BERNARD D'ORGEVAL

Sur les surfaces algébriques dont tous les genres sont 1

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1943

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1943__254__1_0>

Série A. N° 2112
N° d'ordre :
2981

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Bernard D'ORGEVAL

1re THÈSE. — SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES DONT TOUS LES GENRES SONT 1.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le , devant la Commission d'Examen.

MM. E. CARTAN *Président.*
GARNIER
H. CARTAN } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1943

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen........................ M. Paul MONTEL.

PROFESSEURS

P. MONTEL........	T	Théorie des fonctions.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
G. JULIA.........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN......	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY..	T	Petrographie.
A. DENJOY.......	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD.......	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. DARMOIS......	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE.....	T	Électronique et Radioactivité.
M. JAVILLIER....	T	Chimie biologique.
Robert LÉVY.....	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT....	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB........	T	Géologie.
P. PASCAL.......	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET......	T	Calcul des probabilités et Physique Mathématique.
E. ESCLANGON...	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.......	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH............	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER......	T	Electrotechnique générale.
De BROGLIE......	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN........		Optique appliquée.
JOB..............		Chimie générale.
PRENANT.........	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY...........	T	Mécanique physique et expérimentale.
COMBES..........	T	Physiologie végétale.
GARNIER.........	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.
PÉRÈS...........	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL.......	T	Chimie minérale.
LAUGIER.........	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT.......		Technique Aéronautique.
M. CURIE........		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.......	T	Hautes températures.
CHAZY...........	T	Mécanique analytique.
GAULT...........	T	Chimie appliquée.
CROZE...........	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT..........	T	Théories chimiques.
LANQUINE........	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON.........	T	Calcul différentiel et intégral.
BARRABÉ.........		Géologie structurale et Géologie appliquée.
F. PERRIN........		Théories physiques.
VAVON...........	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS......	T	Mathématiques générales.
CHATTON.........	T	Biologie maritime.
AUBEL...........		Chimie biologique.
Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL.......	T	Botanique.
CABANNES........	T	Recherches physiques.
GRASSÉ..........	T	Zoologie (évolution des êtres organisés).
PRÉVOST.........		Chimie organique.
BOULIGAND.......		Mathématiques.
CHAUDRON........		Chimie.
WYART...........		Minéralogie.
TEISSIER........	T	Zoologie.
MANGENOT.......	T	Biologie végétale (P. C. B.).
P. AUGER........	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER.........		Physiologie générale.
PIVETEAU........		Géologie.
ROCARD..........		Physique.
H. CARTAN.......		Calcul différentiel.
SCHAEFFER.......	T	Physiologie des fonctions.
LAFFITTE........		Chimie (P.C.B.).
LERAY...........		Mécanique théorique des fluides.
FAVARD..........		Calcul des probabilités et physique mathématique.
COULOMB........	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN.....		Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN........		Analyse et mesures chimiques.
DRACH...........		Evolution des êtres organisés.
CHATELET........	T	Arithmétique et théorie des nombres.
EPHRUSSI........	T	Génétique.
WURMSER........	T	Biologie physico-chimique.
KASTLER.........		Physique.

Secrétaire........................ CH. MONIER.

PREMIÈRE THÈSE

SUR

LES SURFACES ALGÉBRIQUES

DONT TOUS LES GENRES SONT 1

AVANT-PROPOS.

Ce travail, commencé sur les indications de M. Enriques, professeur à l'Université de Rome, durant un séjour que je fis en Italie, a été achevé en avril 1943, à l'Oflag X B, à Nienburg/Weser, où je me trouvais prisonnier. Les conditions de la captivité ne m'ont pas permis de consulter une abondante bibliographie, surtout sur le troisième chapitre; j'ai pu, néanmoins, grâce à l'obligeance de mon maître, M. Cartan, et à celle de M. Godeaux, professeur à l'Université de Liége, revoir les manuels classiques.

Je suis reconnaissant à M. Chisini, professeur à l'Université de Milan, des précisions qu'il a bien voulu me donner de vive voix, sur sa méthode de construction des plans multiples, que j'ai eue à employer fréquemment.

Dans l'impossibilité de citer tous les maîtres des Universités de Paris et de Rome, auxquels je suis redevable de ma culture mathématique, c'est à MM. Enriques et Cartan, que je dédie ce modeste travail, en hommage de reconnaissance et de profonde admiration.

Nienburg am Weser, OFLAG X-B.

Février avril 1943.

INTRODUCTION.

Une surface régulière est de genre 1,

$$p_a = p_g = 1,$$

lorsqu'il existe une seule courbe canonique. Un cas particulièrement intéressant est celui où cette courbe canonique est d'ordre zéro.

Ce cas se caractérise ([1]) par la valeur du bi-genre $P_2 = 1$, si, en effet, il existe une courbe canonique d'ordre supérieur à zéro, on démontre que

$$P_2 \geqq p_a + p^{(1)} \geqq 2.$$

Soit alors $|C|$, un système linéaire de courbes tracées sur la surface, supposée privée de courbes exceptionnelles, $|C'|$ le système adjoint; puisque la courbe canonique est d'ordre zéro,

$$|C| = |C'|.$$

On en déduit immédiatement que, quel que soit n, entier positif, les systèmes multiples de $|C|$ vérifient

$$|nC| = |nC'|.$$

De cette égalité résulte que tous les plurigenres sont égaux à 1, d'où

$$p_g = p_a = P_2 = P_3 = \ldots = P_n = \ldots = 1.$$

Mais la série caractéristique coupée sur une courbe C, générique, par le système $|C|$, n'est autre que la série canonique de $|C|$. Cette série est complète puisque la surface est supposée régulière.

On a donc, entre le genre π et le degré n du système linéaire $|C|$, la relation

$$n = 2\pi - 2.$$

([1]) *Cf.* Enriques-Campedelli, *Lezioni sopra la teoria delle superficie algebriche*, § 51 et 52.

Mais l'on sait que le genre linéaire (virtuel) $p^{(1)}$ est lié aux caractères du système linéaire $|C|$, n et π, et de son adjoint $|C'|$, π', par la relation

$$\pi' = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n.$$

Mais, dans notre cas, l'on a

$$\pi' = \pi, \qquad n = 2\pi - 2,$$

d'où l'on tire

$$p^{(1)} = 1.$$

Si donc $\pi > 2$, le système linéaire $|C|$, peut se représenter par les sections hyperplanes d'une surface F, d'ordre $2\pi - 2$, située dans un espace S^{π}, à π dimensions; les sections hyperplanes de cette $F_{2\pi-2}$ sont des courbes canoniques normales d'ordre $2\pi - 2$, et de genre π de l'espace $S^{\pi-1}$.

M. Enriques (1) et M. Severi (2) ont, séparément, démontré qu'il existe, pour toutes les valeurs de π, de telles surfaces dont tous les genres sont 1.

Ces démonstrations se basent sur la représentation transcendante des surfaces hyperelliptiques de rang 2. Je donnerai de cette existence une démonstration ne faisant appel qu'à des résultats élémentaires.

Pour $\pi = 2$, la surface peut se représenter par un plan double doté d'une sextique de diramation. Cette surface dépend donc de 19 modules. Cette propriété est d'ailleurs générale. M. Enriques (3) a, en effet, démontré que « toute famille générale de surfaces avec tous les genres égaux à 1, dépend de 19 modules.

Une question reste donc à résoudre, c'est de chercher, pour une valeur donnée de π, combien il peut exister de familles de surfaces, familles générales distinctes, dépendant de 19 modules. Le résultat de cette étude est assez décevant, car il n'existe, en général, pour une valeur donnée de π, qu'une seule famille; les cas exceptionnels sont ce que j'ai appelé des « surfaces multiples », et se ramènent à des surfaces correspondant à une valeur inférieure de π. L'espoir de découvrir, par l'étude de ces surfaces, quelque nouvel invariant de la théorie des surfaces, se trouve donc abandonné.

---

(1) *Cf.* F. Enriques, *Le superficie di genere uno* (*R. C. R. Acad. di Bologna*, 1908).

(2) *Cf.* F. Severi, *Le superficie algebriche con curve canoniche d'ordine zero* (*A. del R. Istituto Veneto*, vol. LVIII, 1909).

(3) *Cf.* F. Enriques, *Sui moduli delle superficie algebriche* (*R. C. R. Acad. dei Lincei*, 5e série, vol. XVII, 1908).

J'ai commencé l'étude des surfaces dont tous les genres sont 1, par celle des surfaces rationnelles, dotées d'un point triple elliptique; cette méthode, que m'avait indiquée M. Enriques, aisée pour les premières valeurs de π, devient rapidement fort ardue. Elle montre, néanmoins, l'unicité pour ces valeurs de π de la surface à genres 1, alors qu'il existe plusieurs familles de surfaces rationnelles à point triple.

Dans un deuxième chapitre, j'utilise les surfaces de genres 1, dotées de points doubles, ce qui amène à la résolution complète du problème. Cette méthode permet d'utiliser les plans multiples représentatifs des surfaces considérées, dont l'étude est facilitée par les récents résultats de M. Chisini.

Enfin, dans un troisième chapitre, j'ai réuni quelques résultats fragmentaires, sur le problème parallèle des variétés dont tous les genres sont 1.

N. B. — Dans tout ce travail, il s'agit, bien entendu, de surfaces algébriques, bien que j'aie presque systématiquement abandonné ce qualificatif.

CHAPITRE I.

LA MÉTHODE DU POINT TRIPLE.

1. **Généralités.** — J'ai montré précédemment (¹) que si une surface rationnelle possède une certaine singularité, qui, imposée à une surface régulière ne la possédant pas, abaisserait son genre de p, on peut la retenir comme virtuellement de genres

$$p_a = p_g = p.$$

Si, en particulier, la singularité est un point triple, isolé à voisinage elliptique, la surface est virtuellement de genres 1.

Notre méthode consistera donc à construire toutes les surfaces rationnelles dotées d'un point triple elliptique d'ordre $2\pi - 2$, dont les sections hyperplanes sont des courbes de genre π.

Nous supposerons que, dans la représentation plane de notre surface rationnelle, le point triple est représenté par une cubique elliptique. C'est une hypothèse de simplicité qui se vérifie, dans des conditions très générales (²). Soit Γ_3 cette cubique, elle sera courbe fondamentale de notre représentation plane; pour préciser, supposons que les courbes représentatives des sections hyperplanes soient des courbes C_n, d'ordre n, passant aux σ points-bases avec les multiplicités respectives r_i, la courbe fondamentale n'aura pas de points d'intersection variables avec les C_n, c'est-à-dire

$$3n - \sum_{1}^{\sigma} r_i = 0. \tag{1}$$

Exprimons que la courbe fondamentale représente un point triple, c'est-à-dire qu'une C_n contenant la singularité, donc représentée par une C_{n-3}, passant $(r_i - 1)$ fois aux σ points-bases, rencontre la cubique Γ_3

(¹) *Cf.* B. d'Orgeval, *Sur une extension du principe de dégénérescence à la théorie des surfaces algébriques* (*R. C. R. Acad. d. Lincei*, 6e série, 1937, vol. XXV, p. 547).

(²) *Cf.* F. Conforto, *Le superficie razionali*. Zanichelli, Bologne, 1939, p. 181 et s.

en trois points, images des trois points infiniment voisins du point triple sur chacune des trois branches qui y passent, d'où

$$(2) \qquad 3(n-3)-\sum_{1}^{\sigma}(r_i-1)=3.$$

Les équations (1) et (2) nous donnent

$$\sigma = 12 \quad (^1).$$

Nos surfaces seront donc représentées par des courbes d'ordre n, possédant 12 points-bases de multiplicités r_i. Écrivons maintenant que l'on a des surfaces d'ordre $2\pi - 2$,

$$(3) \qquad n^2-\sum_{1}^{12} r_i^2 = 2\pi - 2,$$

et dont les sections sont de genre π

$$(4) \qquad \frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum_{1}^{12}\frac{r_i(r_i-1)}{2} = \pi.$$

---

[1] *Remarque.* — On peut prévoir directement que le nombre des points-bases sera 12. En effet, l'invariant de Zeuthen-Segre (*cf.* Enriques-Campedelli, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero*, Roma, 1934, XIII. Tipog. del Senato, p. 1).

$$I = \delta - n - 4\pi = 12p_a + 9 - \bar{p}_1 = 20$$

où δ désigne le nombre de courbes d'un faisceau dotées d'un point double, n le nombre de points bases du faisceau, π le genre de ces courbes, peut être calculé après la « rationalisation » de notre surface. Si l'on considère la $F_{2\pi-2}$ projetée dans le S^3, on peut prendre pour faisceau, un faisceau de sections planes passant par une droite. Les courbes dotées d'un point double s'obtiendront à partir des polaires. Il en résulte que l'imposition d'un point triple diminue le nombre de ces courbes de $2 \times 2 \times 3 = 12$ plus une courbe possédant un point triple, qui compte pour 3 courbes dotées d'un point double, l'invariant de Zeuthen, pour la surface rationalisée, sera donc

$$20 - 12 + 3 = 11 = 9 - \bar{p}_1$$

d'où

$$\bar{p}_1 = -2.$$

Mais sur une surface rationnelle, représentée par une représentation plane avec σ points-bases, on montre que l'on a

$$\bar{p}_1 = 10 - \sigma$$

d'où dans notre cas

$$\sigma = 12.$$

L'ensemble de ces équations conduit à un système d'équations indéterminées,

$$
\text{(A)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&3n - \sum_{1}^{12} r_i = 0, \\
&n^2 - \sum_{1}^{12} r_i^2 = 2\pi - 2 = \mathrm{N}.
\end{aligned}
\right.
$$

Un tel système admet toujours des solutions, ce que l'on peut montrer en construisant un ensemble de solutions particulières, ainsi

$$
\text{(B)} \left\{
\begin{array}{lll}
\mathrm{N} = 6\beta - 4 \left\{ \begin{array}{l} \beta = 2\alpha - 1, \\ \beta = 2\alpha, \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} n = 3\alpha + 2, \\ n = 3\alpha + 4, \\ \end{array} & \begin{array}{l} r_1 = r_2 = \ldots = r_9 = \alpha, \quad r_{10} = 3, \quad r_{11} = 2, \quad r_{12} = 1 \\ r_1 = r_2 = \ldots = r_6 = \alpha + 1, \quad r_7 = r_8 = r_9 = \alpha, \\ \qquad r_{10} = 3, \quad r_{11} = 2, \quad r_{12} = 1; \end{array} \\
\mathrm{N} = 6\beta - 2, \ \beta = \alpha, & n = 3\alpha + 1, & r_1 = r_2 = \ldots = r_9 = \alpha. \quad r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1; \\
\mathrm{N} = 6\beta - 2, \ \beta = \alpha, & n = 3\alpha + 3, & r_1 = r_2 = \ldots = r_6 = \alpha + 1, \quad r_7 = r_8 = r_9 = \alpha, \\
 & & \qquad r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1.
\end{array}
\right.
$$

Mais deux représentations planes, transformées l'une de l'autre par une transformation crémonienne, conduisent à des surfaces birationnellement identiques. Pour écarter les surfaces identiques, nous adjoindrons au système (A), la condition

$$
\text{(C)} \qquad r_i + r_j + r_k \leqq n \qquad (i.\ j.\ k = 1, 2, \ldots, 12).
$$

Nous allons montrer que le système (A, C) admet un nombre fini de solutions pour N donné. Je vais d'abord établir l'inégalité

$$
\frac{8n}{3} \leqq \mathrm{N} + 12.
$$

Lemme. — *Si l'on considère une suite de valeurs* $n, r_1 \geqq r_2 \geqq \ldots \geqq r_{12}$ *vérifiant* (A), *la valeur* N *augmente si l'on diminue d'une unité le plus grand des* r_i (r_1) *et si l'on augmente simultanément d'une unité le plus petit.*

Nous supposerons donc

$$
r_1 > r_{12} + 1.
$$

Soit $\mathrm{N_1}$ la première valeur

$$
\mathrm{N_1} = n^2 - r_1^2 - \sum_{2}^{11} r_i^2 - r_{12}^2,
$$

après notre opération, on aura N_2

$$N_2 = r^2 - (r_1 - 1)^2 - \sum_2^{11} r_i^2 - (r_{12} + 1)^2,$$

$$N_2 = N_1 + 2(r_1 - r_{12} - 1), \qquad N_2 > N_1.$$

On obtiendra donc la valeur minima, de N, en prenant le plus grand nombre réalisable d'unités; ceci conduit aux résultats

$$\begin{array}{lllll}
n = 3\alpha, & r_1 = r_2 = \ldots = r_8 = \alpha, & r_9 = \alpha - 3, & r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1, & N = 2n - 12, \\
n = 3\alpha + 1, & r_1 = \alpha + 1, \quad r_2 = r_3 = \ldots = r_8 = \alpha, & r_9 = \alpha - 1, & r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1, & N = 2n - 6, \\
n = 3\alpha + 2, & r_1 = r_2 = \alpha + 1, \quad r_3 = \ldots = r_9 = \alpha, & & r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1, & N = \dfrac{8n - 22}{3}, \\
& & & & N \geqq \dfrac{8n}{3} - 12,
\end{array}$$

d'où

$$N + 12 \geqq \frac{8n}{3}.$$

2. **Le théorème fondamental.** — La dernière inégalité peut s'exprimer

$$N + 12 \geqq \frac{8n}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \pi + 5 \geqq \frac{4n}{3}.$$

Théorème. — *Il existe, pour chaque valeur de* $\pi \geqq 3$, *un nombre fini de surfaces rationnelles de* S^π, *à sections normales de genre* π, *et d'ordre* $2\pi - 2$, *dotées d'un point triple elliptique.*

Supposons alors être dans l'espace S^π, et projetons la surface $F_{2\pi-2}$ sur l'espace ordinaire S^3. Nous ferons cette projection à partir d'un espace $S^{\pi-4}$ extérieur à la surface. Un point de la surface détermine, avec le $S^{\pi-4}$ de projection, un $S^{\pi-3}$, qui rencontre le S^3 sur lequel on projette, en un point. Par ce procédé, on projette la surface $F_{2\pi-2}$ de S^π, en une $\Phi_{2\pi-2}$ de S^3. Montrons, que si l'on choisit convenablement le $S^{\pi-4}$ de projection, le point triple T se projettera en un point triple isolé de la $\Phi_{2\pi-2}$. En effet, si le point T se projetait sur la ligne multiple de la surface $\Phi_{2\pi-2}$, l'espace $S^{\pi-3}$ déterminé par T et le $S^{\pi-4}$ de projection, rencontrerait la surface $F_{2\pi-2}$ en, au moins, un point autre que T. Or, les $S^{\pi-3}$ passant par T dans S^π, sont autant que les plans de $S^{\pi-1}$ (1), c'est-à-dire

$$\infty^{(2+1)(\pi-1-2)} = \infty^{3(\pi-3)}.$$

---

(1) *Cf.* E. Bertini, *Introduzione alla Geometria projettiva degli iperspazi.*

Les $S^{\pi-3}$ passant par T et s'appuyant en un autre point à la surface sont autant que les $S^{\pi-3}$ passant par une droite, c'est-à-dire que les plans de $S^{\pi-2}$, et les droites par T s'appuyant à $F_{2\pi-2}$ sont ∞^2, donc ces $S^{\pi-3}$ sont

$$\infty^{2+(2+1)(\pi-2-2)} = \infty^{3\pi-10}.$$

Comme $3\pi - 10 < 3(\pi - 3)$, on peut toujours choisir le $S^{\pi-4}$ de projection, en sorte que le point triple de $F_{2\pi-2}$ se projette sur un point triple isolé de $\Phi_{2\pi-2}$.

En conclusion :

A toute surface rationnelle de S^π, obtenue par le procédé précédent, correspond une surface rationnelle de S^3 à point triple isolé.

Remarquons maintenant que toutes nos surfaces rationnelles dépendent du même nombre d'invariants projectifs. En effet, la représentation plane est donnée par des courbes possédant 12 points-bases sur une cubique fondamentale. Une cubique dépend, dans le plan, de 9 paramètres, et 12 points sur une cubique dépendent de 11 paramètres (y appartenant à une g^{11}_{12}). En tenant compte des homographies du plan qui sont ∞^8, nous obtenons $9 + 11 - 8 = 12$ invariants projectifs de notre surface.

Considérons alors, dans S^3, une $\Phi_{2\pi-2}$, dotée d'un point triple isolé. Supposons qu'il existe des surfaces dotées de la même courbe multiple (c'est-à-dire d'une courbe multiple de même degré, même genre, mêmes singularités) et non dotées d'un point triple. Ces surfaces formeront un système continu de dimension (1) :

$$19 + \omega + \alpha \qquad (\omega \geq 0),$$

où $19 + \omega$ représente le nombre des modules de cette famille, et α le nombre des homographies ou transformations birationnelles de la $\Phi_{2\pi-2}$.

Les surfaces infiniment voisines d'une surface $\Phi_{2\pi-2}$ de notre système continu, y découpent un système caractéristique de dimension

$$19 + \omega + \alpha - 1.$$

Si alors le point triple ne peut « être enlevé », c'est-à-dire si l'imposition de la courbe double à la surface fait naître, en conséquence, le point triple, ce point triple sera base pour le système caractéristique,

---

(1) *Cf.* Enriques-Campedelli, *Sulla classificazione, Op. cit.* p. 8 (p. 40).

et ne lui imposera pas de nouvelles conditions (1). Il en résultera que la surface dotée du point triple dépendra exactement de

$$19+\omega \qquad (\omega \geqq 0)$$

invariants projectifs. Mais ceci est en contradiction avec le compte fait précédemment qui nous donne 12 invariants projectifs.

On peut donc toujours « enlever » le point triple, et comme l'imposition d'un point triple en position générique porte 7 conditions, le nombre des modules des surfaces dont tous les genres sont 1, est bien

$$12+7=19+\omega=19 \qquad (\omega=0),$$

d'où le théorème

Théorème. — *Toute surface rationnelle à point triple isolé, obtenue par les représentations précédentes, peut s'obtenir par l'imposition d'un point triple à une surface dont tous les genres sont* 1, *dépendant de* 19 *modules. Comme pour toutes les valeurs de* $\pi \geqq 3$, *il existe de telles surfaces rationnelles, il en existe dont tous les genres sont* 1.

Remarquons que la condition d'imposer un point triple peut s'interpréter. Une famille de surfaces dont tous les genres sont 1, pour π donné peut se représenter par une variété à 19 paramètres dans un S^N, où N est la dimension du système général des surfaces d'ordre $2\pi-2$. Écrire que la surface possède un point triple, c'est écrire 7 relations, donc prendre l'intersection de la V_{19} avec une V_{N-7}. Cette intersection peut se décomposer, c'est-à-dire qu'une même surface de genres 1 peut donner naissance à plusieurs surfaces rationnelles dotées d'un point triple.

Nous allons aborder l'étude des surfaces obtenues pour les premières valeurs de π, et nous chercherons lorsqu'il se présentera plusieurs surfaces rationnelles, à reconnaître, si les surfaces de genres 1, privées de point triple, sont distinctes ou non.

3. **Les surfaces avec** $\pi<6$. — Pour $\pi=3$, nous trouvons la surface représentée par les $C_4(12A_i)$ les 12 points-bases étant situés sur une cubique fondamentale Γ_3. Cette surface est la surface du 4e ordre à point triple. La surface dont tous les genres sont 1, qui lui correspond, est la surface générale du 4e ordre.

---

(1) *Cf.* E. Bertini, *Introduzione alla geometria, op. cit.* p. 10.

Pour $\pi = 4$, nous obtenons la représentation $C_6(6A^2, 6B)$ les 12 points-bases étant toujours, sur une cubique Γ_3, fondamentale.

Considérons alors une surface du 6e ordre de genres 1, à sections de genre 4. C'est une F_6 avec sextique double de genre 4 (intersection complète d'une surface cubique par une quadrique). Supposons imposer à cette surface un point triple T en position générique. Par le point T passent 6 droites, en effet le sextique double se projette de T sur un plan selon une sextique plane dotée de 6 points doubles, traces des bisécantes issues de T, mais une telle bisécante appartient à la surface, ayant avec elle $2 + 2 + 3 = 7$ points communs.

Étudions maintenant le système des adjointes aux courbes de la surface passant par le point triple; sur la représentation plane, ce système est celui des courbes d'ordre $(n - 6)$ passant $(r_i - 2)$ fois aux points-bases. Sur la surface, le système de ces adjointes est découpé par les surfaces adjointes d'ordre $N - 3$, passant deux fois au point triple, c'est-à-dire les cubiques passant deux fois au point triple. Les 6 droites passant par T, appartiennent à ces surfaces cubiques ayant, avec elles, $2 + 2 = 4$ points communs.

La partie variable de l'intersection est donc d'ordre

$$3 \times 6 - 2 \times 6 - 6 = 0.$$

Nous retrouvons bien là les caractères, obtenus sur notre représentation plane.

A la surface rationnelle obtenue, on peut donc faire correspondre une surface de genres 1, que l'on peut retenir comme le « double » d'une surface cubique passant par une sextique de genre 4. C'est donc l'image de l'intersection d'une variété cubique de S^4 à point double par une quadrique de S^4. Mais on peut lever la restriction car les variétés cubiques passant par la Γ_6 sont de la forme

$$W_3 = V_3 + \lambda Q_2 P,$$

où V_3 désigne la variété à point double, Q_2 une hyperquadrique et P un hyperplan. La W_3 générale est sans points doubles.

Donc, en conséquence, la surface de genres 1, avec $\pi = 4$, est l'intersection complète d'une variété cubique par une quadrique de S^4.

Pour $\pi = 5$, nous obtenons le système représentatif

$$C_7(A^3, 7B^2, 4C),$$

où les 12 points-bases sont sur une cubique fondamentale Γ_3. Remarquons que cette surface possède quatre droites issues du point double. Imposons deux nouveaux points-bases quelconque, la surface se ramène à une surface du 6e ordre obtenue en projetant la F_8 de S^5 à partir de deux de ses points :

$$C_7(A^3, 7B^2, 4C, 2D) \qquad (A, B, C \text{ sur } \Gamma_3).$$

Supposons projeter la surface sans point triple. On doit obtenir une surface du 6e ordre avec quintique double de genre 2 ; cette courbe, appartenant à une seule famille. Il n'y a donc qu'une telle surface. Imposons-lui un point triple T en position générique. Si l'on projette de T, la quintique double, elle a pour image une quintique plane dotée de 4 points doubles, traces de 4 bisécantes issues de T. Celles-ci ont avec la surface $2 \times 2 + 3 = 7$ points communs, donc lui appartiennent. Les cubiques adjointes qui passent deux fois par le point triple, contiennent aussi ces bisécantes ayant avec elles $2 + 2 = 4$ points communs.

Le reste de l'intersection est une courbe d'ordre

$$3 \times 6 - 2 \times 5 - 4 = 4.$$

Ces quartiques passent deux fois au point triple T, qui est sextuple pour l'intersection, les 4 droites y passant absorbant 4 des points infiniment voisins. Les quartiques ayant un point double sont rationnelles. Ce sont bien les propriétés des adjointes qui, sur la représentation plane, se représentent par les droites issues du point base A (2 intersections avec Γ_3, 4 intersections avec la C_7 générique).

Si nous projetions d'un point simple et du point triple, la F_8 de S^5, nous obtiendrons la surface représentée par $C_4(A^2, 8B)$, c'est la surface du 4e ordre à droite double.

Si nous revenons à la F_6, dotée d'une quintique double, cette surface est encore le « double » d'une surface cubique passant par une quintique de genre 2, dont le système représente une variété du 4e ordre de S^5, à sections elliptiques, de dimension 3, intersection de deux quadriques de S^5 (1). Son intertection par les quadriques de S^5 donne la surface de genres 1, qui est donc la base d'un réseau de quadriques de S^5.

(1) *Cf.* F. Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellitiche* et *Ancora sui sistemi* (*R. C. R. Acad. d. Lincei*, vol. III, 1er sem. 1894).

En résumé, pour chaque valeur de $\pi < 6$, il existe une seule surface dont tous les genres sont 1, qui, par l'imposition d'un point triple, donne naissance à une seule surface rationnelle.

4. **Les surfaces avec $\pi = 6$.** — Ce cas est le premier pour lequel va se présenter une difficulté, en effet, pour $\pi = 6$, les équations qui donnent les représentations planes, donnent naissance à trois systèmes représentatifs de trois surfaces rationnelles, distinctes.

Ces surfaces sont représentées par les systèmes

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A.} & C_7(9A^2, 3B) \\ \text{B.} & C_9(7A^3, B^2, 4C) \\ \text{C.} & C_8(A^4, 9B^2, 1C) \end{array}\right\} \text{ les points-bases sur une } \Gamma_3 \text{ fondamentale.}$$

Ces surfaces se distinguent, à la fois, par le nombre des droites issues du point triple, et par les systèmes adjoints aux sections passant par ce point.

Nous avons, en effet,

	Droites passant par T.	Système adjoint.
A.......	trois	Courbes rationnelles du 7e ordre
B.......	quatre	Courbes elliptiques du 6e ordre
C.......	deux	Système de 2 quartiques rationnelles

Je vais montrer que ces trois surfaces peuvent s'obtenir à partir d'une seule surface de genres 1, surface pour laquelle l'imposition d'un point triple est une condition réductible.

Considérons, en effet, dans S^6, une surface F_{10} d'ordre 10, dont toutes les sections hyperplanes sont courbes d'ordre 10 et de genre 6. Soit C_{10}, une telle courbe; elle est courbe canonique normale d'un S^5, et l'on sait qu'une telle courbe admet, en général, des plans quadrisécants [1]; dans le cas où la C_{10} peut se référer à une quintique plane, la C_{10} admet un plan pentasécant.

Supposons donc que la C_{10} possède un plan simplement quadrisécant Π. En projetant de ce plan sur un Σ^3, nous obtenons une surface Φ_6; en effet, à un point M de F_{10}, le S^3 déterminé par M et Π, fait correspondre son intersection m avec Σ^3. Un S^5 passant par Π, coupe Σ^3, selon un plan, qui coupe la surface Φ_6, selon une section plane. Deux S^5 passant par Π se coupent selon 10 points, dont 4 sont

---

(1) *Cf.* Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. vol. III, v, p. 101 (Zanichelli, Bologna, 1924).

dans le plan projetant. Il y a donc 6 intersections variables de 2 sections planes de Φ_6 qui est du 6e ordre.

Les points intersections de F_{10} et de Π, doivent se projeter sur des courbes exceptionnelles, qui doivent être rationnelles et unisécantes des sections planes, ce sont des droites; comme les 4 points de Π sont distincts, les 4 droites exceptionnelles seront gauches entre elles. Mais la projection de F_{10} est une surface de genres 1 ; il y a donc une seule quadrique adjointe; la section générale étant de genre 6, la courbe double sera d'ordre 4. Par cette quartique, il ne doit passer qu'une seule quadrique. On a donc à faire à une quartique rationnelle. Nous avons donc, finalement, une surface Φ_6 du 6e ordre, à quartique double rationnelle Γ_4.

Remarquons que l'intersection résiduelle par la quadrique adjointe se compose d'une courbe du 4e ordre. Soit P, un point de cette intersection; par P passe une génératrice de la quadrique, trisécante de la Γ_4, ayant donc, avec Φ_6, $1 + 3 \times 2 = 7$ points communs. Cette droite appartient donc à la surface. On retrouve donc bien les 4 droites images des 4 points de Π, et ceci nous montre aussi que l'on ne peut obtenir une surface de ce type, avec une quartique double elliptique dotée d'une singularité supplémentaire.

Évaluons les modules de cette surface. En premier lieu, on peut vérifier son existence, en la construisant. Prenons deux surfaces cubiques passant par la quartique Γ_4 et la quadrique Q_2, la contenant; la surface générale de la famille

$$F_3F'_3 + \lambda(Q_2)^2R_2 = 0.$$

où R_2 est une autre quadrique, répond à la question.

La formule de postulation (1) d'une courbe d'ordre n et de genre p, par rapport à une surface d'ordre m, qui la contient doublement, est

$$(3m - 4)n - 5(p - 1),$$

c'est-à-dire

$$(18 - 4)4 + 5 = 61.$$

Mais les surfaces d'ordre 6 sont ∞^{83}. Celles passant par une Γ_4 donnée sont ∞^{22}; mais les Γ_4 sont ∞^{16} (2), les Φ_6 avec quartiques doubles non projectivement identiques sont donc

$$\infty^{22+16-15} = \infty^{23}.$$

(1) *Cf.* Enriques-Campedelli, *Op. cit.* p. 3 (p. 44).
(2) *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (Vol. III, p. 519).

Mais les plans quadrisécants sur une section sont ∞^1, les hyperplans de S^6 passant par un tel plan, sont ∞^1, les hyperplans de S^6, ∞^6; les surfaces birationnellement identiques sont donc

$$\infty^{1+6-3} = \infty^4.$$

Le nombre des modules est donc bien

$$23 - 4 = 19.$$

La surface obtenue est bien générale.

Remarquons que si la surface F_{10} a toutes ses sections équivalentes à des quintiques, la surface peut se projeter sur une surface du 5e ordre. Or, il existe une surface du 5e ordre de genres 1, avec 19 modules. C'est la surface du 5e ordre avec *oscnode* (1), c'est-à-dire avec un point double, auquel sont infiniment voisines deux droites doubles. Mais cette surface n'appartient pas au type que nous voulons construire. En effet, M. Fano, dans une lettre à M. Enriques, démontre que cette surface est birationnellement transformée de la surface générale du 4e ordre. Voici sa démonstration que M. Enriques a bien voulu me communiquer :

Soit une surface du 4e ordre, tangente à l'origine au plan $x = 0$,

$$t^3 x + t^2 \varphi_2(x, y, z) + t\varphi_3(x, y, z) + \varphi_4(x, y, z) = 0.$$

Faisons la transformation crémonienne,

$$x = x'^2, \qquad y = x'y',$$
$$z = x'z', \qquad t = -(t'x' + \varphi_2)$$

déterminée par le système ∞^3, des quadriques osculatrices à la surface du 4e ordre à l'origine. On obtient ainsi l'équation transformée

$$-(tx+\varphi_2)^3 x^2 + (tx+\varphi_2)^2 x^2 \varphi_2 - (tx+\varphi_2)x^3\varphi_2 + x^4\varphi_4 = 0,$$

d'où

$$(tx+\varphi_2)(tx+\psi_3) - x\varphi_4 = 0$$

qui représente bien une F_5, avec oscnode, comme l'a indiqué Segre (2).

Ceci peut s'expliquer. L'on sait, en effet (3) qu'une courbe normale canonique de S^5, avec plans pentasécants, appartient toujours à une

(1) *Cf.* ENRIQUES CHISINI, *Op. cit.* p. 15 (vol. II, IV, p. 345).
(2) *Cf.* C. SEGRE, *Annali di Matematica*, 4e série, vol. XXV, 1896.
(3) *Cf.* ENRIQUES-CHISINI, *Op. cit.* p. 15 (vol. III, V, p. 103).

surface de Véronèse. Il en résulte qu'une F_{10}, dont toutes les sections possèdent des g^2_n, se trouve sur une variété dont toutes les sections sont des surfaces de Véronèse. Une telle surface est unique et constitue un cône de Véronèse, c'est-à-dire le cône des droites issues d'un point de S^6, s'appuyant à une surface de Véronèse. Ce cône de Véronèse, coupé par une variété cubique à 5 dimensions, contenant une quadrique (cône de sommet, au sommet du cône de Véronèse) a pour intersection résiduelle, la F_{10}, cherchée, qui acquiert ainsi un point double.

M. P. du Val (¹) a montré que cette F_{10} est équivalente à un plan double, avec sextique de diramation, possédant une droite tritangente, lequel plan double ne dépend que de 18 modules.

En conclusion, la possession par les courbes de la F_{10} d'une g^2_3 est une propriété qui n'appartient pas aux surfaces générales. Donc une surface générale F_{10} ne peut se projeter que d'un plan quadrisécant, et ne donne naissance qu'à une seule surface.

Il n'y a donc qu'une seule surface de genres 1, pour $\pi = 6$ et de cette surface on peut, par point triple, faire naître trois surfaces rationnelles que nous allons distinguer.

1° Considérons la surface F_6 du 6e ordre avec quartique rationnelle double. Supposons faire naître un point triple en un point T, extérieur à la quartique double Γ_4. La projection, à partir de T, de cette quartique, est une quartique plane avec 3 points doubles, traces de 3 bisécantes. Ces bisécantes appartiennent à la surface, la rencontrant en

$$3 + 2 \times 2 = 7 \text{ points.}$$

Le système adjoint au système des sections planes passant par T est découpé par les cubiques avec point double en T, passant par la quartique. Cette surface cubique contient les trois droites issues de T, puisqu'elles ont, en commun avec elle, 4 points. L'intersection variable est d'ordre $18 - 8 - 3 = 7$.

Les courbes possèdent un point triple en T, puisque T est un point sextique, pour l'intersection, et que l'on a retiré trois droites. Sur la représentation de la surface cubique $C_3(6A_i)$ (les A_i sur une conique) une quartique rationnelle Γ_4, se représente par une

$$C_4(A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4, A_5).$$

(¹) *Cf.* P. du Val, *Superficie di genere uno, che non sono base per un sistema di quadriche* (*R. C. R. Acad. d. Lincei*, 6e série, vol. XV, 1932, p. 276) et *Osservazioni* (*R. C. R. Acad. d. Lincei*, 6e série, vol. XV, 1932, p. 345).

La droite de la cubique représentée par le point-base A_6, et passant par le point T, ne rencontre pas la quartique. Or, cette droite coupe la surface F_6 en trois points autres que T, situés sur l'intersection résiduelle du 7e ordre. Si donc on projette cette courbe de T, on obtient une quartique à point triple, donc rationnelle.

Nous obtenons ainsi la surface rationnelle du type A :

$$C_7(9A^2, 3B, 4C),$$

les A et B étant situés sur une cubique fondamentale Γ_3. Cette surface se trouve chez Cremona [1].

Nous pouvons remarquer que cette F_6 est le « double » d'une surface cubique passant par une quartique rationnelle, et l'on sait [2] que ce système de surfaces représente une variété du 5e ordre à trois dimensions de S^6. Notre surface générale est donc l'intersection de cette V_5^3 à sections elliptiques, par les quadriques de S^6.

Remarquons que, parmi les surfaces précédentes, il existe un cas particulier où la quartique se décompose en une cubique et une droite, se rencontrant en un seul point. Alors les plans passant par la droite découpent sur la surface un faisceau de quartiques ayant deux points doubles, sur la cubique double (rencontre en deux points, en dehors du point d'intersection avec la droite). Remarquons que les quatre droites exceptionnelles ne rencontrent pas une telle courbe, car, étant des trisécantes de la quartique, elles deviennent des bisécantes de la cubique s'appuyant à la droite. Il en résulte qu'une telle droite ne rencontre pas une quartique de notre faisceau. Cette courbe est donc la projection d'une courbe de la F_{10} de S^6 qui ne passe par aucun des centres de projection. Une telle quartique est donc projection d'une quartique de F_{10}; nous avons donc affaire à une F_{10}, dotée d'un faisceau de quartiques elliptiques.

2° Considérons alors la surface dotée d'un faisceau de quartiques elliptiques et supposons prendre le plan Π, projetant, quadrisécant une des quartiques. Une quartique elliptique est courbe normale d'un S^3; le résidu d'une telle quartique par rapport à une section hyperplane est une sextique de genre 2, au moins (car appartient à S^4). Elle ne peut être de genre 3, car elle serait alors dans un S^3, qui rencon-

---

[1] *Cf.* L. Cremona, *Opere Matematiche III* (*Ueber die Abbildung algebraischen Flächen*, p. 266).

[2] *Cf.* F. Enriques, *Op. cit.* p. 14.

treroit celui de la quartique selon une droite, au plus bisécante de la quartique, et le genre de la courbe, ensemble de la quartique et de la sextique ne saurait dépasser $1 + 3 + 2 - 1 = 5$ ce qui est contraire à nos hypothèses.

Nous avons donc affaire à des sextiques de genre 2, situées dans des S^4, recontrant le S^3 de la quartique selon des plans; il y a donc quatre points communs et le genre de l'ensemble est bien

$$1 + 2 + 4 - 1 = 6.$$

Notre F_{10} possède donc un réseau de sextiques de genre 2. La série caractéristique d'une courbe du réseau, est sa série canonique g_2^1, le réseau est donc de degré 2 et la surface peut se représenter par un plan double.

Soit alors Π, un plan quadrisécant, une quartique Γ_4^0. L'espace E^3 contenant la quartique Γ_4^0 coupe le S^3, sur lequel on projette en un seul point: ce point représente donc toute la quartique; une section quelconque y aura quatre tangentes. Nous aurons donc un point quadruple à voisinage elliptique. Le cône tangent aura donc deux génératrices doubles. Le point Q sera donc sur la courbe double en un point double pour celle-ci. La F_6, projection de la F_{10}, est donc une surface du 6^e ordre avec une quartique double C_4, qui possède un point double quadruple pour la surface. Cette surface a bien tous ses genres égaux à 1, puisque, parmi le faisceau des quadriques passant par la quartique C_4, il y a un seul cône. Les sections planes passant par Q sont des sextiques avec point quadruple et deux points doubles sur C_4, donc de genre 2; deux de ces sextiques se coupent en dehors de Q en deux points. On a donc bien un réseau de sextiques, de degré et genre 2.

Le faisceau des quartiques est donné par les intersections variables des quadriques passant par C_4. Ce sont, en effet, des courbes d'ordre

$$2 \times 6 - 2 \times 4 = 4.$$

On voit, effectivement, sur la représentation plane d'une telle quadrique $C_2(A_1, A_2)$ que l'intersection par une surface du 6^e ordre $C_{12}(A_1^6, A_2^6)$ diminuée du double d'une biquadratique $C_4(A_1^2, A_2^2)$ se réduit à une $C_4(A_1^2, A_2^2)$ qui représente bien une quartique elliptique.

Si l'on projette la surface F_6 à partir de son point quadruple Q sur un plan, on obtiendra un plan double avec ligne de diramation d'ordre

$$2n + 2\pi - 2 = 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 = 6$$

enveloppe de quartiques elliptiques, dont les points doubles sont sur la droite, trace du plan tangent commun à toutes les quadriques en Q.

Cherchons si l'on peut construire directement un tel plan double et quels sont ses modules. Nous aurons à construire une sextique de diramation 12-tangente à un système continu ∞^1, de quartiques elliptiques.

Nous écarterons d'abord le cas où les 12 points de tangence seraient sur une cubique. En effet, s'il en était ainsi, en désignant par C_3 la cubique, par C_6 la courbe de diramation, par C_4 la quartique tangente, les courbes du faisceau $C_6 + \lambda(C_3)^2 = 0$ dépendent d'un paramètre. Imposons-leur de contenir un point de la C_4, nous aurons une courbe décomposée en la quartique et une conique C_2

$$C_6 + \lambda(C_3)^2 \equiv C_4 C_2.$$

Cette conique sera alors 6-tangente à la C_6, aux points d'intersection de la C_6 et de la C_3 non situés sur la C_4. Mais l'on sait qu'un plan double avec sextique de diramation 6-tangente à une conique, représente une surface du 4e ordre à point double, laquelle surface ne possède pas de faisceau de quartiques elliptiques.

Nous aurons donc à rechercher si les séries moitiés des g_{24}^{21}, coupées par une sextique sur une quartique quelconque, tendent vers des séries analogues, lorsque la quartique vient à acquérir des points doubles. Nous aurons à généraliser quelques résultats dus à M. Campedelli [1].

Soit donc une courbe C_p, de genre p, et d'un certain ordre m, soit sur cette courbe une série linéaire non spéciale g_{2n}^{2n-p} $(2n > 2p)$. La C_p fait partie d'un système continu Σ_p, de courbes irréductibles C_p, d'ordre m, avec d points doubles. Dans le système Σ_p, sont contenus des systèmes Σ_{p-1} et Σ_{p-2} de courbes possédant respectivement un ou deux points doubles accidentels. Les C_{p-1} et C_{p-2} se regarderont comme de *genre virtuel p*, et nous retiendrons leurs points doubles comme virtuellement inexistants.

Si nous faisons varier la C_p dans Σ_p, jusqu'à une C_{p-2} possédant les points doubles accidentels O et O', la g_{2n}^{2n-p} de C_p tend vers une g_{2n}^{2n-p} de C_{p-2} qui possède deux *couples neutres*. Cette série est *virtuellement complète*, sur la C_{p-2} de genre virtuel p et elle est effectivement contenue dans une g_{2n}^{2n-p+1}, sans couples neutres. Sur la C_p, la g_{2n}^{2n-p} possède 2^{2p}

---

(1) *Cf.* L. Campedelli, *La bisezione delle serie lineari sopra una curva di genere virtuale p e di genere effettivo p — 1* (*Bolletino dell'unione matematica italiana*, vol. XI, 1932, p. 78).

séries linéaires moitiés [1] (en général non spéciales), g_n^{n-p}, virtuellement complètes. Cherchons ce que deviennent ces 2^{2p} séries, lorsqu'on passe à la limite.

Supposons la g_{2n}^{2n-p} coupée par des adjointes φ_h, d'ordre $h\ (> n-3)$ passant par un groupe K de points fixes. Elles constituent un système linéaire de dimension

$$t = 2n - p + \frac{(h-m)(h-m+3)}{2} + 1.$$

Les φ_h se distribuent en 2^{2p} systèmes continus non linéaires $\{\varphi_h\}$, ∞^{t-n} de courbes n-tangentes à C_p, chacun desquels détermine sur la C_p, avec les groupes des points de contact, une g_n^{n-p} moitié de la série linéaire g_{2n}^{2n-p}.

Si l'on passe à la C_{p-2}, le système dęs φ_h tend vers un système continu ∞^t, n'ayant ni O, ni O′ pour points-bases, constitué par des $\bar\varphi_h$ virtuellement adjointes à C_{p-2} (passant par le groupe $\overline{K}$, limite du groupe K sur C_{p-2}). Ainsi, un système de φ_h, h-tangentes à C_p, tend vers un système $\{\bar\varphi_h\}$ constitué soit de $\bar\varphi_h$ passant en O et O′, $(n-2)$-tangente à C_{p-2}, soit de $\bar\varphi_h$ passant par O ou O′, $(n-1)$-tangente à C_{p-2}, soit de $\bar\varphi_h$ n-tangente à C_{p-2}.

Dans le premier cas, les $n-2$ points de contact des $\bar\varphi_h$ donnent, sur C_{p-2}, les groupes d'une des 2^{2p-4} séries coupées sur C_{p-2}, par ses adjointes effectives d'ordre h (passant par $\overline{K}$), ce qui est la série résidu de $O_1 + O_2 + O'_1 + O'_2$ (O_1 et O_2 étant les deux points superposés en O, O'_1 et O'_2 ceux superposés en O′) par rapport à la g_{2n}^{2n-p-4} complète qui contient la g_{2n}^{2n-p}, coupée par le $\bar\varphi_h$. Ces $\bar\varphi_h$ proviennent de quatre systèmes de $\bar\varphi_h$ n-tangentes à C_p; en effet, si C_p tend vers C_{p-2}, les $\bar\varphi_h$, passant par O et O′, sont limites de $4\varphi_h$, touchant la C_p en quatre points, car le fait de passer par un point double absorbe deux tangentes d'un faisceau.

Il reste donc 3.2^{2p-2} systèmes continus φ_h, mais parmi ceux-ci si l'on regarde O′ comme inexistant, il y en a 2^{2p-4} qui passent par O′ (*cf.* note de Campedelli) et 2^{2p-3} qui sont $(n-1)$-tangente à C_{p-2}. En retranchant ces systèmes qui comptent pour deux, il reste 2^{2p-2}. Il y a donc en tout 2^{2p-1} systèmes n-tangents.

En résumé, 2^{p-2} systèmes passant par O et O′, $(n-2)$-tangents à C^{p-3} et comptant chacun pour quatre:

---

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (vol. III, v. p. 34).

2^{p-3} systèmes passant par O, $(n-1)$-tangents à C_{p-2} et comptant respectivement pour deux;

2^{p-3} systèmes analogues passant par O';

2^{p-4} systèmes n-tangents à C_{p-2};

au total

$$4.2^{2p-4}+2\times 2.2^{2p-3}+2^{2p-2}=2^{2p}.$$

Mais si nous regardons la C_{p-2}, comme de genre $p-2$, sur elle les g_n^{n-p} ne sont plus complètes, mais contenues dans des g_n^{n-p+2}, moitiés des g_{2n}^{2n-p+2} qui n'ont que 2^{2p-4} séries moitiés. Donc, ces séries ne sont pas toutes diséquivalentes.

En appliquant deux fois le résultat de Campedelli, on arrive au résultat. Sur la C_{p-2} limite d'une C_{p-1}, ces séries se distribuent par couples, celles de la C_{p-1} se distribuent par couples dans celles de la C_p, d'où :

Théorème. — *Si l'on considère dans un système continu C_p, de courbes de genres p, une courbe C_{p-2}, dotée de deux points doubles accidentels, les g_n^{n-p}, moitiés des g_{2n}^{2n-p} d'une C_p, tendent vers des g_n^{n-p} virtuellement complètes de la C_{p-2}; celles-ci se distribuent en quadruples de séries équivalentes, les séries de chaque groupe étant contenues dans une même g_n^{n-p+2} complète.*

Si donc nous prenons une quartique elliptique, il existe $2^{2p-2}=16$ séries g_n^{n-p} coupées par des courbes n-tangentes; ces séries se distribuent en quatre groupes.

Prenons alors, dans le plan, une quartique elliptique, dépendant de quatre paramètres (12 paramètres, moins les 8 homographies du plan). Nous savons qu'il existe des sextiques 12-tangentes, en des points d'une des 16 séries précédentes. Soit C_6, l'une d'elles, les 12 points de tangence appartiennent à une g_{12}^9, donc dépendent de 9 paramètres. Mais les C_6 remplissant cette condition, sont ∞^6, comme le système

$$C_6+\lambda C_4 C_2=0,$$

où C_2 est une conique générique. Nous avons ainsi construit un plan double, image d'une surface possédant une courbe elliptique. Mais s'il existe une courbe de genre p, sur une telle surface, il en existe un système continu ∞^p, donc les quartiques sont ∞^1. Notre plan double ainsi construit, possède une infinité de quartiques elliptiques et dépend de

$$4+9+6-1=18 \text{ modules.}$$

Nous n'obtenons donc pas une surface générale, ce qui était à prévoir, puisque nous avions obtenu une surface analogue, particularisant la quartique rationnelle double.

Cette propriété est d'ailleurs générale; en effet :

Théorème. — *Toute surface dont tous les genres sont* 1, *qui possède un faisceau de quartiques elliptiques, dépend de* 18 *modules.*

Soit, en effet, une telle surface $F_{2\pi-2}$, située dans un S^π. Supposons que la surface possède un faisceau de quartiques elliptiques. Une telle courbe est normale dans un S^3, toute section hyperplane contenant une de ces quartiques se décompose en celle-ci et une courbe contenue dans un $S^{\pi-2}$; si elle était dans un $S^{\pi-3}$, l'intersection avec le S^3 serait une droite, au plus bisécante la quartique, et le genre de l'ensemble de la section, serait de genre

$$1 + [2\pi - 6 - (\pi - 3)] + 2 - 1 = \pi - 1.$$

La courbe résidu est donc, dans un $S^{\pi-2}$, de genre $\pi - 4$, ayant 4 intersections avec la quartique dans le plan intersection du S^3 et du $S^{\pi-2}$.

Considérons alors les sections hyperplanes dotées de quatre points doubles, et le système de toutes les courbes de S^π, sections hyperplanes d'une $F_{2\pi-2}$. Ce système a la dimension $\pi + r$, où r est l'infinité des surfaces $F_{2\pi-2}$, qui n'ont pas en commun une même section hyperplane. La décomposition de la courbe en une quartique elliptique et une autre courbe, exige quatre conditions (puisque quatre points doubles); nous aurons donc

$$\infty^{\pi+r-4} \text{ courbes}$$

avec une quartique composante. Mais, par le S^3 contenant la quartique, passent $\infty^{\pi-4}$ hyperplans. Une surface qui possède une telle quartique doit en contenir une infinité; d'où le nombre des surfaces contenant une quartique :

$$\infty^{\pi+r-4-(\pi-4)-1} = \infty^{r-1}.$$

Posséder un tel faisceau implique donc une condition. Comme le nombre des modules d'une surface générale est 19, celui d'une surface dotée d'un faisceau de quartiques elliptiques sera bien 18.

Après cette digression, revenons à la surface $\pi = 6$, possédant un faisceau de quartiques elliptiques, et un réseau de sextiques de genre 2. Supposons que l'on impose à l'un de ces systèmes de courbes, la possession d'un point double, pour chacune de leurs courbes. Le point double sera, d'après le théorème de Bertini, un point-base double T. Supposons d'abord que ce soit le faisceau des quartiques elliptiques. Les quartiques sont alors rationnelles, les sextiques vont posséder le point double comme point-base; s'il n'en était pas ainsi, les sextiques devraient être de genre au moins égal à 3, mais alors le S^3 les contenant rencontrerait celui contenant la quartique selon une droite, et l'on devrait avoir

$$\pi = 0 + 3 + 2 - 1 = 4,$$

ce qui est contraire aux hypothèses. La surface est donc coupée par un hyperplan passant au point T, selon trois directions; elle y possède un point triple. Remarquons que ce point triple a un voisinage elliptique coupant en deux points la quartique et en un point la sextique, d'où le genre de la section :

$$(0 + 1 + 2 - 1) + (2 + 3 - 1) = 6.$$

Si ce sont les quartiques qui restent elliptiques, et les sextiques qui acquièrent un point double, le raisonnement sera le même, car, si les quartiques ne passaient pas au point-base double, qui devient ainsi triple pour la surface, les quartiques seraient de genre 2, donc planes, et l'on arriverait à une impossibilité, les sextiques de genre 1 n'admettant pas de quadrisécantes.

En résumé, si l'on considère une F_{10} de S^6, dotée d'un faisceau de quartiques elliptiques et d'un réseau de sextiques de genre 2, si j'impose à l'un de ces systèmes de courbes de posséder un point-base double, ce point-base sera aussi base pour le système linéaire résidu, et ce point sera triple pour la surface. Nous avons donc là la naissance de deux points triples à caractères distincts.

Nous allons maintenant montrer qu'un tel point triple impose bien sept conditions comme un point triple ordinaire.

Pour cela, étudions les projections dans l'espace ordinaire de ces deux nouvelles surfaces, toujours à partir d'un plan quadrisécant une quartique.

Considérons d'abord le cas où le point-base est double pour les quartiques. La surface projetée est une Φ_6, avec un point quadruple Q, projection d'une quartique rationnelle. Mais les sextiques de S^6 rencontrent la quartique projetée en Q en quatre points dont deux confondus au point triple. Il y a donc seulement deux tangentes arbitraires, et une tangente double. Le voisinage du point Q se compose d'un voisinage rationnel (quartique) et d'un voisinage elliptique (point triple), liés par un point double. Le cône tangent se décompose en un cône quadrique et un plan double. Or, un cône du 4^e ordre dépend de 15 paramètres homogènes; le cône décomposé dépend de 9 paramètres homogènes. On a donc 6 relations à écrire, et la surface trouvée a donc $18 - 6 = 12$ invariants projectifs.

Supposons maintenant que le point double le soit pour les sextiques. La quartique se projette encore en un point Q quadruple dont le voisinage est formé de deux voisinages elliptiques, l'un provenant de la quartique, et l'autre du point triple, ces deux voisinages étant liés par un point simple (le point-base est simple sur la quartique). On a alors affaire à un point quadruple avec une droite double infiniment voisine. Une telle singularité dépend encore de six conditions.

Nous allons montrer que les cas B et C correspondent bien à ces deux surfaces. Soit donc la surface B donnée par la représentation plane

$$C_9(7\,A^3,\ B^2,\ 4\,C) \qquad (\text{les } A,\ B,\ C \text{ sur } \Gamma_3).$$

Soit Γ'_3 une autre cubique passant par les A et B. Choisissons sur cette cubique 4 points D, intersection de la Γ'_3 avec une $(C_9)^0$ particulière. Soit alors le système

$$C_9(7\,A^3,\ B^2,\ 4\,C,\ 4\,D),$$

les A, B, C sur Γ_3, les A, B, D sur Γ'_3.

Les courbes de ce système sont ∞^3, en effet, celles décomposées en $\Gamma_3 + \Gamma'_3$ et une $C_3\,(7\,A)$ sont ∞^2, d'où le système ∞^3 des courbes

$$C_9^0 + \Gamma_3\Gamma'_3\,(\lambda\, C_3^0 + \mu C_3^1 + \nu C_3^2) = 0.$$

Le système représente une surface d'ordre

$$81 - 7 \times 9 - 4 - 4 - 4 = 6.$$

Le point multiple est représenté par l'ensemble $\Gamma_3 + \Gamma'_3$ qui donne, pour les courbes y passant des $C_3\,(7\,A)$ représentant les sextiques elliptiques, se rencontrant hors le point multiple en $3 \times 3 - 7 = 2$ points. Le point multiple est donc quadruple; son voisinage est composé de deux cubiques elliptiques ayant un point commun. La surface possède un faisceau de quartiques elliptiques, les $C_3\,(7\,A,\ B)$; sextiques et quartiques se coupent en $9 - 7 = 2$ points, hors du point multiple. La courbe double est une

$$C_{21}(7\,A^7,\ B^5,\ 4\,C^7,\ 4\,D^1) \text{ se réduisant à } C_9(7\,A^3,\ B,\ 4\,C,\ 4\,D)$$

qui est bien une quartique possédant un point double, au point multiple.

Passons maintenant à la surface représentée par le système

$$C_8(A^4, 9B^2, 2C) \quad (\text{les } A, B, C \text{ sur une } \Gamma_3).$$

Considérons une droite Δ issue de A et prenons les quatre points D, intersections de Δ avec une C_8^0, arbitraire. Les courbes

$$C_8(A^4, 9B^2, 2C, 4D) \quad (A, B, C \text{ sur } \Gamma_3, A \text{ et D sur } \Delta)$$

forment un système ∞^3. En effet, les $C_4(A_2, 9B)$ sont ∞^2, donc le système

$$C_8^0 + \Delta\Gamma_3(\lambda C_4^0 + \mu C_4' + \nu C_4'') = 0$$

est bien ∞^3. Notons que, puisque la Γ_3 est une cubique elliptique, toutes les C_4 passent par un autre point E, situé sur Γ_3. Ces quartiques se coupent donc en $4 \times 4 - 4 - 10 = 2$ points variables. Elles représentent les sextiques passant par le point multiple (Γ_3, Δ); la section générale est d'ordre

$$64 - 16 - 9 \times 4 - 2 - 4 = 6.$$

Il en résulte que le point multiple est bien quadruple. Cette surface admet un faisceau de quartiques rationnelles, représentées par les droites issues de A, et un réseau de sextiques de genre 2, représenté par les $C_4(A^2, 9B, E)$.

Ces courbes se coupent en $4 - 2 = 2$ points, en dehors du point multiple. La courbe double de la surface est la $C_{10}(A^9, 9B^5, 2C^4, 4D^3)$ qui se réduit à $C_4(A^1, 9B^2)$ qui représente une quartique ayant un point double au point multiple.

Je ferai sur le cas C une remarque dont je tirerai un exemple montrant la naissance d'une de ces familles de courbes décomposées, par l'imposition d'un point triple.

Considérons une surface du type C. Les courbes passant au point triple se représentent par les $C_4(A^3, 9B)$.

Montrons que sur cette surface, les sections sont équivalentes à des quintiques, c'est-à-dire que, sauf le cas des sections décomposées, tout plan quadrisécant est pentasécant. En effet, les hyperplans de S^6 découpent sur une section hyperplane quelconque une g_{10}^5. Si l'on considère un plan quadrisécant, c'est-à-dire quatre points, il doit passer par ce plan une double infinité de S^4, nous avons donc à considérer, dans le plan, les courbes engendrant la g_{10}^5 et à y déterminer quatre points, tels que le système des courbes y passant soit ∞^2. Or, nous avons une quintique sur laquelle les g_{10}^5 sont coupées par les coniques du plan. Les coniques passant par quatre points ne forment un réseau que si les quatre points sont en ligne droite, et alors il y en a un cinquième. Donc un plan quadrisécant sera pentasécant.

Considérons alors la surface F_7 avec un point quintuple, par lequel passent trois droites triples. Cette surface est de genres 1, puisque, par un trièdre de droites doubles passe une seule surface cubique, formée de trois faces du trièdre. Une telle surface existe. On peut prendre, en effet, les trois faces du trièdre deux fois et un autre plan, puis trois fois un cône, passant par les trois droites et un autre plan. La surface générale du faisceau

$$(PP'P'')^2Q + (C_2)^3R = 0$$

appartient à notre type.

Les sections sont des $C_7(3A^3)$ qui par transformations crémoniennes se ramènent à des quintiques. Soit Q le point quintuple; imposons un point triple T, en position générique. La droite QT appartient à la surface, ayant avec elle huit points en commun. Le système adjoint aux sections passant par T, est coupé par des surfaces du 4^e ordre, avec trois droites doubles concourantes et un point double extérieur. Mais QT lui appartient, et la surface du 4^e ordre se décompose en deux cônes. Un tel cône coupe la surface selon une courbe d'ordre

$$2 \times 7 - 3 \times 3 - 1 = 4.$$

Le point T, triple pour l'intersection (la droite QT étant retirée) reste double pour la quartique qui est rationnelle. Comme il y a un faisceau de cônes, il y a un faisceau de quartiques rationnelles. Les sextiques sont ici décomposées en la droite QT et l'intersection par un cône passant aux trois droites triples. Il est à noter que, si le point triple n'existe pas, le faisceau de quartiques est absent.

Notons que notre surface F_7 est une image de la F_{10} de S^6 à point double située sur un cône de Véronèse. En effet, si l'on projette cette surface sur un plan à partir du point quintuple, on obtient un plan double. La courbe de diramation est d'ordre

$$2n + 2\pi - 2 = 2 \times 2 + 5 \times 2 - 2 = 12,$$

donc une C_{12}. Mais les traces des faces du trièdre des droites triples ne peuvent rencontrer cette C_{12}, qui a donc trois points sextuples. Mais le cône tangent au point Q se décompose en trois plans et en un cône du 2^e ordre, dont les génératrices ont six intersections en Q, avec la surface; l'intersection résiduelle n'a qu'une intersection avec une projetante. La conique trace du cône sur le plan double passe par les trois points sextuples de la C_{12}, et lui est tritangente.

Par une transformation quadratique, cette C_{12} se ramène à une C_6, tritangente à une droite. Ce plan double dépend donc de 18 modules. C'est bien la surface située sur le cône de Véronèse [1]. La surface à point triple que nous avons construite dépend, elle, de 11 paramètres. C'est en effet, un cas particulier, puisque le réseau des sextiques est décomposé en la droite QT et un réseau de quintiques. Ce cas s'obtient sur la représentation plane, en faisant se rapprocher infiniment deux points bases simples situés sur la cubique fondamentale Γ_3.

Il peut être intéressant de donner quelques représentations de surfaces rationnelles appartenant aux types rencontrés.

Notons d'abord la surface F_6 du type A représentée par le système

$$C_7(9A^2, 3B, 4C) \quad (\text{les A et B sur } \Gamma_3).$$

Cette surface a été indiquée par Cremona [2].

Nous pouvons obtenir des surfaces en projetant la F_{10} de S^6 à partir du point triple, et de deux autres points arbitraires, ou encore du point triple et de trois autres points appartenant à un plan quadrisécant passant par le point triple. On aura ainsi, pour le type A, les systèmes représentatifs suivants :

a. $C_4(11\,A)$,

α. $C_4(12\,A)$ (les 12 A sur une Γ_3 fondamentale).

La surface *a* représente une surface du 5e ordre avec cubique gauche double. On peut, en effet, obtenir directement la représentation d'une telle surface par projection gauche. A un point M de la surface, on fait correspondre la trace sur le plan de projection de l'unique bisécante à la cubique double, passant par M. Observons alors que les bisécantes à une cubique s'appuyant sur une droite, engendrent une surface du 4e ordre à cubique double; on trouve que la projection d'une section plane est une courbe d'ordre

$$5 \times 4 - 3 \times 2 \times 2 = 8.$$

Les trois points d'intersection de la cubique double avec le plan de

---

[1] *Cf.* P. du Val, *Osservazioni* (*R. C. R. Acad. d. Lincei*, 6e série, vol. XV, 1932, p. 345).

[2] *Cf.* L. Cremona, *Opere Matematiche III* (*Ueber die Abbildung der algebraischen Flächen*, p. 266).

projection représentent des points d'ordre

$$5 \times 2 - 3 \times 2 = 4,$$

comme on le voit en considérant le cône ayant son sommet en l'un de ces points et s'appuyant sur la cubique. Comme la surface est du 5e ordre, il y aura six points-bases simples, avec σ, tel que

$$64 - 3 \times 16 - \sigma = 5, \qquad \sigma = 11.$$

Par transformation quadratique les $C_8(3A^4, 11B)$ se ramènent à des $C_4(11A)$.

Les adjointes d'ordre 2 passant par la cubique double coupent selon des quartiques ($2 \times 5 - 6 = 4$). Mais si l'on projette d'un point de la quadrique, une des génératrices de cette surface sera bisécante à la cubique, et n'aura qu'une intersection avec la quartique, l'autre en aura donc trois. Les quartiques sont donc rationnelles.

La surface α est bien connue; c'est celle du 4e ordre à point triple.

Les mêmes projections appliquées au type B donnent les systèmes

b. $C_6(7A^2, 3B)$,

β. $C_6(7A^2, 4B)$ (les A et B sur une Γ_3).

La surface *b* représente une surface du 5e ordre avec trois droites doubles concourantes; les adjointes d'ordre 2, données par les cônes quadriques, passant par les trois droites doubles, coupent la surface selon des courbes d'ordre

$$2 \times 5 - 3 \times 2 = 4.$$

Ce sont des quartiques ne passant pas au sommet du cône, donc elliptiques. Ce sont bien les caractères des adjointes aux sections planes

$$C_3(7A).$$

Sur la surface β, la cubique fondamentale Γ_3, représente un point multiple. Les sections y passant sont les C_3 (7 A) qui sont elliptiques et se coupent en deux points. Ce point multiple elliptique abaisse le degré et le genre des sections qui y passent de 2; c'est un tacnode. Le cas β représente donc la surface du 4e ordre dotée d'un tacnode (1).

---

(1) *Cf.* M. Nœther, *Göttingen Nachrichten*, 1871, p. 267; L. Cremona, *Math. Annalen*, 1871, p. 213.

Enfin, au type C, nos projections rattachent les systèmes

c.	$C_5(A^3, 11\,B)$,
γ.	$C_5(A^3, 12\,B)$ (les A et B sur une cubique Γ_3).

La surface c représente la surface du 5^e ordre dotée d'une droite triple. En effet, les adjointes d'ordre 2 se décomposent en deux plans passant par la droite triple, et découpent, sur la surface, deux coniques d'un même faisceau. Ce sont les caractères de notre représentation où les adjointes aux sections sont des $C_2(2\,A^2)$.

La surface γ, au contraire, possède un point multiple Γ_3. Une section y passant se réduit à une $C_2(A^2)$. Toutes les sections passant au point multiple sont décomposées. La surface est donc formée d'une surface décomposée; comme il y a un point multiple, ce sera un cône quadrique double.

En résumé, appartiennent à nos types les surfaces rationnelles suivantes :

A.	a.	Surface du 5^e ordre à cubique gauche double;
	α.	Surface du 4^e ordre à point triple.
B.	b.	Surface du 5^e ordre avec trois droites doubles concourantes;
	β.	Surface du 4^e ordre à tacnode.
C.	c.	Surface du 5^e ordre à droite triple ;
	γ.	Cône quadrique double.

5. **Les surfaces avec** $\pi = 7$. — Les équations qui donnent les représentations planes nous fournissent alors quatre systèmes représentatifs de quatre surfaces rationnelles distinctes.

Ces surfaces sont données par les systèmes

A.	$C_8\ (2\,A^3, 8\,B^2, 2\,C)$	
B.	$C_9\ (6\,A^3, 3\,B^2, 3\,C)$	(les 12 points bases
C.	$C_{12}(8\,A^4, 4\,C)$	sur une cubique fondamentale Γ_3).
D.	$C_9(A^5, 11\,B^2)$	

Nous les distinguerons encore par le nombre des droites issues du point triple, et par le système adjoint aux sections passant par ce point. On a

	Droites passant au point triple.	Système adjoint aux sections passant par un point triple.
A.....	deux	Courbes rationnelles d'ordre 10
B.....	trois	Courbes elliptiques d'ordre 9
C.....	quatre	Courbes de genre 2, d'ordre 8
D.....	zéro	Système de trois quartiques rationnelles

Considérons alors, dans S^7, une F_{12}, d'ordre 12, dont toutes les sections hyperplanes sont courbes d'ordre 12 et genre 7. Soit C_6 une de ces courbes canonique dans un S^6. Cette courbe admet, en général [1], des S^4 pentasécants qui peuvent, dans certains cas, devenir hexasécants.

Supposons cet espace simplement pentasécant, soit Σ^4; un point quelconque M et Σ^4 déterminent un S^5, qui coupe un S^3 de projection, en un seul point m; par projection de F_{12}, on obtient donc une Φ_7 de genres 1, à sections de genre 7, donc dotée d'une courbe double d'ordre

$$\frac{6\times 5}{2}-7=8.$$

Cette courbe du 8e ordre doit se trouver sur une seule surface cubique. Son genre est p.

$$3\times 8-p+1=19, \qquad p=6.$$

On aura donc une Φ_7, avec courbe double du 8e ordre de genre 6. On pourrait envisager le cas d'une courbe du 8e ordre dotée de t points triples :

a. $\qquad t=1, \quad p=3;$

b. $\qquad t=2, \quad p=0.$

Mais, en tout cas, une telle courbe est sûrement sur une surface du 4e ordre. Le cas *a* est impossible. En effet, si cette courbe existe, la cubique possède un point double, celle du 4e ordre aussi. Leur intersection est donc une $C_{12}(6A^4)$ qui se réduit à $C_8(6A^2)$.

S'il existe une courbe d'ordre 8, passant trois fois au point double, on aura, si cette courbe est d'ordre n, de multiplicité r ,

$$3n-\sum r_i=8,$$

$$2n-\sum r_i=3,$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum\frac{r_i(r_i-1)}{2}=3 \qquad (r_i\leqq 2),$$

d'où

$$n=5, \qquad \sum_1^\sigma r_i=7, \qquad \sum_1^\sigma r_i^2=7 . \quad \textbf{impossible } (\sigma=7>6).$$

Pour le cas *b*, la surface cubique possèderait deux points doubles

---

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (vol. III, v, p. 112).

représentés sur la représentation plane par les points en ligne droite A_1, A_2, A_3 et A_1, A_4, A_5. La section se réduit à

$$C_4(A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5^2, A_6^2).$$

Si la courbe existait, on aurait

$$\begin{aligned}
3n - r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_5 - r_6 &= 8, \\
n - r_1 - r_2 - r_3 &= 3, \\
n - r_1 - r_4 - r_5 &= 3, \\
n + r_1 - r_6 &= 2, \\
\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

Cette courbe doit être contenue dans la $C_8(A_{i>1}^2, A_6^4)$, donc $r_2 \leqq 8$, d'où possibilité avec la $C_4(A_1, A_6^3)$, mais ceci exigerait que les cinq points A_2-A_6 soient sur une conique, ce qui est impossible. En conséquence, le seul cas possible est celui de la courbe du 8^e^ ordre de genre 6.

Nous sommes donc ramenés à l'intersection d'une surface cubique par une surface du 4^e^ ordre. Or on sait qu'une telle intersection se décompose en une courbe du 8^e^ ordre de genre 6 et une quartique de 2^e^ espèce. Cette courbe peut se représenter sur la représentation plane de la cubique par une

$$C_6(A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5, A_6).$$

Notons que si les six points-bases viennent à se trouver sur une conique (cubique à point double) notre C_6 rencontre la $C_2(6A_i)$ image du point double en deux points. La courbe obtient alors un point double, et reste de genre 6. Remarquons que cette courbe particulière à point double est aussi le cas particulier des courbes d'ordre 8 et de genre 7, qui viennent à être dotées de point double. La section de deux surfaces cubiques ayant en commun une droite est, en effet, représentée par

$$C_8(A_1^3, A_2^3, A_3^3, A_4^3, A_5^2, A_6^2).$$

Si l'on impose un point double pour la surface, double pour la courbe, on devra retirer la C_2, d'où

$$C_6(A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5, A_6).$$

On en conclut que la courbe du 8^e^ ordre de genre virtuel 7, à point double, est un cas particulier de la courbe du 8^e^ ordre de genre 6.

Supposons alors qu'il existe une surface Φ_7, dotée d'une telle courbe double, elle coupe la cubique adjointe selon une

$$C_{21}(A_1^7, A_2^7, A_3^7, A_4^7, A_5^7, A_6^7),$$

d'où, pour résidu

$$C_9(A_1^3, A_2^3, A_3^3, A_4^3, A_5^3, A_6^3)$$

qui se décompose en cinq droites représentées par la droite A_5A_6, et les quatre coniques

$$(A_1, A_2, A_3, A_5, A_6) \quad (A_1, A_2, A_4, A_5, A_6),$$
$$(A_1, A_3, A_4, A_5, A_6) \quad \text{et} \quad (A_2, A_3, A_4, A_5, A_6).$$

Ce sont donc cinq droites gauches représentant les cinq points de pro-jection. Ces droites coupent la courbe en $2 \times 6 - 3 \times 2 - 2 = 4$ points. Si l'on considère une autre Φ'_7, passant par la même courbe double, ces cinq droites sont communes, ayant huit points communs avec la seconde surface. Donc toutes les Φ_7 passant par la courbe double découpent sur l'une d'elles un système de courbes de degré

$$7 \times 7 - 4 \times 8 - 5 = 12.$$

Une telle courbe est de genre 7, comme on le voit en considérant une section par la surface Φ_7 décomposée en la cubique comptée deux fois et une section plane. La C_{12} est alors décomposée en une section plane de genre 7 et cinq droites gauches. Le système de ces C_{12} est donc ∞^7. Celui des Φ_7 passant par la courbe double du 8^e ordre donnée est donc ∞^8. Les courbes du 8^e ordre sont 4×8 puisque [1]

$$4 \times 8 > 3 \times 6 + 12.$$

Le système des Φ_7 de l'espace est donc

$$\infty^{32+8} = \infty^{40}.$$

Mais il y a 15 homographies et sur une F_{12} de S^7 il y a ∞^2 espaces pentasécants, chacun appartenant à une g_5^1, dont il y a une infinité. Les hyperplans de S^7 sont ∞^7, et ceux passant par un S^3 sont ∞^3; on a donc, par projection,

$$\infty^{2+7-3} = \infty^6 \text{ surfaces équivalentes,}$$

d'où le nombre de modules de notre surface

$$40 - 15 - 6 = 19.$$

---

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.*, p. 15 (vol. III, v, p. 522).

Nous obtenons donc une surface générale représentative d'une F_{12}, admettant des espaces S^4 pentasécants. C'est même la seule surface générale de ce type. En effet, il n'y a qu'un type de C_8^6. Il existe un autre cas possible, celui d'une Φ_7 avec droite triple et quintique double de genre 1 dont la droite triple est une trisécante. Mais sur cette surface, les plans passant par la droite triple découpent des quartiques de genre 1 (ayant deux points doubles sur la quintique). Cette surface a donc un faisceau de quartiques elliptiques et, comme nous l'avons vu précédemment, n'est pas une surface générale.

Étudions maintenant le cas où la courbe section de la F_{12} de S^7 admet un S^3 hexasécant. La projection sera alors une Φ_6 de genres 1, dont les sections planes sont de genre 7, et ont donc trois points doubles. Une telle surface aura donc une cubique double. Cette cubique ne peut être plane, car la surface serait de genre supérieur à 1. Si la cubique est gauche, il y passe un faisceau de quadriques. Mais si l'un des points de cette cubique est quadruple pour la surface, il y a un seul cône adjoint, et la surface est de genres 1. Si la cubique est formée de trois droites gauches, on n'a aussi qu'une seule quadrique.

Considérons alors le cas d'une surface du 6e ordre, avec trois droites doubles. Une section passant par une de ces droites est une quartique de genre 1. Cette surface possède donc trois faisceaux de quartiques elliptiques. Elle est donc de modules en nombre inférieur ou au plus égal à 18. Ce n'est donc pas une surface générale.

La surface possédant une cubique gauche double avec point quadruple sur la cubique est coupée par le réseau de quadriques selon des sextiques, dont on a le genre à partir des $C_{12}(A^6, B^6)$, d'où l'on retranche deux fois la $C_3(A^2, B)$, d'où $C_6(A^2, B^4)$.

En retranchant deux fois le point quadruple, double pour la sextique, $C_4(B^2)$.

C'est donc un réseau de sextiques de genres 2. Mais les points du S^3 projetant sont six droites passant par le point quadruple, rencontrant la cubique double, donc ne rencontrant pas les sextiques. On a donc un réseau de sextiques de genre 2 sur la F_{12}. En projetant du point quadruple, on a un plan double avec courbe de diramation d'ordre 6; le réseau des sextiques se projette selon un système ∞^2 de quartiques de genre 2, 12-tangentes à la courbe de diramation. En tenant compte des résultats précédents [1], nous pouvons construire un tel plan.

---

[1] *Cf.* p. 21.

Prenons une quartique de genre 2; elle dépend de 13 paramètres. Il y a huit homographies dans le plan; les g_{12}^{9} des points de tangence dépendent de neuf paramètres, et on a alors ∞^6 sextiques. Mais, sur une telle surface, il y a ∞^2 telles quartiques de genre 2, d'où le nombre des paramètres essentiels :

$$13 - 8 + 9 + 6 - 2 = 18.$$

Nous obtenons donc encore une surface dépendant au plus de 18 modules; donc le fait de posséder une section, possédant des espaces hexasécants, ne peut appartenir à une surface générale.

Il existe donc une seule surface de genres 1, à sections de genre 7, générale à 19 modules. On peut la projeter sur une surface du 7^e ordre avec courbe double du 8^e ordre de genre 6, intersection résiduelle d'une surface cubique et d'une surface du 4^e ordre, ayant en commun une quartique de seconde espèce. A cette surface unique de genres 1, correspondent, par imposition du point triple, quatre surfaces rationnelles distinctes.

Si l'on se donne une Γ_8^6, on a vu qu'il y a ∞^8 surfaces de genres 1 et ordre 7 qui la contiennent doublement. Comme posséder un point triple impose 7 conditions, nous pouvons faire naître nos surfaces rationnelles à partir de la Φ_1.

Étudions les différents types de surfaces rationnelles.

A et B. Soit la surface A représentée par les

$$C_8(2\,A^3,\ 8\,B^2,\ 2\,C) \quad (\text{les } A,\ B,\ C \text{ sur } \Gamma_3).$$

Une section par le point triple se représente par

$$C_5(2\,A^2,\ 8\,B).$$

Parmi ces courbes, il en est de décomposées en une courbe du 5^e ordre rationnelle représentée par une droite Δ passant par A_1, et une courbe du 7^e ordre de genre 2, représentée par

$$C_4(A_1,\ A_2^2,\ 8\,B,\ E),$$

(E étant le 12^e point de la g_{12}^{11} sur Γ_3).

Considérons alors une surface du 12^e ordre de S^7, possédant un faisceau de quintiques elliptiques, et un réseau de septiques de genre 2 se coupant en cinq points, le genre de la courbe totale étant

$$1 + 2 + 5 - 1 = 7.$$

Les quintiques appartiennent à des S^4, les septiques à des S^6, leur intersection est dans un $S^{4+6-7} = S^3$, qui coupe bien la quintique en cinq points.

Une discussion analogue à celle faite dans le cas $\pi = 6$, montre que si l'on impose un point triple base pour le système, deux cas se présentent :

A′. faisceau de quintiques rationnelles; réseau de septiques de genre 2.
B′. faisceau de quintiques elliptiques, réseau de septiques elliptiques.

Le cas A′ se retrouve en A et B′ en B, car dans ce type les

$$C_9(6A^3, 3B^2, 3C) \quad (A, B, C \text{ sur } \Gamma_3)$$

passant par le point triple se réduisent à des $C_6(6A^2, 3B)$ parmi lesquelles figure le faisceau de quintiques elliptiques

$$C_3(6A, B_1, B_2) = \Gamma'_3$$

et le réseau de septiques elliptiques $C_3(6A, B_3)$.

Si, sur une telle surface, on prend pour S^1 projetant un S^3 pentasécant une quintique, on aura, sur la Φ_7, un point quintuple, image de toute la quintique. Sur la représentation plane, on peut prendre, pour le cas A, cinq points-bases sur la droite Δ, et pour le cas B, cinq points-bases sur la cubique Γ'_3. Ceci conduit aux deux surfaces

A′. $C_8(2A^3, 2B^2, 8C, 5D)$ $(A, B, C \text{ sur } \Gamma_3;\ A, D \text{ sur } \Delta)$;
B′. $C_9(6A^3, 3B^2, 3C, 5D)$ $(A, B, C \text{ sur } \Gamma_3;\ A, B_1, B_2, D \text{ sur } \Gamma_3)$.

Les points-multiples se représentent par

A′. $\Gamma_3 + \Delta$,
B′. $\Gamma_3 + \Gamma'_3$.

Ce sont bien des points quintuples, car les courbes résidus

A′. $C_4(A_1, A_2^2, 8B)$,
B′. $C_3(6A, B_3)$

se coupent respectivement en

A′. $16 - 1 - 4 - 8 - 1 = 2$,
B′. $9 - 7 = 2$

points au lieu de 7; le point multiple absorbe donc bien cinq intersections de deux sections planes de la Φ_7.

La courbe double, intersection par la surface cubique adjointe, diminuée des cinq droites images des points de projection, se représente par

A'. $\qquad C_{24}(2A^9, 8B^6, 2C^3, 5D^4)$,
B'. $\qquad C_{27}(6A^9, 3B^6, 3C^3, 5D^4)$,

qui se réduit à

A'. $\qquad C_{16}(A_1^7, A_2^7, 8B^4, 2C, 5D^2)$,
B'. $\qquad C_{18}(6A^6, B_1^7, B_2^7, B_3^7. 3C^2, 5D^2)$,

d'où la multiplicité de cette courbe au point quintuple

A'. $\qquad 4\times 16 - 2\times 5 - 7 - 8\times 4 - 2 - 10 = 3$,
B'. $\qquad 6\times 18 - 6\times 12 - 3\times 4 - 5 - 6 - 10 = 3$.

Au point quintuple de la surface, la courbe double du 8^e ordre possède un point triple.

Comme cas particulier de ces surfaces A et B se trouvent les surfaces du 6^e ordre à point triple. Considérons, en effet, une surface du 6^e ordre avec cubique gauche double, possédant un point quadruple Q sur la cubique. Imposons-lui un point triple T extérieur, nous obtenons une surface rationnelle. De T partent deux droites appartenant à la surface, la droite QT, et, la bisécante à la cubique double issue de T (ces deux droites ont, en effet, sept points communs avec la Φ_6). L'intersection par les surfaces du 3^e ordre passant par la cubique et deux fois en T, est une courbe d'ordre 10, possédant un point quintuple en Q et un quadruple en T, donc rationnelle, ce qui est un caractère des surfaces A. Les quadriques passant par la cubique et T, donnent naissance à un faisceau de quintiques rationnelles. On est donc bien dans le cas A; c'est un cas particulier, car cette surface ne dépend que de 11 paramètres

Considérons maintenant la surface du 6^e ordre, avec trois droites gauches doubles, et imposons-lui un point triple. De ce point partent trois droites, qui s'appuient à deux des droites doubles et ont donc avec la surface $3+2+2=7$ points communs: les surfaces cubiques passant par les trois droites doubles et deux fois au point triple, contiennent ces trois droites, ayant avec elles $2+2=4$ points communs. Ces surfaces coupent donc la F_6, selon des courbes d'ordre 9. Le point triple est triple pour ces courbes, les trois autres droites issues du point double de la surface cubique rencontrent la Φ_6 en trois points autres que le point triple. Les C_9 se projettent donç sur des C_6 avec trois points triples, donc elliptiques, ce qui est un caractère des surfaces du type B. Si l'on considère les quadriques passant au point triple et par deux des droites doubles, on a un réseau de courbes du 7^e ordre, avec un point double en T, et deux autres points doubles sur la troisième droite double. Comme sur la quadrique, cette septique est une C_7 (A^5, B^2) de genre 4, avec trois nouveaux points doubles elle est bien elliptique, caractère de la surface B. C'est encore un cas particulier dépendant de 11 paramètres.

C et D. Supposons maintenant que la surface F_{12} de S^7, possède un faisceau de quartiques elliptiques. Ces quartiques appartiennent à un S^3, et le résidu est une courbe du 8^e ordre contenu dans un S^6; ces courbes sont ∞^1. Les courbes sont de genre 3, contenues dans des S^5; l'intersection d'un tel S^5 et d'un S^3 est un plan qui coupe la quartique en quatre points. On vérifie ainsi que le genre de la courbe complète est bien

$$3 + 1 + 4 - 1 = 7.$$

Nous avons donc, sur notre surface, un faisceau de quartiques elliptiques et un système ∞^3, de courbes du 8^e ordre de genre 3. Supposons imposer un point-base pour ces systèmes, double pour l'un d'eux; nous obtenons ainsi un point triple, et deux séries de surfaces dotées de ce point triple, avec :

C'. un faisceau de quartiques elliptiques, un système ∞^1 de courbes du 8^e ordre de genre 2;

D'. un faisceau de quartiques rationnelles et un système ∞^3 de courbes du 8^e ordre de genre 3.

Ces surfaces vont appartenir aux types C et D. Considérons, en effet, les représentations

$$\left.\begin{array}{ll} \text{C.} & C_{12}(8A^4, 4B) \\ \text{D.} & C_9(A^6, 11B^2) \end{array}\right\} \quad (A, B \text{ sur } \Gamma_3).$$

Les courbes passant au point triple sont des

$$\begin{array}{ll} \text{C.} & C_9(8A^3), \\ \text{D.} & C_6(A^4, 11B). \end{array}$$

Parmi les premières se trouve le faisceau de courbes elliptiques représentées par C_3 (8A), courbes d'ordre $3 \times 12 - 8 \times 4 = 4$, et dont le résidu est le système des C_6 ($8A^2$) de genre 2 et de dimension 3.

Pour les secondes D, on a le faisceau des quartiques rationnelles représentées par les droites Δ, issues du point-base A, dont le résidu est formé des $C_6(A^3, 11B)$, courbes de genre 3. Pour ces dernières courbes, le 15^e point d'intersection E, avec la Γ_3, appartient à toutes les autres, les $C_5(A^3, 11B, E)$ sont d'ordre 8; et sont ∞^1.

Si maintenant dans le cas C on prend quatre points-bases C sur une cubique Γ'_3 (8 A) et un autre point-base extérieur D, et, pour le cas D, quatre points-bases C sur une droite Δ, et le cinquième D extérieur, on a les deux systèmes ∞^1;

C′. $\quad C_{12}(8A^4, 4B, 4C, D)$ (A et B sur Γ_3, A et C sur Γ'_3);
D′. $\quad C_9(A^5, 11B^2, 4C, D)$ (A et B sur Γ_3, A et C sur Δ)

représentant deux surfaces du 7^e ordre. Les points multiples sont

C. $\quad \Gamma_3 + \Gamma'_3$,
D. $\quad \Gamma_3 + \Delta$.

Les courbes y passant sont des

C. $\quad C_6(8A^2, D)$,
D. $\quad C_5(A^3, 11B, D, E)$

et se coupent en

C. $\quad 6 \times 6 - 8 \times 4 - 1 = 3$,
D. $\quad 5 \times 5 - 9 - 11 - 1 - 1 = 3$.

On a donc, sur la Φ_7, un point quadruple. Mais la courbe double représentée par

C. $\quad C_{27}(8A^9, 4B^2, 4C^2, D^1)$,
D. $\quad C_{19}(A^{11}, 11B^4, 4C^2, D^4)$

rencontre le point multiple en deux points.

Nous avons donc à faire à deux surfaces du 7^e ordre, possédant un point quadruple au point double de la courbe double du 8^e ordre.

Il peut être intéressant de donner quelques surfaces rationnelles appartenant à ces types, obtenues par des projections à partir de S^3 passant par le point triple.

Au type A appartiennent les surfaces

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha. & C_5(2A^2, 11B) \\ \alpha'. & C_5(2A^2, 11B, C) \end{array}\right\} \text{(A et B sur } \Gamma_3\text{)}.$$

La surface α représente une surface d'ordre

$$5 \times 5 - 2 \times 4 - 11 = 6$$

à sections de genre 4; cette surface a une courbe double du 6^e ordre, qui, la surface étant rationnelle, est de genre p, tel que

$$2 \times 6 - p + 1 = 10, \qquad p = 3.$$

Cette courbe se représente sur une cubique adjointe par

$$C_7(A_1^3,\ A_2^3,\ A_3^3,\ A_4^2,\ A_5^2,\ A_6^2).$$

Les intersections sur ces adjointes de la Φ_6 sont les

$$C_4(A_1^2,\ A_2^2,\ A_3^2)$$

qui représentent des sextiques de genre o. C'est bien le caractère des $C_2(2\,A)$ adjointes aux sections de α.

La surface α' est d'ordre

$$5 \times 5 - 2 \times 4 - 11 - 1 = 5.$$

La courbe fondamentale Γ_3, y représente un point multiple. Une courbe y passant est une $C_2(2\,A,\ C)$. Le point abaisse donc le degré et le genre de 4; en ce point, la courbe a quatre tangentes. La surface a donc une conique double et un point quadruple elliptique. Les adjointes données par les sections par les quadriques passant par la conique double et le point quadruple sont d'ordre 6. Elles se projettent du point quadruple sur une conique, et sont rationnelles. Ceci exige une surface dotée d'un point quadruple à l'intersection de deux droites doubles.

Au cas B appartiennent les deux surfaces

$$\left.\begin{array}{ll} \beta. & C_6(6\,A^2,\ 6\,B) \\ \beta'. & C_6(6\,A^2,\ 6\,B,\ C) \end{array}\right\} \text{ (A et B sur une } \Gamma_3 \text{ fondamentale).}$$

La première représente une surface d'ordre

$$6 \times 6 - 6 \times 4 - 6 = 6.$$

Cette surface est dotée d'une droite triple et de trois droites doubles s'appuyant à la droite triple.

Les cubiques possédant des droites doubles se représentent par les $C_2(A)$. L'intersection par une surface du 6^e ordre est une $C_{12}(A^6)$ en retranchant, trois fois la droite double, et trois droites du système réglé, on a C_3 représentant une courbe du 6^e ordre elliptique, comme les $C_3(6\,A)$ de la représentation β.

La surface β'

$$C_6(6\,A^2,\ 6\,B,\ C) \qquad (\text{A et B sur } \Gamma_3)$$

est d'ordre 5. Les courbes passant au point multiple sont des C_3 (6 A, C). Elles se coupent en deux points. Le point multiple, abaissant degre et genre de trois, est un point triple isolé T, par lequel passent six droites; cette surface possède une conique double, que le cône tangent au point triple rencontre aux traces des six droites issues du point triple. Les quadriques passant par la conique et le point triple, coupent la surface selon des courbes d'ordre

$$2 \times 5 - 2 \times 2 = 6.$$

Le point T est triple pour ces courbes qui peuvent donc se projeter selon des cubiques elliptiques. Les adjointes aux sections planes sont donc des sextiques elliptiques, en accord avec les C_3 (6 A) de la représentation.

Au cas C se rattachent les surfaces

$C_9(8\,A^3, 3\,B)$,

$C_9(8\,A^4, 3\,B, C)$ (A et B sur une Γ_3 fondamentale).

La surface γ est d'ordre 6. C'est une surface ayant une droite triple, et trois droites doubles concourantes. En effet, considérons une surface cubique passant deux fois par la droite triple, et simplement par les droites doubles, donc décomposée en un plan par la droite triple et un cône passant par les quatre droites. Le plan coupe selon une cubique elliptique; le cône, selon une courbe d'ordre 3, cubique gauche rencontrant en un point la droite triple, donc en deux points la cubique elliptique; l'ensemble est une sextique de genre

$$1 + 0 + 2 - 1 = 2$$

comme les adjointes à γ, C_6 (8 A^2).

La surface γ' est d'ordre 5. Les sections passant par le point multiple, représenté par la Γ_3, sont des C_6 (8 A^2, C).

Deux telles sections de genre 2 se coupent en

$$36 - 8 \times 4 - 1 = 3 \text{ points.}$$

La singularité diminuant degré et genre de 2 est un *tacnode.* Nous avons donc une surface du 5^e^ ordre dotée d'une conique double et d'un tacnode. Les adjointes sont coupées par les quadriques passant au tacnode et par la conique. Ces sections sont de degré

$$2 \times 5 - 2 \times 2 = 6.$$

Elles ont au tacnode, un point double, et un autre infiniment voisin. Elles peuvent donc se projeter sur des quartiques dotées d'un point double donc de genre 2. On retrouve bien les caractères des $C_6 (8 A^2)$ de la représentation γ'.

Le type D donne naissance à deux surfaces représentées par

δ. $C_6(A^4, 14B)$.

δ'. $C_6(A^4, 14B, C)$ (les A et B sur Γ_3).

Les surfaces S, d'ordre 6, sont à droite quadruple, puisque, dans ce cas, les adjointes d'ordre 3 sont composées de trois plans, dont les intersections sont trois coniques d'un faisceau, comme on le voit, par la

$$C_3(A^3) = \Delta(A)\Delta'(A)\Delta''(A),$$

les Δ, Δ', Δ'' étant des droites.

La surface S_5 est d'ordre 5. Elle possède un point multiple représenté par Γ_3, point tel que les courbes y passant représentées par les $C_3(A^3, C)$ se décomposent en une droite fixe et deux coniques. Cette surface est donc décomposée en un plan et deux cônes.

En résumé, il existe une seule surface avec $\pi = 7$, dont tous les genres sont 1. L'imposition d'un point triple donne naissance à quatre types de surfaces rationnelles. A ces types se rattachent les surfaces suivantes :

A. { Surface du 5e ordre, avec courbe double du 6e ordre de genre 3;
Surface du 5e ordre, avec deux droites concourantes doubles, le point de concours étant quadruple pour la surface.

B. { Surface du 6e ordre, avec droite triple et trois droites s'appuyant à la droite triple,
Surface du 5e ordre à conique double et point triple extérieur.

C. { Surface du 6e ordre, avec droite triple et trois droites doubles concourantes avec la droite triple,
Surface du 5e ordre à conique double et tacnode.

D. { Surface du 6e ordre à droite quadruple;
Surface décomposée en un plan et deux cônes.

6. **Les surfaces avec** $\pi = 8$. — Les équations qui donnent les surfaces rationnelles cherchées conduisent aux trois systèmes suivants :

A. $C_8 (A^3, 10B^2, C)$
B. $C_9 (5A^3, 5B^2, 2C)$
C. $C_{10}(A^4, 7B^3, C^2, 3D)$
} (les points-bases sur une Γ_3 fondamentale.)

On peut, comme précédemment, distinguer les systèmes par le nombre des droites issues du point triple, et les systèmes adjoints aux sections passant par le point triple.

	Droites passant au point triple.	Adjointes aux sections par le point triple.
A.....	une	Courbes rationnelles du 13^e ordre
B.....	deux	Courbes elliptiques du 12^e ordre
C.....	trois	Courbes de genre 2 du 11^e ordre

Considérons alors, dans S^8, une F_{14} de genres 1, ses sections hyperplanes sont des courbes d'ordre 14 et genre 8, canoniques dans un S^7. Soit C_{14} une telle courbe. Par un point A', de C_{14}, passent ∞^{12} S^4, or, imposer à un S^4 de rencontrer une courbe, implique, dans S^7, deux conditions. Un S^4 sera donc hexasécant si l'on a cinq autres points d'intersection. On a donc

$$\infty^{12-10} = \infty^2 \text{ systèmes}$$

de tels plans.

Par contre, on peut montrer que s'il existe un S^4 heptasécant, c'est que la courbe C_{14} a été particularisée. Si donc on projette, d'un S^4 hexasécant, la projection sera une Φ_8 de genres 1, à sections de genre 8, donc dotée d'une courbe double d'ordre

$$\frac{7 \times 6}{2} - 8 = 13.$$

Cette courbe doit appartenir à une seule quartique adjointe, qui doit, de plus, contenir six droites gauches, images des points de projection.

Supposons que notre C_{13} possède t points triples qui seront doubles pour la surface unique du 4^e ordre qui doit la contenir. Nous devrons avoir

$$52 - 2t - p + 1 = 34,$$

d'où

$$2t + p = 19.$$

Cette courbe appartiendra certainement à une surface du 5^e ordre, car

$$5 \times 13 - 2t + p + 1 < 55.$$

Soit π le genre de la courbe d'ordre 7, résidu de la C_{13} dans l'intersection de la surface du 4^e ordre et de la surface du 5^e ordre. La dimension des surfaces du 5^e ordre passant par la C_{13} doit être π, puisque la surface du 4^e ordre est de genres 1. On a donc

$$51-(65-2t-p+1)=\pi$$

ou

$$\pi=2t+p-15, \qquad \pi=4$$

le système découpé par les F_5 sur la F_4 étant formé des F_5 non décomposables en la F_4 et un plan.

L'ensemble $C_{13}+C_7$ forme la section de la F_4 par une F_5. C'est donc une courbe de genre virtuel 51. Soit α le nombre des points d'intersection de la C_{13} et d'une C_7, on a

$$p_2+\pi+\alpha-1=51, \qquad p_1+\alpha=48.$$

p_2 étant le genre virtuel de la courbe, les points triples supposés non existants.

Mais une C_7 de genre 4, appartient à une surface cubique, puisque l'on a

$$3\times 7-4+1<19.$$

Sur une telle surface, cette courbe se représente par une

$$C_7(A_1^3,\ A_2^3,\ A_3^3,\ A_4^2,\ A_5^2,\ A_6).$$

Le reste de l'intersection, par une surface du 4^e ordre, est une

$$C_8(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4^2,\ A_5^2,\ A_6^3),$$

ces deux courbes se coupant en 15 points. Il en résulte que la C_{13} cherchée résidu d'une C_7 appartenant à une famille unique sera unique. Les caractères seront donnés par les formules [1]

$$p=\frac{1}{2}(n^2-7n+48)+(n-12)\pi+9p_n-2\overline{p_1},$$

$$t=\frac{1}{6}(n^3-9n^2+26n-78)-(n-8)\pi-4p_n+\overline{p_1},$$

n étant le degré de la surface, π le genre des sections planes, $\overline{p_1}=p_1-6$ le genre linéaire diminué du nombre des courbes exceptionnelles. Ici,

$$n=8, \qquad \pi=8, \qquad p_n=1, \qquad \overline{p_1}=1-6=-5,$$

d'où

$$p=15, \qquad t=2.$$

---

(1) *Cf.* Enriques-Campedelli, *Op. cit.* p. 8.

La courbe du 13^e ordre est de genre 15 et possède deux points triples, comme nous l'avons noté plus haut, elle appartient à une famille unique.

Mais il pourrait se produire que la courbe double vienne à se décomposer en des courbes de multiplicité supérieure. S'il y a cubique triple et quartique double, les quadriques passant par la cubique, découperont un réseau de courbes de genre 2, et la surface ne serait pas générale. Si la surface possédait une conique triple, elle posséderait, en conséquence, une conique, donc une courbe rationnelle et ne dépendrait pas de 19 modules. Si enfin la surface possède une droite triple, il y aura un faisceau de courbes elliptiques et la surface ne sera pas générale.

Il n'y a donc qu'une seule famille de surfaces de genres 1, à sections de genre 8, possédant un S^4 hexasécant, représentable par une surface du 8^e ordre, avec courbe d'ordre 13, genre 15 à deux points triples.

Si l'on considère maintenant une telle Φ_8, avec C_{13} double, une autre surface Φ'_8 passant par la même C_{13} possède encore les six droites gauches puisque celles-ci sont pentasécantes, et ont, avec la Φ'_8, 15 points communs. Φ_8 et Φ'_8 se coupent selon une courbe d'ordre

$$8 \times 8 - 4 \times 13 - 6 = 6.$$

Cette courbe est de genre 6. Les surfaces Φ_8, passant par la C_{13}, sont donc ∞^2.

Supposons maintenant que la F_{14} de S^8, possède un S^4 heptasécant. La projection se fera par une Φ_7, dotée d'une courbe double d'ordre

$$5 \times 3 - 8 = 7.$$

Cette courbe doit se trouver sur une seule surface cubique. Sur cette surface, il devrait y avoir sept droites, images de sept points de projections, droites rencontrant la courbe en un nombre x de points tels que

$$3 \times 14 - 2 \times 7 - 7x = 0, \qquad x = 4.$$

La courbe est donc au plus de genre 7, puisqu'elle peut se projeter sur une sextique à point triple. On doit avoir une C_{21} $(6\,A^7)$ décomposée en une seule courbe double et sept droites. Ceci conduit à la C_7 double de genre 3, représentable par

$$C_7(A_1^2,\ A_2^2,\ A_3^2,\ A_4,\ A_5).$$

Les surfaces d'ordre 7, passant par une telle courbe double ne peuvent exister puisque la cubique ne pouvant avoir sept droites gauches, notre Φ_7 n'aurait pas sept droites gauches, images des sept points de projection. Il n'existe donc pas de surfaces générales, à sections possédant des S^4, heptasécants.

Il n'y a donc qu'une seule surface de genres 1 de S^8, la F_{14} projetable selon la Φ_8 définie précédemment.

Passons maintenant aux trois surfaces rationnelles. Supposons que, sur la surface F_{14}, il existe un faisceau de sextiques elliptiques. Elles appartiendront à un S^5, si l'on impose un point triple, le S^4 hexasécant la sextique et T déterminent un S^5 qui se projette sur un point sextuple. Le résidu des sextiques est formé d'un système ∞^2, de courbes du 8^e ordre de genre 2. Si l'on impose le point triple-base pour les deux systèmes, on aura deux cas possibles. Notons avant tout ce que ces courbes se coupent en six points, puisque

$$1+2+6-1=8.$$

Premier cas. — Le faisceau possède le point double. On aura donc une surface du 8^e ordre avec point sextuple par lequel passe un faisceau de sextiques rationnelles, et un réseau de courbes du 8^e ordre de genre 2. C'est le cas C comme on le voit sur la représentation, en prenant six points-bases sur une droite Δ, issue de A, d'où

$$C_{10}(A^4, 7B^3, C^2, 3D, 6E) \quad (\text{A et E sur } \Delta;\ \text{A, B, C, D sur } \Gamma_3).$$

Le point multiple est représenté par

$$\Gamma_3+\Delta.$$

Deux courbes y passant, ont en commun un autre point F, dernier point de la g_{18}^{17} découpée par les C_6 sur Γ_3. Ce sont les

$$C_6(A^2, 7B^2, C, F)$$

se rencontrant en

$$6\times 6-2\times 2-7\times 2\times 2-1-1=2 \text{ points.}$$

On a bien un point sextuple. La courbe double est, avant réduction, une

$$C_{40}(A^{16}, 7B^{12}, C^8, 3D^4, 6E^5),$$

qui se ramène, par réduction, à une

$$C_{32}(A^{12}, 7B^{10}, C^6, 3D^2, 6E^3)$$

possédant avec le point multiple

$$4 \times 32 - 24 - 70 - 6 - 6 - 18 = 4 \text{ points.}$$

Le point sextuple est donc quadruple pour la courbe double.

Deuxième cas. — Supposons, au contraire, que le point triple soit double pour le réseau. On aura un faisceau de sextiques elliptiques et un réseau de courbes elliptiques du 8^e ordre. Considérons, en effet, le cas B. Prenons une cubique Γ'_3 passant par les cinq points-bases triples A et les trois points doubles B_1, B_2, B_3, choisissons un sextuple de points D, intersection de cette Γ'_3 avec une C_9, nous obtiendrons la surface

$$C_9(5A^3, B_1^2, B_2^2, B_3^2, B_4^2, B_5^2, 2C, 6D) \quad (A, B, C \text{ sur } \Gamma_3;\ A_1, B_1, B_2, B_3, D \text{ sur } \Gamma'_3).$$

Le point multiple se représente par

$$C_6(5A^2, B_1^2, B_2^2, B_3^2, B_4, B_5, 2C, 6D).$$

Deux courbes y passant sont des $C_3(5A, B_4, B_5)$ se coupant en

$$3 \times 3 - 5 - 1 - 1 = 2 \text{ points.}$$

Le point multiple est donc bien sextuple.

La courbe double se représente par une

$$C_{27}(5A^9, B_1^5, B_2^5, B_3^5, B_4^7, B_5^7, 2C^3, 6D^3).$$

Elle rencontre le point multiple en quatre points. La courbe double du 13^e ordre possède encore un point quadruple, au point sextuple de la surface.

Cas A. — Supposons maintenant qu'il existe des quintiques elliptiques situées dans un S^4. En prenant un S^3 pentasécant, la quintique et un autre point, nous pourrons projeter, sur la surface du 8^e ordre, qui possèdera ainsi un point quintuple.

Considérons, en effet, la surface

$$C_8(A^3, 10B^2, C).$$

Les courbes passant au point triple peuvent se décomposer en une droite Δ (A) et un système ∞^1, de quartiques passant par A et les B.

Si l'on prend cinq points-bases D sur Δ et un autre point-base E quelconque, on obtient le système

$$C_8(A^3, 10B^2, C, 5D, E)$$

avec le point multiple

$$\Delta + \Gamma_3 = C_4(A^2, 10B, C, 5D).$$

Une courbe y passant est une $C_4(A, 10B, E, F)$, F étant le 12^e point de la g_{12}^{11} coupée sur Γ_3. Deux telles courbes se coupent en $16 - 13 = 3$ points extérieurs au point multiple, qui est bien un point quintuple.

La courbe double se réduit à une $C_{24}(A^8, 10B^6, C^2, 5D^3, E^5)$ rencontrant le point multiple en

$$24 \times 4 - 16 - 60 - 2 - 15 = 3 \text{ points.}$$

Le point quintuple de la surface est un point triple de la courbe double du 13^e ordre.

A ces surfaces rationnelles, on peut, par projection du point triple et d'autres points simples, rattacher les surfaces suivantes :

$$\begin{array}{lll} \alpha. & C_5(A^2, 13B, 2C) & \multirow{2}{*}{} \\ \beta. & C_6(5A^2, 8B, 2C) & \end{array} \Bigg\} \ (\text{A et B sur } \Gamma_3),$$

$$\gamma. \quad C_7(A^3, 7B^2, 4C, 2D) \quad (\text{A, B, C sur } \Gamma_3).$$

Ce sont trois surfaces d'ordre 6. Les sections passant par le point multiple se représentent par

α.	$C_2(A, 2C)$;
β.	$C_3(5A, 2C)$,
γ.	$C_4(A^2, 7B, 2D)$.

Ces courbes sont de genre

α.	$p = 0$,	genre abaissé de	5;
β.	$p = 1$,	»	4,
γ.	$p = 2$,	»	3.

Les degrés de ces réseaux de sections sont

α.	$2 \times 2 - 1 - 2$	$= 1$,
β.	$3 \times 3 - 3 - 2$	$= 2$,
γ.	$4 \times 4 - 4 - 7 - 2$	$= 3$.

Le point multiple est un point multiple elliptique, qui abaisse degré et genre des mêmes quantités, 5 pour α, 4 pour β, 3 pour γ.

Les surfaces étant d'ordre 6, les sections de genre 5, ces surfaces ont une quintique double, par laquelle ne peut passer de quadrique, passant aussi au point multiple. La courbe appartient aux cubiques adjointes qui rencontrent, en outre, les Φ_6, selon les adjointes aux sections planes c'est-à-dire les courbes

α.	$C_2(A)$,
β.	$C_3(5A)$,
γ.	$C_4(A^2, 7B)$.

La courbe double se représente donc par

α.	$C_{10}(A^4, 6B^2, 2C^3)$,
β.	$C_{12}(5A^4, 8B^2, 2C^3)$,
γ.	$C_{14}(A^6, 7B^4, 4C^2, 2D^3)$.

Remarquons que ces courbes ne passent pas au point multiple. Elles rencontrent, de plus, les adjointes aux sections en

α.	$2 \times 10 - 4 = 16$ points;
β.	$3 \times 12 - 20 = 16$ » ;
γ.	$4 \times 14 - 12 - 28 = 16$ » .

Mais, sur la représentation de la courbe double, on a la section par la quadrique passant par les deux droites, représentées par les deux points-bases, non situés sur la cubique fondamentale. La courbe double se représente donc sur la représentation stéréographique de la quadrique, par une $C_5(A^3, B^2)$ quintique de genre 2, résidu de l'intersection d'une quadrique et d'une cubique ayant une droite commune. Sur la cubique, elle sera donc représentée par une

$$C_5(A_1^4, A_2^4, A_3^2, A_4^2, A_5^2, A_6^2)$$

et le résidu de l'intersection par une Φ_6 pour laquelle elle est double est une

$$C_8(A_1^4, A_2^4, A_3^2, A_4^2, A_5^2, A_6^2)$$

de genre 5, rencontrant la courbe double en

$$5 \times 8 - 2 \times 4 - 4 \times 4 = 16 \text{ points.}$$

Le point multiple abaisse le genre de la courbe indiquée, et l'on retrouve bien, pour les adjointes, les genres 0 pour α, 1 pour β, 2 pour γ. Notons, de plus, que le point multiple n'appartient pas à la courbe double.

En résumé, les surfaces obtenues sont des surfaces du 6^e ordre avec courbe double du 5^o ordre de genre 2, possédant une singularité elliptique extérieure à la courbe double qui est :

α. un point diminuant degré et genre de 5,
β. un point diminuant degré et genre de 4,
γ. un point triple.

En résumé, il n'y a qu'une seule surface dont tous les genres sont 1, F_{14} de S^8, et l'on peut lui imposer un point triple de trois manières distinctes.

7. **Les surfaces avec** $\pi > 8$. — Dans le cas $\pi = 9$, nous obtenons six surfaces rationnelles dont les représentations sont données par

$$\left.\begin{array}{l} C_8\ (12A^2) \\ C_9\ (A^4,\ B^3,\ 10C^2) \\ C_9\ (4A^3,\ 7B^2,\ C) \\ C_{10}(9A^3,\ 3B) \\ C_{10}(A^4,\ 6B^3,\ 3C^2,\ 2D) \\ C_{12}(7A^4,\ B^3,\ C^2,\ 3D) \end{array}\right\}\ \text{(les 12 points-bases sur une } \Gamma_3 \text{ fondamentale).}$$

L'on voit immédiatement que la première de ces surfaces a pour sections planes les sections quadriques de la surface générale du 4^e ordre Une telle surface peut donc se représenter par le système ∞^9 des sections de la F_4 par les quadriques. Cette propriété n'appartient pas aux autres types de représentations.

Considérons alors la F_{16} de S^9, à sections hyperplanes courbes canoniques de S^8. Une telle courbe possède des S^5 heptasécants en général. On peut donc projeter sur une surface du 9^e ordre, dotée d'une courbe double d'ordre 19. D'après les formules précédentes, les caractères de cette courbe sont

$$p = 27, \qquad t = 7.$$

Sur la surface adjointe du 5^e ordre, cette courbe est le résidu de la section par une surface du 6^e ordre ayant en commun une courbe du 11^e ordre. Cette courbe du 11^e ordre est de genre 13, comme on le voit, en appliquant les résultats de Nœther (1), sur l'intersection de deux surfaces. Nœther a, en effet, montré que la série canonique, sur

(1) *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (vol. III, v, p. 532); Nœther, *Math. Ann.*, 1874.

la courbe intersection de deux surfaces d'ordre m_1 et m_2 est coupée par les « adjointes » d'ordre $m_1 + m_2 - 4$. De cette propriété, on peut déduire que si l'intersection est décomposée en deux courbes d'ordre n et n', se coupant en i points, l'une d'elles, dotée de t points triples, doubles pour chacune des surfaces, les genres p et p' sont liés par la relation

$$2p' - 2 = (m_1 + m_2 - 4)(n' - n) + 4t + 2p - 2,$$

d'où, avec

$$m_1 = 5, \quad m_2 = 6, \quad n' = 11, \quad n = 19, \quad t = 7; \quad p = 27,$$
$$p' = 13.$$

La C_{11} appartient au moins à deux surfaces du 4^e ordre, car

$$34 - (4 \times 11 + 1) + 13 = 2.$$

Leur intersection a pour résidu une quintique elliptique. Il en résulte que les C_{19} considérées appartiennent à une seule famille. Les surfaces F_{16} projetées selon de telles Φ_9 à C_{19} double appartiennent donc à une seule famille. Cherchons de combien de modules dépend une telle surface. Les C_5^1 dépendent de 20 paramètres, les surfaces du 4^e ordre y passant sont ∞^{14}, donc les C_{11}^{13} sont $\infty^{20+26-15} = \infty^{31}$. Par une telle C_{11}^{13} passent une surface du 5^e ordre et ∞^9 surfaces du 6^e ordre. Nos C_{19}^{27} dépendent donc de 42 paramètres, ce qui est le nombre des surfaces du 9^e ordre y passant deux fois (il n'y a par une telle courbe qu'une seule Φ_9) projectivement distinctes. Mais, sur la F_{16}, le choix d'un espace 9-sécant dépend de 8 paramètres, donc le nombre des modules de notre surface est

$$42 - 8 - 15 = 19.$$

La surface est générale, et il n'y a qu'une seule famille générale F_{16} de S^9, se projetant d'un espace 9-sécant sur une Φ_9 à courbe double du 19^e ordre de genre 27, dotée de sept points triples, doubles pour la surface. La surface F_{16}, identique aux sections quadriques de la F_4 de S_3, n'appartient pas à ce type, car un espace S^5, contenant sept points, en contient forcément un huitième, cette surface se projettera donc sur une Φ_8 de S^3, dotée d'une courbe double d'ordre 12. Les formules rappelées précédemment nous donnent

$$p = 15, \quad t = 0.$$

Les courbes du 12^e ordre sont donc de genre 15 sans points triples. Une telle surface dépend évidemment de 19 modules d'après sa construction.

Nous avons donc, dans le cas $\pi = 9$, deux surfaces distinctes, l'une « double » de la F_4, l'autre à sections générales, représentables sur la Φ_9 décrite.

Passons au cas $\pi = 10$. Nous obtenons la représentation suivante :

$$\left.\begin{array}{l} C_9\,(3A^3,\ 9B^2) \\ C_{10}(A^4,\ 5B^3,\ 5C^2,\ D) \\ C_{10}(8A^3,\ 2B^2,\ 2C) \\ C_{11}(A^5,\ 8A^3,\ C^2,\ 2D) \\ C_{12}(7A^4,\ 3B^2,\ 2C) \\ C_{12}(6A^4,\ 3B^3,\ 3C) \\ C_{15}(8A^5,\ B^2,\ 3C) \end{array}\right\} \text{(les points-bases sur une } \Gamma_3\text{)}.$$

Sur la F_{18} de S^{10}, les sections sont des courbes canoniques de S^9. Elles possèdent des S^6, 9-sécants, donc la surface peut se projeter sur une Φ_9, dotée d'une courbe double d'ordre 18, de caractères

$$p = 28, \qquad t = 4.$$

Cette courbe appartient à une surface du 5^e ordre et à une du 6^e ordre dont le résidu est une courbe du 12^e ordre, de caractère

$$p = 15.$$

On peut montrer qu'une telle courbe appartient à une famille unique, donc que notre Φ_9 appartient à une famille unique, mais la vérification de la valeur des modules devient particulièrement laborieuse. Ceci suggère la recherche d'une autre méthode, dont l'application méthodique fera l'objet du second chapitre, mais dont je vais donner un aperçu.

Supposons faire naître, sur nos surfaces, un point double extérieur au point triple, en projetant, de ce point double, on obtient une surface dont le degré est abaissé de 2, et dont les sections ont un genre abaissé d'une unité. Ce sont alors, si l'on suppose le point triple enlevé, des surfaces dépendant de 18 modules dotées d'une conique. Si ces surfaces dotées de 18 modules n'appartiennent pas à un même type de surfaces à 19 modules, la famille commune à ces surfaces dépendra, au plus, de 16 modules. Si, au contraire, les deux surfaces à 18 modules sont nées d'une même surface générale leur sous-famille commune sera à 17 modules.

Par exemple, parmi les deux surfaces rationnelles à sections de genre 10, prenons les deux surfaces représentables par

$$C_9\,(3A^3,\ 9B^2),$$
$$C_{10}(A^4,\ 5B^3,\ 5C^2,\ D).$$

Imposons à la première le point double en prenant les trois points A en ligne droite, après projection nous aurons la surface

$$C_8(3A^2, 9B^2) \quad \text{(les A en ligne droite)}.$$

Pour la seconde, prenons A_1, B_1, B_2 en ligne droite, par projection on aura

$$C_9(A^3, B_3^3, B_4^3, B'^3_5, B_1^2, B_2^2, 5C^2, D) \quad (A,\ B_1,\ B_2 \text{ en ligne droite}).$$

Si l'on suppose « retiré » le point triple, nos deux surfaces à 18 modules sont distinctes. Mais si nous ajoutons un nouveau point double, en faisant sur la première représentation tendre deux points a être infiniment voisins, sur la seconde trois points en ligne droite. On obtient une unique surface représentée par

$$C_8(A^3, 10B^2, D).$$

Il y a donc une famille commune à 17 modules. Il n'y a qu'une surface à 19 modules dont nos deux surfaces à points triples sont issues.

Nous allons donner les représentations des surfaces rationnelles que l'on peut obtenir pour

$$N = 2\pi - 2 \leqq 30,$$

les points-bases sont évidemment sur la cubique Γ_3, nous indiquerons aussi le genre ϖ des secondes adjointes :

$$\begin{matrix} N = 20 \\ p = 11 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} C_{10}(A^4, 4B^3, 7C^2), & \varpi = 2; \\ C_{10}(7A^3, 4B^2, C), & \varpi = 3; \\ C_{11}(A^5, 7B^3, 3C^2, D), & \varpi = 3; \\ C_{11}(2A^4, 7B^3, C^2, 2D), & \varpi = 4; \\ C_{12}(6A^4, 2B^3, 2C^2, 2D) & \varpi = 4; \\ C_{13}(A^6, 7B^4, C^3, 3D) & \varpi = 5. \end{array} \right.$$

$$\begin{matrix} N = 22 \\ \pi = 12 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} C_{10}(6A^3, 6B^2), & \varpi = 3; \\ C_{11}(A^5, 6B^3, 5C^2), & \varpi = 3; \\ C_{11}(2A^4, 6B^3, 3C^2, D), & \varpi = 4; \\ C_{11}(A^4, 9B^3, 2C), & \varpi = 5; \\ C_{12}(A^6, 9B^3, C^2, D), & \varpi = 4; \\ C_{12}(6A^4, B^3, 4C^2, D), & \varpi = 4; \\ C_{12}(5A^4, 4B^3, C^2, 2D) & \varpi = 5; \\ C_{13}(A^6, 7B^4, 2C^2, 2D), & \varpi = 5; \\ C_{13}(9A^4, 3B), & \varpi = 6; \\ C_{15}(7A^5, B^4, C^3, 3D), & \varpi = 6. \end{array} \right.$$

$$
\begin{array}{l}
N = 24 \\
\pi = 13
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
C_{11}(2A^4, 5B^3, 5C^2), & \varpi = 4; \\
C_{11}(A^4, 8B^3, 2C^3, D), & \varpi = 5; \\
C_{12}(A^6, 8B^3, 3C^2), & \varpi = 4; \\
C_{12}(6A^4, 6B^2), & \varpi = 4; \\
C_{12}(5A^4, 3B^3, 3C^2, D) & \varpi = 5; \\
C_{12}(4A^4, 6B^3, 2C), & \varpi = 6; \\
C_{13}(A^5, 6B^4, 2C^3, D^2, 2E) & \varpi = 6; \\
C_{15}(7A^5, B^4, 2C^2, 2D) & \varpi = 6; \\
C_{16}(6A^5, 3B^4, 3C), & \varpi = 7; \\
C_{18}(8A^6, B^3, 3C), & \varpi = 7.
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{l}
N = 26 \\
\pi = 14
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
C_{11}(A^4, 7B^3, 4C^2), & \varpi = 5; \\
C_{11}(10A^3, B^2, C), & \varpi = 6; \\
C_{12}(A^5, B^4, 8C^3, D^2, E), & \varpi = 6; \\
C_{12}(5A^4, 2B^3, 5C^2), & \varpi = 5; \\
C_{12}(4A^4, 5B^3, 2C^2, D), & \varpi = 6; \\
C_{13}(A^7, 10B^3, C^2), & \varpi = 5; \\
C_{13}(A^5, 6B^4, C^3, 3D^2, E), & \varpi = 6; \\
C_{13}(A^5, 5B^4, 4C^3, 2D), & \varpi = 7; \\
C_{13}(8A^4, B^3, C^2, 2D), & \varpi = 7; \\
C_{14}(A^6, 8B^4, C^2, 2D), & \varpi = 7; \\
C_{15}(7A^5, 2B^3, C^2, 2D), & \varpi = 7; \\
C_{16}(A^6, 7B^5, C^4, 3D), & \varpi = 8; \\
C_{18}(8A^6, 2B^2, 2C), & \varpi = 7.
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{l}
N = 28 \\
p = 15
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
C_{11}(9A^3, 3B^2), & \varpi = 6; \\
C_{12}(A^5, B^4, 7C^3, 3D^2); & \varpi = 6; \\
C_{12}(A^6, 10B^3, C), & \varpi = 7; \\
C_{12}(4A^4, 4B^3, 4C^2), & \varpi = 6; \\
C_{12}(3A^4, 7B^3, C^2, D), & \varpi = 7; \\
C_{13}(A^5, 6B^4, 5C^2), & \varpi = 6; \\
C_{13}(A^5, 5B^4, 3C^3, 2D^2, E), & \varpi = 7; \\
C_{13}(8A^4, 3B^2, C), & \varpi = 7; \\
C_{13}(7A^4, 3B^3, 2C), & \varpi = 8; \\
C_{14}(A^6, 7B^4, 2C^3, 2D), & \varpi = 8; \\
C_{14}(2A^5, 7B^4, C^2, 2D), & \varpi = 8; \\
C_{15}(7A^5, B^4, 3C^2, D), & \varpi = 7; \\
C_{15}(6A^5, 2B^4, C^3, D^2, 2E), & \varpi = 8; \\
C_{16}(9A^5, 3B), & \varpi = 9.
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{l}
N = 30 \\
p = 16
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
C_{12}(A^5,\ 9B^3,\ 2C^2), & \varpi = 7; \\
C_{12}(3A^4,\ 6B^3,\ 3C^2), & \varpi = 7; \\
C_{12}(2A^4,\ 9B^3,\ C), & \varpi = 8; \\
C_{13}(A^5,\ 5B^4,\ 2C^3,\ 4D^2), & \varpi = 7; \\
C_{13}(A^5,\ 4B^4,\ 5C^3,\ D^2,\ E), & \varpi = 8; \\
C_{13}(7A^4,\ 2B^3,\ 2C^2,\ D), & \varpi = 8; \\
C_{14}(A^6,\ 7B^4,\ C^3,\ 2D^2,\ E), & \varpi = 8; \\
C_{14}(2A^5,\ 6B^4,\ 2C^3,\ 2D), & \varpi = 9; \\
C_{15}(7A^5,\ 5B^2), & \varpi = 7; \\
C_{15}(6A^5,\ 2B^4,\ 3C^2,\ D), & \varpi = 8; \\
C_{15}(6A^5,\ B^4,\ 3C^3,\ 2D), & \varpi = 9; \\
C_{15}(5A^5,\ 4B^4,\ C^2,\ 2D), & \varpi = 9; \\
C_{15}(A^7,\ 9B^4,\ 2C), & \varpi = 9; \\
C_{16}(A^6,\ 7B^5,\ C^3,\ D^2,\ 2E), & \varpi = 9; \\
C_{18}(6A^6,\ 8B^6,\ 3C), & \varpi = 10; \\
C_{21}(8A^7,\ B^4,\ 3C), & \pi = 10.
\end{array}
\right.
$$

CHAPITRE II.

LA MÉTHODE DU POINT DOUBLE. LES PLANS MULTIPLES.

Dans le dernier paragraphe du précédent chapitre, nous avons observé que dans le cas $\pi = 9$ il existait deux surfaces distinctes dont tous les genres sont 1, mais si l'on considère les surfaces rationnelles dotées de points triples, en leur imposant des points doubles ultérieurs, on obtenait, par projection, à partir de ces points, des sous-familles communes.

Nous allons maintenant raisonner sur les surfaces dépourvues de points triples, et voir les conclusions que l'on peut tirer de l'imposition de points doubles.

A. — Le point double.

1. Projection d'une $F_{2\pi-2}$ de S^{π}, à partir d'un point double. — Considérons, dans S^{π}, une surface $F_{2\pi-2}$ dont tous les genres sont 1. Imposons à cette surface de posséder un point double. Projetons de ce point double la $F_{2\pi-2}$ sur un $S^{\pi-1}$. Deux cas seront alors possibles :

a. les courbes de la $F_{2\pi-2}$, passant par le point double, possédent une g_2^1,

b. les courbes de la $F_{2\pi-2}$, passant au point double, sont générales.

Dans le cas *a*, notre surface $F_{2\pi-2}$, va se projeter selon une surface, double à sections rationnelles, qui sera une $F_{2\pi-2}$ de $S^{\pi-1}$ à sections rationnelles. Mais, d'après le théorème de del Pezzo (¹), ces surfaces sont des réglées rationnelles, et pour le cas $\pi = 6$, la surface de Véronèse. Dans le cas *b*, la projection de la $F_{2\pi-2}$ de S^{π} sera une $F_{2\pi-4}$, dont tous les genres sont 1, dotée d'une conique.

Je vais d'abord montrer que, hors le cas du plan double et de la surface de Véronèse double, la surface rationnelle double ne peut

(¹) *Cf.* del Pezzo, *R. C. R. Accad. di Napoli*, 1885.

représenter une surface générale à 19 modules. En effet, sur une telle surface rationnelle, il existe un faisceau de droites qui, regardées comme courbes doubles, représente un faisceau de courbes elliptiques. Je vais montrer qu'une surface dont tous les genres sont 1, possédant un faisceau de courbes elliptiques, dépend au plus de 18 modules.

LEMME. — *Sur une surface $F_{2\pi-2}$ de S^π dont tous les genres sont* 1, *le genre de la section par une hypersurface d'ordre n, est*

$$\Pi_n = (\pi-1)n^2+1.$$

Vérifions la formule pour $n = 2$, on a

$$\Pi_2 = \pi+\pi+2\pi-2-1 = 2^2(\pi-1)+1.$$

Admettons alors la formule vraie pour $n-1$,

$$\Pi_{n-1} = (\pi-1)(n-1)^2+1.$$

La section, par une hypersurface d'ordre n, peut se décomposer en une section par une hypersurface d'ordre $n-1$, et par un hyperplan dont la section coupe la variété d'ordre $(n-1)$ en $(n-1)(2\pi-2)$ points, d'où, pour l'ensemble,

$$\Pi_n = (\pi-1)(n-1)^2+1+\pi+(n-1)(2\pi-2)-1,$$
$$\Pi_n = [(n-1)^2+2(n-1)+1](\pi-1)+1 = n^2(\pi-1)+1.$$

Considérons alors sur notre surface, une courbe Γ, appartenant à un faisceau de courbes elliptiques. Faisons passer par cette courbe Γ, une hypersurface Σ_m, d'ordre m assez élevé, cette Σ_m coupe la $F_{2\pi-2}$ en dehors de Γ, selon une courbe C. Soit ν, l'ordre de la courbe Γ. Considérant les sections par une Σ_m, générale, nous aurons, pour leurs intersections avec Γ,

$$(C+\Gamma, \Gamma) = m\nu = (C, \Gamma)+(\Gamma, \Gamma).$$

Mais le faisceau des courbes Γ est elliptique, donc

$$(\Gamma, \Gamma) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad (C, \Gamma) = m\nu.$$

Les courbes décomposées possèdent donc $m\nu$ points doubles. Le genre de C est x, tel que

$$x+1+m\nu-1 = m^2(\pi-1)+1,$$
$$x = m^2(\pi-1)-m\nu+1.$$

Mais les sections par Σ_m sont, si r est le nombre de $F_{2\pi-2}$ de S^π,

$$\infty^{m^2(\pi-1)+1+r}.$$

Les courbes de cette famille possèdant $m\nu$ points doubles sont

$$\infty^{m^2(\pi-1)+1+r-m\nu}.$$

Mais les courbes décomposées se répartissent sur ∞^ρ surfaces, elles sont donc

$$\infty^{\rho+\tau+1},$$

d'où

$$m^2(\pi-1)+1+r-m\nu=\rho+m^2(\pi-1)-m\nu+1+1,$$

$$r=\rho+1.$$

Mais, si ω est le nombre des homographies de S^π, on a

$$r=19+\omega, \qquad \text{d'où} \qquad \rho=18+\omega.$$

Les surfaces $F_{2\pi-2}$, possédant un faisceau de courbes elliptiques, sans autre singularité, dépendent de 18 modules.

On peut donner, de ce fait, une autre démonstration, basée sur la représentation plane, de la surface rationnelle double. En effet, les surfaces de del Pezzo doivent se représenter dans le plan par les systèmes ∞^r ($r \geq 2$) de courbes rationnelles, lesquelles se ramènent [1] :

1° au système ∞^2 des droites;

2° au système ∞^5 des coniques;

3° au système des courbes d'ordre n, avec un point-base $(n-1)$ple O :

a. sans points-bases;

b. avec un autre point-base;

c. avec $i \leq n-1$, points-bases infiniment voisins à O en directions distinctes.

La courbe de diramation d'un tel plan doit être du 6e ordre, et possède, au moins, un point double en O (et aux autres points-bases). Le nombre des modules de ce plan double est donc au plus 18.

En effet, prenons par exemple le cas 3-*a*. La représentation plane d'une telle surface est

$$C_\alpha(O^{\alpha-1}).$$

On a alors

$$(\pi-1)=\alpha^2-(\alpha-1)^2=2\alpha-1, \qquad \pi=2\alpha.$$

---

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (vol. III, v, p. 194).

La courbe de diramation doit être une $C_\nu(O^\mu)$. Elle doit, d'après la formule de Zeuthen [1], couper la C_α en δ points, tels que

$$\delta - 4 = 2\pi - 2 = 4\alpha - 2, \qquad \delta = 4\alpha + 2,$$

d'où

$$\nu\alpha - \mu(\alpha - 1) = 4\alpha + 2,$$

$$\nu - \mu = 4, \qquad \mu = 2, \qquad \text{d'où} \qquad C_6(O^2).$$

On procèderait de même pour les cas 2° et 3°.

Si l'on impose donc à une telle surface de posséder une conique, qui se représentera par une courbe bisécante les C_α et tangente à la sextique en chacun de ses points de rencontre, on aura encore diminution de 1 sur le nombre des modules. On ne peut donc, par projection d'une $F_{2\pi-2}$ générale à partir d'un point double, obtenir une surface double, si ce n'est le plan double ou la surface de Véronèse double.

Montrons maintenant que toute surface $F_{2\pi-4}$, de $S^{\pi-1}$, dotée d'une conique est la projection d'une $F_{2\pi-2}$ de S^π, dotée d'un point double; pour cela, il suffit de montrer que l'imposition d'une conique à une telle surface ne donne jamais lieu qu'à une condition.

Pour cela, considérons une surface $F_{2\pi-4}$ de $S^{\pi-1}$ dotée d'une conique; les sections hyperplanes passant par la conique sont $\infty^{\pi-4}$; donc leur genre est $\pi - 4$, elles rencontrent donc la conique en un nombre de points x, tel que

$$x + (\pi - 4) + 0 - 1 = \pi - 1, \qquad x = 4.$$

Or, les sections hyperplanes de $F_{2\pi-4}$ sont des courbes en nombre

$$\infty^{19+\omega+\pi-1}.$$

Celles décomposées en une conique, et une autre courbe sont

$$\infty^{19+\omega+\pi-1-4}$$

et elles se répartissent sur $\infty^{\pi+\omega}$, surfaces contenant une conique; donc

$$r + \omega + \pi - 4 = 19 + \omega + \pi - 1 - 4, \qquad r = 18.$$

En conclusion :

En dehors du plan double et de la surface de Véronèse double, il n'y a pas de surfaces dont tous les genres sont 1, *dépendant de* 19 *modules et qui se représentent par une surface double.*

---

(1) *Cf.* ZEUTHEN, *Math. Annalen*, 1871.

Une surface générale donne, par imposition d'un point double, une surface dépendant de 18 modules. Si on la projette simplement de son point double, la surface projetée sera, nécessairement, une surface de même type dotée d'une conique; exceptionnellement pour $\pi = 3$, on aura, par projection, un plan double, et pour $\pi = 6$, la surface de Véronèse double (cas de du Val).

2. **Les transformations d'une $F_{2\pi-2}$ de S^π, en F_4 de S^3, par l'imposition de points doubles.** — Considérons une surface $F_{2\pi-2}$ de S^3, et supposons qu'il soit possible de lui imposer quatre points doubles. Soient O_1, O_2, O_3, O_4 ces quatre points doubles. Considérons une section hyperplane de S^π passant ν_i fois au point O_i. Le point O_i peut être regardé comme une courbe de genre 0, et d'ordre -2. En conséquence, les courbes passant ν_i fois aux O_i, forment un système linéaire ∞^x de courbes d'ordre $2x-2$ et de genre x,

$$x = \pi - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2 - \nu_4^2.$$

Nous avons, en effet,

$$(C + \nu_i O_i,\ C + \nu_i O_i) = 2x - 2,$$
$$(C + \nu_i O_i,\ C + \nu_i O_i) = (C, C) + 2\nu_i(C, O_i) + \nu_i^2(O_i, O_i),$$

mais,

$$(C, O_i) = 0, \qquad (O_i, O_i) = -2,$$

d'où

$$2x - 2 = 2\pi - 2 - 2\nu_i^2,$$

d'où, pour les quatre points doubles,

$$x = \pi - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2 - \nu_4^2.$$

Mais, d'après le théorème de Bachet-Legendre [1], étant donné un nombre entier quelconque α, on peut trouver quatre nombres entiers ν_i, tels que

$$\sum_1^4 \nu_i^2 = \alpha.$$

Si l'on prend alors $\alpha = \pi - 3$, on va trouver

$$x = 3, \qquad 2n - 2 = 4.$$

On peut donc, à partir de toute surface $F_{2\pi-2}$ de S^π, en imposant au plus quatre points doubles, obtenir sur la surface, un système

(1) *Cf.* Enriques-Campedelli, *Op. cit.* p. 8.

linéaire ∞^3 de courbes de genre 3 et ordre 4. Si nous rapportons birationnellement ce système ∞^3, à un système de courbes planes de l'espace ordinaire S^3, nous pourrons rapporter notre $F_{2\pi-2}$ à une surface de S^3, qui peut être, soit une F_4, dotée de quatre courbes rationnelles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, d'ordre $2\nu_1, 2\nu_2, 2\nu_3, 2\nu_4$, images des quatre points O_i, ou une quadrique double avec courbe de diramation du 8^e^ ordre, cette courbe de diramation ne coupant pas quatre courbes rationnelles, images des points O_i; car, en effet, notre surface transformée dépend de 15 modules au moins, et s'il n'y a qu'une F^4 de S^3 dotée de 19 modules, il existe une quadrique double dotée de 17 modules.

Pour nous rendre compte du cas que l'on peut obtenir, étudions géométriquement la transformation envisagée. Soit la $F_{2\pi-2}$, dotée des quatre points doubles O_i. Considérons une section hyperplane passant ν_1 fois en O_1, ceci revient à projeter cette courbe ν_1 fois de O_1, en effet, la projection à partir de O_1 donne une $F_{2\pi-4}$, à sections de genre $\pi-1$, dotée d'une conique. Cette conique rencontre, en quatre points, les courbes résidues des sections hyperplanes contenant la conique. Si l'on projette alors la $F_{2\pi-4}$, à partir de la conique, on aura, dans $S^{\pi-4}$, une surface d'ordre $2(\pi-4)-2$ de genre $\pi-4$, dotée d'une courbe rationnelle du 4^e^ ordre. Les résidus des sections hyperplanes passant par le S^4, contenant la courbe rationnelle du 4^e^ ordre, sont en nombre

$$(\pi-4)-5=\pi-9$$

rencontrant la C_4 en x points tels que

$$\pi-9+x+0-1=\pi-4, \quad x=6.$$

Si l'on projette à nouveau de la C_4, on obtiendra, dans $S^{\pi-9}$, une surface $F_{2(\pi-9)-2}$ à sections de genre $\pi-9$, et dotée d'une sextique rationnelle. Cette opération poursuivie ν_1 fois, nous fait passer de la $F_{2\pi-2}$ à une $F_{2(\pi-\nu_1^2)-2}$ dont les sections représentent le système des sections hyperplanes de la $F_{2\pi-2}$ passant ν_1 fois au point double considéré. Pour arriver au système ∞^3 de F_4, il faut donc faire cette suite de projection, consécutivement à partir de chaque point double. Pour simplifier, je supposerai que le point O_1 est celui correspondant à la valeur la plus élevée de ν_i, et ainsi de suite, c'est-à-dire

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \geqq \nu_4,$$

et que je projette d'abord ν_1 fois de O_1, puis ν_2 fois de O_2, ν_3 fois de O_3 et enfin ν_4 fois de O_4. L'opération ne conduira donc à une F_4 de S^3, que si, dans la suite de nos projections, l'on n'a pas rencontré une surface rationnelle double. Ce cas peut, évidemment, se produire, un premier exemple nous en est donné par la surface de M. du Val. Indiquons-en rapidement un autre exemple. Considérons la F_{16} de S^9, image des sections quadriques de F_4. Nous avons

$$9 = 3 + 4 + 1 + 1.$$

Considérons la projection à partir de O_1 compté deux fois. Notre surface est identique aux sections quadriques de F_4 dotée d'un point double ω. Les courbes passant deux fois par O_1 sont identiques aux sections quadriques de la F_4, passant deux fois par ω, c'est-à-dire aux sections de la surface F_4, par les cônes quadriques de sommet ω. Ces sections sont des courbes sur lesquelles les génératrices des cônes découpent des g^1_2. Le système ∞^5 de ces courbes est équivalent au système ∞^5 des coniques d'un plan double possédant une sextique de diramation 6-tangente à une conique, c'est-à-dire à une surface de Véronèse double, dotée d'une quartique rationnelle. Si donc nous projetons notre surface deux fois de O_1, nous obtiendrons une surface de Véronèse double, et notre projection à partir de O_2 et O_3 ne pourra pas se prolonger jusqu'à une F_4, mais à une quadrique double.

Remarquons que, dans le cas où l'on a

$$\pi \neq 3 + n^2,$$

on arrivera certainement à une F_4, puisque la quadrique double dépend au plus de 17 modules, ce que l'on voit immédiatement en notant que la courbe de diramation du 8e ordre dépend de 32 paramètres. Elle donnée, la quadrique unique qui y passe est déterminée, et la quadrique double dépend donc de $32 - 15 = 17$ modules.

3. **Les courbes rationnelles d'ordre 2ν, sur la F_4.** — Considérons, dans l'espace ordinaire, une surface du 4e ordre F_4, et supposons que cette surface possède une courbe $\Gamma_{2\nu}$, d'ordre 2ν, rationnelle. Une telle courbe appartient certainement à une surface F_ν, d'ordre ν, en effet, les F_ν dépendent de

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{6} - 1 \text{ paramètres.}$$

La postulation de la courbe $\Gamma_{2\nu}$ par rapport à cette surface F_ν. est donnée par

$$2\nu \times \nu + 1 = 2\nu^2 + 1$$

Il doit donc passer par la $\Gamma_{2\nu}$, une infinité de F_ν d'ordre

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)-6-12\nu^2-6}{6}=\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{6}.$$

Pour toute valeur de ν entier positif, supérieur à 3, ce nombre sera positif, le cas $\nu = 1$ correspond à une conique qui appartient certainement à un plan, le cas $\nu = 2$ correspond à une quartique rationnelle, qui appartient certainement à une quadrique, enfin, le cas $\nu = 3$ donne une sextique qui appartient à une cubique, comme on le voit sur la représentation de cette surface, où une telle sextique se représente par

$$C_6(A_1^4, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5^2).$$

Considérons alors une section de la F_4, par une surface F_ν d'ordre ν, passant par la $\Gamma_{2\nu}$, l'intersection résiduelle sera une courbe $C_{2\nu}$, dont le genre sera p'.

Mais l'on sait [1] que si deux surfaces d'ordre m_1 et m_2 se coupent selon une courbe décomposée en deux courbes C_n et $C_{n'}$, de genres p et p', on a, entre leurs caractères, la relation

$$2(p'-p)=(n'-n)(m_1+m_2-4).$$

Dans notre cas, l'on a

$$n=n'=2\nu,\qquad p=0,\qquad \text{d'où}\qquad p'=p=0.$$

L'intersection est composée de deux courbes rationnelles.

Remarque. — On pourrait se demander s'il existe réellement une telle surface F_ν non décomposée en la F_4 et une $F_{\nu-4}$. Cette objection se lève aussitôt, le nombre des F_ν non décomposées étant égal à

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{6}-\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{6}=2\nu^2+1.$$

Il y a donc bien une seule telle surface, ce qui est en accord avec le fait que l'intersection résiduelle est encore de genre 0.

Les courbes $\Gamma_{2\nu}$ appartiennent donc aux intersections de la F_4 par une $F_\nu(2\nu^2+1)$ fois tangente. Ces intersections appartenant à un système continu de courbes, il n'existe, sur la F_4, qu'une seule espèce de courbes $\Gamma_{2\nu}$, rationnelles, donc :

---

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (t. III, v, p. 532).

THÉORÈME. — *Les courbes rationnelles $\Gamma_{2\nu}$, appartenant à une F_4, ne forment pour une valeur donnée de ν qu'un seul système continu.*

Ceci peut encore s'exprimer ainsi :

THÉORÈME. — *Il existe une seule famille de F_4, dotée de 18 modules qui possèdent une $\Gamma_{2\nu}$ rationnelle.*

4. **Les surfaces multiples d'une surface donnée.** — Considérons, dans l'espace S^3, la F_4 générale dépendant de 19 modules. Considérons aussi le système ∞^9, des quadriques de S^3 elles découpent sur la F^4, un système ∞^9, de courbes d'ordre 16 et de genre 9. Posons alors

$$X_1 = \varphi_1(x, y, z, t), \qquad X_2 = \varphi_2(x, y, z, t), \qquad \ldots, \qquad X_{10} = \varphi_{10}(x, y, z, t).$$

les φ_i représentant dix formes quadratiques dont neuf sont linéairement indépendantes, l'ensemble des dix équations

$$X_i = \varphi_i(x, y, z, t)$$

joint à l'équation de la surface

$$F_4(x, y, z, t) = 0$$

représente une surface F_{16} de S^9, dont tous les genres sont 1, et que l'on peut, pour simplifier le langage, dire surface « double » de la F_4.

Si l'on considère de la même manière le système coupé par les surfaces Φ_n d'ordre n, de S^3, on peut, par une transformation analogue, obtenir dans l'espace S^{2n^2+1} une surface d'ordre $4n^2$, dont tous les genres sont 1, et que nous pourrons, de la même façon, appeler la « surface multiple de F_4 selon n ».

La même opération peut se réaliser sur une surface $F_{2\pi-2}$ de S^π, dont tous les genres sont 1. Aux systèmes qui y découpent les hypersurfaces de S^π, on peut faire correspondre une surface dont tous les genres sont 1, d'ordre $(2\pi - 2)n^2$, de l'espace $S^{(\pi-1)n^2+1}$, qui seront dites pour simplifier, les multiples selon n, de $F_{2\pi-2}$.

Remarquons que, pour un S^ϖ donné, de la forme

$$\varpi = (\pi - 1)n^2 + 1,$$

ces surfaces multiples ne sont pas les seules que l'on peut obtenir. En effet, dans la rationalisation par l'imposition d'un point triple, la propriété pour les sections hyperplanes d'être le multiple d'une section d'une surface correspondant à la valeur π, reste exceptionnelle. Le système donné au chapitre précédent, paragraphe I, a, en effet, pour chaque valeur de ϖ, des points-bases simples, caractère qui ne saurait convenir à la représentation du multiple selon n, d'une surface déjà rencontrée.

Nœther a démontré que sur la surface générale du 4^e ordre, il ne peut exister de courbes qui ne soient pas intersections complètes de la F_4 par une surface de S^3. Il en résulte immédiatement que, si une surface générale de S^π possède une famille linéaire ∞^3 de courbes de genre 3, cette surface peut se transformer birationnellement en la F_4 de S^3, les sections hyperplanes de la surface de S^π devront, puisque la F_4 transformée possède 19 modules et est générale, se transformer en intersections complètes de la F_4, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$\pi = 2n^2 + 1$$

ou encore : si une surface générale dont tous les genres sont 1 possède un système linéaire ∞^3 de courbes de genre 3, cette surface est nécessairement un multiple de la F_4 de S^3.

Montrons que cette propriété est générale, c'est-à-dire :

Théorème. — *Si une surface dont tous les genres sont* 1, *générale dépendant de* 19 *modules dans l'espace* S^π, *possède un système linéaire, de courbes de genre* $\alpha \geqq 3$ (*α minimum*), *la surface de* S^π *est équivalente à un multiple d'une surface* $F_{2\alpha-2}$ *de* S^α.

En effet, l'on peut, par une transformation birationnelle, faire correspondre, au système ∞^α des courbes de $F_{2\pi-2}$ de genre minimum, les sections hyperplanes d'une $F_{2\alpha-2}$, de S^α, qui sera donc dotée de 19 modules. Il nous faut donc démontrer que, sur une telle surface générale, dont les sections hyperplanes découpent le système de courbes de genre minimum, il n'existe pas d'autres courbes que les intersections complètes par les hypersurfaces de S^α. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'il existe une courbe Γ_ν d'ordre ν qui ne soit pas une section complète. Soit β son genre. Par cette courbe, on peut faire passer une hypersurface F d'ordre n assez élevé pour que les conditions imposées soient indépendantes. Les hypersurfaces F découpent un système de courbes $(C + \Gamma)$ et l'on a

$$\begin{aligned}(C+\Gamma, \Gamma) &= n\nu,\\ (C+\Gamma, \Gamma) &= (C, \Gamma) + 2\beta - 2,\\ (C, \Gamma) &= n\nu + 2 - 2\beta.\end{aligned}$$

Les courbes C ont donc un genre x tel que

$$\begin{aligned}x + \beta + n\nu + 2 - 2\beta - 1 &= n^2(\alpha - 1) + 1,\\ x &= n^2(\alpha - 1) + \beta - n\nu.\end{aligned}$$

Les courbes de la forme $(C + \Gamma)$ appartiennent à un système continu

$$\infty^{19+\omega+n^2(\alpha-1)+1};$$

ω représentant le nombre des homographies de S^α. Celles décomposées possèdent (C, Γ) points doubles et sont donc

$$\infty^{19+\omega+n^2(\alpha-1)+1-n\nu-2+2\beta}.$$

Elles doivent se répartir sur $\infty^{r+\omega}$ surfaces telles que

$$r+\omega+x+\beta = 19+\omega+n^2(\alpha-1)-n\nu-1+2\beta,$$

ou

$$r+\omega+n^2(\alpha-1)+2\beta-n\nu = (19-1)+\omega+n^2(\alpha-1)+2\beta-n\nu,$$
$$r = 18.$$

Les surfaces en question ne peuvent donc dépendre que de 18 modules alors que nous les avions supposées générales.

Nous pouvons donc, dans la suite, éliminer les surfaces générales de S^π, possédant un système linéaire $\infty^\alpha (\alpha < \pi)$ car elles sont multiples de la S^α. Nous ne nous occuperons donc que des surfaces « simples », c'est-à-dire non multiples d'une surface d'ordre minimum.

Remarque I. — Pour certaines valeurs de π, de la forme

$$\pi = n^2(\alpha-1)+1 = m^2(\beta-1)+1,$$

il peut exister plusieurs surfaces multiples.

Remarque II. — Nous avons limité l'introduction des surfaces multiples au cas où le genre minimum α est $\alpha \geqq 3$, en effet, le cas $\alpha = 2$, qui mène aux multiples du plan double à sextique de diramation est aberrant. Le double de ce plan double donne bien naissance à la surface de Véronèse double, qui rentre dans le type des surfaces étudiées. Mais le triple du plan double formé du système des cubiques du plan ne rentre déjà plus dans notre cas, on a

$$N = 2(3 \times 3) = 18,$$

d'après la formule de Zeuthen,

$$2\pi - 2 = 2(2 \times 1 - 2) + 18 = 18 = N,$$

mais cette surface se représente non plus dans un S^{10}, mais dans un S^9, le système des cubiques du plan n'étant que ∞^9.

5. **Les surfaces « simples »**. — Considérons une surface de S^π, avec $\pi = n^2 + 3$ et supposons que cette surface ne soit pas le « multiple » d'une surface d'ordre moindre. Je vais montrer que, dans de telles conditions, il n'existe qu'une famille générale de surfaces dépendant de 19 modules.

Supposons qu'il existe deux telles familles de surfaces dépendant de 19 modules. Considérons une surface possédant un point double. Par projection de ce point double, nous n'obtenons que la F_4 dotée d'une Γ_{2n} rationnelle. Or, les surfaces du 4^e ordre possédant une telle courbe forment une seule famille continue dépendant de 18 modules. S'il existe donc deux familles à 19 modules $\{F_{2\pi-2}\}$ et $\{F'_{2\pi-2}\}$, ces deux familles ont en commun une sous-famille dépendant de 18 modules.

Mais, si nous considérons toutes les surfaces d'ordre $2\pi - 2$ de S^3 (auxquelles on peut toujours se ramener par projection de points extérieurs), chacune d'elles est un point d'un espace linéaire à

$$N + 1 = \frac{(2\pi - 1)(2\pi)(2\pi + 1)}{6} \text{ dimensions.}$$

Nos deux familles de surfaces $\{F\}$ et $\{F'\}$ se représentent par des variétés, de dimensions $19 + \omega$ (ω désignant le nombre des transformations birationnelles de ces surfaces). Soient V et V′ ces deux variétés représentatives. Ces deux variétés sont engendrées à partir de deux variétés à 19 dimensions, par les opérations d'un groupe G_ω continu.

Les surfaces dotées d'un point double se représentent par une variété $\mathcal{V}$ à $(N - 1)$ dimensions. Elle coupe V et V′ selon des variétés à $18 + \omega$ dimensions qui doivent représenter les surfaces dont tous les genres sont 1, dotées d'un point double. Or, cette variété est unique. Donc V et V′ ont en commun une variété v, à $18 + \omega$ dimensions.

Considérons alors une variété

$$W = V + \lambda V'.$$

Cette variété à $18 + \omega$ dimensions, va couper $\mathcal{V}$ selon v, il en résulte que l'intersection de W avec $\mathcal{V}$ représente les surfaces dont tous les genres sont 1, dotées d'un point double. La variété W doit donc représenter des surfaces qui, dotées d'un point double, sont des surfaces dont tous les genres sont 1, à point double. Donc, les variétés W représentent des surfaces dont tous les genres sont 1. Il y a donc une infinité de familles de surfaces dont tous les genres sont 1, qui se représentent par les points d'une variété dépendant de $20 + \omega$ paramètres. Il résulte donc de l'hypothèse qu'il y a deux familles distinctes dépendant de 19 modules, que nos surfaces dépendent de 20 modules, ce que l'on sait impossible.

Remarque. — On peut raisonner autrement, en considérant les deux espaces V_{19} et V'_{19} images des deux familles $\{F\}$ et $\{F'\}$. Ayant en commun un sous-espace $\mathcal{V}_{18}$, ils doivent appartenir à un $\mathcal{V}_{20}$. Mais rien ne nous indique quelle est la nature des surfaces représentées par ce $\mathcal{V}_{20}$. Nous savons seulement que ces surfaces contiennent, pour cas particulier, les surfaces dont tous les genres sont 1. Si cette variété réprésentait les surfaces dont tous les genres sont 1, ces surfaces ne dépendraient pas de 19 modules, mais de 20, ce qui est impossible. Donc la $\mathcal{V}_{20}$ représente des surfaces dont le bigenre est au moins égal à 2, avec une courbe canonique d'ordre non nul. Mais, pour obtenir par particularisation d'une telle surface une surface dont tous les genres sont 1, il faut imposer à la surface une singularité qui n'impose qu'une condition. Mais la seule singularité qui n'impose qu'une condition est le point double, qui est sans influence sur les adjointes donc sur les genres successifs. Il est donc absurde de supposer qu'il existe deux surfaces distinctes $\{F\}$ et $\{F'\}$ dépendant toutes deux de 19 modules.

Supposons maintenant que l'on impose à notre surface de posséder une conique. Il peut y avoir une ou plusieurs familles distinctes de surfaces dotées de cette conique, mais ces familles dépendent de 18 modules. Si donc il existe plusieurs familles distinctes de surfaces possédant une conique, on peut les représenter par différentes variétés à 18 dimensions appartenant à une variété à 19 dimensions. Il en résulte que ces variétés à 18 dimensions contiennent des familles communes à 17 dimensions, intersections de deux de ces variétés à 18 dimensions. Les surfaces dotées de deux coniques sont donc :

a. ou des surfaces possédant deux coniques de même type,
b. ou des surfaces possédant deux coniques de types distincts.

Mais si l'on impose en même temps le point double, on obtiendra une F_4 dotée d'une courbe d'ordre $2n$ et de deux coniques. Comme il n'y a qu'une telle surface F_4, les familles à 17 modules des $F_{2\pi-2}$ dotées de deux coniques ou forment une seule famille, ou certaines d'entre elles sont équivalentes à des surfaces rationnelles doubles.

Ayant ainsi considéré les surfaces $F_{2\pi-2}$ avec $\pi = n^2 + 3$, considérons dans $S^{\pi+2}$, les surfaces dont tous les genres sont 1, d'ordre $2\pi + 2$.

Imposons alors à une telle $F_{2\pi+2}$ un point double. Il peut se produire deux possibilités :

a. Les $F_{2\pi+2}$ dotées d'un point double forment une seule famille dépendant de 18 modules. Dans ce cas, le même raisonnement que celui fait pour les $F_{2\pi-2}$ montre qu'il n'y a qu'une seule famille de surfaces dépendant de 19 modules.

b. Les $F_{2\pi+2}$ dotées d'un point double forment plusieurs familles dépendant de 18 modules. Considérons alors les familles dotées de deux points doubles, elles sont équivalentes aux surfaces $F_{2\pi-2}$ dotées de deux coniques, il en résulte qu'il existe une seule famille à 17 modules, qui ne soit pas équivalente à une surface double rationnelle. Mais les autres familles possibles sont équivalentes à des surfaces rationnelles doubles, et possèdent donc des courbes de genre inférieur à $(\pi + 2)$. Ces surfaces ne peuvent donc pas provenir d'une surface « simple », mais bien d'une surface multiple d'une $F_{2\alpha-2}$ avec $\alpha < \pi$. Comme il n'y a qu'une famille à 17 modules qui n'appartienne pas à ce type, nos surfaces distinctes à 18 modules devront (si elles ne proviennent pas d'une surface multiple) provenir d'une seule surface à 19 modules.

Les deux cas nous conduisent donc à la même conclusion. Il n'existe qu'une seule surface générale simple de l'espace $S^{\pi+2}$.

Si, maintenant, nous prenons une surface simple $F_{2\pi-2}$ avec $\pi = n^2 + 5$, nous savons qu'elle appartient à une famille unique. Si on lui impose un point double, nous aurons une surface dépendant de 18 modules, qui est équivalente soit à la F_8 de S^5 dotée d'une courbe rationnelle d'ordre $2n$, soit à la surface de Véronèse double dotée d'une telle courbe rationnelle. On peut montrer que, dans le premier cas, sur la F_8 intersection de trois hyperquadriques de S^5, il n'existe qu'une seule famille contenant une courbe rationnelle d'ordre $2n$. Au contraire, la surface de Véronèse double correspond à un point double d'une nature particulière, la surface possédant des courbes de genre inférieur à π, nous avons là des cas analogues au cas de du Val, pour la F_{10} de S^6.

Nous avons donc montré que, si pour $\pi = n^2 + 3$, il existe une seule surface simple dépendant de 19 modules, il en est de même pour $\pi + 2$. Un raisonnement analogue appliqué aux surfaces avec $\pi + 4$, $F_{2(\pi+4)-2}$ de $S^{\pi+4}$, nous conduira à introduire ces surfaces dotées de points doubles, si la sous-famille dotée d'un seul point double est unique, il n'y a évidemment qu'une $F_{2\pi+6}$, si l'on a deux telles sous-familles, en introduisant un point double de plus, on verra, sur la F_8 de S^6, qu'il n'y a qu'un seul type à 17 modules, donc on arrivera à la même conclusion. En définitive, on peut passer par le même raisonnement de $(\pi + 2)$ à $\pi + 4$, puis à $\pi + 6, \ldots, \pi + 2n$. Si, au départ, on fait $\pi = 3 + 1^2$ nous atteindrons toutes les valeurs paires de π. Si, au contraire, on part de $\pi = 3 + 2^2 = 7$ nous obtiendrons toutes les valeurs impaires de π, sauf $\pi = 5$, qui, par l'étude directe, nous savons ne posséder qu'une famille simple générale, donc, en conséquence :

THÉORÈME. — *Pour toute valeur de π, il n'existe jamais qu'une seule surface générale simple, dotée de* 19 *modules.*

Note sur l'imposition d'une conique à une surface. — L'imposition d'une conique à une surface « multiple » d'un ordre de multiplicité supérieure à 2, est impossible. En effet, une telle conique devrait se représenter sur la surface, par une courbe bisécante des sections hyperplanes. Mais, si l'on considère la $F_{2\pi-2}$, comme « multiple selon n » d'une $F_{2\alpha-2}$, une telle courbe devra biséquer les sections de la $F_{2\alpha-2}$ par les hypersurfaces générales d'ordre n, ce qui n'est pas possible si $n > 2$, car toute courbe d'ordre ν rencontre cette hypersurface en $n\nu$ points.

Si donc on écrit les équations permettant l'imposition de la conique, les conditions imposeront à la $F_{2\pi-2}$ de perdre son caractère de multiplicité, et de retomber sur les surfaces du type général simple.

Cette impossibilité illustre bien l'unicité de la famille des surfaces simples, car l'on pourrait avoir l'idée de construire une nouvelle série de surfaces à partir d'une surface multiple dotée d'une conique qui serait la projection à partir d'un point double, d'une surface de l'espace immédiatement supérieure.

Remarque I. — Parmi les surfaces de notre famille simple de surfaces générales, considérons le cas $\pi = n^2 + 2$. Comme il n'y a qu'une seule surface simple, celle-ci par projection n fois d'un point double doit donner naissance à un plan double à sextique de diramation, doté d'une courbe rationnelle d'ordre $2n$. Il en résulte que les plans doubles à sextique de diramation, possédant une courbe rationnelle d'ordre $2n$, et tangente à la sextique de diramation, en chaque point où elle la rencontre, dépendent de 18 modules et forment une seule famille continue.

On peut obtenir directement ce résultat. Supposons donc un plan double satisfaisant aux conditions indiquées. Supposons que la C_{2n} ne possède que des points doubles, elle en aura $(n-1)(2n-1)$. Il doit donc y avoir 12 points d'intersection avec la courbe de diramation, se répartissant en $6n$ points de tangence. Mais les C_{2n} rationnelles possédant $(n-1)(2n-1)$ points doubles sont

$$N = (2n+1)(n+1) - (n-1)(2n-1) - 1 = 6n - 1.$$

Si donc il existe une telle courbe rationnelle, le plan double sera bien à 18 modules. Ceci montre que si le plan double dépend bien de 18 modules, c'est que la C_{2n} doit posséder des points doubles. Les C_{2n} appartiennent donc à une famille continue unique [1], ce qui montre que l'imposition d'une telle courbe rationnelle ne donne lieu qu'à une seule famille de plans doubles dépendant de 18 modules.

Remarque II. — Si l'on considère maintenant une $F_{2\pi-2}$, avec $\pi = n^2+4$, par projection d'un point double n fois, on doit obtenir une F_6 de S^4 dotée d'une C_{2n} rationnelle. Ces C_{2n} appartiennent à une seule famille, donnée par les intersections par les hypersurfaces d'ordre n, tangentes $2n^2+2$ fois. Les courbes résidues d'ordre 4ν forment encore une seule famille, de courbes de genre ν^2, comme on le vérifie sur la formule

$$3\nu^2 + 1 = 0 + 2\nu^2 + 2 + \nu^2 - 1.$$

Remarque III. — Si l'on considère maintenant une $F_{2\pi-2}$ de S^π simple, l'imposition d'un point double doit conduire à une seule famille à 18 modules, sauf dans le cas où $\pi = n^2+5$, car, dans ce cas, cette famille à 18 modules est équivalente ou à la F_8 de S^5 dotée d'une courbe rationnelle d'ordre $2n$, ou à la surface de Véronèse double dotée d'une telle courbe. Ce cas n'est évidemment pas possible pour les autres valeurs de π, car les surfaces rationnelles doubles auxquelles on pourrait aboutir ne sont pas dotées de 18 modules, une surface de del Pezzo double, non dotée de courbes rationnelles, dépendant au plus de 18 modules.

On en conclut donc :

En général, il existe un seul type de surfaces simples dotées d'un point double, c'est-à-dire que la propriété pour une surface générale simple de posséder un point double est, pour les valeurs générales de π, une propriété irréductible. Au contraire, pour $\pi = n^2+5$, cette propriété est réductible.

---

[1] *Cf.* ENRIQUES-CHISINI, *Op. cit.*, p. 15 (t. III, v, p. 376).

Nous allons retrouver, dans la suite, ce point double que l'on peut qualifier de général, par opposition, au point double « accidentel » du type de du Val.

B. — Les plans multiples.

1. Rappel de quelques notions. — On appelle plan multiple d'ordre n, ou plan n-ple, une surface algébrique F, représentable au moyen de l'équation

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

de degré n en z.

Mais la fonction algébrique à n valeurs

$$z = z(x, y), \tag{2}$$

définie par l'équation (1), admet dans le plan une certaine ligne de diramation,

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{3}$$

Mais toute courbe plane algébrique ne saurait être courbe de diramation pour un plan n-ple, dès que $n > 2$.

Le problème de construire des courbes de diramation de plans n-ples a donné lieu à de nombreuses recherches [1] qui, avant les travaux de M. Chisini, ne permettaient pas de donner une réponse pratique. M. Enriques avait seulement indiqué certaines conditions d'invariance auxquelles devaient satisfaire les courbes de diramation, mais ces conditions présentaient une forme topologique qui les rendait peu utilisables. M. Chisini [2], par représentation d'une courbe plane par un faisceau de courbes réelles, a permis de donner aux conditions d'Enriques une forme plus accessible, permettant de pénétrer plus avant dans la connaissance des plans n ples.

---

[1] F. Enriques, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione* (*Annali di Matematica*, 4e série, vol. I, 1923-1924); O. Zariski, *On the problem of Existence of Algebric Functions of two variables possessing a given Branch Curve* (*American Journal of Mathematics*, vol. LI, 1929); B. Segre, *Sulla caratterisazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali* (*Memorie dell'Accademia d'Italia*, A. 1, n. 4, 1931).

[2] O. Chisini, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane* (*R. C. R. Ist. Lombardo di Sc. e. Let.*, vol. LXVI, fasc. 16-18, 1933, XII, p. 1141) et *Forme canoniche per il fascio caratteristico rappresentativo di una curva algebrica piana* (*R. C. R. Is. Lombardo di Sc. e. Let.*, vol. LXX, fasc. 1, 1937, XV, p. 49).

M. Chisini en a déduit une construction pour les courbes de diramation d'un plan n-ple, qu'il expose ainsi (1) :

Prenons successivement dans le plan (x, y), $(n-1)$ courbes C_1, C_2, ..., C_{n-1}; soit P un point commun à deux courbes C successives, et Q un point commun à deux courbes C non consécutives. Chaque courbe C sera comptée deux fois, c'est-à-dire est tenue pour une courbe double, chaque C^2 ayant pour points de diramation les points où elle rencontre la courbe précédente et la courbe suivante (en outre, d'autres points de diramation qui importent peu). Soit $\overline{\varphi}$ la courbe composée par les C simples, $\overline{\varphi}^2$ celle formée des C doubles, avec les points de diramation indiqués.

On donne alors à la φ^2, une variation infiniment petite, qui conserve l'équivalence des singularités P et Q (au point de vue du nombre des intersections avec les polaires); c'est-à-dire qu'aux points Q correspondront quatre points doubles et aux points P correspondront trois cuspides et une diramation (2).

De plus, à la courbe C_i, nous adjoindrons les échanges $(i, i+1)$ sur les déterminations

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_i, \quad z_{i+1}, \quad \ldots, \quad z_{n-1}, \quad z_n$$

de la fonction $z(x, y)$.

M. Chisini a montré que ce modèle permettait de construire tous les plans multiples représentatifs d'une surface de S^3, sans points multiples, ni courbes multiples; il construisait aussi le plan multiple représentatif d'une surface de S^3, ne possédant d'autres singularités qu'un point multiple isolé, le plan multiple étant la projection de la surface à partir du point multiple. Dans la même note, M. Chisini exprimait l'espoir que sa méthode puisse se généraliser à toutes les surfaces. Dans une telle représentation, la F_4 de S^3 donnait lieu à un plan quadruple dont la courbe de diramation pouvait se représenter par le schéma suivant :

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} - \underset{(3,4)}{C_3}.$$

(1) *Cf.* O. Chisini, *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, I (*R. C. R. Accad. d. Lincei*, 6e série, vol. XIX, 1er sem. 1934, XII, p. 688); *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, II (*R. C. R. Accad. d. Lincei*, 6e série, vol. XIX, 1934, XII, p. 766); *Sulla curva di diramazione dei piani multipli* (*R. C. R. Accad. d. Lincei*, 6e série, vol. XXIII, 1er sem. 1936, XIV, p. 21).

(2) *Cf.* O. Chisini, *Sulla riducibilità dell equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia* (*R. C. R. Accad. d. Lincei*, 20 mai 1917, p. 548).

Dans un travail récent (¹) j'ai été amené à montrer que la vue de M. Chisini était trop optimiste. J'ai été amené à tenir le type de M. Chisini pour un type simplifié, auquel j'ai donné le nom de « type à feuillets successifs », mettant en évidence le fait que, dans la construction de Chisini, chaque courbe C_i est tenue pour consécutive à la C_{i-1}, pour le caractère de ses intersections. J'ai pu montrer qu'entre les surfaces indiquées par M. Chisini, le type à feuillets successifs permettait de représenter les sections d'une hyperquadrique de S^4, sans singularités ou dotées d'un ou de deux points multiples isolés; on peut aussi représenter, par un tel type, les surfaces réglées rationnelles de del Pezzo.

Comme exemple de surfaces que l'on peut ainsi représenter, est la surface de S^4 dont tous les genres sont 1, section d'une quadrique de S^4 par une variété cubique. Le schéma de la courbe de diramation sera

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} - \underset{(3,4)}{C_3} - \underset{(4,5)}{C_2} - \underset{(5,6)}{C_1}.$$

Mais, pour d'autres surfaces dont la plus simple est la surface de Véronèse, j'ai été conduit à envisager un type plus complexe que celui de M. Chisini, que j'ai appelé « type à feuillets enchevêtrés ». Les démonstrations de M. Chisini montrant que les courbes de diramation construites par ces procédés, satisfont aux conditions de M. Enriques, sont encore valables, car la nature des feuillets envisagés n'y joue aucun rôle.

Notre type plus général sera défini ainsi :

Pour construire la courbe de diramation d'un plan multiple d'ordre n, représentatif d'une surface que je supposerai non développable, on prend $(n-1)$ courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, que l'on aura à considérer comme des courbes doubles. *A chaque point* de ces courbes nous attacherons un échange (a, b) entre deux déterminations z_a et z_b de la fonction $z(x, y)$, cet échange pouvant varier sur la courbe C_i, que l'on peut supposer reposer sur un plan double formé de deux feuillets, ou être fixée sur un feuillet. Nous appellerons point P l'intersection de deux courbes C_i et C_j, pour lesquelles les échanges (a_i, b_i) et (a_j, b_j) relatifs respectivement à C_i et à C_j, possèdent au point considéré une détermination commune, par exemple $a_i = a_j$; nous appellerons point Q l'intersection de deux courbes C_i et C_j pour lesquelles les

(¹) *Cf.* B. d'Orgeval, *Les plans multiples représentatifs d'une surface algébrique et la méthode de M. Chisini* (*Bull. Ac. R. de Belgique*, 1943, p. 215 et 653).

échanges respectifs au point Q portent sur quatre déterminations distinctes. On considérera, pour les courbes doubles C_i, les points P comme points de diramation (les autres diramations sont indifférentes). La courbe de diramation φ s'obtiendra par variation infiniment petite de la courbe

$$\bar{\varphi}^2 = C_1^2 C_2^2 \dots C_n^2,$$

en sorte que les points P soient limites de trois cuspides de φ et d'une diramation de φ, les points Q seront limites de quatre points doubles de φ. Au cas où les deux courbes C_i et C_j seraient tangentes en un point P, il ne sera que point de diramation simple pour C_i^2 et C_j^2, et ce point sera limite de six cuspides de la φ.

Comme exemple d'un tel type, donnons le schéma de la courbe de diramation de la surface de Véronèse

$$\begin{array}{ccc} \underset{(1,2)}{C_1} & — & \underset{(2,3)}{C_1} \\ & \diagdown\ \diagup & \\ & \underset{(2,4)}{C_1} & \end{array}$$

2. **Représentation des surfaces dont tous les genres sont 1.** — Rappelons (1) d'abord que sur une surface régulière de genres $p_a = p_g$ de genre linéaire virtuel $\bar{p}_1$, le plan multiple représentatif d'un réseau de courbes de degré n, et de genre π, possède une courbe de diramation d'ordre

$$N = 2n + 2\pi - 2$$

et de genre

$$\Pi = \bar{p}_1 + 9(\pi - 1)$$

dotée de d points doubles et de k cuspides,

$$d = 2[6p_a - 2\bar{p}_1 + (n + \pi)^2 - 17\pi - 5n + 24],$$
$$k = 3[\bar{p}_1 - 4p_a + 6\pi + n - 11)].$$

Pour une surface dont tous les genres sont 1, si nous prenons le plan multiple représentatif d'un réseau de sections hyperplanes, nous aurons

$$p_a = \bar{p}_1 = 1, \qquad n = 2\pi - 2,$$

d'où

$$N = 6(\pi - 1),$$
$$\Pi = 1 + 9(\pi - 1),$$
$$d = 6(\pi - 2)(3\pi - 7),$$
$$k = 24(\pi - 2).$$

(1) *Cf.* Enriques-Campedelli, *Op. cit.*, p. 8.

Supposons que la courbe de diramation puisse se représenter selon un type de Chisini (généralisé ou non); on pourra la décomposer en $(n - 1)$ courbes que l'on devra compter deux fois. Si je suppose, de plus, les courbes composantes sans points multiples, le nombre des intersections, tant en points P, qu'en points Q, devra être

$$I = \frac{k}{3} + \frac{d}{4} = \frac{(\pi - 2)(9\pi - 5)}{2}.$$

Montrons que ce nombre sera réalisé dans une décomposition comprenant :

a. une cubique C_3;
b. $(\pi - 2)$ coniques C_2;
c. $(\pi - 2)$ droites C_1.

Nous avons bien pour le degré de la courbe $\overline{\varphi}$,

$$3 + 2(\pi - 2) + \pi - 2 = 3(\pi - 1) = \frac{N}{2}.$$

Les intersections de ces courbes entre elles sont :

a. les intersections de la cubique et des coniques, soit $6(\pi - 2)$;
b. les intersections de la cubique et des droites, soit $3(\pi - 2)$;
c. les intersections des droites et des coniques, soit $2(\pi - 2)^2$;
d. les intersections des coniques entre elles, soit $2(\pi - 2)(\pi - 3)$;
e. les intersections des droites entre elles, soit $\frac{(\pi - 2)(\pi - 3)}{2}$,

au total, ces intersections sont en nombre

$$\frac{(\pi - 2)(9\pi - 5)}{2} = I.$$

Nous allons maintenant montrer que l'on peut obtenir une telle décomposition.

Considérons une $F_{2\pi-2}$ de S^{π}; prenons un point sur la surface et $(\pi - 4)$ autres points extérieurs. Notre surface va se projeter sur S^3 selon une surface d'ordre $2\pi - 3$, à sections de genre π, donc possédant une courbe double d'ordre

$$\frac{(2\pi - 4)(2\pi - 5)}{2} - \pi = 2\pi^2 - 10\pi + 10.$$

L'unique surface adjointe d'ordre $2\pi - 7$ rencontre la $F_{2\pi-3}$ selon la courbe double et une droite a, image du point A de la surface.

Sur cette surface la droite a rencontre la courbe double en $(2\pi - 6)$ points. En effet, le cône de sommets en A et autres points de projection, s'appuyant sur la surface d'ordre $2\pi - 7$, rencontre la surface $F_{2\pi-2}$ selon une courbe d'ordre

$$4\pi^2 - 20\pi + 20 + x,$$

x désignant la multiplicité du point A, c'est-à-dire le nombre de points où a rencontre la courbe double, c'est-à-dire

$$x = (2\pi - 2)(2\pi - 7) - (2\pi - 3)(2\pi - 7) + 1 = 2\pi - 6.$$

Si maintenant nous projetons la $F_{2\pi-3}$ sur un plan P, à partir d'un point B extérieur, le plan $(2\pi - 3)$-ple possèdera une courbe de diramation, projection de l'intersection de $F_{2\pi-3}$ par l'adjointe d'ordre $2\pi - 4$. Cette courbe de diramation sur la surface rencontre la droite a en

$$2\pi - 4 - (2\pi - 6) = 2 \text{ points.}$$

La projection de a, sur le plan P, sera donc bitangente à la courbe de diramation en deux points P_1 et P_2; elle rencontre la courbe de diramation en dehors de ces points P_i en j points Q_j avec

$$j = (2\pi - 3)(2\pi - 4) - (4\pi^2 - 20\pi + 20) - 4 = 6(\pi - 2).$$

Supposons maintenant que nous ayons projeté des $(\pi - 4)$ points non désignés et de B, sur le Σ^3, défini par A et le plan P. La surface $F_{2\pi-2}$ sera projetée selon une $F_{2\pi-2}$ de cet espace Σ^3. Projetons cette surface de A sur le plan P. Comme le montre immédiatement la méthode employée par M. Chisini dans sa note *Sulla curva di diramazione*, le plan $(2\pi - 2)$-ple représentatif de la $F_{2\pi-2}$ projetée à partir d'un point extérieur, va, lorsque l'on projette de A, se décomposer en un plan $(2\pi - 3)$-ple et un feuillet, image du point A. La courbe de diramation de la $F_{2\pi-2}$ se décompose abandonnant une droite double, le long de laquelle se raccorde le feuillet détaché. Mais, d'après le principe de la permutabilité des projections, la droite est la projection de la droite a, et la courbe de diramation, celle obtenue plus haut. Donc la courbe de diramation de la $F_{2\pi-2}$ peut s'obtenir à partir de celle de la $F_{2\pi-3}$ à laquelle on adjoint une droite double C_1, tangente en deux points P_1 et P_2, chacun limite de trois cuspides, et rencontrant la courbe de diramation en $6(\pi - 2)$ points qui seront limites de $12(\pi - 2)$ points doubles.

Nous voyons donc que projeter d'un point de la $F_{2\pi-2}$, permet de détacher un feuillet, lié aux $(2\pi - 3)$ autres feuillets par une droite double, sur laquelle existent deux points P, limites de trois cuspides;

en même temps doivent disparaître $12(\pi - 2)$ points doubles de la courbe de diramation.

Mais nous pouvons supposer que les $(\pi - 2)$ points de projection soient tous choisis sur la surface $F_{2\pi-2}$, nous obtiendrons, par ce procédé, la libération de $(\pi - 2)$ feuillets, et l'apparition dans la décomposition de la courbe de diramation de $(\pi - 2)$ droites doubles.

Mais un pareil procédé est-il toujours valable? pour que le procédé ne puisse s'appliquer, il faut que le $S^{\pi-3}$ formé par les $(\pi - 2)$ points rencontre forcément la surface en d'autres points que les $(\pi - 2)$ points choisis, ce qui ne se produit certainement pas pour les surfaces à sections générales.

Supposons maintenant que nous imposions à notre $F_{2\pi-2}$ de S^{π}, un point double; et que la projection de ce point double fasse naître une $F_{2\pi-4}$ dotée d'une conique. Soit A le point double; si l'on projette de A et de $(\pi - 2)$ autres points extérieurs, on obtiendra, dans S^3, une $F_{2\pi-4}$ qui, étant à sections de genre $(\pi - 1)$, possèdera une courbe double d'ordre

$$(\pi - 3)(2\pi - 5) - (\pi - 1) = 2\pi^2 - 12\pi + 16.$$

Mais la conique ne peut avoir, avec l'unique surface adjointe d'ordre $2\pi - 8$, d'autres intersections que celles qu'elle a avec la courbe double, c'est-à-dire

$$2 \times (2\pi - 8).$$

Elle rencontre la courbe de diramation coupée par la polaire d'ordre $2\pi - 5$ du point B en

$$2(2\pi - 5) - 2(2\pi - 8) = 6 \text{ points.}$$

Si donc on projette de B sur le plan P, on aura un plan $(2\pi - 4)$-ple avec une courbe de diramation 6-tangente à la conique.

Si maintenant nous projetons des $(\pi - 4)$ points non dénommés et de B, sur le Σ^3, défini par P et A (supposé ne pas être encore un point double), on peut, à partir d'un point voisin de A, obtenir un plan $(2\pi - 2)$-ple. Si l'on fait devenir A point double, comme centre de projection, il va se détacher deux feuillets, liés l'un à l'autre par une droite, et aux $(2\pi - 4)$ autres feuillets par une conique, qui, en raison de la permutabilité des projections, est la conique définie plus haut, 6-tangente à la courbe de diramation restante, en six points qui sont les limites de trois cuspides de la courbe de diramation initiale. Il disparaît en même temps, un nombre de points doubles, égal à deux fois le nombre des intersections résiduelles de la conique et de la courbe de diramation, c'est-à-dire

$$2 \times 2 \left\{ (2\pi - 4)2 + 2\pi - 4 - 6 \right\} = 24(\pi - 3).$$

Donc l'imposition d'un point double permet de détacher deux feuillets, se liant aux feuillets restants le long d'une droite double et d'une conique double. Nous avons donc le moyen de construire la courbe de diramation du plan multiple représentant la $F_{2\pi-2}$, connaissant celle du plan multiple représentant la $F_{2\pi-4}$. Par l'imposition de $(\pi - 2)$ points doubles, ou plus exactement par l'application répétée $(\pi - 2)$ fois du procédé indiqué, nous obtenons un plan double doté d'une sextique de diramation.

Le premier type de représentation, qui se présente à l'esprit, serait donc un type où les points doubles successifs joueraient un rôle symétrique, ce serait le type

$$C_3 \left\langle \begin{array}{ccc} \underset{(1,2,3)}{C_2} & - & \underset{(3,4)}{C_1} \\ \underset{(1,2,5)}{C_2} & - & \underset{(5,6)}{C_1} \\ \underset{(1,2,2\pi-3)}{C_2} & - & \underset{(2\pi-3,\,2\pi-2)}{C_1} \end{array} \right.$$

dans lequel les coniques C_2 seraient supposées disposées sur le plan double $(1, 2)$, en sorte que les intersections de deux coniques n'appartiennent pas au même feuillet ; c'est la disposition de la figure ci-dessous pour $\pi = 4$.

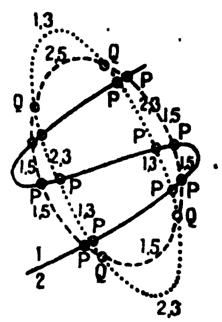

Fig. 1.

Mais une telle construction donne, dès que les valeurs de π s'élèvent, lieu à des discussions de nature topologique sur la possibilité de construire des coniques présentant les caractères réclamés.

On peut déjà s'affranchir de cette difficulté, en remplaçant la cubique double par une sextique double, à laquelle les coniques devront être

6-tangentes. Pourtant, cette méthode ne saurait convenir au-dessus de $\pi = 18$, car, en effet, une surface du 4^e ordre de S^3 ne peut contenir plus de 16 coniques, ce nombre étant atteint pour la surface de Kummer [1]. Jusqu'à cette valeur de π, nous sommes assurés de l'existence d'une sextique possédant 16 coniques tangentes vérifiant les conditions indiquées, puisque projections de 16 coniques gauches de la F_4.

Nous sommes donc conduit à utiliser des représentations qui ne conservent pas la symétrie des points doubles ; ce qui, d'ailleurs, ne doit pas surprendre, car la courbe de diramation d'une $F_{2\pi-2}$ n'est pas, construite à partir de celle d'une F_4 avec $(\pi - 3)$ coniques, mais à partir de celle d'une $F_{2\pi-4}$ dotée d'une conique.

La représentation proposée sera donc du type suivant :

$$\underset{1,2}{C_3} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_1}$$

$$\underset{3,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1}$$

$$\underset{5,7}{C_2} - \underset{7,8}{C_1}$$

$$\cdots$$

$$\underset{2\pi-7,\,2\pi-5}{C_2} \quad - \quad \underset{2\pi-5,\,2\pi-4}{C_1}$$

$$\underset{2\pi-5,\,2\pi-3}{C_2} \quad - \quad \underset{2\pi-3,\,2\pi-2}{C_1}$$

Mais, pour une telle représentation, la construction demande quelques explications. En effet, sur une courbe double de degré n, il ne peut pas y avoir plus de $2n^2$ points de diramation. Or, sur nos coniques, il y a, *a priori*, 12 points P, en lesquels on doit imposer à ces coniques des diramations. Nous devrons donc choisir, parmi les courbes constituantes, certaines, tangentes entre elles, en sorte qu'une courbe ne puisse posséder plus de $2n^2$ points de diramation. Appelons donc les coniques et les droites C_2^i et C_1^i, l'indice i indiquant que la conique C_2^i ou la droite C_1^i sont celles de la $i^{\text{ième}}$ ligne de notre schéma.

Prenons d'abord la C_3 tangente en trois points à la C_2^1. Nous choisissons une C_2^2 tangente à la C_1^2 et la C_1^1 tangente à la C_2^1 et à la C_2^2. Nous prendrons ensuite la C_2^3 tangente à la C_2^2, et la C_1^2 tangente à C_2^2 et C_2^3, et ainsi de suite. Les points P correspondants à des points de

---

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (vol. IV).

contact devront être retenus comme limites de six cuspides de la courbe infiniment peu variée. Ils ont, en effet, 18 intersections avec les polaires.

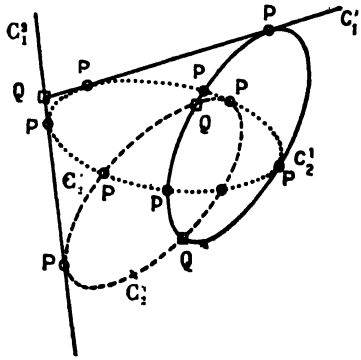

Fig. 2.

La méthode de M. Chisini appliquée à ce type permet de montrer qu'il donne bien naissance à une courbe de diramation d'une surface dont tous les genres sont 1.

3. **Résultats de cette étude.** — Dans le cas $\pi = 3$, nous trouvons la représentation de la F_4, déjà signalée

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_3}.$$

Si $\pi = 4$, nous pouvons obtenir deux types de représentation, qui sont

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_3} - \underset{4,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1}$$

$$\begin{array}{ccccc} \underset{1,2}{C_3} & - & \underset{2,3}{C_2} & - & \underset{3,4}{C_1} \\ & & & \diagdown\diagup & \\ & & & & \underset{3,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1} \end{array}$$

Ces deux types ne sauraient représenter des surfaces distinctes puisqu'il n'existe pas deux surfaces F_8 de S^4 distinctes. Nous en concluons donc que le transport du groupe $C_2 - C_1$ peut s'effectuer sur le plan multiple sans changer la nature de la surface, et produisant, sur les déterminations, les changements indiqués.

On pourrait, d'ailleurs, obtenir ce résultat en se reportant au plan complexe de la courbe de diramation, et y faisant des transformations analogues à celles utilisées pour ramener une droite multiple au type de Lüroth (¹). Mais cette démonstration extrêmement laborieuse ne sert de rien, puisque l'on sait, par ailleurs, que les deux types ne peuvent appartenir qu'à une seule surface.

Pour $\pi = 5$, nous pouvons avoir les représentations

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_3} - \underset{4,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1} \qquad \text{ou} \qquad \underset{1,2}{C_3} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_1}$$

$$\underset{5,7}{C_2} - \underset{7,8}{C_1} \qquad\qquad \underset{3,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1}$$

$$\underset{5,7}{C_2} - \underset{7,8}{C_1}$$

Le même transport du groupe $C_2 - C_1$ de la gauche à la droite est encore possible, ainsi qu'il apparaît de la démonstration directe de l'unicité d'une surface dont tous les genres sont 1, vérifiant $\pi = 5$ (en laissant, pour le moment de côté la surface de Véronèse double).

Pour le cas de $\pi = 6$, on a encore plusieurs cas possibles :

$$\underset{3,4}{C_1} - \underset{3,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_3} - \underset{6,7}{C_2} - \underset{7,8}{C_1} \qquad \underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_3} - \underset{4,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1}$$

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} \qquad \underset{7,9}{C_2} - \underset{9,10}{C_1} \qquad\qquad \underset{5,7}{C_2} - \underset{7,8}{C_1}$$

$$\underset{7,9}{C_2} - \underset{9,10}{C_1}$$

$$\underset{1,2}{C_3} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_1}$$

$$\underset{3,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1}$$

$$\underset{5,7}{C_2} - \underset{7,8}{C_1}$$

$$\underset{7,9}{C_2} - \underset{9,10}{C_1}$$

De la même manière, on peut montrer l'identité des surfaces représentées.

Dans le cas général, nous aurons un nombre de cas possibles égal au plus grand entier compris dans $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, car il existe une symétrie possible autour de C_3, deux types symétriques ne différant que par les noms donnés aux feuillets. Mais le passage possible d'un groupe

(¹) *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (vol. III, p. 24).

de la gauche à la droite montre que le type obtenu ne représente jamais qu'une seule surface.

Étudions maintenant la section plane de cette surface c'est-à-dire la droite multiple sur laquelle les points de diramation, et leurs échanges respectifs sont donnés par les intersections de la droite avec la courbe de diramation. Je dis que notre surface possède toujours une courbe générale dépendant de $3\pi - 3$ modules. Supposons, en effet, une droite $(2\pi - 2)$-ple de genre π, dépendant de $3\pi - 3$ modules. On sait [1] qu'une telle droite double possède $2n + 2\pi - 2$ points de diramation que l'on peut choisir arbitrairement. Supposons donc donner, sur une droite $(2\pi - 2 + \pi - 1)$ couples de points arbitraires, on peut choisir les coniques, droites et cubique, en sorte que la courbe de diramation rencontre la droite aux points indiqués. Soient A_1^1 et A_2^1 les deux points par où devra passer la conique C_2^1. Prenons cette conique arbitraire, par les trois points B_1, B_2, B_3, où la droite doit être rencontrée par la cubique, on peut mener une cubique tritangente à la C_2^1. Par le point D^1, où la droite doit rencontrer C_1^1, on peut mener une tangente à C_2^1. Par les deux points A_1^2 et A_2^2 de rencontre de C_2^2 et de la droite multiple, on peut mener C_2^2 tangente à C_2^1 et à C_1^1, et ainsi de suite. Nous voyons donc que l'on peut de proche en proche construire la courbe de diramation.

Il en résulte que notre type de plans multiples conduit, pour chaque valeur de π, à une surface dont tous les genres sont 1, et dont les sections hyperplanes sont des courbes générales dépendant de $3\pi - 3$ modules. Ceci exclut donc les surfaces multiples d'une $F_{2\alpha-2}$ avec $\alpha < \pi$.

En résumé, la méthode suivie pour construire un plan multiple nous montre que, pour chaque valeur de π, il n'existe qu'une seule surface dont tous les genres sont 1 à sections hyperplanes générales.

Il nous reste à montrer que ces plans multiples dépendent bien de 19 modules.

Évaluons donc de combien de paramètres dépendent les courbes de diramation que nous avons construites.

La cubique dépend de neuf paramètres, la C_2^1 qui lui est tritangente dépend de deux paramètres, la C_1^1, tangente à la C_2^1, dépend de un paramètre, les $(\pi - 4)$ coniques suivantes dépendent de trois paramètres, étant tangentes à une conique et à une droite les précédant; les $(\pi - 4)$ droites dépendent de un paramètre, étant tangentes à la conique

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (vol. III, p. 361).

précédente, enfin, la $C_2^{\pi-2}$ et la $C_1^{\pi-2}$ dépendent encore respectivement de trois et un paramètres.

Les points de diramation des courbes comptées deux fois, sont aux points P et en d'autres points arbitraires, 15 sur la cubique qui n'y dépendent que de 14 paramètres, 1 sur la C_2^1, 3 sur la $C_2^{\pi-2}$ et 1 sur la $C_1^{\pi-2}$. On a donc, en tout, comme arbitraires,

$$9+2+1+4(\pi-3)+14+1+3+1=4\pi+19.$$

Mais, dans S^π, les réseaux d'hyperplans sont $3(\pi-2)$ comme les plans de S^π; les points de projection sont $\pi-2$, et il y a huit homographies dans le plan. On a donc, en tout, pour modules de nos plans multiples,

$$4\pi+19-(4\pi-2)-8=19.$$

4. **Quelques plans multiples liés à cette étude.** — L'étude des plans multiples des surfaces dont tous les genres sont 1, peut conduire à quelques types intéressants.

Supposons d'abord partir de la $F_{2\pi-2}$ de S^π, et supposons-la projetée à partir de $(\pi-2)$ points choisis sur la surface. On aura un plan multiple d'ordre π. La courbe de diramation de ce plan multiple est d'ordre

$$N=2\pi+2\pi-2=4\pi-2.$$

Les caractères de la surface sont

$$p_a=1, \qquad n=\pi, \qquad \overline{p_1}=1-(\pi-2)=3-\pi,$$

d'où, pour la courbe de diramation,

$$k=18(\pi-2), \qquad d=8(\pi-2)(\pi-3),$$

c'est-à-dire

$$I=6(\pi-2)+2(\pi-2)(\pi-3)=2(\pi-2)\pi.$$

Cette courbe peut s'obtenir à partir d'une cubique et de $(\pi-2)$ coniques. On a alors, en effet,

$$\frac{N}{2}=2\pi-1=2(\pi-2)+3.$$

Les intersections de courbes entre elles sont

a. la cubique et les coniques : $6(\pi-2)$;
b. les coniques entre elles : $2(\pi-2)(\pi-3)$,

d'où

$$I=2\pi(\pi-2).$$

Les types des courbes de diramation seront

$\pi = 3.$
$$\underset{1,2}{C_2} - \underset{2,3}{C_3}$$

$\pi = 4.$
$$\underset{1,2}{C_2} - \underset{2,3}{C_3} - \underset{3,4}{C_2}$$

$\pi = 5.$
$$\begin{array}{ccccc} \underset{1,2}{C_3} & - & \underset{2,3}{C_2} & - & \underset{3,4}{C_2} \\ & & \diagdown & \diagup & \\ & & & \underset{3,5}{C_2} & \end{array}$$

$\pi = 6.$
$$\begin{array}{ccccccc} \underset{1,2}{C_2} & - & \underset{2,3}{C_3} & - & \underset{3,4}{C_2} & - & \underset{4,5}{C_2} \\ & & & & \diagdown & \diagup & \\ & & & & & \underset{4,6}{C_2} & \end{array}$$

$\pi = 7.$
$$\begin{array}{ccccccc} \underset{1,2}{C_3} & - & \underset{2,3}{C_2} & - & \underset{3,4}{C_2} & & \\ & & \diagdown & \diagup & & & \\ & & & \underset{3,5}{C_2} & - & \underset{5,6}{C_2} & \\ & & & & \diagdown & \diagup & \\ & & & & & \underset{5,7}{C_2} & \end{array}$$

Il y aura donc deux types distincts selon les valeurs de π :

1° $\pi = 2q + 1$:
$$\begin{array}{ccccccc} \underset{1,2}{C_3} & - & \underset{2,3}{C_2} & - & \underset{3,4}{C_2} & & \\ & & \diagdown & \diagup & & & \\ & & & \underset{3,5}{C_2} & - & \underset{5,6}{C_2} & \\ & & & & \diagdown & \diagup & \\ & & & & & \underset{5,7}{C_2} & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & \underset{2q-3,2q-1}{C_2} & - \quad \underset{2q-1,2q}{C_2} \\ & & & & & \diagdown & \diagup \\ & & & & & & \underset{2q-1,2q+1}{C_2} \end{array}$$

2° $\pi = 2q$:
$$\begin{array}{ccccccccc} \underset{1,2}{C_2} & - & \underset{2,3}{C_3} & - & \underset{3,4}{C_2} & - & \underset{4,5}{C_2} & & \\ & & & & \diagdown & \diagup & & & \\ & & & & & \underset{4,6}{C_2} & - & \underset{6,7}{C_2} & \\ & & & & & & \diagdown & \diagup & \\ & & & & & & & \underset{6,8}{C_2} & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \underset{2q-4,2q-2}{C_2} & - \quad \underset{2q-2,2q-1}{C_2} \\ & & & & & & & \diagdown & \diagup \\ & & & & & & & & \underset{2q-2,2q}{C_2} \end{array}$$

Sur ces types, on voit, en comparant au type de la $F_{2\pi-2}$ projetée de points extérieurs, que la projection, à partir d'un point de la surface, produit une véritable rupture de la décomposition de la courbe de diramation.

D'autres types, plus compliqués, pourraient être donnés pour les plans multiples d'ordre $2\pi - 2 - \alpha$ ($\alpha < \pi - 2$) représentatifs de la $F_{2\pi-2}$ à partir de α points de la surface. La décomposition se composerait d'une cubique, de $\pi - 2$ coniques et de $(\pi - 2 - \alpha)$ droites, ces courbes étant reliées de telle sorte que les caractères de la courbe de diramation soient conservés.

A l'étude des surfaces dont tous les genres sont 1, nous avons associé, au Chapitre I, des surfaces rendues rationnelles par l'imposition d'un point triple. Dans mon mémoire de l'an dernier, j'ai étudié les premières valeurs de π, et montré comment l'on pouvait, à partir des plans multiples, retrouver les différentes surfaces rationnelles dotées d'un point triple.

Projetons une telle surface à partir de son point triple. On obtient une surface d'ordre $2\pi - 5$ à sections de genre $\pi - 3$. La première surface de la famille est, pour $\pi = 4$, la surface cubique, dont le plan triple représentatif a pour courbe de diramation, la

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2}.$$

Pour les surfaces correspondant à des valeurs supérieures de π, on peut leur imposer des points doubles, et les ramener ainsi, par projections successives, à la surface cubique, les coniques de cette surface pouvant représenter les points doubles :

1° $\pi = 5$. La projection a lieu à partir d'un seul point double; on obtient la ligne de diramation du type simple

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_2} - \underset{4,5}{C_1}.$$

Notons que ce type correspond à la valeur $\overline{p_1} = 2$, en accord avec la représentation plane de la surface du 5^e ordre à quartique double

$$C_7(A^2, 7B),$$

en se rappelant que, pour une surface rationnelle,

$$\overline{p_1} = 10 - \sigma,$$

σ étant le nombre de points-bases de la représentation plane.

2° $\pi = 6$. La projection a lieu à partir de deux points doubles, représentés par deux coniques de la surface cubique. On peut envisager selon les positions de ces coniques trois cas possibles :

a. les deux coniques C_2 et Γ_2 ne se rencontrent pas sur la surface cubique. Ceci conduit à la courbe de diramation :

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} \left\langle \begin{array}{l} \underset{2,3,4}{C_2} - \underset{4,5}{C_1}, \\ \underset{2,3,6}{\Gamma_2} - \underset{6,7}{C_1}, \end{array} \right.$$

les coniques C_2 et Γ_2 étant placées sur le feuillet double (2, 3) en sorte que leurs intersections soient virtuelles le point de l'une appartenant, par exemple, au feuillet 2, celui de l'autre appartenant alors au feuillet 3. Nous avons alors

$$\overline{p_1} = 0,$$

ce qui est en accord avec la représentation plane de la surface rationnelle ;

b. les deux coniques se rencontrent sur la cubique en un point; sur le plan multiple nous aurons la représentation

$$\underset{2,3}{C_2} \left\langle \begin{array}{l} \underset{2,3,4}{C_2} - \underset{4,5}{C_1}, \\ \quad\updownarrow \\ \underset{2,3,6}{\Gamma_2} - \underset{6,7}{C_1}, \end{array} \right.$$

les quatre points d'intersection de C_2 et Γ_2 étant tels que trois d'entre eux soient virtuels, appartenant à des feuillets distincts le quatrième

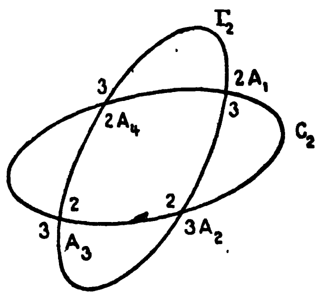

Fig. 3.

étant réel. Dans ce cas, nous avons

$$\overline{p_1} = 1,$$

et nous avons le plan multiple représentatif de la surface

$$C_5(3A^2, 6B).$$

c. les deux coniques se rencontrent sur la surface cubique, en deux points; la courbe de diramation du plan multiple se représente par

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} \left\langle \begin{array}{l} \underset{2,3,4}{C_2} - \underset{4,5}{C_1}, \\ \quad\updownarrow \\ \underset{2,3,6}{\Gamma_2} - \underset{6,7}{C_1}. \end{array} \right.$$

Des quatre points d'intersection de la C_2 et de la Γ_2, deux sont réels, deux sont virtuels, les points superposés n'appartenant pas au même feuillet. On a ici

$$\overline{p_1} = 2,$$

et l'on a le plan multiple représentatif de la surface

$$C_4(7A^2, B).$$

Je ne poursuivrai pas l'énumération des cas possibles que l'on peut trouver jusqu'à $\pi = 9$ dans le mémoire cité. Il est seulement à noter que, pour ce cas, on ne peut retrouver, par ce procédé, la surface $C_5(12A)$ obtenue par projection de son point triple, de la surface F_{16} de S^9, « double » de la surface du 4^e ordre.

5. **La surface de Véronèse double.** — Parmi les surfaces dont tous les genres sont 1, existe la surface de Véronèse double, dotée d'une courbe de diramation du 12^e ordre. Cette surface double peut se représenter par un plan 8-ple sur lequel la courbe de diramation doit se composer de la courbe de diramation d'une surface de Véronèse simple, soit

$$\begin{array}{ccc} \underset{1,2}{C_1} & - & \underset{2,3}{C_1} \\ & \diagdown\!\diagup & \\ & \underset{2,4}{C_1} & \end{array}$$

comptée deux fois, et de la courbe de diramation de la surface de Véronèse double, qui est représentée par une courbe du 12^e ordre de genre 10 (équivalente à une C_6). Ceci est évident, si l'on se reporte à la formule de Zeuthen, ou à la théorie des courbes multiples [1]. Les substitutions sur la variable z, à affecter aux différentes branches de la surface double, seront, en appelant I et II, les deux feuillets de la surface de Véronèse :

a. sur la C_{12}, I, II;

---

[1] *Cf.* Enriques-Chisini, *Op. cit.* p. 15 (t. III, v, Chap. IV, p. 427).

b. sur la courbe $\begin{array}{c} C_1 - C_1 \\ \diagdown\diagup \\ C_1 \end{array}$, les échanges $I_1\, I_2$, $I_2\, I_3$, $I_2\, I_4$ d'une part et les échanges $II_1\, II_2$, $II_2\, II_3$, $II_2\, II_4$ d'autre part.

Ceci ne présente pas de difficultés pour la surface de Véronèse double qui est toujours décomposée, mais si nous considérons, par exemple, la surface de du Val, nous devrions pouvoir obtenir sa courbe de diramation, à partir de celle de la surface de Véronèse double, à laquelle on ajouterait deux feuillets liés par une conique et une droite. Mais comment faire varier infiniment peu la courbe de diramation décomposée, pour obtenir la courbe de diramation, les singularités de celle-ci provenant de singularités aux points de rencontre des courbes composantes, les intersections avec les polaires devant rester les mêmes dans les deux cas.

Ce problème n'a pas encore reçu de solutions. Je vais, néanmoins, sur un cas particulier (sortant de la théorie des surfaces dont tous les genres sont 1) montrer la nature des difficultés que pose ce problème.

Considérons la surface du 4^e ordre de S^4, intersection de deux hyperquadriques f et φ. Cette surface Φ_4 sera donc base pour un faisceau de quadriques

$$f + \Lambda\varphi = 0.$$

Il passe, par cette surface Φ_4, cinq hypercônes, qui sont donnés par les racines de l'équation aux Λ, formant le déterminant des équations

$$f'_x + \Lambda\varphi'_x = 0, \qquad \ldots, \qquad f'_t + \Lambda\varphi'_t = 0$$
$$[f(x, y, z, u, t)].$$

Si l'on projette la Φ_4, sur un S^3 à partir du sommet de l'un de ces cônes, la projection sera une quadrique double Q; la ligne de diramation correspondant aux points doubles de la correspondance (I, II) entre les deux feuillets de la quadrique, est fournie par les traces sur S^3 des génératrices du cône tangentes à l'autre hyperquadrique. Or, la polaire du sommet du cône par rapport à l'autre hyperquadrique est un hyperplan qui coupe Φ_4 selon une biquadratique, qui se projette sur Q selon une biquadratique, courbe de diramation de la Q double.

Un compte de constantes montre que toute quadrique double ainsi dotée d'une biquadratique de diramation est bien équivalente à la Φ_4. En effet, il y a autant de Φ_4 que de faisceaux de quadriques de S^4, c'est-à-dire que de droites dans S^{14}, et il y a 24 homographies dans S^4, d'où

$$2 \times (14 - 1) - 24 = 2 \text{ paramètres essentiels.}$$

Dans S^3, les quadriques sont ∞^9, sur une quadrique les biquadratiques sont ∞^8, et il y a 15 homographies dans S^3; nos quadriques doubles dépendent donc de

$$9+8-15=2 \text{ paramètres essentiels}$$

comme les Φ_4.

Maintenant, supposons projeter la Φ_4, à partir de deux points quelconques de S^4; la Φ_4 se représentera par un plan quadruple, doté d'une courbe de diramation d'ordre 8, possédant 4 points doubles et 12 rebroussements, se ramenant au type

$$\underset{1,2}{C_1}-\underset{2,3}{C_2}-\underset{3,4}{C_1}.$$

Voyons ce que va devenir notre courbe de diramation lorsque l'un des points de projection vient en un des sommets des cônes passant par Φ_4 soit A ce sommet, B, l'autre centre de projection; tout se passe comme si l'on projetait, sur le plan, la quadrique double dotée de sa courbe de diramation Γ_4. La courbe de diramation de Q est une conique, projection d'une biquadratique Γ'_4 de Φ_4. Donc, la courbe des coïncidences de la correspondance (1, 4) tracée sur la Φ_4, par les plans passant par AB, se décompose en deux biquadratiques Γ_4 et Γ'_4 se coupant en quatre points C_i. En chacun de ces points vont venir se confondre, à la fois, les points qui donnaient naissance aux points doubles et de rebroussement de la courbe de diramation du plan quadruple. Rappelons qu'un point de rebroussement provient d'un contact triponctuel du plan projetant, un point double d'un plan bitangent. Soit alors C_i un des points d'intersection des deux biquadratiques. Une des biquadratiques est tangente à AC_i; l'autre n'est tangente qu'au plan ABC_i; donc, en C_i, le plan ABC_i a un contact quadriponctuel avec la surface Φ_4. Un tel point C_i absorbe donc trois cuspides. Soit, en effet, dans S^3, la quadrique $Q=0$ la ligne de diramation de la quadrique peut se représenter par

$$[Q, Q^2].$$

La polaire d'un point sera donc

$$QQ'=0, \qquad Q^2=0,$$

c'est-à-dire

$$[QQ', Q^2]=[Q, Q^2]+2[Q, Q'];$$

La polaire seconde est

$$Q'^2+QQ'=0$$

quadrique bitangente à Q le long de la conique (Q, Q′). Cette polaire seconde passe par les quatre points projection des C_i, elle y rencontre, deux fois, la conique et une fois la Γ_i de diramation. Un tel point C_i correspond donc à trois contacts triponctuels, c'est-à-dire à trois cuspides de la courbe de diramation du plan quadruple.

Sur le plan quadruple, la courbe du 8ᵉ ordre de diramation s'est donc dégénérée en une conique comptée deux fois, à laquelle est tangente une quartique à deux points doubles, quadritangente à la conique. Chacun des points de contact est la limite de trois cuspides (cette singularité, la conique y ayant une diramation, présente bien $4 \times 2 + 1 = 9 = 3 \times 3$ intersections avec les polaires). Notons, de plus, que la conique représentant une quartique elliptique, dotée de deux points doubles, il doit exister sur cette conique deux points (d'ailleurs arbitraires) qui sont limites de points doubles.

Nous obtiendrons, comme suit, la courbe de diramation du plan quadruple. Soit une conique (ou une droite double) comptée deux fois, sur laquelle je fixe deux points arbitraires A et B; une quartique dotée de deux points doubles A′ et B′ est quadritangente à la conique en C_1, C_2, C_3, C_4; je fais varier infiniment peu cet ensemble, en sorte que la φ obtenue possède des points doubles infiniment voisins de A, B, A′, B′, et trois cuspides voisins de chaque point C; une telle courbe sera de diramation pour le plan quadruple.

Pour les substitutions à affecter à ces courbes, on peut attribuer à la conique (1, 2) et (3, 4), à la quartique (2, 3).

Une telle représentation donne bien un plan quadruple dépendant de deux paramètres; en effet, la conique dépend de cinq paramètres, les points C de 4, les quartiques quadritangentes aux C de quatre paramètres. Par chaque sommet d'un hypercône il y a ∞^3, réseaux possibles, dans le plan il y a ∞^8 homographies, d'où le nombre de paramètres

$$5 + 4 + 4 - 3 - 8 = 2.$$

Un résultat général peut pourtant être obtenu ;

Théorème. — *Si l'on considère une surface f, qui, comptée deux fois est birationnellement équivalente à une surface* F, *la courbe de diramation de la (f^2) étant une certaine courbe Δ, si l'on projette d'un point extérieur cette surface, la ligne de contour apparent de la f étant une courbe γ, celle de la f^2 sera une courbe $\gamma^2 + \Delta$; les points de ce contour apparent où le rayon projetant a un contact triponctuel, se retrouvent deux fois dans ceux de la γ, et trois fois dans les intersections de Δ et γ; c'est-à-dire* *que les cuspides de la courbe de diramation du plan multiple représentatif de la* F, *vont dégénérer, par triples en une intersection de* Δ *et* γ, *et, par couples aux cuspides de la courbe de diramation du plan multiple représentant la* f.

Soit, en effet, la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Si l'on projette du point à l'infini de Oz, la courbe γ sera

$$f = 0, \qquad f'_z = 0,$$

les points à contact triponctuel sont

$$f = 0, \qquad f'_z = 0, \qquad f''_z = 0.$$

Si l'on considère la courbe de diramation Δ, c'est

$$\Delta = [f, f^2].$$

Le contour apparent de la f^2 double est

$$f^2 = 0, \qquad ff' = 0$$

ou

$$[f, f^2] = \Delta, \qquad [f^2, f'] = 2[f, f'] = 2\gamma.$$

Les points à contact triponctuel vérifient

$$f^2 = 0, \qquad ff' = 0, \qquad f'^2 + ff'' = 0,$$

c'est-à-dire appartiennent à

$$\left.\begin{array}{l} [f^2, f, f'^2] = 2[\Delta, \gamma] \\ [f^2, f', f] \;= [\Delta, \gamma] \end{array}\right\} \quad \text{3 fois intersections de } \Delta \text{ et } \gamma,$$

$$[f^2, f', f''] = 2[f, f', f''] \quad \text{2 fois les points à contact triponctuel de } f].$$

Ce résultat permet de reconnaître ce que deviennent tous les cuspides du plan multiple représentatif de F; par contre, je n'ai pu obtenir un résultat général pour les points doubles; il est évident qu'à un point double du plan multiple représentatif de f, correspondent deux points doubles de la courbe de diramation D du plan multiple de F; de même, à un point double de la courbe de diramation Δ, correspond un point double de D. A une intersection virtuelle de Δ et de γ, correspondent deux points doubles de D.

Des considérations basées sur le nombre des sections avec la polaire conduisent à penser qu'à un cuspide de la courbe d, de diramation du plan multiple de f, devraient correspondre deux points doubles de la D. Mais les exemples que j'ai tenté de construire ne m'ont pas permis d'obtenir un résultat général pour les autres points doubles (ceux de la Δ donnent ainsi naissance à des points doubles de la D). Je crois, néanmoins, que ces points doubles devraient être liés au nombre de points doubles qu'aurait la courbe γ, considérée deux fois, le genre de la γ^2 étant donné par la formule de Zeuthen.

6. **Conclusion.** — De cette étude, nous obtenons les résultats suivants :

Pour une valeur quelconque de π, il existe, en général, une seule surface dont tous les genres sont 1. *Les sections sont des courbes générales dépendant de* $3\pi - 3$ *modules. Pour les valeurs de π, de la forme*

$$\pi = (\alpha - 1)n^2 + 1,$$

il existe des surfaces, qui sont équivalentes aux sections de la surface correspondant à α, par les hypersurfaces d'ordre n de S^α.

En général, ces surfaces donnent, si on leur impose un point triple des surfaces rationnelles distinctes, ces surfaces rationnelles se distinguant par les familles de courbes passant au point triple, ces courbes se décomposent en deux familles, l'une possédant au point triple un point base simple, l'autre un point-base double.

L'imposition d'un point double est une condition, en général irréductible, la surface générale de S^π *se projetant de son point double sur une surface de* $S^{\pi-1}$ *dotée d'une conique. Pourtant, dans le cas* $\pi = n^2 + 5$ *cette condition est réductible, un des types de surfaces à point double se ramenant à l'intersection de trois quadriques de* S^4, *dotée d'une courbe rationnelle d'ordre* $2n$, *l'autre type à un plan double doté d'une sextique de diramation qui est tangente à une courbe rationnelle d'ordre n, en chacun des points d'intersection.*

On peut, par une généralisation de la méthode de M. Chisini, représenter, par des plans multiples, dont les courbes de diramation se décomposent en cubique, coniques et droites, les surfaces du type général. Pour ce qui est des surfaces multiples d'une surface précédente, la décomposition indiquée ne réussit pas. Il reste là un problème à résoudre, celui de trouver, sur un plan multiple donné, le moyen de construire la courbe de diramation d'un réseau de sections de ce plan multiple, par une surface d'ordre n.

APPENDICE.

Démonstration de l'équivalence des *types possibles* de courbes de diramation.

Considérons deux types possibles :

A.

$$C_1 - C_2 - C_3 - C_2 - C_1$$

$$\bigvee \qquad\qquad \bigvee$$

$$C_1 - C_2 \qquad\qquad \underset{2\pi-7,\,2\pi-6}{C_2} - \underset{2\pi-5,\,2\pi-4}{C_1}\,.$$

$$\bigvee \qquad\qquad \bigvee$$

$$\underset{1,2}{C_1} - \underset{2,3}{C_2} \qquad\qquad \underset{2\pi-4,\,2\pi-3}{C_2} - \underset{2\pi-3,\,2\pi-2}{C_1}$$

B.

$$\underset{1,2}{C_3} - \underset{2,3}{C_2} - \underset{3,4}{C_1}$$

$$\bigvee$$

$$\underset{3,5}{C_2} - \underset{3,6}{C_1}$$

$$\bigvee$$

$$\underset{2\pi-4,\,2\pi-3}{C_2} - \underset{2\pi-3,\,2\pi-2}{C_1}\,.$$

Nous pouvons, par une déformation continue du type A, amener les courbes du type A à coïncider avec les courbes du type B, en sorte que nous aurons la même figure géométrique, avec seulement les valeurs des échanges qui varient. Considérons alors la section par une droite; sur la droite multiple les deux types auront les mêmes points de diramation, avec des échanges distincts. Il reste à montrer qu'en transformant les lacets, on peut passer d'un type à l'autre. Comme le choix des lacets sur une droite donnée est indépendant des autres droites, cette permutation des lacets pourra se faire sur chaque droite, et l'on pourra ainsi passer du type A au type B, qui représentent donc des surfaces de même nature.

Pour le montrer, supposons le cas simple de $\pi = 4$, et supposons que les points de diramation du type A se présentent dans l'ordre

$$\underset{A}{(1, 2)} \quad \underset{B}{(2, 3)} \quad \underset{C}{(3, 4)} \quad \underset{D}{(4, 5)} \quad \underset{E}{(5, 6)}$$

comme des points sur un cercle parcouru dans le sens direct. Nous voulons montrer que l'on peut choisir les lacets issus de O, en sorte qu'aux points B correspondent les échanges (5, 2), ce qui représenterait le type

$$\underset{3,4}{C_3} - \underset{4,5}{C_2} - \underset{5,6}{C_1}$$

$$\bigvee$$

$$\underset{6,2}{C_2} - \underset{2,1}{C_1}$$

Considérons les quatre lacets terminés en $B_3 B_4 C_1 C_2$, ils ont respectivement pour échanges (3, 4), (3, 4), (3, 2), (3, 2), je fais passer C_1 et C_2 à droite de B_4, j'obtiens les échanges des lacets terminés en B_3,

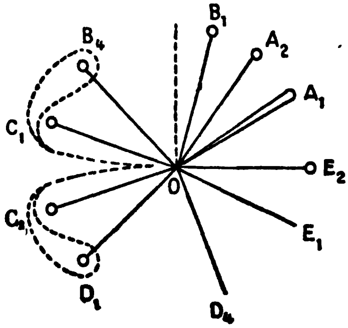

Fig. 4.

C_1, C_2, B_4 sous la forme (3, 4), (4, 2), (4, 2), (3, 4). Je fais maintenant passer B_3 à la gauche de C_1 et C_2 et j'obtiens les échanges

$$\begin{array}{cccc} B_4 & B_3 & C_1 & C_2 \\ (4,2) & (4,2) & (3,4) & (3,4) \end{array}$$

Je fais ensuite passer B_4 et B_3 à la gauche de C_3, C_4, C_5, C_6, j'obtiens

$$\begin{array}{cccccccc} B_4 & B_3 & C_6 & C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 \\ (4,2) & (4,2) & (3,4) & (3,4) & (3,4) & (3,4) & (3,4) & (3,4) \end{array}$$

Je fais maintenant passer D_1 et D_2 à droite de B_4, j'obtiens

$$\begin{array}{cccc} B_4 & D_2 & D_1 & B_3 \\ (5,2) & (5,4) & (5,4) & (4,2) \end{array}$$

Je fais ensuite passer B_3 à la gauche de D_1 et D_2, j'obtiens

$$\begin{array}{cccc} B_4 & B_3 & D_2 & D_1 \\ (5,2) & (5,2) & (5,4) & (5,4) \end{array}$$

Je fais ensuite passer B_4 et B_3 à la gauche de D_3 et D_4 et j'obtiens

$$\begin{array}{cccccc} B_4 & B_3 & D_4 & D_3 & D_2 & D_1 \\ (5,2) & (5,2) & (5,4) & (5,4) & (5,4) & (5,4) \end{array}$$

Le même procédé s'applique au couple $B_2 B_1$, et, finalement, l'on a réussi à tracer les lacets avec leurs substitutions, sous la forme

$$\begin{array}{cccccccccc} B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & D_4 & D_3 & \dots & C_6 & \dots & C_1 \\ (5,2) & (5,2) & (5,2) & (5,2) & (5,4) & (5,4) & \dots & (4,3) & \dots & (4,3) \end{array}$$

ce qui démontre la proposition.

CHAPITRE III.

LES VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS DONT TOUS LES GENRES SONT 1.

1. **Généralités.** — Une variété algébrique dont tous les genres sont 1 est une variété possédant une surface canonique d'ordre O, et dont l'irrégularité superficielle est nulle. Sur une telle variété V, tout système linéaire de surfaces $|F|$ coïncide avec son propre adjoint

$$|F| = |F'|.$$

Les sytèmes adjoints successifs de F coïncident avec ce système

$$|F| = |F'| = |F''| = \ldots = |F^{(n)}| = \ldots$$

et toutes les surfaces pluricanoniques de la variété V sont d'ordre zéro. Le genre géométrique et tous les plurigenres de V sont égaux à l'unité

$$P_g = P_2 = P_3 = P_4 = \ldots = P_n = \ldots = 1.$$

Le genre arithmétique P_a de la variété est donné par

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4,$$

Ω_0, Ω_1 et Ω_2 étant respectivement le degré, le genre curviligne et le genre arithmétique de la surface canonique de V. Si l'on utilise les formules de Severi (¹) permettant de calculer ces caractères à partir de ceux d'un système linéaire $|F|$ et de son adjoint $|F'|$, on trouve

$$\Omega_0 = 0, \qquad \Omega_1 = 1, \qquad \Omega_2 = -1,$$

d'où

$$P_a = 1.$$

La variété est donc complètement régulière.

Soit alors (F, F) la courbe intersection de deux surfaces du système $|F|$. Ce système est son propre adjoint, donc ses surfaces découpent, sur

(¹) *Cf.* F. Severi, *Fondamenti per la geometria sulle superficie algebriche* (*R. C. del. Circolo Matematico di Palermo*, t. 28, 1909, p. 33, 87); L. Godeaux, *Conférence de la réunion internationale des Mathématiciens* (*Société math. de France*, 1937).

l'une d'elles, le système canonique de celle-ci. Or, le défaut de ce système est, d'après un théorème de Severi ([1]), au plus égal à l'irrégularité superficielle de la variété V, laquelle est nulle. Il en résulte que les surfaces F découpent sur l'une d'entre elles le système canonique complet. Si l'on considère alors les sections hyperplanes d'une telle variété, on a

$$|K'-K| = |K|, \quad |K'| = 2|K|,$$

d'où

$$(K', K) = 2(K, K) = 2\pi - 2,$$

où π est le genre de la courbe section de deux sections hyperplanes. L'ordre d'une telle variété est alors $(\pi - 1)$.

De plus, d'après un théorème de MM. Castelnuovo et Enriques ([2]) si les courbes (F, F) sont irréductibles, les surfaces F sont alors régulières, si donc alors p_a est le genre arithmétique des surfaces F, p_g leur genre géométrique, la dimension r du système linéaire $|F|$ est égale à $r = p_a = p_g$.

Si maintenant on revient aux sections hyperplanes, les surfaces $|F|$ découpent sur l'une d'elles le système canonique dont les courbes découpent sur l'une d'elles la $g_{\pi-1}^{r-2}$, on a donc

$$2(r-2) \leqq \pi - 1, \qquad 2r \leqq \pi + 3.$$

On peut donner immédiatement un exemple d'une telle variété, avec la variété du 5^e ordre de S^4. Les variétés adjointes d'ordre $(n-5)$ sont ici des variétés d'ordre zéro, il en résulte

$$P_g = 1.$$

De même les variétés pluriadjointes d'ordre $\alpha(n-5)$ sont toutes d'ordre zéro, d'où

$$P_g = P_2 = P_3 = \ldots = P_\alpha = \ldots = 1.$$

La surface canonique est d'ordre zéro, son genre arithmétique est donc

$$\frac{(-3)(-2)(-1)}{6} = -1,$$

ses sections canoniques sont d'ordre zéro et genre 1, d'où

$$\Omega_0 = 0, \qquad \Omega_1 = 1, \qquad \Omega_2 = -1;$$
$$P_a = 1.$$

([1]) *Cf.* F. Severi, *Op. cit.*, p. 97.

([2]) *Cf.* Castelnuovo et Enriques, *Sur les intégrales simples de 1re espèce d'une surface ou d'une variété algébrique* (*Ann. de l'École Normale supérieure*, 1906, p. 339-366).

Le système des sections hyperplanes est un système ∞^4, formé de surfaces du 5e ordre de S^3, surfaces de genres

$$p_a = p_g = 4,$$

dont les sections planes sont de genre

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6,$$

d'ordre

$$\pi - 1 = 5.$$

Si l'on considère maintenant le système ∞^{14} des hyperquadriques de S^4, et que l'on rapporte ces hyperquadriques

$$\Phi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_{14} = 0, \quad \Phi_{15} = 0$$

(les Φ représentant des formes quadratiques homogènes à cinq variables, dont 14 sont linéairement indépendantes), aux hyperplans d'un S^{14}

$$X_1 = \Phi_1, \quad X_2 = \Phi_2, \quad \ldots, \quad X_{15} = \Phi_{15}$$

par cette transformation on fera correspondre, à notre V_5^3, une variété à trois dimensions de S^{14}, dont tous les genres seront 1. Son ordre sera le nombre d'intersections de trois quadriques avec la V_5, c'est-à-dire

$$2^3 \times 5 = 40.$$

Sur cette variété de S^{14}, V_{40}^3, le système des sections hyperplanes est formé de surfaces équivalentes aux sections hyperquadriques de la V_5^3; on peut donc calculer le genre arithmétique de ces surfaces sur la V_5^3, à partir de la formule donnant le genre arithmétique d'une surface décomposable en deux surfaces F et F′, respectivement de genres arithmétiques p'_a et p''_a, se coupant selon une courbe de genre π (1).

$$p_a = p'_a + p''_a + \pi.$$

Dans notre cas, nous aurons donc

$$p_a = 4 + 4 + 6 = 14.$$

Les sections hyperplanes sont les sections de la V_5^3 par deux quadriques; leur genre est donc

$$(6 + 6 + 5 - 1) + (6 + 6 + 5 - 1) + 10 - 1 = 41.$$

---

(1) *Cf.* L. Godeaux, *Les transformations birationnelles de l'espace* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 67, Paris, Gauthier-Villars, 1934, p. 31).

Si l'on considère de même le système ∞^{34} des variétés cubiques de S^4 et qu'on les rapporte aux hyperplans d'un S^{34}, on obtiendra une variété dont tous les genres sont 1, correspondant à la V_5 de S^4. Cette variété sera d'ordre

$$135 = 3^3 \times 5.$$

Sur cette variété, le système des hyperplans découpe des surfaces équivalentes aux sections de la V_5^3 par les variétés cubiques de S^4; si l'on note que les sections hyperplanes de la section quadrique de la V_5^3 sont de genre

$$6 + 6 + 5 - 1 = 16,$$

on a, pour le genre arithmétique de ces sections,

$$p_a = 14 + 4 + 16 = 34.$$

Le genre des sections hyperplanes de ces surfaces est égal à

$$136 = 135 + 1.$$

On peut généraliser ce procédé en considérant les sections de la V_5^3 par les variétés d'ordre n de S^4. Si N est le nombre de ces variétés non décomposables en la V_5 et une V_{n-3} avec

$$N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} - 1 = \frac{5n^3 + 25n}{6} - 1,$$

en rapportant ces variétés aux hyperplans d'un espace S^N, à la V_5^3 correspondra une variété dont tous les genres sont 1, d'ordre

$$5 \times n^3 = 5n^3.$$

Les surfaces sections hyperplanes de cette variété ont pour genre arithmétique

$$p_a = \frac{5n^3 + 25n}{6} - 1.$$

Cette formule s'établit par récurrence, à partir du genre de la section de la V_5^3 par une variété d'ordre n, et un hyperplan,

$$\pi = 6n + \frac{5n(n-1)}{2} - (n-1),$$

nous aurons donc

$$p_a^{(n)} = p_a^{(n-1)} + 4 + \pi,$$

$$p_a^{(n)} = \frac{5(n-1)^3 + 25(n-1)}{6} - 1 + 5 + \frac{5n^2}{2} + 5n,$$

$$p_a^{(n)} = \frac{5n^3 + 25n}{6} - 1.$$

On démontre aussi que le genre de la section de la V_5^3 par deux variétés d'ordre n a pour genre

$$\pi = 5n^3 + 1.$$

Nous obtenons donc une série de variétés dont tous les genres sont 1, « multiples d'ordre n » de la variété du 5ᵉ ordre de S^4.

Notons que ces variétés ont toutes le même nombre de modules, qui est celui des modules de la V_5^3, c'est-à-dire le nombre de ces variétés, diminué des homographies de S^4, donc

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{24} - 25 = 101.$$

Notons que l'imposition d'un point triple à une telle variété est possible, car il exige

$$\frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{24} - 4 = 11 \text{ conditions.}$$

De même, l'imposition d'un point quadruple à cette variété sera possible, exigeant

$$\frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{24} - 4 = 31 \text{ conditions.}$$

Rappelons maintenant que si une variété à trois dimensions possède un point multiple d'ordre 1, les variétés adjointes devront y passer $(s - 3)$ fois.

2. Rationalisation des variétés dont tous les genres sont 1. — Notons que si la variété dont tous les genres sont 1 vient à acquérir un point quadruple, les variétés adjointes y passeront une fois, d'où il résulte que tous les genres diminuent de 1. Notre variété dotée d'un point quadruple est donc une variété dont tous les genres sont 0. En particulier, sur la V_5^3 de S^4, la naissance du point quadruple fait naître une variété rationnelle dont on a, par projection, à partir du point quadruple, la représentation sur un S^3. Le point quadruple se représente par une surface fondamentale du 4ᵉ ordre Σ_4, la section hyperplane générale de la variété par une surface F_5 du 5ᵉ ordre. L'hypercône des tangentes au point quadruple A coupe une section hyperplane quelconque selon une courbe du 20ᵉ ordre, située sur un cône de sommet A. Sur la surface Σ_4 image du point quadruple, il existe donc une courbe base c_{20}, commune à toutes les surfaces F_5 images de sections hyperplanes. La représentation est donc $F_5\,(c_{20})$. La c_{20} étant, sur une Σ_4, fondamentale.

On peut vérifier immédiatement les caractères de cette représentation; la courbe c_{20}, section d'une Σ_4 par une F_5, est de genre 51; le genre des F_5 est

$$p_a = 4.$$

La dimension du système des F_5 est

$$\frac{6 \times 7 \times 8}{6} - 1 - [5 \times 20 - 51 + 1] = 4.$$

Cherchons de combien de paramètres essentiels dépend cette variété; la Σ_4 dépend de 34 paramètres, les c_{20} y forment un système ∞^{51} et il y a 15 homographies dans le S^3. Le nombre cherché des paramètres essentiels est donc

$$34 + 51 - 15 = 70,$$

ce qui est bien en accord avec le fait que notre variété possède un point quadruple, qui impose 31 conditions, c'est-à-dire

$$101 - 31 = 70.$$

Pouvons-nous maintenant, par un procédé analogue à celui du point triple pour les surfaces. démontrer l'existence de variétés dont tous les genres sont 1, à partir de variétés rationnelles, dotées d'un point quadruple. Si nous supposons que ce point quadruple se représente par une Σ_4, fondamentale, les sections hyperplanes seront formées de surfaces F_n, dont les courbes multiples devront, d'après le théorème de Bertini, être bases pour le système; de plus, le point quadruple étant supposé isolé sur la variété, ces courbes-bases devront se trouver sur la surface fondamentale Σ_4. Si la dimension du système des surfaces est π, leur genre arithmétique devra être π. Soit alors F_n la représentation d'une section hyperplane, c_ν une courbe base d'ordre ν et de multiplicité r_ν sur la F_n; soit $P_n^{r_\nu}(c_\nu)$ la postulation d'une c_ν pour une surface d'ordre m, y passant r_ν fois, nous aurons les relations :

a. la Σ_4 est une surface fondamentale

$$4n = \Sigma \nu r_\nu.$$

b. les F_n forment un système de dimension π.

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 - \Sigma P_n^\nu(c_\nu) = \pi.$$

c. les F_n sont de genre arithmétique π,

$$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} - 1 - \Sigma P_{n-4}^{\nu-1}(c_\nu) = \pi.$$

d. la Σ_4 représente un point quadruple, c'est-à-dire que l'intersection de deux sections hyperplanes y passant y possède un point quadruple. Une telle intersection est représentée par une

$$F_{n-4}(c_\nu^{2\nu-1}),$$

d'où

$$4[(n-4)^2 - \Sigma\nu(r_\nu - 1)^2] = 4 + \Sigma i$$

(Σi nombre des intersections de ces courbes avec les c_ν),

$$n^2 - \Sigma\nu r_\nu^2 = \Sigma\nu - 15 + \Sigma i.$$

Ce système d'équations indéterminées doit permettre de calculer les valeurs n, ν, r_ν; de plus, les genres p_ν des courbes c_ν doivent être tels que le genre de la courbe décomposée en les c_ν, soit

$$\Gamma = \Sigma\nu c_\nu,$$

représente le genre d'une section de la Σ_4 par une F_n, c'est-à-dire

$$2n^2 + 1.$$

Nous allons étudier quelques cas possibles :

1° $r_\nu = 1$.

Nous avons

$$4n = \Sigma\nu, \qquad n^2 = 2\Sigma\nu - 15,$$

d'où

$$(n^2 - 8n + 15) = (n-3)(n-5) = 0,$$
$$n = 3 \quad \text{et} \quad n = 5.$$

Le cas $n = 3$ n'est évidemment pas possible; le cas $n = 5$ nous fournit la variété V_8^3 de S^4, déjà étudiée.

2° Courbes-bases simples et courbes-bases doubles. Soit c_α la courbe-base simple d'ordre α, c_β la courbe-base double d'ordre β. Nous avons

$$4n = \alpha + 2\beta.$$

Deux surfaces F_{n-4} passant par la c_β rencontrent la Σ_4 en $i + 4$ points, i de ceux-ci se trouvant sur la c_β:

$$4[(n-4)^2 - \beta] - i = 4, \qquad 4(n-4)^2 = 4\beta + i + 4.$$

α. $n = 5$,

$$4\beta + i = 0,$$

(on retombe sur le cas 1°);

β. $n = 6$,

$$16 = 4\beta + i + 4, \qquad 4\beta + i = 12.$$

Si $\beta = 1$, $i = 8$; mais sur la quadrique (F_{n-1}) une droite, ne peut rencontrer en huit points l'intersection d'une autre quadrique passant par cette droite.

Si $\beta = 2$; $i = 4$; ce cas est encore impossible, car sur une quadrique deux coniques se coupent en deux points et non en quatre.

γ. $n = 7$,

$$36 = 4\beta + i + 4, \qquad 4\beta + i = 32.$$

L'étude de ce cas conduit à étudier les décompositions possibles de l'intersection de deux surfaces cubiques telles que si l'une des courbes décomposées a le degré β, l'autre le degré $9 - \beta$, ces deux courbes se coupent en i points, tels que l'on ait

$$4\beta + i = 32.$$

α. $\beta = 1$, la droite peut se représenter sur la représentation plane de la surface cubique par une $C_1(A_1, A_2)$ le reste de l'intersection est une

$$C_8(A_1^2, A_2^2, 4A_i^3) \qquad (i = 3, 4, 5, 6),$$

ces deux courbes se coupent en quatre points; donc impossibilité.

β. $\beta = 2$; si l'on représente la conique par une $C_1(A_1)$ le reste de l'intersection

$$C_8(A_1^2, 5A_i^3),$$

les deux courbes se coupent en six points, donc impossibilité.

γ. $\beta = 3$; si la cubique est elliptique, elle a six intersections avec son résidu, si elle est rationnelle, elle a huit intersections avec son résidu; les deux cas mènent à une impossibilité.

δ. $\beta = 4$; si l'on a une quartique rationnelle représentée par

$$C_2(A_1, A_2),$$

le résidu sera

$$C_7(A_1^2, A_2^2, 4A_i^3)$$

et l'on aura

$$i = 10.$$

Si l'on a à faire à une biquadratique représentée par

$$C_3(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$$

de résidu

$$C_6(A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5^2, A_6^2);$$

ces deux courbes se coupent en huit points; il y a encore impossibilité.

ε. $\beta = 5$; les cas où la courbe résidu est non décomposée sont déjà étudiés; il reste à supposer, pour résidu, deux coniques ne se coupant pas $C_2(A_i^2)$, le résidu est

$$C_7(A_1, 5A_i^3);$$

dans ce cas, $i = 12$; l'intersection de deux surfaces cubiques passant par la c_5 se décompose en deux coniques ayant six points communs avec la quintique. Chacune de ces coniques rencontre la Σ_4 en huit points, dont six sur la c_5, donc quatre points variables. La quintique est de genre zéro. Le nombre des surfaces cubiques passant par une telle quintique est

$$20 - [3 \times 5 + 1] = 4.$$

Si une telle variété existe, on devra avoir

$$4 \times 7 = \alpha + 2 \times 5, \qquad \alpha = 18.$$

Soit p_α le genre de c_β et j le nombre des intersections de c_α et c_β; nous aurons

$$4 = \frac{8 \times 9 \times 10}{6} - [7 \times 18 + 1 - p_\alpha] - [17 \times 5 + 5] + 2j,$$

$$102 = p_\alpha + 2j.$$

$$2c_\beta + c_\alpha = \Gamma_{28}.$$

Mais

$$p_\Gamma = 2 \times 7^2 + 1 = 99, \qquad p_\alpha + 2j + p_{(c_\beta)^2} - 1 = 99,$$

ce qui est contradictoire. Une telle variété ne peut exister.

ζ. $\beta = 6$, les décompositions possibles, les cas non décomposés étant envisagés sont une droite et une conique ne se rencontrant pas, et trois droites gauches.

Au premier cas, le résidu est

$$C_2(A_1^2, A_2),$$

la c_β sera

$$C_7(A, A_2^2, 4A_i^3),$$

on aura dix intersections.

Si l'on a trois droites non concourantes, la courbe résidue se représente par

$$C_3(A_1^2, A_2, A_3, A_4)$$

la c_β sera alors

$$C_6(A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5^3, A_6^3)$$

et l'on aura 12 intersections; ce qui conduit à l'impossibilité.

η. $\beta = 7$, le résidu peut se composer de deux droites gauches représentées par

$$C_2(A_1^2, A_2, A_3);$$

la c_β se représente alors par

$$C_7(A_1, A_1^2, A_3^2, 3A_i^2).$$

Les intersections sont au nombre de 8, et l'on est encore conduit à une impossibilité.

Cette étude nous montre que l'on ne peut obtenir un système de F_7, avec c_β double et c_α simple sur une Σ_4 fondamentale représentant une variété du type cherché :.

θ. $n = 8$,

$$4\beta - 1 = 60.$$

Une étude analogue à la précédente, mais plus longue et plus complexe, permet de trouver une seule solution du système cherché,

$$\beta = 12, \qquad \alpha = 8,$$

la c_β étant l'intersection complète d'une surface cubique Σ_3 par la Σ_4, et la c_α l'intersection d'une quadrique avec la Σ_4; on a alors

$$(c_\alpha, c_\beta) = 24; \qquad p_\alpha = 9, \qquad p_\beta = 19; \qquad \pi = 5.$$

Remarquons que la surface cubique Σ_3 est surface fondamentale pour le système. Quelle est sa signification ? Considérons une section passant par cette singularité. Elle va se représenter par une F_5 de genre $p_a = 4$. Deux telles F_5 passant par la c_α et la c_β se coupent selon une c_5 qui a 20 points communs avec Σ_4, et 15 avec la Σ_3, dont 12 sur la c_β. En conséquence, notre variété ainsi obtenue possède, outre son point quadruple, un point triple.

Ceci nous montre que le fait d'imposer à une variété dont tous les genres sont 1 un point quadruple, ne suffit pas à la rendre rationnelle, puisque, dans certains cas, la variété rationnelle correspondante possédera, en outre, un point triple, que l'on ne peut éliminer, le système des représentations sur le S^3 n'admettant pas une solution plus générale si $\pi = 5$.

Cette variété peut s'obtenir directement à partir de la V_5^3. Supposons, en effet, que celle-ci possède une surface cubique à sections elliptiques; si l'on fait naître, sur la V_5^3, un point quadruple et qu'on projette de celui-ci, la surface cubique se représentera sur le S^3, par une surface du 3^e ordre, passant par une partie de la courbe-base située sur la Σ_4.

On aura donc

$$c_{20} = c_{12} + c_8,$$

ces deux courbes se coupant en 24 points. Soit Σ_3 cette surface du 3e ordre. Elle représente bien une surface cubique située sur la V_5^3, car l'on a

$$3 \times 5 - 12 = 3.$$

Cette courbe du 3e ordre a, sur Σ_4, 12 intersections avec la c_{12}, donc

$$3 \times 5 - 12 = 3,$$

ce qui montre que l'intersection de deux F_5 rencontre la Σ_3 en trois points. Si maintenant on considère cette variété comme projection d'une variété de S^5, à partir de son point triple, on a la représentation de celle-ci en ajoutant la Σ_3 au système des F_5, représentatifs de la V_5^3, d'où

$$F_8(c_{12}^2, \dot{c}_8),$$

les c_{12} et c_8 étant sur la Σ_4 fondamentale.

Le degré de la variété est le nombre des intersections variables de trois surfaces du système; l'intersection de deux de ces surfaces est, en dehors de la courbe-base de degré

$$8 \times 8 - 8 - 4 \times 12 = 8$$

rencontrant la c_8 en 16 points, et la c_{12} en 24 points, dont 8 sont communs par une courbe du 8e ordre ne rencontre la F_4 qu'en 32 points. La courbe du 8e ordre rencontre une autre F_8 en

$$8 \times 8 - 8 - 2 \times 24 = 8 \text{ points.}$$

La variété représentée est donc une V_8, dotée d'un point quadruple et d'un point triple.

Le genre arithmétique d'une F_8 du système est

$$35 - (48 - 19 + 9) = 5.$$

Les sections de deux telles F_8, sont de genre

$$3 \times 7 - 12 = 9 = 6 + 3.$$

Nous avons donc obtenu une V_8 de S^5. Notons, qu'à partir de son point quadruple, cette V_8 se projette sur S^4, selon une variété du 4e ordre. Cette variété V_8 appartient donc à un hypercône du 4e ordre, et c' en est la section par l'hyperquadrique passant au sommet. Montrons que l'on peut passer de cette variété rationnelle à la variété V_8

dont tous les genres sont 1, en faisant disparaître le point quadruple, c'est-à-dire que la variété V_8 de S^5 section d'une hypersurface du 4^e ordre par une hyperquadrique est de tous les genres 1.

En effet, une hyperquadrique de S^5 peut se représenter par le système des H-quadriques de S^4, passant par une quadrique-base. Leur intersection par une variété du 4^e ordre se représente par une variété du 8^e ordre, passant quatre fois par la quadrique-base. Les adjointes d'ordre $(n-5)$ doivent être du 3^e ordre et contenir trois fois la quadrique; elles se réduisent donc au S^3 contenant la quadrique, celui-ci compté trois fois. Les adjointes successives sont des surfaces d'ordre $3n$, passant $3n$ fois par la quadrique, donc se ramenant toujours à ce S^3 contenant la quadrique. On a donc

$$p_g = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = \ldots = 1.$$

De combien de modules dépend cette variété ?

Les quadriques de S^5 sont ∞^r,

$$r = \frac{3\times 4\times 5\times 6\times 7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} - 1 = 20,$$

les variétés du 4^e ordre de S^5 sont $\infty^{r'}$

$$r' = \frac{5\times 6\times 7\times 8\times 9}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} - 1 = 125.$$

Par notre V_8 passent toutes les variétés du 4^e ordre de la forme

$$\mathcal{V}_4 + \lambda QQ' = 0,$$

Q et Q' représentant deux quadriques de S^5, dont l'une définit la V_8. Il passe donc ∞^{21} $\mathcal{V}_4$ par notre V_8.

Les projectivités de S^5 sont ∞^{35}, d'où le nombre de modules de notre V_8,

$$20 + 125 - 35 - 21 = 89.$$

Ceci est en accord avec la représentation. En effet, si l'on impose un point quadruple et un point triple, la variété rationnelle devra dépendre de

$$89 - 31 - 11 = 47 \text{ paramètres},$$

ce que l'on vérifie. La Σ_4 dépend de 34 paramètres, une c_8 intersection par une quadrique dépend de 9 paramètres, une c_{12} intersection par une cubique dépend de 19 paramètres, et il y a ∞^{15} homographies dans S^3; notre représentation dépend donc de

$$34 + 9 + 19 - 15 = 47 \text{ paramètres}.$$

Nous obtenons donc un résultat différent de celui obtenu pour les surfaces. Les variétés dont tous les genres sont 1, correspondant à des S^{π} distincts, ne sont pas dotées du même nombre de modules.

On peut noter que, sur cette variété du 8^e ordre représentée par une $V_8(Q_2^4)$ de S^4, les variétés adjointes des sections hyperplanes, sont découpées par les variétés du 4^e ordre passant trois fois par la quadrique-base, variétés qui se réduisent aux variétés du 2^e ordre passant simplement par la quadrique-base, c'est-à-dire les sections hyperplanes elles-mêmes.

L'étude de notre système d'équations indéterminées devient très rapidement très complexe, mais on peut obtenir quelques résultats par un procédé analogue à la méthode du point double dans les surfaces dont tous les genres sont 1.

Supposons donc connaître, dans S^{π}, une variété F_n dont tous les genres sont 1. Je lui impose un point triple. Les sections hyperplanes passant par ce point triple forment un système $\infty^{\pi-1}$, de surfaces possédant un point triple; or, les surfaces sans point triple sont de genre arithmétique $p_a = \pi$; celles dotées d'un point triple seront donc de genre arithmétique $\pi - 1$. Si donc on projette la F_n de ce point triple, on aura une variété analogue de $S^{\pi-1}$ dotée d'une cubique. Son ordre sera $n - 3$, et le genre des courbes sections de deux sections hyperplanes, sera diminué de 3.

Si donc nous savons construire, dans $S^{\pi-1}$, une F_{n-3} dotée d'une surface cubique à sections elliptiques, nous pourrons, dans l'espace S^{π}, construire une F_n dotée d'un point triple, dont elle sera projection.

Revenons à notre V_8 de S^5 rationalisée par l'imposition du point quadruple, et du point triple, représentée par

$$F_8(c_{12}^2, c_8).$$

Supposons alors la c_{12} décomposée en une c_9, intersection complète de deux surfaces cubiques, et une c_3 plane

$$c_{12} = c_9 + c_3.$$

Soit γ_3 l'autre cubique plane section d'une autre surface cubique Σ_3 passant par la c_9, et considérons le système de surfaces

$$F_{11}[(c_9)^3, (c_3)^2, (\gamma_3)^2, c_8].$$

Les sections planes sont de genre

$$45 - 27 - 6 = 12.$$

Les adjointes sont des

$$F_7[(c_9)^2, c_3, \gamma_3],$$

les intersections des courbes-bases vérifient

$$(c_9, c_3) = 9, \qquad (c_9, \gamma_3) = 9, \qquad (c_3, \gamma_3) = 6.$$

Leur nombre est

$$\frac{8 \times 9 \times 10}{6} - \{[(3 \times 7) - 4] \times 9 - 5(10 - 1)\} - 3 - 3 = 6.$$

La dimension du système des F_{11} est au moins 6, car s'il existe une F_{11} non décomposée, le système

$$F_{11} + \Sigma_4 . F_7 = 0$$

est de dimension 6. Il ne peut surpasser 6, car deux telles surfaces se coupent selon une courbe du 11^e ordre, sur laquelle les autres surfaces du système découpent une g_{11}^{r-1}. Or, ces courbes sont de genre 2, puisque la série canonique est une g_{22}^{11}. La série semi-canonique est, au plus, une g_{11}^{5}, donc

$$r - 1 \leqq 5, \qquad \text{et} \qquad r \leqq 6, \qquad \text{d'où} \quad r = 6.$$

Nous avons donc l'image d'une variété de S^6 dont tous les genres sont 1 (si l'on en « enlève » le point quadruple et les deux points triples). Il est à noter ici que le point quadruple n'est plus général, puisque sa représentation Σ_4 doit contenir des droites.

Ce procédé permet encore d'obtenir une F_{14} de S^7, représentée par une variété rationnelle à point quadruple, dôtée de trois points triples. Cette variété rationnelle se représente par le système

$$F_{14}(c_9^4, c_3^2, \gamma_3^2, g_3^2, c_2)$$

toutes les courbes-bases étant sur une Σ_4 fondamentale, c_9 et c_3 sur une Σ_3, c_9 et γ_3 sur une Σ'_3, c_9 et g_3 sur une Σ''_3 toutes fondamentales.

Les intersections sont bien d'ordre

$$196 - 9 \times 16 - 36 - 2 = 14.$$

Leur genre est

$$6 \times 13 - 9 \times 6 - 6 = 15.$$

Le genre arithmétique est le nombre des

$$F_{10}(c_9^3, c_3, \gamma_3, g_3)$$

qui est égal à 7.

Avant de poursuivre davantage cette étude, notons quelques différences avec le cas des surfaces.

1° Il n'est pas possible de trouver un système de courbes-bases, permettant d'assurer l'existence d'une variété rationalisée, pour une valeur donnée de π; le système d'équations indéterminées n'ayant pas une solution générale;

2° La méthode utilisée pour « enlever le point triple » des surfaces ne peut réussir avec les variétés, car on ne connaît pas de combien de modules doit dépendre la variété dont tous les genres sont 1 de S^π;

3° Enfin, en général, l'imposition d'un point quadruple à une variété dont tous les genres sont 1, amenant les variétés à n'avoir que des genres nuls, ne suffit pas pour les rendre rationnelles. Nous avons là, si l'on trouve un procédé de construction directe des variétés dont tous les genres sont 1, un moyen d'obtenir des variétés à genres zéro, non rationnelles.

Considérons maintenant les variétés « multiples i ». Nous avons ainsi les systèmes de variétés équivalentes aux sections des variétés déjà rencontrées par les hypersurfaces de S^π.

La variété du 40ᵉ ordre « double de la V_5 » de S^4, se représente, si rationalisée, par une

$$F_{10}(c_{20}^2),$$

la c_{20} étant toujours sur la Σ_4.

Le double de la V_8 de S^5 sera une variété d'ordre 64, représentée par une

$$F_{16}(c_{12}^4, c_8^2),$$

c_{12} étant sur Σ_4 et Σ_3, c_8 sur Σ_4. On peut montrer que la surface cubique fondamentale Σ_3 introduit encore un point triple. Si l'on projette deux fois de celui-ci, on obtient la F_{10} précédente dotée d'une surface du 12ᵉ ordre; les sections hyperplanes de cette Φ_{12} sont d'ordre

$$3 \times 10 - 2 \times 12 = 6$$

c'est-à-dire sont les courbes de genre 4, représentées par les sections quadriques de la Σ_3.

Notons que, si à partir de la V_{64} de S^{19}, on avait projeté simplement du point triple, on aurait obtenu, dans S^{18}, la V_{61} représentée par

$$F_{13}(c_{12}^3, c_8^2).$$

Si, au contraire, à partir de la V_{64} de S^{19}, on projette trois fois du point triple, on obtient une variété représentée par

$$F_7(c_{12}, c_8^2).$$

Mais une telle représentation ne peut exister, car la c_8 appartiendrait alors à une cubique et à une quadrique, ce qui est impossible.

Ceci nous montre, néanmoins, que l'on peut, par l'imposition de points triples, et par projection, obtenir des variétés du type cherché.

Je vais maintenant montrer qu'il existe d'autres classes de surfaces rationnelles, possédant une singularité représentable, par une surface du 4^e ordre fondamentale Σ_4, et qui sont, par conséquent, virtuellement de tous les genres égaux à 1. On pourra donc, en admettant que le point singulier, représenté par cette Σ_4, puisse être enlevé, concevoir de nouvelles séries de variétés dont tous les genres sont 1.

Considérons ainsi le système des

$$F_6(c_{24}),$$

la c_{24} étant l'intersection de la F_6 avec une Σ_4 fondamentale. Les F_6 forment un système de surfaces de genre 10, les surfaces adjointes d'une F_6 étant les quadriques. Le système des F_6 est ∞^{10}; en effet, s'il existe F_6^0, toutes les surfaces

$$F_6^0 + \lambda\Sigma_4 Q = 0$$

appartiennent à ce système, et celles-là seulement, puisque, si l'on considère une F_6 quelconque passant par la c_{24}, l'intersection de F_6^0 et F_6 se décompose en la c_{24} et une c_{12}, située sur une quadrique.

Étudions maintenant l'ordre de la variété ainsi représentée. Deux F_6 se rencontrent selon une c_{12}, qui rencontre la c_{24} en 48 points. Une troisième F_6 rencontre la c_{12} en 72 points, dont 24 sont variables. On a donc une V_{24} de S^{10}. Notons que le genre de la c_{12} intersection de deux F_6 est celui d'une section quadrique de la F_6; c'est-à-dire

$$10 + 10 + 6 - 1 = 25 = 24 + 1.$$

Nous retrouvons bien les caractères d'une variété dont tous les genres sont 1. Sur la variété rationnelle, la Σ_4 représente un point multiple. Deux sections y passant se coupent selon une biquadratique, qui rencontre la Σ_4 en 16 points. La singularité est donc formée d'un point multiple d'ordre 16, dont le cône tangent est une surface dont tous les genres sont 1, F_{16} de S^9, équivalente aux sections quadriques de la F_4.

Considérons de même le système des F_7,

$$F_7(c_{28}),$$

La c_{28} étant sur une Σ_4 fondamentale; ces surfaces forment un système ∞^{20} de surfaces de genre arithmétique 20. Deux telles F_7 se coupent selon une courbe du 21^e ordre, section cubique de la F_7 c'est-à-dire représentable par

$$C_{21}(6A^7),$$

donc de genre

$$10 \times 19 - 6 \times 21 = 64.$$

Cette courbe rencontre la c_{28}-base en 84 points, donc une autre F_7 en

$$7 \times 21 - 84 = 63 = 64 - 1.$$

Nous obtenons donc, dans S^{20}, une V_{63}, virtuellement, dont tous les genres sont 1. Cette variété possède une singularité, représentée par la Σ_4 fondamentale. Deux sections hyperplanes passant par le point multiple se coupent selon une c_9, qui rencontre la Σ_4, en 36 points. Le point multiple est donc d'ordre 36, et son cône tangent découpe sur S^{19}, une surface dont tous les genres sont 1, qui est équivalente aux sections de la F_4 de S^3 par les cubiques. Une telle singularité abaisse de 54 le genre des sections hyperplanes qui y passent.

Cette série de variétés peut s'étendre. Considérons en effet les $F_n(c_{4n})$, la c_{4n} étant l'intersection complète de F_n et de Σ_4. Les surfaces ont pour genre arithmétique

$$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}$$

et leur système est ∞^N avec

$$N = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}.$$

Ces variétés sont d'ordre

$$n(n-4)^2.$$

En effet, deux F_n se rencontrent selon une $c_{n(n-4)}$, qui coupe la c_{4n} de Σ_4 en $4n(n-4)$ points. L'intersection de cette courbe avec la F_n générale possède

$$n[n(n-4)] - 4n(n-4) = n(n-4)^2 \text{ points variables.}$$

Le genre d'une telle courbe est équivalent au genre d'une section de F_n par une F_{n-4}, c'est-à-dire la section de F_n par une F_α étant

$$\frac{\alpha(n-1)(n-2)}{2}+n\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}-(\alpha-1),$$

c'est-à-dire si $\alpha = n-4$,

$$\frac{(n-4)(n-1)(n-2)}{2}+n\frac{(n-4)(n-5)}{2}-(n-5)=n(n-4)^2+1.$$

Le point multiple représenté par la Σ_4 est un point multiple d'ordre

$$4(n-4)^2,$$

dont le cône tangent est dans S^{N-1} une surface d'ordre $4(n-4)^2$ dont tous les genres sont 1, équivalente aux sections de la F_4 de S^3 par les surfaces d'ordre $(n-4)$.

A partir de cette série de variétés, on peut en obtenir d'autres, dotées en plus d'une autre singularité; supposons par exemple que, sur la $F_6(c_{24})$ la c_{24} se décompose en deux courbes appartenant à une Σ_3 et à une Σ'_3,

$$c_{24} = c_{12} + c'_{12},$$

nous considérerons le système

$$F_9(c_{12}^2, c'_{12})$$

Ce système de surfaces est de genre arithmétique égal à celui des $F_5(c_{12})$, c'est-à-dire

$$56-(5\times 12+1-19)=14.$$

Sur cette variété, la Σ_3 représente un point multiple d'ordre x, tel que deux surfaces y passant $F_6(c_{12}, c'_{12})$ se coupent selon une c_{12} rencontrant Σ_4 en 48 points dont 24 sur c'_{12} et 24 sur c_{12}, et 12 en des points communs à c_{12} et c'_{12}. La variété Σ_3 représente donc un point du 12e ordre; notre variété est donc une V_{36} de S^{14}. Il est à remarquer que nous avons déjà rencontré une variété de S^{14} dont tous les genres sont 1, à savoir la V_{40} « double de la V_5 de S^4 ». Ceci nous montre qu'il peut exister des familles distinctes de variétés dont tous les genres sont 1, qui se distinguent par l'ordre et le genre des courbes sections de sections hyperplanes.

Notons que les variétés rationnelles, du type $F_n(c_{4n})$ dépendent de $2n^2+20$ paramètres essentiels, la c_{4n} dépendant de $2n^2+1$ arbitraires, et la V_4 de 19 modules. La singularité représentée par la Σ_4

dépend d'autant de paramètres que la Σ_4, c'est-à-dire 31. Le nombre des modules varie donc avec les familles considérées.

3. **Les points triples. Conclusion.** — Notons d'abord que l'on peut, à partir d'un point triple de la V_5, obtenir un S^3 double; si l'on fait disparaître, pour ce S^3 double la condition de posséder une surface cubique, nous obtiendrons un S^3 double avec surface de diramation du 8^e ordre.

Les modules de cette variété sont

$$\frac{9 \times 10 \times 11}{6} - 16 = 149,$$

autant que les surfaces du 8^e ordre de S^3, non projectivement identiques.

Les S^3 doubles, que l'on considère rapportés à un S^π, dont les sections hyperplanes sont représentées par les quadriques, cubiques, etc. de S^3, donnent des variétés doubles, que l'on peut tenir pour des variétés dont tous les genres sont 1.

Supposons partir d'une variété dont tous les genres sont 1, située dans un S^π. Si on lui impose un point triple, on aura un système $\infty^{\pi-1}$ d'hyperplans y passant, découpant des surfaces dont le genre arithmétique diminue de 1, le genre et l'ordre des courbes sections diminuant de 3.

Si l'on considère maintenant les sections passant deux fois au point triple (c'est-à-dire les hyperplans contenant le cône tangent au point triple), leur système a la dimension $\pi - 5$. Pour projeter, il faut à partir de la variété V_{n-3} contenant une surface cubique, projeter de la surface cubique. Deux telles surfaces sections rencontrent la surface cubique selon une C_6^4, et se rencontrent en 12 points sur la cubique. La projection de la variété sur $S^{\pi-5}$ donne donc des surfaces dont les sections diminuent quant à l'ordre et quant au genre de

$$3 \times 2^3 = 24.$$

Sur la V_{n-24} projetée, le point triple se représente par une surface du 12^e ordre, à sections de genre 4, équivalentes aux sections quadriques d'une surface cubique. Cette surface appartient à un S^9; si l'on considère, sur la V_n de S^π, le point triple compté trois fois, c'est-à-dire le système des hyperplans passant trois fois au point triple, ce système se représente sur la V_{n-24} de $S^{\pi-5}$, par le système des hyperplans passant par le S^9, contenant la surface du 12^e ordre. La dimension du système de ces hyperplans est donc

$$\pi - 5 - 10 = \pi - 15.$$

Les surfaces, sections par ces hyperplans, coupent la surface du 12^e ordre selon une courbe de genre x, telle que

$$p_a - 15 + x = p_a - 5, \qquad x = 10.$$

Cette courbe est équivalente aux sections cubiques d'une surface du 3^e ordre; ce sont des courbes d'ordre 27. On obtient donc, pour le genre et l'ordre de nos surfaces, une diminution de

$$27 + 27 + 27 = 81.$$

Nous obtenons donc, dans $S^{\pi-15}$, une V_{n-81} dont l'ordre et le genre des sections sont abaissés de 81.

D'une façon générale, si l'on considère sur la V_n les hyperplans passant α fois au point triple, le genre arithmétique diminue de $\frac{\alpha+\alpha^3}{2}$ l'ordre et le genre de $3\alpha^3$ ce que l'on montre par récurrence.

On peut donc, connaissant une variété, en déduire par projection d'autres variétés; en partant d'une variété dotée d'une surface rationnelle d'ordre $3\alpha^2$, obtenir en y ajoutant α fois cette surface une V_n, dont elle soit la projection.

En conclusion, on peut dire que les procédés employés au cas des surfaces ne s'étendent pas directement au cas des variétés, à trois dimensions. Le nombre des modules n'étant pas constant, on ne peut de la connaissance d'une variété rationnelle, virtuellement de genres 1, affirmer l'existence d'une variété réellement de genres 1 par « l'enlèvement » de la singularité de la variété rationnelle.

Si pourtant nous admettons ce point, ce qui est très vraisemblable, il en résulterait que, contrairement à ce qui se passe pour les surfaces, il peut exister des valeurs de π pour lesquelles il y ait plusieurs familles distinctes de variétés dont tous les genres sont 1, ces variétés n'ayant ni même ordre, ni même nombre de modules.

Ce problème des variétés n'étant ici qu'esquissé, je me borne à citer quelques-unes des questions qu'il suggère :

1° L'imposition d'une surface cubique à une variété dont tous les genres sont 1, impose un certain nombre de conditions à cette variété. Quel est le nombre de ces conditions ? Il semble, par les quelques exemples cités, que ce nombre doive dépendre de la variété considérée. Dépend-il alors seulement de la dimension du système, ou également de l'ordre de notre variété ?

2° Peut-on, par une voie analogue au théorème de Bachet-Legendre, ramener, par l'imposition de quelques points triples, toutes ces variétés à un nombre fini de variétés dotées de surfaces rationnelles ?

3° Existe-t-il pour toutes les valeurs de S^{π}, des variétés dont tous les genres sont 1 ? Il semble bien que oui, si l'on peut, arbitrairement, imposer un point triple à une variété, et si sur une variété donnée, la possession d'une surface rationnelle n'est pas une propriété générale, n'imposant aucune particularisation des modules. Nous avons vu qu'alors il y aura, en général, des familles distinctes de variétés se séparant par leur ordre. Mais il y a là un nouveau problème de classification : les variétés ayant même ordre et même nombre de modules d'un S^{π} donné, forment-elles ou non un seul système continu ?

Remarque. — La théorie des surfaces canoniques permet indépendamment de nos procédés de répondre affirmativement à la 1re partie de 3°. Mais ceci laisse entier le problème de classification.

Vu et approuvé :

Paris, le 18 octobre 1943.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

P. MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.

ERRATA.

Page 9, ligne 10, *au lieu de* $N = 6\beta - 2$, $\alpha = \beta$, $n = 3\alpha + 3$, *lire* $N = 6\beta$, $\alpha = \beta$, $n = 3\alpha + 3$.

Page 15, ligne 11, *au lieu de* C. $C_8(A^4, 9\beta^2, 1C)$, *lire* C. $C_8(A^4, 9\beta^2, 2C)$.

Page 16, note 1, *au lieu de* Op. cit. p. 3 (p. 44), *lire* Op. cit. p. 3 (§ 44).

Page 17, ligne 3, *au lieu de* biractionnellement, *lire* birationnellement.

Page 17, ligne 27, *au lieu de* $(tx + \varphi_2)(tx + \psi_3) + \ldots$, *lire* $(tx + \varphi_2)(t^2x + \psi_3) + \ldots$.

Page 22, ligne 30, *au lieu de* $(n - 1)$ tangente, *lire* $(n - 1)$ tangents.

Page 45, ligne 10, *au lieu de* $p_1 + \alpha = 48$, *lire* $p_2 + \alpha = 48$.

Page 46, ligne 22, *au lieu de* ∞^2, *lire* ∞^1.

Page 61, ligne 8, *au lieu de* $\int^2$, *lire* $\int^{\pi}$.

Page 68, ligne 36, *au lieu de* $18 + \omega$, *lire* $19 + \omega$.

Page 75, ligne 7, *au lieu de* fype, *lire* type.

Page 85, ligne 12, *lire* $4\pi + 19 - (4\pi - 8) - 8 = 19$.

TABLE DES MATIÈRES.