmes 5-10 seront utiles dans le paragraphe suivant.

43. Caractérisation topologique des arcs simples dans les espaces de F. Riesz. — Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 30 (Théorème fondamental). — *Dans un espace de F. Riesz, pour qu'un ensemble soit un arc simple, il faut et il suffit qu'il soit séparable, connexe irréductible entre deux points et localement connexe.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu (§ **39**) que ces trois conditions sont nécessaires. Il reste à montrer que tout ensemble A vérifiant ces trois conditions est un arc simple.

D'après le théorème 29, l'ensemble A qui est connexe irréductible entre deux points a_0, a_1, peut être ordonné de manière que les conditions 1°-4° du théorème 29 soient réalisées. D'après la condition 2° du théorème 29, l'ensemble ordonné A possède un premier élément et un dernier élément. On voit qu'en vertu des lemmes 6, 7, aucune coupure ([1]) de l'ensemble ordonné A ne donne de saut ni de lacune ([1]). L'ensemble A étant séparable, A contient une partie D dénombrable infinie telle que entre deux quelconques de ses points se trouve un point de D (d'après le lemme 10). Ainsi, le type d'ordre de l'ensemble ordonné A est précisément celui de l'ensemble des points d'un segment fermé de la droite (ordonné d'après les grandeurs des abscisses) ([2]). Il existe donc une correspondance biunivoque

$$x = \Phi(t), \qquad t = \Psi(x) \qquad [0 \leqq t \leqq 1,\ x \in A]$$

entre le segment $S = [0, 1]$ et A de manière que

$$t_1 < t_2 \qquad \text{entraîne} \quad \Phi(t_1) < \Phi(t_2),$$

et

$$x_1 < x_2 \qquad \text{entraîne} \quad \Psi(x_1) < \Psi(x_2).$$

Nous allons montrer que cette correspondance est une homéomorphie.

1° *La transformation* $t = \Psi(x)$ *est continue sur* A.

1° *a.* $t = \Psi(x)$ *est continue au point* $x = a_0$.

([1]) *Cf.* M. Sierpinski, [4], p. 143.
([2]) *Cf.* M. Sierpinski, [4], p. 151.

Quand $x = a_0$, on a $\Psi(a_0) = 0$. Soit ε un nombre arbitrairement donné : $1 > \varepsilon > 0$. Le sous-intervalle $0 \leqq t < \varepsilon$ de S correspond à l'ensemble $A(< \Phi(\varepsilon))$, qui est ouvert dans A (lemme 5). Comme $a_0 \in A(< \Phi(\varepsilon))$, il existe un voisinage V_{a_0} de a_0 tel que

$$V_{a_0}.A \subset A(< \Phi(\varepsilon))$$

Pour tout point x de $V_{a_0}.A$, on a

$$a_0 \leqq x < \Phi(\varepsilon),$$

c'est-à-dire

$$0 \leqq \Psi(x) < \varepsilon.$$

$t = \Psi(x)$ est donc continue au point $x = a_0$.

1° *b*. *$t = \Psi(x)$ est continue au point $x = a_1$.*

La démonstration pour ce cas est analogue à celle de 1° *a*.

1° *c*. *Soit b un point de A tel que $a_0 \neq b \neq a_1$. $t = \Psi(x)$ est continue au point b.*

Dans ce cas, $0 < \Psi(b) < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement donné. On peut évidemment se borner au cas où $\Psi(b) - \varepsilon > 0$, $\Psi(b) + \varepsilon < 1$. Le sous-intervalle $\Psi(b) - \varepsilon < t < \Psi(b) + \varepsilon$ de S correspond à l'ensemble

$$A(> \Phi[\Psi(b) - \varepsilon]).A(< \Phi[\Psi(b) + \varepsilon]).$$

Cet ensemble est ouvert dans A (lemme 5) et contient b. Il existe un voisinage V_b de b tel que

$$V_b.A \subset A(> \Phi[\Psi(b) - \varepsilon]).A(< \Phi[\Psi(b) + \varepsilon]).$$

Pour tout point x de $V_b.A$, on a

$$\Phi[\Psi(b) - \varepsilon] < x < \Phi[\Psi(b) + \varepsilon],$$

c'est-à-dire

$$\Psi(b) - \varepsilon < \Psi(x) < \Psi(b) + \varepsilon.$$

Donc, $t = \Psi(x)$ est continue au point $x = b$.

2° *La transformation $x = \Phi(t)$ est continue sur* S.

2° *a*. *$x = \Phi(t)$ est continue au point $t = 0$.*

Quand $t = 0$, on a $\Phi(0) = a_0$. Soit V_{a_0} un voisinage de a_0 arbitrairement donné. D'après l'hypothèse, A est localement connexe. Il existe un ensemble K connexe et ouvert dans A tel que

$$a_0 \in K \subset V_{a_0}.A.$$

Comme K est ouvert dans A, il existe un voisinage W_{a_0} de a_0 tel que

$$W_{a_0}.A \subset K.$$

D'après le lemme 8, il existe un point z de $W_{a_0}.A$ tel que $z > a_0$. Les points a_0, z appartiennent à l'ensemble connexe K. Alors, d'après le lemme 9,

$$A(\geqq a_0).A(< z) \subset K.$$

On a alors

$$A(\geqq a_0).A(< z) \subset V_{a_0}.A.$$

Pour tout point t de l'intervalle $0 \leqq t < \Psi(z)$, on a

$$\Phi(t) \in A(\geqq a_0).A(< z) \subset V_{a_0}.A.$$

$x = \Phi(t)$ est donc continue au point $t = 0$.

2° *b*. *$x = \Phi(t)$ est continue au point $t = 1$.*

La démonstration pour ce cas est analogue à celle pour 2° *a*.

2° *c*. *Soit t_0 un point > 0 et < 1. $x = \Phi(t)$ est continue au point t_0.*

Soit $x_0 = \Phi(t_0)$, on a $a_0 < x_0 < a_1$. Soit V_{x_0} un voisinage de x_0 arbitrairement donné. A étant localement connexe, il existe un ensemble K connexe et ouvert dans A tel que

$$x_0 \in K \subset V_{x_0}.A.$$

Comme K est ouvert dans A, il existe un voisinage W_{x_0} de x_0 tel que

$$W_{x_0}.A \subset K.$$

D'après $a_0 < x_0 < a_1$ et le lemme 8, il existe deux points y, z de $W_{x_0}.A$ tels que $y < x_0 < z$. Les points y, z appartiennent à l'ensemble connexe K. Alors, d'après le lemme 9,

$$A(> y).A(< z) \subset K.$$

L'intervalle $\Psi(y) < t < \Psi(z)$ contient t_0 à son intérieur, puisque $y < x_0 < z$. Pour tout point t de cet intervalle, on a

$$\Phi(t) \in A(> y).A(< z) \subset K \subset V_{x_0}.A.$$

$x = \Phi(t)$ est donc continue au point t_0.

Ainsi notre théorème 30 est complètement démontré. C. Q. F. D.

Le théorème 30 nous permet de proposer la nouvelle définition suivante. *Un arc simple est un ensemble séparable, connexe irréductible entre deux points et localement connexe.* Cette définition, équivalente à l'ancienne (§ **39**) dans le cas des espaces de F. Riesz, est purement géométrique.

L'intérêt du théorème 30 *consiste non seulement dans la généralité des espaces considérés, mais aussi dans ce fait que nous n'avons pas fait intervenir la considération de compacité.* La compacité a été souvent prise comme une partie des propriétés caractéristiques des arcs simples dans les espaces distanciés (1).

---

(1) *Cf.* par exemple, M. HAUSDORFF, [3], p. 219-222; M. W. WILKOSZ, [1], p. 30; M. MENGER, [1], p. 42-47.

On connaît, par exemple, la caractérisation suivante. Pour qu'un ensemble A d'un espace distancié soit un arc simple, il faut et il suffit qu'il soit compact en soi et connexe irréductible entre deux points ([1]). La condition « compact en soi » joue ici un double rôle. D'une part, on en déduit comme une conséquence que A est séparable ([2]). D'autre part, pour prouver que A est homéomorphe à un segment fermé S de la droite (R_1), on démontre d'abord qu'il existe une transformation biunivoque et *continue de* A *en* S, puis, en employant l'hypothèse que A est compact en soi, on conclut que cette transformation est aussi *continue de* S *en* A ([3]). [On emploie ici le théorème suivant : Une transformation biunivoque et continue d'un ensemble compact en soi dans un autre ensemble est toujours bicontinue. Ce théorème qui est vrai dans le cas des espaces distanciés ([4]), ne subsiste pas dans le cas des espaces de F. Riesz ([5])].

Dans la démonstration du théorème 30, une grande partie en est simplement une généralisation de la méthode connue que l'on a employée dans le cas des espaces distanciés. Cependant, pour établir la continuité de la transformation $x = \Phi(t)$ *de* S *en* A, nous avons utilisé la condition de connexité locale, en nous servant des lemmes 8 et 9. Nous avons ainsi réussi à *n'avoir pas utilisé la condition de compacité.*

Les trois conditions « séparable », « connexe irréductible entre deux points », « localement connexe » *prises séparément* sont déjà classiques. *Néanmoins, le fait que l'ensemble de ces trois conditions fournit une caractérisation des arcs simples dans les espaces de F. Riesz, constitue à notre connaissance, un nouveau résultat. Même dans le cas très particulier des espaces distanciés, cette caractérisation nous paraît encore nouvelle* ([6]).

44. Le rayon topologique. — Dans un espace ($\mathcal{V}$) quelconque, nous appellerons *rayon topologique* tout ensemble homéomorphe à une demi-droite (avec le point initial) de (R_1). Cette définition est plus large et peut-être plus naturelle que celle de M. Kuratowski [1]. Cet auteur appelle rayon tout ensemble *fermé* homéomorphe à une demi-droite, et il suppose que l'espace considéré est un

([1]) M. Hausdorff, [3], p. 222.

([2]) On sait que tout ensemble compact d'un espace distancié est séparable. (*Cf.* M. Fréchet, [1], p. 72.)

([3]) *Cf.* M. Hausdorff, [3], p. 221 222.

([4]) *Cf.* M. Hausdorff, [3], p. 196.

([5]) Ce théorème n'est pas vrai même pour le cas des espaces accessibles, comme nous l'avons vu sur un exemple au paragraphe **39**. Mais il est vrai dans le cas des espaces de Hausdorff (*voir* N. Bourbaki, [1], p. 62).

([6]) Dans une lettre à l'auteur, du 14 juillet 1941, M. Hausdorff a eu l'obligeance de nous signaler un théorème de M. G. T. Whyburn [1], d'après lequel dans le plan euclidien tout ensemble connexe irréductible entre deux points et localement connexe est un arc simple. De sorte que dans le cas du plan euclidien, notre caractérisation des arcs simples n'est plus nouvelle.

espace cartésien. Il a démontré le théorème suivant : Pour qu'un ensemble E (d'un espace cartésien) soit un rayon, il faut et il suffit qu'il soit un continu non borné contenant un point a_0 qui n'est situé sur aucun vrai sous-ensemble connexe non borné de E. On voit facilement qu'un rayon topologique à notre sens peut ne pas être un ensemble fermé et qu'un rayon topologique à notre sens dans un espace cartésien peut être borné. Ainsi, pour caractériser les rayons topologiques à notre sens, il faut exclure la considération des conditions « fermé » et « non-compact ».

Nous dirons qu'un ensemble E est *monotone-connexe relatif à un point* a_0, si E est connexe et contient un point a_0 qui vérifie les conditions suivantes :

1° Le sous-ensemble $E-(a_0)$ est non vide.

2° Pour tout point $b \neq a_0$ de E, $E-(b)$ cesse d'être connexe.

3° Quels que soient deux sous-ensembles connexes B_0, C_0 de E, qui contiennent a_0, l'une des inclusions $B_0 \subset C_0$ ou $C_0 \subset B_0$ a nécessairement lieu.

On vérifie sans peine que tout rayon topologique dans un espace (v) est séparable, localement connexe et monotone-connexe relatif à un point. Nous verrons plus loin que ces trois propriétés des rayons topologiques suffisent à les caractériser parmi les ensembles appartenant à des espaces de F. Riesz.

45. Une décomposition d'un ensemble monotone-connexe relatif a un point. — Commençons par le théorème suivant qui est analogue au théorème 28.

Théorème 31. — *Soit* E *un ensemble monotone-connexe relatif à un point* a_0 *et appartenant à un espace de F. Riesz. Pour tout point* $b \neq a_0$ *de* E, E *peut être décomposé en deux ensembles* B_0, B_1 *fermés dans* E, *connexes et tels que*

$$B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 - (b) \neq 0.$$

Démonstration. — L'ensemble $E-(b)$ étant non connexe, on a

$$E-(b) = P + Q, \qquad P.\overline{Q} + \overline{P}.Q = 0, \qquad P \neq 0 \neq Q.$$

On en déduit

$$\overline{(P+(b))}.E = \overline{P}.E + (b) = \overline{P}.\big(P+Q+(b)\big) + (b) = P + (b).$$

L'ensemble $P+(b)$ est donc fermé dans E. D'une façon analogue, on montre que $Q+(b)$ est fermé dans E. La somme et le produit des ensembles $P+(b)$, $Q+(b)$ sont respectivement E et (b), qui sont tous les deux connexes. Donc, $P+(b)$ et $Q+(b)$ sont connexes, d'après le lemme 4. L'un des ensembles $P+(b)$, $Q+(b)$ contient nécessairement le point a_0. Soit $a_0 \in P+(b)$. En posant $B_0 = P+(b)$, $B_1 = Q+(b)$, la décomposition $E = B_0 + B_1$ vérifie toutes les conditions du théorème 31. C. Q. F. D.

46. Un ensemble monotone-connexe relatif à un point considere comme un ensemble ordonne. — Le théorème suivant est analogue au théorème 29 :

Theorème 32. — *Dans un espace de F. Riesz, tout ensemble* E *monotone-connexe relatif à un point* a_0 *peut être ordonné de la façon suivante :*

1° *Pour deux points* $b \neq c$ *quelconques de* E, *une et seulement une des relations* $b < c$, $c < b$ *est vraie.*

2° *Pour tout point* $b \neq a_0$ *de* E, *on a* $a_0 < b$.

3° *Quels que soient les points* b, c, d *de* E, *les relations* $b < c$, $c < d$ *impliquent* $b < d$.

4° *Soient* $b \neq a_0$ *un point de* E *et* $E = B_0 + B_1$ *une décomposition de* E *en deux ensembles fermés dans* E, *connexes et tels que*

$$B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 - (b) \neq 0.$$

Alors, tout point de $B_0 - (b)$ *est* $< b$ *et tout point de* $B_1 - (b)$ *est* $> b$.

Démonstration. — Pour tout point $b \neq a_0$ de E, nous posons $a_0 < b$. La condition 2° du théorème est ainsi réalisée. Pour deux points $b \neq c$ de E tels que $b \neq a_0 \neq c$, nous posons $b < c$ si et seulement s'il existe une décomposition

$$E = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni c;$$

où B_0, B_1 sont deux ensembles fermés dans E et connexes. Nous allons prouver que les conditions 1°, 3°, 4° du théorème sont réalisées.

1° Montrons d'abord que *les relations* $b < c$, $c < b$ *sont incompatibles.* On peut évidemment se borner au cas où les points b, c sont distincts de a_0. Supposons $b < c$. On a alors

$$E = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni c;$$

où B_0, B_1 sont fermés dans E et connexes. Considérons une décomposition

$$E = C_0 + C_1, \qquad C_0 . C_1 = (c), \qquad C_0 \ni a_0, \qquad C_1 - (c) \neq 0,$$

C_0, C_1 étant deux ensembles fermés dans E et connexes. Il s'agit de montrer que $b \in C_0$.

Comme $c \notin B_0$, on a $C_0 \not\subset B_0$. Or, B_0, C_0 étant deux ensembles connexes contenus dans E et contenant a_0, au moins une des inclusions $B_0 \subset C_0$, $C_0 \subset B_0$ doit avoir lieu. Donc, $B_0 \subset C_0$ et par suite $b \in C_0$. Il en résulte que $c \not< b$. Ainsi, $b < c$ implique $c \not< b$.

Montrons maintenant que $b \not< c$ *implique* $c < b$. On peut évidemment se borner au cas où $c \neq a_0$. Supposons $b \not< c$. Soit

$$E = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 - (b) \neq 0$$

une décomposition de E en deux ensembles fermés dans E et connexes. On a nécessairement $c \in B_0$, puisque $b \not< c$. Considérons maintenant une décom-

position
$$E = C_0 + C_1, \qquad C_0 . C_1 = (c), \qquad C_0 \ni a_0, \qquad C_1 - (c) \neq 0,$$

C_0, C_1 étant deux ensembles fermés dans E et connexes. Il s'agit de prouver que $b \in C_1$.

B_0 et C_0 étant deux ensembles connexes contenus dans E et contenant a_0, au moins une des relations $B_0 \subset C_0$, $C_0 \subset B_0$ a nécessairement lieu. Si l'on avait $B_1 . C_1 = 0$, on aurait $B_1 \subset C_0$ et $C_1 \subset B_0$. Alors on aurait $B_1 \subset B_0$ ou $C_1 \subset C_0$ selon que $C_0 \subset B_0$ ou $B_0 \subset C_0$. Ceci est une contradiction, puisque

$$B_1 - (b) \neq 0 \neq C_1 - (c).$$

Donc, $B_1 . C_1 \neq 0$. On a alors
$$B_1 . C_1 \neq 0,$$
$$\text{front.}_E C_1 = \overline{C}_1 . \overline{\left(C_0 - (c)\right)} . E \subset \overline{C}_1 . \overline{C}_0 . E = C_1 . C_0 = (c),$$
$$B_1 . (\text{front.}_E C_1) = 0 \qquad (\text{car } c \in B_0).$$

Or, B_1 est connexe. On a donc $B_1 \subset C_1$ et par suite $b \in C_1$. C'est-à-dire $c < b$. Ainsi, $b \not< c$ implique $c < b$. La condition 1° du théorème est démontrée.

3° *$b < c$ et $c < d$ impliquent $b < d$.*

On peut se borner au cas où $b \neq a_0$. D'après $b < c$, $c < d$, on a

$$E = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 \ni c,$$
$$E = C_0 + C_1, \qquad C_0 . C_1 = (c), \qquad C_0 \ni a_0, \qquad C_1 \ni d;$$

où B_0, B_1, C_0, C_1 sont fermés dans E et connexes. On en déduit

$$\text{front.}_E B_1 = \overline{B}_1 . \overline{\left(B_0 - (b)\right)} . E \subset (b),$$
$$C_1 . (\text{front.}_E B_1) \subset C_1 . (b) = 0 \qquad (\text{car } c \not< b,\ b \notin C_1),$$
$$c \in C_1 . B_1 \neq 0.$$

Comme C_1 est connexe, il en résulte que $C_1 \subset B_1$ et par suite $d \in B_1$. On a donc $b < d$.

4° *Soient $b \neq a_0$ un point de* E *et*

$$E = B_0 + B_1, \qquad B_0 . B_1 = (b), \qquad B_0 \ni a_0, \qquad B_1 - (b) \neq 0$$

une décomposition de E *en deux ensembles fermés dans* E *et connexes. Alors tout point de* $B_0 - (b)$ *est* $< b$ *et tout point de* $B_1 - (b)$ *est* $> b$.

Il est évident que tout point de $B_1 - (b)$ est $> b$. Reste à démontrer que tout point de $B_0 - (b)$ est $< b$. Soit x un point de $B_0 - (b)$. On peut évidemment supposer que $x \neq a_0$. Considérons la décomposition

$$E = X_0 + X_1, \qquad X_0 . X_1 = (x), \qquad X_0 \ni a_0, \qquad X_1 - (x) \neq 0;$$

X_0, X_1 étant deux ensembles fermés dans E et connexes. On a

$$\text{front.}_E X_1 = \overline{X}_1 . \overline{(X_0 - (x))} . E \subset \overline{X}_1 . \overline{X}_0 . E = X_1 . X_0 = (x),$$
$$B_1 . (\text{front.}_E X_1) \subset B_1 . (x) = 0.$$

D'autre part, $B_1 . X_1 \neq 0$. Sans quoi on aurait $B_1 \subset X_0$ et $X_1 \subset B_0$. On aurait alors $B_1 \subset B_0$ ou $X_1 \subset X_0$ selon que $X_0 \subset B_0$ ou $B_0 \subset X_0$ (¹). Ceci est une contradiction.

Ainsi, on a à la fois $B_1 . (\text{front.}_E X_1) = 0$ et $B_1 . X_1 \neq 0$. Comme B_1 est connexe, il en résulte que $B_1 \subset X_1$ et par conséquent, $b \in X_1$. C'est-à-dire $x < b$. La condition 4° du théorème est ainsi démontrée.

Le théorème 32 est complètement établi. C. Q. F. D.

Soit b un point de E, nous désignerons par $E(< b)$ l'ensemble des points x de E tels que $x < b$. Il en résultera les définitions de ce que nous représenterons par $E(> b)$, $E(\leqq b)$ et $E(\geqq b)$.

En employant un raisonnement analogue à celui que nous avons utilisé dans le paragraphe **42**, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 33. — *Dans un espace de* F. *Riesz, soit* E *un ensemble monotone-connexe relatif à un point* a_0. *Supposons que l'ensemble* E *est ordonné suivant le théorème* 32. *Alors :*

1° *Quel que soit le point* b *de* E, *les ensembles* $E(< b)$ *et* $E(> b)$ *sont ouverts dans* E, *les ensembles* $E(\leqq b)$ *et* $E(\geqq b)$ *sont fermés dans* E.

2° *Quels que soient les points* $b < c$ *de* E, *l'ensemble* $E(> b) . E(< c)$ *est non vide et ouvert dans* E.

3° *Soit* $E = L + M$ *une décomposition de* E *en deux ensembles non vides, disjoints et tels que*

$$x < y \qquad \textit{quels que soient} \quad x \in L, \quad y \in M.$$

Alors, ou bien L *possède un dernier élément, ou bien* M *possède un premier élément.* (Ces deux cas sont d'ailleurs incompatibles d'après 2°.)

4° *Pour tout point* x *de* E *et pour tout voisinage* V_x *de* x, *il existe un point* y *de* $V_x . E$ *tel que* $y > x$.

5° *Pour tout point* $x \neq a_0$ *de* E *et pour tout voisinage* V_x *de* x, *il existe un point* y *de* $V_x . E$ *tel que* $y < x$.

6° *Soient* $b < c$ *deux points de* E *et*

$$H = E(\geqq b) . E(\leqq c).$$

(¹) Au moins une des inclusions $X_0 \subset B_0$, $B_0 \subset X_0$ a lieu, car X_0, B_0 sont deux ensembles connexes contenant a_0 et contenus dans E.

Tout sous-ensemble K *de* E *qui est connexe et contient* b, c, *contient* H *entièrement.*

7° *Si* D *est un ensemble tel que* $D \subset E \subset \overline{D}$, *pour tout couple de points* $b < c$ *de* E, *il existe un point* d *de* D *tel que* $b < d < c$.

47. Caractérisation topologique des rayons topologiques. — Nous arrivons maintenant au théorème suivant :

Théorème 34. — *Pour qu'un ensemble d'un espace de F. Riesz soit un rayon topologique, il faut et il suffit qu'il soit séparable, localement connexe et monotone-connexe relatif à un point.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que tout ensemble E séparable, localement connexe et monotone-connexe relatif à un point a_0 est un rayon topologique.

D'après la connexité monotone de E, E peut être ordonné suivant le théorème 32. L'ensemble ordonné E possède un premier élément, à savoir le point a_0. D'après le théorème 33, 4°, E n'a pas de dernier élément. Aucune coupure de l'ensemble ordonné E ne donne de saut ni de lacune (théorème 33, 2° et 3°). E étant séparable, il contient une partie D dénombrable infinie telle que entre deux quelconques de ses points se trouve un point de D (théorème 33, 7°). Ainsi, le type d'ordre de l'ensemble ordonné E est précisément celui d'une demi-droite de (R_1). Il existe donc une correspondance biunivoque

$$x = \Phi(t), \qquad t = \Psi(x) \qquad (t \geqq 0,\ x \in E)$$

entre la demi-droite $t \geqq 0$ et E de manière que

$$t_1 < t_2 \quad \text{entraîne} \quad \Phi(t_1) < \Phi(t_2),$$

et

$$x_1 < x_2 \quad \text{entraîne} \quad \Psi(x_1) < \Psi(x_2).$$

En suivant la même marche que celle dans la démonstration du théorème 30, on peut démontrer (en utilisant la condition de connexité locale) que cette correspondance est une homéomorphie. E est donc un rayon topologique.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

APPERT (A.) :

[1] *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux* (Thèse, *Actual. scient. et industr.*, fasc. **145**, **146**; Paris, Hermann, 1934).

BANACH (S.) :

[1] *Théorie des opérations linéaires* (*Monografje Matematyczne*, t. I, Warszawa, 1932).

BOURBAKI (N.) :

[1] *Éléments de mathématique;* Livre III, *Topologie générale* (*Actual. scient. et industr.*, fasc. 858, Paris, Hermann, 1940).

FAN (K.) :

[1] *Sur une représentation des fonctions abstraites continues* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **210**, 1940, p. 429-431).

[2] *Sur les types homogènes de dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **211**, 1940, p. 175-177).

[3] *Espaces quasi-réguliers, quasi-normaux et quasi-distanciés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **211**, 1940, p. 348 351).

[4] *Caractérisation topologique des arcs simples dans les espaces accessibles de M. Fréchet* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **212**, 1941, p. 1024-1026).

[5] *Sur les ensembles possédant la propriéte des quatre points* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **213**, 1941, p. 518-520).

[6] *Sur les ensembles monotones-connexes, les ensembles filiformes et les ensembles possédant la propriété des quatre points* (*Bull. Soc. royale des Sciences de Liége,* Séance du 11 décembre 1941, p. 625-642).

FRÉCHET (M.) :

[1] *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[2] *Les polynomes abstraits* (*Journ. de Math.*, t. 8, 1929, p. 71 92).

[3] *Sur les fonctionnelles continues* (*Ann. scient. École Norm. sup.*, 3e série, t. **27**, 1910, p. 193-216).

[4] *Les fonctions d'une infinité de variables* (*C. R. du Congrès Soc. Savantes*, 1909, p. 44-47).

[5] *Sur un développement des fonctions abstraites continues* (*Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. **20**, 1930, p. 185-192).

[6] *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Thèse, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **22**, 1906, p. 1-74).

[7] *Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **30**, 1910, p. 1-26).

[8] *Les espaces abstraits topologiquement affines* (*Acta Math.*, t. **47**, 1926, p. 25-52).

[9] *La notion de différentielle dans l'analyse générale* (*Ann. scient. École Norm. sup.*, 3e série, t. **42**, 1925, p. 293-323).

[10] *Sur la notion de différentielle* (*Journ. de Math.*, t. **16**, 1937, p. 233-250).

[11] *Une définition du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **148**, 1909, p. 1152-1154).

[12] *Les dimensions d'un ensemble abstrait* (*Math. Ann.*, t. **68**, 1910, p. 145-168).

[13] *Sur les nombres de dimensions* (*Fund. Math.*, t. **11**, 1928, p. 287-290).

[14] *Sur la notion de nombre de dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **178**, 1924, p. 1782-1785).

[15] *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits* (*Bull. Sc. Math.*, t. **42**, 1918, p. 138-156).

HADAMARD (J.) :

[1] *La notion de différentielle dans l'enseignement* (*Scripta Univ. Ab. Bib. Hierosolymitanarum*, Jérusalem, 1923).

HAHN (H) :

[1] *Ueber halbstetige und unstetige Funktionen* (*Sitzungsber. K. Ak. Wiss. Wien., Math. K.*, t. **126**, 1917, p. 91-110).

HAUSDORFF (F.) :

[1] *Ueber halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung* (*Math. Zeitschr.*, t. **5**, 1919, p. 292-309).

[2] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[3] *Mengenlehre*, 3e édition, Berlin-Leipzig, 1935.

JANISZEWSKI (S.) :

[1] *Sur les continus irréductibles entre deux points* (Thèse, *Journ. de l'École Polyt.*, t. **16**, 1912, p. 79-170).

KNASTER (B.) et KURATOWSKI (C.) :

[1] *Sur les ensembles connexes* (*Fund. Math.*, t. **2**, 1921, p. 206-255).

KUNUGUI (K.) :

[1] *Sur la théorie du nombre de dimensions* (Thèse, Paris. 1930).

KURATOWSKI (C.) :

[1] *Quelques propriétés topologiques de la demi-droite* (*Fund. Math.*, t. **3**. 1922, p. 59 64).

LEBESGUE (H.) :

[1] *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906.

LENNES (N. J.) :

[1] *Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations* (*Amer. Journ. of Math.*, t. **33**, 1911. p. 287-326).

LÉVY (PAUL) :

[1] *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

MAZUR (S.) :

[1] *Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels* (*Studia Math.*, t. **1**, 1929, p. 83-85).

MENGER (K.) :

[1] *Kurventheorie*, Leipzig-Berlin, 1932.

RIESZ (F.) :

[1] *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre* (*Atti del IV. Congresso internazionale dei Matematici, Roma*, t. **2**, 1909, p. 18-24).

SIERPINSKI (W.) :

[1] *Sur les espaces métriques localement séparables* (*Fund. Math.*, t. **21**, 1933, p. 107-113).

[2] *Sur l'espace* D_ω *de M. Fréchet* (*Fund. Math.*, t. **9**, 1927, p. 189-192).

[3] *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi* (*Fund. Math.*, t. **1**, 1920, p. 11-16).

[4] *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

TIETZE (H.) :

[1] *Ueber Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind* (*Journ. für die reine und angew. Math.*, t. **145**, 1915, p. 9-14).

[2] *Ueber Analysis Situs* (*Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ.*, t. **2**, 1923, p. 37 68).

[3] *Ueber ein Beispiel von L. Vietoris zu den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen* (*Math. Ann.*, t. **87**, 1922, p. 150 151).

URYSOHN (P.) :

[1] *Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen* (*Math. Ann.*, t. **94**, 1925, p. 262-295).

[2] *Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume* (*Math. Ann.*, t. **92**, 1924, p. 302-304).

[3] *Beispiel eines nirgends separablen metrischen Raumes* (*Fund. Math.*, t. **9**, 1927, p. 119-121).

[4] *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, I (*Fund. Math.*, t. **7**, 1925, p. 30-137).

VIETORIS (L.) :

[1] *Stetige Mengen* (*Monatshefte für Math. u. Phys.*, t. **31**, 1921, p. 173-204).

VOLTERRA (V.) et PÉRÈS (J.) :

[1] *Théorie générale des fonctionnelles*, t. I. Paris, Gauthier-Villars, 1936.

WHYBURN (G. T.) :

[1] *Concerning connected and regular point sets* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **33**, 1927, p. 685 689).

WILKOSZ (W.) :

[1] *Les propriétés topologiques du plan euclidien* (*Mémor. des Sc. Math.*, fasc. **45**, Paris, Gauthier-Villars, 1931).

ZARANKIEWICZ (C.) :

[1] *Sur les points de division dans les ensembles connexes* (*Fund. Math.*, t. **9**, 1927, p. 124-171).

ZORETTI (L.)

[1] *La notion de ligne* (*Ann. scient. École Norm. sup.*, 3e série, t. **26**, 1909, p. 485-497).

Vu et approuvé :

Paris, le 25 avril 1941.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CHARGÉ DES FONCTIONS

DE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

CH. MAURAIN.