THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

Contribution à l'étude de la théorie de l'électron de Dirac

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1943

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1943__255__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SÉRIE A,
N° 2037
N° D'ORDRE
2904

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA THÉORIE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 juin 1943 devant la Commission d'Examen.

MM. H. VILLAT — *Président.*
L. DE BROGLIE, R. GARNIER — *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1943

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires ...... M. MOLLIARD. / C. MAURAIN.

Doyen .... PAUL MONTEL, *Professeur*, Théorie des fonctions.

Professeurs honoraires

LÉON BRILLOUIN.	LAPICQUE.	BOHN.	J. DRACH.
AUGER.	G. BERTRAND.	RABAUD.	M. GUICHARD.
DANGEARD.	CH. FABRY.	CAULLERY.	LABROUSTE.
LESPIEAU.	LÉON BERTRAND.	CARTAN.	
VESSIOT.	WINTREBERT.	É. BOREL.	
PORTIER.	DUBOSCQ.	A. COTTON.	

PROFESSEURS

CHARLES PÉREZ.....	T	Zoologie.
L. BLARINGHEM ...	T	Botanique.
G. JULIA............	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN........	T	Minéralogie.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. BRUHAT.........	T	Physique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et Radioactivité.
L. DUNOYER	T	Chimie physique.
M. JAVILLIER.	T	Chimie biologique.
HENRI VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL..........	T	Chimie générale.
M. FRECHET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER.......	T	Électrotechnique générale.
DE BROGLIE........	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN..........		Optique appliquée.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY.............		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES.............	T	Physiologie végétale.
GARNIER............	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL.........	T	Chimie minérale.
TOUSSAINT.........		Technique aéronautique.
M. CURIE...........		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD..........	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT........... ..	T	Chimie (P. C. B.).
CROZE		Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT...........	T	*Théories chimiques.*
VALIRON............	T	Calcul différentiel et intégral.
BARRABÉ...........		Géologie structurale et Géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON..............	T	Analyses et mesures chimiques.
G. DARMOIS.........	T	Mathématiques générales.
CHATTON...........	T	Biologie maritime.
AUBEL..............		Chimie biologique.
JACQUES BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL........		Biologie végétale (P.C.B.).
CABANNES	T	Recherches physiques.
GRASSÉ.............	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
PRÉVOST		Chimie organique.
BOULIGAND.........		Mathématiques.
CHAUDRON.........		Chimie (P. C. B.).
WYART		Minéralogie.
TEISSIER		Zoologie.
MANGENOT..		Biologie végétale (P. C. B.).
P. AUGER...........		Physique.
MONNIER...........		Physiologie générale.
PIVETEAU...... ...		Géologie.
ROCARD............		Physique.
H. CARTAN.........		Calcul différentiel.
SCHAEFFER........	T	*Physiologie générale.*
LAFFITTE..........		Chimie (P. C. B.).
LERAY..............		Mécanique théor. des fluides.
FAVART		Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.

Secrétaire .... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire .... D. TOMBECK.

A MONSIEUR

LE PROFESSEUR LOUIS DE BROGLIE

MEMBRE DE L'INSTITUT

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DE LA

THÉORIE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC

AVERTISSEMENT.

Les diverses études constituant ce travail sont, pour ainsi dire, placées sous le double signe de la Relativité et des Quanta; mais le premier Chapitre est le seul où soit partiellement abordé, une fois de plus, et seulement dans le cadre de la Théorie de Dirac, le problème très ardu posé par les rapports des deux grandes Théories. Le mécanisme par lequel la Théorie de Dirac parvient à concilier, sinon à harmoniser, les deux formalismes en présence est vraiment paradoxal, et paraît bien cacher une énigme.

Mais, ce point étant admis, et les conventions convenables adoptées, les questions que nous abordons dans les Chapitres suivants restent « intérieures » aux conceptions soit relativistes, soit quantiques sous leur forme actuelle; il s'agit d'une extension de la Dynamique relativiste destinée à recevoir la notion de moment cinétique propre ou *spin* (Chap. II); d'une étude et d'un essai d'interprétation de grandeurs et de relations de la Théorie de Dirac intéressant le fluide statistique (Chap. III); d'une comparaison de l'Électromagnétisme classique des milieux polarisés avec la Théorie de Dirac, et d'un retour sur quelques questions restées en suspens (Chap. IV).

Lorsque nous avons à nous référer à certains résultats de Relativité restreinte classique, nous renvoyons à notre Mémoire antérieur sur ce sujet, pour la raison très simple que nous conservons ici nos notations d'alors, et que, dans notre esprit, ce premier Mémoire était un travail d'approche en vue de celui-ci. Pour les questions d'Électromagnétisme des milieux polarisés, que nous avions malheureusement laissées de côté, nous renvoyons à l'Ouvrage classique de R. Becker.

Notations utilisées. — Dans tout le cours de l'Ouvrage, u, v, w désignera une permutation *circulaire* des indices d'espace 1, 2, 3, l'indice temporel étant alors pris explicitement égal à 4; les deux jeux i, j, k, l, et $p, q, r, s = 1, 2, 3, 4$ seront respectivement le jeu des *indices tensoriels d'Univers*, et le jeu *matriciel* ou *spinoriel* propre à la Théorie de Dirac; nous utiliserons en général la convention de sommation sur indices muets du Calcul tensoriel, sauf en quelques calculs du Chapitre III, paragraphe I, où nous introduirons des conventions spéciales, et où nous utiliserons des indices tensoriels λ, μ, ... *sans sommation* lorsqu'ils sont répétés. Enfin, suivant une convention habituelle en Théorie de Dirac, les indices majuscules romains attribués aux γ pourront varier de 1 à 16, et nous leur appliquerons éventuellement la convention de sommation sur indices muets.

Avec plusieurs auteurs, nous considérons le ψ à quatre composantes de Dirac comme une matrice à 4 lignes et 1 colonne, le $\psi^{\star} = \psi^{+}$ et le $\psi^{\times} = i\psi^{+}\gamma^{4}$ de Gordon-Pauli étant alors assimilés à des matrices à 1 ligne et 4 colonnes. D'une manière analogue à celle de W. Franz [1], par exemple, nous introduisons, à côté de l'opérateur différentiel partiel habituel agissant vers la droite, que nous désignons par $\underset{\rightarrow}{\partial^i}$, l'opérateur analogue $\underset{\leftarrow}{\partial^i}$ agissant vers la gauche, et nous introduisons les définitions des deux opérateurs

$$[\partial^i] = \underset{\rightarrow}{\partial^i} - \underset{\leftarrow}{\partial^i}, \qquad (\partial^i) = \underset{\rightarrow}{\partial^i} + \underset{\leftarrow}{\partial^i},$$

qui, de même que les matrices γ de Dirac, agissent à la fois vers la droite et vers la gauche. Nous mettons un point pour *arrêter*, vers la droite ou vers la gauche, l'action d'un des opérateurs précédents. Enfin, nous conservons la notation habituelle ∂^i pour désigner l'*opérateur désamorcé* qui n'agit plus qu'à sa droite immédiate [2].

Nous introduisons systématiquement, à côté des 5 tenseurs densitaires classiques de Dirac et Darwin

$$\rho_D = \psi^{\times}\gamma\psi,$$

5 tenseurs du type

$$\rho_S = \psi^{\times}[\partial^i]\gamma\psi,$$

que nous appelons *schrödingeriens* du fait qu'ils s'apparentent au trivecteur de courant de la Théorie primitive de Schrödinger. *Par définition*, le $\gamma = \gamma^{ij\cdots}$ de ces tenseurs est un produit $\gamma^i\gamma^j\ldots$ des matrices de Dirac, où *les indices tensoriels i, j, ... sont essentiellement supposés tous différents;* on sait en effet que ces $\gamma^{ij\cdots}$ se comportent comme des composantes de *tenseurs matriciels* complètement antisymétriques, dont il convient donc de *définir* comme nulles les composantes ayant deux ou plusieurs indices égaux. Une barre surmontant un γ ou un tenseur complètement antisymétrique désignera le dual de ces

---

(1) *Zur Methodik der Dirac-Gleichung*, *Voir* p. 404.

(2) t désignant le temps, nous écrirons généralement ∂^t ou ∂_t pour $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

grandeurs; exceptionnellement, au Chapitre III, paragraphe I, nous utiliserons une *barre duale partielle sur deux indices* surmontant des tenseurs complètement antisymétriques du 3e rang.

Toutes nos autres notations sont en accord avec celles de notre Mémoire sur la Relativité restreinte, *à un changement de signe près dans la définition du quadripotentiel* A^i *à partir du champ* H^{ij} (1); par exemple, nous utilisons souvent les duals $ic\,\delta u^l$ et $ic\,\delta s^{kl}$ des éléments d'intégration $[dx^i\,dx^j\,dx^k]$ et $[dx^i\,dx^j]$; de plus, nous posons

$$\delta u = ic\,\delta u^4 = [dx^1\,dx^2\,dx^3] \qquad \text{et} \qquad \delta s^{uv} = ic\,\delta s^{uv4} = [dx^u\,dx^v]$$

pour désigner l'élément de volume et les trois composantes de l'élément d'aire habituels. Nous faisons usage à plusieurs reprises de la formule générale de transformation des intégrales multiples

$$\int_p A_{\alpha\beta\ldots\rho\sigma\ldots}[dx^\lambda\,dx^\mu\ldots dx^\rho\,dx^\sigma\ldots] = \int_{p+1}\partial_\omega A_{\alpha\beta\ldots\rho\sigma\ldots}[dx^\lambda\,dx^\mu\ldots dx^\rho\,dx^\sigma\ldots dx^\omega];$$

les éléments d'intégration de rang p $[dx^\lambda\,dx^\mu\ldots]$ sont les tenseurs complètement antisymétriques définis comme étant les déterminants extraits, avec leur signe, du tableau à p lignes et n colonnes

$$\|dx_i^j\|,$$

n étant le nombre de dimensions de l'espace considéré (2).

Dans le présent travail, comme dans notre Mémoire cité, nous utilisons ce qu'on peut appeler *les unités E. M. d'Heaviside*, unités avec lesquelles l'impulsion-masse électromagnétique d'un point chargé a pour expression QA^i (3). Pour l'électron, on a

$$Q = -\frac{e}{c},$$

en sorte que son impulsion-masse électromagnétique s'écrit $-\frac{e}{c}A^i$.

Les équations ou relations intéressant l'ensemble de l'Ouvrage sont numérotées entre parenthèses; celles, au contraire, qui servent seulement d'intermédiaires de calcul sont, lorsqu'il est nécessaire, désignées par un symbole entre crochets.

---

(1) et à un changement de signe près dans la définition du produit vectoriel d'*espace*, sans répercussion sur les formules d'Univers.

(2) *La Relativité restreinte*, p. 6-7 et 31.

(3) *Op. cit.*, p. 34-35, 48 et 62.

CHAPITRE PREMIER.

SUR LES RAPPORTS DE LA RELATIVITÉ ET DES QUANTA EN THEORIE DE DIRAC.

1. Le problème des rapports, en Théorie de Dirac, de la Relativité restreinte et de la Mécanique ondulatoire, pour « restreint » qu'il soit par rapport à l'ensemble des Théories relativistes et quantiques, est déjà suffisamment ardu pour mériter un examen approfondi; le présent Chapitre ne vise pas même à étudier dans sa totalité le problème restreint, mais seulement à en examiner avec détail certains aspects particuliers.

Une première remarque, classique, est celle-ci : tandis que la Mécanique ondulatoire non relativiste issue des travaux de Schrödinger a engendré sans difficulté une Mécanique des systèmes de n points en interaction, la Mécanique ondulatoire relativiste du point doué de spin, dont la base formelle reste la Théorie de Dirac, ne sait traiter jusqu'ici, sans approximations, que le problème du point unique plongé dans un champ préétabli. Cette grave situation n'est pas propre à la Mécanique ondulatoire, puisqu'elle se rencontrait déjà en Dynamique préquantique; c'est donc la Relativité qui s'avère ici défaillante, mais on peut remarquer que la Théorie des Quanta n'a pas contribué à éclaircir le problème.

Il semble que la constitution d'une Dynamique relativiste des systèmes de n points en interaction rencontre deux difficultés principales, d'ailleurs connexes. La première résulte du remplacement des *potentiels instantanés* classiques par des potentiels se propageant à une vitesse finie, égale à c dans le cas de l'Électromagnétisme. Il suit de là que chacun des *points* sera influencé par les états des autres *points* « en onde » avec lui, états situés sur l'*hypercône de lumière* ayant ce point pour sommet; lors donc qu'on voudra traiter le problème de Dynamique des n points, il faudra considérer à la fois n hypersurfaces de ce type, au lieu de l'unique *hyperplan simultané* de la Dynamique classique. Pour ardu qu'il soit, le problème est physiquement déterminé sur ces bases, donc certainement formulable; les difficultés de sa solution, peut-être actuellement insurmontables, ne sont que d'ordre mathématique.

L'une de ces difficultés consiste évidemment en ce que les positions d'Univers des n points sont en principe indépendantes les unes des autres, alors qu'en Dynamique ancienne elles étaient prises toutes à la fois dans l'*hyperplan simultané*. Chacun des *points* relativistes possède bien son *temps propre*, mais l'on ne voit pas *a priori* s'introduire un paramètre d'évolution global pour l'ensemble du « nuage ». On peut se demander s'il n'y aurait pas lieu de rétablir un tel paramètre, soit pour des raisons physiques qui échappent actuellement, soit pour des raisons mathématiques que l'étude effective du problème pourrait faire apparaître. Peut-être constaterait-on alors que les *positions d'Univers* des n points à prendre à la fois se répartissent au voisinage d'une même hypersurface du genre espace, se déplaçant vers les temps croissants, et caractérisée par les valeurs croissantes d'une fonction d'*action*. Sans vouloir rien préjuger des résultats d'une telle étude, qu'il serait intéressant d'entreprendre, il nous paraît que ces simples considérations éclairent la nature du problème posé, et que la solution *de principe* que nous suggérons respecterait à la fois les symétries relativistes, et les habitudes classiques d'un *paramètre d'évolution* et d'une *hypersurface de configuration à trois dimensions* valables pour l'ensemble du système.

C'est évidemment ce même *paramètre d'évolution objectif* et cette même *hypersurface de configuration objective* qu'il faudrait pouvoir rétablir en Mécanique ondulatoire, pour harmoniser complètement les symétries relativistes et les principes quantiques. Or, il est remarquable que la Théorie de Dirac paraisse, non seulement se prêter mal à une pareille opération, mais encore fournir une contre-indication fort nette. En effet, on pourrait être tenté de « compter » un paramètre d'évolution objectif le long des lignes de courant de Dirac, qui sont du genre temps, mais ces lignes n'admettent pas en général d'hypersurfaces trajectoires orthogonales; inversement, le quadrivecteur densitaire que nous appelons $U^i_{(1)}$ se trouve être un gradient d'Univers [*voir* plus bas, équations (61′ B) et (62 B, II)], mais il n'est pas nécessairement du genre temps; la théorie de Dirac ne fournit, à notre connaissance, aucun quadrivecteur de champ jouissant à la fois de ces deux propriétés, qui semblent nécessaires l'une et l'autre pour qu'on puisse aboutir dans le sens indiqué.

Une autre raison importante nous paraît condamner d'avance toute tentative de ce genre : *le jeu des quatres matrices γ^i ne possède pas la symétrie relativiste*, en ce sens que les quatre γ^i peuvent être choisies hermitiennes, mais non pas trois hermitiennes et une antihermitienne. On peut s'assurer, et nous montrerons, qu'il est impossible de modifier la théorie de Dirac de manière à remédier à cet état de choses; la condition recherchée n'est pas compatible avec la condition bien connue de Dirac

$$\frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i) = \delta^{ij},$$

qui est indispensable pour que l'équation du second ordre de Gordon soit, en l'absence de champ, conséquence de la Théorie. Ces remarques ont leur importance. S'il était prouvé de manière définitive qu'il est impossible d'introduire, en Mécanique ondulatoire relativisée, un paramètre d'évolution objectif analogue au *temps propre* de la Relativité (ou au *temps cosmique* des Théories traitant de l'ensemble de l'Univers), il faudrait conclure, par exemple, que *l'électron de Dirac pris en lui-même ignore le temps*; l'écoulement du temps ne se manifesterait que dans un système macroscopique de référence et d'observation. On se rappelle au contraire que le seul paramètre d'évolution doué d'une signification nette en Relativité non cosmique est le *temps propre* des points matériels, ou des systèmes relativement assez petits pour être assimilés à des points matériels.

Non seulement l'asymétrie du jeu des γ^i empêche la Théorie de Dirac de donner la symétrie relativiste aux principes quantiques généraux, mais *c'est précisément une intervention spéciale de la matrice γ^4 qui lui permet* (*en connexion avec l'intégration à temps constant*) *de concilier le formalisme de ces principes avec les exigences de la Relativité*. Après avoir rappelé, au paragraphe I, les principales manifestations du défaut de symétrie relativiste des principes généraux de la Mécanique ondulatoire, nous analysons au paragraphe II le mécanisme, fort paradoxal, par lequel la Théorie de Dirac parvient à réaliser cette conciliation. La question est en connexion étroite avec ce que nous avons appelé ailleurs le *second principe* de la Relativité (1); effectivement, nous montrons que la condition

$$S^{+}\gamma^4 S = \gamma^4$$

imposée par Von Neumann à la matrice S du changement de repère galiléen, condition qui fait bien apparaître le rôle spécial de γ^4, n'est autre que l'*expression matricielle du second principe de la Relativité* (n° **7**). Après avoir montré comment ces considérations jouent, notamment, dans la définition du tenseur inertique de Tetrode, nous les utilisons pour préciser le classement tensoriel et physique des 16 opérateurs γ de la Théorie de Dirac (n° **8**).

Quant à l'*expression matricielle du premier principe de la Relativité* (2), nous montrons qu'elle est fournie par l'ensemble de deux conditions connues : la première, assez immédiate, énoncée par Von Neumann et par Pauli, est la commutabilité de S avec le *second invariant matriciel* $\bar{\gamma} = \gamma^{uvw4}$; la seconde, due à Pauli, peut s'écrire

$$\tilde{S}BS = B.$$

$\tilde{S}$ désignant la matrice S *transposée*, et B une certaine matrice introduite par Pauli dont nous rappelons la définition (n° **4**).

Faut-il espérer que la formulation matricielle du *premier* et du *second principe* de la Relativité donnera le moyen de comprendre les propriétés de l'espace et du temps mieux que ne le permettent les lois tensorielles de Minkowski? Il ne le semble malheureusement pas. On sait que le rattachement direct des deux modes de changement de repère galiléen de la Théorie de Dirac l'un à l'autre est fort laborieux, circonstance qui constitue un obstacle sérieux à la compréhension profonde de ce que la Théorie de Dirac apporte de nou-

(1) *La Relativité restreinte*, p. 15.
(2) *Op. cit.*, p. 10.

veau sur ce point [1]. Toute cette étude laisse l'impression que, malgré, ou même, pourrait-on dire, à cause de sa grande ingéniosité, la Théorie de Dirac ne constitue pas encore le dernier mot de ce que devra être la théorie relativiste et quantique de l'électron. En somme, on peut dire que le conflit profond de la Relativité et des Quanta subsiste tel quel en Théorie de Dirac, mais aussi que la Théorie de Dirac réalise un *modus vivendi* si habile que le conflit, toujours latent, n'éclate jamais [2]. Le fait expérimental qu'il faille être à la fois quantique et relativiste prouve que les deux Théories sont, en un sens, « vraies » l'une et l'autre; le fait théorique du « conflit » montre que l'un au moins des deux formalismes, et probablement les deux, sont encore imparfaitement adéquats à la réalité physique. En ce cas, il ne faudrait pas espérer la découverte d'un moyen de « réconcilier » à proprement parler la Relativité et les Quanta, mais l'avènement de conceptions nouvelles et plus puissantes : le problème serait d'ordre, non logique, mais physique.

I. — Sur le défaut de symétrie relativiste des principes généraux de la mécanique ondulatoire.

2. La Mécanique ondulatoire, non relativiste ou relativiste, fait correspondre à toute grandeur physique r attachée au système (système de points en

---

(1) A notre connaissance, le calcul réciproque des éléments des matrices S et o_i^j relatives aux deux modes de changement de repère galiléen n'a jamais été donné explicitement sous sa forme générale. Dans cet ordre d'idées, citons le calcul, par Pauli, de S en fonction des ε_i^j de la transformation infinitésimale (*Handb. Phys.*, XXIV$_3$, p. 222); et le calcul, par Möglich, des S correspondant à trois transformations spéciales de Lorentz (et aussi à une rotation des axes d'espace) dans le cas où l'on adopte pour les γ^i une représentation particulière (*Zeits. Phys.*, **48**, p. 852).

La théorie générale du changement de repère galileen en Théorie de Dirac que nous donnons d'après Dirac, Von Neumann et Pauli repose entièrement sur le *Théorème d'existence* de S, démontré par Pauli; les élégantes conditions restrictives imposées à S par ces auteurs sont ainsi démontrées par une voie assez indirecte.

(2) Il y a cependant un point, assez délicat, où le problème demanderait une étude approfondie que nous n'avons pas entreprise. D'après les principes de la Mécanique ondulatoire, une mesure faite à l'instant t *détermine* pour les temps futurs la fonction d'onde $\psi_t(x^1, x^2, x^3)$, jusqu'à ce qu'une autre mesure fixe à nouveau cette fonction. Dans l'Univers non relativiste, aucune difficulté ne se présente, les divers *hyperplans de mesure* étant parallèles entre eux. Il n'en va plus de même, dans l'Univers relativiste, pour deux mesures faites sur le *même système* dans *deux repères galiléens différents;* les hyperplans de mesure se coupent alors, et déterminent deux régions qui sont du « passé » pour une mesure et du « futur » pour l'autre, avec échange lorsqu'on change de région.

Les difficultés soulevées par ce *problème quantique du changement de repère galiléen* sont certainement considérables; on y verrait se manifester une sorte d'interférence des notions de *relativité* et de *subjectivité quantique*.

interaction dans le cas non relativiste, point unique dans le cas relativiste), un opérateur linéaire hermitien R, opérant sur tout ou partie des coordonnées d'*espace* x^u; le temps t, qui n'est jamais à proprement parler une variable « opérée » par un opérateur R, peut figurer comme paramètre dans la définition des R. Quant à l'hermiticité, elle est définie à chaque instant t, dans un domaine d'espace pur U, par la condition

$$\int_U \varphi^* . R\psi . \partial u = \varepsilon \int_U (R\varphi)^* . \psi . \partial u \qquad \text{avec } \varepsilon = \pm 1;$$

dans le cas non relativiste d'un système de points en interaction, ∂u désigne l'élément de volume $[dx^1, dx^2, \ldots, dx^{3n}]$ de l'espace de configuration; les intégrales sont prises dans tout le domaine intéressé par les x^u. C'est ce même domaine d'espace pur, considéré « à un instant t » bien déterminé, qui intervient dans la définition des valeurs et fonctions propres des opérateurs R, comme nous allons le rappeler au numéro suivant. On voit donc que la *variable d'évolution* t et que le *domaine de configuration* U sont *relatifs* au repère galiléen de l'observateur; il semble que cette première dissymétrie fondamentale des principes quantiques se relie étroitement à toutes celles que nous rencontrerons dans la suite de ce Chapitre.

La Mécanique ondulatoire fait correspondre aux *coordonnées d'espace* x^u les opérateurs, évidemment hermitiens,

$$\boxed{X^u = x^u \times;} \tag{1}$$

et aux composantes homologues de l'*impulsion* (*moments conjugués* de Lagrange), les opérateurs

$$\boxed{P^u = -\frac{h}{2\pi i}\partial^u.} \tag{2}$$

L'hermiticité de ces derniers opérateurs résulte du calcul classique [1]

$$\begin{aligned} &\frac{h}{2\pi i}\int_{U_{3n}} (\varphi^* \partial^u \psi + \partial^u \varphi^* . \psi)\, \partial u \\ &= \frac{h}{2\pi i}\int_{U_{3n}} \partial^u (\varphi^* \psi)\, [dx^1\, dx^2 \ldots dx^{u-1}\, dx^u\, dx^{u+1} \ldots dx^{3n}] \\ &= \frac{h}{2\pi i}\int_{U_{3n-1}} (\varphi^* \psi)\, [dx^1\, dx^2 \ldots dx^{u-1}\, dx^{u+1} \ldots dx^{3n}] = 0, \end{aligned}$$

---

(1) La seconde expression s'entend *sans sommation* sur l'indice u.

la dernière intégrale étant nécessairement nulle; si, en effet, elle ne l'était pas, l'intégrale

$$\int_{C_{3n}} (\varphi^* \psi) \left[dx^1 \ldots dx^{u-1}\, dx^u\, dx^{u+1} \ldots dx^{3n} \right]$$

serait divergente, cas exclu par définition même des fonctions de l'espace de Hilbert ([1]).

La Mécanique ondulatoire, non relativiste ou relativiste, fait correspondre à l'*énergie* du système un certain opérateur hermitien H, fonction des opérateurs précédents ([2]), opérant par conséquent sur les coordonnées *d'espace* x^u; enfin, elle définit l'*équation d'ondes* du système comme étant l'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{-\frac{h}{2\pi i}\partial^t \psi = \mathrm{H}\psi.} \tag{3}$$

En Mécanique ondulatoire prérelativiste de Schrödinger, l'interprétation de l'opérateur H était une conséquence naturelle de celle des opérateurs X^u et P^u, en ce sens que la fonction opératorielle $H(P^u, X^u)$ était l'exacte transposition de l'expression hamiltonienne de l'énergie $\mathcal{H}(p^u, x^u)$ de la Mécanique analytique prérelativiste des systèmes. Il n'en va plus de même en Théorie relativiste du point doué de spin : cessant d'y être déduit par simple transposition d'une expression de Mécanique préquantique, l'opérateur *hamiltonien* doit y être défini spécialement.

Comme on l'a signalé maintes fois, il est tout naturel de chercher à donner la symétrie relativiste aux définitions précédentes, en faisant correspondre à la « coordonnée temporelle » $x^4 = ict$ l'opérateur, évidemment antihermitien,

$$X^4 = x^4 \times, \tag{1'}$$

et à l'énergie l'opérateur

$$P^4 = -\frac{h}{2\pi i}\partial^4 = -\frac{1}{ic}\frac{h}{2\pi i}\partial^t. \tag{2'}$$

La question de savoir si l'opérateur X^4 peut ou non représenter *physiquement* le temps tient étroitement à celle qui a été soulevée au numéro précédent touchant la recherche d'un paramètre d'évolution *objectif* en Mécanique ondulatoire; nous ne reviendrons pas ici sur ce problème. Au sujet de l'opérateur P^4, il se pose deux questions bien caractéristiques de l'état ambigu des relations de la Relativité et des Quanta. 1° L'opérateur P^4 correspond-il physiquement

---

([1]) J. Von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, pp. 49 et 50.

([2]) Pour la notion d'opérateurs fonctions d'opérateurs, *voir* par exemple Von Neumann, *op. cit.* p. 46 et sq.

à l'énergie du point doué de spin ? Cette idée ne paraît pas insoutenable dans le cas du point libre; mais, dans les problèmes de quantification de l'atome, où intervient une énergie potentielle d'interaction, c'est l'opérateur H qui représente l'énergie, et qui permet le calcul effectif de son spectre discontinu. Toutefois, bien que non *équivalents*, les opérateurs icP^4 et H fournissent le même résultat lorsqu'on les applique à la fonction d'onde ψ; cela, en vertu même de l'équation d'ondes fondamentale (3). 2° L'opérateur P^4 est-il antihermitien? On ne peut pas l'affirmer; le calcul donné à propos des P^u échoue à le démontrer, la différentielle dx^4 ne figurant pas dans δu; mais l'opérateur $\frac{1}{ic}$ H est bien antihermitien.

3. Ces préliminaires étant rappelés, l'énoncé le plus général qu'on puisse donner des *principes d'interprétation* de la Mécanique ondulatoire est le suivant : soit $E(r)$ le projecteur fournissant à un instant t la décomposition de l'opérateur hermitien R (1); 1° la probabilité pour qu'une mesure faite à l'instant t fournisse pour la grandeur r une valeur comprise dans un intervalle donné Δr est (2)

$$\Delta W_t = \int_U \psi_t^* . \Delta E \psi_t . \delta u; \tag{4}$$

2° si la mesure a montré que la grandeur r a effectivement une valeur comprise dans l'intervalle Δr, on peut affirmer que la nouvelle fonction d'ondes ψ « créée » par la mesure est, à l'instant t, un *mélange* des fonctions linéairement indépendantes contenues dans le sous-espace hilbertien ΔE (3).

En appliquant la formule (4) à l'opérateur X^u représentant une coordonnée, on montre (4) que la probabilité de « trouver » à l'instant t le point (dans la Mécanique des systèmes, le point figuratif du système) dans le volume élémentaire δu est $(\psi^*\psi)\,\delta u$, d'où il suit que le *point moyen probable* fourni par un grand nombre de mesures faites, à l'instant t, sur des systèmes décrits par le même ψ, a pour coordonnées (5)

$$\bar{x}^u = \int x^u (\psi^* \psi)\, \delta u. \tag{5 x}$$

Dans la Mécanique ondulatoire non relativiste, et dans le cas du corpuscule unique de masse propre m_0, ce point moyen apparaît donc comme le barycentre

---

(1) Von Neumann, *op. cit.*, p. 61.

(2) *Op. cit.*, p. 105.

(3) *Op. cit.*, p. 117 et suivantes.

(4) *Op. cit.* pp. 66 et 75.

(5) La formule générale (5), qui sera donnée dans un instant, conduit directement à ce résultat, mais sans apporter les précisions détaillées du texte.

d'un fluide fictif statistique dont la densité massique sera définie par la grandeur *réelle*

$$\rho = m_0(\psi^\star \psi).$$

Une conséquence de l'énoncé général précédent est que la valeur moyenne probable $\bar{r}$ de la grandeur r, résultant d'un grand nombre de mesures faites à l'instant t sur des systèmes décrits par le même ψ, sera [1]

$$(5) \qquad \bar{r}_t = \int_{\mathrm{U}} \psi^\star . \mathrm{R}\psi . \partial u ;$$

cette valeur moyenne probable apparaît ainsi comme l'intégrale, faite à l'instant t dans tout le domaine U, d'une *densité statistique fictive* $\psi^\star . \mathrm{R}\psi$. Plus exactement, remarquons que la dissymétrie des formules (4) et (5) a pour conséquence que l'hermiticité de R (ou de ΔE) ne permet pas, en général, d'affirmer la réalité de la densité statistique qui vient d'être définie; dans ces conditions, il est avantageux de symétriser ces formules *en faisant jouer la propriété d'hermiticité* de l'opérateur qu'elles contiennent; par exemple, la formule (5) devient ainsi

$$(5') \qquad \bar{r}_t = \int \psi^\star . \mathrm{R}\psi . \partial u = \int (\mathrm{R}\psi)^\star . \psi . \partial u = \frac{1}{2} \int \{ \psi^\star . \mathrm{R}\psi + (\mathrm{R}\psi)^\star . \psi \} \partial u,$$

et l'on voit, en prenant la grandeur conjuguée, que la densité statistique $\{\quad\}$ nouvellement définie est bien réelle [2].

Appliquons le principe exprimé par la formule (5′) à l'opérateur P^u représentant une composante de l'impulsion; il vient

$$\bar{p}_u = -\frac{h}{4\pi i} \int \{ \psi^\star . \partial^u \psi - \partial^u \psi^\star . \psi \} \partial u = -\frac{h}{4\pi i} \int \psi^\star [\partial^u] \psi . \partial u :$$

conformément à nos conventions générales de l'Avertissement, nous avons posé, par définition de l'*opérateur différentiel partiel antisymétrisé*,

$$[\partial^u] = \underset{\rightarrow}{\partial^u} - \underset{\leftarrow}{\partial^u},$$

formule dans laquelle $\underset{\rightarrow}{\partial^u}$ représente l'opérateur habituel agissant vers la droite, et $\underset{\leftarrow}{\partial^u}$ l'opérateur analogue agissant vers la gauche; l'opérateur $[\partial^u]$ agit à la fois vers la droite et vers la gauche, et son introduction symétrise

(1) Von NEUMANN, *op. cit.*, p. 105.

(2) Elle serait encore telle avec un opérateur non hermitien quelconque; mais la dernière expression (5′) ne serait plus alors égale aux deux premières, et les principes généraux de la Mécanique ondulatoire cesseraient de s'appliquer.

complètement les expressions des densités statistiques d'impulsion

$$(6) \qquad \rho v^u = \frac{h}{4\pi i}\psi^*[\partial^u]\psi.$$

Les énoncés classiques et leurs applications, également classiques, que nous venons de rappeler, soulèvent *a priori* un problème important du point de vue relativiste. D'après ces énoncés, il semble que la grandeur « moyenne probable » et la grandeur densitaire associée auront la même variance tensorielle; cela est inadmissible en Relativité, où l'élément δu est, au facteur ic près, la quatrième composante du quadrivecteur δu^i dual de l'élément trilinéaire $[dx^j\, dx^k\, dx^l]$. Le fait que la Mécanique ondulatoire prenne toutes ses intégrales « à temps constant » (ou encore, pour reprendre une terminologie que nous avons employée ailleurs (¹), qu'elle se place toujours « dans l'hypothèse de la simultanéité ») ne lève pas cette objection : en particularisant de ce fait l'élément δu^i, elle particularise le tenseur intégral « valeur moyenne probable », *mais elle ne peut pas changer le rang de ce tenseur*. Nous reprendrons ce problème en détail à propos de la théorie de Dirac.

Dans la Mécanique ondulatoire non relativiste de Schrödinger, les trois densités ρ^u définissent un vecteur *densité de courant*; une question qui se pose d'elle-même est de savoir si, en fait, ce vecteur peut être associé à la densité massique ρ de telle manière que l'équation de continuité classique

$$\partial_u(\rho v^u) + \partial_t \rho = 0$$

soit satisfaite; c'est là une condition évidemment nécessaire à la validité de la notion de *fluide fictif* statistiquement équivalent au « point matériel » m_0. On sait que la réponse est affirmative : *l'équation de continuité précédente est une conséquence de l'équation d'ondes* (3) *dans le cas où cette équation est du type non relativiste de Schrödinger* (²). On peut dire que la Théorie de Schrödinger se referme ici sur elle-même, de la manière *a priori* nécessaire.

Dans la Théorie relativiste de Dirac, les choses sont beaucoup moins simples; comme nous le rappellerons en détail au Chapitre III, paragraphe II, l'induction doit jouer un rôle important. Tout d'abord, dans une théorie relativiste, la définition du barycentre demande certaines précautions; on n'a plus le droit de conclure de la formule $[5x]$ (toujours valable en tant qu'application des principes quantiques généraux) que la quantité $m_0(\psi^*\psi)$ représente une densité massique. Une induction simple va nous tirer d'embarras : puisque, en Relativité, la masse est équivalente à l'énergie, nous sommes fondés à associer aux trois opérateurs $[\partial^u]$ qui, d'après Schrödinger, correspondent *densitairement* à l'impulsion, l'opérateur $[\partial^4]$, dont nous pensons qu'il doit

(¹) *La Relativité restreinte*; *voir* notamment p. 29.

(²) *Voir* par exemple L. de Broglie, *L'Électron magnétique*, p. 81.

correspondre *densitairement* à l'énergie ; la suite montrera que cette induction est bien celle qui convient en Théorie de Dirac (nos **8** et **18**). Remarquons ici que les difficultés relatives à l'antihermiticité de l'opérateur $\frac{h}{2\pi i}\partial^4$ s'évanouissent dans le cas de l'opérateur densitaire $\frac{h}{4\pi i}[\partial^4]$; on voit, en prenant sa conjuguée, que l'expression

$$ic\rho = \frac{h}{4\pi i}\psi^*[\partial^4]\psi$$

est bien imaginaire pure (¹).

En Théorie de Dirac, et au facteur ic près, les quatre grandeurs densitaires dont il vient d'être question appartiennent au tenseur inertique asymétrique de Tetrode, qui est conservatif en l'absence de champ ; les douze autres composantes de ce tenseur sont « supprimées » par l'hypothèse quantique « de la simultanéité ». Par ailleurs, la grandeur $(\psi^*\psi)$ reste la composante temporelle d'un quadrivecteur de courant conservatif, qui entretient certains rapports avec le tenseur inertique de Tetrode (Chap. IV, n° **26**).

Une dernière conséquence bien connue de l'énoncé général que résume la formule (4) est la suivante (²) : *les seules valeurs qu'une mesure faite à l'instant t puisse fournir pour une certaine grandeur r sont les valeurs propres de son opérateur* R. Nous voyons tout d'abord reparaître le même problème qu'à propos de la valeur moyenne probable : comment la Mécanique ondulatoire relativisée s'arrangera-t-elle pour que la grandeur finie et la grandeur densitaire aient les variances respectives convenables ? Ce double problème sera traité au paragraphe suivant à propos de la Théorie de Dirac.

Un autre problème, beaucoup plus grave, et que nous ne ferons que mentionner, est le suivant : la grandeur finie effectivement fournie par une mesure n'est plus, en Mécanique ondulatoire, reliée *explicitement* à la grandeur densitaire (statistique) correspondante par intermédiaire de l'élément de volume δu. En effet, cette grandeur finie est une valeur propre de l'opérateur R, la grandeur densitaire correspondante étant $\psi^*.\mathrm{R}\psi$ $\left(\text{ou plutôt } \frac{1}{2}\{\psi^*.\mathrm{R}\psi + (\mathrm{R}\psi)^*.\psi\}\right)$; l'élément δu n'intervient donc qu'*implicitement* dans la définition des valeurs propres de R. Il y a là une circonstance tout à fait révolutionnaire par rapport à la Mécanique ancienne, et dont la portée, touchant les propriétés élémentaires de l'espace, doit être considérable (³).

(¹) Le fait que cette propriété soit établie indépendamment de tout caractère hermitien ou antihermitien de l'opérateur ∂^t souligne bien la différence de traitement des coordonnées d'espace et du temps par la Mécanique ondulatoire, ainsi que le caractère inductif de notre raisonnement.

(²) On se reportera aux passages cités de l'Ouvrage de Von Neumann.

(³) Voir des remarques très analogues de M. L. de Broglie dans *Arch. Sci. Phys. et Nat.*, **15**, Genève 1933, p. 479.

II. — Le mécanisme du changement de repère galiléen (1) et la conciliation des exigences relativistes et quantiques en théorie de Dirac.

4. Le changement de repère galiléen a la première manière. Expression matricielle du « premier principe » de la Relativité. — Nous appelons *premier principe* de la Relativité, ou principe de la transformation partielle réciproque de l'espace en temps lors d'un changement de repère galiléen, les lois de transformation de Lorentz-Minkowski (2)

$$x'^i = o^i_j x^j, \qquad \sum_{i=1}^{i=4} o^j_i\, o^k_i = \delta^{jk}, \tag{7}$$

avec $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ et $x^4 = ict$. Il résulte de ces lois que le carré $\mathcal{S}^2$ de la *longueur d'Univers* d'un quadrivecteur X^i est un invariant; on peut considérer la formule

$$\sum_{u=1}^{u=3} X_u^2 - c^2 T^2 = \mathcal{S}^2.$$

comme une autre expression de la *loi d'équivalence entre l'espace et le temps*. Tant qu'il ne s'agit que du *premier principe*, le caractère réel ou imaginaire pur des grandeurs telles que x^i, X^i et o^i_j n'a pas à intervenir; ces grandeurs seront, pour le moment, supposées représentées par des nombres complexes quelconques.

D'une manière analogue, négligeant complètement pour le moment le caractère hermitien ou non hermitien des γ^i de Dirac, nous allons chercher les conditions restrictives imposées à la matrice S pour que la transformation

$$\gamma'^i = S^{-1} \gamma^i S \tag{8}$$

soit équivalente à la transformation minkowskienne

$$\gamma'^i = o^i_j \gamma^j, \qquad \sum_{i=1}^{i=4} o^j_i\, o^k_i = \delta^{jk}. \tag{9}$$

On sait que les transformations équivalentes (8) et (9) caractérisent le

---

(1) Pour la théorie du changement de repère galiléen en Théorie de Dirac, nous renvoyons aux Mémoires fondamentaux de Dirac [*The Quantum Theory of Electron* (*Roy. Soc. Proc.*, **117**, 1928, § 3, p. 615)], de Von Neumann [*Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie* (*Zeits. f. Phys.*, **48**, 1928, p. 871)] et de Pauli [*Contributions Mathématiques à la Théorie de Dirac* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, VI, 1936, § 3, p. 123)]; ainsi qu'à l'Ouvrage classique de M. L. de Broglie (*l'Électron magnétique*, p. 149).

(2) O. Costa de Beauregard, *La Relativité restreinte*, p. 10 et suivantes.

changement de repère galiléen à la première manière, c'est-à-dire avec invariance de la fonction d'onde ψ; il est clair, en effet, que les expressions $P_i\psi$ se transformant alors comme la $i^{\text{ième}}$ composante d'un quadrivecteur, le postulat d'invariance des équations de Dirac

$$(P_i\gamma^i + im_0c)\psi = 0 \tag{10}$$

exige que les γ^i soient transformées suivant la loi (9), ou les o^i_j sont les coefficients de Minkowski.

Le point capital est que, non seulement les équations (10), mais encore les conditions fondamentales de Dirac

$$\boxed{\frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i) = \delta^{ij}} \tag{11}$$

sont invariantes par la transformation (9); si donc on convient d'appeler *Théorie de Dirac* l'ensemble des conséquences des équations (10) et des conditions (11) (abstraction faite pour le moment de toute hypothèse sur l'hermiticité éventuelle des γ^i), il convient de dire que *la Théorie de Dirac est invariante par un changement de repère galiléen à la première manière* (formules 8 ou 9).

Il est intéressant de démontrer d'une manière rigoureuse comment la loi de transformation tensorielle des $\gamma^{ij\cdots}$ résulte des (9) et (11) (d'après nos conventions générales de l'Avertissement, $\gamma^{ij\cdots}$ désigne le produit de matrices $\gamma^i\gamma^j\ldots$, *avec essentiellement* $i \neq j \neq \ldots$). Pour les γ^{ij} du second rang, on a

$$\gamma'^{ij} = \underbrace{o^i_k o^j_l \gamma^k \gamma^l}_{\substack{\text{pour tout } k \\ \text{et tout } l}} = \underbrace{o^i_k o^j_l \gamma^k \gamma^l}_{\text{pour } k \neq l} + \sum_{l=1}^{l=4} o^i_l o^j_l = o^i_k o^j_l \gamma^{kl}, \qquad \text{C. Q. F. D.} \tag{9'}$$

Le même raisonnement s'applique par récurrence aux matrices $\gamma^{ijk} = \gamma^{ij}\gamma^k$ et $\gamma^{ijkl} = \gamma^{ijk}\gamma^l$.

Pour conclure la loi (8) de la loi (9), il faut s'appuyer sur l'invariance des (11) et sur un Théorème capital dont une démonstration générale directe a été donnée par W. Pauli : *étant donnés deux jeux distincts de quatre matrices carrées γ^i de rang 4, hermitiennes ou non, satisfaisant tous deux aux conditions* (11), *il existe une matrice carrée* S *de rang 4 et une seule (définie à un facteur complexe près), admettant une inverse* S^{-1}, *telle qu'on ait la formule* (8) (1). Réciproquement, on voit immédiatement que la loi de transformation (8) conserve les conditions (11). La démonstration du Théorème précédent fait intervenir un lemme important, fort utile pour nous, dont une démonstration a été aussi donnée par Pauli : *les seize matrices γ^A de la Théorie de Dirac forment un système complet*, c'est-à-dire que toute matrice carrée de rang 4 se développe

(1) W. Pauli, *op. cit.*, § III, p. 115.

d'une manière et d'une seule sous la forme $c_A \gamma^A$, les c_A désignant des constantes complexes (1).

L'invariance des conditions (11) par une transformation (9) s'établit par le calcul bien connu suivant

$$\frac{1}{2}(\gamma'^i\gamma'^j + \gamma'^j\gamma'^i) = \frac{1}{2} o^i_k o^j_l (\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k) = o^i_k o^j_l \delta^{kl} = \sum_{l=1}^{4} o^i_l o^j_l = \delta^{ij},$$

la seconde égalité résulte des conditions (11) de Dirac, la quatrième des conditions (9_2) de Minkowski. Le Théorème de Pauli montre alors qu'il existe une transformation (8) et une seule équivalente à (9). Réciproquement, *si, par hypothèse, une transformation du type* (8) *est telle que les quatre* γ'^i *transformées soient congrues aux quatre* γ^i *initiales*, c'est-à-dire si l'on a les relations (9_1), le calcul précédent montre que *les* o *sont des coefficients de Minkowski*, satisfaisant aux conditions (9_2).

Il est *a priori* vraisemblable, en effet, qu'en général les γ'^i transformées des γ^i par une loi (8) ne seront pas congrues aux γ^i initiales, mais pourront se développer sur tout le système des seize γ^A. Un exemple simple nous convaincra qu'il en est bien ainsi; introduisant les quatre $\overline{\gamma}^i$ duales des γ^{jkl}, définies suivant (2)

$$\overline{\gamma}^i = \gamma^{jkl}, \qquad \overline{\gamma}^4 = -\gamma^{123},$$

on vérifie sans peine qu'elles satisfont aux mêmes conditions que les γ^i :

$$\frac{1}{2}(\overline{\gamma}^i\overline{\gamma}^j + \overline{\gamma}^j\overline{\gamma}^i) = \delta^{ij}.$$

Considérant alors les transformées

$$\gamma'^i = o^i_j \overline{\gamma}^j, \qquad \sum_{i=1}^{4} o^j_i o^k_i = \delta^{jk},$$

le calcul précédent montrera que les γ'^i satisfont, comme les γ^i, aux conditions (11), et par conséquent qu'on peut encore passer des γ^i aux γ'^i par une transformation (8). Mais, en raison du caractère *complet* des seize γ^A, la transformation actuelle est irréductible à la transformation de Minkowski.

D'une manière plus générale, γ^A désignant l'une quelconque des seize γ, γ'^A son homologue dans le système γ', l'expression matricielle de la transformation (9) et (9′) est évidemment

$$\boxed{\gamma'^A = S^{-1}\gamma^A S;} \tag{8′}$$

mais une transformation quelconque de ce type n'est pas une transformation tensorielle des 5 *tenseurs matriciels* γ^A, en ce sens que les γ d'un rang tensoriel

(1) *Op. cit.*, § II, p. 111.

(2) Cette définition diffère par le signe de celle que nous adopterons plus loin (equ. 15).

donné ne restent pas congrues à elles-mêmes par la transformation; *il y a exception pour la matrice* 1, qui est évidemment toujours transformée en elle-même.

Si donc on veut que la transformation (8) soit équivalente à la transformation minkowskienne (9), certaines conditions restrictives devront être imposées à la matrice S; jointes aux (8) ou (8′), elles constitueront ce qu'on peut appeler l'*expression matricielle du premier principe de la Relativité;* cherchons ces conditions.

Une première condition nécessaire, très visible, a été énoncée par von Neumann (¹) et par Pauli (²); donnons-en un énoncé général. Posons, conformément à nos conventions de l'Avertissement

$$\overline{\gamma} = \gamma^{1234},$$

on vérifie sans peine que

$$\overline{\gamma}^2 = 1.$$

Si, par hypothèse, nous exigeons que la matrice $\overline{\gamma}$ reste congrue à elle-même

$$\overline{\gamma}' = c\overline{\gamma}$$

par une transformation (8), un calcul simple montre que le coefficient c vaut ± 1 :

$$c^2\overline{\gamma}^2 = S^{-1}\overline{\gamma}SS^{-1}\overline{\gamma}S, \qquad c^2 = 1, \qquad c = \pm 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le cas $c = +1$ contiendra évidemment les *rotations* du quadrèdre d'Univers, et le cas $c = -1$ les *réflexions* d'Univers (rotations suivies d'un retournement de l'axe de temps, par exemple). On aura donc, le signe étant + ou — dans toutes les relations à la fois

$$(12) \qquad \overline{\gamma} = \pm S^{-1}\overline{\gamma}S, \qquad \boxed{S\overline{\gamma} = \pm \overline{\gamma}S,} \qquad \boxed{\overline{\gamma}S^{-1} = \pm S^{-1}\overline{\gamma}.}$$

Ainsi, nous trouvons comme première condition nécessaire que S *et* S^{-1} *doivent à la fois commuter ou anticommuter avec* $\overline{\gamma}$. Or, les seize γ^A se divisent en deux classes de 8; d'une part, les 1, γ^{ij}, $\overline{\gamma}$ commutent avec $\overline{\gamma}$; d'autre part, les γ^i et $\overline{\gamma}^i$ anticommutent avec $\overline{\gamma}$. Il suit de là que, pour $c = +1$, S et S^{-1} se développeront sur le système 1, γ^{ij}, $\overline{\gamma}$ et, pour $c = -1$, sur le système γ^i et $\overline{\gamma}^i$. On vérifie alors sans peine que, *dans les deux cas, les* $S^{-1}\gamma^i S$ *se développeront sur le système des huit* γ^i *et* $\overline{\gamma}^i$. On ne peut rien dire de plus : même en faisant intervenir les relations numériques existant entre les coefficients de S^{-1} et S du fait que $S^{-1}S = 1$, on constate que ni le jeu des γ^i, ni celui des $\overline{\gamma}^i$ ne s'élimine du résultat. C'est dire que *la condition nécessaire* (12) (bien que déjà

(¹) *Op. cit.*, p. 877.

(²) *Op. cit.*, p. 126, équation (28).

nettement restrictive, puisqu'elle réduit de moitié le nombre des matrices de base) *n'est pas, à elle seule, une condition suffisante pour que les* γ'^i *soient congrues aux* γ^i.

Mais on peut associer à la condition (12) une autre condition nécessaire (13), découverte par Pauli [1], telle que l'ensemble de (12) et de (13) constitue une condition suffisante du résultat visé. Pour établir cette nouvelle condition, remarquons avec Pauli que les matrices $\tilde{\gamma}^i$ *transposées* des γ^i satisfont évidemment aux conditions (11)

$$\frac{1}{2}(\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j+\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i)=\delta^{ij},$$

d'après le Théorème fondamental, il existe donc une matrice B, définie à une constante complexe près, telle que

$$\tilde{\gamma}^i = B^{-1}\gamma^i B.$$

Considérant maintenant les transformées γ'^i des γ^i par (8), on définira de même la matrice B′ transformant γ'^i en $\tilde{\gamma}'^i$; comme on a évidemment

$$B'^{-1}\gamma'^i B' = \tilde{S}\tilde{\gamma}^i\tilde{S}^{-1}, \qquad B'^{-1}S^{-1}\gamma^i SB' = \tilde{S}B^{-1}\gamma^i B\tilde{S}^{-1},$$
$$(SB')^{-1}\gamma^i(SB') = (B\tilde{S}^{-1})^{-1}\gamma^i(B\tilde{S}^{-1}),$$

on conclut de là une relation entre B, B′ et S (a désigne une constante complexe)

[p] $$B\tilde{S}^{-1} = aSB' \qquad \text{ou} \qquad B = aSB'\tilde{S}.$$

Plus généralement, cherchant les transformées par B des seize γ^A, on trouve sans difficulté, pour les 5 rangs tensoriels 0, 1, 2, 3, 4,

[q] $$+\tilde{1}=1, \quad +\tilde{\gamma}^i, \quad -\tilde{\gamma}^{ij}, \quad -\tilde{\gamma}^{ijk}, \quad +\tilde{\gamma}^{ijkl}.$$

Cela étant, développons les γ'^i, transformées des γ^i par S, sur le système des seize γ^A, et transformons les matrices des deux membres par B. D'après ce qui vient d'être dit, les transformées des γ^A du second membre seront les $\tilde{\gamma}^A$ au signe près, ce signe étant donné par le tableau [q]; on peut donc écrire, en distinguant les coefficients c_M et c_N relatifs aux matrices de chaque signe,

$$B^{-1}\gamma'^i B = c_M\tilde{\gamma}^M - c_N\tilde{\gamma}^N.$$

Il est clair, sur cette formule, que la condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients c_N soient identiquement nuls est que l'on ait

[r] $$B^{-1}\gamma'^i B = \tilde{\gamma}'^i = B'^{-1}\gamma'^i B', \qquad \text{où } B = bB',$$

(b désigne un coefficient complexe) [2].

---

(1) *Op. cit.*, § IV, p. 119 et 126.

(2) En raison du caractère complexe des c_M, cette conclusion ne se retrouverait pas si l'on avait pris les γ^{+i} adjointes au lieu des $\tilde{\gamma}^i$ transposées.

Finalement, rapprochant les résultats $[p_2]$, $[r_2]$ et $[q]$, nous voyons qu'*une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices γ'^i transformées des γ^i par* S *soient congrues au système* 1, γ^i, $\bar{\gamma}$, *est que l'on ait, c désignant une constante complexe,*

$$\boxed{\mathrm{B} \doteq c\,\mathrm{S}\mathrm{B}\tilde{\mathrm{S}};} \tag{13}$$

telle est la condition de Pauli annoncée.

Prenons maintenant les conditions (12) et (13) *à la fois*; elles exigent respectivement que les γ'^i soient congrues

à	»	γ^i	»	γ^i	»
et à	1	γ^i	»	»	$\bar{\gamma}$,

en sorte que, finalement, les quatre γ'^i devront être congrues aux quatre γ^i, et par conséquent, d'après une remarque antérieure, s'en déduire par une transformation de Minkowski. *Les conditions* (12) *et* (13) *prises à la fois constituent donc bien une expression matricielle du premier principe de la Relativité.*

5. Le changement de repère galiléen a la seconde manière. Nécessité de définir une « matrice tampon » γ^0. — On sait que la Théorie de Dirac utilise deux équations *associées* des types

$$\zeta\left(-\underset{\leftarrow}{\mathrm{P}^i}\gamma_i + i m_0 c\right) = 0, \qquad \left(\underset{\rightarrow}{\mathrm{P}^i}\gamma_i + i m_0 c\right)\psi = 0, \tag{14}$$

avec, par définition des quadriopérateurs P^i,

$$\underset{\leftarrow}{\mathrm{P}^i} = -\frac{h}{2\pi i}\underset{\leftarrow}{\partial^i} - \frac{e}{c}\mathrm{A}^i, \qquad \underset{\rightarrow}{\mathrm{P}^i} = -\frac{h}{2\pi i}\underset{\rightarrow}{\partial^i} + \frac{e}{c}\mathrm{A}^i. \tag{15}$$

Pour la suite, introduisons encore la définition des deux quadriopérateurs.

$$[\mathrm{P}^i] = \frac{1}{2}\left[\underset{\rightarrow}{\mathrm{P}^i} - \underset{\leftarrow}{\mathrm{P}^i}\right] = -\frac{h}{4\pi i}[\partial^i] + \frac{e}{c}\mathrm{A}^i, \qquad i(\mathrm{P}^i) = \frac{1}{2}\left(\underset{\rightarrow}{\mathrm{P}^i} + \underset{\leftarrow}{\mathrm{P}^i}\right) = -\frac{h}{4\pi i}(\partial^i), \tag{15'}$$

où $[\partial^i]$ et (∂^i) sont les opérateurs différentiels respectivement « antisymétrique » et « symétrique », agissant à la fois à droite et à gauche, que nous avons définis dans l'Avertissement. D'après ce que nous avons dit au numéro **3**, l'opérateur $[\mathrm{P}^i]$ doit être considéré comme correspondant densitairement à l'*impulsion-masse inertique* (totale — électromagnétique); cette remarque trouvera plus loin son application (n° **8**, équ. 26). Avec plusieurs auteurs, nous considérons les *fonctions d'onde associées* à 4 composantes ζ et ψ comme deux matrices, la première à une ligne et 4 colonnes, la seconde à 4 lignes et une colonne; dans ces conditions, les équations (14) sont des équations à la fois différentielles et matricielles.

En Théorie de Dirac, il s'introduit 5 tenseurs statistiques densitaires bien connus ρ_D, et aussi 5 tenseurs densitaires ρ_S dont nous introduirons systématiquement la définition au Chapitre III, des types respectifs

$$\rho_D = \zeta \gamma^A \psi, \qquad \rho_S = \zeta [\partial^i] \gamma^A \psi; \tag{16}$$

les 32 expressions (16) sont, d'après nos conventions, des matrices à 1 ligne et 1 colonne, c'est-à-dire de simples nombres; en tant que composantes tensorielles, leur variance est, *par hypothèse*, celle indiquée par les indices $i, j, \ldots$, de la *matrice significative* γ^A.

Dans un *changement de repère galiléen à la première manière*, le ψ et le ζ sont transformés par invariance, le $\underset{\rightarrow}{P^i}$ et le $\underset{\leftarrow}{P^i}$ suivant la loi quadrivectorielle (7) (ce qui, convient-il de remarquer, laisse invariants les symboles $\underset{\rightarrow}{\partial^i}$ et $\underset{\leftarrow}{\partial^i}$), enfin les γ^A suivant la loi (9) ou, ce qui revient au même, suivant la loi (8′) « restreinte » par les conditions (12) et (13). Les équations (14) et les définitions (16) deviennent ainsi

$$\zeta\left(-\underset{\leftarrow}{P'^i} S^{-1}\gamma_i + im_0 c S^{-1}\right) = 0, \qquad \left(\underset{\rightarrow}{P'^i} S \gamma_i + im_0 c S\right)\psi = 0;$$
$$\rho'_D = \zeta(S^{-1}\gamma^A S)\psi, \qquad \rho'_S = \zeta[\partial^i](S^{-1}\gamma^A S)\psi.$$

Comme il est bien connu, on déduit immédiatement de là les lois du *changement de repère galiléen à la seconde manière*, c'est-à-dire avec *transformation par invariance des seize* γ^A. Les formules précédentes s'écrivent en effet

$$\zeta S^{-1}\left(-\underset{\leftarrow}{P'^i}\gamma_i + im_0 c\right) = 0, \qquad \left(\underset{\rightarrow}{P'^i}\gamma_i + im_0 c\right)S\psi = 0;$$
$$\rho'_D = \zeta S^{-1}(\gamma^A)S\psi, \qquad \rho'_S = \zeta S^{-1}([\partial^i]\gamma^A)S\psi.$$

Les lois de transformation cherchées du ζ et du ψ sont donc

$$\boxed{\zeta' = \zeta S^{-1},} \qquad \boxed{\psi' = S\psi.} \tag{17}$$

La remarque essentielle est que *les lois de transformation* (17) *interdisent en principe de considérer les matrices* ζ *et* ψ *comme adjointes;* il y aurait exception si la matrice de transformation S pouvait être prise unitaire, mais nous verrons au numéro suivant que cela n'est justement pas possible. Or, suivant la tradition issue de la Théorie de Schrödinger, la Théorie de Dirac se propose d'écrire les densités statistiques ρ_D, par exemple, sous la forme

$$\psi^+\gamma^B\psi \quad \text{ou} \quad \zeta\gamma^B\zeta^+;$$

la matrice γ^B, différente de γ^A, ne mettra plus nécessairement en évidence directe la variance tensorielle des ρ. Mais, retenant, par exemple, la première des deux formes ci-dessus, il est certain que les matrices ζ et ψ^+ se déduiront l'une de l'autre par une matrice carrée γ^0; nous poserons, suivant l'usage (1)

$$\boxed{\gamma^B = i\gamma^0\gamma^A} \quad \text{et} \quad \boxed{\zeta = \psi^\times = i\psi^+\gamma^0.} \tag{18}$$

Il est important pour la suite d'établir les lois de transformation de la *matrice-tampon* γ^0 que nous venons d'introduire. Pour un *changement de repère galiléen à la première manière*, le ψ, donc le ψ^+, et le $\zeta = \psi^\times$ étant transformés par invariance, il en est de même pour γ^0. *A la seconde manière*, le ψ^+ et le $\psi^\times$ se transformant suivant les lois différentes

$$\psi'^\times = \psi^\times S^{-1}, \qquad \psi'^+ = \psi^+ S, \tag{17'}$$

il en résulte pour γ^0 la loi de transformation

$$\gamma'^0 = (S^{-1})^+ \gamma^0 (S^{-1}) \tag{19}$$

tout à fait différente de celle qui valait, *à la première manière*, pour les γ^A (équ. 8').

6. Défaut de symétrie relativiste des équations de Dirac par rapport au second principe. Rôle spécial de la matrice γ^4. — L'apport nouveau essentiel de la Relativité est constitué par les lois (7) du changement de repère galiléen, lois qui expriment une *équivalence* entre l'espace et le temps au sens qui a été rappelé. Cela étant, il est évidemment capital de formuler les principes qui distinguent le temps de l'espace, principes dont il est remarquable qu'ils s'expriment finalement par des inégalités, entraînant notamment l'écoulement à sens unique du temps.

La formulation classique du *second principe* de la Relativité se fait tout naturellement en deux étapes (2). On peut énoncer le *second principe sous sa forme large* de la manière suivante : *tout événement objectif sera représenté par trois coordonnées d'espace x^u réelles et par une coordonnée de temps x^4 imaginaire pure*. Il suit de là que *les coefficients o^i_j d'un changement de repère galiléen*

---

(1) Le facteur i est arbitrairement introduit pour simplifier les expressions de l'important quadrivecteur *courant-densité de présence* : $\psi^\times \gamma^i \psi$. Nos notations sont celles généralement adoptées à la suite du Mémoire d'ensemble de W. Pauli [*Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, *Relativistische Theorien* (*Handb. d. Phys.*, XXIV$_1$, 1933, p. 220)]. Le principe de ces notations est dû à W. Gordon [*Der Strom der Diracschen Elektronentheorie* (*Zeits. f. Phys.*, 50, 1928, p. 630, équ. 3 et 4)].

(2) O. Costa de Beauregard, *La Relativité restreinte*, p. 15 et suiv. Le « second principe de la Relativité » n'est en réalité qu'une partie de ce que serait un véritable *second principe* pour le temps. Pas plus que la Physique classique (ou que la Physique quantique), la Relativité n'oblige le temps à s'écouler; elle se borne à constater que le temps s'écoule, et, partant de là, à montrer qu'il s'écoule dans le même sens pour tous les observateurs objectifs.

objectif seront réels s'ils contiennent l'indice 4 zéro ou deux fois, imaginaires purs s'ils le contiennent une fois. Une conséquence de ce dernier énoncé et des conditions minkowskiennes (7_2) est l'inégalité

$$(o_4^4)^2 \geqq 1 ; \tag{20'}$$

rappelons l'existence des deux inégalités équivalentes à la précédente

$$v^2 \leqq c^2, \qquad ds^2 \leqq 0 ;$$

v désigne la vitesse relative des origines spatiales de deux repères galiléens objectifs, et ds l'élément de longueur de l'axe temporel d'un repère galiléen objectif quelconque.

Une conséquence importante de l'inégalité (20′) est que le *carré* $\mathfrak{S}^2$ *de la longueur d'un quadrivecteur d'Univers aura le même signe dans tous les repères galiléens objectifs*, ce qui donne une signification *objective* à la classification des quadrivecteurs en *genre temps* et *genre espace* suivant le signe de leur $\mathfrak{S}^2$; sous sa *forme large*, le *second principe* aboutit donc déjà à une distinction fort nette entre l'espace et le temps.

L'inégalité (20′) peut encore s'écrire

$$\boxed{o_4^4 \leqq -1} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{+1 \leqq o_4^4 ;} \tag{20}$$

la *forme étroite* du *second principe* s'obtient alors en postulant, en plus des conditions précédemment indiquées, que *les transformations restant permises* par (20′) ou les (20) *doivent*, comme les (7) initiales, *former un groupe continu, contenant notamment la transformation identique*. Il est alors évident que l'inégalité (20_1) doit être écartée, et l'on vérifie sans peine que l'inégalité (20_2) peut être retenue. Dans ces conditions, les propriétés d'un quadrivecteur du genre temps se trouvent précisées sous la forme suivante : *le signe de la quatrième composante d'un quadrivecteur du genre temps sera le même dans tous les repères galiléens objectifs.* Réciproquement, *si l'on connaît un certain quadrivecteur dont la composante temporelle possède un signe bien déterminé, on peut affirmer :* 1° *que le second principe de la Relativité est satisfait sous sa forme étroite;* 2° *que le quadrivecteur considéré est du genre temps.* Comme les axes temporels des repères galiléens objectifs sont tous du genre temps en vertu de l'inégalité (20′), on peut dire que l'inégalité plus restrictive (20_2) entraîne que *le sens d'écoulement du temps est le même dans tous les repères galiléens objectifs.* On passerait des cas prévus par l'inégalité (20_2) à ceux prévus par l'inégalité rejetée (20_1) au moyen d'un retournement de l'axe de temps.

Ces préliminaires étant rappelés, un point capital pour la suite est que, malgré ce qui semble au premier abord, *les équations de Dirac* (14) *n'ont pas la symétrie relativiste correspondant au « second principe »*. A cet égard, et à certaines difficultés près qui ont été mentionnées, nous avons vu au n° **5** que le quadriopérateur d'*impulsion-masse totale*

$$-\frac{h}{2\pi i}\partial^i$$

peut être considéré comme ayant la symétrie relativiste, ses trois premières composantes étant hermitiennes, et la quatrième se comportant dans l'équation d'ondes comme si elle était antihermitienne. Par ailleurs, le quadriopérateur d'*impulsion-masse électromagnétique*

$$-\frac{e}{c}A^i\times$$

possède la symétrie relativiste, les trois A^u étant réelles et A^4 imaginaire pure. Finalement, à certaines difficultés près, les opérateurs $\underset{\rightarrow}{P^i}$ et $\underset{\leftarrow}{P^i}$ définis par les (15) doivent être considérés comme possédant la symétrie relativiste du second principe. Du reste, les difficultés en question disparaissent complètement pour les deux opérateurs $[P^i]$ et (P^i) définis par les (15′), opérateurs qui nous seront fort utiles par la suite; *ces opérateurs possèdent la symétrie relativiste du second principe.*

Au contraire, *le jeu des quatre matrices γ^i ne possède pas la symétrie relativiste du second principe.* Il faudrait pour cela que les trois γ^u puissent être choisies hermitiennes, et γ^4 antihermitienne. Or, cela est exclu par les conditions de Dirac (11) : une matrice hermitienne peut bien avoir comme carré 1, mais non pas une matrice antihermitienne.

Serait-il possible, en remplaçant les conditions (11) par les conditions analogues

$$\frac{1}{2}(\gamma^{+i}\gamma^j+\gamma^{+j}\gamma^i)=\delta^{ij},$$

de modifier la Théorie de Dirac de manière à donner la symétrie relativiste au jeu des γ^i? Tout d'abord, contrairement aux (11), et compte tenu de la symétrie relativiste des α_i^j par rapport au second principe, ces conditions ne seraient pas invariantes par une transformation de Minkowski. De plus, les conditions considérées ne permettraient plus de retrouver, en l'absence de champ, l'équation de Gordon comme conséquence de la Théorie; en effet, au lieu de multiplier à gauche l'équation (14_2) de Dirac par l'opérateur $\left(\gamma_i\underset{\rightarrow}{P^i}-im_0c\right)$ (1), il faudrait la multiplier par l'un ou l'autre des opérateurs

$$\left(\gamma_i^+\underset{\longrightarrow}{P^{+i}}-im_0c\right)\quad \text{ou}\quad \left(\gamma_i^+\underset{\rightarrow}{P^i}-im_0c\right);$$

(1) P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of Electron* (*Roy. Soc. Proc.*, **117**, 1928, p. 613); ou L. de Broglie, *L'Électron magnétique*, p. 137, équ. (15).

le premier ne convient pas comme fournissant les termes carrés

$$P_i^{+}P^{+i} = \sum_{u=1}^{3} P_u^2 - P_4^2$$

au lieu des $P_i P^i$ qu'il faudrait trouver; le second, comme fournissant des termes

$$im_0 c(\gamma_i P^i - \gamma_i^{+} P^i)$$

qui ne se détruiraient plus.

Finalement, la symétrie relativiste des γ^i par rapport au second principe (hermiticité des γ^u et antihermiticité de γ^4) et la symétrie relativiste de ces mêmes opérateurs par rapport au premier principe exprimée par les conditions (11) seraient séparément conservatives par une transformation (9) de Minkowski, *mais elles sont incompatibles entre elles.* Si l'on voulait donner un nom à l'aspect particulier que revêt ici le conflit de la Relativité et des Quanta, il faudrait l'appeler le *conflit des deux symboles i* propres à chaque Théorie; ce conflit a, entre autres conséquences, celle que les deux opérateurs $\left(\gamma_i \underset{\rightarrow}{P^i} + im_0 c\right)$ et $\left(\gamma_i \underset{\rightarrow}{P^i} - im_0 c\right)$, dont le produit donne l'opérateur de Gordon, ne sont pas des opérateurs adjoints. Comme il est absolument nécessaire que l'équation de Gordon soit conséquence de la Théorie de Dirac, nous concluons qu'*il est impossible de faire en sorte que le jeu des matrices γ^i de Dirac possède la symétrie relativiste du second principe sans détruire les fondements mêmes de la Théorie.*

Pour bien mesurer l'importance du problème qui résulte de cette constatation, faisons encore quelques remarques. Il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour que des expressions $\psi^{+}\gamma^{B}\psi$ soient réelles ou imaginaires pures est que la matrice γ^{B} soit hermitienne ou antihermitienne. Or, si les quatre γ^i, et par conséquent le tableau des seize γ^{A}, possédait la symétrie relativiste du second principe, en posant simplement

$$\psi^{\times} = \psi^{+}, \qquad \gamma^{A} = \gamma^{B}, \qquad \gamma^{0} = 1,$$

les densités statistiques ρ_D et ρ_S seraient assurées de la symétrie relativiste, en ce sens que les ρ d'un même rang seraient réelles ou imaginaires pures en rapport avec l'absence ou la présence de l'indice 4 dans γ^{B}. Cette propriété étant évidemment conservée pour un changement de repère galiléen à la première manière, devrait l'être aussi pour un changement de repère galiléen à la seconde manière; la matrice de la transformation (8) devrait alors être unitaire, en sorte qu'on aurait toujours

$$S^{-1} = S^{+}, \qquad \gamma'^{0} = \gamma^{0} = 1, \qquad \psi^{\times} = \psi^{+}.$$

En fait, nous venons de voir que toute cette facile harmonie n'est qu'un rêve illusoire, qu'il faut donc rejeter. Si les quatre γ^i ne peuvent pas être choisies trois hermitiennes et une antihermitienne, Dirac a montré qu'elles peuvent être prises toutes quatre hermitiennes [1], circonstance assez paradoxale au point de vue relativiste, et dans laquelle nous voyons la première manifestation du rôle spécial très dissymétrique que la théorie de Dirac fait jouer à la matrice γ^4 [2].

Il est évident, et bien connu, que, compte tenu de la symétrie des o^i_j par rapport au second principe, *cette condition d'hermiticité des quatre* γ^i *n'est pas conservative par un changement de repère galiléen à la première manière* (équ. 9); et qu'il suit de là que *la matrice de transformation* S *ne peut pas être unitaire* (équ. 8). Au contraire, *cette même condition est invariante par un changement de repère galiléen à la seconde manière*, puisque les γ^i (et par conséquent toutes les *matrices significatives* γ^A) sont alors transformées par invariance. De plus, si la *matrice-tampon* γ^0 a, elle aussi, été choisie hermitienne, la formule (19) montre que *cette condition est conservative par un changement de repère galiléen à la seconde manière*. C'est en nous appuyant sur ces remarques que nous allons établir maintenant l'expression matricielle du *second principe* de la Relativité, expression qui met clairement en évidence le rôle spécial dissymétrique de la matrice γ^4.

7. Expression matricielle du second principe de la Relativité. — Lemme. — *Si les quatre matrices* γ^i *ainsi que la matrice-tampon* γ^0 *sont choisies, avec Dirac, hermitiennes* (condition invariante pour un changement de repère galiléen à la seconde manière), *la condition nécessaire et suffisante pour que les densités statistiques* ρ *jouissent de la symétrie relativiste du second principe est que l'on ait*

$$\gamma^0 = (a\,1 + ib\bar{\gamma})\gamma^4, \tag{21'}$$

a et b désignant deux nombres réels non simultanément nuls.

En effet, avec les prémisses posées, la condition nécessaire et suffisante du résultat visé est que γ^0 commute ou anticommute avec les γ^A significatives d'un même rang en rapport avec l'absence ou la présence de l'indice 4. Si alors on

---

(1) *Op. cit.*, p. 614.

(2) Cette hermiticité des quatre γ^i postulée par Dirac ne semble d'ailleurs pas être un élément essentiel de la Théorie, et l'on pourrait probablement s'en affranchir au prix d'une certaine complication des calculs et des formules. On sait, par exemple, que le fait que les valeurs ± 1, ou $\pm i$, soient les valeurs propres des γ^A ne résulte nullement de l'hermiticité éventuelle des γ^i, mais seulement des conditions (11). En effet, les γ^i par exemple, ayant comme carrés 1, si g désigne l'une quelconque de leurs valeurs propres, f une fonction propre correspondante, on doit avoir :

$$\gamma f = gf, \qquad \gamma^2 f = g\gamma f = g^2 f, \qquad g^2 = \pm 1, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

[G. Petiau, *Sur les fonctions propres des opérateurs fondamentaux de la Théorie de l'Électron de Dirac* (*Acad. Roy. de Belgique,* Cl. des Sci., XXIV, 1938, p. 488)].

développe γ^0 sur le système des seize γ^A, les matrices 1, γ^{u4}, γ^{uv4} et γ^{uvw4} s'éliminent comme commutant ou anticommutant *à la fois* avec γ^4 et l'une au moins des γ^u; et les γ^u et γ^{uv} comme anticommutant, par exemple, avec les γ^{u4} et γ^{uv} à la fois. Seules, les matrices γ^4 et $\gamma^{uvw} = -\overline{\gamma}^4$ ne sont pas éliminées par des critères de ce genre, d'où l'écriture (21′) annoncée. Réciproquement, il est évident que l'écriture (21′) est une condition suffisante du résultat visé. Quant aux coefficients a et b, γ^0 et γ^4 étant hermitiennes par hypothèse, et γ^4 anticommutant avec $\overline{\gamma} = \gamma^{1234}$ qui est hermitienne, ils sont nécessairement réels; de plus, ils ne sont pas simultanément nuls, car alors toutes les densités ρ seraient nulles.

Les deux termes de (21′) ne sont pas réellement distincts, car $\overline{\gamma}\gamma^A$ n'est autre, au signe près, que $\overline{\gamma}^A$; de la sorte, les ρ d'un rang donné s'expriment comme une somme de composantes de deux tenseurs $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ duals l'un de l'autre. Dans ces conditions, il est clair que, *dans un repère galiléen bien déterminé dit « initial »*, nous pouvons disposer arbitrairement des coefficients a et b; c'est ce que nous ferons en prenant

(22⁰) $$a_0 = 1, \qquad b_0 = 0.$$

de manière à retrouver, *dans ce repère initial*, la formule devenue classique

(21) $$\boxed{\gamma^0 = \gamma^4.}$$

Il est bien connu que la double présence de γ^4 dans les ρ définies par les (16) et (18), qui résulte de l'égalité (21), jointe aux conditions fondamentales (10) de Dirac, concilie l'hermiticité des quatre γ^i avec la symétrie des ρ par rapport au second principe; et même, plus précisément, qu'elle assure le respect de la seconde condition par le moyen de la première. On peut dire que le rôle dissymétrique de la matrice γ^4 est, au point de vue relativiste, « compensé » par celui de la matrice-tampon γ^0, et l'on voit bien que le mécanisme de cette compensation se rattache étroitement à la formulation du *second principe* en théorie de Dirac.

Pour établir l'*expression matricielle du second principe,* remarquons que le résultat (21′) est valable dans tous les repères galiléens satisfaisant au second principe sous sa forme large, puisque, d'une part, ses prémisses sont conservatives pour tout changement de repère galiléen à la seconde manière, et que, d'autre part, les densités statistiques jouissent par hypothèse, de la symétrie du second principe. Cherchons alors ce que deviennent les coefficients a et b dans un nouveau repère, étant entendu qu'ils ont été « initialement » définis suivant (22⁰).

Si b^0 a été choisi initialement nul, toutes les composantes des tenseurs $\rho^{(2)}$ précédemment définis sont nulles, en sorte que *tous les b transformés sont nuls.*

Par ailleurs, *aucun a transformé ne peut être nul*, car alors toutes les composantes des tenseurs $\rho = \rho^{(1)}$ s'annuleraient à la fois; comme, rappelons-le, *a est réel*, nous avons à considérer les *deux cas* à priori *possibles*

$$(22') \qquad a < 0, \qquad a > 0,$$

cas complètement distincts puisque l'on ne peut passer de l'un à l'autre par continuité, la valeur $a = 0$ étant exclue.

Je dis maintenant qu'en disposant de la constante arbitraire figurant dans la matrice S on peut faire en sorte d'avoir $a = -1$ dans le cas $a < 0$ et $a = +1$ dans le cas $a > 0$. Pour cela, il suffit de remplacer, dans (19), S^{-1} par $\sqrt{a}S^{-1}$ et par conséquent, dans le premier cas, $(S^{-1})^+$ par $-\sqrt{a}(S^{-1})^+$ et, dans le second cas, $(S^{-1})^+$ par $+\sqrt{a}(S^{-1})^+$. Dans ces conditions, l'expression des deux cas possibles devient

$$(22) \qquad \boxed{a = -1,} \qquad \boxed{a = +1,}$$

en sorte que l'expression transformée de la *matrice-tampon* ne peut être, compte tenu de la convention (22^0), que

$$\gamma'^0 = \pm \gamma^0 = \pm \gamma^4.$$

Telle est, d'après le raisonnement que nous venons de faire, une condition nécessaire pour que soit respecté le second principe sous sa forme large; réciproquement, cette condition est évidemment suffisante. Finalement, en nous reportant à la loi de transformation (19) de γ^0, nous trouvons pour *expression matricielle du second principe sous sa forme large*

$$(23') \qquad \boxed{\gamma^0 = \pm S^+ \gamma^0 S;}$$

c'est une condition restrictive imposée à la matrice de transformation S, où apparaît nettement le rôle spécial dissymétrique de la matrice $\gamma^4 = \gamma^0$.

Quant à l'expression du second principe sous sa forme étroite, il suffit pour la trouver de remarquer : 1° que l'on a évidemment $a = 1$ pour la transformation identique et 2° que a est certainement une fonction continue des o^i_j de Minkowski. Il est clair, dans ces conditions, que *les deux conditions* (22) *correspondent biunivoquement aux deux conditions classiques* (20) Par conséquent, dans l'ensemble des conditions

$$(23) \qquad \gamma^0 = - S^+ \gamma^0 S, \qquad \boxed{\gamma^0 = S^+ \gamma^0 S,}$$

la seconde correspond aux *rotations* du quadrèdre d'univers, la première aux *réflexions*. C'est à von Neumann que l'on doit la découverte, sous une forme équivalente, de l'importante condition (23_2) (¹); nous pensons qu'il était intéressant de faire ressortir que cette condition n'est autre que l'*expression matricielle du second principe sous sa forme étroite*.

Finalement, *le respect du second principe sous sa forme étroite entraîne l'invariance de la définition* (21) *de la matrice-tampon pour les changements de repère galiléen à la seconde manière*. La démonstration que nous avons donnée de ce résultat, très paradoxal à première vue, repose en dernière analyse sur le *théorème d'existence* de la matrice de transformation S. Il est instructif de retrouver la réciproque de ce résultat de la manière suivante. Si, par hypothèse, la définition (21) est invariante pour les changements de repère galiléen à la seconde manière, la composante temporelle du quadrivecteur courant-densité de présence s'écrit

$$(j^4) = \psi^\times \gamma^4 \psi = i(\psi^+ \psi), \tag{24}$$

la dernière expression étant invariante. Or, la parenthèse est la *forme définie positive* que Dirac s'était imposé de retrouver comme expression de la densité de probabilité de présence. Ainsi, *moyennant l'hypothèse* (21), *le signe de la quatrième composante du courant de Dirac doit être le même dans tous les repères galiléens retenus par la Théorie;* c'est dire : 1° que *le second principe est respecté sous sa forme étroite;* et 2° que *le quadri-courant de Dirac est du genre temps*.

8. Sur le calcul des grandeurs finies en Théorie de Dirac. — Montrons maintenant que *c'est encore l'intervention spéciale dissymétrique de la matrice* γ^4 *qui permet à la Théorie de Dirac de concilier les principes généraux de la Mécanique ondulatoire avec les exigences relativistes en ce qui concerne les densités statistiques*. Ici, comme on le verra, la présence en « tampon » de la matrice γ^4 sert à compenser la dissymétrie relativiste causée par l'intégration « à temps constant » de la Mécanique ondulatoire.

D'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, la valeur moyenne probable $\overline{a}$ de la grandeur représentée par un certain opérateur A est

$$\overline{a} = \iiint_U \psi^+ . A \psi . \delta u, \tag{25}$$

l'intégrale étant prise sur une hypercloison d'Univers à temps constant. En Mécanique ondulatoire relativisée, deux variances 4 sont dissimulées au second membre de cette formule; la première provient de ce que $\delta u = ic\,\delta u^4$ est la quatrième composante du quadrivecteur $ic\,\delta u^i$ dual de l'élément trilinéaire $[dx^i dx^j dx^k]$ (²) et la seconde de ce qu'on a, d'après ce qui précède, $\psi^+ = -i\psi^\times \gamma^4$. Il est dès lors clair que *la formule* (25) *contient une*

(¹) *Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie*, p. 878.

(²) Ces notations sont celles que nous avons utilisées dans notre *Relativité restreinte*.

sommation virtuelle *sur un indice qui prend ici, du fait de l'intégration à temps constant, la seule valeur* 4; comme corollaire, on voit que *la variance symbolique de l'opérateur* A *représentant à la manière quantique une certaine grandeur finie sera nécessairement la même que celle du tenseur correspondant de la Relativité classique.* Cette remarque nous sera utile par la suite.

Appliquons d'abord ces considérations à deux exemples importants. Nous savons, d'après la Théorie de Schrödinger, que l'*opérateur de présence* est l'opérateur 1. La formule générale (25) donne alors pour la densité statistique de présence l'expression (24_2) ci-dessus, expression qui, compte tenu de la définition *invariante* (21) de la *matrice-tampon*, apparaît comme celle de la quatrième composante d'un quadrivecteur.

Dans le même ordre d'idées, nous savons que le quadri-opérateur

$$P^i = -\frac{h}{4\pi i}[\partial^i] + \frac{e}{c}A^i \tag{15'}$$

(opérateur doué de la symétrie relativiste du second principe) correspond densitairement à l'*impulsion-énergie propre* ou *cinétique* de l'électron. D'après le principe quantique général (25), les quatre densités statistiques que fait apparaître une intégration à temps constant sont les

$$-\frac{ich}{4\pi i}\psi^+[\partial^i]\psi + ieA^i\psi^+\psi = \frac{ich}{4\pi}\psi^\times[\partial^i]\gamma^4\psi + eA^i\psi^\times\gamma^4\psi.$$

On reconnaît là les quatre composantes T^{i4} du *tenseur inertique* de Tetrode

$$\boxed{T^{ij} = \frac{ich}{4\pi}\psi^\times[\partial^i]\gamma^j\psi + A^i.e\psi^\times\gamma^j\psi,} \tag{26}$$

dont le second terme fait intervenir la *densité de courant-charge* de Dirac

$$\boxed{j^k = -e\psi^\times\gamma^k\psi\,.} \tag{24'}$$

La formule

$$\bar{p}^i = \frac{1}{ic}\iiint T^{i4}\,\delta u = \iiint T^{i4}\,\delta u_4, \tag{27'}$$

imposée par le principe quantique (25) est l'expression tronquée de la formule relativiste [1]

$$\bar{p}^i = \iiint T^{ij}\,\delta u_j \tag{27}$$

correspondant à une intégration *à temps constant.* Il est important de remarquer que, dans la formule (27), *les principes quantiques imposent la sommation sur*

(1) *La Relativité restreinte*, p. 50.

le second indice de T^{ij}. Or, c'est justement de cette manière que 1° l'indice significatif du premier terme fourni par T^{ij} (impulsion-masse totale) est l'indice de l'opérateur différentiel $[\partial^i]$ (et non celui de l'opérateur matriciel γ^j): et que 2°, $\overline{A}^i$ désignant la valeur moyenne du quadripotentiel sur l'hypercloison d'intégration, le second terme fourni par T^{ij} (partie *électromagnétique* de l'impulsion-masse) rejoint l'expression classique [1] suivant

$$(27') \qquad -\iiint A^i j^k\, \delta u_k = \frac{e}{c}\overline{A}^i.$$

En résumé, l'on voit : 1° que c'est bien l'intervention spéciale de la matrice γ^4 qui permet à la Théorie de Dirac de concilier la variance quadrivectorielle de l'opérateur d'impulsion masse ($15'_1$) avec la variance de tenseur du second rang de la densité d'inertie de Tetrode (26); 2° que l'expression du tenseur densité d'inertie conforme aux principes généraux de la Mécanique ondulatoire est l'expression *asymétrique* T^{ij} de Tetrode [2] et non l'expression symétrisée $\Theta^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$ de Pauli [3]; 3° que, dans le calcul de l'impulsion-masse moyenne probable, l'indice muet « virtuel » imposé par les principes généraux de la Mécanique ondulatoire est l'indice de la matrice γ^j, l'indice significatif étant donc l'indice commun aux opérateurs $[\partial^i]$ et A^i.

Dans les deux exemples précédents, la variance et la signification physique de l'opérateur étaient connues *a priori*, et nous en avons déduit, par l'intermédiaire de la règle générale (25), la définition du tenseur densitaire correspondant. Nous allons maintenant faire jouer la même règle en sens opposé, de manière à préciser légèrement, à partir de l'interprétation connue des cinq tenseurs densitaires $\psi^\times\gamma\psi$, ce que l'on dit généralement sur le classement et l'interprétation physique des seize matrices γ^A. Auparavant, une série de remarques importantes s'impose.

Toutes ces remarques procèdent de la suivante : contrairement à ce qui avait lieu en Physique prérelativiste, *il y a, en Physique relativiste, plusieurs tenseurs intégraux (tenseurs finis) associés à un même tenseur densitaire.* Dans ces conditions, l'application brutale de la formule quantique (25) à *toutes* les composantes d'un tenseur densitaire donné fournit en général des composantes appartenant non pas à un, mais bien à *plusieurs tenseurs finis distincts.* Du reste, chacun de ces tenseurs n'est « réalisé » par la formule (25) que d'une manière « tronquée », certaines de ses composantes étant « supprimées » par l'intégration à temps constant ($\delta u^u = 0$ pour $u = 1, 2, 3$). Il suit de là que

---

(1) *Op. cit.*, p. 47 et 62.

(2) *Der Impuls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie* (*Zeits. f. Phys.*, **49**, 1928, p. 858).

(3) *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, B : *Relativistische Theorien* (*Handb. d. Phys.*, XXIV$_3$, 1933, p. 235).

pour appliquer à bon escient la formule quantique (25), *il faut être en possession d'une théorie relativiste de la grandeur étudiée.*

Un exemple fera comprendre ce que nous voulons dire. Les quatre grandeurs finies qu'on obtient en appliquant la formule (25) aux composantes de la densité de courant-charge de Dirac $j^k = -e\psi^\times\gamma^k\psi$ ne constituent pas un même être géométrique; au contraire, l'invariant *charge électrique finie* est fourni seulement par la quatrième intégrale

$$[a] \qquad Q = \iiint j^4\,\delta u_4 = \iiint q\,\delta u \qquad \left(q = \frac{1}{ic} j^4,\ \delta u = ic\,\delta u^4\right),$$

dans laquelle les trois termes $j^v \delta u_v$ sont « supprimés » par l'intégration à temps constant (¹). Les trois autres intégrales sont sans rapport avec la charge électrique.

Mais, d'après la Physique prérelativiste, nous savons que ces trois intégrales représentent le *courant électrique fini*. En Relativité, nous devons donc chercher la définition d'un tenseur intégral d'Univers dont trois composantes redonneront, pour une intégration à temps constant, les expressions prérelativistes classiques; la définition la plus simple du *courant électrique d'Univers fini* sera évidemment

$$[b] \qquad \delta\Gamma^{kl} = j^k\,\delta u^l - j^l\,\delta u^k,$$

dans laquelle les trois $\delta\Gamma^{u4}$ représenteront le courant proprement dit, les trois $\delta\Gamma^{uv}$ étant « supprimées » par une intégration à temps constant.

Poursuivons cette analyse pour les quatre autres tenseurs $\psi^\times\gamma^A\psi$. En ce qui concerne la densité de spin σ^l, nous montrerons au Chapitre II que le spin fini doit être calculé par la formule analogue à [*b*]

$$[c] \qquad \delta B^{kl} = \sigma^k\,\delta u^l - \sigma^l\,\delta u^k,$$

de laquelle résulte que, dans une intégration à temps constant, les trois icB^{u4} valent $\iiint \sigma^u \delta u$ (spin proprement dit), les trois B^{uv} étant nulles. Du point de vue relativiste, il n'est donc pas exact de considérer la grandeur

$$[d] \qquad X = \iiint \sigma^4\,\delta u = ic \iiint \sigma^4\,\delta u_4$$

comme une quatrième composante du spin fini, ainsi qu'on est parfois tenté de le faire. Ce qu'il faut dire, c'est que [*d*] est l'expression tronquée d'un invariant, dont l'interprétation physique n'est pas encore connue, et qui est à la densité σ^k ce que la charge électrique est à la densité j^k.

Une question intéressante est celle du moment magnétique $\mathcal{M}$ et du moment électrique $\mathcal{E}$ finis. Les définitions relativistes les plus simples qu'on puisse

(¹) *La Relativité restreinte*, p. 44.

donner de ces grandeurs sont [1]

$$[e^1] \qquad \partial\mathfrak{M}^i = \overline{m}^{ij}\,\partial u_j, \qquad \partial\mathcal{E}^i = m^{ij}\,\partial u_j,$$

m^{ij} désignant le tenseur antisymétrique densité de moment magnéto-électrique propre, et $ic\overline{m}^{ij}$ son dual. Par ces formules, les moments finis sont définis comme deux quadrivecteurs orthogonaux au quadrivecteur ∂u_j; leurs composantes temporelles sont donc « supprimées » par une intégration à temps constant. Quant aux trois autres composantes, elles retrouvent alors (au facteur ic près) la forme tronquée classique

$$[e^0] \qquad \partial\mathfrak{M}^{u\nu} = m^{u\nu}\,\partial u, \qquad \partial\mathcal{E}^{u} = m^{u4}\,\partial u.$$

Étudions, pour finir, les deux invariants densitaires. La relation (62 B 1) du Chapitre III égale, à un facteur près, l'invariant $(\omega^1) = \psi^{\times}\psi$ à la trace du tenseur inertique de Tetrode, ce qui permet de l'interpréter comme la *densité de masse propre* du fluide statistique (*voir* Chap. II, § II); le quadrivecteur

$$[f] \qquad p^i_{(0)} \cong \iiint (\omega^1)\,\partial u^i \cong \iiint T^j_j\,\partial u^i,$$

colinéaire au quadrivecteur ∂u^i (et ayant donc ses trois composantes $p^u_{(0)}$ « supprimées » par une intégration à temps constant), est physiquement homogène au quadrivecteur impulsion-masse

$$p^i = \iiint T^{ij}\,\partial u_j,$$

mais évidemment distinct de lui; pour cette raison, nous dirons que l'intégrale

$$\iiint (\omega^1)\,\partial u$$

représente à un facteur près la *pseudo-masse propre* de l'électron.

---

(1) O. Costa de Beauregard, *Sur deux questions de Relativité* (*C. R. Acad. Sc.*, **213**, 1941, p. 822). Un autre système de définitions équivalentes est évidemment

$$[e^2] \qquad \partial\mathfrak{M}^i = \frac{1}{2}\,m_{jk}[\,dx^i\,dx^j\,dx^k\,], \qquad \partial\mathcal{E}^i = \frac{1}{2}\,\overline{m}_{jk}[\,dx^i\,dx^j\,dx^k\,].$$

Contrairement à ce que nous disions dans la Note citée, il est encore possible de définir $\mathfrak{M}$ et $\mathcal{E}$ comme des tenseurs complètement antisymétriques de rang 3, dont les duals jouissent de toutes les propriétés indiquées dans le texte, au moyen des formules

$$[e^3] \qquad \partial\mathfrak{M}^{ijk} = \Sigma\, m^{ij}\,\partial u^k, \qquad \partial\mathcal{E}^{ijk} = \Sigma\,\overline{m}^{ij}\,\partial u^k,$$

$$[e^4] \qquad \partial\mathfrak{M}^{ijk} = \Sigma\, m^i_l[\,dx^l\,dx^j\,dx^k\,], \qquad \partial\mathcal{E}^{ijk} = \Sigma\, \overline{m}^i_l\,[\,dx^l\,dx^j\,dx^k\,],$$

où les divers signes Σ s'entendent *avec permutation circulaire* sur i, j, k. Les mêmes considérations valent évidemment pour le champ électromagnétique, qui est homogène à une densité de moment électromagnétique; elles trouveraient leur application dans la Théorie du Photon de M. L. de Broglie.

D'une manière analogue, on introduira pour l'invariant (ω^2) la définition d'un quadrivecteur intégral, d'interprétation physique encore inconnue,

$$[g] \qquad Y^{\iota} = \iiint (\omega^2)\, \delta u^{\iota},$$

dont les trois composantes Y^{u} sont « supprimées » par une intégration à temps constant.

Munis de ces résultats, nous sommes maintenant en mesure d'établir le tableau d'interprétation annoncé pour les seize γ^{A}. D'après une remarque faite à propos de la formule quantique générale (25), nous savons que l'ensemble des opérateurs représentant une même grandeur finie doit avoir la même variance *symbolique* que le tenseur correspondant de la Relativité classique. Supposons alors que nous calculions *par une intégration à temps constant* les composantes d'un certain tenseur fini classique attaché à un tenseur densitaire d'interprétation connue; certaines composantes pourront être nulles (*composantes supprimées*), auquel cas la règle (25) donne *zéro* pour la composante opératorielle symbolique correspondante. Les autres composantes ne comporteront qu'un seul terme dans leur expression (*expression tronquée*), et, après transformation du $\psi^{\times}$ en ψ^{+} suivant $\psi^{\times} = i\psi^{+}\gamma^{4}$, la règle (25) fournira la composante opératorielle non nulle correspondante.

Pour ces composantes non nulles, et lorsqu'il s'agit des 5 tenseurs densitaires du type $\psi^{\times}\gamma^{A}\psi$ l'opérateur γ^{B} cherché est donc donné par la formule

$$\gamma^{B} = i\gamma^{4}\gamma^{A},$$

dont l'application systématique conduit au tableau suivant :

Variance symbolique de l'opérateur imposée par la Relativité		
Invariant	$\overbrace{1}^{\text{Charge électrique}}$	
Quadrivecteur	$\overbrace{\gamma^{1}\ \ \gamma^{2}\ \ \gamma^{3}}^{\text{Moment électrique propre}}$	$\overbrace{\gamma^{4}}^{\text{Pseudo-masse propre}}$
Tenseur antisymétrique de rang 2	$\overbrace{\gamma^{12}\ \ \gamma^{23}\ \ \gamma^{31}}^{\text{Moment cinétique propre (spin)}}$	$\overbrace{\gamma^{14}\ \ \gamma^{24}\ \ \gamma^{34}}^{\text{Courant électrique fini}}$
Pseudo-quadrivecteur	$\overbrace{\gamma^{123}}^{\text{Grandeur inconnue } Y^{\iota}}$	$\overbrace{\gamma^{234}\ \ \gamma^{314}\ \ \gamma^{124}}^{\text{Moment magnétique propre}}$
Pseudo-invariant		$\overbrace{\gamma^{1234}}^{\text{Grandeur inconnue X}}$

Ainsi, *du point de vue de l'interprétation physique, chacun des* 5 *tenseurs matriciels* 1, γ^i, γ^{ij}, γ^{ijk}, γ^{ijkl}, *se dédouble en deux tenseurs matriciels du même rang*, dont nous dirons, par convention, que l'un est *du genre temps* et l'autre *du genre espace*; pour faire apparaître au complet ces deux *tenseurs matriciels*, il suffit de rétablir les opérateurs *zéro* antérieurement prévus. Par exemple, le quadri-opérateur γ^i de la deuxième ligne engendre les deux quadriopérateurs

$$\overbrace{\gamma^1 \quad \gamma^2 \quad \gamma^3 \quad 0}^{\text{Moment électrique propre}}, \qquad \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \gamma^4}^{\text{Pseudo-masse propre}}.$$

Pour faciliter la comparaison avec le tableau classique dressé par M. L. de Broglie (¹), donnons la transcription de ces résultats en termes de matrices α; il vient, les coefficients physiques étant systématiquement négligés, le tableau suivant :

Charge électrique			1			
Moment électrique propre........		α^{14}	α^{24}	α^{34}	0	
Courant électrique fini...........	0	0	0	α^1	α^2	α^3
Moment magnétique propre.......		α^{234}	α^{314}	α^{124}	0	
Pseudo-masse propre............		0	0	0	α^4	
Moment cinétique propre (spin)...	α^{23}	α^{31}	α^{12}	0	0	0
Grandeur inconnue Y............		0	0	0	α^{1234}	
Grandeur inconnue X............			α^{123}			

Évidemment, rien n'est *physiquement* changé à l'interprétation des seize α; la différence provient de ce qu'ici les α sont groupées comme le seraient les composantes du tenseur *fini* de la Relativité classique, alors que, dans l'Ouvrage de M. L. de Broglie, elles sont groupées comme celles du tenseur densitaire $\psi^{+}\alpha\psi$.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES MILIEUX CONTINUS DOUÉS D'UNE DENSITÉ DE MOMENT CINÉTIQUE PROPRE EN RELATIVITÉ RESTREINTE.

9. Le présent Chapitre contient le dernier état de la Dynamique des milieux continus doués de moment cinétique propre ou *spin* (²) que nous

(¹) *L'Électron magnétique*, pp. 225-226.

(²) Bien qu'en principe le terme *spin* soit réservé à la représentation *quantique* d'un moment cinétique propre *fini*, nous l'utilisons ici, pour abréger le discours, comme un simple synonyme de la notion de moment cinétique propre, fini ou densitaire.

avions commencé à développer il y a quelque temps (¹). Notre projet initial, assez modeste, était simplement de montrer que les propriétés du spin en Théorie de Dirac sont conformes aux exigences relativistes, et qu'on peut les déduire de postulats généraux qui se retrouvent dans la plupart des questions de Relativité. C'est ainsi, par exemple, que nous avons justifié *a posteriori* la représentation de la densité de spin par un pseudo-quadrivecteur du genre espace σ^i, et rétabli par un raisonnement de Relativité pure la formule connue

$$\sigma^4 = \frac{i}{c}\left(\vec{\sigma}.\vec{v}\right).$$

Depuis, mue, pour ainsi dire, par ses virtualités internes, notre théorie a continué à se développer; les nouveaux résultats obtenus se trouvent être conformes à des conséquences encore non explicitées, ou insuffisamment explicitées, de la Théorie de Dirac, au développement et à l'interprétation de laquelle ils peuvent donc contribuer. En particulier, nous avons indiqué que le tenseur inertique T^{ij} d'un milieu doué de spin n'est pas symétrique, et donné l'interprétation de la relation

$$\overline{[T^{ji} \quad T^{ij}]} = -ic[\partial^j \sigma^i - \partial^i \sigma^j]$$

qui est satisfaite, en Théorie de Dirac, par le tenseur T^{ij} asymétrique initialement défini par Tetrode (²); cette remarque, jointe à d'autres considérations que nous exposerons aux chapitres suivants, nous amène à conclure que *le véritable tenseur inertique de la Théorie de Dirac* (et de la théorie des particules à spin obtenues par fusion) *n'est pas le tenseur symétrisé à quatre termes de Pauli, mais bien le tenseur asymétrique à deux termes de Tetrode.*

D'une manière générale, on verra que l'accord de notre Dynamique relativiste préquantique des milieux doués de spin avec la théorie de Dirac (ou, plus généralement, avec la Théorie des particules à spin) est aussi parfait qu'on pouvait l'espérer. Il n'en va malheureusement pas de même avec la Cinématique que nous donnons ensuite, laquelle, pourtant, semble satisfaisante en elle-même. Par exemple, nous avions pensé, par analogie avec le cas relativiste classique, que le tenseur inertique asymétrique T^{ij} devait être le produit général de deux quadrivecteurs non colinéaires, représentant l'un le « vrai » courant d'Univers, et l'autre un « faux » courant; or, bien que la

(¹) O. Costa de Beauregard, *C. R. Acad. Sc.*, **211**, 1940, p. 228 et 499, et *Journ. de Math.*, t. XXI, fasc. 3, 1942, p. 267. Nous tenons aujourd'hui pour injustifiées les conclusions « pessimistes » de ce dernier travail, comme le montreront les alinéas 8° et 9° qui suivent maintenant le 7° (n° **12** ci-apres).

(²) Cette relation a eté donnée, sous une forme équivalente, par Tetrode, et depuis, par plusieurs auteurs; mais sa véritable signification, en l'absence d'une Dynamique des milieux doués de spin, semble avoir échappé.

théorie de Dirac introduise, comme on sait, les deux quadrivecteurs de courant

$$\psi^{\times}\gamma^{i}\psi \quad \text{et} \quad \psi^{\times}[\partial^{i}]\psi - 2i\varepsilon A^{i}.\psi^{\times}\psi$$

on peut montrer, à l'aide des identités quadratiques de Kofink que nous rappelons au Chapitre IV, que le tenseur de Tetrode

$$\psi^{\times}[\partial^{i}]\gamma^{j}\psi - 2i\varepsilon A^{i}.\psi^{\times}\gamma^{j}\psi$$

n'est pas homothétique au produit général de ces deux courants. Il est néanmoins remarquable que son expression « ressemble » au produit en question, et l'on verra au Chapitre IV qu'on peut s'appuyer sur cette « ressemblance » pour tirer des conclusions justes. La Cinématique que nous proposons, bien qu'insuffisante pour rejoindre la Théorie de Dirac, peut donc être considérée comme une première approximation de celle qu'il faudrait constituer pour cela.

Parmi les diverses notions que font intervenir la Dynamique et la Cinématique que nous allons exposer, figurent notamment celle d'une *impulsion-masse oblique sur la trajectoire d'Univers d'un point matériel doué de spin* et, corrélativement, celle d'une *impulsion-masse transversale*; ces notions avaient déjà été rencontrées par de nombreux auteurs traitant de la Relativité (¹), mais il nous semble qu'il restait à les intégrer au sein d'une théorie cohérente.

I. — Dynamique des milieux doués de spin.

10. La remarque fondamentale est que *l'origine d'une densité de moment cinétique propre σ ne saurait être cherchée dans les forces d'inertie de la Dynamique traditionnelle.* En effet, isolons à un instant t, dans un milieu matériel de densité ρ animé d'un champ de vitesses $\vec{v}$, une gouttelette sphérique de rayon r; le moment d'inertie de cette gouttelette valant $\frac{8}{15}\pi\rho r^5$ et sa vitesse angulaire $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot.}\,\vec{v}}$, son moment cinétique est un infiniment petit du 5^e ordre en r, ordre trop élevé de deux unités pour qu'on puisse définir une densité correspondante. C'est dire que, pour établir la Dynamique des milieux doués de spin, nous allons devoir procéder axiomatiquement, en faisant jouer les règles de variance et d'homogénéité tensorielles, et en nous appuyant sur des postulats raisonnables, suggérés par l'étude des théories classiques de la Relativité.

(¹) Von Laue, *Relativite* (trad. G. Létang), t. I, p. 126 et 255; Proca, *Thèse*, p. 145.

Le point de départ de toute notre théorie sera celui-ci : *un moment cinétique fini est représenté par les trois composantes* C^{uv} *d'un tenseur du second rang antisymétrique* C^{ij}. Ce fait fondamental résulte sans ambiguïté de la considération d'un point matériel de coordonnées d'Univers x^i et d'impulsion-masse p^i ; en effet, d'après la Dynamique classique, le *moment cinétique à l'origine* de ce point matériel est représenté par les trois composantes C^{uv} du tenseur antisymétrique

$$C^{ij} = x^i p^j - x^j p^i. \tag{31}$$

Cherchons la signification des trois composantes C^{u4} de ce même tenseur. Remplaçant x^4 et les p^i par leurs valeurs respectives ict et $p^u = mv^u$, $p^4 = icm$ (m désigne la masse relativiste du point et v^u sa vitesse ordinaire), il vient

$$C^{u4} = icm(x^u - v^u t); \tag{31'}$$

ainsi, les trois $\frac{1}{ic}C^{u4}$ ne sont autres que les composantes du *moment barycentrique généralisé* (1). Nous désignerons par icB^{kl} le dual du tenseur C^{ij}.

Ayant établi notre point de départ comme il vient d'être dit, nous allons procéder à l'établissement axiomatique de la Dynamique des milieux continus doués d'une densité de moment cinétique propre σ; les postulats successifs que nous serons amené à formuler seront désignés dans l'ordre par les majuscules romaines A, B, ...

11. 1° *Si la grandeur* σ *existe* (postulat d'existence A), *elle est représentée par un tenseur*. En effet, par définition même d'une densité, un certain produit de σ par le tenseur élément de volume d'Univers $[dx^i dx^j dx^k]$ doit fournir un moment cinétique, lequel est représenté par un tenseur.

2° *Le fait que le moment cinétique fini est de rang* 2 *entraîne que le rang de la densité correspondante* σ *est* 1 *ou* 3. En effet, soit n le rang inconnu du tenseur σ, m le nombre des indices muets dans le produit tensoriel de σ par $[dx^i dx^j dx^k]$, $s = n - m$ celui des indices significatifs de σ. On a les deux relations d'homogénéité

$$2 = (3 - m) + s \qquad \text{ou} \qquad m = 1 + s,$$
$$n = m + s, \qquad \text{d'où} \qquad n = 1 + 2s.$$

Comme les entiers n, m et s doivent être positifs ou nuls, on peut écrire les inégalités

$$s < m \leq n;$$

---

(1) Lorsque le point matériel est considéré simultanément avec l'origine du moment C^{ij} les trois $\frac{1}{ic}C^{u4}$ représentent le moment barycentrique habituel; pour t infiniment petit ($t = dt$), le terme additif s'interprète comme une *correction de non simultanéité*.

et comme ces mêmes entiers doivent être au plus égaux à 4, les seules hypothèses admissibles sont finalement

$$[\mathrm{H}] \qquad \left\{ \begin{array}{llll} s = 0 & \text{qui donne} & m = 1 \text{ et } & \boxed{n = 1} \\ s = 1 & \text{»} & m = 2 \text{ et } & \boxed{n = 3} \end{array} \right.$$

l'hypothèse $s = 2$ ne convient pas, puisqu'elle donnerait $n = 5$.

Finalement, comme nous l'avions annoncé, le rang n de σ est nécessairement 1 ou 3; de plus, le raisonnement précédent fixe le nombre m des indices muets dans chacune des deux hypothèses $s = 0$, $s = 1$, hypothèses que nous désignerons respectivement par $[\mathrm{H}_1]$ et $[\mathrm{H}_2]$.

3° Il nous reste à faire jouer maintenant la propriété d'antisymétrie du tenseur fini C^{ij}, propriété qui doit être nécessairement satisfaite.

A un facteur près sans importance, l'écriture « naturelle » de l'hypothèse $[\mathrm{H}_1]$ est

$$[\mathrm{H}_1] \qquad \delta C^{kl} = \sigma_i [dx^i\, dx^k\, dx^l];$$

on voit que cette écriture assure « automatiquement » l'antisymétrie du tenseur fini C^{kl}.

Au contraire, l'écriture « brute » de l'hypothèse $[\mathrm{H}_2]$

$$[\mathrm{H}'_2] \qquad \delta B^{ij} = \frac{1}{2} \sigma^i{}_{kl} [dx^j\, dx^k\, dx^l] \qquad \text{ou} \qquad \delta B^{ij} = \frac{1}{2} \sigma^j{}_{kl} [dx^i\, dx^k\, dx^l].$$

n'assure pas « automatiquement » l'antisymétrie du tenseur fini δB^{ij} (¹); cette antisymétrie ne serait assurée que moyennant un choix particulier de l'élément trilinéaire d'intégration, ce qui est inadmissible. Si donc nous voulons que l'hypothèse $n = 3$ puisse convenir, il est nécessaire de satisfaire au postulat (B) d'*arbitraire de l'élément trilinéaire d'intégration.*

Ici, ce postulat (B) nous oblige à remplacer les écritures $[\mathrm{H}'_2]$ par leur combinaison antisymétrique

$$[\mathrm{H}_2] \qquad \delta B^{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma^i{}_{kl} [dx^j\, dx^k\, dx^l] - \sigma^j{}_{kl} [dx^i\, dx^k\, dx^l] \right\},$$

le facteur $\frac{1}{2}$ étant introduit pour une raison qui apparaîtra dans un instant.

4° L'hypothèse $[\mathrm{H}_1]$ présente une autre propriété remarquable, qui n'appartient pas en général à $[\mathrm{H}_2]$. Lorsqu'on intègre *à temps constant,* c'est-à-dire lorsque les trois $[dx^u dx^v dx^4]$ sont nulles (hypothèse dite « de la simultanéité »), les expressions $[\mathrm{H}_1]$ se réduisent à

$$[\mathrm{H}_1^0] \qquad \delta C^{vw} = \sigma_u\, \delta u, \qquad \delta C^{u4} = 0.$$

(¹) La suite montrera que les tenseurs C^{kl} et icB^{ij} respectivement définis par $[\mathrm{H}_1]$ et $[\mathrm{H}_2]$ sont bien duals l'un de l'autre.

δu désignant l'élément de « volume pur » $[dx^u dx^v dx^w]$. Ainsi, avec l'écriture $[H_1]$, les trois composantes du moment barycentrique propre sont nulles dans l'hypothèse de la simultanéité, et les trois composantes du moment cinétique propre sont alors reliées chacune à chacune à leurs densités σ_u par la formule prérelativiste bien connue. Ce sont là des circonstances qui se retrouvent constamment dans les théories usuelles de la Relativité restreinte, et il est très naturel de chercher à les assurer d'une manière générale dans une théorie physique comme celle que nous établissons. Postulons donc (C) que, *dans l'hypothèse de la simultanéité, le moment barycentrique doit être nul, et le moment cinétique ne contenir qu'un seul terme dans son expression.*

Il est bien clair que, si le tenseur $\sigma^i_{.kl}$ de l'hypothèse $[H_2]$ est quelconque, ce postulat n'est pas satisfait. En effet, nous voyons d'abord que, pour un couple bien déterminé k, l des indices muets, chacun des termes écrits fournit, par permutation de k et de l, deux termes en général différents. Notre postulat (C) qui, en vertu de (B), doit être satisfait dans n'importe quel repère galiléen, impose donc déjà l'antisymétrie de σ_{ikl} par rapport au couple d'indices k, l. Moyennant cela, les deux termes obtenus par permutation de k et l sont identiquement égaux, et nous pouvons convenir de les grouper ensemble de manière à négliger le facteur $\frac{1}{2}$.

Écrivons alors $[H_2]$ dans l'hypothèse de la simultanéité. Si nous prenons $j = v$, le seul terme non nul du premier groupe est fourni par $k = w$ et $l = u$. Si de même nous prenons $i = u$, le seul terme non nul du second groupe est fourni par $k = v$, et $l = w$, tandis que si nous prenons $i = 4$ tous les termes de ce second groupe sont nuls. Finalement, dans l'hypothèse de la simultanéité, $[H_2]$ s'explicite suivant (¹)

$$\delta B^{uv} = (\sigma^{uwvu} - \sigma^{vwvw})[dx^1\, dx^2\, dx^3] = -(\sigma^{uwuw} + \sigma^{vwvw})[dx^1\, dx^2\, dx^3],$$
$$\delta B^{4v} = \sigma^{4wvu}[dx^1\, dx^2\, dx^3].$$

En vertu du postulat (C), il faut que l'un de ces groupes de composantes (représentant le moment barycentrique) soit nul, et que l'autre (représentant le moment cinétique) ne comporte qu'un seul terme dans son expression ; de plus, en vertu du postulat (B), ce résultat doit être obtenu dans tous les repères galiléens. Or, avec des σ non identiquement nulles, cela n'est possible que si la quantité $(\sigma^{uwuw} + \sigma^{vwvw})$ est identiquement nulle, ce qui entraîne l'antisymétrie du tenseur σ^{ikl} par rapport aux deux premiers indices.

5° Finalement, l'ensemble des postulats (B) et (C) destinés à doter le cas $n = 3$ des deux propriétés remarquables inhérentes au cas $n = 1$, imposent l'écriture $[H_2]$ avec l'antisymétrie complète du tenseur σ^{ikl}. Je dis qu'alors *les*

(¹) Bien entendu, cette écriture s'entend *sans sommation* sur les indices répétés.

deux cas $n = 1$ et $n = 3$ sont complètement coïncidents; ils s'écrivent en effet

$$[\mathrm{H}] \qquad \begin{cases} \delta C^{kl} = \sigma_i [dx^i\, dx^k\, dx^l], \\ \delta B^{ij} = \frac{1}{2} \{ \sigma^i{}_{kl} [dx^j\, dx^k\, dx^l] - \sigma^j{}_{kl} [dx^i\, dx^k\, dx^l] \}. \end{cases}$$

Si l'on passe aux grandeurs duales, ces deux écritures viennent en coïncidence suivant

$$[\mathrm{K}] \qquad \delta B^{ij} = \sigma^i\, \delta u^j - \sigma^j\, \delta u^i.$$

En effet, prenons d'abord la formule $[\mathrm{H}_2]$; i diffère de j à cause de l'antisymétrie de δB^{ij}, k diffère de l à cause de l'antisymétrie de σ ou de $[dx^i dx^j dx^k]$ et, pour la même raison k et l diffèrent de i et j; abstraction faite de la permutation de k et l, chacun des groupes de termes écrits ne fournit qu'un seul terme et, en introduisant les quadrivecteurs duals $\frac{1}{ic}\sigma^j$ et $ic.\delta u^i$ (¹) des deux tenseurs du troisième rang, on aboutit bien à la formule [K]. Prenons maintenant la formule $[\mathrm{H}_1]$: comme k diffère de l et que i diffère de k et l, il n'y a que deux termes non nuls au second membre; introduisant les duals $ic.\delta B^{ij}$ et $ic.\delta u^i$ (¹) de δC^{kl} et de $[dx^i dx^k dx^l]$, on aboutit bien à la formule [K]. Conformément à ce que nous avions annoncé, les deux tenseurs C^{ij} et $ic\, B^{kl}$ apparaissent comme duals l'un de l'autre.

Avant de poursuivre, résumons les conclusions déjà obtenues. L'ensemble des postulats (A) (*existence d'une densité* σ), (B) *arbitraire de l'hypercloison d'intégration*), (C) (*nullité du moment barycentrique et écriture à un seul terme du moment cinétique dans l'hypothèse de la simultanéité*), nous conduisent à relier le moment fini δC ou δB à la densité correspondante représentée par un quadrivecteur σ^i, par l'une ou l'autre des écritures équivalentes

$$(32) \qquad \boxed{\delta C^{kl}_{(p)} = \sigma_i [dx^i\, dx^k\, dx^l],} \qquad \boxed{\delta B^{ij}_{(p)} = \sigma^i \delta u^j - \sigma^j \delta u^i;}$$

$ic\,\delta u^i$ désigne le quadrivecteur dual de l'élément trilinéaire $[dx^j dx^k dx^l]$, la composante $ic.\delta u^4 = [dx^u dx^v dx^w] = \delta u$ représentant l'*élément de volume pur* habituel; les trois $\delta C^{uv} = ic.\delta B^{w4}$ sont les composantes du moment cinétique propre $\delta\vec{C}$, et les trois $\frac{1}{ic}\delta C^{w4} = \delta B^{uv}$ celles du moment barycentrique propre $\delta\vec{B}$ d'une gouttelette fluide δu^i. Dans l'hypothèse de la simultanéité, les (32) se réduisent à

$$(32') \qquad \delta C^u = \sigma^u\, \delta u, \qquad \delta B^u = 0,$$

(¹) Ces notations sont celles que nous avons utilisées dans notre *Relativité restreinte;* voir notamment p. 19 et 31.

formules qui ne sont autres que celles utilisées « spontanément » par la Théorie de Dirac.

6° Les théories usuelles de la Relativité restreinte nous suggèrent de formuler un nouveau postulat, qui se trouve entraîner une autre propriété connue de la densité σ de Dirac. On sait que les formes dégénérées des équations tensorielles dans l'hypothèse de la simultanéité et dans l'hypothèse où le repère galiléen est le repère *entraîné* ou *propre* sont généralement très analogues; postulons donc (D) que, *dans le repère galiléen entraîné, on doit retrouver pour le moment cinétique* $\mathfrak{M}$ *la formule densitaire* $(32'_1)$. Cela exige, en vertu des (32), que σ^4 s'annule dans ce système, ou équivalemment que le quadrivecteur σ^i soit orthogonal au quadrivecteur courant d'Univers $c^i = dx^i : ds$

$$\boxed{\sigma^i c_i = 0.} \tag{33}$$

ou encore, $\vec{v}$ désignant la vitesse au sens ordinaire du fluide et $\vec{\sigma}$ le vecteur d'espace ayant les trois σ^u pour composantes

$$\sigma^4 = \frac{i}{c}(\vec{\sigma}.\vec{v}). \tag{33'}$$

On sait que la propriété exprimée par la formule (33) est effectivement satisfaite en Théorie de Dirac ([1]).

On voit que le dernier postulat (D) s'introduit assez indépendamment des postulats (A), (B), (C); malgré son caractère « naturel », on peut se demander s'il n'est pas un peu arbitraire. Le numéro suivant montrera que sa conséquence (33) entraîne dans les formules toute une série de simplifications intéressantes, en sorte que nous en faisons un élément essentiel de notre théorie, même considérée indépendamment de la Théorie de Dirac.

12. 7° *Les moments pondéromoteurs liés au moment cinétique propre.* — Prenons l'intégrale de l'expression (32_2) sur un domaine tridimensionnel fermé et transformons en intégrale quadruple : il vient

$$\iiint \delta B^{ij} = \frac{1}{ic}\iiiint (\partial^j\sigma^i - \partial^i\sigma^j)[dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4]. \tag{p}$$

Choisissons comme domaine tridimensionnel fermé celui que déterminent l'hyperparoi latérale d'un tube de courant d'Univers, et deux hypercloisons, généralement curvilignes, partout du genre espace, figurant deux « états non

([1]) La démonstration générale de cette formule en théorie de Dirac a été donnée par W. Pauli; voir ci-après, formule (48_1). Il va sans dire que, en théorie de Dirac, le quadrivecteur de courant du fluide statistique ne définit pas à proprement parler un *repère galiléen entraîné*.

simultanés » distincts d'une même « goutte fluide » finie. Au premier membre de la formule [p], la portion d'intégrale correspondant aux deux hypercloisons représente la variation dB^{ij} du *moment barycentrique-moment cinétique propre* de la goutte considérée; on peut donc dire que la formule [p] fournit une décomposition de la variation du *moment barycentrique-moment cinétique propre* de la goutte fluide, l'un des termes de cette décomposition étant la portion d'intégrale triple correspondant à l'hypercloison (changée de signe), et l'autre l'intégrale quatruple qui figure au second membre. Pour trouver l'interprétation de ces deux termes, particularisons les deux hypercloisons en les prenant planes, orthogonales à l'axe de temps dans le repère galiléen utilisé, et infiniment voisines dans le temps; soit dt leur intervalle temporel.

Rappelons une propriété de l'élément trilinéaire d'hyperparoi. Il est naturel de définir cet élément à l'aide 1° de deux petits vecteurs $\partial x'_1$ et $\partial x'_2$ du genre espace, tangents au contour superficiel (« non simultané » en général) de la goutte fluide, 2° de l'élément de courant d'Univers dx^i, qui est du genre temps. Dans ces conditions, les quatre composantes de l'élément trilinéaire d'hyperparoi sont les déterminants extraits du tableau

$$\begin{Vmatrix} \partial x_1^1 & \partial x_1^2 & \partial x_1^3 & \partial x_1^4 \\ \partial x_2^1 & \partial x_2^2 & \partial x_2^3 & \partial x_2^4 \\ dx^1 & dx^2 & dx^3 & dx^4 \end{Vmatrix};$$

les six mineurs extraits des deux premières lignes sont les composantes de l'*élément d'aire généralisé*, les trois [$\partial x^u \partial x^v$] représentant l'aire proprement dite. Il est alors évident que l'élément trilinéaire d'hyperparoi est un certain produit extérieur de cet élément d'aire par le quadrivecteur élément de trajectoire. D'une manière précise, introduisant les duals $ic\,\partial u^i$ et $ic\,\partial s^{kl}$ de l'élément trilinéaire d'hyperparoi et de l'élément bilinéaire du contour de la goutte, on vérifie sans peine la relation ([1])

$$\partial u^i = \partial s^{ij}\, dx_j;$$

les trois $ic\,\partial s^{w4} = \partial s^w$ sont les composantes de l'élément d'aire proprement dit $\vec{\partial s}$.

Dans l'hypothèse particulière de la simultanéité, que nous adoptons comme il a été dit, les trois ∂s^{uv} sont nulles; si l'on se rappelle que $x^4 = ict$, et si l'on désigne toujours par v^u les trois composantes de la vitesse ordinaire $\vec{v}$ du fluide, la formule considérée s'explicite suivant

$$\delta u^w = -\delta s^w\, dt, \qquad ic\,\delta u^4 = \delta s^u\, dx_u = \delta s^u . v_u\, dt = \left(\vec{\delta s} . \vec{v}\right) dt.$$

([1]) O. Costa de Beauregard, *La Relativité restreinte*, p. 31.

Portant enfin ces expressions dans (32_2), il vient, *pour l'élément d'intégrale triple d'hyperparoi*

$$\delta B^{uv} = -(\sigma^u \,\delta s^v - \sigma^v \,\delta s^u)\, dt = dt\left(\vec{\sigma} \wedge \vec{\delta s}\right)^{w},$$

$$ic\,\delta B^{w4} = \left\{ \sigma^w\left(\vec{\delta s}.\vec{v}\right) + \sigma^4.\,ic\,\delta s^w \right\} dt.$$

Conformément à ce que nous avons annoncé, la dernière expression « s'arrange » d'une manière remarquable si l'on tient compte de la conséquence (33′) du postulat (D) : on voit apparaître en effet un double produit extérieur suivant

$$ic\,\delta B^{w4} = \sigma^w\left(\vec{\delta s}.\vec{v}\right) - \delta s^w\left(\vec{\sigma}.\vec{v}\right) dt = \left\{ \vec{v} \wedge \left(\vec{\sigma} \wedge \vec{\delta s}\right) \right\}^w dt.$$

Souvenons-nous alors que, sur une hypercloison, les trois δB^{uv} représentent le moment barycentrique propre élémentaire $\delta\vec{B}$, et les trois $ic\,\delta B^{w4}$ le moment cinétique propre élémentaire $\delta\vec{C}$. Posant par définition, sur l'hypercloison, $-d_{(s)}B^w$ pour δB^{uv} et $-d_{(s)}C^w$ pour $ic\,\delta B^{w4}$, les formules précédentes s'écrivent

$$[p'] \qquad d_{(s)}\vec{B} = -dt\iint \vec{\sigma} \wedge \vec{\delta s}, \qquad d_{(s)}\vec{C} = -dt\iint \vec{v} \wedge \left(\vec{\sigma} \wedge \vec{\delta s}\right);$$

d'après la Dynamique classique, on voit clairement ainsi que les quantités $-\vec{\sigma} \wedge \vec{\delta s}$ et $-\vec{v} \wedge \left(\vec{\sigma} \wedge \vec{\delta s}\right)$ s'interprètent comme des moments pondéromoteurs superficiels élémentaires correspondant respectivement au moment barycentrique et au moment cinétique propres.

Après l'intégrale triple d'hyperparoi, étudions l'intégrale quadruple qui figure au second membre de $[p]$. Toujours avec le contour tridimensionnel particulier que nous avons spécifié, elle s'écrit, δu désignant l'élément de volume pur $[dx^1\, dx^2\, dx^3]$,

$$d_{(v)}\, B^{ij} = dt \iiint [\partial^j \sigma^i - \partial^i \sigma^j]\, \delta u,$$

formule sur laquelle nous lisons, d'après la Dynamique classique, que la quantité entre crochets est (au facteur ic près) une densité volumique de moment pondéromoteur d'Univers; posons donc, les trois μ^{uv} représentant la densité de moment pondéromoteur au sens habituel,

$$\mu^{ij}_{(1)} = ic\,\overline{[\partial^j \sigma^i - \partial^i \sigma^j]}.$$

Pour le moment barycentrique B^{uv}, il vient immédiatement

$$d_{(v)} B^{uv} = dt \iiint \left[\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{\sigma}}\right]^w \delta u\,;$$

pour le moment cinétique $C^{u4} = icB^{u4}$, si l'on tient compte de la conséquence (33_2) du postulat (D), le crochet « s'arrange » de manière à ne contenir que les trois composantes spatiales de σ^i :

$$d_{(v)} C^{u4} = dt \iiint \left\{ \partial^4 \sigma^u + \partial^u (\vec{\sigma} . \vec{v}) \right\} \delta u.$$

Finalement, nous pouvons écrire

$$[p''] \qquad d_{(v)} \vec{B} = dt \iiint \overrightarrow{\operatorname{rot} \sigma}\, \delta u, \qquad d_{(v)} \vec{C} = dt \iiint \left\{ \overrightarrow{\operatorname{grad} (\vec{\sigma} . \vec{v})} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\sigma} \right\} \delta u,$$

en sorte que les quantités $\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{\sigma}}$ et $\left\{ \overrightarrow{\operatorname{grad} (\vec{\sigma} . \vec{v})} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\sigma} \right\}$ s'interprètent comme les densités pondéromotrices volumiques correspondant respectivement aux moments barycentrique et cinétique propres. Entre les différentielles $d_{(s)}$ et $d_{(v)}$, définies par les formules $[p']$ et $[p'']$, et les d initialement définies (p. o), on a la relation

$$d = d_{(s)} + d_{(v)} ;$$

notre analyse nous a donc permis de distinguer, dans la variation globale du *moment barycentrique-moment cinétique propre*, la contribution des forces superficielles et celle des forces volumiques.

8° *Les moments pondéromoteurs liés au moment cinétique orbital. Expression de la densité volumique totale de moment pondéromoteur propre.* — On sait que, T^{ij} désignant le tenseur inertique d'un milieu matériel continu, l'*impulsion-masse* d'une portion finie du milieu est donnée par l'intégrale

$$p^i = \iiint T^{ij} \delta u_j \tag{34}$$

étendue à une hypercloison du genre espace ; corrélativement, l'on montre que le quadrivecteur *densité de force pondéromotrice d'Univers* appliqué au milieu considéré dérive de T^{ij} par la formule d'Élasticité généralisée ([1])

$$f^i = \partial_j T^{ij}. \tag{35}$$

En Dynamique relativiste classique, le tenseur T^{ij} était symétrique par définition même, en sorte que l'indice muet de sommation dans les formules précédentes était arbitraire ; mais nous allons considérer, comme en Élasticité

([1]) *La Relativité restreinte,* p. 50. Cette démonstration utilise le fait que l'intégrale d'hyperparoi est identiquement nulle ; nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant.

prérelativiste, un tenseur T^{ij} *asymétrique* (1) destiné à rendre compte des moments pondéromoteurs propres; dans ces conditions, l'indice de sommation des formules (34), (35) et des formules conséquences doit être fixé par une définition initiale. Convenons donc, pour toute la suite de l'Ouvrage, que *l'indice de sommation sera le second indice de* T^{ij} ou, équivalemment, que l'indice significatif des quadrivecteurs p^i et f^i sera le premier indice de T^{ij}.

D'après la définition générale classique (31), le moment à l'origine de l'impulsion-masse d'une gouttelette δu_k, ou *moment cinétique orbital* de cette gouttelette, est

(36) $$\boxed{\delta C_0^{ij} = [x^i T^{jk} - x^j T^{ik}]\,\delta u_k,}$$

en sorte que le *moment cinétique orbital* d'une portion finie du milieu sera donné par l'intégrale

$$C_0^{ij} = \iiint [x^i T^{jk} - x^j T^{ik}]\,\delta u_k$$

étendue à une hypercloison du genre espace; le tenseur entre crochets, du troisième rang et antisymétrique en i, j, s'interprète donc comme la *densité du moment cinétique orbital* du milieu par rapport à l'origine des coordonnées d'espace-temps (2).

Prenons l'intégrale de l'expression (36) sur le domaine tridimensionnel fermé défini par deux hypercloisons 1 et 2 du genre espace, et par l'hyperparoi latérale d'un tube de courant d'Univers; en admettant que l'intégrale d'hyperparoi soit identiquement nulle (3), l'expression obtenue représente évidem-

---

(1) En Relativité générale, une asymétrie du tenseur inertique entraînerait une asymétrie du tenseur $R^{ij} - \frac{R}{2} g^{ij}$, c'est-à-dire une asymétrie du tenseur de courbure, puisqu'on voit mal à quoi correspondrait une asymétrie du tenseur métrique. Cette asymétrie pourrait s'obtenir soit par l'emploi d'une jauge de Weyl, soit, plus simplement, par une torsion de l'Univers. Précisons bien que cette torsion ne serait pas destinée à interpréter l'Électromagnétisme, comme dans certaines Théories Unitaires, mais qu'elle correspondrait à un *effet gravitationnel de spin*.

(2) Certains auteurs, traitant du moment cinétique en Théorie de Dirac, semblent admettre que le [ ] considéré représente la *densité de moment cinétique total* (orbital + propre). L'origine de cette manière de voir qui, selon nous, n'est pas compatible avec les définitions primordiales (31) et (34), est la présence du second [ ] dans l'intégrale quadruple qui sera donnée dans un instant, [ ] dont l'expression se transforme en vertu de la formule (37') conséquence de la Théorie de Dirac. On verra comment notre théorie interprète *directement* ce second [ ], et d'une manière qui, à notre sens, est la seule correcte.

(3) La condition nécessaire et suffisante de ce résultat est que le tenseur T^{ij} ait l'expression (39) ci-dessous.

ment la *variation du moment cinétique orbital* de la goutte fluide considérée entre l'état 1 et l'état 2. Par ailleurs, transformant cette intégrale en intégrale quadruple, et tenant compte de la relation (35) ainsi que du fait que $\partial_k x^i = \delta^i_k$, il vient l'expression

$$\frac{1}{ic}\iiiint \{[x^i f^j - x^j f^i] \quad [T^{ji} - T^{ij}]\}[dx^1 dx^2 dx^3 dx^4]$$

sur laquelle on lit, en répétant un raisonnement déjà fait, qu'à l'action de la *densité de moment pondéromoteur orbital*

$$\mu^{ij}_0 = [x^i f^j - x^j f^i]$$

s'ajoute celle d'une *densité de moment pondéromoteur propre* du type « élastique »

$$\mu^{ij}_2 = [T^{ji} - T^{ij}].$$

Considérons alors le *moment cinétique-moment barycentrique total* (orbital + propre) de la goutte fluide finie

$$\boxed{C^{ij} = C^{ij}_0 + C^{ij}_p,}$$

il évolue sous l'action de l'ensemble des moments pondéromoteurs que nous avons étudiés, qui sont : 1° le *moment pondéromoteur orbital* dérivant de la densité volumique μ^{ij}_0 ; 2° le *moment pondéromoteur propre d'origine volumique* dont la densité totale μ^{ij}, somme des deux termes μ^{ij}_2 et μ^{ij}_1 attachés respectivement au *moment cinétique orbital* et au *moment cinétique propre*, a pour expression

$$\boxed{\mu^{ij} = [T^{ji} - T^{ij}] - ic[\partial^j \sigma^i - \partial^i \sigma^j],} \tag{37}$$

3° enfin, le *moment pondéromoteur propre d'origine superficielle* défini par les $[p']$, p. 43, qui correspond évidemment à une action de contact du restant du fluide sur la goutte limitée suivie dans son mouvement.

Au Chapitre suivant, nous verrons qu'en Théorie de Dirac on a identiquement, T^{ij} désignant le tenseur inertique asymétrique de Tetrode,

$$[T^{ji} - T^{ij}] + ic[\partial^j \sigma^i - \partial^i \sigma^j] = 0, \tag{37'}$$

d'après ce qui vient d'être dit, cette relation signifie que *la densité volumique totale de moment pondéromoteur propre est identiquement nulle* (1).

(1) En posant ce dernier résultat comme un *postulat*, on peut considérer la formule (37') comme une conséquence de notre théorie, mais ce postulat ne s'impose pas d'une manière nécessaire, et nous préférons conserver notre formule générale (37).

Une expression équivalente du postulat en question est que le moment cinétique total doit être conservatif en l'absence de forces f^i (puisqu'en effet l'action du moment pondéromoteur superficiel disparaît lorsqu'on éloigne indéfiniment la paroi de l'hypertube

9° *L'impulsion-masse transversale*. Convenons d'appeler *fausse impulsion-masse* $p^i_{(1)}$ et *impulsion-masse transversale* $p^i_{(2)}$ les deux quadrivecteurs

$$(34') \qquad p^i_{(1)} = \iiint T^{ji}\,\delta u_j, \qquad p^i_{(2)} = \iiint [T^{ij} - T^{ji}]\,\delta u_j \qquad (p^i = p^i_{(1)} + p^i_{(2)}),$$

et proposons-nous d'étudier l'*impulsion-masse transversale* $p_{(2)}$. Pour commencer, remarquons que ce quadrivecteur est orthogonal au quadrivecteur élément de volume d'Univers δu_i, l'expression $[T^{ij} - T^{ji}]\,\delta u_j\,\delta u_i$ étant identiquement nulle en vertu de l'antisymétrie de $[T^{ij} - T^{ji}]$. Cela étant, la relation (37′) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} p^i_{(2)} &= -\iiint \mu^{ij}\,\delta u_j - ic \iiint \overline{[\partial^i\sigma^j - \partial^j\sigma^i]}\,\delta u_j \\ &= -\iiint \mu^{ij}\,\delta u_j - \frac{1}{2}\iiint [\partial_k\sigma_l - \partial_l\sigma_k][dx^i\,dx^k\,dx^l]; \end{aligned}$$

---

d'Univers); ce critère, appliqué par Pauli à l'expression

$$\iiint [x^i\Theta^{jk} - x^j\Theta^{ik}]\,\delta u_k$$

considérée comme représentant le moment cinétique *total* (orbital + propre), conduit évidemment cet auteur à poser

$$\Theta^{ji} - \Theta^{ij} = 0$$

au lieu de notre formule (37′).

Pour nous, l'expression considérée étant, formellement, celle d'un moment *orbital*, le tenseur Θ^{ij} qu'elle fait intervenir ne saurait être le *vrai* tenseur inertique d'un milieu doué de spin. Toutefois, en Théorie de Dirac, le tenseur symétrisé

$$\Theta^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$$

de Pauli permet de calculer les grandeurs *intégrales impulsion-masse* et *moment cinétique total* au moyen des formules valables pour les milieux classiques sans spin; à ce titre, il peut être considéré comme le tenseur inertique d'un fluide fictif *sans spin* intégralement équivalent au fluide statistique de Dirac.

En effet, en ce qui concerne le moment cinétique, étant admis (ce qui se vérifie *a posteriori*) que les tenseurs T^{ij} et Θ^{ij} de la Théorie de Dirac satisfont au critère $\mu^{ij} \equiv 0$, l'équivalence intégrale visée sera atteinte moyennant la condition

$$\partial_j\Theta^{ij} \equiv \partial_j\Theta^{ji} = \partial_j T^{ij},$$

qui est effectivement réalisée grâce à l'égalité constante des deux divergences du tenseur de Tetrode,

$$\partial_j T^{ij} \equiv \partial_j T^{ji}$$

(*voir* ci-après, n° **23**). Un raisonnement analogue vaut pour le problème de l'impulsion-masse.

Insistons bien sur le fait que l'équivalence de T^{ij} et de Θ^{ij} est seulement *intégrale*, et qu'il faudrait tenir compte de la contribution de l'hyperparoi si l'on n'intégrait pas dans l'espace entier. Pour nous, le *vrai* tenseur inertique de la Théorie de Dirac reste le tenseur asymétrique T^{ij} de Tetrode.

[W. PAULI, *Handb. Phys.*, XXIV$_1$, p. 235.]

on passe de la première à la seconde expression en prenant les duals des deux tenseurs antisymétriques du dernier terme; il est facile de vérifier que ces termes sont les mêmes, et qu'ils figurent en nombre égal dans les deux expressions. Transformons alors la dernière intégrale en intégrale double suivant

$$\frac{1}{2}\iint \sigma_l [dx^i\, dx^l] + \sigma_k [dx^i\, dx^k] = \iint \sigma_k [dx^i\, dx^k].$$

Dans l'hypothèse de la simultanéité, les trois $[dx^u\, dx^v] = \partial s^w$ représentant l'élément d'aire proprement dite sont seules non nulles, et, posant $\nu^u = \mu^{u4}/ic$, il vient simplement

$$p^u_{(2)} = -\frac{1}{ic}\iiint \mu^{u4}\, \delta u - \iint \sigma^w\, \partial s^v - \sigma^v\, \partial s^w = -\iiint \nu^u\, \partial u - \iint \left[\vec{\sigma} \wedge \vec{\partial s}\right]^u. \qquad p^4_{(2)} = 0;$$

en d'autres termes, et conformément à la remarque que nous venons de faire, la masse transversale est alors nulle, l'impulsion transversale étant donnée par la formule

$$(34''') \qquad \vec{p}_{(2)} = -\iiint \vec{\nu}\, \partial u - \iint \vec{\sigma} \wedge \vec{\partial s}.$$

Ces deux intégrales ont déjà été prises en considération au 7°; elles s'interprétaient alors comme des *moments pondéromoteurs* volumique et superficiel correspondant au *moment barycentrique propre*. Cette coïncidence, fortuite, et d'ailleurs correcte au point de vue de l'analyse dimensionnelle, n'apparaît qu'avec les intégrations à temps constant. D'une manière plus générale, on voit que les grandeurs *moment cinétique propre* et *impulsion-masse transversale* d'une goutte matérielle finie sont deux conséquences de l'existence de la densité σ^i, mais qu'elles ne sont pas directement reliées par une formule algébrique. Enfin, remarquons que l'on retrouve la formule dégénérée $(34''')$ dans le repère galiléen entraîné par le fluide.

Remarque. — A côté de la grandeur $p^i_{(1)}$ qui vient d'être définie, une autre « *fausse impulsion-masse* » qui apparaît dans certains problèmes est

$$p^i_{(0)} = T^i_j\, \delta u^j;$$

ce quadrivecteur est colinéaire à l'élément de volume d'Univers δu^i. Comme nous venons de voir que l'*impulsion-masse transversale* est orthogonale à δu^i, une idée séduisante se présente à l'esprit : serait-il possible de choisir l'orientation d'Univers du quadrivecteur δu^i de telle manière que les deux fausses *impulsion-masse* y soient partout égales entre elles? De cette manière, la véritable impulsion-masse se trouverait décomposée en deux quadrivecteurs orthogonaux entre eux, l'un du genre temps et l'autre du genre espace.

Résoudre ce problème revient à résoudre le système de quatre équations linéaires homogènes

$$T^{ji}\, \delta u_j = T^j_j\, \delta u^i \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\{T^{ik} - T^j_j\, \delta^{ik}\}\, \delta u_i = 0};$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la direction d'Univers du quadrivecteur δu_i soit bien déterminée d'une manière unique est que le déterminant

$$T^{ik} \quad T^j_j \delta^{ik}$$

soit nul, l'un de ses mineurs de rang trois ne l'étant pas. D'ailleurs, par raison de symétrie évidente, il existe alors une seconde orientation d'Univers du quadrivecteur δu^i qui rend la *vraie impulsion-masse* infinitésimale $T^{ij}\delta u_j$ colinéaire à $T^j_j\delta u^i$. Ces circonstances se rencontrent avec la définition du tenseur T^{ij} que nous allons donner maintenant.

II. — Sur la cinématique des milieux doués de spin.

15. Les raisonnements du paragraphe précédent n'étaient pas indépendants de toute considération de Cinématique : nous avons dû faire intervenir la notion de ligne de courant d'Univers ou, ce qui revient au même, celle de vitesse des points matériels au sens ordinaire, 1° pour définir le moment barycentrique généralisé (équ. 31'); 2° pour établir la relation (33) à partir du postulat (D); 3° pour interpréter l'élément trilinéaire d'hyperparoi (équ. [q] et [q']). Les conséquences des relations (33) et [q'] se retrouvent dans les expressions [p'] et [p''] des densités pondéromotrices superficielle et volumique.

Dans la Théorie relativiste classique, les notions de *vitesse* $\vec{v}$ des particules matérielles et de *densité massique* ρ du milieu continu suffisaient à définir le tenseur inertique, évidemment symétrique, par les formules

$$T^{uv} = \rho v^u v^v, \qquad T^{u4} = T^{4u} = ic.\rho v^u, \qquad T^{44} = - c^2\rho;$$

équivalemment, ρ_0 désignant la *densité massique propre* du milieu (valeur de ρ dans le repère galiléen entraîné), et v^i le *quadrivecteur unité tangent à la trajectoire d'Univers*, on avait la définition condensée ([1])

$$(39') \qquad T^{ij} = - c^2\rho_0 . v^i v^j.$$

Quant à la trace de ce tenseur, on avait pour elle les deux expressions intéressantes

$$(40') \qquad T^i_i = \rho(v^2 - c^2) = - c^2\rho_0;$$

dans la première figurait le facteur de contraction bien connu de Lorentz; la seconde montrait que, au facteur $-c^2$ près, la trace du tenseur inertique égalait la densité massique propre ρ_0.

Le tenseur T^{ij} classique, produit général du quadrivecteur $ic\sqrt{\rho_0}\, v^i$ par lui-même, n'était évidemment pas le tenseur symétrique du second rang le plus

---

([1]) *La Relativité restreinte*, p. 50.

général; celui-ci, ayant 10 composantes distinctes en module, dépend de 10 constantes arbitraires.

La « généralisation minima » de la définition classique permettant d'obtenir un tenseur T^{ij} asymétrique, comme l'exige la théorie du paragraphe précédent, consiste évidemment à poser que T^{ij} *sera le produit général de deux quadrivecteurs non colinéaires;* v^i désignant un quadrivecteur unitaire, u^i un quadrivecteur non colinéaire à v^i tel que le produit scalaire $u^i v_i$ ait pour valeur 1, enfin $-c^2\rho_0$ le produit des facteurs scalaires correspondants, on aura donc

$$\boxed{T^{ij} = -c^2\rho_0 . u^i v^j;} \tag{39}$$

le tenseur T^{ij} ainsi défini dépendra de 7 constantes arbitraires, au lieu de 16 pour le tenseur du second rang le plus général. La valeur de sa trace restera, comme précédemment,

$$\boxed{T_i^i = -c^2\rho_0,} \tag{40}$$

et l'on pourra dire que, *par définition*, ρ_0 représente la densité massique propre du milieu doué de spin.

Par hypothèse, nous supposerons que l'un des deux quadrivecteurs u^i ou v^i représente le courant matériel d'Univers au sens habituel; d'après les principes généraux de la Relativité, ce quadrivecteur de *vrai courant* devra être du genre temps (¹); de plus, d'après un résultat du paragraphe précédent, le quadrivecteur densité de spin devra lui être orthogonal. Quant à l'autre quadrivecteur, nous dirons qu'il représente par définition un *faux courant*, dont nous aurons a chercher l'interprétation.

Nous aurons d'abord à nous demander *lequel des deux quadrivecteurs u^i et v^i représente le vrai courant;* conformément à la méthode suivie jusqu'ici, nous allons pour cela analyser de près la Théorie classique, et la généraliser de la manière « minima » qui respecte les résultats essentiels. Rappelons que, en vertu d'une convention fondamentale (35), *l'impulsion-masse finie correspondant à un tenseur T^{ij} non symétrique doit être calculée avec sommation sur le second indice, c'est-à-dire suivant la formule*

$$p^i = \iiint T^{ij}\,\delta u_j. \tag*{[38]}$$

Dans la Théorie classique, où le tenseur T^{ij}, symétrique, était défini suivant (39′), *l'intégrale précédente prise sur l'hyperparoi d'un tube de courant d'Univers était identiquement nulle;* en effet, remplaçant T^{ij} d'après (39′) et

(¹) *La Relativité restreinte*, p. 18 et 29.

l'élément d'hyperparoi δu_j d'après la formule [q] du n° **12**, on fait apparaître sous le signe $\iiint$ le produit doublement contracté $\delta s_{jk}.dx^j dx^k$ d'un tenseur antisymétrique par un tenseur symétrique. Or, *ce résultat est essentiel pour que la notion de densité de force pondéromotrice définie d'après* (35) *ait un sens* (1); la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit conservé avec la nouvelle définition (39') est évidemment *que le quadrivecteur de vrai courant soit* v^j.

Une autre circonstance intéressante se produisait dans la théorie classique : *pour un tube de courant d'Univers infiniment délié, le quadrivecteur impulsion-masse était défini intrinsèquement, indépendamment de l'orientation de l'hyper-section* δu_j; en effet, sous le signe $\iiint$ apparaissait le produit scalaire $dx^j \delta u_j$, évidemment invariant pour les changements d'orientation de l'hyperplan de section d'un même tube infiniment délié. L'impulsion-masse du point matériel sans spin classique était donc définie intrinsèquement; un postulat spécial lui imposait d'avoir une longueur $ic\mu$ constante (1). La condition nécessaire et suffisante pour que le résultat en question soit conservé avec la nouvelle définition (39) est encore que v_j soit le vrai courant. Cela étant, le fait nouveau par rapport à la Théorie classique est que l'impulsion-masse du *point matériel doué de spin* ne sera plus tangente à la ligne de vrai courant v^j (ligne moyenne de l'hypertube), mais bien *à la ligne de faux courant; l'impulsion-masse du point matériel doué de spin sera oblique sur la trajectoire d'Univers.* Il est évidemment tout naturel de postuler que *sa projection* $ic\mu$ *sur la tangente à la trajectoire devra être constante* (2).

Enfin, l'examen des circonstances qui ont lieu dans le repère galiléen entraîné par le vrai courant va nous confirmer que v^j est le vrai courant. Si v^j était le faux courant, l'impulsion-masse serait colinéaire au vrai courant, de sorte que les trois composantes de l'*impulsion propre* seraient nulles ; quant à la *masse propre*, son expression comporterait 4 termes. Au contraire, en admettant que v^j soit le vrai courant, aucune des quatre p^i n'est nulle en général dans le repère galiléen entraîné, mais chacune d'entre elles ne comporte qu'un seul terme dans son expression, savoir $\iiint T^{i4}\delta u_4$. Or nous savons que, dans toutes les Théories classiques de la Relativité, les circonstances qui ont lieu dans le repère galiléen entraîné sont très voisines de celles que réalise l'*hypothèse de la simultanéité;* ici, l'hypothèse de la simultanéité réalise exactement le second système de circonstances, d'où nous concluons encore que le vrai courant est v^j.

---

(1) *Op. cit.*, p. 51.

(2) Ces derniers résultats concordent parfaitement avec ceux que certaines considérations de Mécanique analytique du point nous avaient suggérés (*La Relativité restreinte,* p. 62).

Remarque. — Suivant l'idée de la Remarque qui terminait le paragraphe précédent, demandons-nous quelle devrait être la direction de l'hyperplan de section du tube infiniment délié pour les deux *fausses impulsion-masses* $T^{ji}\delta u_j$ et $T^j_j\delta u^i$ coïncident; cette direction est évidemment la normale d'Univers à l'hypertube.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU FLUIDE STATISTIQUE FICTIF DE LA THÉORIE DE DIRAC.

14. C'est véritablement un Chapitre nouveau de la Théorie de Dirac qui découle de la formule matricielle

$$[a] \qquad \sum_{A=1}^{16} \gamma^A_{pr}\gamma^A_{qs} = 4\delta_{ps}\delta_{qr}$$

que Pauli a montré être une conséquence des conditions de Dirac [1]

$$[b] \qquad \frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i) = \delta^{ij};$$

par définition, les γ^A sont les seize matrices *hermitiennes* 1, γ^i, $i\gamma^{ij}$, $i\gamma^{ijk}$, γ^{1234}. La formule quadratique [a] contient deux groupes distincts de termes, écrits respectivement au premier et au second membre; les premiers sont « en pr, qs » et les seconds « en ps, qr ». On voit que les *premiers indices* p et q et les *seconds indices* r et s sont les mêmes dans ces deux groupes de termes, qui sont caractérisés par le *couplage* différent des *premiers indices* avec les *seconds indices*.

Pauli s'est aperçu dès le début que la formule [a], et d'autres formules analogues qu'on peut en déduire, permettent d'établir *dans le cas général*, entre les cinq tenseurs statistiques de Dirac-Darwin $\rho_D = \psi^\times\gamma\psi$, les relations suivantes qu'on ne connaissait jusqu'alors que dans le cas de l'onde plane monochromatique [2]

$$(j^k)(j_k) = -(\sigma^k)(\sigma_k) = (i\omega_1)^2 + (\omega_2)^2, \qquad \frac{1}{2}(m^{kl})(m_{kl}) = (i\omega_1)^2 - (\omega_2)^2,$$

$$(j^k)(\sigma_k) = 0, \qquad \frac{1}{2}(m^{kl})(i\overline{m}_{kl}) = 2(i\omega_1)(\omega_2);$$

nous avons écrit les cinq *tenseurs diraciens* entre parenthèses pour indiquer qu'il s'agit des *tenseurs abstraits*, non pourvus de leurs coefficients physiques;

---

(1) *Pieter Zeeman Verhandelingen*, 1935, p. 31; *Contributions mathématiques à la Théorie de Dirac* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, VI, 1936, p. 118).

(2) *Op. cit.*, voir *Ann. Inst. H. Poincaré*, IV, § 6, p. 131.

par contre, nous avons pris soin de rétablir le facteur i en accord avec les exigences de la Relativité.

Dans un Mémoire de 1937, puis dans le premier d'une série de quatre Mémoires de 1940 ([1]), W. Kofink a repris la question, et complété cette première série d'*identités quadratiques entre les densités statistiques* par les suivantes

$$(m^{ki})(j_k) = -(\omega_2)(\sigma^i), \qquad (i\overline{m}^{ki})(j_k) = (i\omega_1)(\sigma^i),$$
$$(m^{ki})(\sigma_k) = -(\omega_2)(j^i). \qquad (i\overline{m}^{ki})(\sigma_k) = (i\omega_1)(j^i).$$
$$(j^k)(\sigma^l) - (j^l)(\sigma^k) = (\omega_2)(m^{kl}) - (i\omega_1)(i\overline{m}^{kl}).$$

Ces *identités* et les précédentes constituent la collection complète des relations conséquences des conditions matricielles $[b]$ de Dirac existant entre les tenseurs du type ρ_D. Pauli et Kofink ont fait intervenir, pour les établir, la matrice B dont nous avons parlé au Chapitre I, matrice qui transforme canoniquement les quatre γ^i en leurs transposées; M. G. Petiau, dans des travaux encore incomplètement publiés, a pu éviter d'introduire la matrice B dans cette question, ce que nous ferons également dans les pages qui vont suivre.

Pauli avait remarqué dès le début que ce genre de calculs peut être généralisé, de manière à former des *identités* portant sur des grandeurs densitaires autres que celles du type ρ_D. Par exemple, on peut faire apparaître les densités que nous appelons *schrödingeriennes*, dans la définition desquelles intervient notre opérateur $[\partial_i]$, et qui figurent dans des relations différentielles dont nous parlerons un peu plus loin. Tel est précisément l'objet du second des Mémoires de 1940 de Kofink ([2]), où l'auteur établit, sous forme vectorielle d'espace, 52 *identités quadratiques avec dérivés avant* (c'est-à-dire faisant intervenir notre symbole $\underset{\leftarrow}{\partial^i}$), et donne les règles pour en déduire les *identités avec dérivée arrière* $\underset{\rightarrow}{\partial_i}$ ([3]); par addition et soustraction, on obtient des *identités* conséquences faisant intervenir nos symboles $[\partial^i]$ et (∂^i), c'est-à-dire portant sur les 5 tenseurs schrödingeriens ρ_S et sur les dérivées partielles des 5 tenseurs diraciens ρ_D.

Parmi ces identités, une famille, que nous étudierons en détail, contient dix *identités tensorielles* ayant des premiers membres de la forme ([4])

$$\psi^\times[\partial^i]\gamma^A\psi.\psi^\times\gamma^B\psi - \psi^\times\psi^A\psi.\psi^\times[\partial^i]\gamma^B\psi$$

([1]) *Über das magnetische und elektrische Moment des Elektrons* (*Ann. der Physik*, 60, 1937, p. 91); *Zur Diracschen Theorie*, I : *Algebraische Identitäten zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten* (*Ann. der Physik.*, 38, 1940, p. 421).

([2]) II : *Algebraische Identitäten die Differentialquotienten enthalten* (*Ann. der Physik*, 38, p. 436).

([3]) *Op. cit.*, p. 437 et 442.

([4]) *Op. cit.*, § 11, p. 454.

et, en général, deux seconds membres différents qui sont des sommes de termes de la forme

$$\sum \pm \psi^{\times}\gamma^{M}\psi . \partial^{i}(\psi^{\times}\gamma^{N}\psi).$$

Nous établirons ces *identités* par la méthode même de Kofink, mais en veillant à ne pas détruire la symétrie tensorielle d'Univers dans les calculs et dans les résultats. L'écriture vectorielle d'espace n'est d'ailleurs pas la seule raison qui prive les formules de Kofink d'une validité tensorielle générale; il arrive, par exemple, que certaines formules ne soient établies que pour les valeurs $i \neq j$ des indices tensoriels et que, pour les étendre au cas $i = j$, il faille exécuter certaines manipulations; dans ces conditions, nous avons cru utile de prolonger les calculs de Kofink pour aboutir à des formules ayant une validité tensorielle générale.

Le troisième des Mémoires de 1940 de Kofink (1) débute par le rétablissement de relations différentielles conséquences des équations et conditions de Dirac, déjà données par W. Franz (2) et que M. Al. Proca avait proposé de prendre systématiquement en considération dans le cas de l'électron libre (3); de cette famille de relations, on connaissait déjà l'*équation de continuité* de Dirac, la relation ininterprétée d'Uhlenbeck et Laporte, et la *formule de décomposition du courant* de Gordon; enfin, une relation donnée par Tetrode, reliant le *défaut de symétrie* de son tenseur inertique au rotationnel de la densité de spin, que notre théorie du Chapitre II nous permet d'interpréter; comme nous l'avons déjà dit, cette circonstance nous paraît constituer un argument sérieux en faveur du fait que le véritable tenseur inertique de la Théorie de Dirac soit le tenseur asymétrique initialement défini par Tetrode.

Les relations dont il s'agit, données sous forme vectorielle, apparaissent au nombre de seize dans les Mémoires de Franz et de Kofink; elles sont au nombre de *dix* lorsqu'on les écrit sous forme tensorielle d'Univers. Ce sont ces dix relations que, dans l'ignorance complète des travaux de Franz et de Kofink, nous avions rétablies pour notre compte, introduisant à cette occasion la définition systématique des tenseurs « schrödingeriens » du type $\psi^{\times}[\partial^{i}]\gamma\psi$, type de tenseurs qui contient le courant de Gordon $\psi^{\times}[\partial^{i}]\psi$, le tenseur inertique asymétrique de Tetrode $\psi^{\times}[\partial^{i}]\gamma^{j}\psi$, ainsi que le courant magnétique de Proca $\psi^{\times}[\partial^{i}]\,\iota\,\psi$ (4).

Ayant établi les relations en question, Franz ni Kofink ne se préoccupent

(1) III : *Folgen der Realität der Potentiale* (*Ann. der Physik*, 38, p. 565).

(2) *Zur Methodik der Dirac Gleichung*, § 10 [*Sitz. Math. Abt. Bay. Akad.*, t. III, p. 404 (Munchen, 1935).

(3) *Théorie de l'Électron de Dirac dans un champ nul*, n° 18 (*Ann. de Physique*, XX, 1933, p. 401).

(4) *Sur dix relations conséquences des équations de Dirac* (*C. R. Acad. Sci.*, 214, 1942, p. 818).

aucunement de rechercher leur signification physique; au contraire, dans la suite de son 3e Mémoire de 1940, Kofink élimine nos 5 *tenseurs schrödingeriens* qui, pour lui, sont des « grandeurs ininterprétables » (1) entre les 10 relations différentielles considérées et les 10 *identités avec différentielles* qu'il avait établies pour cela dans le second Mémoire; il obtient ainsi, en plus de l'équation de continuité de Dirac et de la formule d'Uhlenbeck et Laporte (qui ne font pas intervenir les tenseurs schrödingeriens), $6+2$ relations vectorielles d'espace, qui sont quadratiques; à partir de là, les préoccupations de Kofink, comme déjà celles de Franz, divergent complètement d'après les nôtres.

Nous nous posons, en effet, le problème de l'interprétation physique des 10 relations différentielles considérées, ainsi que celle des tenseurs diraciens et schrödingeriens qu'elles font intervenir. Un examen détaillé nous permet d'étendre et de préciser légèrement les résultats acquis; finalement, 5 des 10 relations en question, 1 des 5 tenseurs diraciens (l'invariant ω_2) et 3 des 6 tenseurs schrödingeriens (2) restent sans interprétation.

D'une manière globale, les 10 relations différentielles de Franz se répartissent en deux familles de 5, qui possèdent chacune en propre ses tenseurs diraciens et ses tenseurs schrödingeriens. Comme toutes les relations et tous les tenseurs actuellement interprétés sont, dans l'une des familles, de nature électromagnétique, et, dans l'autre, de nature dynamique, on est fondé à dire que *par défintion* les relations et tenseurs de la première famille sont *électromagnétiques*, et ceux de la seconde *dynamiques*. Suivant cette *définition*, les relations et tenseurs encore ininterprétés dans chaque famille seront dits appartenir à un *Électromagnétisme* et à une *Dynamique* élargies par rapport aux Théories classiques. Par ailleurs, suivant une propriété qui généralise celle, bien connue, relative au courant de Gordon et au tenseur de Tetrode, la présence d'un quadripotentiel extérieur A^i ajoute à chacun des tenseurs schrödingeriens un *terme d'interaction* du type $A^i(\psi^\times\gamma\psi)$, le tenseur diracien ( ) étant de la nature physique « opposée » à celle du tenseur schrödingerien qui le contient. Ainsi se manifeste, du fait du quadripotentiel A^i, un *couplage électro-mécanique* entre les deux familles de relations, *couplage dont la forme est parfaitement symétrique par rapport à l'Électromagnétisme et à la Dynamique;* on ne voit donc plus, en Théorie de Dirac, aucune raison de qualifier le potentiel A^i *électromagnétique* plutôt que *dynamique*. En l'absence du potentiel

(1) Cette appellation (*undeutbare Grossen*) est un peu surprenante du fait que deux de ces grandeurs ont été interprétées en 1928, l'une par Tetrode et l'autre par Gordon. Kofink, qui se réfère au Mémoire de Gordon (mais non à celui de Tetrode) précise à cette occasion que les *undeutbare Grossen* sont des grandeurs densitaires, éventuellement susceptibles d'interprétation, mais qui ne se présentent pas comme des dérivées de tenseurs diraciens (*Op. cit.*, p. 569-570).

(2) L'un des cinq tenseurs $\psi^\times[\partial^i]\gamma\psi$ n'intervient que par deux de ses *contractions* sur l'indice i, en sorte qu'il y a bien six tenseurs de ce type à interpréter physiquement.

régnant, le couplage en question disparaît, et les deux familles de 5 relations deviennent indépendantes l'une de l'autre. On peut penser que ces diverses remarques ne sont pas sans rapport avec le problème de la Théorie unitaire de l'Électromagnétisme et de l'Inertique-Gravifique.

Pour terminer le présent Chapitre, nous indiquons comment il convient d'étendre la définition générale des tenseurs diraciens et schrödingeriens en Théorie des particules à spin entier, et nous montrons que les 10 relations différentielles de Franz restent valables dans cette Théorie.

I. — Les identités quadratiques de Pauli-Kofink.

15. Établissement des formules de départ. Identités de Pauli-Kofink relatives aux tenseurs diraciens. — Considérons la formule de Pauli [1]

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma^{A}_{pr}\gamma^{A}_{qs} = 4\delta_{ps}\delta_{qr}, \tag{41}$$

dans laquelle on a, comme il a été dit,

$$\gamma^{A} = 1,\ \gamma^{i},\ i\gamma^{ij},\ i\gamma^{ijk} = i\bar{\gamma}^{l},\ \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \bar{\gamma}, \tag{42}$$

les notations étant celles spécifiées dans l'Avertissement ; rappelons que les γ ou $\bar{\gamma}$ d'un rang tensoriel donné se comportent comme des composantes de tenseurs complètement antisymétriques, en sorte que : 1° *dans tous les calculs qui vont suivre, les indices tensoriels* $i, j, \ldots$ *d'un même* γ *ou* $\bar{\gamma}$ *sont essentiellement supposés différents les uns des autres*. Complétons cette convention par quelques autres, spécialement destinées à simplifier les calculs et les formules qui vont suivre : 2° *dans toutes les formules dérivées de* (41) *que nous allons établir et utiliser,* formules qui seront désignées par des majuscules romaines entre crochets, *nous négligerons d'écrire les indices matriciels inférieurs, étant entendu que le premier membre sera toujours* « en pr, qs » *et le second* « en ps, qr », le sens de cette terminologie étant celui évident sur (41) ; 3° *les indices tensoriels* $i, j, \ldots$ *répétés* (indices supérieurs) *s'entendront toujours avec sommation, puis division par le nombre convenable pour que chaque terme du résultat ne soit fourni qu'une fois* [2]; 4° *un indice tensoriel désigné par une lettre grecque* λ, μ, … *s'entendra toujours sans sommation, même s'il est répété.*

Avec ces conventions, la formule (41) se transcrit suivant

$$\delta\delta + \gamma^{i}\gamma^{i} - \gamma^{ij}\gamma^{ij} - \bar{\gamma}^{i}\bar{\gamma}^{i} + \gamma\gamma = 4\delta\delta; \tag{[A]}$$

---

(1) Pour la démonstration de cette formule, *voir* W. Pauli, *Contributions mathématiques à la Théorie de Dirac* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, VI, 1936, § **3**, p. 115.)

(2) Il va sans dire que cette *convention de sommation* particulière n'est pas celle habituelle en Calcul tensoriel.

en multipliant, par exemple à gauche, *toutes* les matrices de [A] par une *même* matrice γ choisie successivement des 4 rangs 1, 2, 3, 4, on peut former 4 nouvelles formules analogues à [A]; pour $\gamma = \bar{\gamma}$ il vient, après retournement du sens d'écriture du premier membre

$$\text{[E]} \qquad \partial\partial - \gamma^\iota\gamma^\iota - \gamma^{\iota j}\gamma^{\iota j} + \bar{\gamma}^\iota\gamma^\iota + \bar{\gamma}\bar{\gamma} = 4\bar{\gamma}\bar{\gamma}.$$

Contrairement à [A] et [E], les trois formules non écrites [B], [C], [D], ne sont pas symétriques par rapport aux indices supérieurs; mais en écrivant ces formules une fois et une seule pour chaque combinaison C_4^n du jeu des indices supérieurs (n désigne le rang tensoriel de la matrice multiplicateur), et en ajoutant, on peut former des formules symétrisées. Pour la suite, nous avons simplement besoin de la formule symétrisée [BS], que nous allons former.

Constituons un tableau à double entrée de rang 5, dont les colonnes correspondront aux groupes successifs de termes du premier membre de [A], et les lignes au rang tensoriel des matrices γ du terme produit obtenu; au-dessus de chaque colonne, nous donnons le signe du terme d'origine dans [A]; il est clair que chaque groupe de *termes d'origine* de rang n fournit en général deux groupes de termes de rangs $n \pm 1$, qui seront écrits dans la même colonne, et sur les lignes voulues ([1]). Dans ces conditions, et avec les conventions que nous avons adoptées, le tableau une fois rempli se présente sous la forme suivante :

+	+	−	−	+
	$\partial\partial$			
$\gamma^\iota\gamma^\lambda$		$\gamma^\iota\gamma^\iota$ $(\iota \neq \lambda)$		
	$\gamma^{\lambda\iota}\gamma^{\lambda\iota}$		$\bar{\gamma}^{\lambda\iota}\bar{\gamma}^{\lambda\iota}$	
		$\bar{\gamma}^\iota\bar{\gamma}^\iota$ $(\iota \neq \lambda)$		$\bar{\gamma}^\lambda\bar{\gamma}^\lambda$
			$\bar{\gamma}\bar{\gamma}$	
+	−		+	+

Inscrivons maintenant, dans chaque case du tableau, le nombre de termes *différents* qu'elle contient, et faisons pour chaque ligne la *somme algébrique* des nombres en question, affectés du signe qui figure en tête; multiplions

(1) Il va sans dire que, par le même processus, [E] fournirait la formule [D]; le même tableau peut servir, les signes à prendre étant ceux que, à titre indicatif, nous avons indiqués *au-dessous*.

par 4, et inscrivons le résultat final à droite des lignes; c'est évidemment le nombre total de termes du rang tensoriel considéré dans la formule symétrisée [BS].

	+	+	−	−	+	
1		1				4
4	1		3			−8
6		3		3		0
4			3		1	−8
1				1		4

Par ailleurs, soit $C_4^n = 1, 4, 6, 4, 1$ le *nombre théorique* de termes contenus dans chaque groupe tensoriel $\gamma^A\gamma^A$, nombre que nous indiquons à gauche des lignes; en divisant les nombres de droite par les nombres de gauche, on obtiendra les coefficients de ces groupes de termes dans [BS], qui s'écrit donc

[BS] $$4(\delta\delta - \bar\gamma\gamma) - 2(\gamma^i\gamma^i + \bar\gamma^i\gamma^i) = 4\gamma^i\gamma^i.$$

Maintenant, additionnant et retranchant membre à membre [A] et [E], puis retranchant membre à membre de [BS] la seconde formule obtenue, il vient les trois formules, fort utiles pour nous,

$$\boxed{\begin{array}{ll} [X] & -\gamma^{ij}\gamma^{ij} + (\delta\delta + \bar\gamma\gamma) = 2(\delta\delta + \bar\gamma\gamma); \\ [Y] & \gamma^i\gamma^i - \bar\gamma^i\bar\gamma^i = 2(\delta\delta - \bar\gamma\gamma); \\ [Z] & \gamma^i\gamma^i - (\delta\delta - \bar\gamma\gamma) = -\{\gamma^i\gamma^i - (\delta\delta - \bar\gamma\gamma)\}. \end{array}}$$

En multipliant matriciellement [1] les termes de ces trois formules par $\psi_p^\times$, $\psi_q^\times$, ψ_r, ψ_s, et en se reportant aux définitions et désignations usuelles des 5 tenseurs diraciens [*voir* ci-après, équ. (60)], on trouve respectivement, les parenthèses contenant par définition les *carrés* des 5 tenseurs diraciens (sommes des carrés des composantes prises une fois et une seule)

$$(m)^2 = (i\omega_1)^2 - (\omega_2)^2, \qquad (j)^2 = -(\sigma)^2, \qquad (j)^2 = (i\omega_1)^2 + (\omega_2)^2;$$

(dans le présent numéro, nous introduirons le facteur i chaque fois qu'il est nécessaire pour que les composantes des tenseurs diraciens soient, suivant une règle de Relativité connue, imaginaires pures et réelles selon qu'elles contiennent ou non l'indice 4). On a donc

(43) $$\boxed{(m)^2 = (i\omega_1)^2 - (\omega_2)^2,} \qquad \boxed{(j)^2 = -(\sigma)^2 = (i\omega_1)^2 + (\omega_2)^2,}$$

(1) Nous considérons toujours $\psi^\times$ comme une matrice à une ligne et quatre colonnes, et ψ comme une matrice à quatre lignes et une colonne.

groupe de formules qui permet d'exprimer le *carré* de chaque tenseur diracien en fonction des *carrés* des autres; les (43_2) montrent que le quadrivecteur (j) est *du genre temps* et le quadrivecteur (σ) *du genre espace.*

Donnons maintenant les *formules de départ* proprement dites, qui nous permettront d'établir l'ensemble des relations visées (*identités* de Pauli-Kofink). Si P et Q désignent deux matrices carrées de rang 4, et ψ, ζ_1 et ξ_1 d'une part, $\psi^\times$, $\zeta_2^\times$, $\xi_2^\times$ d'autre part des *fonctions d'onde* de types *associés*, en multipliant matriciellement tous les termes d'une formule du type (41) par $(\xi_2^\times P)_p$, $(\zeta_2^\times Q)_q$, ψ_r et ψ_s, la « différence d'accouplement » des indices inférieurs s'effacera du résultat parce que 1° les deux « premiers indices » p et q sont les mêmes dans les deux membres, et que 2° la différence entre les « seconds indices » r et s est « effacée » par le multiplicateur commun ψ. Finalement, tous les termes obtenus seront du même type en ce qui concerne les indices inférieurs p, q, r, s, et l'on pourra les faire passer d'un membre à l'autre, et les ajouter algébriquement s'ils ont les mêmes indices supérieurs. Les mêmes conclusions valent évidemment pour une multiplication par les matrices $\psi_p^\times$, $\psi_q^\times$, $(P\xi_1)_r$, $(Q\zeta_1)_s$. Appliquant ces considérations aux formules [X] et [Z] précédentes, il vient les deux groupes de *formules de départ*

$$(44)\quad \boxed{\begin{array}{ll} (X) & \left\{\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{2}\psi^\times\gamma^{ij}P\xi_1\cdot\psi^\times\gamma_{ij}Q\zeta_1 = -(\psi^\times P\xi_1\cdot\psi^\times Q\zeta_1 + \psi^\times\bar{\gamma}P\xi_1\cdot\psi^\times\bar{\gamma}Q\zeta_1), \\ (2) & \frac{1}{2}\xi_2^\times P\gamma^{ij}\psi\cdot\zeta_2^\times Q\gamma_{ij}\psi = -(\xi_2^\times P\psi\cdot\zeta_2^\times Q\psi + \xi_2^\times P\bar{\gamma}\psi\cdot\zeta_2^\times Q\bar{\gamma}\psi); \end{array}\right. \\ (Z) & \left\{\begin{array}{ll} (1) & \psi^\times\gamma^{i}P\xi_1\cdot\psi^\times\gamma_{i}Q\zeta_1 = \psi^\times P\xi_1\cdot\psi^\times Q\zeta_1 - \psi^\times\bar{\gamma}P\xi_1\cdot\psi^\times\bar{\gamma}Q\zeta_1, \\ (2) & \xi_2^\times P\gamma^{i}\psi\cdot\zeta_2^\times Q\gamma_{i}\psi = \xi_2^\times P\psi\cdot\zeta_2^\times Q\psi - \xi_2^\times P\bar{\gamma}\psi\cdot\zeta_2^\times Q\bar{\gamma}\psi; \end{array}\right. \end{array}}$$

dans ces formules, nous sommes revenus à la convention de sommation habituelle du Calcul tensoriel; les (44Z) sont les formules de départ utilisées par Kofink dans son second Mémoire de 1940 (¹).

Pour les applications que nous avons en vue, les matrices P et Q seront choisies dans le tableau des seize γ : $P = \gamma^P$, $Q = \gamma^Q$. Dans ce paragraphe et dans le suivant, nous aurons souvent à passer aux grandeurs duales, ce qu'il est avantageux de faire en distinguant l'indice 4 des indices $u, v, w = 1, 2, 3$; nous pouvons donc, en explicitant nos conventions de l'Avertissement, dresser le tableau de conversion des seize γ^A suivant (²) :

$$(45)\quad \boxed{\begin{array}{c|cc|c} 1 = \bar{\gamma}^{uvw4} & \gamma^{uv} = \bar{\gamma}^{w4}, & \gamma^{w4} = \bar{\gamma}^{uv} & \gamma^{uvw4} = \bar{\gamma} \\ \hline \gamma^{w} = -\gamma^{uv4}, & \gamma^{4} = \bar{\gamma}^{uvw} & \gamma^{uv4} = -\bar{\gamma}^{w}, & \gamma^{uvw} = \bar{\gamma}^{4} \end{array}}$$

(¹) *Op. cit.*, II, p. 438, équ. (*) et p. 441, équ. (**).

(²) Notons bien que $\bar{\gamma}^{ij\cdots}$ n'est pas égale au produit $\bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^j\ldots$, ainsi qu'on le vérifie sur des exemples.

Dans le même ordre d'idées, et en vue des calculs qui vont suivre, il nous sera utile de dresser le tableau de multiplication suivant, dans lequel nous groupons à gauche les matrices commutantes, à droite les anticommutantes :

(46)

$\bar\gamma\ \gamma^{ij} = \gamma^{ij}\bar\gamma = -\bar\gamma^{ij}$ $\bar\gamma\ \bar\gamma^{ij} = \bar\gamma^{ij}\bar\gamma = -\gamma^{ij}$	$\bar\gamma^2 = 1$	$\bar\gamma\ \gamma^{i} = -\gamma^{i}\ \bar\gamma = \bar\gamma^{i}$ $\bar\gamma\ \bar\gamma^{i} = -\bar\gamma^{i}\ \bar\gamma = \gamma^{i}$
$\gamma^{i}\ \bar\gamma^{j} = \bar\gamma^{j}\ \gamma^{i} = \bar\gamma^{ij}$		$\gamma^{\lambda}\ \bar\gamma^{\lambda} = -\bar\gamma^{\lambda}\ \gamma^{\lambda} = -\bar\gamma$
$\gamma^{\lambda}\ \bar\gamma^{\lambda i} = \bar\gamma^{\lambda i}\gamma^{\lambda} = \bar\gamma^{i}$ $\bar\gamma^{\lambda}\ \bar\gamma^{\lambda i} = \bar\gamma^{\lambda i}\bar\gamma^{\lambda} = \gamma^{i}$ $\cancel{\bar\gamma^{\lambda}\ \bar\gamma^{\lambda i} = \bar\gamma^{\lambda i}\bar\gamma^{\lambda} = \bar\gamma^{i}}$		$\gamma^{i}\ \bar\gamma^{jk} = -\bar\gamma^{jk}\gamma^{i} = \bar\gamma^{ijk}$ $\bar\gamma^{\lambda}\ \bar\gamma^{\lambda i} = -\bar\gamma^{\lambda i}\ \bar\gamma^{\lambda} = -\gamma^{i}$
$\gamma^{ij}\bar\gamma^{k} = \bar\gamma^{k}\ \gamma^{ij} = \bar\gamma^{ijk}$		$\gamma^{i\lambda}\bar\gamma^{\lambda} = -\bar\gamma^{\lambda}\ \gamma^{i\lambda} = \bar\gamma^{i}$

En faisant, dans les (44), $\xi = \zeta = \psi$, et en prenant méthodiquement pour P et Q des matrices de rangs tensoriels différents dans le tableau des seize γ, nous allons former ce qu'on peut appeler les *identités rectangles* de Pauli-Kofink. Pour $P = 1$, $Q = \bar\gamma$, les formules (44Z) et (44X) fournissent respectivement deux *identités* tensorielles bien connues dans le cas particulier de l'onde plane monochromatique [1]

$$(47) \qquad \boxed{(j^k)(\sigma_k) = 0,} \qquad \boxed{\frac{1}{2}(m^{ij})(i\overline{m}_{ij}) = 2(i\omega_1)(\omega_2).}$$

Ensuite, quatre *identités* tensorielles intéressantes dues à Kofink sont fournies, à partir de la formule (44Z), par deux systèmes différents de « valeurs » des P et Q que nous indiquons à gauche

$$(48) \qquad \left\{\begin{array}{l} (1,\ \gamma^i;\ \bar\gamma^i,\ \gamma^{jk}) \\ (1,\ \bar\gamma^i;\ \gamma^i,\ \gamma^{jk}) \\ (\bar\gamma,\ \gamma^i;\ \bar\gamma^i,\ \bar\gamma^{jk}) \\ (\bar\gamma,\ \bar\gamma^i;\ \gamma^i,\ \bar\gamma^{jk}) \end{array}\right. \qquad \boxed{\begin{array}{l} (m^{ki})(j_k) = -\ (\omega_2)(\sigma^i) \\ (i\overline{m}^{ki})(j_k) = +\ (i\omega_1)(\sigma^i) \\ (m^{ki})(\sigma_k) = -\ (\omega_2)(j^i) \\ (i\overline{m}^{ki})(\sigma_k) = +\ (i\omega_1)(j^i) \end{array}}$$

les mêmes valeurs des P et Q portées dans (44X) conduisent à des *identités* conséquences de celles-ci [2]. Enfin, une dernière formule intéressante, également, due à Kofink, est fournie, à partir de (44Z), par trois sys-

(1) La formule (47_1) est équivalente à notre formule (33) du Chapitre II, d'après laquelle le quadri-vecteur densité de spin devait être orthogonal au courant d'Univers.

(2) On remarquera la « ressemblance » de (48_1) avec la formule $f^i = \Pi^{ki} j_k$ de l'Électromagnétisme de Lorentz ; le tenseur de polarisation m^{ki} remplace ici le tenseur de champ, et la densité de spin la densité de force d'Univers.

tèmes différents de « valeurs » de P et Q, que nous indiquons à gauche (¹)

$$(49)\quad (1.\ \bar{\gamma}^{ij};\ \bar{\gamma}.\ \gamma^{ij};\ \gamma^{i}.\ \gamma^{j})\qquad \boxed{[(j^{k})(\sigma^{l}) - (j^{l})(\sigma^{k})] = (\omega_2)(m^{kl}) - (i\omega_1)(i\overline{m}^{kl});}$$

les mêmes « valeurs » portées dans (44X) conduisent à l'identité $0 = 0$.

16. Identités de Kofink faisant intervenir les tenseurs schrödingeriens $\psi^{\times}[\partial^{i}]\gamma\psi$. — Parmi ces nouvelles identités, quelques-unes peuvent être considérées comme des généralisations directes des identités *carrées* et *rectangles* précédentes. Par exemple, si dans les formules symétriques [X], [Y], [Z] qui nous ont permis d'établir les *identités carrées* (43), on remplace la matrice multiplicateur $\psi^{\times}_{p}$ par la matrice $\psi^{\times}_{p}\overleftarrow{\partial^{i}}$, on obtient ce que Kofink appelle une série de relations « avec dérivée avant »; remplaçant de même ψ_r par $\overrightarrow{\partial^{i}}\psi_r$, et retranchant des précédentes les relations « à dérivée arrière » obtenues (²), on forme aisément trois *identités* correspondant biunivoquement aux (43) (³), et dont nous écrivons seulement la troisième, en vue d'une question physique que nous nous poserons au dernier Chapitre

$$(43'_2)\qquad \boxed{\psi^{\times}[\partial^{i}]\gamma^{k}\psi.\psi^{\times}\gamma_{k}\psi = \psi^{\times}\psi.\psi^{\times}[\partial^{i}]\psi - \psi^{\times}\bar{\gamma}\psi.\psi^{\times}[\partial^{i}]\bar{\gamma}\psi.}$$

On peut évidemment « généraliser » d'une manière analogue les diverses *identités rectangles* données au numéro précédent (⁴).

(¹) Avec le troisième système de *valeurs* de P et Q, il faut tenir compte de l'identité $m^{ik}\overline{m}^{j}{}_{k} + \overline{m}^{ik}m^{j}{}_{k} = 0$ valable pour $i \neq j$; la formule est alors établie seulement pour $i \neq j$, mais sa validité pour $i = j$ est évidente à cause de l'antisymétrie des trois groupes de termes. — En prenant les duals de ces trois groupes de termes, et en combinant avec (49) la relation ainsi obtenue, on peut former l'expression du tenseur (m^{kl}) en fonction de $(j^{k})(\sigma^{l}) - (j^{l})(\sigma^{k})$ et du dual de ce produit extérieur. Cette relation (que Kofink donne explicitement) permet de répondre à une question physique intéressante : dans le cas de l'onde plane monochromatique, on sait que les trois composantes (m^{u4}) du tenseur (m^{ij}) (partie *électrique* de ce tenseur) s'annulent dans le repère galiléen entraîné; dans le cas général, en est-il de même pour le repère « entraîné » en chaque point et à chaque instant par le quadri-courant du genre temps (j^{k})? La réponse est *négative*, le « second invariant » (ω_2) n'étant pas nul dans ce cas général.

(²) En ajoutant, on formerait les *dérivées* des (43).

(³) Dans le second Mémoire de 1940 de Kofink, l'*identité* correspondant à (43_1) s'obtient en retranchant chacune à chacune les (25, 26) ou encore les (48, 49); l'identité correspondant à (43_2) est (1), et celle correspondant à (43_3) est (9) (*Ann. der Physik*, **38**, 1940, II, p. 436).

(⁴) Il y a deux « généralisations » possibles de l'*identité* (49), que Kofink donne en (3, 4) et (10, 11).

Dans ce numéro, nous nous proposons d'établir à la manière de Kofink une collection complète de dix *identités quadratiques* dont les premiers membres sont du type (¹)

$$K_1 \equiv \psi^{\times}[\partial^i]\gamma^A\psi.\psi^{\times}\gamma^B\psi - \psi^{\times}\gamma^A\psi.\psi^{\times}[\partial^i]\gamma^B\psi,$$

γ^A et γ^B désignant deux matrices bien déterminées quelconques du tableau des seize γ; et dont les seconds membres sont du type

$$K_2 \equiv \sum \pm \psi^{\times}\gamma^K\psi.\partial^i(\psi^{\times}\gamma^L\psi) = \sum \mp \partial^i(\psi^{\times}\gamma^K\psi).\psi^{\times}\gamma^L\psi.$$

Ces *identités* s'obtiennent toutes par addition ou soustraction des *formules de départ* (44Z), où l'on fait $P = \gamma^P$, $Q = \gamma^Q$, $\xi_1 = \overrightarrow{\partial^i}\psi$, $\xi_2^{\times} = \psi^{\times}\overleftarrow{\partial^i}$, $\zeta_1 = \psi$, $\zeta_2^{\times} = \psi^{\times}$.

Ainsi, les premiers membres sont des différences de deux produits d'un tenseur schrödingerien par un tenseur diracien, le tenseur diracien de chaque produit ayant la même matrice significative que le tenseur schrödingerien de l'autre; et les seconds membres, susceptibles en général d'une double écriture, sont des sommes de produits d'un tenseur diracien par la dérivée partielle d'un tenseur diracien; pour passer d'une écriture des seconds membres à l'autre, il faut 1° changer tous les signes, et 2° « déplacer » dans tous les termes l'opérateur différentiel partiel ∂^i d'un tenseur diracien à l'autre (²). Les règles relatives aux seconds membres sont conséquences de celles relatives aux premiers membres; en effet, si, par exemple, la formule considérée s'obtient par addition des (44Z), lorsque P et Q commutent ou anticommutent à la fois avec le γ d'un certain terme des (44Z), le terme engendré est évidemment « du type K_2 »; dans le cas contraire, il est « du type K_1 », produit d'un tenseur schrödingerien par un tenseur diracien. Permutons alors les rôles des matrices P et Q, c'est-à-dire faisons $P = \gamma^Q$ et $Q = \gamma^P$; les nouveaux « termes K_2 » se déduiront évidemment des précédents par un simple transfert du symbole ∂^i; quant aux nouveaux « termes K_1 », si, *par hypothèse*, ils forment une différence du type indiqué, les rôles des γ^A et γ^B seront simplement intervertis (à cause de la symétrie des formules 44Z), ce qui aura évidemment pour effet de changer le signe de ce « premier membre du type K_1 ». C. Q. F. D.

Introduisons maintenant quelques conventions spéciales, destinées à simplifier l'écriture des calculs et des résultats du présent numéro. L'indice de dérivation partielle étant unique, et le même dans tous les termes, nous le négligerons, en sorte que [ ] s'entendra pour $[\partial^i]$; de plus, nous désignerons

(¹) Cette famille d'*identités* est représentée par 35 relations vectorielles sur les 52 qui sont données dans le second Mémoire de Kofink.

(²) *Op. cit.*, p. 441 et 442.

la dérivation partielle d'une certaine grandeur par une simple barre de soulignement, $\underline{\psi^\times\gamma^L\psi}$, par exemple, s'entendant pour $\partial^i(\psi^\times\gamma^L\psi)$. Nous continuerons à désigner les 5 tenseurs diraciens suivant les conventions usuelles (*voir* ci-après, équ. 60), *mais nous négligerons ici les parenthèses* par lesquelles nous spécifions généralement qu'il s'agit du « tenseur abstrait », non pourvu de son coefficient physique; de même, nous négligerons de rétablir, comme nous l'avions fait au numéro précédent, le symbole i qui donne aux composantes des tenseurs densitaires le caractère réel ou imaginaire pur voulu par la Relativité.

Avec ces diverses conventions, l'écriture symbolique générale des 10 formules cherchées sera

$$[\mathrm{K}]\quad \boxed{\{\psi^\times[\ ]\gamma^A\psi.\psi^\times\gamma^B\psi-\psi^\times\gamma^A\psi.\psi^\times[\ ]\gamma^B\psi\}=\sum\pm\psi^\times\gamma^K\psi.\underline{\psi^\times\gamma^L\psi}=\sum\mp\underline{\psi^\times\gamma^K\psi}.\psi^\times\gamma^L\psi;}$$

comme nous l'avons dit, ces formules seront, avec Kofink, déduites des (44 Z) où l'on fait

$$\xi=\underline{\psi},\quad \zeta=\psi;\qquad \mathrm{P}=\gamma^{\mathrm{P}},\quad \mathrm{Q}=\gamma^{\mathrm{Q}}.$$

Enfin, de même qu'au numéro précédent, nous indiquerons à gauche les *valeurs* à donner aux matrices P et Q, ainsi que le fait d'avoir à procéder par addition ou par soustraction.

Il vient d'abord

$$(50)\qquad (1,\bar\gamma;\ -)\qquad \boxed{\{\psi^\times[\ ]\psi.\psi^\times\bar\gamma\psi-\dots\}=-\underline{j}^k\sigma_k=j_k\underline{\sigma}^k,}$$

$$(51)\quad \begin{cases}(1,\gamma^i;\ -) & \{\psi^\times[\ ]\psi.\psi^\times\gamma^i\psi-\dots\}=+\underline{j_k}m^{ki}+\underline{\omega}_2\sigma^i=\dots,\\ (1,\bar\gamma^i;\ +) & \{\psi^\times[\ ]\bar\gamma\psi.\psi^\times\gamma^i\psi-\dots\}=-\underline{j_k}\overline{m}^{ki}+\underline{\omega}_1\sigma^i=\dots,\\ (\bar\gamma,\gamma^i;\ +) & \{\psi^\times[\ ]\psi.\psi^\times\gamma^i\psi-\dots\}=+\underline{\sigma}_k m^{ki}+\underline{\omega}_2 j^i=\dots,\\ (\bar\gamma,\gamma^i;\ -) & \{\psi^\times[\ ]\bar\gamma\psi.\psi^\times\bar\gamma^i\psi-\dots\}=-\underline{\sigma}_k\overline{m}^{ki}+\underline{\omega}_1 j^i=\dots,\end{cases}$$

soit 5 formules qui ont directement la forme tensorielle (¹).

On obtient de même

$$(52')\quad \begin{cases}(\bar\gamma^i,\bar\gamma^{jk};\ +) & \{\psi^\times[\ ]\gamma^i\psi.\psi^\times\gamma^{jk}\psi-\dots\}=-\underline{\omega}_2\bar{j}^{ijk}-[\underline{\overline{m}^{ij}}\sigma^k-\underline{\overline{m}^{ik}}\sigma^j]-\underline{\sigma}^i\overline{m}^{jk}=\dots,\\ (\gamma^i,\bar\gamma^{jk};\ -) & \{\psi^\times[\ ]\gamma^i\psi.\psi^\times\bar\gamma^{jk}\psi-\dots\}=+\underline{\omega}_1\bar{j}^{ijk}-[\underline{m^{ij}}\sigma^k-\underline{m^{ik}}\sigma^j]-\underline{\sigma}^i m^{jk}=\dots,\\ (\bar\gamma^i,\gamma^{jk};\ -) & \{\psi^\times[\ ]\bar\gamma^i\psi.\psi^\times\gamma^{jk}\psi-\dots\}=-\underline{\omega}_2\bar\sigma^{ijk}-[\underline{\overline{m}^{ij}}j^k-\underline{m^{ik}}j^j]-\underline{j}^i\overline{m}^{jk}=\dots,\\ (\gamma^i,\gamma^{jk};\ +) & \{\psi^\times[\ ]\gamma^i\psi.\psi^\times\bar\gamma^{jk}\psi-\dots\}=+\underline{\omega}_1\bar\sigma^{ijk}-[\underline{m^{ij}}j^k-\underline{m^{ik}}j^j]-\underline{j}^i m^{jk}=\dots,\end{cases}$$

(¹) La correspondance de nos formules avec les formules vectorielles du second Mémoire de Kofink s'établit ainsi : $(50)\rightarrow(2)$; $(51_1)\rightarrow(7, 8)$; $(51_2)\rightarrow(5, 6)$; $(51_3)\rightarrow(14, 15)$; $(51_4)\rightarrow(12, 13)$.

formules qui, étant établies pour $i \neq j, k$ ($j \neq k$ par hypothèse), n'ont pas une validité tensorielle générale (¹). Mais il est évident, sur l'écriture des premiers membres, qu'en groupant ces formules par paires comme il a été indiqué, chacune des paires explicite une même formule tensorielle générale. Il est facile d'écrire ces deux formules générales ; en effet, en ajoutant et retranchant un terme aux seconds membres, la première paire, par exemple, peut s'écrire

$$\{\psi^\times[\;]\gamma^i\psi.\psi^\times\gamma^{jk}\psi - \dots\} = -[\underline{\omega_2}\,\bar{j}^{ijk} + \underline{\bar{m}^{ij}}\sigma^k + \underline{\bar{m}^{ki}}\sigma^j + \underline{\bar{m}^{jk}}\sigma^i] + [\underline{\bar{m}^{jk}}\sigma^i - \underline{\sigma}^i\bar{m}^{jk}] = \dots$$

$$\{\psi^\times[\;]\gamma^i\psi.\psi^\times\gamma^{jk}\psi - \dots\} = -[-\underline{\omega_1}\,\bar{j}^{ijk} + \underline{m^{ij}}\sigma^k + \underline{m^{ki}}\sigma^j + \underline{m^{jk}}\sigma^i] + [\underline{m^{jk}}\sigma^i - \underline{\sigma}^i m^{jk}] = \dots$$

Les premiers [ ] *des seconds membres sont complètement antisymétriques en* i, j, k, en sorte qu'ils doivent être considérés comme nuls pour $i = j, k$; par conséquent, donnant à i toutes les valeurs possibles indépendamment des valeurs de j et k ($j \neq k$), il y a toujours un et un seul de ces premiers [ ] qui n'est pas nul ; on peut dire que, lorsqu'on passe du cas $i = j, k$ au cas $i \neq j, k$, l'un des premiers [ ] remplace l'autre. Quant aux seconds [ ], tout comme les premiers membres { }, ils ne sont pas distincts l'un de l'autre ; en ce qui les concerne, on passe de l'une à l'autre des équations en prenant les grandeurs duales sur j, k. Finalement, les deux formules générales cherchées sont donc

$$(52)\quad \boxed{\begin{aligned} \{\psi^\times[\;]\gamma^i\psi.\psi^\times\gamma^{jk}\psi - \dots\} &= [\underline{\bar{m}^{jk}}\sigma^i - \underline{\sigma}^i m^{jk}] - \overline{\left[\omega_1\,\bar{j}^{ijk} + \sum \underline{m^{ij}}\sigma^k\right]}^{[ijk]} \\ &\qquad \left[-\underline{\omega_2}\,\bar{j}^{ijk} + \sum \underline{\bar{m}^{ij}}\sigma^k\right] = \dots \\ \{\psi^\times[\;]\gamma^i\psi.\psi^\times\gamma^{jk}\psi - \dots\} &= [\underline{m^{jk}}j^i - j^i m^{jk}] \quad \overline{\left[-\omega_1\sigma^{ijk} + \sum \underline{m^{ij}}j^k\right]}^{[ijk]} \\ &\qquad \left[+\underline{\omega_2}\sigma^{ijk} + \sum \underline{\bar{m}^{ij}}j^k\right] = \dots \end{aligned}}$$

les sommations Σ sont faites par permutation circulaire sur i, j, k, et les « barres à indices » surmontant les [ ] s'entendent pour *duales sur* j, k.

Voici une paire d'*identités* démontrées essentiellement pour $k \neq l$ (²)

$$(53')\quad \begin{cases} (\gamma^k, \gamma^l; +) \\ (\bar{\gamma}^k, \bar{\gamma}^l; -) \end{cases} \boxed{\begin{aligned} \{\psi^\times[\;]\gamma\psi.\psi^\times\gamma^{kl}\psi - \dots\} &= \underline{j^k}j^l - \underline{\sigma^k}\sigma^l - \underline{m^{ki}}m^l{}_i = \dots \\ \{\psi^\times[\;]\gamma\psi.\psi^\times\gamma^{kl}\psi - \dots\} &= \underline{j^k}j^l - \underline{\sigma^k}\sigma^l + \underline{\bar{m}^{ki}}\bar{m}^l{}_i = \dots \end{aligned}}$$

(¹) Sur la forme « brute de calcul » des (52′), il faut, pour donner aux { } la forme [K_1], passer aux grandeurs duales des seconds termes. La correspondance avec les formules de Kofink s'établit ainsi : $(52'_1) \to (17, 30, 33, 34)$; $(52'_2) \to (19, 28, 37, 38)$; $(52'_3) \to (16, 29, 31, 32)$; $(52'_4) \to (18, 27, 35, 36)$.

(²) Ces *identités* correspondent respectivement aux (20, 43) et (21, 44) du Mémoire cité de Kofink.

remarquons que le 3ᵉ groupe de termes des seconds membres de $(53'_2)$, par exemple, peut être transformé au moyen de l'identité

$$(53^*)\qquad \boxed{\underline{\overline{m}^{ki}}\,\overline{m}^{l}_{.i} = -\underline{m^{li}}\,m^{k}_{.i}}$$

valable pour $k \neq l$. *Les formules* $(53')$ *n'ont pas une validité tensorielle générale ;* en effet, d'après nos conventions de l'Avertissement, les premiers membres doivent être considérés comme des composantes de tenseurs antisymétriques en k, l s'annulant pour $k = l$; or, les seconds membres des $(53')$ ne s'annulent pas pour $k = l$. Mais, en faisant la demi-somme des deux seconds membres, il vient

$$(53)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\{\psi^\times[\ ]\psi.\psi^\times\gamma^{\lambda l}\psi - \ldots\} = \tfrac{1}{2}\{[\underline{j^k}j^l - \underline{j^l}j^k] - [\underline{\sigma^k}\sigma^l - \underline{\sigma^l}\sigma^k] - [\underline{m^{ki}}m^l_{.i} - \underline{m^{li}}m^k_{.i}]\},\\ &\{\psi^\times[\ ]\overline{\gamma}\psi.\psi^\times\gamma^{\lambda l}\psi - \ldots\} = \tfrac{1}{2}\{[\qquad] - [\qquad] + [\qquad]\}, \end{aligned}}$$

et, les trois [ ] des nouveaux seconds membres étant antisymétriques en k, l, *les identités* (53) *ont une validité tensorielle générale, pour toutes les valeurs de* k *et* l. Remarquons que les seconds membres de ces deux *identités* contiennent les mêmes groupes de termes, le signe différant pour le troisième seulement.

Enfin, la dernière des *identités tensorielles* de la famille considérée, dont le premier membre est

$$\{\psi^\times[\ ]\gamma^i\psi.\psi^\times\overline{\gamma}^j\psi - \psi^\times\gamma^i\psi.\psi^\times[\ ]\overline{\gamma}^j\psi\},$$

doit être établie séparément pour les valeurs $i \neq j$ et $i = j$ des indices. Il vient d'abord, avec essentiellement $i \neq j$ (¹)

$$(54''_1)\quad (\gamma^{\lambda i}, \gamma^{\lambda j}; +)\quad \{\psi^\times[\ ]\gamma^\lambda\psi.\psi^\times\gamma^{\lambda i}\psi - \ldots\} = \underline{m^{\lambda i}}m^{\lambda j} - \underline{\overline{m}^{\lambda i}}\overline{m}^{\lambda j} - \underline{j^i}j^j - \underline{\sigma^{\lambda ik}}\sigma^{\lambda j}_{..k} = \ldots$$

Nous allons transformer cette écriture, qui n'est pas correcte au point de vue tensoriel à cause, notamment, de la présence de l'*indice sans sommation* λ. Prenons, par exemple, $\lambda = 4$, $i = u$, $j = v$; il vient, en passant aux grandeurs duales

$$\begin{aligned}\{\psi^\times[\ ]\gamma^4\psi.\psi^\times\overline{\gamma}^w\psi - \ldots\} &= \underline{\overline{m}^{\mu 4}}m^{\mu w} + \underline{\overline{m}^{\nu w}}m^{\nu 4} - \underline{j^\mu}\overline{j}^{\mu w 4} - \underline{\sigma^\nu}\overline{\sigma}^{\nu w 4}\\ &= \underline{\overline{m}^{\nu 4}}m^{\nu w} + \underline{\overline{m}^{\mu w}}m^{\mu 4} - \underline{j^\nu}\overline{j}^{\nu w 4} - \underline{\sigma^\mu}\overline{\sigma}^{\mu w 4}.\end{aligned}$$

(¹) Rappelons que, suivant une convention antérieure, nos indices λ, μ, ... s'entendent *sans sommation*. Notre $(54''_1)$ correspond aux (39, 40, 45, 46) de Kofink.

Pour nous débarrasser des *indices sans sommation* μ, ν, faisons la demi-somme des seconds membres; elle s'écrit

$$\{\psi^{\times}[\ ]\gamma^{4}\psi.\psi^{\times}\overline{\gamma}^{w}\psi - \ldots\} = \frac{1}{2}(\underline{\overline{m}^{i4}}\, m_{i}^{.w} + \underline{\overline{m}^{iw}}\, m_{i}^{.4}) - \frac{1}{2}\left[j_{k}\overline{j}^{w4k} + \sigma_{k}\overline{\sigma}^{w4k}\right],$$

d'où, en rétablissant les valeurs quelconques des indices, l'écriture *valable seulement pour* $i \neq j$

$$(54'_1) \qquad \boxed{\{\psi^{\times}[\ ]\gamma^{i}\psi.\psi^{\times}\overline{\gamma}^{j}\psi - \ldots\} = \frac{1}{2}(\underline{\overline{m}^{ik}}\, m^{j}_{.k} + \underline{\overline{m}^{jk}}\, m^{i}_{.k}) + \frac{1}{2}\left[\underline{j_{k}}\overline{j}^{ijk} + \underline{\sigma_{k}}\overline{\sigma}^{ijk}\right],}$$

écriture d'après laquelle le second membre est la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique en i, j. Remarquons que, en vertu d'une identité déjà invoquée, le tenseur symétrique peut recevoir les deux autres formes

$$(54^{*}) \qquad \boxed{\frac{1}{2}(\underline{\overline{m}^{ik}}\, m^{j}_{.k} + \underline{\overline{m}^{jk}}\, m^{i}_{.k}) = -\frac{1}{2}(\underline{m^{ik}}\,\overline{m}^{j}_{.k} - \underline{\overline{m}^{ik}}\, m^{j}_{.k}) = -\frac{1}{2}(\underline{m^{ik}}\,\overline{m}^{j}_{.k} + \underline{m^{jk}}\,\overline{m}^{i}_{.k}).}$$

Reste à établir l'*identité* considérée pour $i = j$; on a [1]

$$(54''_2) \qquad (\psi^{\lambda}, \overline{\gamma}^{\lambda}; -) \qquad \boxed{\{\psi^{\times}[\ ]\gamma^{\lambda}\psi.\psi^{\times}\overline{\gamma}^{\lambda}\psi - \ldots\} = -\underline{\omega_1}\,\omega_2 + \underline{m^{\lambda k}}\,\overline{m}^{\lambda}_{.k} = \ldots}$$

ou, en faisant comme précédemment la demi-somme des seconds membres,

$$(54'_2) \qquad \{\psi^{\times}[\ ]\gamma^{\lambda}\psi.\psi^{\times}\overline{\gamma}^{\lambda}\psi - \ldots\} = \frac{1}{2}(\underline{\omega_2}\,\omega_1 - \underline{\omega_1}\,\omega_2 + \underline{m^{\lambda k}}\,\overline{m}^{\lambda}_{.k} - \underline{\overline{m}^{\lambda k}}\, m^{\lambda}_{.k}).$$

Finalement, rapprochant les deux formules $(54'_1)$ et $(54'_2)$, nous voyons que l'expression tensorielle générale de l'*identité* cherchée est, δ^{ij} désignant le symbole de Kronecker

$$(54) \quad \boxed{\{\psi^{\times}[\ ]\gamma^{i}\psi.\psi^{\times}\overline{\gamma}^{j}\psi - \ldots\} = \frac{1}{2}\left(\underline{m^{ik}}\,\overline{m}^{j}_{.k} - \underline{\overline{m}^{ik}}\, m^{j}_{.k} + (\underline{\omega_2}\,\omega_1 - \underline{\omega_1}\,\omega_2)\,\delta^{ij}\right) + \frac{1}{2}\left[\underline{j_{k}}\overline{j}^{ijk} + \underline{\sigma_{k}}\overline{\sigma}^{ijk}\right];}$$

le second membre apparaît comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique en i, j [2].

---

[1] Cette *identité* correspond aux (24) et (47) de Kofink.

[2] Le Mémoire cité de Kofink contient encore quelques *identités* « avec dérivée avant » qui n'entrent dans aucune des catégories considérées dans ce numéro, et qui apparaissent comme quelques « échantillons » de familles plus vastes; tensoriellement, il convient de les grouper ainsi : 25, 48; 26, 49; 22, 23, 41, 42; 50; 51; 52. La variance tensorielle de ces identités n'est pas toujours en évidence directe dans Kofink; c'est ainsi, par exemple, que les trois dernières citées ont la variance 1 2 3 4. (*Op. cit.*, II, § 1, p. 438-441.)

II. — Établissement et étude physique des dix relations différentielles de Franz-Kofink.

17. uivant toujours nos conventions générales de l'Avertissement, nous écrivons ici l'équation symbolique de Dirac et son associée de Gordon-Pauli sous la forme (¹)

$$(56) \qquad \boxed{\left\{\gamma_i\left(\overrightarrow{\partial^i} - i\varepsilon A^i\right) + \mu_0\right\}\psi = 0,} \qquad \boxed{\psi^\times\left\{\left(-\overleftarrow{\partial^i} - i\varepsilon A^i\right)\gamma_i + \mu_0\right\} = 0,}$$

en posant

$$(57) \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{2\pi}{h}\frac{e}{c} = \frac{\nu}{e}, \quad \nu = \frac{2\pi e^2}{hc};} \qquad \boxed{\mu_0 = \frac{2\pi}{h} c m_0;}$$

ν désigne la *constante de structure fine,* qui est un nombre pur; les opérateurs $\overrightarrow{\partial^i}$ et $\overleftarrow{\partial^i}$, ainsi que la constante μ_0, ont comme dimension l'inverse d'une longueur.

Le mode de formation des dix relations différentielles que nous avons en vue est le suivant. Soit γ_A l'une quelconque des seize matrices γ de la Théorie de Dirac; multiplions (56_1) à gauche par $\psi^\times\gamma_A$, (56_2) à droite par $\gamma_A\psi$, ajoutons et retranchons; en opérant successivement avec les γ_A des 5 rangs tensoriels 0, 1, 2, 3, 4, nous ferons apparaître $2 \times 5 = 10$ relations, qui auront le caractère tensoriel en vertu de ce qui a été dit au Chapitre I.

Dans le cas général où le rang n de la matrice multiplicative γ_A n'est pas 0 ou 4, les termes en γ_i des (56) engendreront deux groupes de termes dans lesquels le rang de la matrice produit γ sera $n \pm 1$; dans l'un de ces groupes de termes γ_A commute, et dans l'autre γ_A anticommute avec γ_i. Par conséquent, par l'addition ou la soustraction annoncées, les termes en γ_i des (56) engendreront les deux types de tenseurs suivants (²)

$$(58) \qquad \left\{\begin{aligned} \{\ \} &\equiv \psi^\times([\partial^i] - 2i\varepsilon A^i)\gamma^B\psi = \{\psi^\times[\partial^i]\gamma^B\psi - 2i\varepsilon A^i.\psi^\times\gamma^B\psi\}, \\ \partial^i(\ ) &\equiv \psi^\times(\partial^i)\gamma^C\psi = \partial^i(\psi^\times\gamma^C\psi). \end{aligned}\right.$$

On voit que les tenseurs $\{\ \}$ sont la somme de deux tenseurs; le premier, que nous appelons *schrödingerien* parce que sa définition fait intervenir l'opérateur $[\partial^i]$ du courant de la Théorie primitive de Schrödinger, est indépendant

---

(¹) Nous considérons toujours le ψ comme une matrice à 4 lignes et 1 colonne, et le $\psi^\times$ comme une matrice à 1 ligne et 4 colonnes.

(²) *Voir* Al. Proca, *Sur la Théorie de Dirac dans un champ nul* (*Ann. de Physique*, **20**, 1933, p. 401, 404).

du quadripotentiel régnant, et doit donc être considéré comme appartenant en propre au fluide électronique statistique; à un facteur près, le second est un produit du quadripotentiel régnant par l'un des 5 tenseurs *diraciens* ( ) $= \psi^\times \gamma \psi$, et doit donc être considéré comme un terme d'*interaction* du champ avec le fluide électronique. Quant aux tenseurs (58_2), ce sont des dérivées des tenseurs diraciens ( ). Enfin, le terme en μ_0 des (56) donne respectivement par addition et soustraction

$$(58') \qquad 2\mu_0(\psi^\times \gamma^4 \psi) \quad \text{et} \quad \text{zéro}.$$

Pour établir effectivement les dix relations en question, il est souvent avantageux de passer aux grandeurs duales, ce que le tableau (45) précédent permet de faire sans difficultés; les résultats obtenus sont les suivants, le symbole de désignation [ ] correspondant à la *valeur* attribuée à la matrice multiplicative γ :

$$[1] \quad \begin{cases} \partial^i(\psi^\times \gamma_i \psi) = 0, \\ \{\psi^\times[\partial^i]\gamma_i\psi - 2i\varepsilon A^i . \psi^\times \gamma_i \psi\} + 2\mu_0(\psi^\times\psi) = 0; \end{cases}$$

$$[\gamma_i] \quad \begin{cases} \partial^i(\psi^\times\psi) + \{\psi^\times[\partial_j]\gamma^{ij}\psi - 2i\varepsilon A_j . \psi^\times\gamma^{ij}\psi\} = 0, \\ \{\psi^\times[\partial^i]\psi - 2i\varepsilon A . \psi^\times\psi\} + \partial_j(\psi^{i\times}\gamma^{ij}\psi) + 2\mu_0(\psi^\times\gamma^i\psi) = 0; \end{cases}$$

$$[\gamma_{uv}] \quad \begin{cases} \{\psi^\times([\partial^v]\gamma^u - [\partial^u]\gamma^v)\psi - 2i\varepsilon(A^v . \psi^\times\gamma^u\psi - A^u . \psi^\times\gamma^v\psi)\} + \partial^w(\psi^\times\overline{\gamma}^4\psi) - \partial^4(\psi^\times\overline{\gamma}^w\psi) = 0, \\ \partial^v(\psi^\times\gamma^u\psi) - \partial^u(\psi^\times\gamma^v\psi) + \{\psi^\times([\partial^w]\overline{\gamma}^4 - [\partial^4]\overline{\gamma}^w)\psi - 2i\varepsilon(A^w . \psi^\times\overline{\gamma}^4\psi - A^4 . \psi^\times\overline{\gamma}^w\psi)\} + 2\mu_0(\psi^\times\gamma^{uv}\psi) = 0; \end{cases}$$

$$[\gamma_{uvw}] \quad \begin{cases} \{\psi^\times[\partial^4]\overline{\gamma}\psi - 2i\varepsilon A^4 . \psi^\times\overline{\gamma}\psi\} + \partial_u(\psi^\times\overline{\gamma}^{u4}\psi) = 0, \\ \partial^4(\psi^\times\overline{\gamma}\psi) + \{\psi^\times[\partial_u]\overline{\gamma}^{u4}\psi - 2i\varepsilon A_u . \psi^\times\overline{\gamma}^{u4}\psi\} + 2\mu_0(\psi^\times\overline{\gamma}^4\psi) = 0; \end{cases}$$

$$[\gamma_{uvw4}] \quad \begin{cases} \{\psi^\times[\partial^i]\overline{\gamma}_i\psi - 2i\varepsilon A^i . \psi^\times\overline{\gamma}_i\psi\} = 0, \\ \partial^i(\psi^\times\overline{\gamma}_i\psi) + 2\mu_0(\psi^\times\overline{\gamma}\psi) = 0. \end{cases}$$

Pour simplifier le calcul des grandeurs duales, nous avons pris $\gamma_{ij} = \gamma_{uv}$ et $\gamma_{ijk} = \gamma_{uvw}$, le rétablissement ultérieur des indices généraux se faisant sans la moindre difficulté. On reconnaît en $[1^1]$ l'*équation de continuité pour le courant de Dirac* (1), en $[1^2]$ la *formule de décomposition du courant de Gordon* (2), en $[\gamma_{uv}^1]$ une relation donnée par H. Tetrode sous une forme un peu différente (3), en $[\gamma_{uvw}^1]$ une formule de magnétisme classique, comme M. Al. Proca

(1) *The Quantum Theory of Electron* (*Roy. Soc. Proc.*, **118**, 1928, p. 351). *Voir* aussi J. Von Neumann, *Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie* (*Zeits. f. Phys.*, **48**, 1928, p. 868 et 880).

(2) *Der Strom der Diracschen Elektronentheorie* (*Zeits. f. Phys.*, **50**, 1928, p. 630).

(3) *Der Impuls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie* [*Zeits. f. Phys.*, **49**, 1928, équ. (16), p. 861]. La même formule a été donnée, toujours sans interprétation, par J. Géhéniau [*Mécanique ondulatoire de l'électron et du photon*, Bruxelles, 1938, équ. (54) et (58), p. 59-60].

l'a reconnu dans le cas particulier où le potentiel régnant est nul (¹), enfin en $[\gamma_{u\omega\omega_4}^{2}]$ la formule, toujours ininterprétée, d'Uhlenbeck et Laporte (²). Parmi les tenseurs schrödingeriens $\{\ \}$ qui figurent dans ces dix relations, les trois suivants ont été pris en considération : le *courant de Gordon* $\psi^\times[\partial^i]\psi - 2i\varepsilon A^i.\psi^\times\psi$, le *tenseur asymétrique de Tetrode* $\psi^\times[\partial^i]\gamma^j\psi - 2i\varepsilon A^i.\psi^\times\gamma^j\psi$, enfin, dans le cas de l'électron libre, le *courant magnétique de Proca* dont l'expression générale est $\psi^\times[\partial^i]\bar{\gamma}\psi - 2i\varepsilon A^i.\psi^\times\bar{\gamma}\psi$.

Groupons et systématisons ces résultats. Les dix relations obtenues font intervenir dix *tenseurs densitaires abstraits* qui sont 1° les cinq tenseurs classiques de Dirac et Darwin, du type $\psi^\times\gamma\psi$ que, pour abréger, nous désignons par le symbole ( ) :

(A) | (B)

$$(59)\qquad \boxed{\begin{aligned}(j^l) &= \psi^\times\gamma^l\psi,\\ (m^{lj}) &= \psi^\times\gamma^{lj}\psi.\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}(\omega_1) &= \psi\ \ \psi\\ (\sigma^l) &= \psi^\times\bar{\gamma}^l\psi\\ (\omega_2) &= \psi\ \ \bar{\gamma}\psi\end{aligned}}$$

2° cinq autres tenseurs, que nous désignons par le symbole $\{\ \}$, savoir

(A) | (B)

$$(60)\qquad \boxed{\begin{aligned}\{k^i\} &= \psi^\times[\partial^i]\psi - 2i\varepsilon A^i(\omega_1),\\ \{l^i\} &= \psi^\times[\partial^i]\bar{\gamma}\psi - 2i\varepsilon A^i(\omega_2),\\ \{S^{kl}\} &= \psi^\times[\partial^k]\bar{\gamma}^l\psi - 2i\varepsilon A^k(\sigma^l),\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}\{U^{ijk}\} &= \psi^\times[\partial^i]\gamma^{jk}\psi - 2i\varepsilon A^i(m^{jk}),\\ \{T^{kl}\} &= \psi^\times[\partial^k]\gamma^l\psi - 2i\varepsilon A^k(j^l).\end{aligned}}$$

Comme il a été dit, ces derniers tenseurs se présentent comme la somme d'un tenseur *schrodingerien* $\psi^\times[\ \ ]\gamma\psi$, indépendant du quadripotentiel régnant A^i, que nous désignerons par le symbole $\{\ \}'$, et d'un tenseur $-2i\varepsilon A^i\ (\ \ )$, produit du quadripotentiel régnant par l'un des tenseurs diraciens, que nous désignerons par le symbole $\{\ \}''$ (³). Tous ces tenseurs sont des tenseurs densitaires *abstraits*, c'est-à-dire dépourvus des coefficients qui leur assurent les dimensions physiques et le caractère réel ou imaginaire pur convenable. Enfin, remarquons que le tenseur du 3ᵉ rang $\{U^{ijk}\}$ n'intervient dans les relations précédentes que par ses deux contractions

$$(61'\,B)\qquad \boxed{\{U_1^i\} = \psi^\times[\partial_j]\gamma^{ij}\psi - 2i\varepsilon A_j(m^{ij}),\qquad \{U_2^i\} = \psi^\times[\partial_j]\bar{\gamma}^{ij}\psi - 2i\varepsilon A_j(\overline{m}^{ij}).}$$

(¹) *Sur la Théorie de Dirac dans un champ nul* (*Ann. de Physique*, 20, 1933, p. 429).

(²) *New covariant relations following from the Dirac Equations* [*Phys. Rev.*, 37, 1931, p. 1553, équ. (2)].

(³) Le caractère tensoriel des grandeurs (59) et (60) est evident pour un changement de repère galiléen effectué « à la première maniere » (n° **4**).

Ces définitions étant rappelées ou introduites, les dix relations considérées s'écrivent :

$$
(61)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{(A)} \\
\text{I} & \partial_l(j^l) = 0, \\
\text{II} & \{k^l\} + \partial_j(m^{lj}) = -2\mu_0(j^l), \\
\text{III} & [\partial^l(j^k) - \partial^k(j^l)] - \overline{[\{S^{lk}\} - \{S^{kl}\}]} = -2\mu_0(m^{kl}), \\
\text{IV} & \{l^i\} - \partial_j(\overline{m}^{ij}) = 0, \\
\text{V} & \{S^i_i\} = 0; \\
 & \text{(B)} \\
\text{I} & \{T^i_i\} = -2\mu_0(\omega_1), \\
\text{II} & \partial^i(\omega_1) + \{U^i_1\} = 0, \\
\text{III} & [\partial^k(\sigma^l) - \partial^l(\sigma^k)] - \overline{[\{T^{kl}\} - \{T^{lk}\}]} = 0, \\
\text{IV} & \partial^i(\omega_2) - \{U^i_2\} = -2\mu_0(\sigma^i), \\
\text{V} & \partial_i(\sigma^i) = -2\mu_0(\omega_2).
\end{array}
\right.
$$

18. Étude physique des dix relations (61). — Une première remarque fondamentale est que les tenseurs (j^l), (m^{kl}), $\{k^i\}$, $\{l^i\}$, $\{S^{ij}\}$ d'une part appartiennent en propre au sous-système des 5 équations (61 A), et les tenseurs (ω_1), (ω_2), (σ^i), $\{U^{ijk}\}$ et $\{T^{ij}\}$ d'autre part au sous-système des 5 équations (61 B). Or, ceux de ces tenseurs qui sont physiquement bien identifiés sont, d'une part, (j^i) (densité de courant-charge de Dirac), $\{k^i\}$ (densité de courant-charge de Gordon), (m^{kl}) (densité de moment magnéto-électrique), et $\{l^i\}$ (densité de courant-charge magnétique); d'autre part, (σ^i) (densité de spin), $\{T^{ij}\}$ (tenseur inertique asymétrique de Tetrode) et (ω_1) (densité de masse propre). Ainsi, *tous les tenseurs identifiés des* (61 A) *ont une signification électromagnétique, et tous les tenseurs identifiés des* (61 B) *une signification dynamique*. Corrélativement, celles des relations (61) actuellement interprétées sont, d'une part, (A I) (conservation du courant de Dirac), (A II) (décomposition du courant de Dirac) et (A IV) (expression du courant magnétique); d'autre part, (B III) [notre relation (37) entre le tenseur inertique et la densité de spin] et (B I) (expression de la densité de masse propre). Ainsi, parmi les relations (61) actuellement interprétées, toutes les (A) sont des relations d'Électromagnétisme, et toutes les (B) des relations de Dynamique. Tout ceci nous autorise à dire que, *par définition, les* 5 *relations* (61 A) *et les* 5 *tenseurs qui leur appartiennent caractérisent le comportement électromagnétique du fluide statistique de la Théorie de Dirac, et les* 5 *relations* (61 B) *et les* 5 *tenseurs qui leur appartiennent son comportement dynamique*. D'après cette définition, les relations (A III) et (A IV) ainsi que le tenseur $\{S^{ij}\}$, qui n'appartiennent pas à l'Électromagnétisme classique, appartiendront à un Électromagnétisme élargi ; de même, les relations (B II), (B III) et (B IV), (Uhlenbeck et Laporte) ainsi que les tenseurs (ω_2) et $\{ U^{ijk} \}$ appartiendront à une Dynamique élargie [1].

En l'absence de quadripotentiel extérieur A^i, les 5 tenseurs $\{\ \}$ se réduisent à leur *partie schrödingerienne* $\{\ \}' = \psi^{\times}[\partial^i]\gamma\psi$. Comme les 5 opérateurs tensoriels γ définissent biuniquement les *tenseurs diraciens* ( ), et les 5 opérateurs $[\partial^i]\gamma$ les *tenseurs schrödingeriens* $\{\ \}'$, nous voyons qu'*en l'absence de quadripotentiel extérieur* A^i *les deux sous-systèmes* (61 A) *et* (61 B) *sont complètement indépendants;* les propriétés électromagnétiques et dynamiques du fluide statistique évoluent chacune de leur côté, sans réagir les unes sur les autres.

Au contraire, un quadripotentiel extérieur A^i non nul ajoute à chaque tenseur *schrödingerien* $\{\ \}'$ un *terme d'interaction* $\{\ \}'' = -2i\varepsilon A^i(\ )$; il est remarquable que le tenseur diracien ( ) qui figure dans $\{\ \}''$ soit de la nature physique *opposée* à celle du $\{\ \}'$ correspondant (électrique pour mécanique, et *vice versa*). Ainsi, *le quadripotentiel extérieur* A^i *produit un couplage électro-mécanique entre les deux sous-systèmes* (61 A) *et* (61 B), *couplage qui est complètement symétrique par rapport à l'Électromagnétisme et à la Dynamique.*

C'est donc d'une manière parfaitement symétrique que se manifeste l'*effet pondéromoteur du champ;* il n'y a, en Théorie de Dirac, aucune raison de qualifier le potentiel régnant A^i « électrique » plutôt que « mécanique » [2]. C'est là une circonstance entièrement nouvelle par rapport aux Théories classiques : en Mécanique analytique du point électriquement chargé, l'impulsion-masse totale apparaissait bien comme la somme d'un terme *propre* p^i et d'un terme *électromagnétique* QA^i [3], mais ce fait apparaissait isolément, et sans contre-partie *symétrique* au sens qui vient d'être dit.

Examen détaillé des relations « électromagnétiques » (61 A). La relation (A I) n'est autre que l'équation de continuité fondamentale de Dirac. Les

---

(1) On peut douter que les résultats acquis par les théories classiques fournissent les données suffisantes pour que des raisonnements formels analogues à ceux du Chapitre II permettent de justifier les 5 formules (61) restant ininterprétées. En ce cas, c'est de la Théorie de Dirac qu'il faudrait partir pour « élargir » l'Électromagnétisme et la Dynamique dans le sens indiqué.

(2) Une remarque analogue vaut pour la *masse propre de l'électron* m_0. Rappelons que la *masse propre du photon* figure dans les équations et définitions de la Théorie du Photon (L. de Broglie, *Mécanique ondulatoire du Photon,* pp. 156 et 158).

(3) O. Costa de Beauregard, *la Relativité restreinte,* pp. 48 et 62. — Nous avons montré, au numéro **8** du présent travail, qu'en intégrant sur une hypercloison d'espace les deux termes du tenseur de Tetrode, on retrouve *en moyenne* l'expression classique de l'impulsion-masse propre ou *cinétique*.

inductions de Dirac, pour avoir brillamment réussi, n'en étaient pas moins audacieuses, comme on le voit notamment ici : si, en effet, la 4^{me} composante $\psi^{\times}\gamma^{4}\psi = i\psi^{*}\psi$ de la densité de courant d'Univers de Dirac est bien l'exacte transposition de la densité de charge $\psi^{*}\psi$ de Schrödinger ([1]), les trois $\psi^{\times}\gamma^{u}\psi$ ne sont nullement analogues aux densités de courant $\psi^{*}[\partial^{u}]\psi$ de Schrödinger. Il se trouve que la formule (A II) de Gordon permet de réduire « l'amplitude » de l'induction correspondante : l'expression du courant $\psi^{\times}[\partial^{i}]\psi$ de Gordon s'apparente nettement au $\psi^{*}[\partial^{u}]\psi$ de Schrödinger, et l'on verra dans la suite de ce numéro et au Chapitre IV, paragraphe II, que la situation s'améliore encore lorsqu'on prend en considération le tenseur inertique $\psi^{\times}[\partial^{i}]\gamma^{j}\psi$ de Tetrode, dont les composantes en $(i, 4)$ s'écrivent $i\psi^{*}[\partial^{i}]\psi$.

La relation (A II), qui a la même forme qu'une relation bien connue de l'Électromagnétisme des milieux polarisés ([2]) a été donnée par Gordon comme fournissant une décomposition de la *densité de courant-charge totale* (j^{l}) en un *courant de convection* $\{k^{l}\}$ et un *courant de polarisation* $\partial_{k}(m^{lk})$. Nous verrons au Chapitre IV que cette terminologie est bien celle qui s'impose du point de vue de l'Électromagnétisme, mais qu'elle soulève quelques difficultés aux points de vue de la Cinématique et de la Dynamique. Quant à l'expression $\partial_{k}(m^{lk})$, elle représente évidemment le courant de polarisation, et l'on peut considérer que la relation (A II) justifie, à partir de l'interprétation du quadrivecteur (j^{l}) comme *densité de courant-charge*, celle du tenseur antisymétrique (m^{lk}) comme *densité de moment magnéto-électrique*.

D'une manière analogue, la formule (A IV), étudiée par Proca dans le cas de l'électron libre, permet d'interpréter le quadrivecteur $\{l^{i}\}$ comme une *densité de courant-charge magnétique*; la nullité du second membre exprime l'*absence de magnétisme vrai* à laquelle on s'attendait *a priori*.

Précisons, avant de poursuivre, la définition des quatre tenseurs dont il vient d'être question, en introduisant les facteurs physiques convenables. On sait que, en U. E. S. d'Heaviside, la densité de courant-charge de Dirac est $j^{k} = -e\psi^{\times}\gamma^{k}\psi$; à partir de là, il vient de proche en proche

(62 A)	Densité de courant-charge électrique de Dirac	$j^{k} = -e(j^{k})$;
	» » de Gordon	$k^{l} = +\dfrac{e}{2\mu_0}\{k^{l}\}$;
	» de moment magnéto-électrique	$m^{lj} = +\dfrac{e}{2\mu_0}(m^{lj})$;
	» de courant-charge magnétique de polarisation	$l^{i} = -\dfrac{ec}{2\mu_0}\{l^{i}\}$.

([1]) *Voir* ci-dessus, Chapitre I, n° **8**.
([2]) *Voir* par exemple, R. BECKER, *Théorie des Électrons*, pp. 124 et 365.

Prenons maintenant l'équation (61 A III). On peut considérer qu'elle fournit une décomposition de la densité de moment magnétoélectrique m^{kl} en deux termes qui, aux facteurs convenables près, sont le rotationnel du quadri-courant j^k et le « défaut de symétrie » d'un certain tenseur asymétrique $\{S^{kl}\}$. A première vue, le premier terme semble conforme à ce que suggérerait l'intuition : puisque la rotation d'une gouttelette électrisée produit un moment magnétique, il semble qu'un courant électrique d'Univers tourbillonnaire doit manifester une densité de moment magnétoélectrique, le moment magnétique correspondant au rotationnel du tri-courant d'espace, comme il arrive justement dans la formule (A III). En fait, cette manière de voir tombe sous le coup d'une objection déjà rencontrée à propos des moments cinétiques (Chapitre II, n° **10**) : le moment magnétique d'une sphère de rayon r uniformément chargée avec la densité q et animée de la vitesse angulaire ω vaut $4\pi q r^5/15$; c'est un infiniment petit du 5e ordre en r, ordre trop élevé de 2 unités pour qu'une *densité* puisse être définie. Nous sommes donc *a priori* certains que le premier terme de la formule (A III) n'est pas interprétable en termes d'Électromagnétisme *classique ;* c'est ce que l'introduction des coefficients physiques va nous confirmer.

Reprenant les définitions physiques des grandeurs j^k et m^{kl} qui viennent d'être données, nous trouvons que la *première composante physique* de m^{kl} a pour valeur

$$m^{kl}_{(1)} = \left(\frac{1}{2\mu_0}\right)^2 (\partial^l j^k - \partial^k j^l) ;$$

cette intervention du carré de la masse propre de l'électron dans une formule que, par définition, nous avons dit être une formule d'Électromagnétisme, montre clairement que l'Électromagnétisme dont il s'agit ici n'est pas l'Électromagnétisme classique ([1]). Quant à la *seconde composante* $m^{kl}_{(2)}$ de m^{kl}, elle est égale, à un facteur près, au *défaut de symétrie* d'un certain tenseur $\{S^{kl}\}$. Nous calculerons au Chapitre IV, n° **24**, les deux divergences du tenseur $\{S^{kl}\}$, dont l'interprétation physique nous échappe. Nous ne pouvons d'ailleurs non plus donner aucune justification *a priori* du fait que la trace de ce tenseur doit être nulle, comme le veut la relation (61 A V).

Examen détaillé des relations « dynamiques » (61 B). La relation (B III) est identique à notre formule (37′) du Chapitre II ; pour le vérifier, introduisons dans les écritures de la densité de spin σ^k et du tenseur inertique asymétrique

---

([1]) Rappelons que le carré de la masse propre *du photon* figure dans les équations modifiées du premier groupe de Maxwell-Lorentz de la Théorie du Photon de M. L. de Broglie (*Méc. ond. photon,* t. I, p. 158).

de Tetrode T^{kl} les facteurs physiques convenables, qui sont, comme on sait,

(62 B′)	Densité de moment cinétique propre......	$\sigma^k = -\frac{h}{4\pi}(\sigma^k)$,
	Tenseur inertique asymétrique de Tetrode.	$T^{kl} = +\frac{ich}{4\pi}\{T^{kl}\}$;

il vient, conformément à ce que nous annoncions

$$\boxed{[T^{kl} - T^{lk}] = -ic[\partial^k \sigma^l - \partial^l \sigma^k].} \tag{63}$$

Remarquons bien que *la coïncidence des relations* (37′) *et* (63) *n'a pas lieu seulement en module, mais aussi en signe;* en effet, dans les deux cas, et dans l'hypothèse de la simultanéité, l'impulsion-masse finie se calcule suivant la formule

$$p^i = \iiint T^{i4}\,\delta u_i = \frac{1}{ic}\iiint T^{i4}\,\delta u,$$

l'indice significatif étant le *premier indice* de T^{ij}. Pour (37′), cela résulte de ce que nous avons dit au Chapitre II, n° **12**, 8°; et, pour (63), de ce que nous avons dit au Chapitre I, n° **8**.

Finalement, notre théorie de Dynamique relativiste préquantique du Chapitre II nous permet d'interpréter la formule (B III) (donnée initialement par Tetrode sous une forme équivalente) comme ayant la signification suivante : *la densité volumique de moment pondéromoteur propre fictivement appliquée au fluide statistique polarisé par le champ est identiquement nulle*; nous rappellerons plus bas, au numéro **21**, que cette circonstance diffère de celle qui se rencontre en Théorie électromagnétique classique des milieux polarisés.

Prenons maintenant la relation (B I). Dans un « milieu classique », sans spin, la trace du tenseur inertique T^{kl} n'est autre, au facteur $-c^2$ près, que la densité de masse propre m_0. *Par définition*, ce résultat peut être conservé en théorie des milieux doués de spin (Chap. II, n° **13**); la relation considérée donne alors pour expression de la densité de masse propre en Théorie de Dirac

(63 B)	Densité de masse propre.......	$\rho_0 = m_0\, i(\omega_1) = -m_0(\psi^* \gamma^4 \psi)$;

ce résultat, bien connu, se trouve ainsi justifié d'une manière élégante.

Les trois relations (B II), (B IV) et (B V) (Uhlenbeck et Laporte) restent malheureusement sans interprétation, de même que les tenseurs (ω_2), $\{U_1^i\}$ et $\{U_2^i\}$(1).

19. Extension aux Théories du Photon et du Graviton des definitions et relations (59), (60), (61). — La Théorie du Photon de M. L. de Broglie et la Théorie du Graviton de Mme M. A. Tonnelat font intervenir deux catégories distinctes de grandeurs tensorielles densitaires. La première se rapporte à l'élément proprement original de ces Théories, savoir la création du champ électromagnétique ou gravifique par transition du corpuscule entre l'état $\Phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$ et un « état d'annihilation » Φ^0; ces grandeurs ne sont pas celles que nous voulons étudier ici. Les grandeurs densitaires de la seconde catégorie, dont quelques-unes seulement ont été physiquement prises en considération, sont attachées à la propagation du fluide corpusculaire statistique; il s'agit, par exemple, du quadrivecteur densité de courant-présence (j^l), du quadrivecteur densité de spin σ^l, et du tenseur inertique « corpusculaire » T^{kl}; ces grandeurs, tout à fait analogues à celles qu'on considère en Théorie de Dirac, sont celles dont nous voulons maintenant dire quelques mots.

Le *photon* et le *graviton* sont des cas particuliers de corpuscules obtenus par fusion de n corpuscules de Dirac, correspondant aux valeurs $n = 2$ et $n = 4$. D'une manière générale, les équations fondamentales du « corpuscule n » dites, avec M. L. de Broglie, « du type I », comprennent n systèmes de 4^n équations du type diracien; chacun de ces systèmes utilise un jeu de 4 matrices $\mathcal{A}_\nu^i$, de rang 4^n, $(i = 1, 2, 3, 4;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$ satisfaisant aux relations fondamentales (11) de Dirac; de plus, pour $\mu \neq \nu$, toute matrice $\mathcal{A}_\mu^i$ commute avec toute matrice $\mathcal{A}_\nu^j$ (2). Dans ces conditions, il est clair

---

(1) Le quadrivecteur $\iiint (\omega_1)\, \delta u^i \simeq \iiint \{T_j^i\}\, \delta u^i$, calculé sur une hypercloison du genre espace, est homogène à une impulsion-masse $\iiint T^{ij}\, \delta u_j$; appelons-le *fausse impulsion-masse*, et prenons l'intégrale $\iiiint \{U_{(1)}^i\}[dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4]$ dans le volume d'Univers limité par deux hypercloisons « à temps constant » infiniment voisines 1 et 2 et par l'hyperparoi d'un tube de courant; d'après (B II), cette intégrale est égale, à un facteur près, à l'intégrale $\iiint \rho_0\, \delta u^i$ étendue au contour du volume précédent. Comme la portion d'intégrale triple correspondant aux hypercloisons représente la *variation de fausse-impulsion-masse* lorsqu'on passe de l'état 1 à l'état 2, nous pouvons interpréter, à un facteur près, le quadrivecteur $\{U_{(1)}^i\}$ comme une *densité volumique de fausse force pondéromotrice;* d'une maniere analogue, la portion d'intégrale triple correspondant à l'hyperparoi permet d'introduire une *fausse force pondéromotrice superficielle.*

(2) L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin*, p. 138 et sq.

qu'en posant

$$(64_1) \qquad \boxed{\mathfrak{a}_\nu^u = i\, a_\nu^u\, a_\nu^4.} \qquad \boxed{\mathfrak{a}_\nu^4 = a_\nu^4,}$$

puis [1]

$$(64_2) \qquad \boxed{\Phi^\times = i\, \Phi^+ a_1^4 a_2^4 \ldots a_n^4,}$$

on trouvera, pour l'écriture du « système I » et du « système associé », les mêmes avantages de symétrie relativiste qu'avec l'écriture de Gordon-Pauli en Théorie de l'Électron; la définition généralisée des tenseurs diraciens (59) et des tenseurs schrödingeriens (60) [2] devra être la suivante : dans chaque expression (59) ou (60), on remplacera $\psi^\times$ par le $\Phi^\times$ qui vient d'être défini, et chaque γ^i par la *somme normée*.

$$(64_3) \qquad \boxed{a^i = \frac{1}{\nu} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu^i;}$$

le coefficient physique restera le même qu'en Théorie de Dirac [3]. On vérifie sans peine que cette définition est bien celle qui conduit aux expressions particulières données par M. L. de Broglie en Théorie du Photon [4] et par M^me^ M. A. Tonnelat en Théorie du Graviton [5]. Cela étant, il est clair que le système des dix relations (61) reste valable; il suffit de reprendre textuellement les calculs du n° **17**, en opérant, à l'aide des « équations I » et de leurs associées, sur chaque sous-corpuscule isolément, puis d'additionner les résultats.

Il est intéressant d'examiner, à la lumière de ce qui précède, le problème posé par les définitions des divers *tenseurs densité d'impulsion-énergie* considérés par ces Théories. Tout d'abord, il résulte de l'ensemble de ce que nous avons dit que, selon nous, il ne convient pas de symétriser l'expression du tenseur inertique dit « corpusculaire », qui appartient à la famille précédente.

---

(1) Nous considérons toujours les composantes du Φ et du Φ^* comme les éléments de deux matrices adjointes.

(2) L'introduction des *termes de potentiel* dans les équations du corpuscule fondu n'est pas toujours exempte de difficultés. Quoi qu'il en soit, ce que nous disons vaudra pour le *corpuscule libre*, cas où les tenseurs schrödingeriens se réduisent à leur premier terme.

(3) Exception faite pour le *quadrivecteur densité de courant-présence* (j^l), on voit mal quelle signification physique pourraient avoir les tenseurs (59 A) ou (60 A) dans le cas du corpuscule non chargé; en Théorie de Dirac, la charge e est en facteur dans les expressions physiques de tous ces tenseurs (équ. 62 A).

(4) *Mécanique ondulatoire du Photon*, p. 173, 185, 187, équ. (2), (46), (52).

(5) *Étude de la Particule de Spin 2*, p. 197 et 200 (*Ann. de Physique*, **17**, 1942).

L'expression de ce tenseur doit, nous semble-t-il être donnée sous la forme

$$\boxed{T^{ij} = \frac{ich}{4\pi}\Phi^{\times}\left\{\frac{1}{n}[\partial^{i}]\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a^{j}_{\nu}\right\}\Phi,} \tag{65}$$

l'opérateur { }, partie différentiel et partie matriciel, agissant à la fois à droite et à gauche. Une remarque essentielle est que *l'expression du tenseur* T^{ij} *est symétrique par rapport à l'indice* ν, *c'est-à-dire par rapport aux sous-corpuscules constituants.*

A côté du tenseur corpusculaire, dont la définition fait intervenir les opérateurs différentiels, la Théorie générale de Fusion introduit d'autres tenseurs densité d'impulsion-énergie, en nombre croissant avec celui des sous-corpuscules fondus, dans la définition desquels n'interviennent pas les opérateurs différentiels, mais seulement les matrices a (¹). Par exemple, on définit en Théorie du Photon un tenseur « maxwellien », dont l'expression est

$$M^{ij} = m_0 c^2 . \Phi^{\times}\left\{\frac{1}{C^{2}_{2n}}\sum_{\mu \neq \nu} a^{i}_{\mu} a^{j}_{\nu}\right\}\Phi, \tag{65'}$$

expression symétrique, on le voit, par rapport aux deux jeux d'indices i et μ; cette double symétrie se retrouve dans tous les tenseurs inertiques « du type M » définis par la Théorie générale de fusion. Il est clair que la symétrie en μ, ν, . . . de ces tenseurs, c'est-à-dire leur symétrie, nécessaire *a priori*, par rapport aux sous-corpuscules constituants, entraîne obligatoirement leur symétrie en $i, j, \ldots$; il ne saurait donc être question de « désymétriser » l'expression de ces « tenseurs M », ce qui peut être une raison de penser que leur interprétation physique est moins directe que celle du tenseur « corpusculaire » T^{ij}.

Dans le cas d'une superposition d'ondes planes monochromatiques, on sait que le tenseur corpusculaire est *intégralement équivalent* aux tenseurs « du type M » (²). Ce résultat n'est pas altéré lorsqu'on remplace le tenseur corpusculaire symétrisé par le tenseur asymétrique (65), puisque ce dernier tenseur redevient symétrique dans le cas considéré (³).

(¹) *Mécanique ondulatoire du Photon*, p. 189, équ. (60); *Étude de la Particule de Spin* **2**, p. 200; *Théorie générale des particules à spin*, p. 154.

(²) *Mécanique ondulatoire du Photon*, p. 190; *Étude de la Particule de Spin* **2**, p. 201; *Théorie générale des particules à spin*, p. 155.

(³) *Voir* ci-après, n° **26**.

CHAPITRE IV.

ETUDE DU FLUIDE STATISTIQUE FICTIF DE LA THEORIE DE DIRAC (*suite*).

20. Dans le présent Chapitre, nous examinons comment se fait, sur un certain nombre de points particuliers, le raccord des propriétés du fluide statistique fictif de la Théorie de Dirac avec celles d'un milieu continu classique doué de polarisation électromagnétique et de polarisation dynamique au sens de notre Chapitre II. Les résultats obtenus sont parfois ambigus, ou même contradictoires; mais, pour certaines raisons que nous indiquons au n° **21**, ce fait n'est pas surprenant, et l'on devait s'y attendre *a priori*.

Par exemple, des considérations d'ordre purement électromagnétique conduisent nettement à assimiler le courant de Dirac au *courant électromagnétique total*, ce qui est conforme à la terminologie de Darwin et de Gordon. On sait que, dans l'exemple du *globule de Darwin*, le courant de Gordon apparaît comme un courant de translation (n° **22**); mais, comme nous allons le dire dans un instant, cette conception ne paraît pas susceptible d'extension à des cas plus généraux, en sorte que le qualificatif *de convection* que Gordon applique à son courant soulève quelques difficultés.

En effet, des arguments cinématiques et dynamiques convergents (ces derniers tirés de notre Chapitre II) conduisent, de leur côté, à faire assimiler le courant de Dirac au *courant cinématique* d'un fluide habituel (n^{os} **25** et **26**). Il y a là, nous semble-t-il, un paradoxe, qui pourrait n'être pas sans rapports avec d'autres paradoxes signalés par divers auteurs, touchant l'étude, même préquantique, du magnétisme.

Nous donnons, au n° **23**, le calcul des deux divergences du tenseur inertique de Tetrode, suivant la méthode même de l'auteur; et en même temps, celui des deux divergences de notre tenseur électromagnétique asymétrique S^{kl}. On sait que le double résultat de Tetrode converge avec la formule d'Électrodynamique de Lorentz, et que c'est précisément ainsi que Tetrode a justifié l'interprétation de son tenseur T^{kl} comme *inertique;* en réalité, la discussion de la question montre que le raccord avec les idées classiques ne se fait pas d'une manière complète, en sorte que la convergence en question semble assez formelle (n° **25**). Ce désaccord latent de la Théorie de Dirac avec l'Électrodynamique classique apparaît plus nettement encore dans la question des moments pondéromoteurs propres (n° **24**).

On sait que Pauli a profité du fait que les deux divergences du tenseur T^{kl} sont égales pour symétriser *a posteriori* ce tenseur, opération qui, nous l'avons dit, paraît contestable du point de vue des Principes quantiques généraux (n° **8**), et aussi de celui de la théorie des milieux doués de spin (n° **12**, 8°); en tous cas, l'on peut dire que le fait invoqué par Pauli s'interprète aussi bien comme une dispense d'avoir à symétriser T^{kl}. A la fin du n° **26**, nous récapitulons l'ensemble des arguments rencontrés au cours de l'Ouvrage, et d'après lesquels le « vrai » tenseur inertique de la Théorie de Dirac nous paraît être, non le tenseur symétrisé de Pauli, mais bien le tenseur asymétrique initial de Tetrode.

I. — Sur les rapports de la théorie de Dirac avec l'électromagnétisme classique des milieux polarisés.

21. Rappel de l'Électromagnétisme classique. Définition de l'Électromagnétisme selon Dirac. — On sait que tout l'Électromagnétisme et toute l'Électrodynamique classiques des milieux polarisés dérivent des trois groupes d'équations de base indépendantes suivantes

$$\text{[I]}\quad \partial_k E^{ik} = 0, \qquad \text{[II]}\quad \partial_k F^{ik} = j^i, \qquad \text{[III]}\quad f^i = H^{ik} j_k;$$

le tenseur antisymétrique E^{ik}, dit quelquefois *champ fin*, dont H^{ik} est le dual, contient le *champ électrique* E^{uv} et l'*induction magnétique* E^{u4}, tandis que le tenseur antisymétrique F^{ik} contient le *champ magnétique* $\mathfrak{H}^{uv}$ et l'*induction électrique* $\mathfrak{H}^{u4}$; il est regrettable que la terminologie consacrée par l'usage rende difficile la désignation globale des tenseurs E^{ik} (ou H^{ik}) et F^{ik}. Enfin, j^i est le quadrivecteur *densité de courant-charge totale*, et f^i le quadrivecteur *densité de force-puissance totale* qui lui est appliqué par le *champ fin* H^{ik}.

Le tenseur F^{ik} et, corrélativement, le quadrivecteur j^i se décomposent sous la forme

$$\text{[IV]}\quad F^{ik} = H^{ik} + m^{ik}, \qquad \text{[V]}\quad j^i = k^i + \partial_k m^{ik};$$

le tenseur antisymétrique m^{ik} est la *densité de moment magnéto-électrique* du milieu considéré, $\partial_k m^{ik}$ la *densité de courant-charge de polarisation*, et k^i la *densité de courant-charge de convection* (¹). Dans le cas d'un milieu *vraiment continu*, il semble naturel d'admettre pour ce dernier quadrivecteur l'écriture bien connue

$$k^u = qv^u, \qquad k^4 = icq,$$

d'après laquelle il sera *du genre temps* (²). Au contraire, le quadrivecteur j^i est d'un genre *a priori* quelconque.

(¹) Pour tout ceci, *voir* par exemple R. Becker, *Théorie des Électrons*, p. 121, 124, 359, 365.

(²) *La Relativité restreinte*, p. 36. — R. Becker considère, comme H. A. Lorentz, le cas d'un nuage de corpuscules électrisés (corpuscules ponctuels classiques, sans spin); en ce cas, le courant de convection *moyen* n'est pas du genre temps, à cause de l'existence de charges des deux signes. Dans le présent travail, nous nous limitons systématiquement au cas des milieux *vraiment continus* (*voir* notamment p. 36 et p. 73).

Les équations [I], indépendantes des propriétés du milieu matériel, sont des équations de condition pour le champ ; sous des conditions très larges, elles sont équivalentes aux équations suivantes, qui traduisent l'existence d'un potentiel-vecteur

[I′] $$H^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i.$$

Les équations [II] sont l'expression d'une *corrélation électro-magnétique* entre le champ et le milieu ; physiquement, on considère que cette corrélation traduit la création du champ par une distribution de courant et de polarisation donnée *a priori*. Si l'on impose au champ la condition supplémentaire de Lorentz $\partial_i A^i = 0$, les équations [II] peuvent être mises sous la forme équivalente $\partial^l_l A^k = j^k$. Enfin, les équations [III] sont l'expression d'une *corrélation électro-dynamique* entre le champ et le milieu, traduisant l'action sur le milieu du champ donné *a priori*.

Parmi les conséquences des équations de base qui nous intéressent, citons les *équations de continuité pour les courants* j^i et k^i

[VI] $$\partial_i j^i = 0, \qquad \partial_i k^i = 0,$$

ainsi que l'expression de la *densité de moment pondéromoteur d'Univers propre* appliquée au milieu polarisé par le champ régnant (¹)

[VII] $$\mu^{ij} = -\frac{1}{2}\left[H^{ik} m^j_{.k} - H^{jk} m^i_{.k}\right] + \frac{1}{2}\left[E^{ik} \overline{m}^j_{.k} - E^{jk} \overline{m}^i_{.k}\right].$$

Cela étant, considérons l'ensemble des équations de la Théorie de Dirac proprement dite (11) et (14), et désignons-le ici par le symbole [II D]. Ces équations, comme les [II], traduisent l'existence d'une corrélation électro-magnétique entre le champ ambiant et l'électron (ou, pour nous, entre le champ et le fluide électronique statistique) ; mais, comme on néglige ici la réaction de l'électron sur le champ, il s'agit de l'action d'un champ donné *a priori* sur l'électron qui y est plongé. Il est facile de vérifier directement que *les équations* [II] *et* [II D] *sont incompatibles*, ce qui n'a rien d'étonnant si l'on se rappelle que les [I] et [II] d'une part, et les [II D] d'autre part, correspondent à des cas limites distincts des équations générales d'interaction photon-électron de M. L. de Broglie (²).

(¹) En écriture vectorielle d'espace, on a, les notations étant classiques, $\vec{\mu} = -\vec{H} \wedge \vec{\mathcal{H}} - \vec{E} \wedge \vec{\mathcal{E}}$. Cette expression, et celle de la *densité d'énergie* $\varpi = \frac{1}{2}\left(\vec{E}.\vec{D} + \vec{H}.\vec{B}\right)$, apparaissent comme des conséquences de l'expression, *asymétrique*, du tenseur de Maxwell étendue au cas des milieux polarisés

$$M^{ij} = -\frac{1}{2}\left(H^{ik} F^j_{\ k} + \overline{F}^{ik} \overline{H}^j_{\ k}\right).$$

(²) *La Mécanique ondulatoire du Photon*, t. II, p. 132-136.

A elles seules, les équations de la Théorie de Dirac ne suffisent pas à constituer un Électromagnétisme complet, comprenant notamment une Électrodynamique. Mais on sait que, dès ses débuts, la Théorie de Dirac a fait appel à la formule classique [I′] pour établir l'existence d'un magnétisme propre de l'électron ([1]), et que Tetrode a fait intervenir cette même formule dans le calcul des deux divergences de son tenseur inertique, calcul qui l'a conduit à retrouver la formule d'Électrodynamique [III] en Théorie de Dirac ([2]). On peut donc dire que l'*Électromagnétisme selon Dirac* et l'Électromagnétisme classique utilisent en commun les équations de base [I], et diffèrent par les équations de base incompatibles [II] et [II D]; les équations [III], qui constituaient un élément de base indépendant de la Théorie classique, se retrouvent comme *conséquences de l'ensemble des équations* [I] *et* [II D], résultat vraiment remarquable et, soit dit en passant, compatible avec le fait que les [II D] traduisent l'action sur l'électron du champ donné *a priori*. Quant à la juxtaposition des [I] et des [II D] pour former une théorie électromagnétique, on peut bien dire que, toute légitime qu'elle soit comme non contradictoire, elle paraît *a priori* arbitraire.

Un autre fait remarquable *a posteriori* est celui-ci : bien que fort différentes entre elles, et même incompatibles, *les équations* [II] *et* [II D] *entraînent pour le courant* j^i *la même équation de continuité* [VI_1]; comme, par ailleurs, la formule de décomposition [V] se retrouve en Théorie de Dirac comme conséquence des [IID] (équ. 61 A III), *le courant* k^i *de Gordon est lui aussi conservatif* [équ. VI_2] ([3]).

Par contre, il résulte de ce que nous avons dit au Chapitre III que l'expression de la densité de moment pondéromoteur fictivement appliquée au fluide statistique par le champ est nulle, résultat qui diffère de celui exprimé par la formule classique [VII].

Finalement, l'on voit que l'Électromagnétisme classique et ce que nous avons appelé l'*Électromagnétisme selon Dirac* sont deux théories *a priori* incompatibles; elles contiennent cependant en commun, comme élément de base indépendant, les équations dites *du premier groupe* de Maxwell-Lorentz. Quelques-unes des relations conséquences sont, comme on devait s'y attendre, fort différentes les unes des autres; mais il se trouve que, par une circonstance assez surprenante, certaines des plus importantes relations conséquences sont au contraire, au moins formellement ([4]), identiques dans les deux Théories, dont nous allons donc pouvoir poursuivre la comparaison.

([1]) *Voir* par exemple *l'Électron magnétique*, p. 241, équ. (28).

([2]) *Der Impuls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie* (*Zeits. f. Phys.*, **49**, 1928, p. 860).

([3]) Le même raisonnement appliqué à la relation (61 A IV) montre que le quadrivecteur de courant magnétique l^i est conservatif.

([4]) *Voir* ci-après, fin du n° 25.

22. Sur le courant électrique total de la Théorie de Dirac. — Disons ici, en anticipant sur le paragraphe II, que, cinématiquement et dynamiquement, le courant j^i de Dirac, qui est du genre temps, doit être assimilé au *courant cinématique* ou *vrai courant* du fluide statistique. Si donc la Théorie de Dirac devait se raccorder à la Théorie classique sur ce point particulier, il semblerait que le courant de Dirac j^i devrait coïncider avec le *courant électrique de convection*, et le courant de Gordon k^i avec le *courant électrique total* du fluide statistique. Or, nous allons voir, au contraire, que plusieurs arguments importants conduisent à assimiler le *courant de Dirac* $j^i = \psi^\times \gamma^i \psi$ au *courant électrique total.*

Tout d'abord, on sait que la charge $-e$ (UES.CGS) de l'électron doit être calculée par intégration du courant de Dirac, en vertu de la condition de normalisation (¹)

$$\iiint \psi^+ \psi . \partial v = 1 \qquad \text{ou} \qquad -e \iiint \psi^+ \psi . \partial v = -e;$$

or, il est bien clair que la charge $-e$ mesurée est la charge totale (charge vraie + charge de polarisation), ce qui montre que j^i doit être considéré comme le courant total (²). En second lieu, la formule de Tetrode

$$f^i = \partial_k T^{ik} = \partial_k T^{ki} = H^{ik} j_k,$$

que nous établirons au numéro suivant montre clairement, lorsqu'on la rapproche de la formule classique [III], que j^i doit être assimilé au courant total. Enfin, il n'est pas jusqu'à la théorie du globule sphérique de Darwin qui, elle aussi, ne paraisse jouer dans le même sens.

On sait que les équations du globule de Darwin sont une solution des équations de Dirac valable en l'absence de champ et à l'approximation non relativiste. On constate que le courant de Dirac se laisse alors décomposer en un premier terme orthogonal aux hyperplans de phase, donc ici du genre temps, et en un second terme qui n'est autre que le courant de polarisation; on vérifie sans peine que, comme l'exige la formule générale [62(A)II] le premier terme en question est le courant de Gordon (³). Par ailleurs,

---

(¹) L'hyperplan d'intégration à temps constant coupe une fois et une seule les lignes de courant de Dirac, qui sont du genre temps.

(²) Le quantum $-e$ étant une constante universelle, il conviendrait de dire, en terminologie classique, que les variations éventuelles de la *charge vraie* et de la *charge de polarisation* se compensent.

(³) *Voir*, par exemple, l'*Électron magnétique*, p. 170. A l'approximation non relativiste et avec les α^i particuliers de Dirac, le courant de Gordon a pour expression $-\psi_3^*[\partial^u]\psi_3 - \psi_4^*[\partial^u]\psi_4$ et par conséquent, avec les notations (6) et (10) du passage cité, $\rho \vec{v}$.

en divisant les trois termes de cette relation par $\psi^+\psi$, on fait apparaître *fictivement* trois vitesses correspondantes; on trouve que la vitesse $\vec{u}$ associée au courant de Dirac est la somme de la vitesse de groupe $\vec{v}$ des plans de phase et d'une vitesse $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ correspondant à une rotation d'ensemble du globule ([1]). Dans ces conditions, il est tout à fait naturel de dire, avec Darwin, que le *courant total* j^i $\left(\text{ou } \vec{u}\right)$ est la somme d'un *courant de translation* k^i $\left(\text{ou } \vec{v}\right)$ et d'un *courant complémentaire* qui, au point de vue électromagnétique, correspond à la polarisation et, au point de vue cinématique, au tourbillonnement du globule. En somme, dans cet exemple, on assimile la notion de *courant cinématique total* à celle de *courant électromagnétique total.* Mais, dans le cas général, le courant k^i de Gordon n'étant pas nécessairement du genre temps, il paraît difficile de l'assimiler à un « courant de translation »; le « courant cinématique total » j^i, au contraire, est nécessairement du genre temps, ce qui permet de le considérer toujours (et particulièrement ici) comme le *courant de convection cinématique fin.*

La conclusion de ce qui précède nous semble finalement la suivante : *En Théorie de Dirac, le courant électromagnétique total coïncide avec le courant cinématique* (*fictif*) *du fluide statistique,* circonstance qui nous paraît « révolutionnaire » par rapport à la Théorie classique ([2]). Le courant de Gordon serait alors sans équivalent strict en Théorie électromagnétique classique. D'ailleurs, d'après ce qui fut dit au numéro précédent, le fait brutal d'un « conflit » entre l'Électromagnétisme classique et « l'Électromagnétisme selon Dirac » n'est pas surprenant, et l'on devait s'y attendre *a priori.*

25. Calcul des deux divergences des tenseurs asymétriques $\{T^{ik}\}$ et $\{S^{ik}\}$. — Les différences de deux divergences considérées sont fournies d'une manière très simple par les relations [(61) B III] et [(61) A III]; en effet, tenant compte de ce que les divergences du dual d'un rotationnel sont identiquement nulles, et aussi, dans le second cas, de la définition du quadrivecteur $\{l^i\}$ d'après [(61) A IV], les relations invoquées permettent d'écrire

$$(66) \qquad \boxed{\partial_j\{T^{ji}\} - \partial_j\{T^{ij}\} = 0,} \qquad \boxed{\partial_j\{S^{ji}\} - \partial_j\{S^{ij}\} = 2\mu_0\{l^i\}.}$$

([1]) *Op. cit.*, p. 178. Le fait de diviser par $\psi^*\psi = -i\psi^\times\gamma^4\psi$ pour faire apparaître la vitesse $\vec{u}$ revient à *postuler* que le quadricourant de Dirac peut être mis sous la forme $\vec{j} = \rho\vec{u}$, $j^4 = ic\rho$; quant aux vitesses $\vec{v}$ et $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$, leur introduction par le processus indiqué paraît un peu artificielle.

([2]) Ce paradoxe pourrait n'être pas sans rapports avec d'autres paradoxes signalés par plusieurs auteurs. Citons, par exemple, l'absence de mutuelle-énergie entre les courants et les aimants permanents (P. Janet, *Leçons d'Électrotechnique générale*, t. 1, p. 84).

Il suffit donc de calculer la plus simple des deux divergences de chaque tenseur, qui se trouve être celle relative au *second indice* (indice matriciel). C'est précisément de cette manière que, dans son Mémoire fondamental déjà cité, Tetrode a calculé les deux divergences de T^{ij} (¹).

Pour la *partie schrödingerienne* $\{\ \ \}'$ des deux tenseurs considérés, on peut écrire.

$$[\mathrm{T}] \qquad \partial_j\{T^{ij}\}' = \partial_j\{\psi^\times[\partial^i]\gamma^j\psi\}$$
$$= \left(\psi^\times \underset{\rightarrow}{\partial^i}.\gamma^j \underset{\rightarrow}{\partial_j}\psi + \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_j}\gamma^j.\underset{\rightarrow}{\partial^i}\psi\right) - \left(\psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial^i}.\gamma^j \underset{\rightarrow}{\partial_j}\psi + \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_j}\gamma^j.\underset{\leftarrow}{\partial^i}\psi\right),$$

$$[\mathrm{S}] \qquad \partial_j\{S^{ij}\}' = \partial_j\{\psi^\times[\partial^i]\overline{\gamma}^j\psi\}$$
$$= \left(\psi^\times \underset{\rightarrow}{\partial^i}.\overline{\gamma}^j \underset{\rightarrow}{\partial_j}\psi + \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_j}\overline{\gamma}^j.\underset{\rightarrow}{\partial^i}\psi\right) - \left(\psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial^i}.\overline{\gamma}^j \underset{\rightarrow}{\partial_j}\psi + \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_j}\overline{\gamma}^j.\underset{\leftarrow}{\partial^i}\psi\right).$$

Dans [T], les quatre expressions $\gamma^j \underset{\rightarrow}{\partial_j}\psi$, ... seront fournies par les équations (56) de Dirac; de même, dans [S], les quatre expressions $\overline{\gamma}^j \underset{\rightarrow}{\partial_j}\psi$, ... seront fournies par les transformées

$$\left\{\overline{\gamma}_i\left(\underset{\rightarrow}{\partial^i} - i\varepsilon A^i\right) + \mu_0\overline{\gamma}\right\}\psi = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi^\times\left\{-\left(\underset{\leftarrow}{\partial^i} + i\varepsilon A^i\right)\overline{\gamma}_i - \mu_0\overline{\gamma}\right\} = 0,$$

des équations de Dirac, qui nous ont servi à établir les $[\gamma_{uvw4}]$ (p. 68). *En l'absence de quadripotentiel extérieur*, il vient ainsi

$$\partial_j\{T^{ij}\}' = (0) - (0) = 0,$$
$$\partial_j\{S^{ij}\}' = \left(-2\mu_0\psi^\times\overline{\gamma}\underset{\rightarrow}{\partial^i}\psi\right) - \left(-2\mu_0\psi^\times\underset{\leftarrow}{\partial^i}\overline{\gamma}\psi\right) = -2\mu_0\{l^i\}',$$

c'est-à-dire

$$\partial_j\{T^{ij}\} = 0, \qquad \partial_j\{S^{ij}\} = -2\mu_0\{l^i\}.$$

En présence d'un quadripotentiel extérieur A^i, le principe du calcul est le même, mais il faut tenir compte de la loi de commutation des opérateurs $\underset{\rightarrow}{\partial^i}$, $\underset{\leftarrow}{\partial^i}$ et A^j; d'après une remarque classique en Mécanique ondulatoire, on a, ∂^i désignant l'*opérateur désamorcé* qui n'agit plus qu'à sa droite immédiate

$$\underset{\rightarrow}{\partial^i}A^j - A^j\underset{\rightarrow}{\partial^i} = \partial^i A^j - A^j\left(\underset{\rightarrow}{\partial^i} - \underset{\rightarrow}{\partial^i}\right) = \partial^i A^j,$$

et de même

$$A^j\underset{\leftarrow}{\partial^i} - \underset{\leftarrow}{\partial^i}A^j = \partial^i A^j.$$

Cela étant, la première parenthèse de $\{T^{ij}\}$ donne

$$i\varepsilon\,\psi^\times\left(\underset{\rightarrow}{\partial^i}A^j - A^j\underset{\rightarrow}{\partial^i}\right)\gamma_j\psi = i\varepsilon(\psi^\times\gamma_j\psi)\,\partial^i A^j.$$

(¹) *Der Impuls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie des Elektrons* (*Zeitschr. f. Phys.*, **49**, 1928, p. 858). La formule (16) de Tetrode est équivalente à notre [62 (B) III].

La seconde parenthèse donne le même résultat en module, et en signe aussi en vertu d'un double changement de signe dans (67_1) et dans les (56). Le calcul relatif à $\{S^{ij}\}$ est analogue, et il vient finalement

$$[67'] \qquad \partial_k \{T^{ik}\}' = 2i\varepsilon(j_k)\,\partial^i A^k, \qquad \partial_k\{S^{ik}\}' = -2\mu_0\{l^i\}' + 2i\varepsilon(\sigma_k)\,\partial^i A^k.$$

Calculons de même les divergences des *termes d'interaction* $\{\quad\}''$ de $\{T^{ik}\}$ et $\{S^{ik}\}$; compte tenu, d'une part de l'équation de continuité de Dirac [(61) A I], d'autre part de la relation d'Uhlenbeck et Laporte [(61) B V], il vient

$$[67''] \qquad \begin{cases} \partial_k\{T^{ik}\}'' = -2i\varepsilon\,\partial_k\{A^i(j^k)\} = -2i\varepsilon(j_k)\,\partial^k A^i, \\ \partial_k\{S^{ik}\}'' = -2i\varepsilon\,\partial_k\{A^i(\sigma^k)\} = -2\mu_0\{l^i\}'' - 2i\varepsilon(\sigma_k)\,\partial^k A^i. \end{cases}$$

Finalement, ajoutant membre à membre les [67'] aux [67''], on voit apparaître le rotationnel de A^i; tenant alors compte de la *définition*

$$(68) \qquad \boxed{H^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i}$$

du champ régnant à partir du potentiel, ainsi que des (66) démontrées en commençant, on peut écrire

$$(67) \qquad \begin{cases} \boxed{\partial_k\{T^{ki}\} = \partial_k\{T^{ik}\} = -2i\varepsilon H^{ki}(j_k),} \\ \boxed{\partial_k\{S^{ki}\} = \partial_k\{S^{ik}\} + 2\mu_0\{l^i\} = -2i\varepsilon H^{ki}(\sigma_k).} \end{cases}$$

Dans ces formules très analogues, les tenseurs $\{S^{ik}\}$ et (j_k) ont une interprétation électromagnétique, les tenseurs $\{T^{ik}\}$ et (σ_k) une interprétation mécanique; nous voyons donc que, conformément à ce qui a été dit précédemment au sujet du quadripotentiel A^i, le champ H^{ik} joue un rôle parfaitement symétrique par rapport aux propriétés électromagnétiques et mécaniques, en sorte qu'il n'y a aucune raison de le qualifier plus spécialement « électromagnétique ».

Remarque. — Donnons quelques indications sur la manière de calculer directement les divergences de $\{T^{ik}\}$ et $\{S^{ik}\}$ sur le premier indice (indice différentiel). Pour la *partie schrödingerienne* $\{\quad\}'$ on a, par exemple,

$$\partial_i\{T^{ij}\}' = \partial_i \psi^\times [\partial^i]\gamma^j\psi = \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_i}\gamma^j \underset{\rightarrow}{\partial^i}\psi - \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial^i}\gamma^j \underset{\rightarrow}{\partial_i}\psi + \psi^\times\gamma^j \underset{\rightarrow}{\partial_i^i}\psi - \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_i^i}\gamma^j\psi,$$

en sorte que, les deux premiers termes se détruisant, il reste

$$\partial_i\{T^{ij}\}' = \psi^\times\gamma^j \underset{\rightarrow}{\partial_i^i}\psi - \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_i^i}\gamma^j\psi \qquad \text{et} \qquad \partial_i\{S^{ij}\}' = \psi^\times\bar{\gamma}^j \underset{\rightarrow}{\partial_i^i}\psi - \psi^\times \underset{\leftarrow}{\partial_i^i}\bar{\gamma}^j\psi;$$

les symboles $\underset{\rightarrow}{\partial_i^i}$ et $\underset{\leftarrow}{\partial^i}$ désignent les laplaciens agissant vers la droite et vers la gauche. Le calcul direct des divergences considérées faisant intervenir des dérivées secondes, il faut, pour l'achever, avoir recours à l'équation du second ordre conséquence des équations de Dirac. Dans le cas général où le quadripotentiel A^i n'est pas nul, cette équation contient en facteur, comme on sait, le champ H^{ik} défini d'après (68), ainsi, du reste, que le quadripotentiel A^i (1); exprimant, à l'aide de cette équation et de sa *transformée de Gordon-Pauli*, $\overrightarrow{\partial^i_i}\psi$ et $\psi^\times\overleftarrow{\partial^i_i}$, on voit apparaître les seconds membres des (67), ainsi que les expressions $\partial_i\{^{ij}\}''$.

24. Rapports de la Theorie de Dirac avec l'Électrodynamique classique. — La formule (67_2), où figure le tenseur $\{S^{ik}\}$ de signification encore inconnue, ne paraît pas interprétable en l'état actuel de ce que nous savons. Au contraire, la formule (67_1) apparaît comme identique à la formule d'Électrodynamique classique de Lorentz; pour le vérifier, il suffit de remplacer ε par sa valeur d'après (57), et de rétablir les coefficients physiques $\frac{ich}{4\pi}$ du tenseur $\{T^{ik}\}$ et ec du quadrivecteur j^k [équ. (62_A) et (62_B)]; il vient

$$\partial_k T^{ki} = \partial_k T^{ik} = -H^{ik} j_k, \tag{69}$$

ce qui, en vertu de la formule de Dynamique (35), est bien la formule de Lorentz (2). On sait que, dans son Mémoire cité, Tetrode s'est servi de cette formule (69) pour justifier l'interprétation de T^{ik} comme tenseur inertique, et pour fixer le coefficient physique $\frac{ich}{4\pi}$ de ce tenseur. Avec la manière de raisonner que nous adoptons dans cet Ouvrage, la formule d'Électrodynamique (69) apparaît au contraire comme une conséquence de la Théorie de Dirac, l'interprétation de T^{ik} et la valeur de son coefficient physique résultant des principes généraux de la Mécanique ondulatoire (n° **8**); ou encore, si l'on préfère, étant rattachées à celles du quadrivecteur σ grâce à notre théorie du Chapitre II [équ. (37') et (63)].

On sait que Pauli a profité du fait que les deux divergences du tenseur T^{ik} sont égales pour symétriser ce tenseur en posant (3)

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{2}(T^{ik} + T^{ki}),$$

définition grâce à laquelle les relations (69) sont conservées pour Θ^{ik}. Nous avons indiqué en note au Chapitre II, et dans le cadre de notre théorie des milieux doués de spin, la signification de cette opération, un peu arbitraire selon nous; ici, remarquons simplement que la définition de Θ^{ik} est plus compliquée que celle de T^{ik}, puisqu'elle contient quatre termes au lieu de deux.

---

(1) L. de Broglie, *l'Électron magnétique,* Chap. X, équ. (6) et (30), pp. 132 et 141.

(2) *La Relativité restreinte,* p. 40.

(3) *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik,* B : *Relativistische Theorien* (*Handb. d. Phys.,* XXIV$_1$, 1933, p. 235).

Enfin, d'après notre théorie dynamique du Chapitre II, et en vertu de la formule (63), la densité de moment pondéromoteur propre fictivement appliquée au fluide statistique par le champ est identiquement nulle, résultat qui diffère de celui exprimé par la formule classique [VII]. Cet exemple de la *densité de moment pondéromoteur propre* nous paraît illustrer ce que nous disions sur la divergence à prévoir entre les propriétés du fluide statistique de la Théorie de Dirac et celles d'un milieu polarisé de l'Électromagnétisme classique.

II. — Sur les deux quadrivecteurs de courant de Dirac et de Gordon, et sur le tenseur inertique asymétrique de Tetrode.

25. Cherchons, pour commencer, comment se présenterait la théorie pseudo-classique d'un milieu continu doué non seulement d'une densité massique et d'une densité de charge électrique, mais aussi d'une *densité de moment cinétique propre* σ^i et d'une *densité de moment magnéto-électrique* m^{ij}. La notion de *vitesse cinématique* ou, ce qui revient au même, celle de *trajectoires d'Univers* du fluide est parfaitement claire, et nous savons, d'après un principe général de la Relativité, que les trajectoires en question doivent être du *genre temps* en chacun de leurs points (¹).

Au point de vue de la Dynamique, et pour un milieu doué de *polarisation dynamique* au sens du Chapitre II, nous avons été amenés à introduire, à côté de la congruence précédente dite *vrai courant*, une seconde congruence, dite *faux courant*, non nécessairement du genre temps, et à définir le *tenseur inertique asymétrique* des milieux doués de spin comme le produit général des deux quadrivecteurs de courant [équ. (39)]; nous avons alors montré que, dans le calcul de l'impulsion-masse finie suivant la formule

$$p^i = \iiint T^{ij}\, \delta u_j,$$

l'indice significatif i doit être celui du *faux courant* (nº **15**). Par ailleurs, nous avions préalablement montré que, pour des raisons d'ordre cinématique, le quadrivecteur *densité de spin* σ^i doit être orthogonal au vrai courant [équ. (33)].

L'Électromagnétisme classique des milieux polarisés prend en considération, lui aussi, deux quadrivecteurs de courant densitaire, tous deux conservatifs. L'un, correspondant au transport de la charge vraie, dit *courant électrique de convection*, est tangent à la congruence des lignes de courant cinématique (²),

(¹) *La Relativité restreinte*, p. 18.

(²) Voir ci-dessus, nº **21**.

donc au *vrai courant* de notre Chapitre II. L'autre, non nécessairement du *genre temps*, dit *courant électrique total*, *est la somme du précédent et d'un courant fictif de polarisation* $\partial_j m^{ij}$; il est évidemment naturel, bien que nullement nécessaire *a priori*, de *postuler* que ce dernier courant doit être tangent à notre congruence de *faux courant* du Chapitre II, paragraphe II.

Examinons maintenant dans quelle mesure ces diverses propriétés se retrouvent, *mutatis mutandis*, en Théorie de Dirac; il est bien entendu que c'est la Théorie de Dirac seule que nous voulons interroger, indépendamment de tout appel à la Relativité classique.

Au point de vue de l'Électromagnétisme, la Théorie de Dirac introduit bien deux quadrivecteurs de courant conservatifs, celui de Dirac et celui de Gordon, respectivement définis, à des facteurs près, suivant

$$(j^i) = \psi^\times \gamma^i \psi, \qquad \{k^i\} = \psi^\times [\partial^i] \psi - 2i\varepsilon A^i . \psi^\times \psi.$$

Au point de vue de la Dynamique, nous nous attendons, d'après notre Chapitre II, paragraphe II, et d'après ce qui vient d'être dit, à retrouver ces deux quadrivecteurs de courant dans l'expression du tenseur inertique asymétrique de Tetrode

$$\{T^{ij}\} = \psi^\times [\partial^i] \gamma^j \psi - 2i\varepsilon A^i . \psi^\times \gamma^j \psi;$$

nous voyons tout de suite que les opérateurs intervenant dans la définition de T^{ij} sont bien ceux que nous espérions, et même que le second terme du tenseur de Tetrode est bien le produit général, dans le rapport $(\omega_1) = \psi^\times \psi$, du courant de Dirac par le second terme du courant de Gordon.

Pour voir si notre formule (39) est satisfaite ou non, il faut examiner si l'expression

$$\psi^\times [\partial^i] \gamma^j \psi . \psi^\times \psi - \psi^\times [\partial^i] \psi . \psi^\times \gamma^j \psi$$

est nulle ou non. La réponse, négative, est fournie par l'identité (51_4) de Kofink, qui donne pour valeurs de cette expression [1]

$$(j_k) . \partial^i (m^{kj}) + (\omega_2) . \partial^i (\sigma^j) = - \partial^i (j_k) . (m^{kj}) - \partial^i (\omega_2) . (\sigma^j).$$

Ainsi, la relation du tenseur de Tetrode aux deux courants de Dirac et de Gordon s'apparente bien qualitativement à celle que nous avions prévue, mais, quantitativement, elle est moins stricte : *le tenseur inertique de Tetrode n'est pas un produit général de deux quadrivecteurs*. Il y a là, en Théorie de Dirac, une nouvelle circonstance fort « révolutionnaire » par rapport aux Théories

---

(1) La même conclusion peut être tirée de l'identité $(43'_2)$, d'après laquelle le produit contracté $T^{ik} j_k$ n'est pas congru seulement au courant k^i de Gordon, mais aussi au *courant magnétique* l^i (p. 61).

classiques : il résulte de ce qui vient d'être dit que l'intégrale $\iiint T^{ij}\delta u_j$ prise sur une hyperparoi de courant cinématique d'Univers n'est plus nulle et, du reste, qu'il n'existe aucune hyperparoi jouissant de cette propriété. Or, la nullité de l'intégrale en question est absolument nécessaire à l'interprétation *classique* des grandeurs f_j (densité de force pondéromotrice), p^i (impulsion-masse finie) et T^{ij} (densité d'impulsion-masse) [1]; il suit de là que l'interprétation de la formule (71) de Tetrode est moins claire qu'il ne paraît d'abord, et qu'on ne peut guère en tirer qu'un argument d'ordre formel.

26. Mais, faisant abstraction de ce dernier groupe de difficultés, il reste permis de se demander dans quelle mesure les propriétés des deux quadrivecteurs j^i et k^i sont conformes à celles que prévoyaient les considérations classiques du numéro précédent.

Au point de vue de la Cinématique, le courant j^i de Dirac est du genre temps, comme le montre l'expression définie positive

$$(j^4) = \psi^\times \gamma^4 \psi = i.\psi^+ \psi,$$

ou encore l'identité (43_2) de Pauli. Comme on ne peut rien dire de tel du courant k^i de Gordon, nous voyons que le courant de Dirac joue fictivement le rôle de *courant cinématique*, ou *courant ordinaire* du fluide statistique.

Au point de vue de la Dynamique, l'identité (47_1) de Pauli montre que le quadrivecteur densité de spin σ^i est orthogonal au courant de Dirac, sans qu'on puisse rien dire de tel pour le courant de Gordon. Par ailleurs, d'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, l'indice muet « virtuel » dans le calcul de l'impulsion-masse moyenne probable est celui de l'opérateur γ^j du courant de Dirac ou, ce qui revient au même, l'indice significatif est celui des opérateurs $[\partial^i]$ et A^i du courant de Gordon [équ. (26) et (27)]. En vertu de ce que nous avons dit au Chapitre II, ces deux critères convergent entre eux, et convergent avec le critère cinématique précédent, pour faire assimiler le courant de Dirac à notre *vrai courant*, ou courant d'Univers au sens ordinaire. Tout va donc bien jusqu'ici, le raccord avec la Théorie pseudo-classique se faisant comme on l'attendait.

Au point de vue de l'Électromagnétisme, nous avons vu au n° **21** qu'il convient d'assimiler le courant de Dirac au *courant électromagnétique total*, alors que, d'après ce qui précède, on s'attendrait à le voir assimiler au *courant électromagnétique de convection*. Nous avons déjà fait remarquer combien paradoxal est ce résultat, et suggéré qu'il pourrait n'être pas sans rapports avec certaines remarques curieuses dues à plusieurs auteurs. Dans ces

(1) *La Relativité restreinte*, n° **23**, p. 50.

conditions, nous voyons mal quel serait l'équivalent classique du courant de Gordon dans une Théorie densitaire cohérente; il ne nous paraît pas qu'une conclusion générale puisse être tirée du fait qu'il se manifeste comme un *courant de translation* dans la Théorie du globule de Darwin.

Conclusion générale relative au tenseur inertique. — De tout un ensemble de faits et de propriétés rencontrés au cours de l'Ouvrage, nous croyons pouvoir conclure formellement que *le vrai tenseur inertique de la Théorie de Dirac n'est pas le tenseur symétrisé* Θ^{ik} *de Pauli, mais bien le tenseur asymétrique initial* T^{ik} *de Tetrode défini suivant* l'équation (26) du Chapitre I. Récapitulons ces faits et propriétés.

1° La définition en question est celle qu'imposent les principes généraux de la Mécanique ondulatoire à partir de la définition (15) du quadri-opérateur d'impulsion-masse inertique (n° **8**).

2° La valeur moyenne probable du moment cinétique *total* exprimée en fonction du tenseur Θ^{ik} de Pauli a, formellement, le type *orbital*; pour décomposer le moment *total* en moment *orbital* et moment *propre*, c'est le tenseur T^{ik} de Tetrode qu'il faut utiliser (n° **12**, 8°).

3° Bien que le rapport du tenseur T^{ik} de Tetrode avec les deux quadrivecteurs de courant k^i et j^k soit moins étroit que celui que nous avions prévu au numéro **13**, la ressemblance qualitative des deux définitions (39) et [(60) B II] est réelle, et nous avons pu l'utiliser dans un raisonnement.

4° Au cours des calculs, c'est toujours le tenseur T^{ik}, jamais le tenseur symétrisé $\Theta^{ik} = \frac{1}{2}(T^{ik} + T^{ki})$ qui apparaît « spontanément » : on le voit à propos des identités (51_1), (51_2), (52_1) et (54) de Kofink; sur les relations [(61) B I] et [(61) B III] de Franz; enfin, sur les calculs qui aboutissent au double résultat (71).

Remarque. — En l'absence de potentiel extérieur, les équations de Dirac admettent comme solution l'onde plane monochromatique; les quadrivecteurs de Dirac et de Gordon étant alors colinéaires entre eux, et colinéaires aux rayons de l'onde, sont tous deux du genre temps; le quadrivecteur impulsion-masse propre de l'électron, alors bien défini et colinéaire aux rayons, est également du genre temps ([1]). Enfin, le tenseur T^{ij} de Tetrode est, dans ce cas particulier, symétrique.

On peut lire ce double groupe de résultats sur les formules [(61) A II] et [(61) B III], les tenseurs densitaires étant constants dans tout l'espace-temps dans le cas de l'onde plane monochromatique ([2]).

([1]) L. DE BROGLIE, *l'Électron magnétique*, p. 162 à 166.

([2]) De la même manière, on peut lire, par exemple, sur les (61), que l'invariant (ω_2) ainsi que les quadrivecteurs $\{l^i\}$ (densité de courant-charge magnétique) et $\{U^i_{(1)}\}$ s'annulent dans le cas de l'onde plane monochromatique.

BIBLIOGRAPHIE.

I. — *Électromagnétisme classique. Relativité restreinte.*

M. von Laue, *La Théorie de la Relativité.* Tome **1** : le Principe de Relativité de la transformation de Lorentz (trad. G. Létang). Gauthier-Villars, 1926.

R. Becker, *Théorie des Électrons* (trad. Ed. Labin), Paris, 1938.

O. Costa de Beauregard, *La Relativité restreinte et la première Mécanique broglienne,* Paris, Gauthier-Villars, 1943.

Sur la théorie des moments cinétiques propres en Relativité restreinte. (*Journ. de Math. pures et appliquées,* **21**, fasc. 3, 1942, p. 267).

Le quadrivecteur densité de moment cinétique propre (*C. R. Acad. Sc.*, **211**, 1940, p. 428).

Le tenseur antisymétrique densité de moment pondéromoteur propre (*C. R. Acad. Sc.*, **211**, 1940, p. 499).

Sur deux questions de Relativité (*C. R. Acad. Sc.*, **213**, 1941, p. 822).

Sur la dynamique des milieux doués d'une densité de moment cinétique propre (*C. R. Acad. Sc.*, **214**, 1942, p. 904).

II. — *Principes généraux de la Mécanique ondulatoire.*

L. de Broglie, *Théorie de la Quantification dans la nouvelle Mécanique,* Paris, 1932.

J. von Neumann, *Die mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Berlin, 1932.

III. — *Théorie de Dirac.*

P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of Electron* (*Royal Society Proceedings,* **117**, 1928, p. 610 et **118**, p. 351).

C. G. Darwin, *The wave Equations of the Electron* (*Ibid.*, **118**, p. 654).

F. Moglich, *Zur Quantentheorie des rotierendes Elektrons* (*Zeitschrift für Physik,* **48**, 1928, p. 852).

J. von Neumann, *Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des relativistischen Drehelektrons* (*Ibid.*, **48**, 1928, p. 868).

H. Tetrode, *Der Imouls-Energiesatz in der Diracschen Quantentheorie des Elektrons* (*Ibid.*, **49**, 1928, p. 858).

W. Gordon, *Der Strom der Diracschen Elektronentheorie* (*Ibid.*, **50**, 1928, p. 630).

G. E. Uhlenbeck et O. Laporte, *New covariant relations following from the Dirac Equations* (*Physical Review,* **37**, 1931, p. 1552).

L. de Broglie, *Quelques remarques sur la Théorie de l'électron magnétique de Dirac* (*Arch. Sci. Phys. et Nat.*, **15**, Genève, 1933, p. 465).

L'Électron magnétique (*Théorie de Dirac*), Paris, 1934.

Al. Proca, *Sur la Théorie relativiste de l'électron de Dirac dans un champ nul* (*Annales de Physique,* **20**, 1933, p. 347).

W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik.* B : *Relativistische Theorien* (*Handb. der Physik*, 24_3, 1933, p. 214).
Pieter Zeeman Verhandelingen, 1935, p. 31.
Contributions mathématiques à l'étude des matrices de la Théorie de Dirac (*Ann. Inst. H. Poincaré,* **6**, 1936, p. 109).
W. Franz, *Zur Methodik der Dirac Gleichung* (*Sitz. Math. Abt. Bay. Akad.*, **3**, 1935, p. 379).
W. Kofink, *Uber das magnetische und elektrische Moment des Elektrons nach der Diracschen Theorie* (*Annalen der Physik,* **30**, 1937, p. 91).
Zur Diracschen Theorie des Elektrons. I : *Algebraische Identitäten zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten.* II : *Algebraische Identitäten ... die Differentialquotienten enthalten.* III : *Folgen der Realitat der Elektromagnetischen Potentiale.* IV : *Beziehungen zwischen den Realitätsrelationen* (*Annalen der Physik,* **38**, 1940, p. 421, 436, 565, 583).
G. Petiau, *Sur les fonctions propres des opérateurs fondamentaux de la Théorie de l'électron de Dirac* (*Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, **24**, 1938, p. 488).
J. Gehéniau, *Mécanique ondulatoire de l'Électron et du Photon,* Bruxelles, 1938.
O. Costa de Beauregard, *Sur dix relations conséquences des équations de Dirac* (*C. R. Acad. Sc.*, **214**, 1942, p. 818).

IV. — *Théories de fusion.*

L. de Broglie, *La Mécanique ondulatoire du Photon. Une nouvelle Théorie de la Lumière.* I : *La lumière dans le vide.* II : *Les interactions entre les photons et la matière,* Paris, 1940 et 1942.
Théorie générale des particules à spin (*Méthode de fusion*). Paris, Gauthier-Villars, 1943.
M. A. Tonnelat, *Une nouvelle forme de Théorie unitaire : Étude de la particule de spin* 2 (*Annales de Physique,* **17**, 1942, p. 158).

Vu et approuvé :

Paris, le 26 mai 1943.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Paul MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Gilbert GIDEL.