THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

LOUIS ROBIN

La propagation d'ondes électromagnétiques quelconques, dans deux ou plusieurs milieux successifs, et la diffraction de ces ondes, ramenées à l'étude de problèmes de Cauchy et de problèmes mixtes et à la résolution d'équations intégro-différentielles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1944

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1944__269__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SERIE A, n° 2172
N° D'ORDRE:

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES.

PAR

Louis ROBIN

ancien élève de l'Ecole Polytechnique

Ingénieur en Chef des P.T.T.

1ère THESE. - La propagation d'ondes électromagnétiques quelconques, dans deux ou plusieurs milieux successifs, et la diffraction de ces ondes, ramenées à l'étude de problèmes de Cauchy et de problèmes mixtes et à la résolution d'équations intégro-différentielles;

2ème THESE. - Compléments à l'étude des mouvements d'un liquide visqueux illimité.

SOUTENUES le 22 Décembre 1944 DEVANT la COMMISSION D'EXAMEN.

MM.	VILLAT	Président.
	PERES	Examinateurs.
	COULOMB	
	DELSARTE	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen................ M. Paul Montel.

PROFESSEURS

P. MONTEL	T	Théorie des Fonctions.
L. BLARINGHEM . .	T	Botanique.
G. JULIA.	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN. . . .	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LEVY. .	T	Petrographie.
A. DENJOY.	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD.	T	Géographie physique et géologie dynamique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE . . .	T	Electronique et Radio activité.
M. JAVILLIER. . .	T	Chimie biologique.
Robert LEVY . . .	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT. . .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie générale.
M. FRECHET. . . .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON. . .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BEGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER. . . .	T	Electrotechnique générale.
DE BROGLIE. . . .	T	Théories physiques.
CHRETIEN.		Optique appliquée.
JOB	T	Chimie générale.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY.	T	Mécanique appliquée.
COMBES.	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
PERES.	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.
LAUGIER.	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P.C.B.)
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique analytique.
GAULT	T	Chimie appliquée.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT.	T	Théories chimiques.
LANQUINE	T	Géologie structurale et géologie appliquée
VALIRON.	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
BARRABE.		Géologie structurale et géologie appliquée
F. PERRIN.		Théories physiques.
VAVON.	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS.	T	Mathématiques générales.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
Jacques BOURCART .		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE..		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL	T	Botanique.
CABANNES.	T	Recherches physiques.
GRASSE.	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés.
PREVOST		Chimie organique.
BOULIGAND		Mathématiques.
CHAUDRON.		Chimie.
WYART.		Minéralogie.
TEISSIER.	T	Zoologie.
MANGENOT.	T	Biologie végétale.
P. AUGER.	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER		Physiologie générale.
PIVETEAU.		Géologie.
ROCARD		Physique.
H. CARTAN		Calcul différentiel.
SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions
LAFFITTE		Chimie (P.C.B.)
LERAY		Mécanique théorique des fluides.
FAVART.		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN		Biologie animale (P.C.B.)
CHRETIEN.		Analyse et mesures chimiques.
DRACH		Evolution des êtres organisés.
CHATELET.	T	Arithmétique et théorie des nombres.
EPHRUSSI.	T	Génétique.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique
KASTLER		Physique.
BAUER.	T	Chimie - Physique.
RIVIERE		Géologie (P.C.B.).

Secrétaire............ CH. MONIER

13 AVR 1972

A la mémoire de ma mère.

A ma femme.

A Monsieur H. VILLAT

Membre de l'Académie des Sciences

Professeur à la Sorbonne

A Monsieur J. DELSARTE

Doyen de la Faculté des Sciences de Nancy.

PREMIERE THESE

TABLE DES MATIERES

La propagation d'ondes électromagnétiques quelconques, dans deux ou plusieurs milieux successifs, et la diffraction de ces ondes, ramenées à l'étude de problèmes de Cauchy et de problèmes mixtes et à la résolution d'équations intégro-différentielles.

Introduction et vue d'ensemble.

M. DELSARTE, dans un important Mémoire des Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (I), a traité le problème de la propagation et de la diffraction d'ondes électromagnétiques à la surface plane de séparation de deux milieux homogènes et isotropes, non conducteurs. Il a considéré successivement le cas de l'équation scalaire de propagation des ondes sphériques et celui du système des équations de Maxwell. Il s'agit , dans les deux cas, de la recherche de la solution génerale, dépendant du temps d'une façon quelconque, et non de la recherche de solutions stationnaires, fonctions sinusoïdales du temps. En effet, comme l'a rappelé M. DELSARTE dans son Mémoire précité, si l'on se restreint à la recherche de solutions stationnaires, du type $u(x,y,z)e^{\pm i\omega t}$, l'équation de propagation des ondes se réduit à

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}$; ε const.diélectrique du milieu; μ , perméabilité magnétique: c, vitesse de la lumière dans le vide.

Et pour cette équation, il est bien connu que les problèmes extérieurs auxquels on est conduit, qu'ils soient de Dirichlet ou de F. Neumann, sont indéterminés, la régularité de la solution à l'infini étant une condition insuffisante pour choisir cette solution. Pour lever cette indétermination, on est alors obligé, soit d'imposer une condition supplémentaire à la solution du problème, condition bien connue sous le nom d'"Ausstrahlungsbedingung de Sommerfeld" (2):

(I) Tome LIII, 1936, p. 223 à 273.
(2) Frank & von Mises: Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und der Physik, 2é édit., New-York, 1943, t.II, chap. XIX, p.803 et suiv.

$$\lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0$$

Soit, de supposer d'abord que le milieu possède une conductibilité σ et de faire tendre, ensuite, σ vers zéro. En effet dans le cas d'un milieu conducteur, la difficulté précédente ne se présente pas, l'équation:

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

avec
$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2 + 4\pi i\mu\sigma\omega}{c^2}$$

à laquelle se réduit l'équation de propagation des ondes, en cherchant une solution $e^{-i\omega t}u(x,y,z)$ n'ayant pas de solution continue en tout point et nulle à l'infini. En faisant tendre σ vers zéro, dans la solution unique du problème extérieur qu'on s'est posé, on obtient alors une limite bien déterminée, qui se confond, d'ailleurs, avec la solution de Sommerfeld, obtenue au moyen de l'"Ausstrahlungs bedingung".

Pour éviter cette condition ou ce passage à la limite, qui, de toute façon, paraissent un peu artificiels, on recherche la solution générale, fonction quelconque du temps, ce qui a, du reste, l'avantage de s'appliquer à l'étude des régimes transitoires.

Les deux cas, de l'équation scalaire de propagation et des équations de Maxwell, diffèrent essentiellement par le choix des conditions de passage d'un milieu à l'autre. Dans le cas de l'équation scalaire, on impose à la solution du problème d'être continue, ainsi que ses quatre dérivées premières, à la traversée de la surface de séparation des deux milieux. Dans le cas du système de Maxwell, chaque composante des deux vecteurs champ électrique et champ magnétique vérifie la même équation scalaire que dans le premier cas, mais tandis que les composantes tangentielles des champs doivent rester continues, à la traversée de la surface de séparation, ce sont, lorsque l'on néglige les conductibilités, les composantes normales des inductions électrique et magnétique qui sont soumises à cette condition de continuité.

Rappelons brièvement, ci-dessous les résultats essentiels de l'étude de M. DELSARTE:

dans le cas de l'équation scalaire des ondes sphériques, la fonction inconnue est déterminée d'une façon unique, quelles que soient les valeurs de la vitesse de propagation dans les deux milieux, séparés par le plan diffractant. Cette fonction

.....

inconnue est déterminée au moyen d'une fonction inconnue auxiliaire qui vérifie une équation intégro-différentielle. Celle ci, malgré son apparence compliquée, peut être résolue en termes finis, par une formule très simple..

Dans le cas du système de Maxwell, M. DELSARTE ramène le problème de la détermination des six composantes des champs électrique et magnétique à celui de la détermination de deux inconnues auxiliaires qui sont les composantes, suivant Oy et Oz, du champ électrique dans le plan $x=0$ de séparation des deux milieux.

Ces deux inconnues auxiliaires vérifient deux équations intégro-différentielles, dont la résolution se réduit à celle de trois problèmes de Cauchy, relatifs à trois équations aux dérivées partielles du second ordre, à trois variables et à coefficients constants. En désignant par ε_1 ; ε_2, μ_1 et μ_2, respectivement, les constantes diélectriques et les perméabilités des deux milieux, et en posant:

$$k = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\mu_1 - \mu_2) \quad ,$$

pour $k \leq 0$, les trois équations sont du type hyperbolique et par suite, les problèmes de Cauchy sont tous bien posés et ont chacun une solution unique; pour $k > 0$, au contraire, une ou deux des trois équations est elliptique et le problème de Cauchy correspondant n'a pas de solution, en général.

M. DELSARTE s'est préoccupé de savoir si la quantité k ci-dessus pouvait effectivement avoir les deux signes, dans le cas des milieux physiques réels. De son étude, il résulte que la valeur de k, très petite pour deux milieux non ferro-magnétiques, est bien de signe variable, suivant le choix des deux milieux. Par suite, la théorie de Maxwell, lorsqu'on l'applique à des problèmes de diffraction à la surface de séparation de deux milieux non conducteurs, conduit dans certains cas à des problèmes mal posés, au sens de Poincaré et de M. HADAMARD.

La question se posait alors de savoir si la même difficulté allait ou non se présenter, en considérant le cas plus général où la conductibilité électrique des deux milieux n'est pas nulle. D'où le présent travail, qui est la suite logique de celui de M. DELSARTE. Ces recherches nous ont, d'ailleurs, été suggérées par M. DELSARTE et ont été entreprises sous sa direction.

Ce travail est donc consacré essentiellement à l'étude mathematique de la propagation d'ondes électromagnétiques quelconques, dans deux milieux sucessifs et de la diffraction de ces ondes à la surface plane de séparation de ces deux milieux supposés homogènes

....

homogènes, isotropes, possèdant constantes diélectriques, perméabilités magnétiques et conductibilités électriques. Nous négligeons la dispersion, c'est à dire que les caractéristiques précédentes des deux milieux sont considérées comme des constantes. Toutefois, nous étudions aussi l'extension de la méthode de résolution du problème pour trois, puis n milieux successifs.

Nous considérons encore successivement le cas de l'équation scalaire de propagation des ondes et celui du système des équations de Maxwell.

Dans le premier cas, l'équation de propagation contient cette fois un terme complémentaire, proportionnel à $\frac{\partial u}{\partial t}$, u désignant la fonction inconnue et t le temps, et deux paramètres, V et a, au lieu d'un, paramètres prenant des valeurs distinctes dans les milieux I et 2, séparés par le plan $x=0$. Nous cherchons une solution u continue, ainsi que ses quatre dérivées premières, dans tout l'espace, connaissant les données de Cauchy, c'est à dire les valeurs de la fonction inconnue et de sa dérivée première, par rapport au temps, à l'instant initial. Nous prenons encore comme inconnue auxiliaire, la valeur prise, à tout instant, par la fonction inconnue dans le plan diffractant. La résolution de deux problèmes mixtes, hyperboliques, de type Dirichlet, nous donne la fonction inconnue dans chacun des milieux I et 2. Cette résolution est naturellement plus compliquée que dans le cas où il n'existe pas de terme en $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans l'équation de propagation. Nous avons utilisé, à cet effet, les méthodes de l'ouvrage fondamental de M. HADAMARD (I) et les résultats contenus dans celui-ci, au sujet de l'équation dite des ondes sphériques amorties. Comme on le sait, les formules de résolution font intervenir, sous une intégrale triple, les dérivées de la fonction bien connue de Basset, I_0.

En écrivant la continuité de la dérivée normale de la fonction inconnue, à la traversée du plan $x=0$, nous obtenons encore l'équation intégro-différentielle dont l'inconnue auxiliaire est solution. Le chapitre I est consacré à l'exposé de l'ensemble de ces calculs.

La résolution de cette équation intégro-différentielle constitue la matière du chapitre II. Celle-ci est naturellement plus compliquée que celle de M. DELSARTE. Mais la nature du problème posé permet encore de ramener cette résolution à celle d'une autre équation beaucoup plus simple. Notre équation intégro-différentielle, d'apparence compliquée, se réduit en effet, par des transformations appropriées, simplement à une équation différentielle,...

(I) Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles, linéaires, hyperboliques, Paris, 1932.-

d'une équation différentielle, linéaire, du premier ordre, à coefficients constants. A cet effet, la fonction inconnue étant d'abord supposée analytique par rapport à y et à z, nous introduisons un ensemble d'opérateurs linéaires, permutables, à plusieurs indices, généralisant ceux utilisés par M. DELSARTE, et dont fait partie l'opérateur auquel est soumise la fonction inonnue dans l'équation intégro-différentielle. L'extension de la méthode de résolution, l'inconnue faisant seulement partie de classes linéaires de fonctions beaucoup moins restreintes, se fait ensuite, sur la suggestion de M. DELSARTE, par application du théorème fondamental de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues à une ou plusieurs variables, au moyen de polynômes. En effet, la démonstration directe, par le calcul, de la formule d'inversion à laquelle procède M. DELSARTE dans le cas qu'il a traité, serait ici trop compliquée.

Le chapître III est consacré à la mise en équation du même problème, dans le cas de la théorie de Maxwell. La première équation de Maxwell et son corollaire contiennent cette fois un terme complémentaire, proportionnel à $\sigma \vec{E}$, σ désignant la conductibilité électrique et $\vec{E}$ le champ électrique. Les conditions de passage, à la traversée du plan diffractant, $x=0$, sont ici: continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique, continuité des composantes normales de l'induction magnétique et de la densité de courant total. Pour simplifier, nous supposons d'abord que les données initiales vérifient la relation div $\vec{E}(x,y,z,0) = 0$, auquel cas, le champ électrique est solénoïdal, quel que soit t. Chaque composante du champ électrique et du champ magnétique vérifie alors l'équation aux dérivées partielles considérée au chapître I. Plus loin, nous montrons qu'on peut s'affranchir de cette condition et que la méthode de résolution du problème reste valable pour div $\vec{E}(x,y,z,0) \neq 0$

Nous nous donnons des conditions initiales équivalentes à celles de Cauchy, dans tout l'espace, compte tenu des équations de Maxwell et des conditions de passage. Les valeurs, pour $x=0$, des composantes des champs ou de leurs dérivées normales au plan diffractant, suivant les cas, s'expriment encore en fonction des deux mêmes inconnues auxiliaires, $f(y,z,t)$ et $g(y,z,t)$, qui sont les composantes, suivant Oy et Oz, du champ électrique dans le plan $x=0$. La résolution de problèmes hyperboliques mixtes, de type Dirichlet pour les uns, F. Neumann pour les autres, donne encore les composantes des champs dans tout l'espace-temps.

Les conditions de passage fournissent, de même, deux

.....

deux équations intégro-différentielles pour la détermination des deux inconnuès auxiliaires. Ces équations contiennent, outre l'opérateur qui intervenait dans l'équation intégro-différentielle, relative au cas de l'équation scalaire de propagation, un second opérateur renfermant sous une intégrale quadruple, la dérivée de la même fonction de Basset. De ces deux équations qui contiennent toutes les deux les fonctions inconnues f et g non séparées, on déduit encore une équation intégro-différentielle auxiliaire, ne renfermant plus que l'inconnue

$$F(y,z,t) = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}$$

Le chapître IV est consacré à la résolution de cette équation auxiliaire et du système qui détermine f et g. La transformation de l'équation en F s'effectue d'une façon analogue à celle de l'équation intégro-différentielle du chapître II, d'abord sous les mêmes hypothèses d'analycité, par rapport à y et à z, relatives à F. Cette équation est ainsi réduite à un problème de Cauchy, relatif à une équation aux dérivées partielles, linéaire, à coefficients constants, du quatrième ordre. Cette équation est de la forme:

$$(1) \qquad \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) + \left(\delta \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta \frac{\partial}{\partial t} + \eta\right)\frac{\partial F}{\partial t} = A(y,z,t)$$

Le second membre est connu, les coefficients α et δ des termes de l'ordre le plus élevé ne dépendent pas des conductibilités et ont les mêmes valeurs que les deux seuls coefficients de l'équation correspondante de M. DELSARTE.

Les conditions de Cauchy sont: .

$$F(y,z,0) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t^3}\right)_{t=0} = 0$$

Pour étudier ce problème de Cauchy, sur une suggestion de M. DELSARTE, nous transformons l'équation (I) en la considérant comme une équation différentielle en $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ et en la résolvant par la méthode de la variation des constantes

......

Après intégration par parties de la formule de résolution trouvée, nous obtenons une équation intégro-différentielle de la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - a\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + b\frac{\partial F}{\partial t} + cF =$$

$$\phi(y,z,t) + \int_0^t \left[A e^{\alpha(t-\tau)} + B e^{\beta(t-\tau)}\right] F(y,z,\tau)\,d\tau \qquad (2),$$

avec les conditions initiales:

$$F(y,z,0) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

$\phi(y,z,t)$ étant connue et les coefficients a, b, c, A, B, α et β étant des constantes (α et β n'ont naturellement pas les mêmes valeurs que dans l'équation(I))

Deux cas généraux sont alors à distinguer, suivant le signe de a. Pour $a > 0$, c'est à dire $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1) > 0$ ε_1 et ε_2 étant les constantes diélectriques, μ_1 et μ_2 les perméabilités des deux milieux, le premier membre de l'équation (2) est celui d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique. Le problème de Cauchy correspondant peut alors être résolu par la méthode des approximations successives. Il possède une solution et une seule.

Pour $a < 0$, ou $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1) < 0$, au contraire, le premier membre de l'équation (2) est celui d'une équation du second ordre, du type elliptique. Nous démontrons que le problème de Cauchy en question n'a alors pas de solution, si $\phi(y,z,t)$ n'est pas analytique, par rapport à y et à z.

Nous traitons ensuite deux cas particuliers limites, correspondant l'un à $a = 0$, ou $\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1 = 0$, l'autre à $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$

Pour $a = 0$, le premier membre de l'équation(2) devient celui d'une équation du second ordre, du type parabolique. Si $b < 0$, c'est-à-dire si $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2) > 0$, la méthode des approximations successives est applicable et nous avons encore une solution et une seule. Dans le cas $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ le coefficient α s'annule dans ....

......

dans l'équation (I) et la transformation indiquée de cette équation en l'équation (2) conduit cette fois à une équation intégro-différentielle dont le premier membre renferme $\partial^3 f/\partial t^3$
La transformation de Laplace, appliquée à l'équation (I), montre alors que le problème de Cauchy correspondant à une solution pour $(\mu_1-\mu_2)(\sigma_1-\sigma_2)\leqslant 0$

Signalons aussi que dans le cas particulier $\varepsilon_2\sigma_1-\varepsilon_1\sigma_2=$ $=0$, l'équation(I) se réduit à une équation du second ordre, comme dans le cas de M.DELSARTE qui correspond à $\sigma_1=\sigma_2=0$

L'étude de l'équation auxiliaire en F · faite, celle des deux équations intégro-différentielles qui déterminent f et g ne présente pas de difficulté. Ces deux équations se ramènent, en effet, comme dans le cas ou l'on néglige les conductibilités, à deux problèmes de Cauchy, relatifs à deux équations aux dérivées partielles, linéaires, à coefficients constants, du second ordre. Ces équations aux dérivées partielles ne différant de celles qui correspondent au cas $\sigma_1=\sigma_2=0$, que par la présence d'un terme supplémentaire en $\partial f/\partial t$, (ou $\partial g/\partial t$), les résultats généraux, relatifs à ces deux équations,
sont les mêmes que dans le cas de M.DELSARTE.

En résumé, notre problème de diffraction à la surface plane de séparation de deux milieux, régi par les équations de Maxwell, admet une solution et une seule, si

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\mu_1-\mu_2)<0 \quad \text{ou} \quad \text{si} \quad \mu_1-\mu_2=0$$

Il n'admet pas de solution, sauf si les données sont analytiques par rapport à y et à z, pour

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\mu_1-\mu_2)>0$$

Les conductibilités n'interviennent que pour la discussion des cas limites

$$\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1=0 \quad , \quad \varepsilon_1-\varepsilon_2=0$$

Ensuite, nous justifions la méthode de résolution, pour des inconnues f et g, non analytiques, par rapport à y et à z, par le même procédé qu'au chapitre II, en appliquant le théorème fondamental de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues, au moyen de polynômes.

Un court appendice traite enfin des cas de trois, puis de n milieux successifs, d'épaisseurs quelconques, séparés par des plans parallèles.

Nous montrons que les résultats, établis dans le cas de deux milieux, sont valables dans ce cas général, qu'il s'agisse de l'équation scalaire de propagation à une inconnue ou du champ

....

électromagnétique $\vec{E}$, $\vec{H}$, satisfaisant aux équations de Maxwell.

Dans l'ensemble , les résultats de nos recherches confirment en les généralisant ceux de M. DELSARTE. Lorsqu'on considère la théorie de Maxwell, la discrimination entre les cas généraux où le problème a une solution et une seule et ceux où il n'a pas de solution, en général, est imposée par les seules valeurs des constantes diélectriques et des perméabilités des deux milieux, sans que les conductibilités interviennent. Ce résultat paraît du à ce que les coefficients des termes du second ordre de l'équation de propagation des ondes $\Delta u - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a}{V}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ne dépendent pas de la conductibilité. Il est permis de penser qu'il en serait de même pour des corps diffractants de forme quelconque. La théorie de Maxwell conduit donc, lorsqu'on l'applique à des questions de diffraction, à la surface de séparation de deux ou plusieurs milieux, à des problèmes parfois mal posés, au sens de Poincaré et de M. Hadamard.

Quelle est la cause de cette grave difficulté et comment pourrait-on l'éviter, la possibilité de sa disparition, lorsqu'on introduit les conductibilités des milieux, étant maintenant exclue?

On peut d'abord remarquer que cet obstacle est dû aux conditions maxwelliennes de continuité, à la traversée de chaque plan diffractant, puisque , dans le cas de l'équation scalaire de propagation, on obtient un problème bien posé en écrivant la continuité de la fonction inconnue et de ses dérivées premières. Il y a lieu, toutefois, d'ajouter que ces conditions maxwelliennes de continuité sont une conséquence nécessaire des équations de Maxwell et en sont inséparables.

En considérant, pour simplifier , le cas de deux milieux, nous voyons alors, pour notre part, trois procédés à tenter pour obtenir un problème bien posé dans tous les cas. Le premier consiste à introduire une couche de passage entre les deux milieux, dans laquelle les paramètres ε, μ, σ varieraient d'une façon continue, linéaire, par exemple, du milieu I au milieu 2 et où s'appliqueraient les équations de Maxwell. C'est , du reste, ce point de vue de la couche de passage qui est admis par les physiciens.

En supposant une épaisseur finie pour celle-ci, on aurait, semble t-il, un problème bien posé, chacun des trois problèmes hyperboliques, mixtes, auxquels serait ramenée la détermination de chaque composante des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ ayant encore une solution et une seule et les discontinuités des paramètres ε, μ et σ étant éliminées. Les inconnues auxiliaires, valeurs des composantes de $\vec{E}$ suivant Oy et Oz , dans chacun des deux plans limitant la couche, seraient déterminées cette fois, en écrivant la continuité de $\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$ et de $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$, à la traversée de ces deux plans, (X, Y, Z : composantes de $\vec{E}$) . Ensuite , on ferait tendre vers zéro l'épaisseur de la couche et on examinerait si les valeurs trouvées pour les inconnues auxiliaires tendent bien vers des limites déterminées, les mêmes pour les deux valeurs de chaque composante, dans les deux plans qui limitent la couche.

Les deux difficultés principales de ce procédé paraissent consister dans la recherche de la solution élémentaire de l'équation de propagation, à l'intérieur de la couche , équation à quatre variables, dans laquelle V devient une fonction linéaire de x, (ainsi que a), et dans le passage à la limite final.

Le second procédé consisterait à introduire la dispersion, les paramètres ε, μ et σ de chacun des deux milieux n'étant plus des constantes.

Le troisième, dans le remplacement des équations de Maxwell par d'autres, dont les précédentes constitueraient une approximation.

Quelle que soit la véritable raison de cette difficulté, nous pensons que notre travail aura été utile. En plus de son intérêt théorique, nous souhaitons qu'il ait des applications techniques. Il est évidemment utile d'avoir à sa disposition les formules générales exactes de propagation des ondes électromagnétiques dans deux ou plusieurs milieux successifs. En particulier,des applications peuvent se révéler dans les domaines en cours d'étude des communications radioélectriques souterraine et de la prospection radioélectrique. La méthode s'applique à un ébranlement initial quelconque, qui peut être particularisé à volonté : trains d'ondes planes, cylindriques, etc...

Il nous reste l'agréable devoir de témoigner notre reconnaissance à toutes les personnes qui ont bien voulu s'intéresser à cette étude et faciliter notre tâche.Ne pouvant les citer toutes, qu'il nous soit permis de remercier spécialement M.DELSARTE , d'abord ,qui nous a suggéré le sujet de nos recherches et sous la direction duquel, celles ci ont été poursuivies.Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre gratitude pour les nombreux conseils et directives qu'il nous a donnés.M.VILLAT,qui a bien voulu présenter nos Notes et dont les conseils et les encouragements nous ont été précieux. MM.ROCARD,PERES et COULOMB qui nous ont fourni des renseignements utiles et nous ont témoigné une active sympathie.

Les principaux résultats de nos recherches ont été insérés dans deux Notes,publiées aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences,séances des 24 Janvier et 26 Juin 1944.(3.)

(3) Tome 218, p. 135 et 989.

CHAPITRE I

Mise en équation pour deux milieux, dans le cas de l'équation scalaire de propagation des ondes électromagnétiques.

I.- Comme on le sait et comme nous le verrons, du reste, au chapître III du présent mémoire, il résulte des équations de Maxwell, que chaque composante du champ magnétique et que, si la divergence du champ électrique est partout nulle à l'instant initial, chaque composante du champ électrique vérifient, en milieu conducteur, une équation de la forme:

$$\Delta u - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a}{V}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad ,$$

où Δ est le Laplacien, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

a et V sont des constantes positives caractéristiques du milieu où a lieu la propagation et dont nous verrons l'expression au chapitre III, en fonction du pouvoir inducteur, de la perméabilité magnétique et de la conductibilité électrique du milieu considéré.

a est homogène avec l'inverse d'une longueur et V avec une vitesse.

Nous étudions donc le problème suivant:

- déterminer une fonction $u\,(x,y,z,t)$ par les conditions ci-dessous:

a. Conditions indéfinies:

$$(1) \qquad \Delta u - \frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a_1}{V_1}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad , \quad \text{pour} \quad x > 0 \quad ,$$

$$(2) \qquad \Delta u - \frac{1}{V_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a_2}{V_2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad , \quad \text{pour} \quad x < 0 \quad ,$$

les variables x,y,z, prennent toutes les valeurs réelles ,

......

t prend toutes les valeurs positives ou nulles, la fonction u est continue, ainsi que ses quatre dérivées premières pour l'ensemble de ces valeurs.

b- Conditions définies:

$$(3) \quad u(x,y,z,0)=\alpha(x,y,z) \; ; \; \left[\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,z,t)\right]_{t=0} = \beta(x,y,z) \quad ;$$

α et β s'annulent à l'infini et sont continues, ainsi que leurs ~~trois~~ dérivées premières pour $x=0$.

Nous prenons une inconnue auxiliaire

$$(4) \qquad \gamma(y,z,t) = u(0,y,z,t),$$

représentant les valeurs de la fonction inconnue $u(x,y,z,t)$ dans le plan $x=0$ de séparation des deux milieux, pour $t \geqslant 0$

Les concordances:

$$\alpha(0,y,z) = \gamma(y,z,0) \; ; \; \beta(0,y,z) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t)\right]_{t=0}$$

sont supposées remplies. Enfin, nous désignons par I et 2 les regions où la coordonnée x est, respectivement, positive ou négative.

La détermination de u dans chacune de ces régions, lorsqu'on regarde γ comme connue, s'obtient par la résolution d'un problème mixte, de type Dirichlet.

Pour résoudre ce dernier problème dans la region I, par exemple, nous transformons, par un changement des variables et de la fonction inconnue, l'équation (I) en l'équation des ondes sphériques amorties.

Nous posons, à cet effet:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \xi &= a_1 x \\ \eta &= a_1 y \\ \zeta &= a_1 z \\ \tau &= a_1 V_1 t \end{aligned} \qquad u(x,y,z,t) = e^{-\tau} v(\xi,\eta,\zeta,\tau)$$

L'équation (1) devient:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + v = 0$$

......

et les conditions définies (3) et (4) :

$$(7)\quad \begin{cases} v(\xi,\eta,\zeta,0)=\alpha(x,y,z)=\alpha_1(\xi,\eta,\zeta) \\ \left[\frac{\partial}{\partial\tau}v(\xi,\eta,\zeta,\tau)\right]_{\tau=0}=\beta_1(\xi,\eta,\zeta)=\alpha(x,y,z)+\frac{1}{a_1V_1}\beta(x,y,z) \end{cases}$$

$$(8)\quad v(0,\eta,\zeta,\tau)=\gamma_1(\eta,\zeta,\tau)=e^{\tau}\gamma(y,z,t),$$

avec les concordances :

$$\alpha_1(0,\eta,\zeta)=\gamma_1(\eta,\zeta,0)\,;\quad \beta_1(0,\eta,\zeta)=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma_1(\eta,\zeta,\tau)\right]_{\tau=0}$$

En posant:

$$(9)\quad I_1=\int_0^{\pi-\arccos\frac{\xi}{\tau}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\left\{\tau\left[\beta_1(\xi',\eta',\zeta')+\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha_1(\xi',\eta',\zeta')\right]+\alpha_1(\xi',\eta',\zeta')\right\}d\varphi,$$

$$(\xi'=\xi+\tau\cos\theta,\ \eta'=\eta+\tau\sin\theta\cos\varphi,\ \zeta'=\zeta+\tau\sin\theta\sin\varphi),$$

$$(10)\quad I_2=\int_0^{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}\frac{\rho\,d\rho}{r}\int_0^{2\pi}\left\{-\left[\frac{\partial}{\partial\xi'}v(\xi',\eta',\zeta',\tau-r)\right]_{\xi'=0}+\frac{\xi}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma_1(\eta',\zeta',\tau-r)+\right.$$
$$\left.+\frac{\xi}{r^2}\gamma_1(\eta',\zeta',\tau-r)\right\}d\varphi\quad,$$

$$\left(\eta'=\eta+\rho\cos\varphi,\ \zeta'=\zeta+\rho\sin\varphi,\ r=\sqrt{\xi^2+\rho^2}\right),$$

$$(11)\quad I_3=\frac{1}{2}\int_0^{\tau}r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right)dr\int_0^{\pi-\arccos\frac{\xi}{r}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\beta_1(\xi',\eta',\zeta')\,d\varphi+$$
$$+\frac{\tau^2}{2}\int_0^{\pi-\arccos\frac{\xi}{\tau}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\alpha_1(\xi+\tau\cos\theta,\eta+\tau\sin\theta\cos\varphi,\zeta+\tau\sin\theta\sin\varphi)\,d\varphi+$$
$$+\frac{\tau}{4}\int_0^{\tau}r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right)dr\int_0^{\pi-\arccos\frac{\xi}{r}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\alpha_1(\xi',\eta',\zeta')\,d\varphi,$$

$$\Big[\ \xi' = \xi + r\cos\theta\ ,\qquad \eta' = \eta + r\sin\theta.\cos\varphi\ ,\ \zeta' = \zeta + r\sin\theta\sin\varphi\ ;$$

$$\arc\cos\frac{\xi}{r} = 0 \quad \text{pour } r \leq \xi\ ,$$

$$j(\lambda) = I_0(2\sqrt{\lambda}) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{\lambda^h}{(h!)^2}\ ,$$

$$j'(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda}\ ,$$

$$j''(\lambda) = \frac{dj'}{d\lambda}\ \Big]\ ,$$

(12)

$$I_4 = \frac{\xi}{2}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}\frac{\rho\,d\rho}{r}\int_0^{2\pi}\gamma_1(\eta',\zeta',\tau-r)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\tau-r}$$

$$\left\{j'\left[\frac{(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\left[\frac{\partial}{\partial\xi'}v(\xi',\eta',\zeta',\theta)\right]_{\xi'=0} - \frac{\xi}{2}\,j''\left[\frac{(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\gamma_1(\eta',\zeta',\theta)\right\}d\theta\ ,$$

$$\Big(\ \eta' = \eta + \rho\cos\varphi\ ,$$

$$\zeta' = \zeta + \rho\sin\varphi\ ,$$

$$r = \sqrt{\xi^2+\rho^2}\ \Big)\ ,$$

le livre de Monsieur Hadamard"Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles,linéaires,hyperboliques(Paris I932),(voir notamment les Nos I5I-I54-I56 et I57),nous donne la solution de l'équation (6):

(13) $$4\pi v(\xi,\eta,\zeta,\tau) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4\ ,$$

valable pour $0 \leq \xi \leq \tau$.

$I_1 + I_3$, $I_2 + I_4$ satisfont séparément l'équation(6).

Cette solution contient, outre les valeurs limites que nous nous donnons, α_1, β_1, γ_1, la quantité $\left[\frac{\partial}{\partial\xi'}v(\xi',\eta',\zeta',\tau-t)\right]_{\xi'=0}$

Nous l'éliminons par la méthode classique des images. Nous considérons le point $(-\xi,\eta,\zeta)$, symétrique du point (ξ,η,ζ), par rapport au plan $\xi=0$.

La somme:

$$I'_1+I'_2+I'_3+I'_4\ ,$$

analogue au second membre de (I3), mais relative au point $(-\xi,\eta,\zeta)$ est nulle, car le domaine d'intégration correspondant de l'espace (ξ',η',ζ') ne comprend pas ce point $(-\xi,\eta,\zeta)$.

En retranchant cette somme, nous pouvons donc écrire:

$$4\pi v(\xi,\eta,\zeta,\tau)=I_1-I'_1+I_2-I'_2+I_3-I'_3+I_4-I'_4\ , \tag{14}$$

les termes en $\left[\frac{\partial}{\partial\xi'}v(\xi',\eta',\zeta',\tau-t)\right]_{\xi'=0}$ disparaissent dans les différences $I_2-I'_2$, $I_4-I'_4$, puisque $\begin{cases} t=t' \text{ pour } \xi'=0, \\ (t=t'=\sqrt{\xi^2+\rho^2}) \end{cases}$

Les autres termes de $I_2-I'_2$ et de $I_4-I'_4$ se doublent l'un l'autre.

Posons: $J_1=I_1-I'_1$, $J_2=\frac{I_2-I'_2}{2}$,

$J_3=I_3-I'_3$, $J_4=\frac{I_4-I'_4}{2}$,

Nous avons:

$$4\pi v(\xi,\eta,\zeta,\tau)=J_1+2J_2+J_3+2J_4\ . \tag{15}$$

Nous posons également:

$$M_0(\xi,\eta,\zeta,R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_1(\xi,\eta+\sqrt{R}\cos\varphi,\zeta+\sqrt{R}\sin\varphi)\,d\varphi=M_0\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right) \tag{16}$$

$$M_2(\xi,\eta,\zeta,R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta_1(\xi,\eta+\sqrt{R}\cos\varphi,\zeta+\sqrt{R}\sin\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha\left(x,y+\frac{\sqrt{R}}{a_1}\cos\varphi,z+\frac{\sqrt{R}}{a_1}\sin\varphi\right)d\varphi \tag{17}$$

$$+\frac{1}{2\pi a_1V_1}\int_0^{2\pi}\beta\left(x,y+\frac{\sqrt{R}}{a_1}\cos\varphi,z+\frac{\sqrt{R}}{a_1}\sin\varphi\right)d\varphi=M_0\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{a_1V_1}M_1\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right)=M_2\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right)\ .$$

$$N_1(\eta,\zeta,\tau,R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_1(\eta+\sqrt{R}\cos\varphi,\zeta+\sqrt{R}\sin\varphi,\tau)\,d\varphi= \tag{18}$$

$$=\frac{e^{\tau}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma\left(y+\frac{\sqrt{R}}{a_1}\cos\varphi,z+\frac{\sqrt{R}}{a_1}\sin\varphi,t\right)d\varphi=e^{\tau}N\left(y,z,t,\frac{R}{a_1^2}\right)\ ,$$

et avons les concordances:

$$(19) \qquad M_0(0,\eta,\zeta,R) = N_1(\eta,\zeta,0,R)$$

$$M_2(0,\eta,\zeta,R) = \left[\frac{\partial}{\partial\tau} N_1(\eta,\zeta,\tau,R)\right]_{\tau=0}$$

Rappelons, résultat important, que M_0, M_1, M_2, N, N_1 sont des fonctions de R, continues et dérivables, même pour $R=0$

Pour J_2, nous pouvons écrire, (Cf. Hadamard, "Le problème de Cauchy.... ", p. 343, 344):

$$(20) \quad \frac{1}{2\pi} J_2 = \gamma_1(\eta,\zeta,\tau-\xi) - \frac{\xi}{\tau} N_1(\eta,\zeta,0,\tau^2-\xi^2) +$$

$$+ \; 2\xi^2 \int_{\xi/\tau}^{1} \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial R} N_1\left[\eta,\zeta,\tau-\frac{\xi}{\lambda},\frac{\xi^2}{\lambda^2}(1-\lambda^2)\right] d\lambda = \gamma_1(\eta,\zeta,\tau-\xi) -$$

$$- \frac{\xi}{\tau} M_0(0,\eta,\zeta,\tau^2-\xi^2) + 2\xi \int_{\xi}^{\tau} \frac{\partial}{\partial R} N_1(\eta,\zeta,\tau-z,z^2-\xi^2)\, dz \; .$$

Pour J_1, nous avons, en posant $\cos\theta = \lambda$ dans I_1 et $\cos\theta = -\lambda$ dans I_1' ; (Cf. J. Delsarte, loc. cit., p. 229.) :

$$(21) \quad \frac{1}{2\pi} J_1 = \int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} M_0\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda - \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} M_0\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda$$

$$+ \; \tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} M_2\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda - \tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} M_2\left[\lambda\tau-\xi,\ldots\right] d\lambda \; +$$

$$+ 2\tau^2\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} (1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\xi-\lambda\tau,\ldots\ldots\right] d\lambda - 2\tau^2\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} (1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\lambda\tau-\xi,\ldots\right] d\lambda -$$

$$- \; \tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} \lambda\frac{\partial}{\partial\xi} M_0\left[\xi-\lambda\tau,\ldots\ldots\right] d\lambda - \tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} \lambda\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\lambda\tau-\xi,\ldots\ldots\right] d\lambda$$

A remarquer que dans les deux termes où se trouve un $\frac{\partial}{\partial \xi}$, la dérivation y est supposée faite par rapport au premier argument lui même, et non, par rapport au ξ qui figure dans ce premier argument (hypothèse contraire à celle faite par M.DELSARTE).

D'autre part,

$$J_4 = \frac{\xi}{2}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\xi^2}} \frac{\rho\, d\rho}{r}\int_0^{2\pi} \gamma_1(\eta+\rho\cos\varphi, \zeta+\rho\sin\varphi, \tau-r)\, d\varphi + \frac{\xi}{4}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\xi^2}} \rho\, d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\tau-r} j''\left[\frac{(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] \times$$

$$\times\, \gamma_1(\eta+\rho\cos\varphi, \zeta+\rho\sin\varphi, \theta)\, d\theta = \frac{\xi}{2}\int_\xi^\tau dr\int_0^{2\pi} d\varphi\Big[\gamma_1(\eta+\sqrt{r^2-\xi^2}\cos\varphi, \zeta+\sqrt{r^2-\xi^2}\sin\varphi, \tau-r) +$$

$$+ \frac{r}{2}\int_0^{\tau-r} j''\left[\frac{(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\gamma_1(\eta+\sqrt{r^2-\xi^2}\cos\varphi, \zeta+\sqrt{r^2-\xi^2}\sin\varphi, \theta)\, d\theta\Big],$$

d'où:

$$(22)\qquad \frac{1}{2\pi} J_4 = \frac{\xi}{2}\int_\xi^\tau dr\Big\{ N_1(\eta, \zeta, \tau-r, r^2-\xi^2) +$$

$$+ \frac{r}{2}\int_0^{\tau-r} j''\left[\frac{(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] N_1(\eta, \zeta, \theta, r^2-\xi^2)\, d\theta\Big\}$$

Enfin, en posant, comme pour J_1, $\cos.\theta = -\lambda$ dans les intégrales provenant d' I_3 et $\cos.\theta = \lambda$ dans celles provenant d'I'_3, nous avons:

$$(23)\qquad \frac{1}{2\pi} J_3 = \frac{\tau^2}{2}\left[\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda - \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} M_0\left[\lambda\tau-\xi, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\xi} r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr\int_{-1}^{+1} M_2\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \frac{1}{2}\int_\xi^\tau r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \times$$

$$\left[\int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} M_2\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda - \int_{\frac{\xi}{r}}^{1} M_2\left[\lambda r-\xi, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda\right] + \frac{\tau}{4}\int_0^{\xi} r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} M_0\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \frac{\tau}{4}\int_\xi^\tau r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr\Big[\, \ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda - \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} M_0\left[\lambda\tau-\xi, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \Big] .$$

Nous obtenons donc finalement comme solution du problème mixte, relatif à l'équation(6) et pour $0 \leq \xi \leq \tau$:

$$(24) \quad v(\xi,\eta,\zeta,\tau) = \gamma_1(\eta,\zeta,\tau-\xi) + 2\xi \int_{\xi}^{\tau} dr \frac{\partial}{\partial R} N_1(\eta,\zeta,\tau-r, r^2-\xi^2) +$$

$$\frac{\xi}{2}\int_{\xi}^{\tau} dr \left[N_1(\eta,\zeta,\tau-r, r^2-\xi^2) + \frac{r}{2}\int_0^{\tau-r} j''\left[\frac{(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] N_1(\eta,\zeta,\theta,r^2-\xi^2)\, d\theta \right] -$$

$$- \frac{\xi}{\tau} M_0(0,\eta,\zeta,\tau^2-\xi^2) + \frac{1}{2}\Big\{ \int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} M_0\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \ -$$

$$- \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} M_0\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} M_2\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda -$$

$$- \tau \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} M_2\left[\lambda\tau-\xi, \ldots\ldots\right] d\lambda + 2\tau^2 \int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} (1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \ldots\ldots\right] d\lambda -$$

$$- 2\tau^2 \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} (1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\lambda\tau-\xi, \ldots\ldots\right] d\lambda - \tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} \lambda\frac{\partial}{\partial\xi} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \ldots\ldots\right] d\lambda \ -$$

$$- \tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} \lambda\frac{\partial}{\partial\xi} M_0\left[\lambda\tau-\xi, \ldots\ldots\right] d\lambda + \frac{\tau^2}{2}\Big[\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} M_0\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \ -$$

$$- \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} M_0\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \Big] + \frac{1}{2}\int_0^{\xi} r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{+1} M_2\left[\xi-\lambda r,\eta,\zeta,r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\tau} r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \left[\int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} M_2\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda - \right.$$

$$\left. -\int_{\frac{\xi}{r}}^{1} M_2\left[\lambda r-\xi, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \right] + \frac{\zeta}{4}\int_0^{\xi} r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \int_{-1} M_0\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda +$$

$$\left. + \frac{\zeta}{4}\int_{\xi}^{\tau} r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \left[\int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} M_0\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda - \int_{\frac{\xi}{r}}^{-1} M_0\left[\lambda r-\xi, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \right] \right\}$$

Pour $\tau \leq \xi^-$,c'est à dire de l'autre côté de la caractéristique $\xi = \tau$,menée par l'arête commune $\xi = \tau = 0$ aux deux parties de la multiplicité qui porte les données,nous avons une solution d'expression plus simple,qui ne dépend plus que des données de Cauchy et pour laquelle on n'a pas besoin d'utiliser la méthode des images:

$$(25)\quad v(\xi,\eta,\zeta,\tau) = I_1 + I_3 = \frac{1}{2}\left\{ \int_{-1}^{+1} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \right.$$

$$\tau\int_{-1}^{+1} M_2\left[\xi-\lambda\tau, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + 2\tau^2\int_{-1}^{+1}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \ldots.\right] d\lambda -$$

$$-\tau\int_{-1}^{+1}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \ldots.\right] d\lambda + \frac{\zeta^2}{2}\int_{-1}^{+1} M_0\left[\xi-\lambda\tau, \ldots\right] d\lambda + \frac{1}{2}\int_0^{\tau} r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr.$$

$$\left. \times\int_{-1}^{+1} M_2\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \frac{\zeta}{4}\int_0^{\tau} r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{+1} M_0\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \right\}$$

La vérification de la continuité de v et de ses dérivées premières sur l'hyper plan $\xi = \tau$ s'effectue comme pour l'équation des ondes sphériques,(cf. Hadamard,loc.cit.,N°157 bis). La présence des termes complémentaires J_3 et J_4 , qui ne figurent

pas dans la solution de l'équation des ondes sphériques n'intro-

......

duit, en effet, aucune difficulté pour cette vérification. Par exemple, pour le calcul de $\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)_{\tau-\zeta=\pm 0}$, on voit de suite que la discontinuité de $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial J_4}{\partial \tau}$ est exactement compensée par celle de $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial J_3}{\partial \tau}$

Pour la région 2, $(\zeta \leq 0)$, nous aurons deux formules (24') et (25'), analogues à (24) et (25):

A - Dans la formule (24') qui correspond à $-\zeta \leq \tau$,

I° Dans les termes de (24) provenant de J_2 et de J_4, remplacer ζ par $-\zeta$; le facteur ζ provient, en effet, de la dérivée normale de τ, sur le plan $\zeta' = 0$, dérivée qui change de signe avec la région considérée.

2° dans les termes provenant de J_1 et de J_3, le signe du premier argument doit être changé dans les fonctions M_0 et M_2. En même temps, le signe de chaque terme doit être changé, sauf pour les termes contenant $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ la dérivée étant prise par rapport au premier argument lui même.

B - dans la formule (25') correspondant à $\tau \leq -\zeta$, rien n'est à changer dans la formule (25) qui coïncide avec (25').

Ayant indiqué le moyen d'obtenir (24') et (25'), à partir de (24) et de (25), nous n'écrivons pas ces formules.

......

Nous revenons maintenant à l'équation (I),

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2a_1}{V_1}\frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$$

Tenant compte des relations (7), (8), (I6), (I7), (I8) entre les conditions aux limites relatives à l'équation (I) et celles relatives à l'équation (6), ainsi que des relations (5), nous obtenons pour le milieu $1, (x \geqslant 0)$ et pour $x \leqslant V_1 t$:

$$(26) \qquad u(x,y,z,t) = e^{-a_1 x}\,\gamma\left(y,z,t-\frac{x}{V_1}\right) +$$

$$+ 2x\int_x^{V_1 t} e^{-a_1 r} dr \frac{\partial}{\partial R} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2-x^2\right) + \frac{a_1^2 x}{2}\int_x^{V_1 t} dr \Bigg[N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2-x^2\right) e^{-a_1 r} +$$

$$+ \frac{a_1^2 V_1 r}{2}\int_0^{t-\frac{r}{V_1}} e^{-a_1 V_1 (t-\tau)} j''\left[a_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] N\left(y,z,\tau, r^2-x^2\right) d\tau \Bigg] +$$

$$+ \frac{e^{-a_1 V_1 t}}{2}\Bigg\{ -\frac{2x}{V_1 t} M_0\left(0,y,z, V_1^2 t^2 - x^2\right) + \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} M_0\left[x-\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda -$$

$$- \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} M_0\left[\lambda V_1 t - x, y, z, V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + a_1 V_1 t \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} M_2\left[x-\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda$$

$$- a_1 V_1 t \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} M_2\left[\lambda V_1 t - x, \ldots\ldots\right] d\lambda + 2 V_1^2 t^2 \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} M_0\left[x-\lambda V_1 t, \ldots\ldots\right] d\lambda -$$

$$- 2 V_1^2 t^2 \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\lambda V_1 t - x, \ldots\right] d\lambda - V_1 t \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} \lambda \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[x - \lambda V_1 t, \ldots\right] d\lambda$$

$$- V_1 t \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} \lambda \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[\lambda V_1 t - x, \ldots\right] d\lambda + \frac{a_1^2 V_1^2 t^2}{2} \left\{ \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} M_0\left[x - \lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} M_0\left[\lambda V_1 t - x, \ldots\ldots\right] d\lambda \right\} + \frac{a_1^3}{2} \int_0^x \tau^2 j'\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - \tau^2}{4}\right) d\tau \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} M_2\left[x - \lambda \tau, y, z, \tau^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + \frac{a_1^3}{2} \int_x^{V_1 t} \tau^2 j'\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - \tau^2}{4}\right) d\tau \times$$

$$\times \left\{ \int_{-1}^{\frac{x}{\tau}} M_2\left[x - \lambda \tau, \ldots\ldots\right] d\lambda - \int_{\frac{x}{\tau}}^{1} M_2\left[\lambda \tau - x, \ldots\right] d\lambda \right\} + \frac{a_1^4 V_1 t}{4} \int_0^x \tau^2 j'' \times$$

$$\times \left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - \tau^2}{4}\right) d\tau \int_{-1}^{+1} M_0\left[x - \lambda \tau, y, z, \tau^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + \frac{a_1^4 V_1 t}{4} \int_x \tau^2 j''\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - \tau^2}{4}\right) d\tau$$

$$\left. \times \left\{ \int_{-1}^{\frac{x}{\tau}} M_0\left[x - \lambda \tau, \ldots\ldots\right] d\lambda - \int_{\frac{x}{\tau}}^{1} M_0\left[\lambda \tau - x, \ldots\ldots\right] d\lambda \right\} - \right\}$$

Pour $V_1 t \leq x$, nous obtenons de suite, à partir de la formule (25):

$$(27) \quad u(x,y,z,t) = \frac{e^{-a_1 V_1 t}}{2} \left\{ \int_{-1}^{+1} M_0\left[x-\lambda V_1 t, y, z; V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + \right.$$

$$a_1 V_1 t \int_{-1}^{+1} M_2\left[x-\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + 2 V_1^2 t^2 \int_{-1}^{+1} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} M_0\left[x-\lambda V_1 t, \ldots\right] d\lambda -$$

$$- V_1 t \int_{-1}^{+1} \lambda \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[x-\lambda V_1 t, \ldots\right] d\lambda + \frac{a_1^2 V_1^2 t}{2} \int_{-1}^{+1} M_0\left[x-\lambda V_1 t, \ldots\right] d\lambda +$$

$$+ \frac{a_1^3}{2} \int_0^{V_1 t} r^2 j'\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{} M_2\left[x-\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda +$$

$$\left. + \frac{a_1^4 V_1 t}{4} \int_0^{V_1 t} r^2 j''\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{+1} M_0\left[x-\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \right\} .$$

Dans la region 2 et pour $-x \leqslant V_2 t$. ,la solution se déduit de la formule (24'),comme(26) se déduit de (24). Nous avons naturellement à utiliser les relations analogues à (5),(7),(8),(16),(17), et (18),entre les variables et la fonction inconnue de l'équation (2),d'une part et les variables et la fonction inconnue de l'équation (6),d'autre part.

Il y a lieu de remarquer que dans la région 2,nous avons:
$$M_2(x,y,z,R) = M_0(x,y,z,R) + \frac{1}{a_2 V_2} M_1(x,y,z,R)$$

Nous obtenons:

$$(26') \quad u(x,y,z,t) = e^{a_2 x}\,\gamma\left(y,z,t+\frac{x}{V_2}\right) - 2x\int_{-x}^{V_2 t} e^{-a_2\tau}\frac{\partial}{\partial R}N\left(y,z,t-\frac{\tau}{V_2},\tau^2-x^2\right)d\tau -$$

$$-\frac{a_2^2 x}{2}\int_{-x}^{V_2 t} d\tau\left\{e^{-a_2\tau}N\left(y,z,t-\frac{\tau}{V_2},\tau^2-x^2\right) + \frac{a_2^2 V_2 \tau}{2}\int_0^{t-\frac{\tau}{V_2}} e^{-a_2V_2(t-\zeta)}\,\mathcal{J}''\left[a_2^2\,\frac{V_2^2(t-\zeta)^2-\tau^2}{4}\right]\times\right.$$

$$\left.\times N(y,z,\zeta,\tau^2-x^2)\,d\zeta\right\} + \frac{e^{-a_2V_2t}}{2}\left\{\frac{2x}{V_2 t}M_0(0,y,z,V_2^2t^2-x^2) + \right.$$

$$+\int_{\frac{x}{V_2t}}^{1} M_0\left[x-\lambda V_2 t, y,z, V_2^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda - \int_{-1}^{\frac{x}{V_2t}} M_0\left[\lambda V_2 t - x, y,z, V_2^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda +$$

$$+ a_2V_2t\int_{\frac{x}{V_2t}}^{1} M_2\left[x-\lambda V_2 t, y,z, V_2^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda - a_2V_2t\int_{-1}^{\frac{x}{V_2t}} M_2\left[\lambda V_2 t - x, \ldots\ldots\right]d\lambda +$$

$$+2V_2^2t^2\int_{\frac{x}{V_2t}}^{1}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R}M_0\left[x-\lambda V_2t,\ldots\right]d\lambda - 2V_2^2t^2\int_{-1}^{\frac{x}{V_2t}}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R}M_0\left[\lambda V_2 t - x,\ldots\ldots\right]d\lambda -$$

$$-V_2t\int_{\frac{x}{V_2t}}^{1}\lambda\frac{\partial}{\partial x}M_0\left[x-\lambda V_2t,\ldots\ldots\right]d\lambda - V_2t\int_{-1}^{\frac{x}{V_2t}}\lambda\frac{\partial}{\partial x}M_0\left[\lambda V_2t-x,\ldots\ldots\right]d\lambda +$$

$$+\frac{\alpha_2^2 V_2^2 t^2}{2}\left\{\int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} M_0[x-\lambda V_2 t,\ldots]\,d\lambda - \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} M_0[\lambda V_2 t - x,\ldots.]\,d\lambda\right\} +$$

$$+\frac{\alpha_2^3}{2}\int_0^{-x} r^2 j'\left(\alpha_2^2\,\frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)dr\int_{-1}^{+1} M_2[x-\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)]\,d\lambda + \frac{\alpha_2^3}{2}\int_{-x}^{V_2 t} r^2 j'\left(\alpha_2^2\,\frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)dr$$

$$\times\left\{\int_{\frac{x}{r}}^{1} M_2[x-\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)]\,d\lambda - \int_{-1}^{\frac{x}{r}} M_2[\lambda r - x,\ldots]\,d\lambda\right\} + \frac{\alpha_2^4 V_2 t}{4}\times$$

$$\times\left\{\int_0^{-x} r^2 j''\left(\alpha_2^2\,\frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)dr\int_{-1}^{+1} M_0[x-\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)]\,d\lambda + \int_{-x}^{V_2 t} r^2 j''\left(\alpha_2^2\,\frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)dr\right.$$

$$\left.\times\left\{\int_{\frac{x}{r}}^{1} M_0[x-\lambda r,\ldots.]\,d\lambda - \int_{-1}^{\frac{x}{r}} M_0[\lambda r - x,\ldots]\,d\lambda\right\}\right\}\right\} .$$

Pour $V_2 t \leqslant x$,la formule (27') donnant la solution s'obtient en remplaçant dans (27), α_1 et V_1 par α_2 et V_2 , respectivement.

Les deux problèmes mixtes,de type Dirichlet,relatifs aux équations (I) et (2) sont ainsi résolus par les formules (26) et (27), (26') et (27').Mais il nous reste à déterminer l'inconnue auxiliaire $\gamma(y,z,t)$.

Comme dans le cas de l'équation des ondes sphériques,traité par M.DELSARTE,nous allons former,à cet effet,une équation intégro-différentielle que doit satisfaire $\gamma(y,z,t)$, en écrivant la continuité de la dérivée normale, $\frac{\partial u}{\partial x}$, à la traversée du plan $x=0$.

2. — Nous calculons d'abord $\left[\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z,t)\right]_{x=+0}$

Les termes de (26), dépendant de $\gamma(y,z,t)$, donnent, sans difficulté:

$$(28)\ -\frac{1}{V_1}\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t) - \alpha_1\gamma(y,z,t) + 2\int_0^{V_1 t} e^{-\alpha_1 r}\frac{\partial}{\partial R}N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},r^2\right)dr + \frac{\alpha_1^2}{2}\int_0^{V_1 t} dr\times\ \ldots$$

$$\times\left\{e^{-\alpha_1 r} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},r^2\right)+\frac{\alpha_1^2 V_1 r}{2}\int_0^{t-\frac{r}{V_1}} e^{-\alpha_1 V_1(t-\tau)} j''\left[\alpha_1^2\,\frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] N(y,z,\tau,r^2)\,d\tau\right\}$$

De même, les termes qui dépendent d'α et de β donnent:

$$(29)\qquad e^{-\alpha_1 V_1 t}\left\{\alpha_1 M_2(0,y,z,V_1^2t^2)+2V_1t\frac{\partial}{\partial R}M_0(0,y,z,V_1^2t^2)+\right.$$

$$+\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}M_0\left[\lambda V_1 t,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+2V_1^2t^2\int_0^1(1-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial x}M_0\left[\lambda V_1 t,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda$$

$$+V_1t\int_0^1\lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}M_0\left[\lambda V_1t,\ldots\ldots\right]d\lambda+\alpha_1V_1t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}M_2\left[\lambda V_1t,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+$$

$$+\frac{\alpha_1^2V_1t}{2}\;M_0(0,y,z,V_1^2t^2)+\frac{\alpha_1^2V_1^2t^2}{2}\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}M_0\left[\lambda V_1t,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+$$

$$+\frac{\alpha_1^3}{2}\int_0^{V_1t}r\,j'\left(\alpha_1^2\,\frac{V_1^2t^2-r^2}{4}\right)dr\left\{M_2(0,y,z,r^2)+r\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}M_2\left[\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda\right\}+$$

$$+\frac{\alpha_1^4V_1t}{4}\int_0^{V_1t}r\,j''\left(\alpha_1^2\,\frac{V_1^2t^2-r^2}{4}\right)dr\left\{M_0(0,y,z,r^2)+r\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\times\right.$$

$$\left.\times\;M_0\left[\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda\right\}.$$

Ces termes qui dépendent d'α et de β, se réduisent en considèrant la dérivée totale, par rapport à λ, des quantités sous les intégrales. Nous obtenons ainsi:

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + 2V_1^2 t^2 \int_0^1 (1-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial R \partial x} M_0\left[\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda$$

$$+ V_1 t \int \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_0\left[\lambda V_1 t, \ldots\ldots\right] d\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\alpha(V_1 t, y, z) + 2V_1^2 t^2 \int_0 \frac{\partial^2}{\partial R \partial x} M_0\left[\lambda V_1 t, y,\right.$$

$$\left., z, V_1^2 t^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \quad ,$$

$$M_2(0, y, z, V_1^2 t^2) + V_1 t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} M_2\left[\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda = \alpha(V_1 t, y, z) +$$

$$\frac{1}{\alpha_1 V_1}\beta(V_1 t, y, z) + 2V_1^2 t^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_2\left[\lambda V_1 t, \ldots\ldots\right] d\lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial R} M_0(0, y, z, V_1^2 t^2) + V_1 t \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial R \partial x} M_0\left[\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial R} M_0(V_1 t, y, z, R)\right]_{R=0} + 2V_1^2 t^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial^2}{\partial R^2} M_0\left[\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4}\Delta_1\alpha(V_1t, y, z) + 2V_1^2t^2\int_0^1 \lambda \frac{\partial^2}{\partial R^2} M_0[\lambda V_1 t, \ldots\ldots]\, d\lambda \ ,$$

$$M_0(0,y,z,r^2) + r\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} M_0[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)]\, d\lambda = \alpha(r,y,z) + 2r^2\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial R} M_0[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)]\, d\lambda$$

$\left(\frac{\partial M_0}{\partial R}\right)_{R=0} = \frac{\Delta_1\alpha}{4}$ se calcule sans difficulté, au moyen de la formule de Taylor, $\left(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

Nous en déduisons l'expression suivante de l'ensemble des termes qui dépendent d'α et de β, abstraction faite du facteur $e^{-a_1V_1t}$:

$$(30) \qquad A_1(y,z\,t) = a_1\alpha(V_1t,y,z) + \frac{1}{V_1}\beta(V_1t,y,z) + \frac{\partial\alpha}{\partial x}(V_1t,y,z) + \frac{a_1^2V_1t}{2}\times$$

$$\times\alpha(V_1t,y,z) + \frac{V_1t}{2}\Delta_1\alpha(V_1t,y,z) + 2a_1V_1^2t^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_2[\lambda V_1t, y, z, V_1^2t^2(1-\lambda^2)]\,d\lambda +$$

$$+ a_1^2V_1^3t^3\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_0[\lambda V_1t, y, z, V_1^2t^2(1-\lambda^2)]\,d\lambda + 4V_1^3t^3\int_0^1\lambda\frac{\partial^2}{\partial R^2}M_0[\lambda V_1t,\ldots]\,d\lambda +$$

$$+ \frac{a_1^2}{2V_1}\int_0^{V_1t} r\, j'\left(a_1^2\,\frac{V_1^2t^2-r^2}{4}\right)dr\ \Big\{ a_1V_1\alpha(r,y,z) + \beta(r,y,z) +$$

$$+ 2a_1V_1r^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_2[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)]\,d\lambda\Big\} + \frac{a_1^4V_1t}{4}\int_0^{V_1t} r\, j''\left(a_1^2\,\frac{V_1^2t^2-r^2}{4}\right)dr\,\times$$

$$\times \left\{ \alpha(r,y,z) + 2r^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \right\} .$$

D'autre part, deux des intégrales de (28), contenant γ peuvent être, dès maintenant, utilement transformées:

I° d'une façon analogue au cas de l'équation des ondes sphériques, (cf. J.DELSARTE, loc.cit., p.235), en désignant par C_{yztR}, le cercle d'équations:

$$\tau = t \geqslant 0 \quad , \quad (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = R \quad , \quad \text{nous avons :}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} N(y,z,t,R) = \frac{1}{4\pi R} \int_{C_{yztR}} \frac{d\gamma}{dn}\, d\sigma \ , \quad \text{où} \quad \frac{d}{dn} \quad \text{désigne}$$

la dérivée suivant la normale extérieure au cercle.

D'où, par application de la formule de Green à l'aire σ du plan $\tau = t$, limitée par le cercle C_{yztR} , puis en posant $r = V_1(t-\tau)$:

$$2\int_0^{V_1 t} e^{-\alpha_1 r} \frac{\partial}{\partial R} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2\right) dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{V_1 t} \frac{e^{-\alpha_1 r}}{r^2} dr \iint_\sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right) \gamma\left(\eta,\zeta,t-\frac{r}{V_1}\right) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi V_1} \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)}}{(t-\tau)^2} \ \Delta_1 \gamma(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \ ,$$

Δ_1 étant le laplacien $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$ et Γ^1_{yzt}

le volume du cône de

......

révolution défini par les inégalités: $0 \leq \tau \leq t$, $(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2-V_1^2(t-\tau)^2 \leq 0$.

2° nous avons:

$$\int_0^{V_1 t} r\,dr \int_0^{t-\frac{r}{V_1}} e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)} j''\left[\alpha_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] N(y,z,\tau,r^2)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{V_1 t} r\,dr \int_0^{t-\frac{r}{V_1}} e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)} \times$$

$$\times\, j''\left[\alpha_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] d\tau \int_0^{2\pi} \gamma(y+r\cos\varphi, z+r\sin\varphi,\tau)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^t e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)}\,d\tau \times$$

$$\times \int_0^{V_1(t-\tau)} r\, j''\left[\alpha_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] dr \int_0^{2\pi} \gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\iiint_{T^1_{y,z\,t}} e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)} \times$$

$$\times\, j''\left[\alpha_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] \gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\ .$$

La formule(28) s'écrit donc:

$$(31)\qquad -\frac{1}{V_1}\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t) - \alpha_1 \gamma(y,z,t) + \frac{1}{2\pi V_1}\iiint_{T^1_{yzt}} \frac{e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1 \gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau$$

$$+\, \frac{\alpha_1^2}{2}\int_0^{V_1 t} e^{-\alpha_1 r} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},r\right) dr + \frac{\alpha_1^4 V_1}{8\pi}\iiint_{T^1_{yzt}} e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)} j''\left[\alpha_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] \times$$

$$\times\, \gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau\ .$$

3 - Un calcul tout à fait semblable conduit à la valeur de $\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z,t)\right]_{x=-0}$ On obtient celle ci en changeant V_1 en V_2 , α_1 en α_2 dans (30) et (3I), et en tenant compte des changements de signe entre (26) et (26') .

Nous avons ainsi:

$$(32)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z,t)\right]_{x=-0} = \frac{1}{V_2}\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t) + \alpha_2 \gamma(y,z,t) \cdot -$$

$$-\frac{1}{2\pi V_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}}\frac{e^{-a_2V_2(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1\gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-\frac{a_2^2}{2}\int_0^{V_2t}e^{-a_2 r}N(y,z,t-\frac{r}{V_2},r^2)\,dr-$$

$$-\frac{a_2^4V_2}{8\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}}e^{-a_2V_2(t-\tau)}j''\left[a_2^2\ \frac{V_2^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right]\gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-e^{-a_2V_2t}A_2(y,z,t).$$

Dans cette formule, le volume du cône de révolution Γ^2_{yzt} est défini par les inégalités:

$$0\leqslant\tau\leqslant t\ ,\quad (\eta-y)^2+(\zeta-z)^2-V_2^2(t-\tau)^2\leqslant 0$$

D'autre part, nous avons:

$$(33)\_\qquad A_2(y,z,t)=a_2\alpha(-V_2t,y,z)+\frac{1}{V_2}\beta(-V_2t;y,z)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\alpha(-V_2t,y,z)+\frac{a_2^2V_2t}{2}\alpha(-V_2t,y,z)+\frac{V_2t}{2}\Delta_1\alpha(-V_2t,y,z)+$$

$$+2a_2V_2^2t^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_2\left[-\lambda V_2t,y,z,V_2^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+a_2^2V_2^3t^3\int\lambda\frac{\partial}{\partial R}\times$$

$$\times M_0\left[-\lambda V_2t,y,z,V_2^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+4V_2^3t^3\int_0^1\lambda\frac{\partial^2}{\partial R^2}M_0\left[-\lambda V_2t,\ldots\right]d\lambda+$$

$$+\frac{\alpha_2^2}{2V_2}\int_0^{V_2 t} r\, j'\left(\alpha_2^2\ \frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)dr\left\{\alpha_2 V_2\,\alpha(-r,y,z)+\beta(-r,y,z)+\right.$$

$$\left.+\,2\,\alpha_2 V_2 r^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_2\left[-\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda\right\}+\frac{\alpha_2^4 V_2 t}{4}\times$$

$$\times\int_0^{V_2 t} r\, j''\left(\alpha_2^2\,\frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)dr\left\{\alpha(-r,y,z)+2r^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_0\left[-\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda\right\}.$$

En égalant $\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y,z,t)\right]_{x=+0}$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y,z,t)\right]_{x=-0}$ nous obtenons

une équation intégro-différentielle, à la résolution de laquelle se trouve ramenée la détermination de $\gamma(y,z,t)$:

(34) $$\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t)+(a_1+a_2)\,\gamma(y,z,t)-\frac{1}{2\pi V_1}\times$$

$$\times\iiint_{T^1_{yzt}}\frac{e^{-a_1V_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1\gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-\frac{1}{2\pi V_2}\iiint_{T^2_{yzt}}\frac{e^{-a_2V_2(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\times$$

$$\times\,\Delta_1\gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-\frac{\alpha_1^2}{2}\int_0^{V_1 t}e^{-a_1 r}N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},r^2\right)dr\ -$$

$$- \frac{a_2^2}{2}\int_0^{V_2 t} e^{-a_2 r} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_2}, r\right) dr - \frac{a_1^4 V_1}{8\pi}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} e^{-a_1 V_1 (t-\tau)} J''\left[a_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \times$$

$$\gamma(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau - \frac{a_2^4 V_2}{8\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} e^{-a_2 V_2 (t-\tau)} J''\left[a_2^2 \frac{V_2^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \times$$

$$\times\, \gamma(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau = A(y,z,t) \;,$$

où $A(y,z,t)$ est une fonction connue:

$$(35).\qquad A(y,z,t) = e^{-a_1 V_1 t} A_1(y,z,t) + e^{-a_2 V_2 t} A_2(y,z,t)$$

Comme dans le cas de l'équation des ondes sphériques, il est commode d'intégrer l'équation (34), par rapport au temps, de 0 à t. Avant d'écrire la nouvelle équation intégro-différentielle obtenue, nous transformons les deux intégrales de (34), contenant explicitement N. En intégrant par rapport au temps, de 0 à t, nous avons:

$$(36).\qquad \int_0^t d\tau \int_0^{V_1\tau} e^{-a_1 r} dr \int_0^{2\pi} \gamma\left(y+r\cos\varphi, z+r\sin\varphi, \tau-\frac{r}{V_1}\right) d\varphi = \int_0^{V_1 t} e^{-a_1 r} dr \int_{\frac{r}{V_1}}^{t} d\tau \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \gamma\left(y+r\cos\varphi, z+r\sin\varphi, \tau-\frac{r}{V_1}\right) d\varphi = \int_0^{V_1 t} e^{-a_1 r} dr \int_0^{t-\frac{r}{V_1}} d\theta \int_0^{2\pi} \gamma(y+r\cos\varphi, z+r\sin\varphi, \theta)\, d\varphi =$$

$$= \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-a_1 r}}{r}\, \gamma(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \,.$$

De même, nous avons:

$$\int_0^t d\tau \int_0^{V_2\tau} e^{-a_2 r} N\left(y,z,\tau-\frac{r}{V_2}, r\right) dr = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r}\, \gamma(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \,.$$

Il vient donc, en intégrant les deux membres de (34), par rapport au temps, entre 0 et t:

. . . . . .

(37)- $\mathcal{D}_1[\gamma] + \mathcal{D}_2[\gamma] = \mathcal{A}(y,z,t)$, où nous avons posé :

(38)- $$\mathcal{D}_1[\gamma] = \frac{1}{V_1}\gamma(y,z,t) + \alpha_1\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\pi V_1}\int_0^t d\tau \times$$

$$\times \iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}} \frac{e^{-\alpha_1 V_1(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2}\,\Delta_1\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta - \frac{\alpha_1^2}{4\pi}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-\alpha_1 \tau}}{\tau}\gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$

$$- \frac{\alpha_1^4 V_1}{8\pi}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}} e^{-\alpha_1 V_1(\tau-\theta)}\, j''\left[\alpha_1^2\ \frac{V_1^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$

(38')- $$\mathcal{D}_2[\gamma] = \frac{1}{V_2}\gamma(y,z,t) + \alpha_2\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\pi V_2}\int_0^t d\tau \times$$

$$\iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} \frac{e^{-\alpha_2 V_2(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2}\,\Delta_1\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta - \frac{\alpha_2^2}{4\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-\alpha_2 \tau}}{\tau}\gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\tau -$$

$$- \frac{\alpha_2^4 V_2}{8\pi}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-\alpha_2 V_2(\tau-\theta)}\, j''\left[\alpha_2^2\ \frac{V_2^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta .$$

(39)- $$\mathcal{A}(y,z,t) = \left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\alpha(0,y,z) + \int_0^t A(y,z,\tau)\,d\tau .$$

Pour $t = 0$, les deux membres de (37) se réduisent à $\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\alpha(0,y,z)$ et nous avons:

$$A(y,z,0) = (\alpha_1+\alpha_2)\,\alpha(0,y,z) + \left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\beta(0,y,z)$$

CHAPITRE II

Résolution de l'équation intégro-différentielle du chapître I.

I.– Pour résoudre l'équation (37) du chapître précédent, nous utiliserons, en la généralisant, la méthode de M. DELSARTE pour l'équation intégro-différentielle correspondante du cas de l'équation des ondes sphériques.

A cet effet, nous supposerons d'abord que la fonction inconnue $\gamma(y,z,t)$ fait partie de la classe linéaire L des fonctions $f(y,z,t)$, analytiques par rapport aux variables y et z, holomorphes au voisinage de $y=z=0$, intégrables par rapport à t ; pour les valeurs positives, suffisamment petites de cette variable, ainsi que toutes leurs dérivées, par rapport à y et à z.

Nous introduisons les opérateurs linéaires, permutables, définis dans la classe L ; suivants:

(1). 1° $P_0[f] = f(y,z,t)$, $P_i[f] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2i-1}}{(2i-1)!} \Delta_i f(y,z,\tau)\, d\tau$,

les $\Delta_i f$ étant la suite des laplaciens successifs de f, pris par rapport à y et à z.

Ces opérateurs sont ceux que M. DELSARTE désigne sous le nom de $V_0[f]$, $V_i[f]$.

Ils sont tels que:

(2). $$P_i P_j[f] = P_j P_i[f] = P_{i+j}[f] \quad , \quad P_i[f] = \left\{ P_1[f] \right\}^{(i)}$$

(3). 2° $$Q_0[f] = f(y,z,t) \quad , \quad Q_i[f] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} f(y,z,\tau)\, d\tau$$

Ces opérateurs sont encore tels que:

(4). $$Q_i Q_j[f] = Q_j Q_i[f] = Q_{i+j}[f] \quad , \quad Q_i[f] = \left\{ Q_1[f] \right\}^{(i)}$$

En effet: $$Q_j Q_i[f] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-\theta)^{i-1}}{(i-1)!} f(y,z,\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_0^t f(y,z,\theta)\, d\theta \int_\theta^t \frac{(\tau-\theta)^{i-1}(t-\tau)^{j-1}}{(i-1)!(j-1)!} d\tau = \int_0^t \frac{(t-\theta)^{i+j-1}}{(i+j-1)!} f(y,z,\theta)\, d\theta .$$

(5). 3° $$P_{0,0}[f] = f(y,z,t) \quad , \quad P_{i,j}[f] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2i+j-1}}{(2i+j-1)!} \Delta_i f(y,z,\tau)\, d\tau$$

Ces opérateurs résultent du produit des opérateurs précédents, nous avons:

$$P_{0,0}[f] = P_0 Q_0[f] = Q_0 P_0[f] = f(y,z,t)$$

(6) $$P_{i,j}[f] = P_i Q_j[f] = Q_j P_i[f] = (P_1)^{(i)}\left\{Q_1[f]\right\}^{(j)} = (Q_1)^{(j)}\left\{P_1[f]\right\}^{(i)}$$

En effet, en posant:

$$g(y,z,t) = Q_j[f] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} f(y,z,\tau)\,d\tau$$

nous avons :

$$\Delta_i\, g(y,z,\tau) = \int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} \Delta_i f(y,z,\theta)\,d\theta$$

$$P_i Q_j[f] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2i-1}}{(2i-1)!}\,d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-\theta)^{j-1}}{(j-1)!} \Delta_i f(y,z,\theta)\,d\theta = \int_0^t \Delta_i f(y,z,\theta)\,d\theta\, \times$$

$$\times \int_\theta^t \frac{(t-\tau)^{2i-1}(\tau-\theta)^{j-1}}{(2i-1)!\,(j-1)!}\,d\tau = \int_0^t \frac{(t-\theta)^{2i+j-1}}{(2i+j-1)!} \Delta_i f(y,z,\theta)\,d\theta\,,$$

et de même, pour $Q_j P_i[f]$

Il en résulte que:

(7) $$P_{i,j} P_{k,l}[f] = P_i P_k Q_j Q_l[f] = P_k P_i Q_l Q_j[f] = P_{k,l} P_{i,j}[f] = P_{i+k,\,j+l}[f]\,,$$

ce que l'on peut, du reste, vérifier directement sans difficulté.

Comme on le voit, toutes ces propriétés de nos opérateurs résultent immédiatement de la formule élémentaire:

$$\int_\theta^t \frac{(\tau-\theta)^{i-1}(t-\tau)^{j-1}}{(i-1)!\,(j-1)!}\,d\tau = \int_\theta^t \frac{(t-\tau)^{i-1}(\tau-\theta)^{j-1}}{(i-1)!\,(j-1)!}\,d\tau = \frac{(t-\theta)^{i+j-1}}{(i+j-1)!}$$

Nous considérons maintenant une suite dénombrable de coefficients numériques $\alpha_{i,j,k,\ldots,m}$ dépendant de plusieurs indices,

....

chaque indice pouvant prendre toutes les valeurs entières, positives ou nulle, définissant un élément de fonction analytique à deux variables:

$$(8).- \quad \Phi(X,Y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\cdots\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{i,j,k,\ldots,m}\, X^i Y^{j+k+\ldots+m}$$

L'opérateur linéaire, défini par la série multiple:

$$(9).- \quad \mathcal{P}[f] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\cdots\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{i,j,k,\ldots,m}\, P_{i,j+k+\ldots+m}[f] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\cdots\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{i,j,k,\ldots,m}\, P_i Q_{j+k+\ldots+m}[f] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\cdots\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{i,j,k,\ldots,m}\, P_i Q_j Q_k \cdots Q_m[f]$$

a un sens dans la classe L, comme celà résulte des inégalités de Cauchy, auxquelles satisfont les $\alpha_{i,j,k,\ldots,m}$; la série (9) converge uniformément dans toute région d'holomorphie de f par rapport à y et à z, pourvu que t soit assez petit.

$\Phi(X,Y)$ sera encore l'indicatrice de l'opérateur $\mathcal{P}$. Nous désignerons par ($\mathcal{P}$) l'ensemble de tous ces opérateurs. Certains d'entre eux pourront, éventuellement, être étendus à des espaces fonctionnels plus vastes que la classe L. Ils sont deux à deux permutables; si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont pour indicatrices respectives $\Phi(X,Y)$ et $\Psi(X,Y)$, l'opérateur produit $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P}$ a pour indicatrice la fonction $\Phi\Psi$, comme le prouve la relation (7).

2.- — Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $\mathcal{D}$ de la fin du chpître précédent fait partie de l'ensemble ($\mathcal{P}$) et nous déterminerons ensuite son indicatrice.

Nous avons:

$$(10).- \quad \mathcal{D}[f] = \frac{1}{V}.f(y,z,t) + a\int_0^t f(y,z,\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\pi V}\int_0^t d\tau \iiint_{T_{yz\tau}} \frac{e^{-aV(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2} \times$$

$$\times \Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta - \frac{a^2}{4\pi}\iiint_{T_{yzt}} \frac{e^{-a\tau}}{r} f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau -$$

$$- \frac{a^4 V}{8\pi}\int_0^t d\tau \iiint_{T_{yz\tau}} e^{-aV(\tau-\theta)} j''\left[a^2\,\frac{V^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta,$$

. . . .

Γ_{yzt} étant le volume du cône de révolution, défini par les inégalités:

$$0 \leq \tau \leq t \quad , \quad (\eta-y)^2+(\zeta-z)^2-V^2(t-\tau)^2 \leq 0$$

Supposant que $f(y,z,t)$ appartienne à la classe L et que t soit assez petit, nous allons évaluer successivement les différents termes de $\mathcal{D}[f]$, en fonction d'opérateurs $P_{i,j}[f]$; en utilisant la formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables.

Tout d'abord:

$$(11) \qquad \frac{1}{V} f(y,z,t) + \alpha\int_0^t f(y,z,\tau)\,d\tau = \frac{1}{V} P_{0,0}[f] + \alpha P_{0,1}[f]$$

Pour la première intégrale,

$$\frac{1}{2\pi V}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma_{yz\tau}} \frac{e^{-\alpha V(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2}\,\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta \,,$$

nous avons, en prenant des coordonnées semi-polaires, autour de la droite $\eta=y$, $\zeta=z$:

$$\eta-y = r\cos\varphi \;,\quad \zeta-z = r\sin\varphi \;,\quad d\zeta\,d\eta = r\,dr\,d\varphi \,,$$

$$\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta) = g(\eta,\zeta,\theta) = g(y,z,\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\Big[g'_y(y,z,\theta)\cos\varphi +$$

$$+\, g'_z(y,z,\theta)\sin\varphi\Big]^{(n)},$$

$$\int_0^{2\pi}\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\,d\varphi = 2\pi\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2i}\Delta_i\, g(y,z,\theta)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{V(\tau-\theta)} r\,dr\int_0^{2\pi}\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\,d\varphi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}(i!)^2}\,\Delta_i\, g(y,z,\theta)\int_0^{V(\tau-\theta)} r^{2i+1}\,dr =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[V(\tau-\theta)]^{2i+2}}{2^{2i+1}\, i!\,(i+1)!} \Delta_i\, g(y,z,\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[V(\tau-\theta)]^{2i+2}}{2^{2i+1}\, i!\,(i+1)!} \Delta_{i+1} f(y,z,\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[V(\tau-\theta)]^{2i}}{2^{2i-1}(i-1)!\, i!} \Delta_i f(y,z,\theta) \qquad e^{-aV(\tau-\theta)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-aV(\tau-\theta)]^j}{j!}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{1}{2\pi V} \iiint_{\Gamma_{yz\tau}} \frac{e^{-aV(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2} \Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V^{2i}(-aV)^j}{2^{2i-1}(i-1)!\, i!\, j!} \times$$

$$\times \int_0^{\tau} (\tau-\theta)^{2i+j-2} \Delta_i f(y,z,\theta)\, d\theta$$

$$(12) \quad \frac{1}{2\pi V} \int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma_{yz\tau}} \frac{e^{-aV(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2} \Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V^{2i}(-aV)^j}{2^{2i-1}(i-1)!\, i!\, j!} \times$$

$$\times \int_0^t \Delta_i f(y,z,\theta)\, d\theta \int_{\theta}^{t} (\tau-\theta)^{2i+j-2} d\tau = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2i+j-2)!\, V^{2i}(-aV)^j}{2^{2i-1}(i-1)!\, i!\, j!} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{(t-\theta)^{2i+j-1}}{(2i+j-1)!} \Delta_i f(y,z,\theta)\, d\theta = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2i+j-2)!\, V^{2i}(-aV)^j}{2^{2i-1}(i-1)!\, i!\, j!} P_{i,j}[f]$$

Pour la deuxième intégrale de $\mathcal{D}$,

nous avons de même : $\displaystyle \frac{a^2}{4\pi} \iiint_{\Gamma_{yzt}} \frac{e^{-a\tau}}{\tau} f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$

. . . . . .

$$\int_0^{2\pi} f(\eta,\zeta,\tau)\,d\varphi = 2\pi\sum_{i=0}^{\infty}\frac{r^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}\Delta_i f(y,z,\tau) \qquad e^{-\alpha r} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\alpha r)^j}{j!},$$

$$\int_0^{V(t-\tau)} e^{-\alpha r}dr\int_0^{2\pi} f(\eta,\zeta,\tau)\,d\varphi = 4\pi\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^j}{2^{2i+1}(i!)^2 j!}\Delta_i f(y,z,\tau)\int_0^{V(t-\tau)} r^{2i+j}\,dr =$$

$$= 4\pi\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^j\,[V(t-\tau)]^{2i+j+1}}{2^{2i+1}(i!)^2 j!\,(2i+j+1)}\Delta_i f(y,z,\tau) =$$

$$= \frac{4\pi}{\alpha^2 V}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{V^{2i}(-\alpha V)^j(t-\tau)^{2i+j-1}}{2^{2i+1}(i!)^2(j-2)!\,(2i+j-1)}\Delta_i f(y,z,\tau)$$

$$\frac{\alpha^2}{4\pi}\iiint_{T_{yzt}}\frac{e^{-\alpha r}}{r} f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau =$$

$$(13)\qquad = \frac{1}{2V}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2i+j-2)!\,V^{2i}(-\alpha V)^j}{2^{2i}(i!)^2(j-2)!}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{2i+j-1}}{(2i+j-1)!}\Delta_i f(y,z,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2V}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2i+j-2)!\,V^{2i}(-\alpha V)^j}{2^{2i}(i!)^2(j-2)!}P_{i,j}[f]$$

Pour la troisième, enfin,

$$\frac{\alpha^4 V}{8\pi}\int_0^t d\tau\iiint_{T_{yz\tau}} e^{-\alpha V(\tau-\theta)}\, j''\left[\alpha^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\ :$$

$$j''\left[\alpha^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\left[\alpha^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]^{j-2}}{(j-2)!\,j!} =$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \left[\frac{\alpha V(\tau-\theta)}{2}\right]^{2j-4} \cdot \frac{\left[1-\frac{r^2}{V^2(\tau-\theta)^2}\right]^{j-2}}{(j-2)!\,j!} = \sum_{j=2}^{\infty} \left[\frac{\alpha V(\tau-\theta)}{2}\right]^{2j-4} \cdot \frac{1}{(j-2)!\,j!} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{\ell=1}^{j-2} (-1)^{\ell} \, \frac{(j-2)(j-3)\ldots(j-\ell-1)}{\ell!} \left[\frac{r}{V(\tau-\theta)}\right]^{2\ell} \right\} =$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2j-4} \sum_{\ell=0}^{j-2} \frac{(-1)^{\ell} \left[V(\tau-\theta)\right]^{2j-2\ell-4} r^{2\ell}}{\ell!\,(j-\ell-2)!}$$

$$\int_0^{V(\tau-\theta)} r\, j'' \left[\alpha^2 \, \frac{V^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right] dr \int_0^{2\pi} f(\eta,\zeta,\theta)\, d\theta =$$

$$= 2\pi \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha^{2j-4}\, \Delta_i f(y,z,\theta)}{2^{2i+2j-4}\,(i!)^2\, j!} \sum_{\ell=0}^{j-2} \frac{(-1)^{\ell} \left[V(\tau-\theta)\right]^{2j-2\ell-4}}{\ell!\,(j-\ell-2)!} \int_0^{V(\tau-\theta)} r^{2i+2\ell+1}\, dr =$$

$$= 8\pi \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha^{2j-4} \left[V(\tau-\theta)\right]^{2i+2j-2} \Delta_i f(y,z,\theta)}{2^{2i+2j-1}\,(i!)^2\, j!} \sum_{\ell=0}^{j-2} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!\,(j-\ell-2)!\,(i+\ell+1)}$$

Nous avons:

$$(13') \qquad \sum_{\ell=0}^{j-2} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!\,(j-\ell-2)!\,(i+\ell+1)} = \frac{1}{(i+1)(i+2)\ldots(i+j-1)},$$

. . . . . .

Il suffit pour le voir de décomposer en fractions simples la fraction $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots\dots(x+j-1)}$:

$$\frac{1}{(x+1)\dots\dots(x+\ell+1)\dots\dots(x+j-1)} = \sum_{\ell=0}^{j-2} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\,(j-\ell-2)!\,(x+\ell+1)}$$

D'autre part, $\quad e^{-aV(\tau-\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{[-aV(\tau-\theta)]^k}{k!}$

Par suite:

$$\frac{a^4V}{8\pi}\int_0^t d\tau \iiint_{T_{yz\tau}} e^{-aV(\tau-\theta)}\, j''\left[a^2\,\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{V^{2i}(-aV)^{2j+k}}{2^{2i+2j-1}\,i!\,j!\,(i+j-1)!\,k!}\int_0^t d\tau\int_0^\tau (\tau-\theta)^{2i+2j+k-2}\Delta_i f(y,z,\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i+2j+k-2)!\,V^{2i}(-aV)^{2j+k}}{2^{2i+2j-1}\,i!\,j!\,(i+j-1)!\,k!}\int_0^t \frac{(t-\theta)^{2i+2j+k-1}}{(2i+2j+k-1)!}\Delta_i f(y,z,\theta)\,d\theta =$$

(14) $$= \frac{1}{V}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i+2j+k-2)!\,V^{2i}(-aV)^{2j+k}}{2^{2i+2j-1}\,i!\,j!\,(i+j-1)!\,k!}\,P_{i,2j+k}[f]$$

En réunissant tous ces résultats et en posant:

(15) $$\alpha_{i,j} = \frac{-(2i+j-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!\,j!}, \qquad \beta_{i,j} = \frac{-(2i+j-2)!}{2^{2i}(i!)^2(j-2)!}$$

$$\gamma_{i,j,k} = \frac{-(2i+2j+k-2)!}{2^{2i+2j-1}\,i!\,j!\,(i+j-1)!\,k!},$$

......

nous avons:

$$(16)\qquad V\mathcal{D}[f] = P_{0,0}[f] + aVP_{0,1}[f] + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{i,j} V^{2i}(-aV)^{j} P_{i,j}[f] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \beta_{i,j} V^{2i}(-aV)^{j} P_{i,j}[f] + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,j,k} V^{2i} \times$$

$$\times (-aV)^{2j+k} P_{i,2j+k}[f] \quad ,$$

dont l'indicatrice est:

$$(17)\qquad \Phi(X,Y) = 1 + aVY + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{i,j}(V^2X)^{i}(-aVY)^{j} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \beta_{i,j}(V^2X)^{i}(-aVY)^{j} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,j,k}(V^2X)^{i}(-aVY)^{2j+k}$$

Les séries multiples composant $\Phi(X,Y)$ sont absolument et uniformément convergentes à l'intérieur des cercles $|X| < \frac{1}{V^2}$, $|Y| < \frac{1}{aV}$. A l'intérieur de ces cercles, $\Phi(X,Y)$ est une fonction holomorphe d'X et d'Y et $\mathcal{D}[f]$ fait bien partie de l'ensemble ($\mathcal{P}$).

3 - Nous allons maintenant calculer les sommes des séries multiples composant $\Phi(X,Y)$.

Pour simplifier l'écriture dans ce calcul, nous remplaçons V^2X par X, $-aVY$ par Y, $\Phi(X,Y)$ devient alors:

$$(18)\qquad \Psi(X,Y) = 1 - Y + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{i,j} X^{i} Y^{j} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \beta_{i,j} X^{i} Y^{j} +$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,j,k} X^{i} Y^{2j+k}$$

Pour calculer la somme de la première série, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{i,j} \times X^{i} Y^{j}$, nous l'écrivons:

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!} X^{i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2i+j-2)!}{(2i-2)!\,j!} Y^{j}$$

Nous avons:

$$\frac{(2i+j-2)!}{(2i-2)!\,j!} Y^{j} = \frac{(2i-1)2i\ldots(2i+j-2)}{j!} Y^{j}$$

et par suite:
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2i+j-2)!}{(2i-2)!\,j!} Y^{j} = \frac{1}{(1-Y)^{2i-1}}$$

......

Nous avons donc:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{i,j} X^i Y^j = -(1-Y)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!}\left[\frac{X}{(1-Y)^2}\right]^i =$$

$$= -(1-Y)\left\{\frac{X}{2(1-Y)^2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1.3\ldots\ldots(2i-3)}{2.4\ldots\ldots 2i}\left[\frac{X}{(1-Y)^2}\right]^i\right\} =$$

(19) $$= (1-Y)\left[\sqrt{1-\frac{X}{(1-Y)^2}} - 1\right] = \sqrt{(1-Y)^2 - X} - 1 + Y$$

Nous écrivons de même la deuxième série, $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \beta_{i,j} X^i Y^j$:

$$-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2}\, X^i \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2i+j-2)!}{(2i)!\,(j-2)!}\, Y^j$$

Nous avons:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2i+j-2)!}{(2i)!\,(j-2)!}\, Y^j = Y^2\left[1+\sum_{j=3}^{\infty} \frac{(2i+1)(2i+2)\ldots(2i+j-2)}{(j-2)!}\, Y^{j-2}\right] = \frac{Y^2}{(1-Y)^{2i+1}}.$$

Par suite:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \beta_{i,j} X^i Y^j = -\frac{Y^2}{1-Y}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2}\left[\frac{X}{(1-Y)^2}\right]^i =$$

(20) $$= -\frac{Y^2}{1-Y}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{X}{(1-Y)^2}}} = -\frac{Y^2}{\sqrt{(1-Y)^2 - X}}$$

Pour la troisième série, $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,j,k} X^i Y^{2j+k}$,

nous l'écrivons:

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-1}\,i!\,j!\,(i+j-1)!} X^i Y^{2j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i+2j+k-2)!}{k!\,(2i+2j-2)!}\, Y^k$$

Nous avons:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i+2j+k-2)!\ Y^k}{k!\ (2i+2j-2)!} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i+2j-1)(2i+2j)\dots(2i+2j+k-2)Y^k}{k!} = \frac{1}{(1-Y)^{2i+2j-1}}$$

Par suite

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,j,k} X^i Y^{2j+k} = -(1-Y)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-1}\, i!\, j!\, (i+j-1)!}\left[\frac{X}{(1-Y)^2}\right]^i \cdot \left[\frac{Y^2}{(1-Y)^2}\right]^j =$$

$$= -(1-Y)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-1}\, i!\, j!\, (i+j-1)!} U^i W^j = (1-Y)\, g(U,W)$$

en posant:
$$\frac{X}{(1-Y)^2} = U \quad , \qquad \frac{Y^2}{(1-Y)^2} = W$$

Nous avons:

$$\frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}\, j!\,(j-1)!} = \frac{1.3\ldots\ldots(2j-3)}{2.4\ldots\ldots 2j}$$

$$\frac{(2j)!}{2^{2j+1}\ (j!)^2} = \frac{1.3\ldots\ldots(2j-1)}{2\times 2.4\ldots\ldots 2j}\,.$$

$$\frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-1}\, i!\, j!\,(i+j-1)!} = \frac{1.3.\ldots\ldots(2i-3)(2i-1)(2i+1)\ldots(2i+2j-3)}{2.4\ldots\ldots 2i \times 2.4\ldots\ldots 2j}$$

$$-\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1.3\ldots\ldots(2j-3)}{2.4\ldots\ldots 2j} W^j = \sqrt{1-W} - 1 + \frac{W}{2} \qquad ,$$

$$-\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1.3\ldots\ldots(2j-1)}{2.4\ldots\ldots 2j} W^j = 1 + \frac{W}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-W}}$$

$$-\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2i-1)(2i+1)\ldots(2i+2j-3)}{2.4\ldots\ldots 2j} W^j = 1 + \frac{2i-1}{2} W - \frac{1}{(1-W)^{\frac{2i-1}{2}}}$$

D'où: $g(U,W) = \sqrt{1-W} - 1 + \frac{W}{2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{W}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-W}}\right)U\ +$

$$+\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1.3\ldots\ldots(2i-3)}{2.4\ldots\ldots 2i} U^i \left[1+\frac{2i-1}{2}W - \frac{1}{(1-W)^{\frac{2i-1}{2}}}\right] = \sqrt{1-W} - 1 + \frac{W}{2} + \frac{U}{2}\left(1+\frac{W}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-W}}\right) + $$

$$+1-\frac{U}{2}-\sqrt{1-U}+\frac{W}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}}-1-\frac{U}{2}\right)+\sqrt{1-W}\left[\sqrt{1-\frac{U}{1-W}}-1+\frac{U}{2(1-W)}\right]=$$

$$=\sqrt{1-U-W}-\sqrt{1-U}+\frac{W}{2\sqrt{1-U}}=\frac{1}{1-Y}\left[\sqrt{1-X-2Y}-\sqrt{(1-Y)^2-X}+\frac{Y^2}{2\sqrt{(1-Y)^2-X}}\right]$$

Enfin:

$$(21)\qquad \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^{1}_{i,j,k}X^{i}Y^{2j+k}=\sqrt{1-X-2Y}-\sqrt{(1-Y)^2-X}+\frac{Y^2}{2\sqrt{(1-Y)^2-X}}$$

En rassemblant les résultats(I9),(20),(2I), nous obtenons finalement:

$$(22)\qquad \Psi(X,Y)=\sqrt{1-X-2Y}\quad,$$

et pour l'indicatrice proprement dite de $V\mathcal{D}[f]$:

$$(23)\qquad \Phi(X,Y)=\sqrt{1-V^2X+2\alpha VY}\quad,$$

résultat remarquablement simple,eu égard à la complexité de $\mathcal{D}[f]$, donné par la formule (IO).

4.- Nous reprenons maintenant l'équation (34)du chapitre I:

$$(24)\qquad \mathcal{D}_1[\gamma]+\mathcal{D}_2[\gamma]=\mathcal{A}(y,z,t)\quad,$$

le second membre est connu,le premier membre est un opérateur de l'ensemble($\mathcal{G}$),ayant pour indicatrice

$$\frac{1}{V_1}\sqrt{1-V_1^2X+2\alpha_1V_1Y}+\frac{1}{V_2}\sqrt{1-V_2^2X+2\alpha_2V_2Y}$$

Si,la fonction inconnue $\gamma(y,z,t)$ appartient à la classe L ,les opérateurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont permutables:

$$(25)\qquad \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[\gamma]=\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[\gamma]$$

En outre,les opérateurs itérés $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2$ ont,respectivement,pour indicatrices

$$\frac{1}{V_1^2}\left(1-V_1^2X+2\alpha_1V_1Y\right)\ ,\quad \frac{1}{V_2^2}\left(1-V_2^2X+2\alpha_2V_2Y\right)\ ,$$

de sorte que:

$$(26)\qquad \mathcal{D}_1\mathcal{D}_1[\gamma] = \frac{1}{V_1^2}\gamma(y,z,t) - \int_0^t (t-\tau)\Delta_1\gamma(y,z,\tau)\,d\tau + \frac{2a_1}{V_1}\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau$$

$$(27)\qquad \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2[\gamma] = \frac{1}{V_2^2}\gamma(y,z,t) - \int_0^t (t-\tau)\Delta_1\gamma(y,z,\tau)\,d\tau + \frac{2a_2}{V_2}\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau$$

En appliquant aux deux membres de (24) l'opérateur $\mathcal{D}_1-\mathcal{D}_2$, nous obtenons, compte tenu de (25),(26) et (27):

$$(28)\qquad \left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\gamma(y,z,t) + 2\left(\frac{a_1}{V_1}-\frac{a_2}{V_2}\right)\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau = \mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha],$$

ou bien :

$$(29)\qquad \left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\gamma'_t(y,z,t) + 2\left(\frac{a_1}{V_1}-\frac{a_2}{V_2}\right)\gamma(y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha]\right\},$$

équation différentielle, linéaire du premier ordre, à la résolution de laquelle se trouve ramenée celle de notre équation intégro-différentielle (24).

Nous avons les conditions initiales:

$$(30)\qquad \gamma(y,z,0) = \alpha(0,y,z), \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t)\right]_{t=0} = \beta(0,y,z)$$

Nous devons vérifier que ces conditions initiales, (surabondantes), sont bien compatibles, c'est à dire que:

$$(31)\qquad \left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\beta(0,y,z) + 2\left(\frac{a_1}{V_1}-\frac{a_2}{V_2}\right)\alpha(0,y,z) = \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha]\right\}\right\}_{t=0}$$

.....

Or, nous avons:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{D}_1[\mathfrak{A}]-\mathcal{D}_2[\mathfrak{A}]\right\}\right\}_{t=0} = \left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right) A(y,z,0) + (a_1-a_2)\,\mathfrak{A}(y,z,0),$$

$$A(y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A}(y,z,t) \quad ,$$

$$A(y,z,0) = (a_1+a_2)\,\alpha(0,y,z) + \left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\beta(0,y,z) \quad ,$$

$$\mathfrak{A}(y,z,0) = \left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\alpha(0,y,z) \quad ,$$

d'où (3I).

Ensuite, $\gamma(y,z,t)$ est déterminée d'une façon unique.

Il nous restera à étendre ce procédé de résolution aux fonctions $\gamma(y,z,t)$ n'appartenant plus à la classe linéaire L. Comme dans le cas de l'équation des ondes sphériques, il nous suffira de démontrer la légitimité des relations (25), (26) et (27), lorsque γ est seulement telle qu'elles aient un sens.

Auparavant, nous allons donner quelques compléments relatifs à l'étude directe d'un cas particulier simple et à l'étude du même problème pour l'équation des ondes amorties.

5.— Lorsque les données $\alpha(x,y,z)$ et $\beta(x,y,z)$ se réduisent à des fonctions de x seul, la fonction inconnue $u(x,y,z,t)$ se réduit à une fonction de deux variables $u(x,t)$ et l'inconnue auxiliaire $\gamma(y,z,t)$ à une fonction de t, $\gamma(t)$

Les équations (I) et (2) du chapître I se réduisent alors à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a_1}{V_1}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \,, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a_2}{V_2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \,, \tag{33}$$

c'est à dire que l'on retombe sur l'équation bien connue, dite " des télégraphistes".

La solution du problème posé au début du chapître I, qui résulte naturellement des formules de résolution du chapître I, peut alors être obtenue directement, par une méthode plus simple, en fonction des données et de l'inconnue auxiliaire $\gamma(t)$.

Il s'agit toujours d'un problème mixte, hyperbolique, de type Dirichlet. Par le changement de variables et de fonction inconnue:

$$(34)\qquad \begin{aligned} \xi &= a_1 x \\ \tau &= a_1 V_1 t \\ v(\xi,\tau) &= e^{\tau} u(x,t)\,, \end{aligned}$$

nous ramenons d'abord l'équation (32) à l'équation:

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + v = 0$$

Nous avons, entre les données relatives à l'équation (32) et celles relatives à l'équation (35), les relations suivantes:

$$(36)\qquad \begin{aligned} v(\xi,0) &= \alpha_1(\xi) = u(x,0) = \alpha(x) \\ \left[\frac{\partial}{\partial\tau} v(\xi,\tau)\right]_{\tau=0} &= \beta_1(\xi) = \alpha(x) + \frac{1}{a_1 V_1}\beta(x) \\ v(0,\tau) &= \gamma_1(\tau) = e^{\tau}\gamma(t) \end{aligned}$$

Nous obtenons alors la solution du problème mixte, relatif à l'équation (35), par application de la méthode classique de Riemann, la fonction auxiliaire étant

$$W(\eta,\theta) = j\left[\frac{(\tau-\theta)^2-(\eta-\xi)^2}{4}\right],$$

$j(\lambda)$ étant toujours la même fonction de Basset, et de la méthode des images.

Les résultats sont les suivants:

I° dans le milieu 1, $(\xi \geq 0)$, nous avons pour $\xi \leq \tau$:

$$\begin{aligned} (37)\qquad v(\xi,\tau) = {} & \gamma_1(\tau-\xi) + \frac{\xi}{2}\int_0^{\tau-\xi} j'\left[\frac{(\tau-\theta)^2-\xi^2}{4}\right]\gamma_1(\theta)\,d\theta \, + \\ & + \frac{1}{2}\Bigg\{\alpha_1(\tau+\xi) - \alpha_1(\tau-\xi) + \int_0^{\tau+\xi}\Big\{\frac{\tau}{2} j'\left[\frac{\tau^2-(\eta-\xi)^2}{4}\right]\alpha_1(\eta) \, + \\ & + j\left[\frac{\tau^2-(\eta-\xi)^2}{4}\right]\beta_1(\eta)\Big\}\,d\eta - \int_0^{\tau-\xi}\Big\{\frac{\tau}{2} j'\left[\frac{\tau^2-(\eta+\xi)^2}{4}\right]\alpha_1(\eta) \, + \\ & + j\left[\frac{\tau^2-(\eta+\xi)^2}{4}\right]\beta_1(\eta)\Big\}\,d\eta\Bigg\} \end{aligned}$$

. . . .

2° dans le milieu 2, $(\xi \leqslant 0)$, pour $-\xi \leqslant \tau$:

(38)
$$\begin{aligned} v(\xi,\tau) = {} & \gamma_1(\tau+\xi) - \frac{\xi}{2}\int_0^{\tau+\xi} j'\left[\frac{(\tau-\theta)^2-\xi^2}{4}\right]\gamma_1(\theta)\,d\theta + \\ & + \frac{1}{2}\left\{\alpha_1(\xi-\tau) - \alpha_1(-\xi-\tau) + \int_0^{\tau-\xi}\left\{\frac{\tau}{2}\, j'\left[\frac{\tau^2-(\eta+\xi)^2}{4}\right]\alpha_1(-\eta) + \right.\right. \\ & \left. + j\left[\frac{\tau^2-(\eta+\xi)^2}{4}\right]\beta_1(-\eta)\right\} d\eta - \int_0^{\tau+\xi}\left\{\frac{\tau}{2}\, j'\left[\frac{\tau^2-(\eta-\xi)^2}{4}\right]\alpha_1(-\eta) + \right. \\ & \left.\left. + j\left[\frac{\tau^2-(\eta-\xi)^2}{4}\right]\beta_1(-\eta)\right\} d\eta\right\} \end{aligned}$$

Nous en déduisons pour les solutions des équations (32) et (33):

I° dans le milieu I, (équation 32) , et pour $x \leqslant V_1 t$:

(39)
$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & e^{-\alpha_1 x}\gamma\left(t-\frac{x}{V_1}\right) + \frac{\alpha_1^2 V_1 x}{2}\int_0^{t-\frac{x}{V_1}} e^{-\alpha_1 V_1 (t-\tau)} \times \\ & \times j'\left[\alpha_1^2\,\frac{V_1^2(t-\tau)^2-x^2}{4}\right]\gamma(\tau)\,d\tau + \frac{e^{-\alpha_1 V_1 t}}{2}\left\{\alpha(V_1 t+x) - \alpha(V_1 t - x) + \right. \\ & + \alpha_1\int_0^{V_1 t+x}\left\{\frac{\alpha_1 V_1 t}{2}\, j'\left[\alpha_1^2\,\frac{V_1^2 t^2-(\xi-x)^2}{4}\right]\alpha(\xi) + j\left[\alpha_1^2\,\frac{V_1^2 t^2-(\xi-x)^2}{4}\right]\times\right. \\ & \left.\times\left[\alpha(\xi) + \frac{1}{\alpha_1 V_1}\,\beta(\xi)\right]\right\} d\xi - \alpha_1\int_0^{V_1 t-x}\left\{\frac{\alpha_1 V_1 t}{2}\, j'\left[\alpha_1^2\,\frac{V_1^2 t^2-(\xi+x)^2}{4}\right]\alpha(\xi) + \right. \\ & \left.\left. + j\left[\alpha_1^2\,\frac{V_1^2 t^2-(\xi+x)^2}{4}\right]\left[\alpha(\xi) + \frac{1}{\alpha_1 V_1}\,\beta(\xi)\right]\right\} d\xi\right\} \end{aligned}$$

2° dans le milieu 2, [équation(33)], et pour $-x \leqslant V_2 t$:

(40)
$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & e^{\alpha_2 x}\gamma\left(t+\frac{x}{V_2}\right) - \frac{\alpha_2^2 V_2 x}{2}\int_0^{t+\frac{x}{V_2}} e^{-\alpha_2 V_2 (t-\tau)}\, j'\left[\alpha_2^2\,\frac{V_2^2(t-\tau)^2-x^2}{4}\right]\gamma(\tau)\,d\tau + \\ & + \frac{e^{-\alpha_2 V_2 t}}{2}\left\{\alpha(x-V_2 t) - \alpha(-x-V_2 t) + \alpha_2\int_0^{V_2 t-x}\left\{\frac{\alpha_2 V_2 t}{2}\, j'\left[\alpha_2^2\,\frac{V_2^2 t^2-(\xi+x)^2}{4}\right]\alpha(-\xi) + \right.\right. \\ & \left. + j\left[\alpha_2^2\,\frac{V_2^2 t^2-(\xi+x)^2}{4}\right]\left[\alpha(-\xi) + \frac{\beta(-\xi)}{\alpha_2 V_2}\right]\right\} d\xi - \alpha_2\int_0^{V_2 t+x}\left\{\frac{\alpha_2 V_2 t}{2} \times\right. \\ & \left.\left. \times j'\left[\alpha_2^2\,\frac{V_2^2 t^2-(\xi-x)^2}{4}\right]\alpha(-\xi) + j\left[\alpha_2^2\,\frac{V_2^2 t^2-(\xi-x)^2}{4}\right]\left[\alpha(-\xi) + \frac{\beta(-\xi)}{\alpha_2 V_2}\right]\right\} d\xi\right\} \end{aligned}$$

Nous avons ensuite:

(41) $$\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right]_{x=+0} = -\frac{1}{V_1}\gamma'(t) - a_1\gamma(t) + \frac{a_1^2 V_1}{2}\int_0^t e^{-a_1 V_1 (t-\tau)} \times$$
$$\times j'\left[\frac{a_1^2 V_1^2 (t-\tau)^2}{4}\right]\gamma(\tau)\,d\tau + e^{-a_1 V_1 t}\left\{\alpha'(V_1 t) + a_1\left[\left(1+\frac{a_1 V_1 t}{2}\right)\alpha(V_1 t) +\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a_1 V_1}\beta(V_1 t)\right] + \frac{a_1^3}{2}\int_0^{V_1 t}\xi\left\{\frac{a_1 V_1 t}{2}\, j''\left(a_1^2\,\frac{V_1^2 t^2 - \xi^2}{4}\right)\alpha(\xi) +\right.$$
$$\left.\left.+ j'\left(a_1^2\,\frac{V_1^2 t^2-\xi^2}{4}\right)\left[\alpha(\xi) + \frac{1}{a_1 V_1}\beta(\xi)\right]\right\} d\xi\right\}$$

(42). $$\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right]_{x=-0} = \frac{1}{V_2}\gamma'(t) + a_2\gamma(t) - \frac{a_2^2 V^2}{2}\int_0^t e^{-a_2 V_2 (t-\tau)} \times$$
$$\times j'\left[\frac{a_2^2 V_2^2 (t-\tau)^2}{4}\right]\gamma(\tau)\,d\tau + e^{-a_2 V_2 t}\left\{\alpha'(-V_2 t) - a_2\left[\left(1+\frac{a_2 V_2 t}{2}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\alpha(-V_2 t) + \frac{1}{a_2 V_2}\beta(-V_2 t)\right] - \frac{a_2^3}{2}\int_0^{V_2 t}\xi\left\{\frac{a_2 V_2 t}{2}\, j''\left[a_2^2\,\frac{V_2^2 t^2-\xi^2}{4}\right]\alpha(-\xi) +\right.$$
$$\left.\left.+ j'\left(a_2^2\,\frac{V_2^2 t^2-\xi^2}{4}\right)\left[\alpha(-\xi) + \frac{1}{a_2 V_2}\beta(-\xi)\right]\right\} d\xi\right\}$$

$\gamma(t)$ sera donc obtenue en résolvant l'équation intégrale:

(43) $$\mathcal{D}_1[\gamma] + \mathcal{D}_2[\gamma] = \mathcal{A}(t), \quad \text{avec :}$$

(44) $$\mathcal{D}[\gamma] = \frac{1}{V}\gamma(t) + a\int_0^t \gamma(\tau)\,d\tau - \frac{a^2 V}{2}\int_0^t \gamma(\tau)\,d\tau\int_\tau^t e^{-aV(\theta-\tau)} j'\left[\frac{a^2 V^2(\theta-\tau)^2}{4}\right] d\theta$$

(45) $$\mathcal{A}(t) = \int_0^t A(\tau)\,d\tau + \left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\alpha(0)$$

(46) $$A(t) = e^{-a_1 V_1 t}\left\{\alpha'(V_1 t) + a_1\left[\left(1+\frac{a_1 V_1 t}{2}\right)\alpha(V_1 t) + \frac{1}{a_1 V_1}\beta(V_1 t)\right] +\right.$$

$$+\frac{\alpha_1^3}{2}\int_0^{V_1t}\xi\left\{\frac{\alpha_1V_1t}{2}j''\left(\alpha_1^2\frac{V_1^2t^2-\xi^2}{4}\right)\alpha(\xi)+j'\left(\alpha_1^2\frac{V_1^2t^2-\xi^2}{4}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\alpha(\xi)+\frac{1}{\alpha_1V_1}\beta(\xi)\right]\right\}d\xi\right\}+e^{-\alpha_2V_2t}\left\{-\alpha'(-V_2t)+\alpha_2\left[\left(1+\frac{\alpha_2V_2t}{2}\right)\alpha(-V_2t)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_2V_2}\beta(-V_2t)\right]+\frac{\alpha_2^3}{2}\int_0^{V_2t}\xi\left\{\frac{\alpha_2V_2t}{2}j''\left(\alpha_2^2\frac{V_2^2t^2-\xi^2}{4}\right)\alpha(-\xi)+j'\left(\alpha_2^2\frac{V_2^2t^2-\xi^2}{4}\right)\left[\alpha(-\xi)+\frac{\beta(-\xi)}{\alpha_2V_2}\right]\right]$$

Pour résoudre l'équation intégrale (43),nous la décomposons encore au moyen d'opérateurs linéaires,permutables. Mais nous n'avons plus besoin de faire d'hypothèses restrictives, comme sur $\gamma(y,z,t)$. Pour cette décomposition,il nous suffit de supposer $\gamma(t)$ intégrable.

L'opérateur élémentaire que nous introduisons est le suivant:

$$Q'_0[\gamma]=\gamma(t)\ ,\quad Q'_i[\gamma]=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!}\,\gamma(\tau)\,d\tau\ ,$$

opérateur tel que

$$Q'_i\,Q'_j[\gamma]=Q'_j\,Q'_i[\gamma]=Q'_{i+j}[\gamma]$$

En procédant comme pour l'opérateur $\mathcal{D}$ de l'équation intégro-différentielle,défini plus haut par(IO) et au moyen de calculs plus simples,(on n'a plus à utiliser la formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables),nous obtenons:

$$(48)\qquad V\mathcal{D}[\gamma]=Q'_0[\gamma]+\alpha VQ'_1[\gamma]-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2i+j-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!\,j!}(-\alpha V)^{2i+j}Q'_{2i+j}[\gamma]$$

dont l'indicatrice est:

$$\Phi(Y)=1+\alpha VY-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2i+j-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!\,j!}(-\alpha VY)^{2i+j}$$

Nous avons:

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2i+j-2)!}{j!\,(2i-2)!}(aVY)^{2i}(-aVY)^{j}=-(1+aVY)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!}\times$$

$$\times\left(\frac{aVY}{1+aVY}\right)^{2i}=\sqrt{1+2aVY}-1-aVY\ ,$$ d'où: (49) $$\Phi(Y)=\sqrt{1+2aVY}$$

La résolution de l'équation intégrale(43) s'achève maintenant comme celle de l'équation intégro-différentielle(24).

$\mathcal{D}_1[\gamma]+\mathcal{D}_2[\gamma]$ est un opérateur de l'ensemble ($\mathcal{Q}'$),ayant pour indicatrice

$$\frac{1}{V_1}\sqrt{1+2a_1V_1Y}+\frac{1}{V_2}\sqrt{1+2a_2V_2Y}$$

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont permutables et nous avons:

$$\mathcal{D}\mathcal{D}[\gamma]=\frac{1}{V^2}\gamma(t)+\frac{2a}{V}\int_0^t\gamma(\tau)\,d\tau$$

En appliquant aux deux membres de (43) l'opérateur $\mathcal{D}_1-\mathcal{D}_2$ nous obtenons donc:

$$\left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\gamma(t)+2\left(\frac{a_1}{V_1}-\frac{a_2}{V_2}\right)\int_0^t\gamma(\tau)\,d\tau=\mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha]$$ ou:

(50) $$\left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\gamma'(t)+2\left(\frac{a_1}{V_1}-\frac{a_2}{V_2}\right)\gamma(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha]\right\}$$

avec les données initiales:

$$\gamma(0)=\alpha(0)\quad,\quad\gamma'(0)=\beta(0)\quad,$$

ces données sont encore compatibles:

$$\left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\beta(0)+2\left(\frac{a_1}{V_1}-\frac{a_2}{V_2}\right)\alpha(0)=\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha]\right\}\right\}_{t=0}\ ,$$

comme on le vérifie sans peine.

6.- Nous supposons maintenant que l'on étudie le même problème,posé au début du premier paragraphe du chapître I,pour l'équation des ondes amorties:

(51) $$\left(\Delta-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a^2\right)u=0\ ,\quad\text{avec}\quad\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

......

La solution du problème mixte, de type Dirichlet, les données étant toujours $\alpha(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$, s'obtient au moyen de l'inconnue auxiliaire $\gamma(x,y,z)$, M_0, M_1, N ayant toujours les mêmes significations, par les formules suivantes:

I° pour: $x \geqslant 0$, $x \leq V_1 t$:

(52)
$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \gamma\left(y,z,t-\frac{x}{V_1}\right) + 2x\int_x^{V_1 t} dr \times \\
&\times \frac{\partial}{\partial R} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2-x^2\right) + \frac{\alpha_1^2 x}{2}\int_x^{V_1 t} dr \Bigg[N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2-x^2\right) + \\
&+ \frac{\alpha_1^2 V_1^t r}{2}\int_0^{t-\frac{r}{V_1}} j''\left[\alpha_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] N(y,z,\tau,r^2-x^2)\, d\tau \Bigg] \\
&- \frac{x}{V_1 t} M_0(0,y,z,V_1^2t^2-x^2) + \frac{1}{2}\Bigg\{ \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} M_0\left[x-\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \\
&- \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} M_0\left[\lambda V_1 t - x, y, z, V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + t\int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} M_1\left[x-\lambda V_1 t, y, z,\right. \\
&\left., V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda - t\int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} M_1\left[\lambda V_1 t - x, \ldots\ldots\right] d\lambda + 2V_1^2 t^2 \times \\
&\times \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} (1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[x-\lambda V_1 t, \ldots\ldots\right] d\lambda - 2V_1^2 t^2 \int_{\frac{x}{V_1 t}} (1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\lambda V_1 t - x, \ldots\right] d\lambda \\
&- V_1 t \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} \lambda \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[x-\lambda V_1 t, \ldots\right] d\lambda - V_1 t \int_{\frac{x}{V_1 t}} \lambda \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[\lambda V_1 t - x, \ldots\right] d\lambda + \\
&+ \frac{\alpha_1^2 V_1^2 t^2}{2}\Bigg\{ \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} M_0\left[x-\lambda V_1 t, y, z, V_1^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda -
\end{aligned}
$$

$$- \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} M_0 \left[\lambda V_1 t - x , \ldots \right] d\lambda \Bigg\} + \frac{\alpha_1^2}{2V_1} \Bigg\{ \int_0^x r^2 j' \left(\alpha_1^2 \, \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4} \right) dr \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} M_1 \left[x - \lambda r ,\, y, z ,\, r^2 (1 - \lambda^2) \right] d\lambda + \int_x^{V_1 t} r^2 j' \left(\alpha_1^2 \, \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4} \right) dr \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^{\frac{x}{r}} M_1 \left[x - \lambda r, y, z, r^2 (1 - \lambda^2) \right] d\lambda - \int_{\frac{x}{r}}^{1} M_1 \left[\lambda r - x, y, z, r^2 (1 - \lambda^2) \right] d\lambda \right] \Bigg\}$$

$$+ \frac{\alpha_1^4 V_1 t}{4} \Bigg\{ \int_0^x r^2 j'' \left(\alpha_1^2 \, \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4} \right) dr \int_{-1}^{+1} M_0 \left[x - \lambda r, y, z, r^2 (1 - \lambda^2) \right] d\lambda +$$

$$+ \int_x^{V_1 t} r^2 j'' \left(\alpha_1^2 \, \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4} \right) dr \left[\int_{-1}^{\frac{x}{r}} M_0 \left[x - \lambda r, \ldots\ldots \right] d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{x}{r}}^{1} M_0 \left[\lambda r - x, \ldots\ldots \right] d\lambda \right] \Bigg\} \Bigg\}$$

2° pour $x \leq 0$, $-x \leq V_2 t$:

(53) $$u(x,y,z,t) = \gamma\left(y, z, t + \frac{x}{V_2}\right) - 2x \int_{-x}^{V_2 t} dr \frac{\partial}{\partial R} N\left(y, z, \ldots\right.$$

$$\left. \ldots, t - \frac{r}{V_2}, r^2 - x^2 \right) - \frac{\alpha_2^2 x}{2} \int_{-x}^{V_2 t} dr \left[N\left[y, z, t - \frac{r}{V_2}, r^2 - x^2 \right] + \frac{\alpha_2^2 V_2 r}{2} \int_0^{t - \frac{r}{V_2}} j'' \left[\alpha_2^2 \frac{V_2^2 (t - \tau)^2 - r^2}{4} \right] \right.$$

$$\left. \times N\left(y, z, \tau, r^2 - x^2 \right) d\tau \right] + \frac{x}{V_2 t} M_0 \left(0, y, z, V_2^2 t^2 - x^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Bigg\{ \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} M_0 \left[x - \lambda V_2 t , y, z, V_2^2 t^2 (1 - \lambda^2) \right] d\lambda - \quad \ldots\ldots$$

$$- \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} M_0\left[\lambda V_2 t - x, y, z, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + t \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} M_1\left[x - \lambda V_2 t, y, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, z, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda - t \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} M_1\left[\lambda V_2 t - x, \ldots\right] d\lambda + 2 V_2^2 t^2 \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} \times$$

$$\times M_0\left[x - \lambda V_2 t, \ldots\right] d\lambda - 2 V_2^2 t^2 \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} M_0\left[\lambda V_2 t - x, \ldots\right] d\lambda -$$

$$- V_2 t \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} \lambda \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[x - \lambda V_2 t, \ldots\right] d\lambda - \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} \lambda \frac{\partial}{\partial x} M_0\left[\lambda V_2 t - x, \ldots\right] d\lambda +$$

$$+ \frac{a_2^2 V_2^2 t^2}{2} \left\{ \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} M_0\left[x - \lambda V_2 t, y, z, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda - \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} M_0\left[\lambda V_2 t - x,\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\right] d\lambda \right\} + \frac{a_2^2}{2 V_2} \left\{ \int_0^{-x} r^2 j'\left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{+1} M_1\left[x - \lambda r, y, z, r^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda +\right.$$

$$+ \int_{-x}^{V_2 t} r^2 j'\left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \left[\int_{\frac{x}{r}}^{1} M_1\left[x - \lambda r, y, z, r^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda -\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-1}^{\frac{x}{r}} M_1\left[\lambda r - x, \ldots\right] d\lambda \right] \right\} + \frac{a_2^4 V_2 t}{4} \left\{ \int_0 r^2 j''\left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \times\right.$$

$$\times \int_{-1}^{+1} M_0\left[x - \lambda r, \ldots\right] d\lambda + \int_{-x}^{V_2 t} r^2 j''\left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \times$$

$$\left.\times \left[\int_{\frac{x}{r}}^{1} M_0\left[x - \lambda r, \ldots\right] d\lambda - \int_{-1}^{\frac{x}{r}} M_0\left[\lambda r - x, \ldots\right] d\lambda \right] \right\} \Big\}$$

Nous avons ensuite:

(54) $$\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z,t)\right]_{x=+0} = -\frac{1}{V_1}\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t) + \frac{1}{2\pi V_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{d\eta\, d\zeta\, d\tau}{(t-\tau)^2} \times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right) + \frac{a_1^2}{2}\int_0^{V_1 t} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2\right) dr +$$

$$+ \frac{a_1^4 V_1}{8\pi}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} j''\left[a_1^2 \frac{V_1^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right]\gamma(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{V_1}\alpha(V_1 t, y, z) + 2V_1 t^2\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial R} M_0\left(V_1 t\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 V_1^2 t^2\right) d\lambda +\right.$$

$$+\frac{t}{V_1}\int_0^1 \lambda M_1\left(V_1 t\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 V_1^2 t^2\right) d\lambda + \frac{a_1^2 V_1 t^2}{2}\int_0^1 \lambda M_0\left(V_1 t\sqrt{1-\lambda^2},\right.$$

$$\left.\left., y, z, \lambda^2 V_1^2 t^2\right) d\lambda\right] + \frac{a_1^2}{2V_1}\int_0^{V_1 t} j'\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\int_0^1 \lambda M_1\left(r\sqrt{1-\lambda^2},\right.\right.$$

$$\left.\left., y, z, \lambda^2 r^2\right) d\lambda\right] dr + \frac{1}{V_1}\int_0^1 \lambda M_1\left(V_1 t\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 V_1^2 t^2\right) d\lambda +$$

$$+\frac{a_1^4 V_1 t}{4}\int_0^{V_1 t} j''\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\int_0^1 \lambda M_0\left(r\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 r^2\right) d\lambda\right] dr$$

(55) $$\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z,t)\right]_{x=-0} = \frac{1}{V_2}\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t) - \frac{1}{2\pi V_2}\times$$

$$\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{d\eta\, d\zeta\, d\tau}{(t-\tau)^2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\zeta^2}\right) - \frac{a_2^2}{2}\int_0^{V_2 t} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_2}, r^2\right) dr -$$

$$\frac{a_2^4 V_2}{8\pi} \iiint_{\Gamma^2_{yzt}} j''\left[a_2^2 \, \frac{V_2^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \gamma(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \; -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{V_2}\alpha(-V_2 t, y, z) + 2V_2 t^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_0\left(-V_2 t\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 V_2^2 t^2\right) d\lambda \; + \right.$$

$$+ \frac{t}{V_2}\int_0^1 \lambda M_1\left(-V_2 t\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 V_2^2 t^2\right) + \frac{a_2^2 V_2 t^2}{2}\int_0^1 \lambda M_0\left(-V_2 t\sqrt{1-\lambda^2},\right.$$

$$\left., y, z, \lambda^2 V_2^2 t^2\right) d\lambda\Big] - \frac{1}{V_2}\int_0^1 \lambda M_1\left(-V_2 t\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 V_2^2 t^2\right) d\lambda \; -$$

$$- \frac{a_2^2}{2V_2}\int_0^{V_2 t} j'\left(a_2^2 \, \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \int_0^1 \lambda M_1\left(-r\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 r^2\right) d\lambda\right] dr \; -$$

$$- \frac{a_2^4 V_2 t}{4}\int_0^{V_2 t} j''\left(a_2^2 \, \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \int_0^1 \lambda M_0\left(-r\sqrt{1-\lambda^2}, y, z, \lambda^2 r^2\right) d\lambda\right] dr$$

Γ_{yzt} étant toujours le cône de révolution défini par les inégalités:

$$0 \leqslant \tau \leqslant t, \; (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 - V^2(t-\tau)^2 \leqslant 0$$

$\gamma(y, z, t)$ sera donc donnée par:

$$(56) \qquad \mathcal{D}_1[\gamma] + \mathcal{D}_2[\gamma] = \mathcal{A}(y, z, t), \text{ avec}$$

$$(57) \qquad \mathcal{D}[\gamma] = \frac{1}{V}\gamma(y, z, t) - \frac{1}{2\pi V}\int^t d\tau \iiint_{\Gamma} \frac{d\eta\, d\zeta\, d\theta}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1\gamma(\eta, \zeta, \theta)$$

$$-\frac{a^2}{4\pi}\iiint_{\Gamma_{yzt}}\frac{d\eta\, d\zeta\, d\tau}{r}\,\gamma(\eta,\zeta,\tau)-\frac{a^4 V}{8\pi}\int_0^t d\tau\iiint_{\Gamma_{yz\tau}} j''\left[a^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\, d\zeta\, d\theta$$

(58) $$a(y,z,t)=\frac{1}{V_1}\alpha(V_1t,y,z)+\frac{1}{V_2}\alpha(-V_2t,y,z)+2V_1t^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_0\left(V_1t\sqrt{1-\lambda^2},\right.$$

$$\left.y,z,\lambda^2V_1^2t^2\right)d\lambda+2V_2t^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_0\left(-V_2t\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2V_2^2t^2\right)d\lambda+\frac{t}{V_1}\int_0^1\lambda M_1$$

$$\left(V_1t\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2V_1^2t^2\right)d\lambda+\frac{t}{V_2}\int_0^1\lambda M_1\left(-V_2t\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2V_2^2t^2\right)d\lambda+$$

$$+\frac{a_2^2V_2t^2}{2}\int_0^1\lambda M_0\left(-V_2t\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2V_2^2t^2\right)d\lambda+$$

$$\frac{a_1^2V_1t^2}{2}\int_0^1\lambda M_0\left(V_1t\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2V_1^2t^2\right)d\lambda+\frac{1}{V_1}\int_0^t d\tau\int_0^1\lambda M_1\left(V_1\tau\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\right.$$

$$\left.\lambda^2V_1^2\tau^2\right)d\lambda+\frac{1}{V_2}\int_0^t d\tau\int_0^1\lambda M_1\left(-V_2\tau\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2V_2^2\tau^2\right)d\lambda+\frac{a_1^2}{2V_1}\int_0^t d\tau\int_0^{V_1\tau}$$

$$j'\left(a_1^2\frac{V_1^2\tau^2-r^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\int_0^1\lambda M_1\left(r\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2r^2\right)d\lambda\right]dr+\frac{a_2^2}{2V_2}\int_0^t d\tau\int_0^{V_2\tau}$$

$$j'\left(a_2^2\frac{V_2^2\tau^2-r^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\int_0^1\lambda M_1\left(-r\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2r^2\right)d\lambda\right]dr+\frac{a_1^4}{4V_1}\times$$

$$\times\int_0^{V_1t}r^3j''\left(a_1^2\frac{V_1^2t^2-r^2}{4}\right)dr\int_0^1\lambda M_0\left(r\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2r^2\right)d\lambda+$$

$$\frac{a_2^4}{4V_2}\int_0^{V_2t}r^3j''\left(a_2^2\frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)dr\int_0^1\lambda M_0\left(r\sqrt{1-\lambda^2},y,z,\lambda^2r^2\right)d\lambda$$

Pour $t=0$, les deux membres de (56) se réduisent à

$$\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)\alpha(0,y,z)$$

......

Pour résoudre(56),nous supposons encore que $\gamma(y,z,t)$ appartienne à la classe fonctionelle linéaire L ,définie au paragraphe I de ce chapître.

Nous décomposons alors l'opérateur $\mathfrak{D}[\gamma]$,donné par (57),au moyen de l'opérateur élémentaire:

$$P_{0,0}[\gamma]=\gamma(y,z,t),\quad P_{i,j}[\gamma]=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{2i+j-1}}{(2i+j-1)!}\Delta_i\gamma(y,z,\tau)\,d\tau ,$$

déjà considéré au paragraphe I.

Les calculs sont un peu plus simples que dans le paragraphe 2,en raison de l'absence des exponentielles.

Nous obtenons ainsi:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\iiint_{\Gamma_{yz\tau}}\frac{d\eta\, d\zeta\, d\theta}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1\gamma(\eta,\zeta,\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i V^{2i}P_{i,0}[\gamma] ,$$

avec

$$\alpha_i=-\frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!\,i!} ,$$

dont l'indicatrice est:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i V^{2i}X^i=\sqrt{1-V^2X}-1 \quad ;$$

$$-\frac{a^2V}{4\pi}\iiint_{\Gamma_{yzt}}\frac{d\eta\, d\zeta\, d\tau}{r}\gamma(\eta,\zeta,\tau)=\frac{(aV)^2}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i V^{2i}P_{i,2}[\gamma] ,$$

avec

$$\beta_i=-\frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2} ,$$

dont l'indicatrice est:

$$\frac{(aVX)^2}{2}\sum\beta_i V^{2i}X^i=-\frac{(aVX)^2}{2V\sqrt{1-V^2X}} \quad ;$$

$$-\frac{a^4V^2}{8\pi}\int_0^t d\tau\iiint_{\Gamma_{yz\tau}} j''\left[a^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\, d\zeta\, d\theta =$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\gamma_{i,j}V^{2i}(aV)^{2j}P_{i,2j}[\gamma] ,$$

avec

$$\gamma_{i,j}=-\frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-1}\,i!\,j!\,(i+j-1)!} ,$$

dont l'indicatrice est:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\gamma_{i,j}(V^2X)^i(aVY)^{2j}=\sqrt{1-V^2X-a^2V^2Y^2}-\sqrt{1-V^2X}+\frac{a^2V^2Y^2}{2\sqrt{1-V^2X}}$$

L'indicatrice de $V\mathcal{D}[\gamma]$ est donc:

$$\phi(X,Y)=\sqrt{1-V^2X-a^2V^2Y^2} \tag{59}$$

La résolution de l'équation (56) s'achève alors comme celle de l'équation (24) et se ramène à celle de l'équation intégrale:

$$\left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\gamma(y,z,t)-(a_1^2-a_2^2)\int_0^t(t-\tau)\gamma(y,z,\tau)\,d\tau=\mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha] ,$$

ou à celle de l'équation différentielle linéaire,à coefficients constants,du second ordre:

$$\left(\frac{1}{V_1^2}-\frac{1}{V_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(y,z,t)-(a_1^2-a_2^2)\gamma(y,z,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\mathcal{D}_1[\alpha]-\mathcal{D}_2[\alpha]\right\} , \tag{60}$$

avec lés conditions initiales.

$$\gamma(y,z,0)=\alpha(0,y,z);\quad\left[\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t)\right]_{t=0}=\beta(0,y,z)$$

$\gamma(y,z,t)$ est donc encore déterminée d'une façon unique. La méthode de la variation des constantes permet d'obtenir son expression.

7.- Nous revenons maintenant à l'équation intégro-différentielle (24):

$$\mathcal{D}_1[\gamma]+\mathcal{D}_2[\gamma]=\alpha(y,z,t) \quad , \text{ avec}$$

$$\mathcal{D}[\gamma]=\frac{1}{V}\gamma(y,z,t)+a\int_0^t\gamma(y,z,\tau)\,d\tau-\frac{1}{2\pi V}\int_0^t d\tau\iiint_{\Gamma_{yz\tau}}\frac{e^{-aV(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2} \tag{61}$$

$$\Delta_1\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta-\frac{a^2}{4\pi}\iiint_{\Gamma_{yzt}}\frac{e^{-a\tau}}{\tau}\gamma(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau-\frac{a^4V}{8\pi}$$

$$\times\int_0^t d\tau\iiint_{\Gamma_{yz\tau}}e^{-aV(\tau-\theta)}j''\left[a^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\gamma(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$

....

et nous allons justifier la méthode de résolution adoptée, pour des fonctions γ qui n'appartiendraient pas à la classe linéaire L.

Il nous suffira pour celà d'établir la légitimité des relations (25), (26) et (27):

$$(25)\qquad \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[\gamma] = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[\gamma]$$

$$(26)\qquad \mathcal{D}_1\mathcal{D}_1[\gamma] = \frac{1}{V_1^2}\gamma(y,z,t) - \int_0^t (t-\tau)\Delta_1\gamma(y,z,\tau)\,d\tau + \frac{2a_1}{V_1}\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau$$

$$(27)\qquad \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2[\gamma] = \frac{1}{V_2^2}\gamma(y,z,t) - \int_0^t (t-\tau)\Delta_1\gamma(y,z,\tau)\,d\tau + \frac{2a_2}{V_2}\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau$$

lorsque $\gamma(y,z,t)$ vérifie des conditions beaucoup moins restrictives que celles d'appartenir à la classe L. Nous préciserons ces conditions.

Rappelons d'abord que la classe linéaire L est celle des fonctions $f(y,z,t)$, analytiques par rapport aux variables y et z, holomorphes au voisinage d' $y = z = 0$, intégrables en t, pour les valeurs positives, suffisamment petites de cette variable et telles que toutes leurs dérivées, par rapport à y et à z, possèdent ces mêmes propriétés.

Le principe de la méthode que nous allons utiliser est le suivant: parmi les fonctions $f(y,z,t)$ de la classe L, figurent évidemment tous les polynômes en y, z, t, quels que soient leurs degrés. Si donc, $\gamma(y,z,t)$ se réduit à un polynôme $P(y,z,t)$, les relations (25), (26) et (27) sont vraies.

Considèrons alors, par exemple, la relation (25); par suite de la linéarité des opérateurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, nous avons:

$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[\gamma - P] = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[\gamma] - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[P], \text{ et de même :}$$

$$\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[\gamma - P] = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[\gamma] - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[P]$$

Donc, pour établir cette relation (25), il nous suffit de démontrer que:

$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[\gamma - P] = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[\gamma - P] \quad ;$$

A cet effet, nous montrerons que $\gamma(y,z,t)$ ne variant pas, les deux membres de cette dernière relation peuvent être rendus simultanément aussi voisins de zéro que l'on veut. Pour cela, nous utiliserons le théorème fondamental de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues d'une ou plusieurs variables par un polynôme. Il résulte de ce théorème, (cf. Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynômes par Emile BOREL, 2[e] édition, p. 6I et suiv. et p. 67), qu'étant donnée une fonction $\gamma(y,z,t)$, possédant ses deux premiers laplaciens $\Delta_1\gamma$ et $\Delta_2\gamma$, par rapport à y et z, et étant continue, ainsi que ceux ci, par rapport à l'ensemble des variables y,z,t, dans un domaine borné D de l'espace y,z,t, on peut trouver un polynôme $P(y,z,t)$ tel que les inégalités suivantes aient lieu:

$$(62) \qquad \left| \gamma(y,z,t) - P(y,z,t) \right| < \varepsilon$$

$$(63) \qquad \left| \Delta_1\gamma(y,z,t) - \Delta_1 P(y,z,t) \right| < \varepsilon$$

$$(64) \qquad \left| \Delta_2\gamma(y,z,t) - \Delta_2 P(y,z,t) \right| < \varepsilon$$

ε étant donné, aussi petit qu'on le veut, et ceci, uniformément, quel que soit le point (y,z,t) dans D.

Les inégalités (62), (63), (64) étant réalisées, il nous suffira de montrer que les fonctionnelles linéaires $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[f]$ et $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[f]$ sont continues pour la valeur zéro de la fonction argument, puisque

$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[0] = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1[0] = 0$$

Considérons donc la fonctionnelle linéaire:

$$\mathcal{D}_2[f] = \frac{1}{V_2} f(y,z,t) + a_2\int_0^t f(y,z,\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\pi V_2}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} \frac{e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2}$$

$$\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta - \frac{a_2^2}{4\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r} f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau - \frac{a_2^4 V_2}{8\pi}\int_0^t d\tau$$

$$\iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}\, j''\!\left[a_2^2\,\frac{V_2^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta\,,$$

nous examinerons chacun de ses termes, $f(y,z,t)$ et $\Delta_1 f(y,z,t)$ vérifiant les inégalités:

$$(62') \quad \left| f(y,z,t) \right| < \varepsilon\,, \qquad (63') \quad \left| \Delta_1 f(y,z,t) \right| < \varepsilon\,,$$

dans un domaine D borné de l'espace y,z,t.

Nous avons d'abord:

$$\left|\frac{1}{V_2} f(y,z,t)+a_2\int_0^t f(y,z,\tau)\,d\tau\right|<\left(\frac{1}{V_2}+a_2 t\right)\varepsilon = K_{2,1}(t)\varepsilon ,$$

(V et a sont essentiellement positifs),

$$K_{2,1}(t)=\frac{1}{V_2}+a_2 t$$

Ensuite:

$$\frac{1}{2\pi V_2}\left|\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} \frac{e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\, d\zeta\, d\theta\right| < \frac{\varepsilon V_2}{2}\int_0 d\tau\int_0^\tau$$

$$e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}d\theta = \frac{\varepsilon}{2a_2}\left[t-\frac{1}{a_2V_2}\left(1-e^{-a_2V_2 t}\right)\right] = K_{2,2}(t)\,\varepsilon ,$$

$$K_{2,2}(t)=\frac{1}{2a_2}\left[t-\frac{1}{a_2V_2}\left(1-e^{-a_2V_2t}\right)\right] ,$$

$$\frac{a_2^2}{4\pi}\left|\iiint_{\Gamma^2_{yz t}}\frac{e^{-a_2 r}}{r} f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau\right| < \frac{a_2^2\varepsilon}{2}\int_0^t d\tau\int_0^{V_2(t-\tau)} e^{-a_2 r}dr$$

$$=\frac{a_2\varepsilon}{2}\left[t-\frac{1}{a_2V_2}\left(1-e^{-a_2V_2t}\right)\right]=K_{2,3}(t)\varepsilon \quad , \quad K_{2,3}(t)=a_2^2 K_{2,2}(t) ,$$

$$\frac{a_2^4 V_2}{8\pi}\left|\int_0^t d\tau\iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2V_2(\tau-\theta)} j''\left[a_2^2\frac{V_2^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\, d\zeta\, d\theta\right| < \frac{a_2^4 V_2\varepsilon}{4}\int_0^t d\tau$$

$$\int_0^\tau e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}d\theta\int_0^{V_2(\tau-\theta)} r\, j''\left[a_2^2\,\frac{V_2^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]dr = \frac{a_2^2V_2\varepsilon}{2}\int_0^t d\tau\int_0^\tau e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}$$

$$\left\{j'\left[\frac{a_2^2V_2^2(\tau-\theta)^2}{4}\right]-1\right\}d\theta = \frac{a_2\varepsilon}{2}\int_0^t d\tau\int_0^{a_2V_2\tau} e^{-u}\left[j'\left(\frac{u^2}{4}\right)-1\right]du =$$

$$\frac{\varepsilon}{2V_2}\int_0^{a_2V_2t}(a_2V_2t-u)e^{-u}\left[j'\left(\frac{u^2}{4}\right)-1\right]du = \frac{\varepsilon}{2V_2}\int_0^{a_2V_2t}(a_2V_2t-u)e^{-u}$$

$$\left[\frac{2}{u}I_0'(u)-1\right]du = \frac{\varepsilon}{2V_2}\int_0^{a_2V_2t}(a_2V_2t-u)e^{-u}\left[\frac{4}{\pi u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{sh}(u\sin\varphi)\,d\varphi-1\right]du$$

$$<\frac{\varepsilon}{\pi V_2}\int_0^{a_2V_2t}(a_2V_2t-u)\,\frac{1-e^{-2u}}{u}\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi = \frac{\varepsilon}{2V_2}\int_0^{a_2V_2t}(a_2V_2t-u)\frac{1-e^{-2u}}{u}\,du =$$

$$= K_{2,4}(t)\varepsilon \qquad , \quad K_{2,4}(t)=\frac{1}{2V_2}\int_0^{a_2V_2t}(a_2V_2t-u)\,\frac{1-e^{-2u}}{u}\,du$$

Nous avons donc dans le domaine borné $\mathcal{D}$ considéré:

(65) $\left|\mathcal{D}_2[f]\right| < K_2(t)\mathcal{E} < K_2\mathcal{E}$ en posant: $K_2(t) = K_{2,1}(t) + K_{2,2}(t) + K_{2,3}(t) + K_{2,4}(t)$,

la constante positive K_2 qui dépend du domaine $\mathcal{D}$ considéré, étant une borne supérieure de $K_2(t)$ dans $\mathcal{D}$

$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2[f]$ contient, en plus de $\mathcal{D}_2[f]$, $\Delta_1\left\{\mathcal{D}_2[f]\right\}$, nous devons donc calculer aussi une borne supérieure de

$$\left|\Delta_1\left\{\mathcal{D}_2[f]\right\}\right|$$

Les dérivées, par rapport à y et à z de $\mathcal{D}_2[f]$ se calculent sans difficulté. En effet, pour la première intégrale multiple:

$$\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} \frac{e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2}\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)d\eta d\zeta d\theta ,$$

quand on fait varier y ou z, le cône $\Gamma^2_{yz\tau}$ subit une simple translation, il suffit donc de faire varier η ou ζ de la même quantité dans $\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)$.
Par suite, pour avoir les dérivées de l'intégrale précédente, par rapport à y ou à z, il suffit de prendre les dérivées correspondantes de $\Delta_1 f$ par rapport à η ou à ζ.

De même, pour la deuxième et la troisième intégrales multiples, quand on fait varier y ou z, seule varie la valeur de $f(\eta,\zeta,\tau)$ [ou de $f(\eta,\zeta,\theta)$]. Pour avoir les dérivées de ces intégrales, par rapport à y ou à z, il suffit donc encore de prendre les dérivées correspondantes de f, par rapport à η ou à ζ.

Et il en est de même, pour les dérivées, successives de ces intégrales, par rapport à y et à z.

Nous obtenons ainsi:

$$\Delta_1\left\{\mathcal{D}_2[f]\right\} = \frac{1}{V_2}\Delta_1 f(y,z,t) + a_2\int_0^t \Delta_1 f(y,z,\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi V_2}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} \frac{e^{-a_2V_2(\tau-\theta)}}{(\tau-\theta)^2}\Delta_2 f(\eta,\zeta,\theta)d\eta, d\zeta, d\theta - \frac{a_2^2}{4\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r}\Delta_1 f(\eta,\zeta,\tau) \times d\eta d\zeta d\tau - \frac{a_2^4 V_2}{8\pi}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2V_2(\tau-\theta)} j''\left[a_2^2\frac{V_2^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right]\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)d\eta d\zeta d\theta$$

avec $\Delta_2 f(\eta,\zeta,\theta) = \Delta_1\left[\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\right]$

$\Delta_1 \left\{ \mathcal{D}_2 [f] \right\}$ a donc, en fonction de $\Delta_1 f(y,z,t)$, exactement la même expression que $\mathcal{D}_2 [f]$ en fonction de $f(y,z,t)$, c'est à dire que nous avons:

$$(66) \qquad \Delta_1 \left\{ \mathcal{D}_2 [f] \right\} = \mathcal{D}_2 \left[\Delta_1 f \right]$$

Par suite , $\Delta_1 \left\{ \mathcal{D}_2 [f] \right\}$, vérifiera la même inégalité (65) que $\mathcal{D}_2 [f]$:

$$\left| \Delta_1 \left\{ \mathcal{D}_2 [f] \right\} \right| < K_2 \varepsilon \ ,$$

pourvu que $\Delta_1 f(y,z,t)$ et $\Delta_2 f(y,z,t)$ satisfassent les inagalités:

$$(63'),(64') \quad \left| \Delta_1 f(y,z,t) \right| < \varepsilon \ , \qquad \left| \Delta_2 f(y,z,t) \right| < \varepsilon \ .$$

La démonstration s'achève. De même que $\mathcal{D}_2 [f]$ vérifie l'inégalité (65) , $\mathcal{D}_1 [f]$ satisfera dans le domaine $\mathcal{D}$,

$$(65)' \qquad \left| \mathcal{D}_1 [f] \right| < K_1 \varepsilon \ ,$$

pour toute fonction $f(y,z,t)$ vérifiant les inégalités (62') et (63') , K_1 s'obtenant en remplaçant dans K_2 les paramètres a_2 et V_2 par a_1 et V_1 , respectivement.

Nous avons donc finalement:

$$(67) \qquad \left| \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 [f] \right| < K_1 K_2 \varepsilon = K \varepsilon \ , \qquad K = K_1 K_2$$

De la même façon, sous les mêmes hypothèses, on montrerait que l'on a :

$$(68) \qquad \left| \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 [f] \right| < K \varepsilon$$

Les deux fonctionnelles linéaires $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 [f]$ et $\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 [f]$ sont donc bien continues pour la valeur zéro de la fonction argument et il en résulte, comme nous l'avons montré dans le principe de la méthode, la justification de la relation:

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 [\gamma] = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 [\gamma] \ ,$$

pour les fonctions $\gamma(y,z,t)$ qui possèdent leurs deux premiers laplaciens, par rapport à y et z et qui sont continues, ainsi que ceux ci par rapport à l'ensemble des variables y,z,t .

Considèrons maintenant l'une des deux autres relations fondamentales (26) et (27). Par exemple, (26):

$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1[\gamma] = \frac{1}{V_1^2}\gamma(y,z,t) - \int_0^t (t-\tau)\Delta_1\gamma(y,z,\tau)\,d\tau - \frac{2a_1}{V_1}\int_0^t \gamma(y,z,\tau)\,d\tau$$

Pour la justifier, il nous suffit encore d'établir la continuité, pour la valeur zéro de la fonction argument, des fonctionnelles linéaires qui constituent les deux membres de cette relation.

Pour le premier membre, c'est déjà chose faite, nous avons: $\left|\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1[f]\right| < K_1^2\,\varepsilon$,

pour les fonctions $f(y,z,t)$ telles que:

$$|f(y,z,t)|,\ |\Delta_1 f(y,z,t)|,\ |\Delta_2 f(y,z,t)| < \varepsilon$$

Pour le second membre, c'est immédiat:

$$\left|\frac{1}{V_1^2}f(y,z,t) - \int_0^t (t-\tau)\Delta_1 f(y,z,\tau)\,d\tau - \frac{2a_1}{V_1}\int_0^t f(y,z,\tau)\,d\tau\right| < \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{t^2}{2} + 2\frac{a_1 t}{V_1}\right)\varepsilon ,$$

pourvu que $|f(y,z,t)|,\ |\Delta_1 f(y,z,t)| < \varepsilon$

Pour la relation (27), la démonstration serait identique.

La méthode de résolution de notre équation intégro-différentielle(24) et sa réduction à une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, sont donc complètement justifiées, sous la condition que $\gamma(y,z,t)$ possède ses deux premiers laplaciens, par rapport à y et z, et soit continue ainsi que ceux ci, par rapport à l'ensemble des variables y, z et t

Pour l'équation intégro-différentielle(56), à laquelle nous avons été conduits, en étudiant le même problème pour l'équation des ondes amorties, la justification de la méthode de résolution et de la réduction de cette équation (56) à une équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficients constants, se ferait d'une façon toute semblable. Cette justification serait encore subordonnée à la même condition.

D'autre part, posons:

$$(69)\qquad \mathcal{B}(y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{D}_1[\alpha] - \mathcal{D}_2[\alpha]\right\}$$

$$\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2} = b \qquad , \qquad 2\left(\frac{a_1}{V_1} - \frac{a_2}{V_2}\right) = c$$

......

L'équation différentielle (29) à laquelle a été ramenée notre équation intégro-différentielle (24) s'écrit:

$$b\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t)+c\gamma(y,z,t)=\mathcal{B}(y,z,t)$$

Nous avons donc:

$$(70)\quad \gamma(y,z,t)=e^{-\frac{c}{b}t}\left[\frac{1}{b}\int_0^t e^{\frac{c}{b}\tau}\mathcal{B}(y,z,\tau)d\tau+\alpha(0,y,z)\right],$$

puisque

$$\mathcal{B}(y,z,0)=b\beta(0,y,z)+c\alpha(0,y,z),$$

[$\alpha(x,y,z)$ et $\beta(x,y,z)$ sont les données de Cauchy pour les problèmes mixtes, relatifs aux équations (I) et (2) du chapitre I].

Les formules (6I),(69),(70), du chapître II,(30),(33),(35) et (39) du chapître I, permettent alors de déterminer jusqu'à quel ordre $\gamma(y,z,t)$ possède des dérivées en y et z, continues par rapport à l'ensemble des variables y,z,t, lorsque α et β, possèdent elles mêmes des dérivées continues jusqu'à un ordre donné.

Enfin, au moyen des formules (70),(69) et (6I), on pourrait déterminer les conditions minimums que doit remplir la fonction $\mathcal{A}(y,z,t)$ pour que la formule de résolution (70) ait un sens.

8.- Il y a lieu de remarquer que la justification des formules (26) et (27), pour les fonctions $\gamma(y,z,t)$ qui n'appartiennent pas à la classe L, est superflue. En effet, la valeur de l'opérateur itéré $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1[\gamma(y,z,t)]$, par exemple, peut s'obtenir directement, sans supposer que γ appartienne à la classe L.

Posons, à cet effet.

$$v(x,y,z,t)=\int_0^t u(x,y,z,\tau)\,d\tau\quad,$$

$u(x,y,z,t)$ définie pour $x\geqslant 0$, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles.

$$(71)\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{V_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2a_1}{V_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)u=E\left[u(x,y,z,t)\right]=0$$

et aux conditions définies.

$$(72)\quad u(x,y,z,0)=\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t)\right]_{t=0}=0$$

$$u(+0,y,z,t)=\gamma(y,z,t)$$

Il n'est, d'ailleurs, pas nécessaire de supposer vérifiées les concordances,

$$\gamma(y,z,0)=\left[\frac{\partial}{\partial t}\gamma(y,z,t)\right]=0$$

Nous avons :

$$u(x,y,z,t)=C\left[\gamma(y,z,t)\right]$$

$C[\gamma]$ étant une fonctionnelle linéaire (et homogène) de $\gamma(y,z,t)$

$v(x,y,z,t)$ satisfait aux conditions définies.

$$(73)\qquad \begin{aligned} & v(x,y,z,0) = \left[\frac{\partial}{\partial t} v(x,y,z,t)\right]_{t=0} = 0 \quad , \\ & v(+0,y,z,t) = \int_0^t \gamma(y,z,\tau)\, d\tau \quad , \end{aligned}$$

ainsi qu'à l'équation (71).

En effet , en raison des conditions (72),

$$E\left[\int_0^t u(x,y,z,\tau)\, d\tau\right] = \int_0^t E\left[u(x,y,z,\tau)\right] d\tau'$$

Or, d'après sa défintion et les conditions (72),

$$\mathcal{D}_1[\gamma(y,z,t)] = \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z,\tau)\right] d\tau_{x=+0} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} v(x,y,z,t)\right]_{x=+0} = \delta(y,z,t).$$

Et par suite,

$$\mathcal{D}_1\left\{\mathcal{D}_1\left[\gamma(y,z,t)\right]\right\} = \mathcal{D}_1\left[\delta(y,z,t)\right] = \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,y,z,\tau\right] d\tau_{x=+0}$$

D'où, en raison des relations (71) et (73), vérifiées par v

$$\mathcal{D}_1\left\{\mathcal{D}_1\left[\gamma(y,z,t)\right]\right\} = -\int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \Delta_1 \gamma(y,z,\theta)\, d\theta + \frac{1}{V_1^2}\gamma(y,z,t) + \frac{2a_1}{V} \times$$
$$\times \int_0^t \gamma(y,z,\tau)\, d\tau = -\int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1\gamma(y,z\,\tau)\, d\tau + \frac{1}{V_1^2}\gamma(y,z,t) +$$
$$+ \frac{2a_1}{V_1} \times \int_0^t \gamma(y,z,\tau)\, d\tau$$

CHAPITRE III

Etude du même problème de propagation dans deux milieux au moyen du système des équations de Maxwell. Mise en équation.

I.- Nous reprenons le même problème de propagation d'ondes et de leur diffraction par un plan indéfini, en substituant à l'équation.

$$\Delta u - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a}{V}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad ,$$

le système des équations de Maxwell pour un milieu possèdant constante diélectrique, perméabilité magnétique et conductibilité électrique.

Le plan diffractant est toujours pris pour plan yOz, il sépare l'espace en deux régions: la region I pour $x > 0$, la région 2 pour $x < 0$. ε_1, μ_1 et σ_1 désignent, respectivement, la constante diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductibilité électrique du milieu 1; ε_2, μ_2 et σ_2 sont les mêmes caractéristiques pour le milieu 2. Nous négligeons la dispersion, les six quantités précédentes sont donc regardées comme des constantes.

Nous désignons par X, Y, Z, les composantes du champ électrique $\vec{E}$ et par L, M, N, celles du champ magnétique $\vec{H}$; $\vec{I}$ est la densité de courant total.

Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{I}$ sont exprimés dans le système électrostatique G.G.S., le vecteur $\vec{H}$ dans le système électromagnétique C.G.S.; c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$(1) \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c}\left(4\pi\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$(3) \quad \operatorname{div} \vec{I} = \operatorname{div}\left(\sigma \vec{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

$$(4) \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

Les conditions de passage du milieu I au milieu 2, à la traversée du plan $x=0$, sont:

(5) continuité de $Y, Z, M; N$,

(6) continuité de μL et de $I_x = \sigma X + \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\dfrac{\partial X}{\partial t}$,

en tout point du plan $x = 0$,et quel que soit t

.....

Les trois équations scalaires, relatives aux axes Ox, Oy, Oz, représentées par l'équation vectorielle (I), seront désignées, respectivement, par $(1)_1$, $(1)_2$, $(1)_3$. De même, $(2)_1$, $(2)_2$, $(2)_3$ désigneront les trois équations scalaires, dont l'ensemble équivaut à l'équation vectorielle (2).

Nous commençons par intégrer l'équation (3). Celle ci nous donne:

$$(7) \quad \operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z)\, e^{-\frac{4\pi\sigma t}{\varepsilon}}, \quad \text{avec}$$

$$(8) \quad \varphi(x,y,z) = \operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,0)$$

Nous étudions plus loin, (voir paragraphe 3 de ce chapître), le cas général où $\varphi(x,y,z) \neq 0$. Pour simplifier, nous imposerons d'abord aux données initiales de vérifier la relation:

$$(9) \quad \operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,0) = 0$$

Il en résultera:

$$(10) \quad \operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,t) = 0 \quad ,$$

relation qui remplacera dans ce qui suit la relation (3) ci-dessus.

Nous nous donnerons alors à l'instant initial, dans tout l'espace:

$$(11) \quad \begin{cases} Y(x,y,z,0) = \alpha(x,y,z), \\ Z(x,y,z,0) = \beta(x,y,z), \\ M(x,y,z,0) = \gamma(x,y,z), \\ N(x,y,z,0) = \delta(x,y,z), \end{cases}$$

puis, au même instant et dans le plan $x=0$, les limites, à droite et à gauche, de X et de L :

$$(12) \quad \begin{aligned} X(+0,y,z,0) &= p_1(y,z), \\ X(-0,y,z,0) &= p_2(y,z), \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{aligned} L(+0,y,z,0) &= q_1(y,z), \\ L(-0,y,z,0) &= q_2(y,z), \end{aligned}$$

......

Ces huit fonctions données, $\alpha, \beta, \gamma, \delta(x,y,z)$, $p_1, p_2, q_1, q_2(y,z)$ doivent être telles que les conditions maxwelliennes de continuité dans le plan $x=0$ (5) et (6), ainsi que les conditions de continuité qui en résultent, obtenues en considèrant les dérivées, par rapport au temps, des composantes tangentielles des champs et des composantes normales de l'induction magnétique et de la densité de courant total, soient vérifiées pour $t=0$

Ces conditions mises à part, les valeurs limites, pour $x=+0$ et $x=-0$ des données $\alpha, \beta, \gamma, \delta(x,y,z)$ et de leurs dérivées ne sont soumises à aucune autre condition de continuité, les problèmes hyperboliques, mixtes, dont nous parlerons plus loin, étant distincts à droite et à gauche du plan $x=0$. Cette remarque sera utilisée, dans le paragraphe 3 de ce chapître, pour la mise en équation du problème, dans le cas où $\operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,0) \neq 0$.

La continuité, pour $t=0$ des composantes tangentielles des champs nous donne d'abord:

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha(+0,y,z) = \alpha(-0,y,z) \\ \beta(+0,y,z) = \beta(-0,y,z) \\ \gamma(+0,y,z) = \gamma(-0,y,z) \\ \delta(+0,y,z) = \delta(-0,y,z) \end{cases}$$

Ensuite, la continuité de la composante normale de l'induction magnétique nous fournit la relation:

$$(15) \qquad \mu_1 q_1(y,z) = \mu_2 q_2(y,z)$$

L'équation$(I)_I$, jointe aux deux premières relations(14), suffit pour assurer la continuité de la composante normale de la densité de courant total.

Puis, les équations $(I)_2$, $(I)_3$, $(2)_2$ et $(2)_3$, nous donnent, puisque les dérivées, par rapport à t, des composantes tangentielles des champs doivent être continues, pour $t=0$, [les mêmes conditions, relatives aux dérivées, par rapport au temps, des composantes normales de l'induction magnétique et de la densité de courant total, sont satisfaites d'elles-mêmes, en raison de $(2)_I$, $(I)_I$ et (14)] :

$$(16)\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_1}\left[c\,\dfrac{\partial q_1}{\partial z} - c\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x}\right)_{x=+0} - 4\pi\sigma_1\alpha(0,y,z)\right] = \\ = \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left[c\,\dfrac{\partial q_2}{\partial z} - c\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x}\right)_{x=-0} - 4\pi\sigma_2\alpha(0,y,z)\right] \\ \dfrac{1}{\varepsilon_1}\left[c\left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right)_{x=+0} - c\,\dfrac{\partial q_1}{\partial y} - 4\pi\sigma_1\beta(0,y,z)\right] = \\ = \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left[c\left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right)_{x=-0} - c\,\dfrac{\partial q_2}{\partial y} - 4\pi\sigma_2\beta(0,y,z)\right] \end{cases}$$

$$(17)\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1}\left[\dfrac{\partial p_1}{\partial z} - \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right)_{x=+0}\right] = \dfrac{1}{\mu_2}\left[\dfrac{\partial p_2}{\partial z} - \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right)_{x=-0}\right] \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{x=+0} - \dfrac{\partial p_1}{\partial y}\right] = \dfrac{1}{\mu_2}\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{x=-0} - \dfrac{\partial p_2}{\partial y}\right] \end{cases}$$

Nous pouvons éliminer q_1 et q_2 entre les deux équations (16):

$$(18)\quad c\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)_{x=+0} - \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)_{x=-0}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)_{x=+0} - \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)_{x=-0}\right]\right\} + 4\pi\left(\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} - \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)_{x=0} = 0$$

De même, nous pouvons éliminer p_1 et p_2, entre les deux équations (17):

$$(19)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)_{x=+0} - \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)_{x=-0}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{x=+0} - \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{x=-0}\right] = 0$$

En outre, les données doivent être telles que les valeurs des composantes de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ pour $t=0$, et de leurs dérivées premières, par rapport au temps, prises pour $t=0$, s'annulent à l'infini.

En écrivant les formules qui donnent celles de ces quantités qui ne résultent pas immédiatement des données, nous verrons qu'il est possible de satisfaire à cette condition.

Les relations (I4) à (I7), entre les valeurs des données, étant supposées satisfaites, les équations (9) et (4) permettent de calculer, à l'instant initial et dans tout l'espace $\frac{\partial X}{\partial x}$ et $\frac{\partial L}{\partial x}$

Nous en déduisons, en intégrant par rapport à x, à partir de $x=0$, et en tenant compte de (I2) et de (I3) les valeurs de X et de L dans tout l'espace, pour $t=0$. Enfin, les équations (I) et (2) détermineront, au même instant, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, dans tout l'espace

Nous sommes donc bien encore en possession des données de Cauchy complètes, relatives aux composantes des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$

Nous prendrons encore comme inconnues auxiliaires:

$$(20) \quad Y(0,y,z;t) = f(y,z;t) \quad ; \quad Z(0,y,z;t) = g(y,z;t)$$

et aurons les concordances:

$$(21) \quad f(y,z;0) = \alpha(0,y,z) \quad ; \quad g(y,z;0) = \beta(0,y,z)$$

L'équation $(2)_I$ nous donne alors, pour $x=0$, par passage à la limite, à droite et à gauche:

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} L(+0,y,z;t) = \frac{c}{\mu_1}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial t} L(-0,y,z;t) = \frac{c}{\mu_2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Et en intégrant par rapport à t :

$$(23) \quad L(+0,y,z;t) = q_1(y,z) + \frac{c}{\mu_1}\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial z} f(y,z;\tau) - \frac{\partial}{\partial y} g(y,z;\tau)\right] d\tau$$

$$(24)\quad L(-0,y,z;t) = q_2(y,z) + \frac{c}{\mu_2}\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial z} f(y,z,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}\, g\,(y,z,\tau)\right] d\tau$$

Les équations (I)$_3$, (I)$_2$ et (IO) donnent ensuite, par passage à la limite, à droite et à gauche, pour $x=0$, en tenant compte de (20) et de (2I):

$$(25)\quad \left[\frac{\partial}{\partial x} M\,(x,y,z;t)\right]_{x=+0} = \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{c}{\mu_1}\int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} f\,(y,z;\tau) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, g\,(y,z;\tau)\right] d\tau + \frac{1}{c}\left(4\pi\sigma_1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) g\,(y,z;t)$$

$$(26)\quad \left[\frac{\partial}{\partial x} M\,(x,y,z;t)\right]_{x=-0} = \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{c}{\mu_2}\int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} f\,(y,z;\tau) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, g\,(y,z;\tau)\right] d\tau + \frac{1}{c}\left(4\pi\sigma_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) g\,(y,z;t)$$

$$(27)\quad \left[\frac{\partial}{\partial x} N\,(x,y,z;t)\right]_{x=+0} = \frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{c}{\mu_1}\int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} f\,(y,z,\tau) - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\, g\,(y,z,\tau)\right] d\tau - \frac{1}{c}\left(4\pi\sigma_1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) f\,(y,z,t)$$

$$(28)\quad \left[\frac{\partial}{\partial x} N\,(x,y,z;t)\right]_{x=-0} = \frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{c}{\mu_2}\int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} f\,(y,z,\tau) - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\, g\,(y,z,\tau)\right] d\tau - \frac{1}{c}\left(4\pi\sigma_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) f\,(y,z,t)$$

$$(29)\quad \left[\frac{\partial}{\partial x} X\,(x,y,z;t)\right]_{x=0} = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}$$

D'autre part, il résulte des équations (I), (2), (IO) et (4) que chacune des composantes des vecteurs $\vec{E}(x,y,z;t)$ et $\vec{H}(x,y,z;t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique, normal

$$(30) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 ,$$

équation qui peut se mettre sous la forme:

$$(31) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a}{V}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 ,$$

en posant:

$$(32) \quad V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad ; \quad a = \frac{2\pi\sigma}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Nous connaissons les valeurs de X, Y, Z, L, M, N, et de leurs dérivées, par rapport à t, dans tout l'espace, à l'instant initial; les valeurs de Y, Z, L, à tout instant, dans le plan $x=0$ à droite et à gauche de ce plan et de même, les limites par continuité, à droite et à gauche, de $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x}$, à tout instant dans ce même plan. La résolution de problèmes hyperboliques mixtes de type Dirichlet, nous donnera donc Y, Z et L dans tout l'espace et à tout instant, tandis que la résolution de problèmes hyperboliques mixtes, de type Neumann, donnera, dans les mêmes conditions X, M et N.

Il reste à voir si les conditions indéfinies (I), (2), (IO) et (4) et les conditions de passage (5), (6), sont vérifiées et, en même temps, comment seront déterminées les inconnues auxiliaires f et $g(y,z,t)$.

Les conditions indéfinies (I), (2), (IO) et (4) sont remplies. En effet, d'abord, ces relations sont linéaires et leurs premiers membres satisfont à l'équation indéfinie (30). Ensuite, ces premiers membres sont tous nuls, pour $t=0$, ainsi que leurs dérivées premières par rapport au temps, comme celà résulte des conditions initiales et de ce que $\vec{E}$ et $\vec{H}$, vérifient (30). Il suffit donc de montrer que (I), (2), (IO) et (4), sont satisfaites pour $x=0$. Or, il en est bien ainsi pour $(I)_2$, $(I)_3$, (IO) et $(2)_I$, par suite des conditions (25), (26), (27), (28), (29) et (22). En outre, $(I)_2$, $(I)_3$, et (IO) étant vérifiées il en résulte en appliquant les opérateurs $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ aux équations $(I)_2$ et $(I)_3$, respectivement, et en ajoutant:

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{1}{c}\left(4\pi\sigma + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)X = \varphi(y,z;t),$$

avec

$$\varphi(y,z;0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 ,$$

d'où $(I)_I$, φ étant solution continue, en tout point, de

$$\left(\Delta_1 - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2a}{V}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0$$

Restent $(2)_2$ $(2)_3$ et (4). Or, $\vec{H}$ satisfaisant à l'équation (30), il en résulte, en prenant le rotationnel de (I):

$$\left(4\pi\sigma + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = c\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \vec{H}$$

$(2)_1$ impose $\mathrm{div}\ \vec{H}\,(x,y,z;t) = \Psi\,(y,z;t)$,

avec $\Psi\,(y,z;0) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$,

d'où, pour les mêmes raisons que, ci-dessus, pour φ, $\mathrm{div}\ \vec{H} \equiv 0$
Les relations $(2)_2$ et $(2)_3$ sont alors assurées, en raison des conditions initiales.

Au sujet des conditions de passage dans le plan $x=0$, Y et Z, sont automatiquement continues par le choix (20) des inconnues auxiliaires. La continuité de μL est assurée par les relations (23) et (24). L'équation $(I)_I$:

$$4\pi\sigma X + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} = c\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

entraine la continuité de $I_x = \sigma X + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$ pour toutes les valeurs du temps, pourvu que M et N soient continues, puisque cette continuité de M et de N, implique celle de ses dérivées en y et z, à cause de l'existence de toutes les dérivées secondes de M et de N. Il suffit donc, en définitive, que M et N, soient continues, quel que soit t, à la traversée du plan $x=0$. Les relations (I4) montrent qu'il en est bien ainsi, à l'instant initial; d'après $(2)_3$ et $(2)_2$, il en sera de même, à tout instant, si

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

sont continues à la traversée du plan $x=0$. En écrivant cette continuité, par passage à la limite, à droite et à gauche, nous obtiendrons alors deux équations intégro-différentielles, qui nous serviront à déterminer f et g.

2.- Nous entrons dans le détail des calculs. Nous ne résoudrons explicitement les problèmes mixtes, relatifs à l'équation (3I) que pour Y, Z, X, seules composantes qui interviennent dans la formation des deux équations intégro-différentielles que nous écrivons. Pour L, M et N, nous aurions des formules analogues.

Nous nous occupons d'abord d' Y et de Z.

......

$\alpha_1(x,y,z)$ et $\beta_1(x,y,z)$ désigneront les valeurs de $\frac{\partial Y}{\partial t}$ et de $\frac{\partial Z}{\partial t}$ pour $t=0$. (I)$_2$ et (I)$_3$ nous donnent alors, [$i=1$ ou 2, nous retrouvons les conditions (I6)] :

$$(33)\quad \alpha_1(x,y,z) = \frac{1}{\varepsilon_i}\left[c\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) - 4\pi\sigma_i Y\right]_{t=0} \doteq$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i}\left\{c\frac{\partial q_i}{\partial z} - c\frac{\partial \delta}{\partial x} - c\int_0^x \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\gamma(\xi,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta(\xi,y,z)\right]\right.$$

$$\left. d\xi - 4\pi\sigma_i\alpha(x,y,z)\right\}$$

$$(34)\quad \beta_1(x,y,z) = -\frac{1}{\varepsilon_i}\left\{c\frac{\partial q_i}{\partial y} - c\frac{\partial \gamma}{\partial x} - c\int_0^x \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\gamma(\xi,y,z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\delta(\xi,y,z)\right]d\xi + 4\pi\sigma_i\beta(x,y,z)\right\}$$

Nous avons les concordances:

$$(35)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} f(y,z,t)\right]_{t=0} = \alpha_1(0,y,z);$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} g(y,z,t)\right]_{t=0} = \beta_1(0,y,z)$$

$N(y,z,t,R)$ et $D(y,z,t,R)$ seront les valeurs moyennes de $f(y,z,t)$ et de $g(y,z,t)$ sur la circonférence du plan $x=0$ de centre (y,z) et de rayon $\sqrt{R}$.

$M_0(x,y,z,R), M_1(x,y,z,R), P_0(x,y,z,R), P_1(x,y,z,R)$ désigneront, de même, les moyennes de $\alpha(x,y,z)$, $\alpha_1(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$ et $\beta_1(x,y,z)$, sur la circonférence:

$$(36)\quad \xi = x,\quad (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 = R.$$

Nous poserons:

$$(37)\qquad \begin{aligned} M_2(x,y,z,R) &= M_0(x,y,z,R) + \frac{1}{a_1V_1} M_1(x,y,z,R) \\ P_2(x,y,z,R) &= P_0(x,y,z,R) + \frac{1}{a_1V_1} P_1(x,y,z,R) \end{aligned}$$

Toutes ces valeurs moyennes, $N, \Phi, M_0, M_1, \ldots$ sont des fonctions régulières de R ,même pour $R=0$.

Y et Z seront alors données dans les régions I et 2,pour $x \leq V_1 t$ et $-x \leq V_2 t$, respectivement, par quatre formules,qui ne sont que la répétition,dans le cas présent des deux formules (26) et (26') du chapitre I.

Nous aurons besoin des dérivées de Y et de Z , par rapport à x ,pour $x=0$,à droite et à gauche de ce plan.Nous avons,d'après les résultats du paragraphe 2 du chapitre I, Γ^1_{yzt} et $j''(x)$ (ayant les mêmes significations que dans ce paragraphe :

$$(38)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x} Y(x,y,z,t)\right]_{x=+0} = -\frac{1}{V_1}\frac{\partial}{\partial t} f(y,z,t) -$$

$$-\alpha_1 f(y,z,t) + \frac{1}{2\pi V_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-a_1V_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1 f(\eta,\zeta,\tau)\,\times$$

$$\times\, d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_1^2}{2}\int_0^{V_1 t} e^{-a_1 r} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r\right) dr +$$

$$+\frac{a_1^4 V_1}{8\pi}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} e^{-a_1V_1(t-\tau)} j''\left[a_1^2\,\frac{V_1^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\,\times$$

$$d\zeta\, d\tau + e^{-a_1V_1 t} A_1(y,z,t) \;,$$

en posant:

$$(39)\quad A_1(y,z,t) = a_1\alpha\,(V_1t,\,y,z) + \frac{1}{V_1}\alpha_1(V_1t,\,y,z) + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\alpha\,(V_1t,\,y,z) + \frac{a_1^2 V_1 t}{2}\alpha\,(V_1t,\,y,z) + \frac{V_1t}{2}\Delta_1\alpha\,(V_1t,\,y,z) +$$
$$+ 2a_1V_1^2t^2\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial R}M_2\left[\lambda V_1t,\,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda +$$
$$+ a_1^2V_1^3t^3\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_0\left[\lambda V_1t,\,y,z,\,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda +$$
$$+ 4V_1^3t^3\int_0^1\lambda\frac{\partial^2}{\partial R^2}M_0\left[\lambda V_1t,\,----\right]d\lambda + \frac{a_1^2}{2V_1}\int_0^{V_1t} r\,j'$$
$$\left(a_1^2\frac{V_1^2t^2-r^2}{4}\right)dr\,\Big\{a_1V_1\alpha(r,y,z) + \alpha_1(r,y,z) +$$
$$+ 2a_1V_1r^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}M_2\left[\lambda r,y,z,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda\Big\} + \frac{a_1^4V_1t}{4}$$
$$\int_0^{V_1t} r\,j''\left(a_1^2\frac{V_1^2t^2-r^2}{4}\right)dr\,\Big\{\alpha\,(r,y,z) + 2r^2\int_0^1\lambda\frac{\partial}{\partial R}$$
$$M_0\left[\lambda r,\,y,z,\,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda\Big\}$$

$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{x=+0}$ s'obtient en remplaçant dans les formules (38) et (39), N par Q, α par β, M_0 et M_2 par P_0 et P_2 et f par g.

Nous désignerons par $B_1(y,z,t)$ l'expression qui, dans la formule donnant $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{x=+0}$, a pour facteur $e^{-a_1V_1t}$.

Nous avons de même:

$$(40) \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{x=-0} = \frac{1}{V_2}\frac{\partial}{\partial t} f(y,z,t) + a_2 f(y,z,t) - \frac{1}{2\pi V_2} \times$$

$$\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2V_2(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\,\Delta_1 f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau - \frac{a_2^2}{2}\times$$

$$\int_0^{V_2t} e^{-a_2r} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_2},r\right)dr - \frac{a_2^4V_2}{8\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} e^{-a_2V_2(t-\tau)} \times$$

$$j''\left[a_2^2\,\frac{V_2^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau - e^{-a_2V_2t}A_2(y,z,t),$$

$$(40') \quad A_2(y,z,t) = a_2\alpha(-V_2t,y,z) + \frac{1}{V_2}\alpha_1(-V_2t,y,z) - \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\alpha(-V_2t,y,z) + \frac{a_2^2V_2t}{2}\alpha(-V_2t,y,z) + \frac{V_2t}{2}\Delta_1\alpha(-V_2t,y,z) +$$

$$+ 2a_2V_2^2t^2\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial R} M_2\left[-\lambda V_2t, y,z, V_2^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda +$$

$$+ a_2^2V_2^3t^3\int_0^1 \lambda\frac{\partial}{\partial R} M_0\left[-\lambda V_2t, y,z, V_2^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda +$$

$$+ 4V_2^3t^3 \int_0^1 \lambda \frac{\partial^2}{\partial R^2} M_0 \left[-\lambda V_2 t, \ldots\ldots\right] d\lambda + \frac{a_2^2}{2V_2} \int_0^{V_2 t} r j$$

$$\left(a_2^2 \frac{V_2^2t^2 - r^2}{4}\right) dr \left\{ a_2 V_2 \alpha \left(-r, y, z\right) + \beta\left(-r, y, z\right) + 2 a_2 V_2 r^2 \right.$$

$$\left. \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_2 \left[-\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \right\} + \frac{a_2^4 V_2 t}{4} \int_0^{V_2 t} r j'' \left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr$$

$$\left\{ \alpha\left(-r, y, z\right) + 2 r^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial R} M_0 \left[-\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \right\}$$

$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{x=-0}$ s'obtient, à partir de $\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{x=-0}$ comme $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{x=+0}$ à partir de $\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{x=+0}$

Nous passons maintenant à la composante X. Dans la région 1, $x \geqslant 0$, elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles (3I), où l'on remplace a et V par a_1 et V_1 ; les conditions initiales sont celles de Cauchy, les conditions aux limites sur le plan $x=0$ sont du type Neumann. Ces conditions définies s'écrivent, d'ailleurs:

$$(41) \quad X(x,y,z,0) = \varpi(x,y,z) = p_1(y,z) - \int_0^x \left[\frac{\partial}{\partial y} \alpha(\xi, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} \beta(\xi, y, z)\right] d\xi$$

$$(42) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} X(x,y,z,t)\right]_{t=0} = \varpi_1(x,y,z) = \frac{c}{\varepsilon_1}\left[\frac{\partial}{\partial y} \delta(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} \gamma(x,y,z) - \frac{4\pi\sigma_1}{c} \varpi(x,y,z)\right].$$

$$(43) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} X(x,y,z,t)\right]_{x=0} = F(y,z,t) = -\frac{\partial}{\partial y} f(y,z,t) - \frac{\partial}{\partial z} g(y,z,t).$$

Nous faisons le changement de varibables et d'inconnue, déjà fait au paragraphe I du chapitre I:

$$(44)\begin{cases}\xi = a_1 x\\ \eta = a_1 y\\ \zeta = a_1 z\\ \tau = a_1 V_1 t\end{cases} \quad . \quad (45)\ X(x,y,z,t) = e^{-\tau}\,\Xi\,(\xi,\eta,\zeta,\tau)$$

L'équation (3I) devient:

$$(46)\ \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + 1\right)\Xi = 0 \quad , \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)$$

Les conditions définies, vérifiées par Ξ , sont les suivantes:

$$(47)\ \Xi\,(\xi,\eta,\zeta,0) = \varpi'(\xi,\eta,\zeta) = \varpi(x,y,z)$$

$$(48)\ \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Xi(\xi,\eta,\zeta,\tau)\right]_{\tau=0} = \varpi_1'(\xi,\eta,\zeta) = \varpi(x,y,z) + \frac{1}{a_1 V_1}\varpi_1(x,y,z)$$

$$(49)\ \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Xi(\xi,\eta,\zeta,\tau)\right]_{\xi=0} = F'(\eta,\zeta,\tau) = \frac{e^{\tau}}{a_1}F(y,z,t)\ .$$

Pour exprimer Ξ , nous introduisons les notations suivantes:

$R_0'(\xi,\eta,\zeta,R)$, $R_1'(\xi,\eta,\zeta,R)$ sont les moyennes des fonctions $\varpi'(\xi,\eta,\zeta)$, $\varpi_1'(\xi,\eta,\zeta)$ sur la circonférence :

$$\xi' = \xi\ ,\quad (\eta'-\eta)^2 + (\zeta'-\zeta)^2 = R$$

$S'(\eta,\zeta,\tau,R)$ sera la moyenne de $F'(\eta,\zeta,\tau)$ sur la circonférence

$$\xi' = 0\ ,\quad (\eta'-\eta)^2 + (\zeta'-\zeta)^2 = R$$

Nous avons, d'ailleurs, entre ces données, relatives à Ξ et celles correspondantes, $R_0(x,y,z,R)$, $R_1(x,y,z,R)$ $R_2(x,y,z,R)$ et $S(y,z,t,\rho)$, relatives à X, les relations suivantes, que l'on obtient immédiatement, à partir de (.47), (48), (49):

$$(50)\quad R'_0(\xi,\eta,\zeta,R)=R_0\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right)$$

$$(51)\quad R'_1(\xi,\eta,\zeta,R)=R_0\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right)+\frac{1}{a_1V_1}R_1\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right)=$$
$$=R_2\left(x,y,z,\frac{R}{a_1^2}\right)$$

$$(52)\quad S'(\eta,\zeta,\tau,R)=\frac{e^{\tau}}{a_1}S\left(y,z,t,\frac{R}{a_1^2}\right)$$

Ξ sera alors donnée, d'abord, par une formule analogue à (I3) du chapitre I:

$$(53)\quad 4\pi\,\Xi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=I_1+I_2+I_3+I_4\ ,$$

où I_1, I_2, I_3 et I_4 sont données par les formules (9), (IO), (II) et (I2) du chapitre I, à condition d'y remplacer α' par ϖ' β par ϖ'_1, γ' par Ξ et $\frac{\partial v}{\partial \xi'}$ par F'

Ces formules contiennent, outre les données, les valeurs de Ξ sur le plan $\xi=0$. On élimine ces valeurs par la méthode des images, déjà utilisée pour la résolution des problèmes mixtes, de type Dirichlet. En désignant par I'_1, I'_2, I'_3, I'_4 les valeurs de I_1, I_2, I_3 et I_4, relatives au point $(-\xi,\eta,\zeta)$ nous avons:

$$(54)\quad 0=I'_1+I'_2+I'_3+I'_4\ ,$$

ce point étant hors du domaine d'intégration, situé dans la région I. Mais, cette fois, on ajoute (54) à (53), au lieu de la retrancher.

En posant:

$$(55)\quad J'_1=I_1+I'_1\ ,\ J'_2=I_2+I'_2\ ,\ J'_3=I_3+I'_3\ ,\ J'_4=\frac{I_4+I'_4}{2}\ ,$$

nous avons donc:

$$(56)\quad 4\pi\,\Xi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=J'_1+2J'_2+J'_3+2J'_4$$

......

Ensuite:

$$(57)\quad \frac{1}{2\pi} J_2' = -\int_{\xi}^{\tau} S'(\eta,\zeta,\tau-r,\, r^2-\xi^2)\,dr\,,$$

$$(58)\quad \frac{1}{2\pi} \dot{J}_4' = -\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\tau} r\,dr \int_0^{\tau-r} j'\left[\frac{(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] S'(\eta,\zeta,\theta,r^2-\xi^2)\,d\theta\,,$$

$$(59)\quad \frac{1}{2\pi} J_1' = \int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\right.$$

$$\left.\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda + \tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} R_1'\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda +$$

$$\tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} R_1'\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda + 2\tau^2\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R}$$

$$R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda + 2\tau^2\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R} R_0'\left[\lambda\tau-\right.$$

$$\left.\xi,\ \ldots\right]d\lambda - \tau.\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} \lambda\frac{\partial}{\partial\xi} R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\ldots\right]d\lambda + \tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}$$

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\xi} R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\ldots\right]d\lambda\,,$$

$$(60)\quad \frac{1}{2\pi} J_3' = \frac{\tau^2}{2}\left[\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda +\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda\right] + \frac{1}{2}\int_0^{\xi} r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right)\times$$

$$\times dr \int_{-1}^{+1} R_1' \left[\xi - \lambda r , \eta , \zeta , r^2(1-\lambda^2) \right] d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\tau} r^2 j' \left(\frac{\tau^2 - r^2}{4} \right) dr$$

$$\left[\int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} R_1' \left[\xi - \lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2) \right] d\lambda + \int_{\frac{\xi}{r}}^{1} R_1' \left[\lambda r - \xi, \eta, \zeta, \right.\right.$$

$$\left.\left. r^2(1-\lambda^2) \right] d\lambda \right] + \frac{\tau}{4} \int_0^{\xi} r^2 j'' \left(\frac{\tau^2 - r^2}{4} \right) dr \int_{-1}^{+1} R_0' \left[\xi - \lambda r, \eta, \right.$$

$$\left. \zeta, r^2(1-\lambda^2) \right] d\lambda + \frac{\tau}{4} \int_{\xi}^{\tau} r^2 j'' \left(\frac{\tau^2 - r^2}{4} \right) dr \left[\int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} R_0' \left[\xi - \lambda r, \right.\right.$$

$$\left. \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2) \right] d\lambda + \int_{\frac{\xi}{r}}^{1} R_0' \left[\lambda r - \xi, \eta, \zeta, \right.$$

$$\left.\left. r^2(1-\lambda^2) \right] \cdot d\lambda \right]$$

La solution du problème mixte, relatif à l'équation (45), sera donc, pour $0 \leqslant \xi \leqslant \tau$

$$(61) \qquad \Xi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = - \int_{\xi}^{\tau} S'(\eta, \zeta, \tau - r, r^2 - \xi^2) \, dr$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\tau} r \, dr \int_0^{\tau - r} j' \left[\frac{(\tau - \theta)^2 - r^2}{4} \right] S'(\eta, \zeta, \theta, r^2 - \xi^2) \, d\theta$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} R_0' \left[(\xi - \lambda \tau, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2) \right] d\lambda + \right.$$

$$+\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+\tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}R_1'\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]$$

$$d\lambda+\tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}R_1'\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+2\tau^2\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R}$$

$$R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+2\tau^2\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R}R_0'$$

$$\left[\lambda\tau-\xi,\ ----\right]d\lambda-\tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\ ----\right]$$

$$d\lambda+\tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\ ----\right]d\lambda+$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\ ---\right]d\lambda+\frac{1}{2}\int_0^{\xi}r^2 j'$$

$$\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right)dr\int_{-1}^{+1}R_1'\left[\xi-\lambda r,\eta,\zeta,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\tau} r^2 j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \left\{\int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} R_1'\left[\xi-\lambda r, \eta,\right.\right.$$

$$\left.\left.\zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \int_{\frac{\xi}{r}}^{1} R_1'\left[\lambda r-\xi, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda\right\}$$

$$+\frac{\tau}{4}\int_0^{\xi} r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{+1} R_0'\left[\xi-\lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda +$$

$$+\frac{\tau}{4}\int_{\xi}^{\tau} r^2 j''\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right) dr \left\{\int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} R_0'\left[\xi-\lambda r, \ldots\right] d\lambda + \int_{\frac{\xi}{r}}^{1} R_0'\left[\lambda r-\xi \ldots\right] d\lambda\right\}$$

En revenant à l'équation (3I) et aux équations définies (4I),(42),(43),nous obtenons enfin,compte tenu des relations de correspondance (44),(45)(50),(5I) et (52) pour $0 \leqslant x \leqslant V_1 t$:

$$(62)\quad X(x,y,z,t) = -\int_x^{V_1 t} e^{-a_1 r} S\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2-x^2\right) dr -$$

$$-\frac{a_1^2 V_1}{2}\int_x^{V_1 t} r\, dr \int_0^{t-\frac{r}{V_1}} e^{-a_1 V_1 (t-\tau)} j'\left[a_1^2 \frac{V_1^2 (t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \times$$

$$\times S\left(y,z,\tau, r^2-x^2\right) d\tau + \frac{e^{-a_1 V_1 t}}{2} \left\{\int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} R_0\left[x-\right.\right.$$

$$- \lambda V_1 t , y , z , V_1^2 t^2 (1-\lambda^2) \Big] d\lambda + \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} R_0 \Big[\lambda V_1 t - x , y , z ,$$

$$V_1^2 t^2 (1-\lambda^2) \Big] d\lambda + a_1 V_1 t \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} R_2 \Big[x - \lambda V_1 t , y , z , V_1^2 t^2 (1-\lambda^2) \Big] d\lambda$$

$$+ a_1 V_1 t \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} R_2 \Big[\lambda V_1 t - x , \ldots \Big] d\lambda + 2 V_1^2 t^2 \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} R_0$$

$$\Big[x - \lambda V_1 t \quad \ldots \Big] d\lambda + 2 V_1^2 t^2 \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} R_0 \Big[$$

$$\lambda V_1 t - x , \ldots \Big] d\lambda - V_1 t \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} \lambda \frac{\partial}{\partial x} R_0 \Big[x - \lambda V_1 t , \ldots \Big] d\lambda$$

$$+ V_1 t \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} \lambda \frac{\partial}{\partial x} R_0 \Big[\lambda V_1 t - x , \ldots \Big] d\lambda + \frac{a_1^2 V_1^2 t^2}{2} \times$$

$$\Big\{ \int_{-1}^{\frac{x}{V_1 t}} R_0 \Big[x - \lambda V_1 t , y , z , V_1^2 t^2 (1-\lambda^2) \Big] d\lambda + \int_{\frac{x}{V_1 t}}^{1} R_0$$

$$\Big[\lambda V_1 t - x , \ldots \Big] d\lambda \Big\} + \frac{a_1^3}{2} \int_0^x r^2 j' \left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4} \right) \times$$

$$dr \int_{-1}^{+1} R_2 \Big[x - \lambda r , y , z , r^2 (1-\lambda^2) \Big] d\lambda + \frac{a_1^3}{2} \int_x^{V_1 t}$$

$$r^2 j'\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \left\{ \int_{-1}^{\frac{x}{r}} R_2 \left[x - \lambda r, y, z,\right.\right.$$

$$\left.\left. r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \int_{\frac{x}{r}}^{1} R_2 \left[\lambda r - x, \ldots\right] d\lambda \right\} + \frac{a_1^4 V_1 t}{4}$$

$$\int_0^x r^2 j''\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{+1} R_0 \left[x - \lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda +$$

$$+ \frac{a_1^4 V_1 t}{4} \int_x^{V_1 t} r^2 j''\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \left\{ \int_{-1}^{\frac{x}{r}} R_0 \left[x - \lambda r, \ldots\right] d\lambda + \int_{\frac{x}{r}}^{1} R_0 \left[\lambda r - x, \ldots\right] d\lambda \right\}\Bigg\}$$

Pour le milieu **2**, nous opérons d'une façon analogue, en déterminant d'abord la solution du problème mixte, relatif à l'équation (45) en Ξ R_0, R_1, R_2 et S, R'_0, R'_1 et S' gardant la même signification que dans le milieu I, en remplaçant naturellement a_1 et V_1 par a_2 et V_2 nous obtenons ainsi, pour $0 \leqslant -\xi \leqslant \tau$:

$$(63) \quad \Xi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \int_{-\xi}^{\tau} S'(\eta, \zeta, \tau - r, r^2 - \xi^2)\, dr + \frac{1}{2} \times$$

$$\int_{-\xi}^{\tau} r\,dr \int_0^{\tau - r} j'\left[\frac{(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right] S'(\eta, \zeta, \theta, r^2 - \xi^2)\, d\theta + \frac{1}{2} \times$$

$$\left\{ \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} R'_0 \left[\xi - \lambda\tau, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} R'_0 \left[\lambda\tau - \xi, \eta, \zeta,\right.\right.$$

$$\left.\tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \tau \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1} R'_1 \left[\xi - \lambda\tau, \eta, \zeta, \tau^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda +$$

......

$$+\tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}} R_1'\left[\lambda\tau-\xi,\eta,\zeta,\tau^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+2\tau^2\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}(1-\lambda^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial R}R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\ldots\right]d\lambda+2\tau^2\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}(1-\lambda^2)\frac{\partial}{\partial R}\,R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\right.$$

$$\left.\ldots\right]d\lambda-\tau\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\ldots\right]d\lambda+\tau\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\ldots\right]d\lambda+\frac{\tau^2}{2}\int_{\frac{\xi}{\tau}}^{1}R_0'\left[\xi-\lambda\tau,\ldots\right]d\lambda+$$

$$\frac{\tau^2}{2}\int_{-1}^{\frac{\xi}{\tau}}R_0'\left[\lambda\tau-\xi,\ldots\right]d\lambda+\frac{1}{2}\int_{0}^{-\xi}r^2j'$$

$$\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right)dr\int_{-1}^{+1}R_1'\left[\xi-\lambda r,\eta,\zeta,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\xi}^{\tau}r^2j'\left(\frac{\tau^2-r^2}{4}\right)dr\left\{\int_{\frac{\xi}{r}}^{1}R_1'\left[\xi-\lambda r,\ldots\right]d\lambda\right.$$

$$+ \int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} R'_1 \left[\lambda r - \xi, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \Bigg\} + \frac{\tau}{4} \int_0^{-\xi} r^2 j''$$

$$\left(\frac{\tau^2 - r^2}{4}\right) dr \int_{-1}^{+1} R'_0 \left[\xi - \lambda r, \eta, \zeta, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \frac{\tau}{4} \int_{-\xi}^{\tau} r^2 j''$$

$$\left(\frac{\tau^2 - r^2}{4}\right) dr \left\{ \int_{\frac{\xi}{r}}^{1} R'_0 \left[\xi - \lambda r, \ldots\right] d\lambda + \int_{-1}^{\frac{\xi}{r}} R'_0 \left[\lambda r - \xi, \ldots\right] d\lambda \right\} \Bigg)$$

Et en revenant au problème mixte, relatif à l'équation (3I), nous obtenons pour $0 \leqslant -x \leqslant V_2 t$:

$$(64) \quad X(x,y,z,t) = \int_{-x}^{V_2 t} e^{-a_2 r} S\left(y,z,t-\frac{r}{V_2}, r^2 - x^2\right) dr + \frac{a_2^2 V_2}{2}$$

$$\times \int_{-x}^{V_2 t} r\, dr \int_0^{t-\frac{r}{V_2}} e^{-a_2 V_2 (t-\tau)} j'\left[a_2^2 \frac{V_2^2 (t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] S(y,z,\tau, r^2 - x^2)\, d\tau$$

$$+ \frac{e^{-a_2 V_2 t}}{2} \left\{ \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} R_0 \left[x - \lambda V_2 t, y, z, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} R_0 \right.$$

$$\left[\lambda V_2 t - x, y, z, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + a_2 V_2 t \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} R_2 \left[x - \lambda V_2 t, y, z,\right.$$

$$\left. V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + a_2 V_2 t \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} R_2 \left[\lambda V_2 t - x, y, z, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda +$$

$$+ \; 2 V_2^2 t^2 \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} R_0 \left[x - \lambda V_2 t, \dots \right] d\lambda \; +$$

$$2 V_2^2 t^2 \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} (1-\lambda^2) \frac{\partial}{\partial R} R_0 \left[\lambda V_2 t - x, \dots \right] d\lambda - V_2 t \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} \lambda \frac{\partial}{\partial x}$$

$$R_0 \left[x - \lambda V_2 t, \dots \right] d\lambda + V_2 t \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} \lambda \frac{\partial}{\partial x} R_0 \left[\lambda V_2 t - x, \dots \right] d\lambda$$

$$+ \frac{a_2^2 V_2^2 t^2}{2} \left\{ \int_{\frac{x}{V_2 t}}^{1} R_0 \left[x - \lambda V_2 t, y, z, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2) \right] d\lambda \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{\frac{x}{V_2 t}} R_0 \left[\lambda V_2 t - x, \dots \right] d\lambda \right\} + \frac{a_2^3}{2} \int_{0}^{-x} r^2 j'$$

$$\left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4} \right) dr \int_{-1}^{+1} R_2 \left[x - \lambda r, y, z, r^2 (1-\lambda^2) \right] d\lambda + \frac{a_2^3}{2}$$

$$\int_{-x}^{V_2 t} r^2 j \left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4} \right) dr \left\{ \int_{\frac{x}{r}}^{1} R_2 \left[x - \lambda r, y, z, r^2 (1-\lambda^2) \right] d\lambda \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{\frac{x}{r}} R_2 \left[\lambda r - x, y, z, r^2 (1-\lambda^2) \right] d\lambda \right\} + \frac{a_2^4 V_2 t}{4} \int_{0}^{-x} r^2 j'' \left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4} \right) \times$$

$$dr\int_{-1}^{+1}R_0\left[x-\lambda r,\, y,z,r^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+\frac{a_2^4V_2t}{4}\int_{-x}^{V_2t}r^2 j''\left(a_2^2\frac{V_2^2t^2-r^2}{4}\right)$$

$$dr\left\{\left(\int_{\frac{x}{r}}^{1}R_0\left[x-\lambda r,\ldots\right]d\lambda+\int_{-1}^{\frac{x}{r}}R_0\left[\lambda r-x,\ldots\right]d\lambda\right)\right\}$$

Nous devons maintenant calculer $\frac{\partial X}{\partial y}$ et $\frac{\partial X}{\partial z}$ pour $x=\pm 0$ .Nous trouvons sans difficulté:

$$(65)\quad \frac{\partial}{\partial y}X\left(+0,y,z,t\right)=-\int_0^{V_1t}e^{-a_1r}\frac{\partial}{\partial y}S\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},\right.$$

$$\left.r^2\right)dr-\frac{a_1^2V_1}{2}\int_0^{V_1t}r\,dr\int_0^{t-\frac{r}{V_1}}e^{-a_1V_1(t-\tau)}j'\left[a_1^2\frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right]\times$$

$$\frac{\partial}{\partial y}S\left(y,z,\tau,r^2\right)d\tau+e^{-a_1V_1t}C_1\left(y,z,t\right),$$

en posant:

$$(66)\quad C_1\left(y,z,t\right)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}R_0\left[\lambda V_1t,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+a_1V_1t\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}$$

$$R_2\left[\lambda V_1t,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda+V_1t\int_0^1\lambda\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial y}R_0\left[\lambda V_1t,y,z,V_1^2t^2(1-\lambda^2)\right]d\lambda.$$

$$+2V_1^2t^2\int_0^1(1-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial y}R_0\left[\lambda V_1t;\ldots\right]d\lambda+\frac{a_1^2V_1^2t^2}{2}\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}R_0\left[\lambda V_1t,\right.$$

$$\text{----}\Big]\, d\lambda + \frac{a_1^3}{2} \int_0^{V_1 t} r^2 j'\left(a_1 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$R_2\left[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda + \frac{a_1^4 V_1 t}{4} \int_0^{V_1 t} r^2 j''\left(a_1^2 \frac{V_1^2 t^2 - r^2}{4}\right) \times$$

$$dr \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} R_0\left[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} X(+0, y, z, t)$$

s'obtient en remplaçant partout , $\frac{\partial}{\partial y}$ par $\frac{\partial}{\partial z}$ dans la formule (65) ci-dessus:

$D_1(y, z, t)$ désignera dans la formule qui donne $\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{x=+0}$, l'ensemble des termes connus, qui ont $e^{-a_1 V_1 t}$ comme facteur.

De même :

$$(67) \quad \frac{\partial}{\partial y} X(-0, y, z, t) = \int_0^{V_2 t} e^{-a_2 r} \frac{\partial}{\partial y} S\left(y, z, t - \frac{r}{V_2}, r^2\right) dr + \frac{a_2^2 V_2}{2} \int_0^{V_2 t} r\, dr \int_0^{t - \frac{r}{V_2}} e^{-a_2 V_2 (t-\tau)} j'\left[a_2^2 \times \frac{V_2^2 (t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \frac{\partial}{\partial y} S(y, z, \tau, r^2)\, d\tau + e^{-a_2 V_2 t} C_2(y, z, t)$$

$$(68) \quad C_2(y,z,t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} R_0\left[-\lambda V_2 t,\, y, z,\, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda +$$

$$a_2 V_2 t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} R_2\left[-\lambda V_2 t,\, y, z,\, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda - V_2 t \int_0^1 \lambda \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$R_0\left[-\lambda V_2 t,\, y, z,\, V_2^2 t^2 (1-\lambda^2)\right] d\lambda + 2 V_2^2 t^2 \int_0^1 (1-\lambda^2) \frac{\partial^2}{\partial R \partial y}$$

$$R_0\left[-\lambda V_2 t, \ldots\right] d\lambda + \frac{a_2^2 V_2^2 t^2}{2} \int_0 \frac{\partial}{\partial y} R_0.\left[-\lambda V_2 t, \ldots\right] d\lambda$$

$$+ \frac{a_2^3}{2} \int_0^{V_2 t} r^2 j'\left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} R_2\left[-\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right]$$

$$\times d\lambda + \frac{a_2^4 V_2 t}{4} \int_0^{V_2 t} r^2 j''\left(a_2^2 \frac{V_2^2 t^2 - r^2}{4}\right) dr \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} R_0\left[-\lambda r, y,\right.$$

$$\left. z, r^2(1-\lambda^2)\right] d\lambda$$

$\frac{\partial}{\partial z} X(-0,y,z,t)$ s'obtient encore en remplaçant partout $\frac{\partial}{\partial y}$ par $\frac{\partial}{\partial z}$ dans la formule (67). Et, de même; $D_2(y,z,t)$, à partir de la formule (68).

Nous voyons, d'ailleurs, que le deuxième terme du second membre de chacune des formules (65) et (67), par analogie avec des intégrales de ce type, déjà rencontrées au chapitre I et dans les formules (38) et (40) du présent chapitre, peut être utilement transformé:

$$\frac{a^2 V}{4\pi}\int_0^{Vt} r\,dr\int_0^{t-\frac{r}{V}} e^{-aV(t-\tau)}\, j'\left[a^2\,\frac{V^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] d\tau \times$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial y} F(y+r\cos\varphi,\ z+r\sin\varphi,\tau)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2 V}{4\pi}\iiint_{T_{yzt}} e^{-aV(t-\tau)}\, j'\left[a^2\,\frac{V^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right]\frac{\partial}{\partial y}$$

$$F(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau\ ,$$

T_{yzt} désignant toujours le volume du cône de révolution:

$$(68') \qquad 0\leqslant \tau\leqslant t \qquad (\eta-y)^2+(\zeta-z)^2-V^2(t-\tau)^2\leqslant 0$$

Nous avons maintenant tous ~~les~~ éléments nécessaires pour écrire les limites, à droite et à gauche, de $\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$ et de $\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)$ dans le plan $x=0$

......

En égalant ces limites, nous obtenons les équations intégro-différentielles que doivent satisfaire les fonctions inconnues f et g. Ces équations s'écrivent:

$$(69)\qquad \frac{1}{\mu_1}\int_0^{V_1 t} e^{-a_1 r}\frac{\partial}{\partial y} S\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},r^2\right)dr + \frac{1}{\mu_2}\times$$

$$\int_0^{V_2 t} e^{-a_2 r}\frac{\partial}{\partial y} S\left(y,z,t-\frac{r}{V_2},r^2\right)dr - \left(\frac{1}{\mu_1 V_1}+\frac{1}{\mu_2 V_2}\right)\frac{\partial}{\partial t}$$

$$f(y,z,t) - \left(\frac{a_1}{\mu_1}+\frac{a_2}{\mu_2}\right) f(y,z,t) + \frac{1}{2\pi\mu_1 V_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-a_1 V_1 (t-\tau)}}{(t-\tau)^2}$$

$$\Delta_1 f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{1}{2\pi\mu_2 V_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 V_2 (t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\Delta_1 f$$

$$(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_1^2}{2\mu_1}\int_0^{V_1 t} e^{-a_1 r} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},r^2\right)dr$$

$$+\frac{a_2^2}{2\mu_2}\int_0^{V_2 t} e^{-a_2 r} N\left(y,z,t-\frac{r}{V_2},r^2\right)dr + \frac{a_1^4 V_1}{8\pi\mu_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}}$$

$$e^{-a_1 V_1 (t-\tau)} j''\left[a_1^2\,\frac{V_1^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau\ +$$

$$+\frac{a_2^4 V_2}{8\pi\mu_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} e^{-a_2 V_2 (t-\tau)} j''\left[a_2^2\,\frac{V_2^2(t-\tau)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\tau)\times$$

$$d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_1^2 V_1}{4\pi\mu_1} \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} e^{-a_1 V_1 (t-\tau)}\, j'\left[a_1^2\, \frac{V_1^2 (t-\tau)^2 - r^2}{4}\right]$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y} F(\eta,\zeta,\tau) \cdot d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_2^2 V_2}{4\pi\mu_2} \iiint_{\Gamma^2_{yzt}} e^{-a_2 V_2 (t-\tau)} \times$$

$$j'\left[a_2^2\, \frac{V_2^2 (t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \frac{\partial}{\partial y} F(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau = A(y,z,t),$$

En posant:

$$(70) \quad A(y,z,t) = \frac{e^{-a_1 V_1 t}}{\mu_1}\left[C_1(y,z,t) - A_1(y,z,t)\right] - \frac{e^{-a_2 V_2 t}}{\mu_2}\left[C_2(y,z,t) + A_2(y,z,t)\right]$$

$$(71) \quad \frac{1}{\mu_1}\int_0^{V_1 t} e^{-a_1 r} \frac{\partial}{\partial z} S\left(y,z,t-\frac{r}{V_1}, r^2\right) dr + \frac{1}{\mu_2}\int_0^{V_2 t} e^{-a_2 r} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$S\left(y,z,t-\frac{r}{V_2}, r^2\right) dr - \left(\frac{1}{\mu_1 V_1} + \frac{1}{\mu_2 V_2}\right) \frac{\partial}{\partial t} g(y,z,t) - \left(\frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_2}{\mu_2}\right) \times$$

$$g(y,z,t) + \frac{1}{2\pi\mu_1 V_1} \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-a_1V_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^2} \Delta_1 g(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau +$$

$$\frac{1}{2\pi\mu_2 V_2} \iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2V_2(t-\tau)}}{(t-\tau)^2} \Delta_1 g(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_1^2}{2\mu_1}\int_0^{V_1 t} e^{-a_1 r} \times$$

$$Q\left(y,z,t-\frac{r}{V_1},r^2\right)dr + \frac{a_2^2}{2\mu_2}\int_0^{V_2 t} e^{-a_2 r}\, Q\left(y,z,t-\frac{r}{V_2},r^2\right)dr +$$

$$\frac{a_1^4 V_1}{8\pi\mu_1} \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} e^{-a_1V_1(t-\tau)} j''\left[a_1^2\,\frac{V_1^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] g(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_2^4 V_2}{8\pi\mu_2}$$

$$\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} e^{-a_2V_2(t-\tau)} j''\left[a_2^2\,\frac{V_2^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] g(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_1^2 V_1}{4\pi\mu_1} \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} e^{-a_1V_1(t-\tau)} \times$$

$$j'\left[a_1^2\,\frac{V_1^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \frac{\partial}{\partial z}\, F(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau \quad +$$

$$+ \frac{a_2^2 V_2}{4\pi\mu_2} \iiint e^{-a_2V_2(t-\tau)}\, j'\left[a_2^2\,\frac{V_2^2(t-\tau)^2 - r^2}{4}\right] \times$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau = B(y,z,t)$$

$$(72)\quad B(y,z,t) = \frac{e^{-a_1V_1t}}{\mu_1}\left[D_1(y,z,t) - B_1(y,z,t)\right]$$

$$- \frac{e^{-a_2V_2t}}{\mu_2}\left[D_2(y,z,t) + B_2(y,z,t)\right]$$

La dissymétrie, dans les formules (70) et (72) provient de ce que les fonctions A et B sont le résultat de la dérivation de Y et de Z, par rapport à x, et des transformations qui ont été faites sur ces dérivées, tandis que les fonctions C et D résultent directement de la dérivation de X, par rapport à y et à z.

Pour $t = 0$, les deux membres de l'équation (69), compte tenu des concordances (I7), (2I), (35) et (4I), se réduisent à:

$$-\left(\frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_2}{\mu_2}\right)\alpha(0,y,z) - \left(\frac{1}{\mu_1V_1} + \frac{1}{\mu_2V_2}\right)\alpha_1(0,y,z)$$

De même, compte tenu des mêmes concordances, les deux membres de (7I) se réduisent, pour $t = 0$ à:

$$-\left(\frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_2}{\mu_2}\right)\beta(0,y,z) - \left(\frac{1}{\mu_1V_1} + \frac{1}{\mu_2V_2}\right)\beta_1(0,y,z)$$

Nous allons intégrer les deux équations (69) et (7I), par rapport au temps, entre 0 et t. Avant d'écrire les équations obtenues, remarquons qu'après cette intégration, les intégrales de tête des premiers membres de (69) et de (7I) peuvent s'écrire, par analogie avec des intégrales de ce type, déjà rencontrées au chapitre I, formule (36'):

$$\int_0^t d\tau \int_0^{V\tau} e^{-ar}\frac{\partial}{\partial y} S\left(y,z,\tau-\frac{r}{V}, r^2\right)dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{Vt} e^{-ar}\,dr$$

$$\int_0^{t-\frac{r}{V}} d\tau \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} F\left(y + r\cos\varphi, z + r\sin\varphi, \tau\right) d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\iiint_{\Gamma_{yzt}} \frac{e^{-ar}}{r}\frac{\partial}{\partial y} F(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \quad ,$$

où Γ_{yzt} est toujours le volume du même cône de révolution, défini par les inégalités(68'), avec une formule analogue, où entrent $\frac{\partial S}{\partial z}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$.

De même, nous avons:

$$\int_0^t d\tau \int_0^{V\tau} e^{-ar} N\left(y,z,\tau-\frac{r}{V},r^2\right) dr = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Gamma_{yzt}} \frac{e^{-ar}}{r} f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau ,$$

et une formule analogue, où entrent P et g .

En introduisant les opérateurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ des deux premiers chapitres, formules (38) et (38') du chapitre I, nous obtenons alors:

$$(73) \quad \frac{1}{2\pi\mu_1}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-a_1 r}}{r}\frac{\partial}{\partial y} F(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \; +$$

$$\frac{1}{2\pi\mu_2}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r}\frac{\partial}{\partial y} F(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_1^2 V_1}{4\pi\mu_1}\int_0^t d\tau$$

$$\iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}} e^{-a_1 V_1(\tau-\theta)}\, j'\left[a_1^2\frac{V_1^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\frac{\partial}{\partial y} F(\eta,\zeta,\theta)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta \; +$$

$$\frac{a_2^2 V_2}{4\pi\mu_2}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2 V_2(\tau-\theta)}\, j'\left[a_2^2\frac{V_2^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\frac{\partial}{\partial y} F(\eta,\zeta,\theta) \; \times$$

$$d\eta\, d\zeta\, d\theta - \frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[f] - \frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[f] = \mathcal{A}(y,z,t) \; ,$$

. . . . . .

avec

$$(74) \qquad \mathcal{A}(y,z,t) = \int_0^t A(y,z,\tau)\,d\tau - \left(\frac{1}{\mu_1 V_1} + \frac{1}{\mu_2 V_2}\right) \alpha(0, y, z)$$

$$(75) \quad \frac{1}{2\pi\mu_1} \iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-a_1 r}}{r} \frac{\partial}{\partial z} F(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \frac{1}{2\pi\mu_2}$$

$$\times \iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r} \frac{\partial}{\partial z} F(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \frac{a_1^2 V_1}{4\pi\mu_1} \int_0^t d\tau$$

$$\iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}} e^{-a_1 V_1(\tau-\theta)}\, j'\left[a_1^2 \frac{V_1^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right] \frac{\partial}{\partial z} F(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$

$$+ \frac{a_2^2 V_2}{4\pi\mu_2} \int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2 V_2(\tau-\theta)}\, j'\left[a_2^2 \frac{V_2^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right] \frac{\partial}{\partial z}$$

$$F(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta - \frac{1}{\mu_1} \mathcal{D}_1[q] - \frac{1}{\mu_2} \mathcal{D}_2[q] = \mathcal{B}(y,z,t),$$

$$(76) \quad \mathcal{B}(y,z,t) = \int_0^t B(y,z,\tau)\,d\tau - \left(\frac{1}{\mu_1 V_1} + \frac{1}{\mu_2 V_2}\right) \beta(0, y, z)$$

......

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$,de même que A et B ,sont des quantités connues, qui ne dépendent que des conditions initiales.

Introduisons les opérateurs:

(77) $$\mathfrak{J}_1[f] = \int_0^t d\tau \int_0^{V_1\tau} e^{-a_1 r} N\left(y,z,\tau-\frac{r}{V_1},r^2\right) dr + \frac{a_1^2 V_1}{2} \times \int_0^t d\tau \int_0^{V_1\tau} r\,dr \int_0^{\tau-\frac{r}{V_1}} e^{-a_1V_1(\tau-\theta)} j'\left[a_1^2 \frac{V_1^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] N\left(y,z,\theta,r^2\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Gamma^1_{yzt}} \frac{e^{-a_1 r}}{r} f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \frac{a_1^2V_1}{4\pi} \times \int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^1_{yz\tau}} e^{-a_1V_1(\tau-\theta)} j'\left[a_1^2\frac{V_1^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$

(78) $$\mathfrak{J}_2[f] = \int_0^t d\tau \int_0^{V_2\tau} e^{-a_2 r} N\left(y,z,\tau-\frac{r}{V_2},r^2\right) dr + \frac{a_2^2 V_2}{2}\int_0^t d\tau \int_0^{V_2\tau} r\,dr \int_0^{\tau-\frac{r}{V_1}} e^{-a_2V_2(\tau-\theta)} j'\left[a_2^2 \frac{V_2^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] N\left(y,z,\theta,r^2\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r} f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \frac{a_2^2V_2}{4\pi}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2V_2(\tau-\theta)} j'\left[a_2^2\frac{V_2^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right] f(\eta,\zeta,\theta)\,d\eta\,d\zeta\,d\theta$$

......

Ces opérateurs permettent d'écrire comme suit les deux équations (73) et (75):

$$(79)\quad \frac{1}{\mu_1}\left\{\mathcal{J}_1\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]-\mathcal{D}_1\left[f\right]\right\}+\frac{1}{\mu_2}\left\{\mathcal{J}_2\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]-\mathcal{D}_2\left[f\right]\right\}=$$

$$=\mathcal{A}(y,z,t)$$

$$(80)\quad \frac{1}{\mu_1}\left\{\mathcal{J}_1\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]-\mathcal{D}_1\left[g\right]\right\}+\frac{1}{\mu_2}\left\{\mathcal{J}_2\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]-\mathcal{D}_2\left[g\right]\right\}=$$

$$=\mathcal{B}(y,z,t)$$

Posons encore:

$$(81)\quad \mathcal{C}(y,z,t)=\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}$$

Il résulte,d'autre part,des formules (77) et (78),que nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{J}\left[f\right]=\mathcal{J}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right],\quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{J}\left[f\right]=\mathcal{J}\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

......

Nous avons vu au chapitre II, formule (66), que nous avions de même:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{D}[f] = \mathcal{D}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}[f] = \mathcal{D}\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

Nous en déduisons, en dérivant, l'équation (79) par rapport à y, l'équation (80) par rapport à z, en ajoutant les résultats et en nous rappelant la définition (43) de $F(y,z,t)$:

$$(82)\quad \frac{1}{\mu_1}\left\{\mathcal{J}_1[\Delta_1 F] + \mathcal{D}_1[F]\right\} + \frac{1}{\mu_2}\left\{\mathcal{J}_2[\Delta_1 F] + \mathcal{D}_2[F]\right\} = \mathcal{C}(y,z,t),$$

ou encore, en posant:

$$(83)\quad \jmath_1[F] = \mathcal{J}_1[\Delta_1 F], \qquad \jmath_2[F] = \mathcal{J}_2[\Delta_1 F],$$

$$(84)\quad \frac{1}{\mu_1}\left\{\jmath_1[F] + \mathcal{D}_1[F]\right\} + \frac{1}{\mu_2}\left\{\jmath_2[F] + \mathcal{D}_2[F]\right\} = \mathcal{C}(y,z,t),$$

équation intégro-différentielle ne renfermant plus que F comme inconnue, et de même forme, sauf les expressions plus compliquées des $\jmath$, des $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}$, que celle obtenue par M. DELSARTE, dans le cas où l'on néglige les conductibilités des deux milieux.

Une fois F déterminée, les équations (79) et (80) ne renfermeront plus, chacune, qu'une inconnue, (f ou g , respectivement) et serviront à déterminer ces deux inconnues.

Nous avons, en somme, à résoudre le système intégro-différentiel (79) et (80) en f et g. A cet effet, nous étudierons d'abord l'équation auxiliaire (84) qui ne contient que l'inconnue F.

......

L'étude de cette équation (84) et du système (79),(80) fait l'objet du chapitre IV qui suit.

Auparavant, nous allons montrer que le cas général, $\operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$, formule (8) du présent chapitre, se ramène au cas traité dans ce qui précède, $\operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,0) = 0$.

3. \- La formule (7) nous a donné:

$$\operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z)\, e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t} = \varphi(x,y,z)\, e^{-\lambda t} \quad ,$$

en posant:

$$(85) \qquad \lambda = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$$

Supposons d'abord qu'il y ait un seul milieu au lieu de deux.

Nous posons:

$$(86) \qquad \vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}'(x,y,z,t) + \vec{E}_0(x,y,z)\, e^{-\lambda t}$$

$$(87) \qquad \vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}'(x,y,z,t) + \vec{0}$$

Nous nous imposons:

$$(88) \qquad \operatorname{div} \vec{E}_0 = \varphi(x,y,z) \quad ,$$ d'où il résulte:

$$(89) \qquad \operatorname{div} \vec{E}'(x,y,z,t) = 0 \quad ,$$

en outre, les systèmes de vecteurs $\vec{E}', \vec{H}'$ et $\vec{E}_0 e^{-\lambda t}, \vec{0}$ doivent vérifier séparément les équations de Maxwell.

Nous verrons immédiatement que ces conditions sont possibles.

Récrivons les équations de Maxwell:

$$(90) \qquad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c}\left(4\pi\sigma + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E} = 0 \quad ,$$

$$(91) \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad ,$$

$$(92) \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad ,$$

$$(93) \qquad \operatorname{div} \vec{E}(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z)\, e^{-\lambda t}$$

......

D'après les conditions que nous nous sommes imposées, les équations (90),(92) et (93) sont automatiquement vérifiées. L'équation (91) montre qu' $\vec{E}_0$ dérive d'un potentiel $\Phi(x,y,z)$. (88) montre que:

$$(94) \qquad \Delta\Phi = \varphi(x,y,z)$$

Nous utilisons la solution bien connue de l'équation (94):

$$(95) \qquad \Phi(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \ ,$$

$$r = \left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}} \ ,$$

D désigne l'ensemble des points de l'espace où φ n'est pas nulle.

Cette dernière fonction est supposée telle que la formule (95) ait un sens et que Φ possède des dérivées premières et secondes. Des conditions suffisantes, pour qu'il en soit ainsi, sont connues par la théorie du potentiel newtonien, dans le cas d'une distribution de masses étendue à tout l'espace à trois dimensions (1).

Nous avons ensuite:

$$(96) \qquad \vec{E}_0(x,y,z) = \operatorname{grad}\Phi(x,y,z) \ ,$$

nous pouvons dériver (95), sous le signe $\iiint$, et obtenons ainsi:

$$X_0(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{x-\xi}{r^3}\,\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

et deux formules analogues pour Y_0 et Z_0.

Le vecteur $\vec{E}_0(x,y,z)\,e^{-\lambda t}$ est ainsi entièrement déterminé.

(1) Voir, par ex., Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, Berlin, 1929, p.80 et suiv.

......

Supposons maintenant qu'il y ait deux milieux, de constantes λ_1 et λ_2, séparés par le plan $x=0$. Dans ce cas, $\vec{E}_0(x,y,z)$ reste continu dans tout l'espace et est toujours donné par (96). Mais $\vec{E'}(x,y,z,t)$, va devenir discontinu pour $x=0$.

Nous avons, pour $x \geqslant 0$:

$$(97)\quad \vec{E'}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z,t) - \vec{E}_0(x,y,z)\, e^{-\lambda_1 t}$$

$$(98)\quad \vec{E'}(0,y,z,t) = \vec{E}(0,y,z,t) - \vec{E}_0(0,y,z)\, e^{-\lambda_1 t}$$

et pour $x \leqslant 0$,

$$(99)\quad \vec{E'}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z,t) - \vec{E}_0(x,y,z)\, e^{-\lambda_2 t}$$

$$(100)\quad \vec{E'}(0,y,z,t) = \vec{E}(0,y,z,t) - \vec{E}_0(0,y,z)\cdot e^{-\lambda_2 t}$$

Parmi les données, relatives à $\vec{E'}(x,y,z,t)$, les valeurs d'Y', Z' et de $\frac{\partial X'}{\partial x}$, seront discontinues dans le plan $x=0$. Mais ces discontinuités n'empêchent en rien de résoudre les problèmes mixtes correspondants, puisque ces problèmes sont distincts, de part et d'autre du plan $x=0$. Les seules conditions à respecter et, elles le sont, étant les conditions maxwelliennes de continuité, à la traversée du plan $x=0$ pour les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

Nous nous donnerons toujours les valeurs initiales $\alpha(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$, $\gamma(x,y,z)$ et $\delta(x,y,z)$ des composantes Y, Z, M et N de $\vec{E}(x,y,z,t)$ et de $\vec{H}(x,y,z,t)$. Les valeurs initiales $\alpha'(x,y,z)$ et $\beta'(x,y,z)$ d'Y' et de Z' s'en déduiront. $\varphi(x,y,z)$, p_1, p_2, q_1 et $q_2(y,z)$, étant données, nous en déduirons de même, $X(x,y,z,0)$, $L(x,y,z,0)$ et $X'(x,y,z,0)$ ainsi que $\frac{\partial \vec{E'}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ pour $t=0$

Nous prendrons encore comme inconnues auxiliaires:

$$Y(0,y,z,t) = f(y,z,t),$$
$$Z(0,y,z,t) = g(y,z,t),$$

......

et en déduirons les valeurs d' $Y'(0,y,z,t)$ et de $Z'(0,y,z,t)$, à droite et à gauche, dans le plan $x=0$, ainsi que celles de $\frac{\partial}{\partial y}Y'(0,y,z,t)$ et de $\frac{\partial}{\partial z}Z'(0,y,z,t)$.

Celles ci serviront à déterminer les valeurs de $\frac{\partial}{\partial x}X'(\pm 0,y,z,t)$, compte tenu de ce que $\operatorname{div}\vec{E}'=0$.

Les conditions définies ainsi établies, (conditions, initiales de Cauchy, plus conditions aux limites, dans le plan $x=0$) permettront de résoudre, d'une façon analogue au cas où $\operatorname{div}\vec{E}=0$, les problèmes hyperboliques mixtes de type Dirichlet, pour déterminer Y', Z' et L et les problèmes mixtes de type F.Neumann, pour déterminer X', M et N, (dans tout l'espace et à tout instant). En effet, les composantes d' $\vec{E}'$ et de $\vec{H}$, vérifient toujours l'équation hyperbolique (31). On en déduira Y, Z et X.

Enfin, les conditions de passage, (pour $\vec{E}$ et $\vec{H}$), à la traversée du plan $x=0$, seront les mêmes que dans le cas où $\operatorname{div}\vec{E}=0$ et f et g seront encore déterminées, en écrivant la continuité, pour $x=0$ de

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right) \text{ et de } \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

CHAPITRE IV

Résolution de l'équation intégro-différentielle auxiliaire et du système intégro-différentiel, auxquels aboutit le problème posé au chapitre III.

I.- Nous nous occupons d'abord de l'équation auxiliaire (84) du chapitre précédent.

Pour la résoudre, nous utilisons la méthode du chapitre II, qui est la généralisation naturelle de celle de M. DELSARTE. Nous supposons d'abord que l'inconnue $F(y,z,t)$, appartient à la classe linéaire L, définie au paragraphe I du chapitre II. Dans ce paragraphe, nous avons défini aussi les opérateurs linéaires, permutables $P_{i,j}[F]$, formule (5), les opérateurs linéaires, permutables $\mathcal{P}[F]$ formule (9), leurs indicatrices $\phi(X,Y)$, formule (8) et l'ensemble $(\mathcal{P})$ des opérateurs $\mathcal{P}[F]$.

Nous avons vu également, au paragraphe 2 du même chapitre, que l'opérateur $\mathcal{D}$ faisait partie de l'ensemble $(\mathcal{P})$ et qu'il avait pour indicatrice:

$$\frac{1}{V}\sqrt{1-V^2X+2aVY}$$

Nous allons maintenant nous occuper de l'opérateur $\mathcal{J}[F]$ qui entre, lui aussi, dans notre équation (84):

$$(1)\qquad \mathcal{J}[F]=\frac{1}{2\pi}\iiint_{T_{yzt}}\frac{e^{-ar}}{r}\left(\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2F}{\partial\zeta^2}\right)d\eta\, d\zeta\, d\tau+$$

$$+\frac{a^2V}{4\pi}\int_0^t d\tau\iiint_{T_{yz\tau}}e^{-aV(\tau-\theta)}\,j'\left[a^2\,\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\times$$

$$\left(\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2F}{\partial\zeta^2}\right)d\eta\, d\zeta\, d\theta\ .$$

Nous montrerons, de même, qu'il fait partie de l'ensemble $(\mathcal{P})$ et nous déterminerons son indicatrice.

......

A cet effet, nous allons developper les deux intégrales constituant $\mathcal{J}[F]$, en fonction des opérateurs

$$P_{0,0}[F] = F(y,z,t)\ , \quad P_{i,j}[F] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2i+j-1}}{(2i+j-1)!}\cdot\Delta_i F(y,z,\tau)$$

où les Δ_i sont les laplaciens successifs de F, par rapport à y et à z

D'abord la première. Nous avons successivement:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta_1 F(\eta,\zeta,\tau)\,d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{[(i-1)!]^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2i-2}\Delta_i F(y,z,\tau)$$

$$e^{-ar} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-ar)^j}{j!}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{V(t-\tau)} e^{-ar}\,dr\int_0^{2\pi}\Delta_1 F(\eta,\zeta,\tau)\,d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}$$

$$\frac{V^{2i-1}(-aV)^j(t-\tau)^{2i+j-1}}{2^{2i-2}[(i-1)!]^2 j!\,(2i+j-1)}\,\Delta_i F(y,z,\tau)$$

$$(2)\quad \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Gamma_{yzt}}\frac{e^{-ar}}{r}\Delta_1 F(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2i+j-2)!\,V^{2i}(-aV)^j}{2^{2i-2}[(i-1)!]^2 j!}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{2i+j-1}}{(2i+j-1)!}\times$$

$$\Delta_i F(y,z,\tau)\,d\tau = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2i+j-2)!\,V^{2i}(-aV)^j}{2^{2i-2}[(i-1)!]^2 j!}P_{i,j}[F].$$

Pour la seconde intégrale de $\mathcal{J}$, nous avons les dévelop-pements:

.....

$$j'\left[a^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^{2j-2}\frac{\left[V^2(\tau-\theta)^2-r^2\right]^{j-1}}{(j-1)!\,j!}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{aV(\tau-\theta)}{2}\right]^{2j-2}\frac{\left[1-\frac{r^2}{V^2(\tau-\theta)^2}\right]^{j-1}}{(j-1)!\,j!}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{aV(\tau-\theta)}{2}\right]^{2j-2}\frac{1}{(j-1)!\,j!}\left\{1+\sum_{l=1}^{j-1}(-1)^l\right.$$

$$\left.\frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-l)}{l!}\left[\frac{r}{V(\tau-\theta)}\right]^{2l}\right\}=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2j-2}\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^l\frac{\left[V(\tau-\theta)\right]^{2j-2l-2}r^{2l}}{l!\,(j-l-1)!},$$

$$\frac{a^2}{4\pi}\int_0^{V(\tau-\theta)}r\,j'\left[a^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]dr\int_0^{2\pi}\Delta_1F(y,z,\theta)\,d\varphi=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^{2j}\Delta_iF(y,z,\theta)}{2^{2i+2j-3}\left[(i-1)!\right]^2j!}\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^l\frac{\left[V(\tau-\theta)\right]^{2j-2l-2}}{l!\,(j-l-1)!}$$

$$\times\int_0^{V(\tau-\theta)}r^{2i+2l-1}\,dr=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^{2j}\Delta_iF(y,z,\theta)\left[V(\tau-\theta)\right]^{2i+2j-2}}{2^{2i+2j-2}\left[(i-1)!\right]^2j!}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{j-1}\frac{(-1)^l}{l!\,(j-l-1)!\,(i+l)},$$

$$\sum_{l=0}^{j-1} \frac{(-1)^l}{l!\,(j-l-1)!\,(i+l)} = \frac{1}{i(i+1)\cdots\cdots(i+j-1)}$$ (1), d'où :

$$\frac{a^2}{4\pi}\int_0^{V(\tau-\theta)} r\, j'\left[a^2\,\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]dr\int_0^{2\pi}\Delta_1 F\,(y,\zeta,\theta)\,d\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^{2j}\,\Delta_i F(y,\zeta,\theta)\left[V(\tau-\theta)\right]^{2i+2j-2}}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!}$$

$$e^{-aV(\tau-\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[-aV(\tau-\theta)\right]^k}{k!} ,$$

$$\frac{a^2V}{4\pi}\int_0^t d\tau\iiint_{\Gamma_{y\zeta\tau}} e^{-aV(\tau-\theta)}\,j'\left[a^2\frac{V^2(\tau-\theta)^2-r^2}{4}\right]\Delta_1 F\,(\eta,\zeta,\theta)\times$$

$$d\eta\, d\zeta\, d\theta = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{V^{2i}(-aV)^{2j+k}}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!\,k!}$$

$$\times\int_0^t d\tau\int_0^{\tau}(\tau-\theta)^{2i+2j+k-2}\,\Delta_i F\,(y,\zeta,\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{V^{2i}(-aV)^{2j+k}}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!\,k!}\int_0^t\Delta_i F(y,\zeta,\theta)\,d\theta\times$$

(1) Formule (13') du chapitre II.

$$\times\int_{\theta}^{t}(\tau-\theta)^{2i+2j+k-2}\,d\tau = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}$$

$$\frac{(2i+2j+k-2)!\,V^{2i}\,(-aV)^{2j+k}}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\;j!\;(i+j-1)!\cdot k!}\int_{0}^{t}\frac{(t-\tau)^{2i+2j+k-1}}{(2i+2j+k-1)!}\,\Delta_i F(y,z,\tau)\,d\tau =$$

$$(3)\qquad = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2i+2j+k-2)!\,(-aV)^{2j+k}\,V^{2i}}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!\,k!}\,P_{i,2j+k}[F]$$

L'indicatrice de $V_{\mathcal{J}}[F]$ est donc :

$$(4)\qquad J(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\delta_{i,j}\,(V^2X)^i(-aVY)^j +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{i,j,k}\,(V^2X)^i(-aVY)^{2j+k} ,$$

avec :

$$(5)\qquad \delta_{i,j} = \frac{(2i+j-2)!}{2^{2i-2}\left[(i-1)!\right]^2 j!}\;,\quad \varepsilon_{i,j,k} = \frac{(2i+2j+k-2)!}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!\,k!}$$

Les deux séries multiples qui composent $J(X,Y)$ sont encore absolument et uniformément convergentes, à l'intérieur des cercles $|X| < \frac{1}{V^2}$ et $|Y| < \frac{1}{aV}$ A l'intérieur de ces cercles, $J(X,Y)$ est encore une fonction holomorphe de X et de Y et $J[F]$ fait bien partie de l'ensemble $(\mathcal{P})$.

2.- Le calcul de la somme de chacune des deux séries multiples qui composent $J(X,Y)$, se fait d'une façon analogue à celui de la somme des séries qui forment $\Phi(X,Y)$, (chapitre II, paragraphe 3).

Pour simplifier l'écriture, nous remplaçons encore, provisoirement, V^2X par X et $-aVY$ par Y, $J(X,Y)$ devient:

$$(6) \quad K(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{i,j} X^i Y^j + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{i,j,k} X^i Y^{2j+k}$$

Pour la série double, nous avons:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{2^{2i-2}[(i-1)!]^2} X^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2i+j-2)!}{(2i-2)!\,j!} Y^j = \sum_{i=1} \frac{(2i-2)!}{2^{2i-2}[(i-1)!]^2}$$

$$\times \frac{X^i}{(1-Y)^{2i-1}} = (1-Y)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{2^{2i-2}[(i-1)!]^2}\left[\frac{X}{(1-Y)^2}\right]^i =$$

$$= (1-Y)\left\{\frac{X}{(1-Y)^2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1.3\ldots\ldots(2i-3)}{2.4\ldots\ldots(2i-2)}\left[\frac{X}{(1-Y)^2}\right]^i\right\}$$

$$(7) \quad = \frac{X}{\sqrt{(1-Y)^2-X}}$$

Pour la série triple:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i+2j+k-2)!}{(2i+2j-2)!\,k!} Y^k = \frac{1}{(1-Y)^{2i+2j-1}},$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon_{i,j,h} X^i Y^{2j+h} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!}$$

$$\frac{X^i Y^{2j}}{(1-Y)^{2i+2j-1}} = (1-Y).\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!}$$

$$\times\left[\frac{X}{(1-Y)^2}\right]^i\left[\frac{Y^2}{(1-Y)^2}\right]^j = (1-Y)\sum_{i=1}^{\infty} U^i \sum_{j=1}^{\infty}$$

$$\frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!}\, W^j \quad ,$$

en posant:

$$\frac{X}{(1-Y)^2} = U \quad , \qquad \frac{Y^2}{(1-Y)^2} = W$$

Nous avons ensuite:

$$\frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!} = \frac{1.3\ldots\ldots(2i-3)(2i-1)(2i+1)\ldots(2i+2j-3)}{2.4\ldots\ldots(2i-2).2.4\ldots\ldots2j}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2i-1)(2i+1)\ldots\ldots\ldots(2i+2j-3)}{2.4\ldots\ldots2j} W^j = \frac{1}{(1-W)^{i-\frac{1}{2}}} - 1\,,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} U^i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2i+2j-2)!}{2^{2i+2j-2}(i-1)!\,j!\,(i+j-1)!} W^j = U\left(\frac{1}{\sqrt{1-W}}-1\right)+$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1.3\ldots\ldots(2i-3)}{2.4\ldots\ldots(2i-2)}\left[\frac{U}{\sqrt{1-W}}\left(\frac{U}{1-W}\right)^{i-1} - U.U^{i-1}\right]=$$

$$= U\left(\frac{1}{\sqrt{1-W}}-1\right)+\frac{U}{\sqrt{1-W}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{U}{1-W}}}-1\right)-$$

$$-U\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}}-1\right)=\frac{U}{\sqrt{1-U-W}}-\frac{U}{\sqrt{1-U}}=$$

$$=\frac{X}{1-Y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-X-2Y}}-\frac{1}{\sqrt{(1-Y)^2-X}}\right),$$

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon_{i,j,h}\, X^i Y^{2j+h} = \frac{X}{\sqrt{1-X-2Y}}-\frac{X}{\sqrt{(1-Y)^2-X}}$$

Et par suite

$$(9)\qquad K(X,Y)=\frac{X}{\sqrt{1-X-2Y}},$$

$$(1,)\qquad J(X,Y)=\frac{V^2X}{\sqrt{1-V^2X+2aVY}}$$

3.- L'indicatrice du premier membre de notre équation (84) du chapitre précédent est donc:

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{V_1}\sqrt{1-V_1^2X+2a_1V_1Y}+\frac{V_1X}{\sqrt{1-V_1^2X+2a_1V_1Y}}\right)$$

$$+\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{1}{V_2}\sqrt{1-V_2^2X+2a_2V_2Y}+\frac{V_2X}{\sqrt{1-V_2^2X+2a_2V_2Y}}\right)$$

$$(11)\quad =\frac{1}{\sqrt{(1-V_1^2X+2a_1V_1Y)(1-V_2^2X+2a_2V_2Y)}}\left(\frac{1+2a_1V_1Y}{\mu_1V_1}\right.$$

$$\left.\times\sqrt{1-V_2^2X+2a_2V_2Y}+\frac{1+2a_2V_2Y}{\mu_2V_2}\sqrt{1-V_1^2X+2a_1V_1Y}\right)$$

Pour obtenir une expression algébrique simple, nous allons faire disparaitre les radicaux et le dénominateur commun, en multipliant cette quantité par:

$$(12)\qquad \sqrt{(1-V_1^2X+2a_1V_1Y)(1-V_2^2X+2a_2V_2Y)}\left(\frac{1+2a_1V_1Y}{\mu_1V_1}\right.$$

$$\left.\sqrt{1-V_2^2X+2a_2V_2Y}-\frac{1+2a_2V_2Y}{\mu_2V_2}\sqrt{1-V_1^2X+2a_1V_1Y}\right)$$

Cette expression (I2) est l'indicatrice de:

$$(13)\quad \mathcal{E}[F] = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 \left\{ \frac{V_2^2}{\mu_1} \mathcal{D}_2 \left[F + 2a_1V_1 \int_0^t F(y,z,\tau)\,d\tau \right] - \frac{V_1^2}{\mu_2} \times \mathcal{D}_1 \left[F + 2a_2V_2 \int_0^t F(y,z,\tau)\,d\tau \right] \right\},$$

en effet,l'opérateur produit a comme indicatrice le produit des indicatrices des opérateurs composants et $1 + 2aVY$ est l'indicatrice de

$$F(y,z,t) + 2\alpha V \int_0^t F(y,z,\tau)\,d\tau$$

Nous obtenons ainsi en effectuant ce produit,en tenant compte des valeurs de V et de α ,données par les formules (32) du chapitre III,et en posant:

$$(14)\qquad 4\pi\sigma = \gamma$$

$$\frac{(1+2a_1V_1Y)^2(1-V_2^2X + 2a_2V_2Y)}{\mu_1^2V_1^2} - \frac{(1+2a_2V_2Y)^2(1-V_1^2X+2a_1V_1Y)}{\mu_2^2V_2^2} =$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}\left(1+\frac{\gamma_1 Y}{\varepsilon_1}\right)^2\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon_2\mu_2}X+\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}Y\right) - \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\left(1+\frac{\gamma_2 Y}{\varepsilon_2}\right)^2 \times\right.$$

$$(15)\quad \left.\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon_1\mu_1}X+\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}Y\right)\right] = \frac{1}{c^2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1\mu_2}\left\{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1)-\right.$$

$$-c^2(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)X + \left[2\varepsilon_1\varepsilon_2(\mu_2\gamma_1-\mu_1\gamma_2)+\varepsilon_1^2\mu_2\gamma_2-\varepsilon_2^2\mu_1\gamma_1\right]Y -$$

$$-2c^2(\varepsilon_1\gamma_1-\varepsilon_2\gamma_2)XY + \left[\varepsilon_2\mu_2\gamma_1^2-\varepsilon_1\mu_1\gamma_2^2+2(\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1)\gamma_1\gamma_2\right]Y$$

$$- c^2\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) X Y^2 + \nu_1 \nu_2 \left(\mu_2 \nu_1 - \mu_1 \nu_2\right) Y^3 \Big\}$$

Remarquons que pour:

$$(16) \qquad \frac{\nu_1}{\varepsilon_1} = \frac{\nu_2}{\varepsilon_2} = \lambda \ ,$$

cette indicatrice se décompose en le produit:

$$(17) \qquad \frac{(1+\lambda Y)^2}{c^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2} \left[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1\right)(1+\lambda Y) - c^2 \left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2\right) X \right]$$

Il resulte de ce qui precède, qu'en appliquant l'opérateur $\mathcal{E}$, defini par (I3), aux deux membres de l'équation (84) du chapitre III, nous la transformons en l'équation integro-différentielle:

$$(18) \qquad c^2 \left[\left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2\right) \int_0^t (t-\tau)\, \Delta_1 F(y,z,\tau)\, d\tau + 2\left(\varepsilon_1 \nu_1 - \varepsilon_2 \nu_2\right) \times \int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{2!} \Delta_1 F(y,z,\tau)\, d\tau + \left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{3!} \Delta_1 F(y,z,\tau)\, d\tau \right] - \Big\{ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \times \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1\right) F(y,z,t) - \left[\varepsilon_2^2 \mu_1 \nu_1 - \varepsilon_1^2 \mu_2 \nu_2 - 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\mu_2 \nu_1 - \mu_1 \nu_2\right) \right] \int_0^t F(y,z,\tau)\, d\tau + \left[\varepsilon_2 \mu_2 \nu_1^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \nu_2^2 + 2\left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1\right) \nu_1 \nu_2 \right] \int_0^t (t-\tau) F(y,z,\tau)\, d\tau + \left(\mu_2 \nu_1 - \mu_1 \nu_2\right) \nu_1 \nu_2 \times \int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{2!} F(y,z,\tau)\, d\tau \Big\} = \mathcal{G}_1(y,z,t)$$

avec: (19) $$\mathcal{C}_1(y,z,t) = -c^2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1\mu_2\,\mathcal{E}[\mathcal{C}] \quad ,$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Nous vérifions sans difficulté que la concordance

$$(20) \quad -\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1)F(y,z,0) = \mathcal{C}_1\ (y,z,0)$$

est bien réalisée.

En effet, nous avons:

$$(21) \quad F(y,z,0) = -\frac{\partial}{\partial y}\alpha(0,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}\beta(0,y,z) \quad ,$$

$$\mathcal{C}_1\ (y,z,0) = -c^2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1\mu_2\left\{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\left\{\frac{V_2^2}{\mu_1}\mathcal{D}_2[\mathcal{C}] - \frac{V_1^2}{\mu_2}\mathcal{D}_1[\mathcal{C}]\right\}\right\}_{t=0} =$$

$$(22) \quad = -c^2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1\mu_2\left(\frac{1}{\mu_1^2V_1^2} - \frac{1}{\mu_2^2V_2^2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial y}\alpha(0,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}\beta(0,y,z)\right] =$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1)\left[\frac{\partial}{\partial y}\alpha(0,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}\beta(0,y,z)\right]$$

L'équation (I8) se ramène de suite à une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, avec des conditions initiales de Cauchy, en posant:

$$(23) \quad F_1(y,z,t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{3!}F(y,z,\tau)\,d\tau$$

Nous avons:

$$
(24) \quad
\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{2!} F(y,z,\tau)\,d\tau = \frac{\partial}{\partial t} F_1(y,z,t) \,, \\
&\int_0^t (t-\tau)\, F(y,z,\tau)\,d\tau = \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} \\
&\int_0^t F(y,z,\tau)\,d\tau = \frac{\partial^3 F_1}{\partial t^3} \\
&F(y,z,t) = \frac{\partial^4 F_1}{\partial t^4}
\end{aligned}
$$

Nous obtenons ainsi:

$$
(25) \quad c^2 \left[\left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\left(\varepsilon_1 V_1 - \varepsilon_2 V_2 \right) \frac{\partial}{\partial t} + \left(V_1^2 - V_2^2 \right) \right] \Delta_1 F_1 -
$$

$$
- \left\{ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) \frac{\partial^3}{\partial t^3} - \left[\varepsilon_2^2 \mu_1 V_1 - \varepsilon_1^2 \mu_2 V_2 - \right. \right.
$$

$$
\left. - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\mu_2 V_1 - \mu_1 V_2 \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left[\varepsilon_2 \mu_2 V_1^2 - \varepsilon_1 \mu_1 V_2^2 + 2\left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) \right.
$$

$$
\left. \left. \times V_1 V_2 \right] \frac{\partial}{\partial t} + \left(\mu_2 V_1 - \mu_1 V_2 \right) V_1 V_2 \right\} \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{G}_1 (y,z,t)
$$

avec les conditions initiales:

$$(26)\quad F_1(y,z,0)=\left[\frac{\partial}{\partial t}F_1(y,z,t)\right]_{t=0}=$$

$$=\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}F_1(y,z,t)\right]_{t=0}=\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3}F_1(y,z,t)\right]_{t=0}=0$$

En réalité, nous connaissons également:

$$\left(\frac{\partial^4 F_1}{\partial t^4}\right)_{t=0}=F(y,z,0),$$

mais cette connaissance n'introduit aucune condition supplémentaire, la concordance (20) étant automatiquement vérifiée, comme nous l'avons vu.

Nous remarquons immédiatement que les coefficients des dérivées de l'ordre le plus élevé, qui figurent dans cette équation, ne dépendent que des constantes diélectriques ε_1 et ε_2, et des perméabilités magnétiques μ_1 et μ_2 des deux milieux et pas de leurs conductibilités.

Ces coefficients sont naturellement les mêmes que dans le cas traité par M.DELSARTE, où l'on néglige les conductibilités. Ces termes s'obtiennent, en prenant la dérivée seconde, par rapport au temps, du premier membre de l'équation correspondante du mémoire de M.DELSARTE.

Les surfaces caractéristiques de l'équation (25), ne dépendent donc pas des conductibilités des deux milieux.

Au contraire, tous les termes, autres que ceux qui contiennent les dérivées de l'ordre le plus élevé, dépendent des conductibilités et s'annulent lorsqu'on néglige celles ci.

4.- Traitons d'abord, pour ne plus avoir à y revenir, le cas particulier signalé plus haut, (I6):

$$a_1V_1=a_2V_2=aV\ ,\ \text{ou}\ \frac{V_1}{\varepsilon_1}=\frac{V_2}{\varepsilon_2}=\lambda\ ,$$

......

dans ce cas, comme nous l'avons vu, l'indicatrice de (I8) se décompose en un produit de facteurs linéaires. Mais on peut alors obtenir une indicatrice plus simple que (I5), en multipliant (II) par:

$$(27)\quad \frac{\sqrt{(1-V_1^2X+2aVY)(1-V_2^2X+2aVY)}.}{1+2aVY}\left(\frac{1}{\mu_1V_1}\sqrt{1-V_2^2X+2aVY}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\mu_2V_2}\sqrt{1-V_1^2X+2aVY}\right)$$

Pour voir de quel opérateur, cette expression est l'indicatrice, remarquons d'abord que, moyennant $2aV|Y|<1$,nous avons:

$$\frac{1}{1+2aVY}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2aVY)^n ,$$

$\frac{1}{1+2aVY}$ est donc l'indicatrice de:

$$F(y,z,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(-2aV)^n\int_0^t\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}F(y,z,\tau)\,d\tau ,$$

opérateur de l'ensemble($\mathcal{G}$), qui peut s'écrire symboliquement: $\frac{1}{F+2aV\int_0^t F(y,z,\tau)d\tau}$ avec, toutefois, la convention, que pour $aV=0$,il se réduit à $F(y,z,t)$ et non à $\frac{1}{F}$.

Cette convention admise, nous voyons que (27) est l'indicatrice de:

$$(28)\quad \frac{1}{\mu_1\mu_2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\left\{(\mu_2V_2^2\mathcal{D}_2-\mu_1V_1^2\mathcal{D}_1)\left[\frac{1}{F+2aV\int_0^t F(y,z,\tau)d\tau}\right]\right\}=\mathcal{E}'[F]$$

En effectuant le produit de (II) par (27), nous obtenons:

$$\frac{1-V_2^2X+2aVY}{\mu_1^2V_1^2}-\frac{1-V_1^2X+2aVY}{\mu_2^2V_2^2}=\frac{1}{c^2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1\mu_2}$$

$$\left[\varepsilon_1^2(\varepsilon_2\mu_2-c^2X+\varepsilon_2\mu_2\lambda Y)-\varepsilon_2^2(\varepsilon_1\mu_1-c^2X+\varepsilon_1\mu_1\lambda Y)\right]=$$

$$(29)\quad =\frac{1}{c^2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1\mu_2}\left[\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1)-c^2(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)X\ +\right.$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) Y \Big]$$

Par suite, en appliquant l'opérateur $\mathcal{E}'$ aux deux membres de l'équation (84), du chapitre III, la relation (I6) étant vérifiée, il vient:

$$(30) \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) F(y,z,t) - c^2 \left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 \right) \int_0^t (t-\tau)$$

$$\times \Delta_1 F(y,z,\tau)\, d\tau + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) \int_0^t F(y,z,\tau)\, d\tau =$$

$$= \mathcal{C}_2 (y,z,t) \quad ,$$

avec

$$\mathcal{C}_2 (y,z,t) = c^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2 \mathcal{E}' [\mathcal{C}] \ .$$

La concordance

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) F(y,z,0) = \mathcal{C}_2 (y,z,0)$$

se vérifie comme la concordance (20).

En posant:

$$(31) \quad F_2 (y,z,t) = \int_0^t (t-\tau) F(y,z,\tau)\, d\tau \quad ,$$

l'équation (30) est transformée en l'ensemble de l'équation aux dérivées partielles:

$$(32) \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - c^2 \left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 \right) \Delta_1 F_2 +$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda \left(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \right) \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{C} (y,z,t)$$

et des conditions initiales de Cauchy:

$$(33) \qquad F_2\,(y,z,0) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

L'équation(32) ne diffère de l'équation (57) de M.DELSARTE que par l'existence du terme en $\frac{\partial F_2}{\partial t}$,nul pour $\lambda = 0$, les conditions définies (33) sont les mêmes.Les mêmes conclusions s'appliquent que pour le problème de M.DELSARTE:

$$si \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1) > 0 \ ,$$

l'équation (32) est hyperbolique,le problème de Cauchy,relatif à cette équation,est un problème bien posé,qui a une solution et une seule.

$$Si \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1) < 0 \ ,$$

l'équation (32) est elliptique.Le problème de Cauchy n'a pas de solution,en général.S'il en a,il ne peut en avoir qu'une(I).Il en a une et une seule,certainement valable pour t assez petit,si $\mathcal{E}_2(y,z,t)$ est analytique.

Si $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$,l'équation (32)se réduit à une équation différentielle,pour laquelle le problème de Cauchy a une solution et une seule.

Enfin,si $\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1 = 0$,l'équation(32) se réduit à une équation parabolique:

$$c^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\,\Delta_1 F_2 = -\,\mathcal{E}_2\,(y,z,t) \ ,$$

avec $$\mathcal{E}_2(y,z,0) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \ ,$$

Les plans $t = C^{te}$ sont des surfaces caractéristiques et le problème de Cauchy a une infinité de solutions.

(I) Théorème général de Holmgren.-

$F(y,z,t)=\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}$ étant déterminée, les véritables fonctions inconnues f et $g(y,z,t)$ seront déterminées comme dans le cas général, voir plus loin, paragraphe 9.

5.- Nous revenons au cas général de l'équation(25) et des conditions initiales (26).

La question essentielle qui se pose est de délimiter les cas généraux pour lesquels le problème de Cauchy correspondant aura ou n'aura pas de solution. On peut remarquer tout de suite que les données initiales sont analytiques, ainsi que la surface qui les porte, plan $t=0$, mais le second membre de l'équation (25), $\mathcal{E}_1(y,z,t)$,ne l'est pas, en général.

Les théorèmes généraux, appliqués au problème (25),(26), nous donnent les seuls résultats suivants:

I° Lorsque $\mathcal{E}_1(y,z,t)$ est analytique, et quelles que soient les valeurs numériques des coefficients du premier membre de (25), le problème (25),(26) a une solution qui est analytique et certainement valable pour t assez petit, (théorème de Cauchy-Kowalewski). Dans quelles conditions, cette solution est-elle prolongeable, ce théorème ne le dit pas. En outre; il ne peut exister qu'une solution analytique, sauf si $\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1=0$,auquel cas, le plan $t=0$ est caractéristique.

2°.- Le théorème de Holmgren (I) nous apprend que, le cas où le plan $t=0$ est une surface caractéristique excepté, la solution, s'il en existe, est unique, qu'elle soit analytique, ou non.

Pour obtenir des résultats plus substantiels, au sujet du problème (25),(26), nous allons d'abord transformer l'équation (25), en prenant comme inconnue auxiliaire $\Delta_1 F_1(y,z,t)$ .Supposant, provisoirement, F_1 et ses dérivées, par rapport au temps connues, nous allons considérer(25) comme une équation différentielle en $\Delta_1 F_1$ et l'intégrer par la méthode de la variation des constantes, en tenant compte des conditions initiales.

Nous posons donc:

$$(34)\quad \Delta_1 F_1(y,z,t)=\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}=\Phi(y,z,t)\ ,$$

(25) s'écrit :

(I) .- Voir, par ex. Hadamard, "Leçons sur la propagation des ondes..." Note I.-

.....

$$(35)\quad c^2(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2c^2(\varepsilon_1\gamma_1-\varepsilon_2\gamma_2)\frac{\partial\phi}{\partial t}+c^2(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\phi=\varepsilon_1\varepsilon_2\Big(\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1\Big)\frac{\partial^4F_1}{\partial t^4}+\Big[\varepsilon_2(2\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1)\gamma_1-\varepsilon_1(2\varepsilon_2\mu_1-\varepsilon_1\mu_2)\gamma_2\Big]\frac{\partial^3F_1}{\partial t^3}+\Big[\varepsilon_2\mu_2\gamma_1^2-\varepsilon_1\mu_1\gamma_2^2+2(\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1)\gamma_1\gamma_2\Big]\frac{\partial^2F_1}{\partial t^2}+\gamma_1\gamma_2(\mu_2\gamma_1-\mu_1\gamma_2)\frac{\partial F_1}{\partial t}+\mathcal{C}_1(y,z,t)=G(y,z,t)\ ,$$

et, relativement à cette équation différentielle en ϕ, nous avons les conditions initiales:

$$(36)\qquad \phi(y,z,0)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{t=0}=0$$

L'équation caractéristique, correspondant au premier membre de (35), s'écrit:

$$(37)\quad (\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)r^2+2(\varepsilon_1\gamma_1-\varepsilon_2\gamma_2)r+\gamma_1^2-\gamma_2^2=0\ ,$$

ses racines sont réelles et entières:

$$(38)\quad r_1=-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ ,\qquad r_2=-\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$$

Dans le cas où celles ci sont distinctes:

$$(39)\quad \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\neq\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}\ ,$$ nous pouvons écrire:

$$\phi(y,z,t)=A(y,z,t)e^{r_1t}+B(y,z,t)e^{r_2t}\ ,$$

A et B sont déterminées par (35), (36) et par:

$$(40)\qquad e^{r_1t}\frac{\partial A}{\partial t}+e^{r_2t}\frac{\partial B}{\partial t}=0$$

nous obtenons ainsi, sans difficulté:

$$(41)\qquad \phi(y,z,t)=\frac{1}{r_1-r_2}\int_0^t\Big[e^{r_1(t-\tau)}-e^{r_2(t-\tau)}\Big]\frac{G(y,z,\tau)}{c^2(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)}\,d\tau$$

Dans le cas où l'équation caractéristique a une racine double, qui correspond à:

$$\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} = \lambda ,$$

nous retombons sur le cas particulier déjà traité, dans le paragraphe 4. L'application de la méthode de la variation des constantes, nous conduirait aussi, d'ailleurs, à l'équation (32) de ce paragraphe.

Nous transformons maintenant l'équation intégro-différentielle (4I) en intégrant par parties le second membre, de façon à faire disparaître du signe $\int$, successivement, les dérivées, par rapport à t , de F_1.

Le calcul assez long, ne présente pas de difficultés sérieuses. Toutes réductions faites et en remplaçant Φ par sa valeur, $\Delta_1 F_1$, nous obtenons finalement l'équation intégro-différentielle suivante:

$$(42) \qquad c^2(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right) - \varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1)\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}\Big\{\varepsilon_2^2\gamma_1 \times$$

$$\times\left[(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mu_1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_2\right] + \varepsilon_1^2\gamma_2\left[(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mu_2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1\right]\Big\}\frac{\partial F_1}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^2}\left[(\varepsilon_1^2+3\varepsilon_2^2)\varepsilon_1\mu_1 - (\varepsilon_2^2+3\varepsilon_1^2)\varepsilon_2\mu_2\right](\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)^2 F_1 =$$

$$= (\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)^2\left[\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\mu_1+\mu_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^3}(\gamma_1+\gamma_2)\int_0^t e^{r_1(t-\tau)}F_1(y,z,\tau)\,d\tau +\right.$$

$$\left.+\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\mu_1-\mu_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^3}(\gamma_1-\gamma_2)\int_0^t e^{r_2(t-\tau)}F_1(y,z,\tau).d\tau\right] + \mathcal{G}_3(y,z,t) ,$$

avec

$$(43) \qquad \mathcal{G}_3(y,z,t) = \frac{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}{2(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)}\int_0^t\left[e^{r_1(t-\tau)}-e^{r_2(t-\tau)}\right]\mathcal{G}_1(y,z,\tau)\,d\tau ,$$

et les conditions initiales:

$$(44) \qquad F_1(y,z,0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

En éliminant le cas particulier $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, que nous traiterons par la suite, et qui, du reste, était déjà tacitement éliminé, l'équation caractéristique devenant alors du premier degré et la transformation précédente supposant essentiellement, à partir du calcul des racines de l'équation caractéristique , $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \neq 0$, nous voyons que l'équation(42) peut s'écrire, en désignant maintenant, pour simplifier, la fonction inconnue par $u(y,z,t)$:

$$(45) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = \varphi(y,z,t) +$$

$$+ \int_0^t\left[A\,e^{\alpha(t-\tau)} + B\,e^{\beta(t-\tau)}\right]u(y,z,\tau)\,d\tau ,$$

a, b, c, A, B, α et β étant des constantes, de signes quelconques. (En fait, $\alpha = r_1$ est certainement négatif, mais nous n'utilisons pas ce résultat par la suite). $\varphi(y,z,t)$ est une fonction connue, continue, donc bornée dans tout domaine borné de l'espace (y,z,t) et possédant des dérivées premières, continues dans un tel domaine. En outre, il résulte des caractères du problème de diffraction posé, que $\varphi(y,z,t)$, peut être supposée tendre vers zéro, quand le point (y,z), du plan $x = 0$, tend vers l'infini, mais non, quand y et z restant finis, t augmente indéfiniment. Au contraire, $|\varphi(y,z,t)|$ tend, en général, vers l'infini, avec t .

Les conditions initiales restent:

$$(46) \qquad u(y,z,0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Si le terme constitué par l'intégrale du second membre n'existait pas, l'équation (45) serait une équation aux dérivées partielles du second ordre, hyperbolique pour $\alpha > 0$ et elliptique pour $\alpha < 0$. Le problème de Cauchy se présenterait alors dans des conditions essentiellement différentes, suivant le signe de α.

Par analogie, nous sommes amenés à étudier successivement le problème de Cauchy (45),(46), dans chacun des deux cas généraux, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$, cas, que pour des raisons évidentes, nous désignerons aussi sous les noms de cas hyperbolique et de cas alliptique.

Il s'agit de savoir si l'analogie est profonde ou superficielle.

6.- Supposons d'abord $\alpha > 0$, cas hyperbolique.

Par le changement de fonction inconnue:

$$u(y,z,t) = e^{\frac{\beta t}{2\alpha}}\, v(y,z,t) \quad , \tag{47}$$

qui conserve les conditions initiales:

$$v(y,z,0) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad ,$$

l'équation (45) est transformée en l'équation:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + c\right) v = e^{-\frac{\beta t}{2\alpha}} \varphi(y,z,t) + \tag{48}$$

$$+ \int_0^t \left[A e^{\left(\alpha - \frac{\beta}{2\alpha}\right)(t-\tau)} + B e^{\left(\beta - \frac{\beta}{2\alpha}\right)(t-\tau)} \right] v(y,z,\tau)\, d\tau \quad ,$$

$\frac{\beta^2}{4\alpha} + c$ a un signe quelconque.

Il en résulte qu'il nous suffit de considérer les équations:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm K^2 u = \varphi(y,z,t) + \tag{49}$$

$$+ \int_0^t \left[A e^{\alpha(t-\tau)} + B e^{\beta(t-\tau)} \right] u(y,z,\tau)\, d\tau$$

Supposons d'abord le coefficient $d'u$ positif et étudions le problème de Cauchy correspondant aux relations suivantes:

$$(50)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+K^2 u=\varphi(y,z,t)+\lambda\int_0^t\left[A e^{\alpha(t-\tau)}+B e^{\beta(t-\tau)}\right]u(y,z,\tau)\,d\tau$$

$$(51)\qquad u(y,z,0)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=0\quad,$$

λ est une constante que nous prendrons ensuite égale à un.

Nous allons utiliser la méthode classique des approximations successives de Picard.

Considérons un domaine D ,borné,de l'espace (y,z,t), $\varphi(y,z,t)$ est bornée dans D :

$$(52)\qquad |\varphi(y,z,t)|<H\quad,$$ H étant une constante qui dépend du domaine D.

Cherchons à déterminer une série entière en λ :

$$(53)\qquad u(y,z,t)=u_0(y,z,t)+\lambda u_1(y,z,t)+\ldots+\lambda^n u_n(y,z,t)+\ldots$$

satisfaisant formellement à l'équation (50) et aux conditions initiales (5I).

En égalant,dans les deux membres,les coefficients des mêmes puissances de λ ,nous obtenons successivement,(équation des ondes cylindriques amorties à second membre) (I):

$$(54)\qquad u_0(y,z,t)=-\frac{\omega}{2\pi}\iiint_\Gamma \frac{\varphi(\eta,\zeta,\tau)}{\sqrt{\Omega}}\,\mathrm{ch}\left(K\sqrt{\Omega}\right)d\eta\, d\zeta\, d\tau\ ,$$

(I) Cf.l'ouvrage déjà cité de M.Hadamard, "Le problème de Cauchy..........",p.28I.

avec (55) $\Omega = \omega^2(t-\tau)^2 - (\eta-y)^2 - (\zeta-z)^2$,

et où Γ est le cône de révolution:

(56) $t-\tau \geqslant 0 \quad , \quad \Omega \geqslant 0$,

(57) $$u_1(y,z,t) = -\frac{\omega}{2\pi}\iiint_\Gamma \frac{ch(K\sqrt{\Omega})}{\sqrt{\Omega}}\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \times$$
$$\times \int_0^\tau \left[A e^{\alpha(\tau-\theta)} + B e^{\beta(\tau-\theta)}\right] u_0(\eta,\zeta,\theta)\, d\theta$$

- -

(58) $$u_n(y,z,t) = -\frac{\omega}{2\pi}\iiint_\Gamma \frac{ch(K\sqrt{\Omega})}{\sqrt{\Omega}}\, d\eta\, d\zeta\, d\tau \times$$
$$\times \int_0^\tau \left[A e^{\alpha(\tau-\theta)} + B e^{\beta(\tau-\theta)}\right] u^{\bullet}_{n-1}(\eta,\zeta,\theta)\, d\theta$$

- -

Nous allons maintenant majorer les différents termes ci-dessus $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$, en tenant compte de l'inégalité (52)

Pour effectuer ces majorations, nous pouvons supposer A, B, α et β, tous positifs, sinon, ceux de ces coefficients, qui seraient négatifs, seront remplacés, dans les inégalités ci-dessous, par leurs valeurs absolues, ce qui aura pour effet de majorer encore les $|u_i(y,z,t)|$, $i \geqslant 1$.

Nous avons ainsi:

(59) $$|u_0(y,z,t)| < \omega H\, ch(K\omega t)\int_0^t d\tau \int_0^{\omega(t-\tau)} \frac{r\,dr}{\sqrt{\omega^2(t-\tau)^2 - r^2}} = \frac{H(\omega t)^2 ch(K\omega t)}{2}$$

(60) $$|u_1(y,z,t)| < \frac{\omega^3 H}{2}\, ch^2(K\omega t)\left[\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) + \frac{B}{\beta}(e^{\beta t}-1)\right]\int_0^t \tau^2 d\tau \times$$

$$\times \int_0^{\omega(t-\tau)} \frac{r\,dr}{\sqrt{\omega^2(t-\tau)^2 - r^2}} = \frac{H(\omega t)^4}{4\,!}\, ch^2(K\omega t)\left[\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) + \frac{B}{\beta}(e^{\beta t}-1)\right]$$

De même, l'inégalité:

$$(61) \quad \left|u_{n-1}(y,z,t)\right| < \frac{H(\omega t)^{2n}}{(2n)!} ch^n(K\omega t)\left[\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) + \frac{B}{\beta}(e^{\beta t}-1)\right]^{n-1},$$

vérifiée pour $n=1$ et $n=2$, entraine:

$$(62) \quad \left|u_n(y,z,t)\right| < \frac{H\omega^{2n+1}}{(2n)!} ch^{n+1}(K\omega t)\left[\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) + \frac{B}{\beta}(e^{\beta t}-1)\right]^n \times$$

$$\times \int_0^t \tau^n d\tau \int_0^{\omega(t-\tau)} d\rho = \frac{H(\omega t)^{2n+2}}{(2n+2)!} ch^{n+1}(K\omega t)\left[\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) + \frac{B}{\beta}(e^{\beta t}-1)\right]^n$$

L'inégalité (62) suffit à prouver que la série (53) est absolument et uniformément convergente, quel que soit λ, dans le domaine D considéré de l'espace (y,z,t). Sa somme $u(y,z,t)$ est aussi une fonction continue d' y, z, t, dans ce domaine.

En outre, les dérivées, par rapport à y et à z, de chaque terme de la série uniformément convergente (53) se calculent sans difficulté et ont la même forme que les expressions (58); $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|$ et $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|$ étant, par hypothèse, continues, donc bornées dans D, le même raisonnement que précédemment montre que les séries obtenues en dérivant (53), terme à terme, par rapport à y et à z, sont absolument et uniformément convergentes dans D et ont pour somme $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$ qui sont, par suite, des fonctions continues d' y, z, t, dans D. De même, le second membre de (50) a une dérivée, par rapport à t, qui est continue dans D.

Il en résulte alors que la formule qui donne la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes cylindriques, amorties, à second membre, est applicable à l'équation (50), lorsque l'on considère comme connu le second membre de cette équation. Par suite, le raisonnement classique s'applique pour montrer qu' $u(y,z,t)$ est bien solution du problème de Cauchy (50), (51).

De même, le raisonnement classique suffit à démontrer l'unicité de la solution de ce problème.

Dans le cas de l'équation:

$$(63) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K^2 u = \varphi(y,z,t) + \int_0^t \left[Ae^{\alpha(t-\tau)} + Be^{\beta(t-\tau)}\right] u(y,z,\tau)\, d\tau,$$

......

le même procédé s'applique, en remplaçant dans toutes les formules, $\operatorname{ch}(K\sqrt{\Omega})$ par $\cos(K\sqrt{\Omega})$ et toutes les conclusions, relatives au cas où le coefficient d' u est positif, subsistent sans changement.

7.- Supposons maintenant $\alpha < 0$,cas elliptique.

Par le même changement de fonction inconnue(47) que dans le cas hyperbolique, nous ramenons l'équation (45) à la forme:

$$(64) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda u = \varphi(y,z,t) + \int_0^t \left[A e^{\alpha(t-\tau)} + B e^{\beta(t-\tau)}\right] u(y,z,\tau)\, d\tau ,$$

avec les mêmes conditions initiales(46).

En posant ensuite $\omega t = t'$, $\omega \tau = \tau'$,puis supprimant les indices, nous obtenons encore une équation de même forme que (64), sauf que le coefficient de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ devient égal à un. En supposant d'abord $\lambda > 0$,nous avons donc à étudier le problème de Cauchy:

$$(65) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K^2 u = \varphi(y,z,t) + \int_0^t \left[A e^{\alpha(t-\tau)} + B e^{\beta(t-\tau)}\right] u(y,z,\tau)\, d\tau$$

$$(66) \qquad u(y,z,0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Supposons qu'il existe une solution de ce problème, $u(x,y,z,t)$, régulière, c'est à dire finie et continue ainsi que ses dérivées premières, celles de ses dérivées secondes qui, interviennent dans l'équation (65), $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ étant intégrables dans un volume V ,borné et fermé, de l'espace (y,z,t) ,limité par une portion S

du plan $t=0$ et par une surface régulière, quelconque Σ. Le point (y,z,t) étant voisin de S et situé à l'intérieur de V, (donc éloigné de Σ), appliquons la formule de Green au volume limité par S, Σ et une petite sphère σ, de centre (y,z,t), dont on fera tendre le rayon vers zéro:

$$\iiint_V (u\Delta v - v\Delta u)\,dV + \iint_{S+\Sigma+\sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma = 0$$

avec la normale intérieure à V, $u(y,z,t)$, étant la solution précédente et

(67) $$v = \frac{\cos(Kr)}{r} \quad , \quad r^2 = (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 + (\tau-t)^2$$

Nous avons:

$$u\Delta v - v\Delta u = -\frac{\cos(Kr)}{r}\varphi(y,z,t) - \frac{\cos(Kr)}{r}\int_0^t\left[Ae^{\alpha(t-\tau)} + Be^{\beta(t-\tau)}\right]u(y,z,\tau)\,d\tau.$$

ρ tendant vèrs zéro, l'intégrale, relative à la sphère σ, tend vers $-4\pi u(y,z,t)$.

Sur S

$$u(y,z,0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Il vient donc:

(68) $$4\pi u(y,z,t) = -\iiint_V \frac{\cos(Kr)}{r}\Big\{\varphi(\eta,\zeta,\tau) + \int_0^\tau\left[Ae^{\alpha(\tau-\theta)} + Be^{\beta(\tau-\theta)}\right]u(\eta,\zeta,\theta)\,d\theta\Big\}d\eta\, d\zeta\, d\tau + \iint_\Sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Sigma$$

Or, le point (y,z,t) étant éloigné de Σ, sur cette surface, v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ sont des fonctions analytiques et régulières. t tendant vers zéro, tous les termes de (68) vérient d'une façon continue et nous aurons à la limite, en posant

$$r_1^2 = (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 + \tau^2 \;:$$

......

$$(69) \qquad 0 = -\iiint_V \frac{\cos(K r_1)}{r_1}\left\{\varphi(\eta,\zeta,\tau) + \int_0^\tau \left[A e^{\alpha(\tau-\theta)} + B e^{\beta(\tau-\theta)}\right] u(\eta,\zeta,\theta) \times \right.$$

$$\left. \times d\theta \right\} d\eta\, d\zeta\, d\tau \ + \text{fonct.analyt.d'}\ y \quad \text{et de}\ z\,.$$

Or, de même que le potentiel newtonien, $\iiint_V \frac{f(\eta,\zeta,\tau)}{r_1}\, d\eta\, d\zeta\, d\tau$,

la fonction $\iiint_V \frac{\cos(K r_1)}{r_1} f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta$ ~~dτ~~ n'est une fonction analytique d'y et de z, que si $f(y,z,t)$ est une fonction analytique d'y et de z.

La relation (69) a donc pour conséquence:

$$(70) \qquad \varphi(y,z,t) + \int_0^t \left[A e^{\alpha(t-\tau)} + B e^{\beta(t-\tau)}\right] u(y,z,\tau)\, d\tau =$$

= fonct.analyt.d'y ét de z (et quelconque de t).

En nous reportant à l'équation (65), nous avons alors:

$$(71) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K^2 u \quad = \text{fonct.analyt.d'}\ y$$

et de z ,

d'où il résulte, par application de la formule de Green, comme ci-dessus, au volume limité par S, Σ et σ , et en faisant tendre encore vers zéro le rayon de σ , qu'$u(y,z,t)$ est fonction analytique d'y et de z . Il en est donc de même de $\varphi(y,z,t)$ en vertu de (70).

Par suite, si $\varphi(y,z,t)$ n'est pas fonction analytique d'y et de z , le problème de Cauchy (65), (66) n'a pas de solution à laquelle s'applique la formule de Green.

On peut remarquer que cette démonstration n'impose pas que $\varphi(y,z,t)$ soit fonction analytique de t . Du reste, lorsque φ ne dépend que de t , le premier membre de l'équation (65), se réduit à celui d'une équation différentielle ordinaire et le problème de Cauchy (65), (66) a alors une solution et une seule, comme on le voit facilement par la méthode des approximations successives, que $\varphi(t)$ soit ou non fonction analytique.

On aurait une démonstration analogue, le coefficient d'u étant supposé négatif et égal à $-K^2$. On prendrait alors

$$v = \frac{e^{\pm K r}}{r}\,.$$

8.— Il nous reste maintenant à traiter rapidement les deux cas particuliers limites, qui ne rentrent pas dans les deux cas généraux précédents.

Ces deux cas particuliers correspondent, l'un à $\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1=0$, ou à $\alpha=0$, dans l'équation (45): l'autre à $\varepsilon_1-\varepsilon_2=0$.

Occupons nous d'abord du premier, $\varepsilon_1\mu_2-\varepsilon_2\mu_1=0$. L'équation (25) s'écrit alors:

$$(72)\qquad c^2\varepsilon_1\left[(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2(\varepsilon_1\gamma_1-\varepsilon_2\gamma_2)\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-\gamma_2^2\right]\Delta_1F_1\ -$$

$$-\mu_1(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)\left[\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(\varepsilon_2\gamma_1+\varepsilon_1\gamma_2)\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1\gamma_2\right]\frac{\partial F_1}{\partial t}=-\varepsilon_1\,\mathcal{G}_1(y,z,t)\ ,$$

et nous avons:

$$(73)\qquad \mathcal{G}_1(y,z,0)=0$$

Les plans $t=C^{te}$ sont des surfaces caractéristiques et les données de Cauchy se réduisent à:

$$(74)\qquad F_1(y,z,0)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{t=0}=\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial t^2}\right)_{t=0}=0$$

Les relations (72), (73) nous donnent, d'ailleurs:

$$\left(\frac{\partial^3F_1}{\partial t^3}\right)_{t=0}=0$$

La même transformation que dans le cas général s'applique au problème (72), (74), en considérant (72) comme une équation différentielle en Δ_1F_1 et nous obtenons:

$$(75)\qquad c^2\varepsilon_1(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_1}{\partial z^2}\right)-\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)\frac{\partial F_1}{\partial t}+\frac{\mu_1(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)}{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)^2F_1=$$

$$=\frac{\mu_1}{2}(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)^2\left[\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\gamma_1+\gamma_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\int_0^t e^{r_1(t-\tau)}F_1(y,z,\tau)\,d\tau+\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\gamma_1-\gamma_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t e^{r_2(t-\tau)}F_1(y,z,\tau)\,d\tau\right]+\varepsilon_1\,\mathcal{G}_3(y,z,t)\qquad ,$$

$$(76) \qquad F_1(y,z,0) = 0 \qquad \text{avec}$$

$$\mathcal{G}_3(y,z,t) = \frac{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}{2(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)}\int_0^t \left[e^{r_1(t-\tau)} - e^{r_2(t-\tau)}\right] \mathcal{G}_1(y,z,\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{G}_1(y,z,0) = 0 \quad , \qquad r_1 = -\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \quad , \qquad r_2 = -\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$$

L'équation (75), en désignant l'inconnue par u, au lieu de F_1, est de la forme:

$$(77) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = \varphi(y,z,t) +$$

$$+\int_0^t \left[Ae^{\alpha(t-\tau)} + Be^{\beta(t-\tau)}\right] u(y,z,\tau)\, d\tau \quad ,$$

$$(78) \qquad \text{avec} \qquad b = \frac{\varepsilon_2\mu_1(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)}{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2} \quad ,$$

c, A, B, α et β étant des constantes et $\varphi(y,z,t)$ une fonction connue.

Les conditions de Cauchy se réduisent à

$$(79) \qquad u(y,z,0) = 0 \quad ,$$

mais nous savons, en outre, que

$$(80) \qquad \varphi(y,z,0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{t=0} = 0$$

Nous faisons disparaitre le terme en u dans l'équation (77), en posant:

$$(81) \qquad u(y,z,t) = e^{\frac{c}{b}t}\, v(y,z,t)$$

et il nous suffit d'étudier le même problème de Cauchy pour l'équation intégro-différentielle:

$$(82) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(y,z,t) + \int_0^t \left[Ae^{\alpha(t-\tau)} + Be^{\beta(t-\tau)}\right] u(y,z,\tau)\, d\tau \; ,$$

ℓ étant toujours donné par (78), A, B, α et β étant encore des constantes et φ vérifiant toujours les relations (80).

En supposant $\ell > 0$, c'est-à-dire $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2) > 0$, (83)
la solution du problème de Cauchy

$$(84) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \ell \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(y,z,t)$$

$$(85) \qquad u(y,z,0) = 0$$

existe, est unique et donnée par la formule connue:

$$(86) \qquad u(y,z,t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{e^{-\frac{\ell\rho^2}{4(t-\tau)}}}{t-\tau} \varphi(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau ,$$

$$\rho^2 = (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 ,$$

l'intégration étant étendue à la région R de l'espace (η,ζ,τ), comprise entre les plans $\tau = 0$ et $\tau = t$

De même que dans le cas hyperbolique, nous pouvons alors utiliser la méthode des approximations successives:

$|\varphi(y,z,t)|$ étant supposée bornée:

(87) $|\varphi(y,z,t)| < H = C^{te}$, pour t borné $< T$,

hypothèse parfaitement compatible avec le problème de diffraction que nous nous sommes posés, nous considèrons le problème de Cauchy:

$$(88) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \ell \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(y,z,t) + \lambda \int_0^t \left[A e^{\alpha(t-\tau)} + B e^{\beta(t-\tau)} \right] u(y,z,\tau)\, d\tau ,$$

$$(89) \qquad u(y,z,0) = 0$$

et nous nous proposons de déterminer une solution, sous forme de série convergente en λ :

$$(90) \qquad u(y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(y,z,t) \qquad \ldots\ldots$$

Nous avons successivement:

$$u_0(y,z,t) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_R \frac{e^{-\frac{b\rho^2}{4(t-\tau)}}}{t-\tau}\ \varphi(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau$$

$$u_1(y,z,t) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_R \frac{e^{-\frac{b\rho^2}{4(t-\tau)}}}{t-\tau}\ d\eta\, d\zeta\, d\tau \int_0^\tau \left[A e^{\alpha(\tau-\theta)} + B e^{\beta(\tau-\theta)}\right] u_0(\eta,\zeta,\theta)\, d\theta$$

$$u_n(y,z,t) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_R \frac{e^{-\frac{b\rho^2}{4(t-\tau)}}}{t-\tau}\ d\eta\, d\zeta\, d\tau \int_0^\tau \left[A e^{\alpha(\tau-\theta)} + B e^{\beta(\tau-\theta)}\right] \times$$

$$\times\ u_{n-1}(\eta,\zeta,\theta)\, d\theta$$

Nous pouvons supposer A, B, α et β positifs ou nuls, sinon nous remplacerions celles de ces constantes qui seraient négatives, par leur valeur absolue, ce qui aurait pour effet de majorer les $|u_n(y,z,t)|$

(87) entraine alors les inégalités:

$$|u_0(y,z,t)| < \frac{Ht}{b}$$

$$|u_1(y,z,t)| < \frac{H}{b^2}\left(Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}\right)\frac{t^3}{3!}$$

D'une façon générale, l'inégalité

$$|u_{n-1}(y,z,t)| < \frac{H}{b^n}\left(Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}\right)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

entraine

$$|u_n(y,z,t)| < \frac{H}{b^{n+1}}\left(Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}\right)^{n}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \ldots\ldots$$

Par suite, la série (90) est uniformément convergente, quel que soit λ, et les mêmes raisonnements s'appliquent que dans le cas général hyperbolique, $\alpha > 0$, pour montrer que cette série (90) est bien solution du problème (88), (89) et que cette solution est unique.

Nous étudions maintenant le cas où

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \quad .$$

L'équation (25) s'écrit alors:

$$(91) \qquad c^2(\gamma_1-\gamma_2)\left(2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1+\gamma_2\right)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right)+\left\{\varepsilon^3(\mu_1-\mu_2)\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\right.$$

$$+\varepsilon^2\left[(\mu_1-2\mu_2)\gamma_1-(\mu_2-2\mu_1)\gamma_2\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\varepsilon\left[\mu_2\gamma_1^2-\mu_1\gamma_2^2-\right.$$

$$\left.\left.-2(\mu_1-\mu_2)\gamma_1\gamma_2\right]\frac{\partial}{\partial t}-\gamma_1\gamma_2(\mu_2\gamma_1-\mu_1\gamma_2)\right\}\frac{\partial F_1}{\partial t}=\varphi_1(y,z,t)$$

Les données de Cauchy restent celles indiquées par (26).

Nous pouvons encore considérer (9I) comme une équation différentielle en $\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}=\Delta_1 F_1$, mais cette équation est alors du premier ordre. Nous pouvons déterminer sa solution, en tenant compte de la condition initiale

$$\Delta_1 F_1\,(y,z,0)=0 \qquad ,$$

et intégrer par parties l'expression de cette solution, comme dans le cas général, pour faire disparaitre dans l'intégrale les dérivées de F_1 par rapport au temps. Mais il se présente une singularité, dûe à ce que l'équation (9I) est une équation différentielle du premier ordre en $\Delta_1 F_1$: le premier membre de l'équation intégro-différentielle, ainsi obtenue, contient $\frac{\partial^3 F_1}{\partial t^3}$:

$$(92) \qquad 16\,\varepsilon^4(\mu_1-\mu_2)\frac{\partial^3 F_1}{\partial t^3}+32\,c^2\varepsilon^2(\gamma_1-\gamma_2)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right)+8\,\varepsilon^3\left[(\mu_1-3\mu_2)\gamma_1-\right.$$

$$\left.-(\mu_2-3\mu_1)\gamma_2\right]\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}-4\,\varepsilon^2\left[(\mu_1+\mu_2)(\gamma_1^2-\gamma_2^2)-4(\mu_1-\mu_2)\gamma_1\gamma_2\right]\frac{\partial F_1}{\partial t}+$$

......

$$+\ 2\varepsilon(\mu_1+\mu_2)(\gamma_1-\gamma_2)^3 F_1 = (\mu_1+\mu_2)(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_2)^3\int_0^t e^{k(t-\tau)}\times$$

$$\times F_1(y,z,\tau)\,d\tau + 16\,\varepsilon\,\varphi_2(y,z,t) \quad ,$$

avec $\quad k = -\dfrac{\gamma_1+\gamma_2}{2\varepsilon} \quad , \quad \varphi_2(y,z,t) = \displaystyle\int_0^t e^{k(t-\tau)}\varphi_1(y,z,\tau)\,d\tau$

et les conditions initiales:

$$F_1(y,z,0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}\right)_{t=0} = 0$$

Pour éviter l'étude préalable du problème de Cauchy, relativement à une équation du troisième ordre, nous procèderons d'une autre façon, en appliquant dans ce cas la transformation de Laplace,

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,F(t)\,dt \quad ,$$

au problème de Cauchy (9I),(26). (Dans le cas général, au lieu d'utiliser le procédé de la transformation de Laplace, nous avons préféré la marche suivie qui donne plus directement des résultats complets.)

Dans le cas actuel, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ les relations (9I),(26) sont transformées en l'équation unique, [on suppose que F_1 est remplacé par U et $u(y,z,s)$ désigne la nouvelle inconnue] :

$$\text{(93)} \qquad c^2(\gamma_1-\gamma_2)(2\varepsilon s+\gamma_1+\gamma_2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + s\Big\{\varepsilon^3(\mu_1-\mu_2)s^3 +$$

$$+\varepsilon^2\left[(\mu_1-2\mu_2)\gamma_1-(\mu_2-2\mu_1)\gamma_2\right]s^2 - \varepsilon\left[\mu_2\gamma_1^2-\mu_1\gamma_2^2 -\right.$$

$$\left.-2(\mu_1-\mu_2)\gamma_1\gamma_2\right]s - \gamma_1\gamma_2(\mu_2\gamma_1-\mu_1\gamma_2)\Big\}u = +\ c_1(y,z,s)$$

c_1 désignant la transformée de $\mathcal{C}_1$

Il s'agit de déterminer la ou les solutions $u(y,z,s)$ de l'équation (93) qui soient des fonctions $\mathfrak{L}(s)$ (I). La transformée $U(y,z,t)$ de toute telle solution vérifie automatiquement les conditions initiales (26). Cette ou ces solutions de l'équation (93) doivent être, en particulier, des fonctions analytiques et régulières de s, pour les valeurs de s dont la partie réelle est positive et suffisamment grande.

Nous écrivons l'équation (93):

$$(94) \qquad \Delta_1 u - \lambda u = \varphi(y,z,s) \quad ,$$

en posant:

$$(95) \qquad \lambda(s) = -\frac{s\left\{\varepsilon^3(\mu_1-\mu_2)s^3 + \varepsilon^2\left[(\mu_1-2\mu_2)\gamma_1 - (\mu_2-2\mu_1)\gamma_2\right]s^2 - \right.}{c^2(\gamma_1-\gamma_2)(2\varepsilon s + \gamma_1+\gamma_2)}$$

$$\frac{\left. -\varepsilon\left[\mu_2\gamma_1^2 - \mu_1\gamma_2^2 - 2(\mu_1-\mu_2)\gamma_1\gamma_2\right]s - \gamma_1\gamma_2(\mu_2\gamma_1 - \mu_1\gamma_2)\right\}}{c^2(\gamma_1-\gamma_2)(2\varepsilon s + \gamma_1+\gamma_2)}$$

$$(96) \qquad \varphi(y,z,s) = +\frac{c_1(y,z,s)}{c^2(\gamma_1-\gamma_2)(2\varepsilon s + \gamma_1+\gamma_2)}$$

Nous nous restreindrons à l'étude du cas $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, pour lequel l'équation homogène

$$(97) \qquad \Delta_1 u - \lambda u = 0$$

ne possède pas de valeurs propres, comme il est bien connu, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de valeurs, à partie réelle positive, de λ, telles que cette équation ait une solution non identiquement nulle,

(I) Notation de l'ouvrage de Doetsch "Theorie und Anwendung der Laplace - Transformation". Berlin 1937.

continue en tout point et nulle à l'infini. Alors, l'équation non homogène (94) possède une solution et une seule, continue en tout point et nulle à l'infini.

Nous serons assurés d'être dans ce cas, pour les valeurs positives, suffisamment grandes de $\mathcal{R}(s)$, pourvu que

(98) $$(\mu_1-\mu_2)(\nu_1-\nu_2) < 0 \quad ,$$

condition qui a, en outre, pour conséquence que λ tend vers $+\infty$ avec s.

L'équation homogène (97) possède comme solution la fonction de Bessel modifiée, de seconde espèce, d'ordre zéro $K_0(\sqrt{\lambda}\, r)$, r étant la distance du point fixe (y,z) au point variable (η,ζ). Au voisinage de $r=0$, K_0 a comme partie principale $-\log r$.

En appliquant la formule de Green à l'aire du plan (η,ζ), comprise entre un cercle C, de centre (y,z) et de rayon très grand R, que nous ferons tendre vers l'infini et un cercle Γ, de même centre, dont le rayon tendra vers zéro, $u(y,z,s)$ désignant la solution de l'équation (94) que nous voulons déterminer et v la fonction $K_0(\sqrt{\lambda}\, r)$, nous obtenons, à la limite:

(99) $$2\pi u(y,z,s) = -\iint_S K_0(\sqrt{\lambda}\, r)\ \varphi(\eta,\zeta,s)\ d\eta\, d\zeta \quad ,$$

S désignant le plan (η,ζ) en entier.

On peut, d'ailleurs, vérifier que la fonction u donnée par (99) est bien solution de l'équation (94).

Il reste à montrer que cette fonction $u(y,z,s)$ est bien une fonction ℓ

A cet effet, on calcule d'abord une majorante simple de $|\varphi_1(y,z,t)|$.

Dans ce calcul de majorante et dans celui de la majorante de $|\varphi(y,z,s)|$ les petites lettres du début de l'alphabet français désigneront des constantes positives, dont la valeur ne sera pas précisée et pourra varier d'une inégalité à l'autre.

En supposant les données telles que les composantes des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ et de leurs dérivées premières, pour $t=0$ soient bornées dans tout l'espace, ainsi que les quantités

$$r\frac{\partial}{\partial x}\left\{M_0\left[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right], M_1\left[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right], P_0\left[\lambda r, \ldots\right], P_1\left[\lambda r, \ldots\right]\right\},$$

$$r\left(\frac{\partial}{\partial y} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{R_0\left[\lambda r, y, z, r^2(1-\lambda^2)\right], R_1\left[\lambda r, \ldots\ldots\right]\right\},$$

quel que soit $r \geqslant 0$ et λ étant compris entre zéro et un, les formules (39),(66),(70),et (72) du chapitre III montrent que

$$|A(y,z,t)| \cdot |B(y,z,t)| < a ,$$

d'où l'on déduit:

$$|\mathcal{G}(y,z,t)| < a + bt .$$

Les formules (I3) et (I9) du chapitre IV donnent alors:

$$|\mathcal{G}_1(y,z,t)| < \left|\mathcal{D}^3\left[a+bt+ct^2\right]\right|$$

Les calculs du paragraphe 7 du chapitre II,un peu prolongés, fournissent la majorante

$$\left|\mathcal{D}[a]\right| < a + bt + ct^2 ,$$

d'où l'on déduit,sans difficultés

$$(100)_{\circ} \quad |\mathcal{G}_1(y,z,t)| < a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 + gt^6 + ht^7 + kt^8$$

Cette majorante de $|\mathcal{G}_1(y,z,t)|$ fournit enfin la majorante suivante de $|\varphi(y,z,s)|$:

$$(101) \quad |\varphi(y,z,s)| < \frac{a|s|^8 + b|s|^7 + c|s|^6 + d|s|^5 + e|s|^4 + f|s|^3 + g|s|^2 + h|s| + k}{(l|s|+m)|s|^9} = R(|s|)$$

Nous avons, d'autre part :

$$(102) \quad \iint_S K_0(\sqrt{\lambda}\, r)\, d\eta\, d\zeta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

......

On voit alors que toutes les conditions d'application du théorème 2,p.I26,de l'ouvrage de Doetsch,sont remplies par $\frac{R(s)}{\lambda(s)}$ et par suite,par la fonction $u(y,z,s)$ donnée par (99). Cette fonction est donc bien une fonction ℓ et la formule complexe d'inversion lui est applicable pour obtenir la fonction L correspondante, $U(y,z,t)$

On peut enfin remarquer que toutes les fois que le produit des coefficients des dérivées de F_1 et de $\Delta_1 F_1$,par rapport à t ,de l'ordre le plus élevé,est négatif,le problème de Cauchy admet une solution pour notre équation aux dérivées partielles (25). Ce résultat général correspond au fait que dans l'équation obtenue, après transformation de Laplace:

$$\Delta_1 u - \lambda u = \varphi(y,z,s) \quad ,$$

$\mathcal{R}(\lambda)$ est alors positif,pour $\mathcal{R}(s)$ positif,suffisamment grand.

9.- $F_1(y,z,t)$ et par suite , $F(y,z,t) = \frac{\partial^4 F_1}{\partial t^4}$ étant ainsi déterminées,

$f(y,z,t)$ et $g(y,z,t)$ le seront d'une façon analogue au cas où l'on néglige les conductibilités,au moyen des équations (79) et(80) du chapitre III:

$$\frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[f] + \frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[f] = \mathcal{A}_1(y,z,t) \tag{103}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[g] + \frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[g] = \mathcal{B}_1(y,z,t) \quad , \tag{104}$$

avec

$$\mathcal{A}_1(y,z,t) = \frac{1}{\mu_1}\mathcal{J}_1\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \frac{1}{\mu_2}\mathcal{J}_2\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] - \mathcal{A}(y,z,t) \tag{105}$$

$$\mathcal{B}_1(y,z,t) = \frac{1}{\mu_1}\mathcal{J}_1\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right] + \frac{1}{\mu_2}\mathcal{J}_2\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right] - \mathcal{B}(y,z,t) \tag{106}$$

En appliquant l'opérateur $\frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1 - \frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2$ aux équations (I03) et (I04), nous obtenons:

$$(107) \qquad \frac{1}{\mu_1^2 V_1^2}\left[f(y,z,t) - V_1^2\int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1 f(y,z,\tau)\,d\tau + 2a_1V_1\int_0^t f(y,z,\tau)\,d\tau\right] - \frac{1}{\mu_2^2V_2^2}\left[f(y,z,t) - V_2^2\int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1 f(y,z,\tau)\,d\tau + 2a_2V_2\int_0^t f(y,z,\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{A}_2(y,z,t)$$

et la même équation pour $g(y,z,t)$, la seule différence étant qu'au second membre, $\mathcal{A}_2(y,z,t)$, est à remplacer par $\mathcal{B}_2(y,z,t)$. Nous avons, d'ailleurs:

$$(108) \qquad \mathcal{A}_2(y,z,t) = \frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[\mathcal{A}_1] - \frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[\mathcal{A}_1]$$

$$(109) \qquad \mathcal{B}_2(y,z,t) = \frac{1}{\mu_1}\mathcal{D}_1[\mathcal{B}_1] - \frac{1}{\mu_2}\mathcal{D}_2[\mathcal{B}_1]$$

On vérifie sans difficulté, comme dans le cas de $F(y,z,t)$, condition (20), que les concordances

$$\left(\frac{1}{\mu_1^2V_1^2} - \frac{1}{\mu_2^2V_2^2}\right)\alpha(0,y,z) = \mathcal{A}_2(y,z,0) \quad ,$$

$$\frac{1}{\mu_1^2V_1^2}\left[\alpha_1(0,y,z) + 2a_1V_1\alpha(0,y,z)\right] - \frac{1}{\mu_2^2V_2^2}\left[\alpha_1(0,y,z) + 2a_2V_2\,\alpha(0,y,z)\right] = \left(\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial t}\right)_{t=0} \quad ,$$

et les égalités analogues pour g et $\mathcal{B}_2$, sont bien réalisées.

Nous posons encore:

$$(110) \qquad f_1(y,z,t) = \int_0^t (t-\tau)\,f(y,z,\tau)\,d\tau$$

$$(111) \qquad g_1(y,z,t) = \int_0^t (t-\tau)\,g(y,z,\tau)\,d\tau$$

......

et obtenons, en remplaçant les V et α par leurs valeurs, en fonction des constantes des deux milieux, données par les formules (32) du chapitre III:

$$(112) \qquad c^2(\mu_1^2-\mu_2^2)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right)-\mu_1\mu_2(\varepsilon_2\mu_1-\varepsilon_1\mu_2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}+\mu_1\mu_2(\mu_2\gamma_1-\mu_1\gamma_2)\frac{\partial f_1}{\partial t}=$$

$$= c^2\mu_1^2\mu_2^2\,\alpha_2(y,z,t)=\alpha_3(y,z,t)$$

$$(113) \qquad f_1(y,z,0)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{t=0}=0 \qquad ,$$

et une équation aux dérivées partielles identique, pour g_1 , à celà près que le second membre n'a pas la même valeur, et les mêmes conditions initiales.

Il nous suffit donc d'étudier le problème de Cauchy (112), (113).

L'équation du second ordre (II2) est hyperbolique pour

$$(114) \qquad (\mu_1-\mu_2)(\varepsilon_2\mu_1-\varepsilon_1\mu_2)>0 \quad . \quad ,$$

le problème de Cauchy (II2), (II3) est alors bien posé et possède une solution et une seule.

Cette équation est elliptique pour

$$(115) \qquad (\mu_1-\mu_2)(\varepsilon_2\mu_1-\varepsilon_1\mu_2)<0 \quad ,$$

le même problème de Cauchy n'a pas de solution, en général. Si les données sont telles que $\alpha_2(y,z,t)$ soit fonction analytique

....

d'y, de z et de t, ce problème a une solution, certainement valable pour t assez petit.

Si $\mu_1 - \mu_2 = 0$, l'équation (II2) devient une équation différentielle ordinaire et s'intègre immédiatement. Le problème (II2) (II3), est encore bien posé.

Si $\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2 = 0$, l'équation (II2) est du type parabolique. Les données de Cauchy se réduisent alors à

$$f_1(y, z, 0) = 0 \quad ,$$

mais les données surabondantes sont encore compatibles. Le problème de Cauchy est bien posé pour

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2) < 0 \quad ,$$

ou, ce qui revient alors au même,

$$(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 \gamma_1 - \mu_1 \gamma_2) < 0$$

Au contraire, notre problème de Cauchy n'a pas de solution si les données ne sont pas analytiques, pour

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2) > 0$$

En résumé, notre problème de diffraction à la surface plane de séparation de deux milieux, régi par les équations de Maxwell, admet une solution et une seule, si:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\mu_1 - \mu_2) < 0 \quad \text{ou si} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Il n'a pas de solution, en général, si:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\mu_1 - \mu_2) > 0$$

Les conductibilités n'interviennent que pour l'étude des cas particuliers limites:

$\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2 = 0$, pour lequel notre problème n'a pas de solution en général.

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$, pour lequel notre problème a une solution, si

$$(\mu_1 - \mu_2)(Y_1 - Y_2) \leq 0$$

IO.- Il nous reste enfin à étendre la méthode de résolution adoptée pour les équations intégro-différentielles (79),(80) et (84) du chapitre III,à des fonctions f et g faisant partie de classes linéaires moins restreintes que la classe linéaire L , ces fonctions possèdant,par exemple,des dérivées jusqu'à un certain ordre,par rapport à y et à z et ces dérivées étant continues, par rapport à l'ensemble des variables y, z, t .

Remarquons d'abord que l'extension de la méthode de résolution des équations (79) et (80),en f et en g , $F(y,z,t)$ étant connue,est toute faite d'après les résultats du chapitre II,parag.7. En effet,ces équations,qui se réduisent alors aux équations (IO3) et (IO4) du chapitre IV,ne renferment plus que l'opérateur $\mathcal{D}$.

Nous n'avons donc à justifier que la résolution de l'équation (84)du chapitre III en F et sa transformation en l'équation (I8) du chapitre IV.Pour cela,compte tenu des résultats du paragraphe 7 du chapitre II,il nous suffira d'établir les relations:

$$(116) \qquad \mathcal{D}_1 \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2 \mathcal{D}_1 \quad , \quad \text{(ou,en permutant}$$

les indices, $\mathcal{D}_2 \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1 \mathcal{D}_2$) ,

$$(117) \qquad \mathcal{D}\mathcal{J}[F] = \mathcal{J}\mathcal{D}[F] = \int_0^t (t-\tau)\, \Delta_1 F(y,z,\tau)\, d\tau$$

A cet effet,nous utiliserons les mêmes méthodes et suivrons la même marche que dans le parag.précité du chapitre II.Pour cette raison,nous limiterons les raisonnements et les calculs à l'essentiel.

Les relations (II6) et (II7) sont vraies lorsque F se réduit à un polynôme $P(y,z,t)$,de degré quelconque.Par suite de la linéarité des opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$,pour démontrer,par exemple, la relation (II6),il nous suffit donc de démontrer que:

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{J}_2 [F-P] = \mathcal{J}_2 \mathcal{D}_1 [F-P]$$

Pour cela,nous montrerons que $F(y,z,t)$ ne variant pas, les deux membres de cette dernière relation peuvent être rendus simultanément aussi voisins de zéro que l'on veut.Nous utiliserons à cet effet,le théorème fondamental de Weierstrass sur l'approximation des

des fonctions continues par des polynômes, duquel il résulte qu'étant donnée une fonction $F(y,z,t)$, possédant ses deux premiers laplaciens $\Delta_1 F$ et $\Delta_2 F$, par rapport à y et z, et étant continue, ainsi que ceux ci, par rapport à l'ensemble des variables y, z, t, dans un domaine borné D de l'espace (y,z,t), on peut trouver un polynôme $P(y,z,t)$, tel que les inégalités suivantes aient lieu:

$$\left| F(y,z,t) - P(y,z,t) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \Delta_1 F(y,z,t) - \Delta_1 P(y,z,t) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \Delta_2 F(y,z,t) - \Delta_2 P(y,z,t) \right| < \varepsilon ,$$

ε étant donné, aussi petit qu'on le veut et ceci, uniformément, quel que soit le point (y,z,t) dans D :

Considérons la fonctionnelle linéaire:

$$(118) \qquad J_2[f] = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 \tau}}{\tau} \Delta_1 f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \frac{a_2^2 V_2}{4\pi} \int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2 V_2 (\tau-\theta)} j'\left[a_2^2 \frac{V_2^2(\tau-\theta)^2 - \tau^2}{4} \right] \Delta_1 f \, d\eta\, d\zeta\, d\tau ,$$

$f(y,z,t)$, $\Delta_1 f$ et $\Delta_2 f$ vérifiant les inégalités

$$(119) \qquad |f(y,z,t)|, \quad |\Delta_1 f(y,z,t)|, \quad |\Delta_2 f(y,z,t)| < \varepsilon ,$$

dans un domaine D borné de l'espace (y,z,t), les cônes Γ^1_{yzt} et Γ^2_{yzt} étant tout entiers intérieurs à ce domaine.

......

Nous avons successivement:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r}\,\Delta_1 f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\, d\tau\right| < \varepsilon \int_0^t d\tau \int_0^{V_2(t-\tau)} e^{-a_2 r}\, dr =$$

$$= \frac{\varepsilon}{a_2}\left[t - \frac{1}{a_2 V_2}\left(1 - e^{-a_2 V_2 t}\right)\right] = K'_{2,1}(t)\,\varepsilon$$

$$\frac{a_2^2 V_2}{4\pi}\left|\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2 V_2(\tau-\theta)}\, j'\left[a_2^2\ \frac{V_2^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right]\Delta_1 f(\eta,\zeta,\theta)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta\right| <$$

$$< \frac{a_2^2 V_2 \varepsilon}{2}\int_0^t d\tau \int_0^\tau e^{-a_2 V_2(\tau-\theta)}\, d\theta \int_0^{V_2(\tau-\theta)} r\, j'\left[a_2^2\ \frac{V_2^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right] dr =$$

$$= a_2 \varepsilon \int_0^t d\tau \int_0^{a_2 V_2 \tau} e^{-u}\left[j\left(\frac{u^2}{4}\right) - 1\right] du < \frac{a_2 \varepsilon}{2}\int_0^t d\tau \int_0^{a_2 V_2 \tau} (1 + e^{-2u})\, du =$$

$$= \frac{\varepsilon}{8 V_2}\left(2 a_2^2 V_2^2 t^2 + 2 a_2 V_2 t + e^{-2 a_2 V_2 t} - 1\right) = K'_{2,1}(t)\,\varepsilon$$

Par suite:

$$(120) \qquad \left|\mathcal{J}_2[f]\right| < K'_2(t)\,\varepsilon < K'_2\,\varepsilon \quad ,$$

avec

$$K'_2(t) = K'_{2,1}(t) + K'_{2,2}(t) \qquad ,$$

la constante K'_2, qui dépend du domaine $\mathbf{D}$ considéré, étant une borne supérieure de $K'_2(t)$ dans $\mathbf{D}$

Ensuite, les dérivées successives de $\mathcal{J}_2[f]$, par rapport à y et à z, se calculent d'une façon analogue à celles de $\mathcal{D}[f]$, ce qu'on

......

voit de suite, en considérant la première expression de $\mathcal{J}_2[f]$ donnee par (73) du chapitre III. Nous avons:

$$\Delta_1\left\{\mathcal{J}_2[f]\right\} = \mathcal{J}_2\left[\Delta_1 f\right] = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Gamma^2_{yzt}} \frac{e^{-a_2 r}}{r}\Delta_2 f(\eta,\zeta,\tau)\times$$

$$\times\, d\eta\, d\zeta\, d\tau + \frac{a_2^2 V_2}{4\pi}\int_0^t d\tau \iiint_{\Gamma^2_{yz\tau}} e^{-a_2 V_2(\tau-\theta)} j'\left[a_2^2\frac{V_2^2(\tau-\theta)^2 - r^2}{4}\right]\times$$

$$\times\,\Delta_2 f(\eta,\zeta,\tau)\, d\eta\, d\zeta\, d\theta \quad ,$$

d'où il résulte, en vertu des inégalites (I19) et (I20):

$$\left|\Delta_1\left\{\mathcal{J}_2[f]\right\}\right| < K_2'\varepsilon$$

L'inegalité (65'), paragraphe 7 du chapitre II, permet alors d'écrire:

$$(121) \qquad \left|\mathcal{D}_1\left\{\mathcal{J}_2[f]\right\}\right| < K_1 K_2'\varepsilon = K'\varepsilon \quad ,$$

K_1 étant encore une quantité positive qui ne dépend que du domaine $\mathcal{D}$ considéré.

De la même façon, avec les mêmes hypothèses, nous verrions que

$$(122) \qquad \left|\mathcal{J}_2\left\{\mathcal{D}_1[f]\right\}\right| < K'\varepsilon \quad ,$$

d'où il résulte, comme nous l'avons montré plus haut, la justification de la relation (I26), et aussi de

$$\mathcal{D}\mathcal{J}[F] = \mathcal{J}\mathcal{D}[F] \quad ,$$

pour les fonctions $F(y,z,t)$ qui possèdent leurs deux premiers laplaciens $\Delta_1 F$ et $\Delta_2 F$, par rapport à y et à z, et qui sont continues ainsi que ceux ci, par rapport à l'ensemble des variables y, z, t.

Pour la relation (I27):

$$\mathcal{D}\mathcal{J}[F] = \int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1 F(y,z,\tau)\, d\tau \quad ,$$

sa justification est immédiate. En effet, nous venons de voir que

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}[f] < K'\varepsilon \quad ,$$

pour les fonctions $f(y,z,t)$,telles que

$$|f(y,z,t)| \ , \ |\Delta_1 f(y,z,t)|, \ |\Delta_2 f(y,z,t)| < \varepsilon \quad ,$$

et nous avons:

$$\left| \int_0^t (t-\tau)\,\Delta_1 f(y,z,\tau)\,d\tau \right| < \frac{t^2}{2}\cdot\varepsilon \quad ,$$

pourvu que

$$|\Delta_1 f(y,z,t)| < \varepsilon$$

La méthode de résolution de nos équations intégro-différentielles (79),(80) et (84) du chapitre III et leur réduction à des problèmes de Cauchy,relatifs à des équations aux dérivées partielles linéaires,à coefficients constants,sont donc complètement justifiés,sous la condition que les inconnues f , g et F ,possèdent,chacune,leurs deux premiers laplaciens,par rapport à y et à z et soient continues,ainsi que ceux ci,par rapport à l'ensemble des variables y, z, t

Appendice

Cas de n milieux successifs, d'épaisseurs quelconques, séparés par (n-I) plans parallèles.

I.- Le cas de trois milieux, séparés par deux plans parallèles, se traite aisément, une fois résolu le problème pour deux milieux. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une inconnue scalaire, satisfaisant à l'équation de propagation:

$$\Delta u - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2a}{V}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

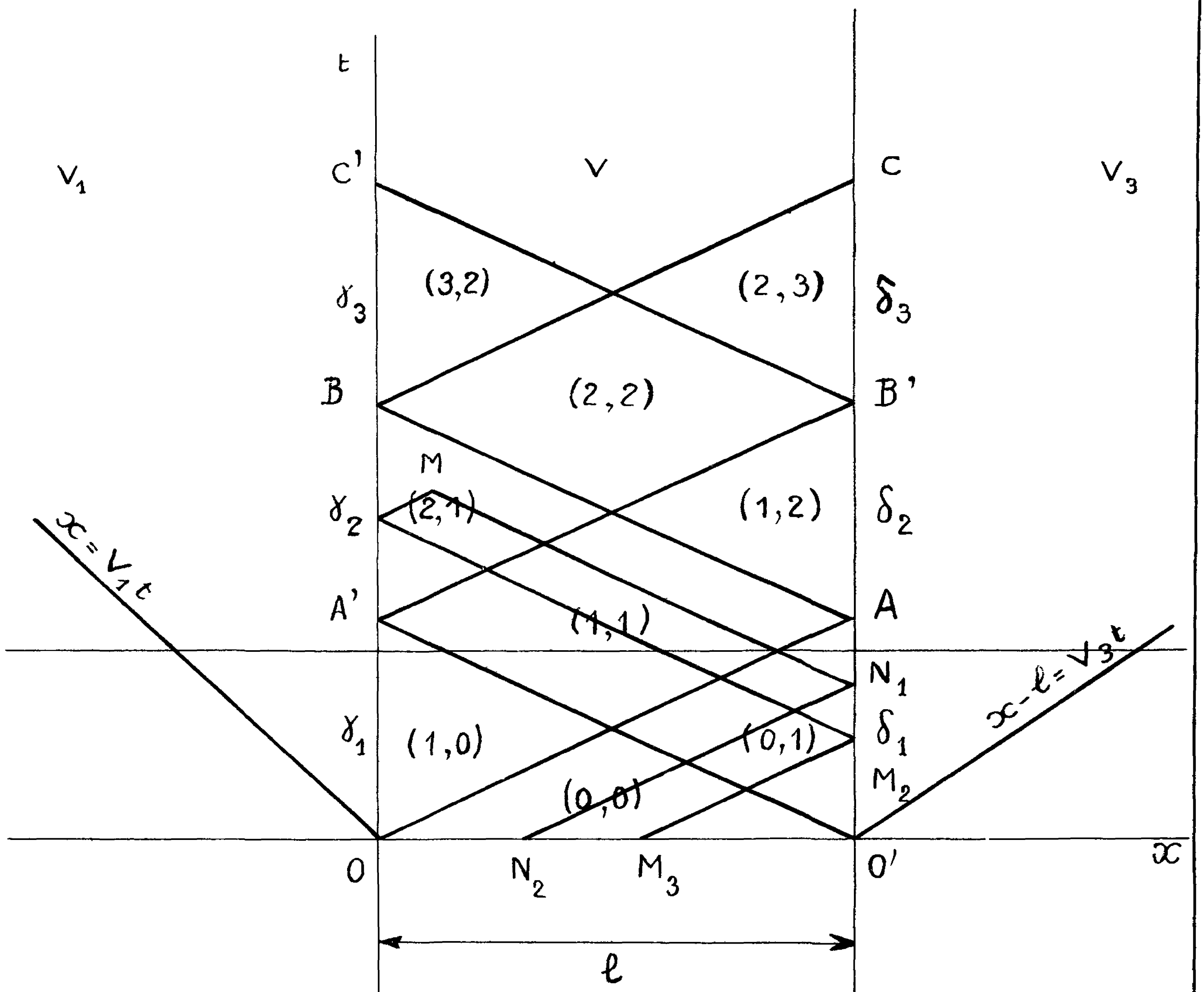
Nous considérons la section de l'espace-temps par l'arête $\eta = y, \zeta = z$, qui passe par le point M (x, y, z, t), où nous voulons déterminer la solution. (Voir fig.I, page suivante).

Dans les deux milieux extérieurs, I et 3, le problème mixte, de type Dirichlet, est résolu par les formules, valables dans le cas de deux milieux, séparés par un plan, analogues à la formule (26) du chap.I, compte tenu des changements de notation et des inconnues auxiliaires, en nombre infini, γ_I, γ_2, ..., γ_n, ...; δ_1, δ_2, ..., ..., δ_n, ..., fonctions d'y, z et t, créées par la réflexion des ondes de démarcation OABC .....,O'A'B'C'...Une seule inconnue auxiliaire, (γ_i ou δ_j), variable avec la position de M, interviendra dans la formule donnant u (M).

Dans le milieu intérieur, on résout le problème mixte, de proche en proche, dans les régions successives, (I,0),(0,I),(2,I), (I,2),.., délimitées par les ondes de démarcation. Pour les régions (I,0) et (0,I) qui ne comportent qu'une réflexion de l'onde rétrograde, les formules de résolution du problème mixte, et par suite de l'équation intégro-différentielle, en γ_I, ou δ_I, sont les mêmes que lorsqu'il n'y a que deux milieux. Nous aurons donc des formules analogues aux formules (26) du chap.I et (29) du chap.II, compte tenu des nouvelles notations. Nous obtiendrons ainsi γ_I et δ_I.

Ensuite, en se plaçant, par exemple, dans la région (2,I), la valeur de l'inconnue u, en M, sera obtenue comme il est indiqué sommairement au paragraphe 227, p.483 de l'ouvrage déjà cité de M. Hadamard, "Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles, linéaires, hyperboliques". L'hypercône caractéristique de sommet M, aura toujours même équation et par suite, la valeur de u, en M, dépendra de γ_2 de la même façon que la valeur d'u,

...../.....



$$OA' = A'B = \dots = O'A = AB' = \dots \frac{\ell}{V_2}$$

Fig - 1 -

dans la région (I,0) dépendait de γ_I ; cette valeur d'u en M sera aussi fonction de δ_I, mais cette inconnue auxiliaire est déjà déterminée. Naturellement, u (M) dépendra aussi des données initiales de Cauchy, α et β et pourra s'écrire:

$$u(M) = C[\gamma_1] + D[\delta_1] + A[\alpha] + B[\beta],$$

A, B, C et D étant des fonctionnelles linéaires (et homogènes) et ne dépendant chacune que de l'une des quatre fonctions α, β, γ_2 et δ_I. Le premier membre de l'équation intégro-différentielle en γ_2 sera donc le même que celui de l'équation précédente en γ_I, sauf que la limite inférieure d'intégration, par rapport à t, au lieu d'être zéro, sera $\frac{l}{V_2}$. Seuls, les seconds membres de ces équations qui renferment les termes connus, différeront profondément, à cause des termes en δ_I que contiendra l'équation en γ_2. γ_2 s'obtiendra donc par une formule tout-à-fait analogue à celle qui donne γ_I Et de même pour δ_2, vis-à-vis de δ_I et ainsi de suite, l'équation de l'hypercône caractéristique ne changeant pas avec la position de M, dans le milieu 2, et l'expression d'u (M) ayant toujours un caractère linéaire par rapport à l'ensemble formé par les γ et δ intéressés, α et β.

2.- Si maintenant, toujours dans le cas de trois milieux, séparés par deux plans parallèles, nous considérons le champ électromagnétique, constitué par les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, satisfaisant aux équations de Maxwell, rien d'essentiel ne sera encore à changer, par rapport au cas traité de deux milieux. Les données initiales seront analogues à celles correspondant au cas de deux milieux et seront encore équivalentes aux données de Cauchy, compte tenu des équations de Maxwell et des conditions de passage. De même, pour les inconnues auxiliaires en nombre infini, f_I, f_2,.., g_I, g_2,...,F_I, F_2,..., relatives au plan x = 0 ; h_I, h_2, ..., k_I, k_2,..., H_I, H_2,...., relatives au plan $x = l$.

Dans le milieu intérieur 2, les problèmes mixtes, qu'ils soient de type Dirichlet (pour les composantes Y, Z et L) ou de type F.Neumann, (pour les composantes X, M et N), seront résolus de proche en proche, comme dans le cas scalaire et, pour les mêmes raisons que dans ce cas, les premiers membres des équations intégro-différentielles, qui détermineront les inconnues auxiliaires, seront toujours les mêmes, à la limite inférieure d'intégration, par rapport à t, près, et compte tenu des changements de notation, que dans le cas de deux milieux, séparés par un plan. Les résultats seront donc essentiellement les mêmes que dans ce dernier cas. Les conditions de résolubilité du problème s'en déduiront par une extension immédiate ; par exemple, si l'on néglige les conducti-

..../....

bilités, le problème sera toujours résoluble, si les deux conditions suivantes sont remplies:

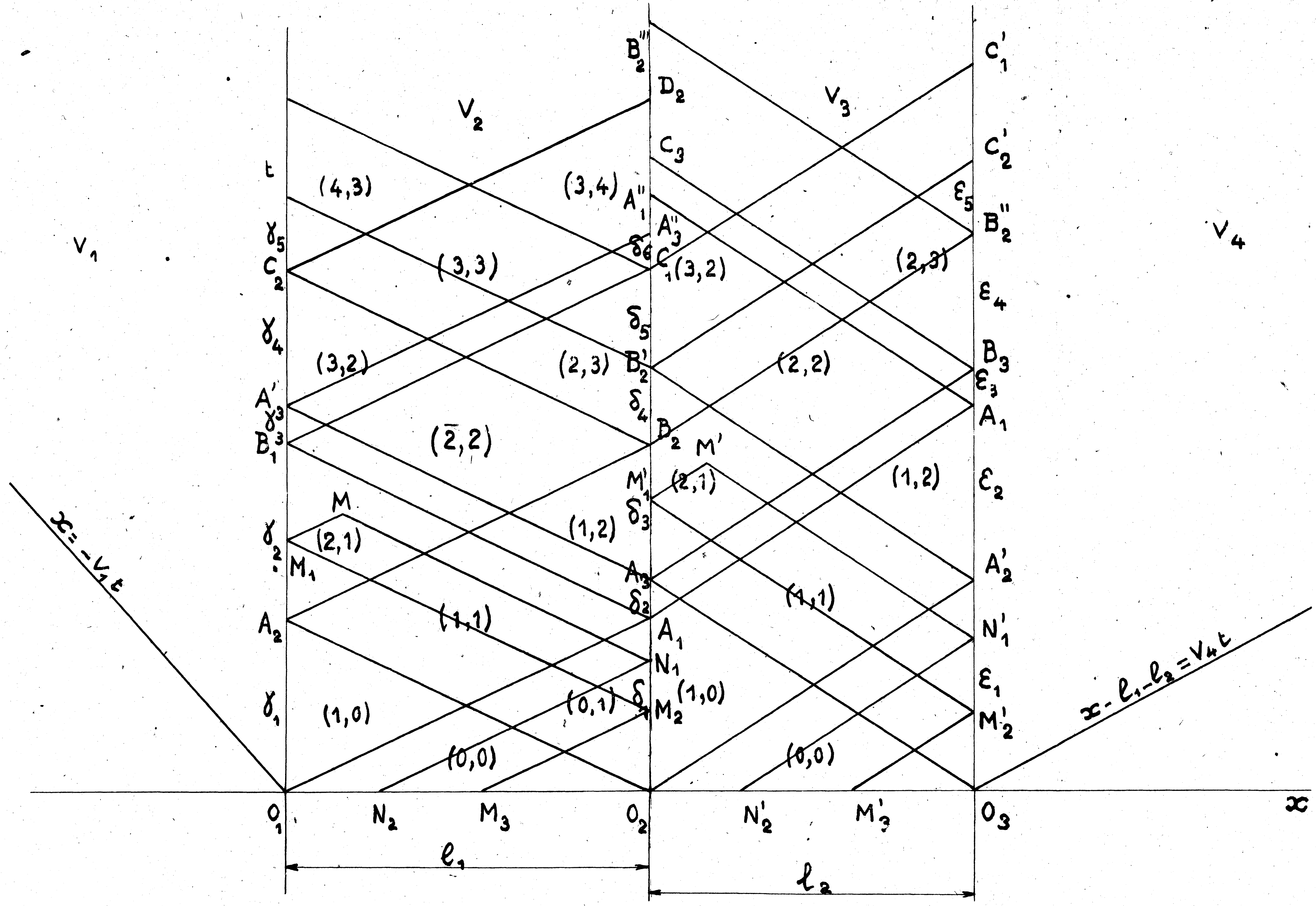
$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\mu_1-\mu_2) \leqslant 0 \quad , \quad (\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\mu_2-\mu_3) \leqslant 0$$

3.- Nous pouvons aussi envisager le cas de n milieux successifs, d'épaisseurs quelconques, séparés par (n-I) plans parallèles, sans que rien d'essentiel soit changé aux résultats.

Prenons pour simplifier la figure et l'exposé, le cas de quatre milieux successifs, avec une inconnue scalaire u (M). Nous considérons encore la section de l'espace-temps par l'arête η = y, ζ = z, passant par le point M (x, y, z, t), où nous voulons déterminer la solution. La principale complication réside dans le plus grand nombre d'inconnues auxiliaires, introduites par les ondes de démarcation qui, considérées dans deux milieux successifs, ne coupent pas aux mêmes points l'arête de séparation, (dans le plan xt), des deux milieux. Il en résulte, sur chaque arête de séparation, un nombre beaucoup plus grand d'inconnues auxiliaires.

En nous reportant à la figure 2, nous voyons que γ_I, δ_I et ε_I, se calculent sans difficulté en fonction des données initiales, comme dans le cas de deux milieux. γ_2 est déterminée, comme dans le cas de trois milieux, en fonction de δ_I et des données initiales. δ_2, en fonction de γ_I et des données initiales, en calculant u (M), dans la partie (I,2) du milieu 2, située au-dessous d'A'_3 A_3, et dans la partie (I,0) du milieu 3, située au dessus d'A_I A'_I. ε_2, en fonction de δ_I et des données initiales, en calculant u (M), dans la partie (I,2) du milieu 3, située au dessous d'$A_I A'_I$. γ_3, en fonction de δ_2, de γ_I et des données initiales, en calculant u dans la partie (3,2) du milieu 2, située au-dessous d' A'_3 A_3. δ_3, en fonction de γ_I, d'ε_I et des données initiales, en calculant u dans la partie (I,2) du milieu 2, située au dessus d'A_3 A'_3 et dans la partie (2,I) du milieu 3, située au dessous de B_2 B''_2. ε_3, en fonction de δ_2 et des données initiales, en calculant u dans la partie (I,2) du milieu 3, située au dessus d'A''_I A''_I et ainsi de suite....

De même, dans le cas du champ électromagnétique $\vec{E}$, $\vec{H}$, satisfaisant aux équations de Maxwell, avec n milieux successifs, séparés par (n-I) plans parallèles, les conclusions resteraient essentiellement les mêmes que pour deux milieux. Les conditions de résolubilité du problème s'en déduiraient par une généralisation immédiate, comme il a été indiqué dans le cas de trois milieux. Seule, la résolution effective deviendrait vite fastidieuse à cause du pullulement d'inconnues auxiliaires à déterminer de proche en proche.



$$O_1 A_2 = A_2 B_1 = - - - = O_2 A_1 = A_1 B_2 = - - - \quad \frac{\ell_1}{V_2} = \frac{\ell_2}{V_3}$$

$$O_2 A_3 = A_3 B'_2 = - - - = O_3 A'_2 = A'_2 B_3 = - - - -$$

Cas de plus de trois milieux