LUC GAUTHIER

# Sur certains systèmes linéaires de droites hyperspatiaux

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1944
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1944__272__1_0>

Série A, N° 2083
N° d'ordre 2950

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**Luc GAUTHIER**
**Agrégé-préparateur à l'Ecole Normale Supérieure**

---

**1re THÈSE. — Sur certains systèmes linéaires de droites hyperspatiaux.**

**2e THÈSE. —** Propositions données par la Faculté.

**Soutenues le 4 Août 1944 devant la Commission d'examen.**

MM. E. CARTAN, *Président*
VALIRON, BOULIGAND, *Examinateurs.*

BRUXELLES
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112
—
1945

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

*Doyen :* M. P. MONTEL.

## PROFESSEURS

| | | |
|---|---|---|
| Charles PÉREZ | T | Zoologie. |
| Paul MONTEL | T | Théorie des fonctions. |
| L. BLARINGHEM | T | Botanique. |
| G. JULIA | T | Analyse supérieure et Algèbre supérieure. |
| C. MAUGUIN | T | Minéralogie. |
| A. DENJOY | T | Géométrie supérieure. |
| L. LUTAUD | T | Géographie physique et Géologie dynamique. |
| G. BRUHAT | T | Physique. |
| E. DARMOIS | T | Enseignement de Physique. |
| A. DEBIERNE | T | Physique générale et Radioactivité. |
| L. DUNOYER | T | Chimie physique. |
| M. JAVILLIER | T | Chimie biologique. |
| Henri VILLAT | T | Mécanique des fluides et applications. |
| Ch. JACOB | T | Géologie. |
| P. PASCAL | T | Chimie générale. |
| M. FRÉCHET | T | Calcul des probabilités et Physique mathématique. |
| E. ESCLANGON | T | Astronomie. |
| H. BÉGHIN | T | Mécanique physique et expérimentale. |
| FOCH | T | Mécanique expérimentale des fluides. |
| PAUTHENIER | T | Electrotechnique générale. |
| DE BROGLIE | T | Théories physiques. |
| CHRÉTIEN | | Optique appliquée. |
| PRENANT | T | Anatomie et Histologie comparées. |
| COMBES | T | Physiologie végétale. |
| GARNIER | T | Application de l'analyse à la géométrie. |
| PÉRÈS | T | Mécanique rationnelle. |
| HACKSPILL | T | Chimie minérale. |
| TOUSSAINT | | Technique aéronautique. |
| M. CURIE | | Physique (P. C. B.). |
| G. RIBAUD | T | Hautes températures. |
| CHAZY | T | Mécanique analytique et Mécanique céleste. |
| GAULT | T | Chimie (P. C. B.). |
| CROZE | T | Physique théorique et Physique céleste. |
| DUPONT | T | Théories chimiques. |
| VALIRON | T | Calcul différentiel et intégral. |
| BARRABÉ | | Géologie structurale et Géologie appliquée. |
| F. PERRIN | | Théories physiques. |
| VAVON | T | Analyse et mesures chimiques. |
| G. DARMOIS | T | Mathématiques générales. |
| CHATTON | T | Biologie maritime. |
| AUBEL | | Chimie biologique. |
| J. BOURCART | | Géographie physique et Géologie dynamique. |
| Mme JOLIOT-CURIE | | Physique générale et Radioactivité. |
| PLANTEFOL | T | Botanique. |
| CABANNES | T | Recherches physiques. |
| GRASSÉ | T | Zoologie (Evolution des êtres organisés). |
| PRÉVOST | | Chimie organique. |
| BOULIGAND | | Mathématiques. |
| CHAUDRON | | Chimie (P. C. B.). |
| WYART | | Minéralogie. |
| TEISSIER | | Zoologie. |
| MANGENOT | | Biologie végétale (P. C. B.). |
| P. AUGER | | Physique. |
| MONNIER | | Physiologie générale. |
| PIVETEAU | | Géologie. |
| ROCARD | | Physique. |
| H. CARTAN | | Calcul différentiel. |
| SCHAEFFER | T | Physiologie générale. |
| LAFFITTE | | Chimie (P. C. B.). |
| LERAY | | Mécanique théorique des fluides. |
| FAVART | | Calcul des probabilités et Physique mathématique. |
| COULOMB | | Physique du globe. |
| Mlle COUSIN | | Biologie animale (P. C. B.). |

*Secrétaire :* C. MONIER.

*A TOUS LES MAITRES*

*QUI M'ONT FAIT AIMER LES MATHEMATIQUES*

*hommage*

*de ma respectueuse reconnaissance.*

EXTRAIT DES MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE
4e SÉRIE, TOME VI, 1944

# INTRODUCTION

> Il y a donc bien une intuition des continus à plus de trois dimensions et si elle exige une attention plus soutenue que l'intuition géométrique ordinaire, c'est sans doute une affaire d'habitude, et aussi l'effet de la complication rapidement croissante des propriétés des continus quand augmente le nombre des dimensions
>
> HENRI POINCARÉ, *Dernières Pensées* (Flammarion, 1913, p. 96)

Dans le développement de la géométrie projective hyperspatiale, on rencontre deux types de propriétés : les unes sont une extension naturelle et immédiate des propriétés correspondantes de l'espace ordinaire, les autres, au contraire, divergent par rapport à l'espace ordinaire dans lequel il n'y a parfois aucune propriété correspondante. Ce double caractère se présente de façon très nette en géométrie réglée pour les raisons suivantes :

*a*) La variété grassmannienne, qui représente l'ensemble des droites, demeure rationnelle, mais cesse d'être une hypersurface pour devenir une intersection incomplète;

*b*) On dispose encore des transformations projectives, mais la dualité disparaît.

Aussi, avant d'attaquer le problème précis qui fait l'objet de cette thèse, à savoir l'étude des congruences linéaires ou figures réglées telles qu'il passe une seule droite par un point générique de l'espace, a-t-il été nécessaire de consacrer un premier chapitre à l'étude des variétés réglées et des congruences en général. Voici les principales divergences constatées par rapport à l'espace ordinaire :

Le long des génératrices d'une variété réglée, il y a encore une homographie, analogue à la corrélation de Chasles, entre deux entités rationnelles : la ponctuelle et l'enveloppe des espaces tangents, mais cette dernière n'a plus le caractère linéaire, ce qui modifie profondément les conditions de raccordement de deux variétés.

La notion de développable est remplacée par celle que j'ai appelée développoïde : elle est susceptible d'être réalisée à un plus ou moins haut degré et dans les congruences il passe par chaque rayon des développoïdes de l'espèce la plus commune, dépendant de fonctions arbitraires de plusieurs arguments, mais pas de développoïdes d'espèce plus élevée.

L'annulation identique de l'équation qui fixe les $r-l$ foyers d'un rayon de la congruence n'impose qu'une seule condition à ce rayon, de sorte qu'il existe, à côté de la variété focale proprement dite, des variétés focales singulières de deux types, qui jouent un rôle très important dans les congruences linéaires.

Les chapitres suivants sont consacrés à l'étude particulière des congruences linéaires et de leurs variétés focales. Pour éviter de fastidieuses discussions, je me suis limité au cas où ces variétés sont irréductibles : il m'a paru, en effet, moins intéressans d'échafauder des assemblages de variétés que d'apporter une contribution, d'ailleurs bien modeste, à la question de la classification des variétés algébriques gauches.

La solution dans l'espace ordinaire est unique et constitue une propriété classique de la cubique gauche. Au contraire, dans l'espace à quatre dimensions, la détermination exacte, due à Severi, montre qu'il y a quatre solutions. Severi les obtient comme surfaces ayant un seul point triple apparent, au moyen de formules liant les singularités des surfaces. Mais la théorie des singularités propres et apparentes des variétés algébriques est trop peu avancée pour qu'on puisse espérer généraliser sa méthode à un espace quelconque.

Au contraire, l'étude de la variété par l'intermédiaire de la congruence qu'elle engendre m'a permis d'obtenir des résultats absolument généraux.

Dans le chapitre II, après avoir établi deux relations fondamentales entre les caractères projectifs de la congruence, qui aboutissent à une limitation supérieure très simple de l'ordre de la variété focale proprement dite, j'examine avec précision le rôle des variétés focales singulières au moyen d'une transformation birationnelle à laquelle j'ai donné le nom d'Ascione, qui, le premier, l'a étudiée pour l'espace à quatre dimensions dans un travail antérieur à celui de Severi, mais malheureusement entaché d'erreur. Le chapitre se termine par quelques formules énumératives, utiles pour étudier à fond les exemples choisis dans l'espace à cinq dimensions.

Le chapitre III est consacré aux variétés focales lieux d'un espace linéaire qui varie à un paramètre : l'importance de cette hypothèse réside dans un théorème de Picard, en vertu duquel elle est vérifiée par toutes les variétés à sections curvilignes rationnelles (sections par des espaces à trois dimensions). Il m'a suffi là d'une méthode de dégénérescence calquée sur celle qu'emploie Severi dans l'étude des courbes gauches algébriques. On peut ainsi constater que, quelle que soit la dimension de l'espace ambiant, il existe une famille de variétés rationnelles solutions : j'ai développé les calculs sur des exemples assez généraux, notamment sur les variétés correspondantes du septième ordre de l'espace à cinq dimensions.

Dans le chapitre IV, après avoir rappelé très brièvement les propriétés de la surface de Caporali, qui constitue une solution connue dans l'espace à quatre dimensions, je passe méthodiquement en revue les variétés à sections curvilignes elliptiques. Dans l'espace à cinq dimensions on rencontre ainsi certaines variétés du sixième ordre et les variétés du septième ordre. Ces solutions, auxquelles il ne correspond rien dans l'espace ordinaire, ont un caractère accidentel, en ce sens que dans les espaces à plus de cinq dimensions il n'existe aucune variété focale à sections elliptiques.

Dans un dernier chapitre, j'indique diverses méthodes permettant d'obtenir des solutions valables dans un espace quelconque. L'intersection des complexes linéaires, qui dans l'espace ordinaire donne une focale décomposée, fournit dans les espaces plus amples des variétés irréductibles : on retrouve une des solutions de Severi dans l'espace à quatre dimensions et dans celui à cinq des variétés du septième ordre à sections de genre quatre, que j'étudie complètement en montrant notamment qu'elles sont rationnelles. A partir des systèmes de réciprocités, on trouve une autre série de variétés qui fournissent la dernière solution de l'espace à quatre dimensions et qui ont pour type, dans l'espace à cinq dimensions, des variétés rationnelles du dixième ordre à sections de genre onze. Enfin, la considération de certains faisceaux de variétés de Segre conduit à définir dans l'espace à cinq dimensions des variétés du neuvième ordre et des variétés du treizième ordre, que j'ai indiquées surtout pour montrer que la limitation de l'ordre, obtenue au chapitre II (quinze dans l'espace à cinq dimensions), n'est pas trop écartée des résultats effectifs.

Pour terminer, je donne quelques indications sur les congruences linéaires dans lesquelles, sur tout rayon, les foyers sont multiples : on retrouve ainsi certaines variétés des espaces à un nombre impair de dimensions que j'avais déjà signalées dans un travail antérieur sur les variétés cubiques rationnelles sans point double.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à M. Georges Darmois, pour m'avoir dirigé dans la voie captivante de la Géométrie algébrique; à M. Elie Cartan, pour avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail; et à M. Lucien Godeaux, pour l'affectueuse sollicitude avec laquelle il n'a cessé, durant toutes mes recherches, de me prodiguer des encouragements et des conseils d'une rare compétence.

SUR CERTAINS

# SYSTÈMES LINÉAIRES DE DROITES HYPERSPATIAUX

## CHAPITRE I

### THÉORIE GÉNÉRALE DES CONGRUENCES DE DROITES DE L'ESPACE PROJECTIF A $n$ DIMENSIONS

Dans l'étude de la géométrie réglée de l'espace ordinaire $S_3$ on a coutume de distinguer trois grandes catégories de figures :

*a*) Les *surfaces réglées*, engendrées par une droite qui dépend d'un paramètre (en considérant encore comme une surface développable le lieu des tangentes à une courbe plane).

*b*) Les *congruences*, engendrées par une droite qui dépend de deux paramètres : par un point générique de $S_3$ passent un nombre fini de droites.

*c*) Les *complexes*, engendrés par une droite qui dépend de trois paramètres : par un point générique de $S_3$ il en passe une infinité.

Par analogie, dans l'étude de la géométrie réglée de l'espace à $n$ dimensions $S_n$, nous distinguerons également trois grandes catégories de figures (1) :

*a*) Les *variétés réglées*, engendrées par une droite qui

(1) Certains auteurs désignent sous le nom de congruence le *cas* $p=2$. Cf., par exemple : BENIAMINO SEGRE, Sulle congruence di

dépend de $p \leq n - 2$ paramètres : la variété est alors généralement à $p + 1$ dimensions.

*b*) Les *congruences*, engendrées par une droite qui dépend de $n - 1$ paramètres : par un point générique de $S_n$ il en passe un nombre fini.

*c*) Les *complexes*, engendrés par une droite qui dépend de $p \geq n$ paramètres : par un point générique de $S_n$ il en passe une infinité formant un cône dont la dimension est en général $p - n + 2$. Le nombre $p$ ne peut d'ailleurs dépasser $2n - 3$, car les droites de $S_n$ dépendent de $2n - 2$ paramètres.

Nous nous proposons d'étudier ici quelques propriétés générales des congruences de droites de $S_n$, valables notamment pour toutes les congruences algébriques. A cet effet, quelques notions préliminaires sur les variétés réglées nous sont indispensables.

## I. — Variation de l'espace linéaire tangent à une $V_{p+1}$ réglée le long d'une génératrice.

Considérons dans $S_n$ une variété $V_{p+1}$ à $p + 1$ dimensions engendrée par une droite qui dépend de $p$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$. Nous supposerons qu'en chaque point d'une génératrice G, la variété $V_{p+1}$ admet un espace linéaire $S_{p+1}$ tangent. Lorsque, $\alpha_2 \ldots \alpha_p$ restant fixes, on donne à $\alpha_1$ une variation, G vient occuper une position $G_1$. En faisant varier de même $\alpha_2 \ldots \alpha_p$, G vient en $G_2 \ldots G_p$ respectivement [1]. En particulier, un point M de G vient

rette che ammettono reti coniugate ad invarianti uguali (*Memorie della Reale Accademia d'Italia*, 1930, mémoire 5). Nous pensons qu'il n'y a aucun risque de confusion entre les considérations de géométrie infinitésimale qui préoccupent ces auteurs et celles de géométrie algébrico-projective que nous développons dans ce travail.

[1] Une vérification élémentaire permettra de s'assurer que nos résultats sont indépendants du choix des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$

prendre sur $G_1 \ldots G_p$ les positions respectives $M_1\, M_2 \ldots M_p$, et le $S_{p+1}$ tangent à $V_{p+1}$ en M est le $S_{p+1}$ limite de celui qui contient G $M_1\, M'_2 \ldots M_p$, lorsque les droites $G_i$ tendent vers G. Les propriétés de l'espace tangent peuvent donc être obtenues comme limites de celles de l'espace G $M_1\, M_2 \ldots M_p$.

Comme le $S_{p+1}$ unissant G a $M_1\, M_2 \ldots M_p$ est toujours contenu dans l'espace linéaire defini par G $G_1 \ldots G_p$, *le* $S_{p+1}$ *tangent en* M *qui décrit* G *reste toujours contenu dans un espace linéaire* $S_k$ *passant par* G, et, dans le cas le plus général, $k$ est le plus petit des deux nombres $2p+1$ et $n$.

Lorsque M est donné, il en est de même de $M_i$ et réciproquement : il en résulte que, si cette correspondance est algebrique, ce qui aura lieu pour les variétés différentiables et, en particulier, pour les variétés algébriques, les points M $M_1 \ldots M_p$ décrivent sur G $G_1 \ldots G_p$ des divisions homographiques. L'espace $S_{p-1}$ qui joint $M_1 M_2 \ldots M_p$ décrit alors une variété $W_p^p$ à $p$ dimensions et d'ordre $p$ qui est soit une variété de Segre [1] si elle est normale $(2p-1)$, soit la projection d'une variété de Segre sur $S_k$. Ceci montre que *le* $S_{p+1}$ *tangent au point* M *enveloppe dans* $S_k$, *lorsque* M *décrit* G, *un cône rationnel ayant* G *pour arête et pour classe*, p.

La varieté $W_p^p$ n'est pas un cône; en effet, on peut au moyen d'un changement de variables sur les paramètres $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ substituer a $G_1\, G_2 \ldots G_p$ des génératrices rectilignes quelconques de $W_p^p$. En particulier, si l'espace

---

qui fixent la generatrice G, et de la representation projective du point M sur G (on peut, par exemple, associer a M le rapport anharmonique qu'il forme avec les traces de G sur trois hyperplans fixes)

(1) CORRADO SEGRE, Sulle varieta che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t V (1891), p 192)

$M_1 M_2 \dots M_p$ comportait un point $M_0$ fixe, il serait possible, au moyen d'un changement de variables convenable, de substituer $M_0$ à $M_p$. Ceci signifie que pour une variation de $\alpha_p$ seul, tout point M de G viendrait en $M_0$ : $M_0$ devrait donc être infiniment voisin de tous les points de G, ce qui est absurde.

La variété $W_p^p$ n'est généralement pas une hypersurface de $S_k$, car on n'a pas $p = k - 1$. Si $k = n$, on sait que $p = n - 1$ conduit à une congruence et non à une variété. Si $k = 2p + 1$, on a $p = 2p$, ce qui est absurde. Il en résulte que G ne rencontre en général pas $W_p^p$. Toutefois: *La condition nécessaire et suffisante pour que, lorsque* M *décrit* G, *le* $S_{p+1}$ *tangent en* M *passe par un plan fixe, est que* G *rencontre* $W_p^p$.

En effet, si le $S_{p+1}$ unissant G à $M_1 M_2 \dots M_p$ passe par un plan fixe $\pi$, dans cet espace, $\pi$ et le $S_{p-1}$ défini par $M_1 M_2 \dots M_p$ ont un point commun $M_0$. Lorsque M varie, le point $M_0$ ne peut pas rester fixe, comme nous l'avons vu plus haut; il décrit donc dans $\pi$ une courbe qui rencontre G en au moins un point S qui est un point commun à G et à $W_p^p$.

Réciproquement, si G coupe $W_p^p$ en S, menons la génératrice $G_0$ de $W_p^p$ qui passe en S. Le $S_{p+1}$ relatif à M joint G à l'espace $S_{p-1}$ de $W_p^p$ qui joint $M_1 M_2 \dots M_p$ et s'appuie sur $G_0$ en un point $M_0$. Ce point $M_0$ est généralement distinct de S, car nous avons vu que le $S_{p-1}$ ne passe pas par un point fixe. Il en résulte que $S_{p+1}$ passe par le plan fixe $GG_0$.

Nous appellerons une telle génératrice de $V_{p+1}$ *génératrice singulière*. Remarquons que si $\Sigma$ est le point de G pour lequel $M_0$ est en S, le $S_{p+1}$ unissant G à $M_1 M_2 \dots M_p$ est indéterminé dans un faisceau puisque G rencontre le $S_{p-1}$ en S : *sur une génératrice singulière, il y a un point* *où le* $S_{p+1}$ *tangent est indéterminé dans un faisceau.* Il n'y a d'ailleurs qu'un seul $S_{p+1}$ du faisceau qui contient le plan par lequel passent les autres $S_{p+1}$ tangents.

Nous pouvons, au moyen d'un changement de variables sur $\alpha_1 \dots \alpha_p$, supposer que $G_p$ est confondue avec $G_0$. L'espace $S_{p+1}$ réunit alors le plan fixe $GG_0$ au $S_{p-2}$ défini par $M_1 M_2 \dots M_{p-1}$ qui décrit une variété $W_{p-1}^{p-1}$ rationnelle d'ordre $p - 1$. Il en résulte que : *lorsque* M *décrit la génératrice singulière* G, *le* $S_{p+1}$ *tangent enveloppe dans* $S_k$ *un cône rationnel ayant pour sommet le plan fixe relatif à* G *et pour classe* $p - 1$.

Plus généralement, nous dirons que G est une *génératrice* h — *singulière* de $V_{p+1}$ si le $S_{p+1}$ tangent en un point qui décrit G passe par un $S_{h+1}$ fixe.

*La condition nécessaire et suffisante pour que* G *soit* h — *singulière est qu'elle rencontre* $W_p^p$ *en* h *points.*

En effet, si le $S_{p+1}$ tangent à $V_{p+1}$ passe par un $S_{h+1}$ fixe, $S_{h+1}$ et le $S_{p-1}$ qui joint $M_1 M_2 \dots M_p$, situés dans un même $S_{p+1}$, ont un $S_{h-1}$ commun. Lorsque M décrit G, ce $S_{h-1}$, qui ne peut être fixe, décrit une $W_h^h$ de $S_{h+1}$, qui rencontre G en $h$ points : G a donc $h$ points communs avec $W_p^p$. Réciproquement, si G coupe $W_p^p$ en $h$ points $O_1 O_2 \dots O_h$, en effectuant sur $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ un changement de variables tel que $G_1 G_2 \dots G_h$ soient les génératrices de $W_p^p$ qui passent par $O_1 O_2 \dots O_h$ respectivement, on voit que $S_{p+1}$ passe par le $S_{h+1}$ fixe joignant G à $M_1 M_2 \dots M_h$, c'est-à-dire $G G_1 G_2 \dots G_h$.

En chacun des $h$ points $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_h$ tels, respectivement, que $M_1$ soit en $O_1$, ou $M_2$ en $O_2$, ... ou $M_h$ en $O_h$, le $S_{p+1}$ tangent est indéterminé dans un faisceau.

Le $S_{p+1}$ qui joint G à $M_1 M_2 \dots M_p$ joint le $S_{h+1}$ fixe $G G_1 \dots G_h$ au $S_{p-h-1}$ défini par $M_{h+1} M_{h+2} \dots M_p$ qui décrit une variété $W_{p-h}^{p-h}$ rationnelle à $p-h$ dimensions, d'ordre $p-h$. Il en résulte que.

*Lorsque* M *décrit la génératrice* h — *singulière* G, *le* $S_{p+1}$ *tangent enveloppe dans* $S_k$ *un cône rationnel ayant pour sommet le* $S_{h+1}$ *fixe relatif à* G *et pour classe* p — h. *Il y a en outre* h *points de* G *où le* $S_{p+1}$ *tangent est indéterminé dans un faisceau.*

En particulier une génératrice G est $p$ — singulière lorsque le $S_{p+1}$ tangent est le même pour tous les points de la droite G.

### II. — Démonstration analytique des propriétés rencontrées au § 1.

Si nous caractérisons une droite G de $S_n$ par un de ses points M et un vecteur $\vec{u}$ ayant G pour support, le point courant P de G est donné par la relation

$$\vec{P} = \vec{M} + \rho\vec{u}.$$

Quand $\vec{M}$ et $\vec{u}$ dépendent des paramètres $\alpha_1 \dots \alpha_p$, G décrit une variété $V_{p+1}$ et une tangente PT en P à cette variété est représentée par

$$\overrightarrow{PT} = \lambda_0\vec{u} + \sum_1^p \lambda_i \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_i} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}\right),$$

ce qui définit, les $\lambda$ étant arbitraires, le $S_{p+1}$ tangent en P à $V_{p+1}$. Ce $S_{p+1}$ est évidemment toujours contenu dans l'espace $S_k$ défini par une combinaison linéaire arbitraire des vecteurs

$$\vec{u}\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_i}\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i}, \qquad i = 1, 2 \cdots p.$$

Si les composantes de $\vec{u}$ sont $u_1 \dots u_n$, celles de $\vec{M}$ : $m_1 \dots m_n$, et celles de $\overrightarrow{PT}$ : $X_1 - x_1 \dots X_n - x_n$, les équations du $S_{p+1}$ tangent en P, obtenues par l'élimination des $\lambda$, sont données par (1)

$$\left\| \begin{matrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & \cdots & X_n - x_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \rho \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial m_2}{\partial \alpha_1} + \rho \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \dfrac{\partial m_n}{\partial \alpha_1} + \rho \dfrac{\partial u_n}{\partial \alpha_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial \alpha_p} + \rho \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_p} & \dfrac{\partial m_2}{\partial \alpha_p} + \rho \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_p} & \cdots & \dfrac{\partial m_n}{\partial \alpha_p} + \rho \dfrac{\partial u_n}{\partial \alpha_p} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les équations du $S_{p+1}$ tangent sont donc des polynômes en $\rho$ du degré $p$. Le $S_{p+1}$ admet donc une enveloppe rationnelle de classe $p$.

Si le $S_{p+1}$ tangent passe par un plan fixe quand P décrit G, il existe parmi les vecteurs $\overrightarrow{PT}$ un vecteur $\vec{v}$ indépendant de $\rho$ :

$$\vec{v} = \lambda_0 \vec{u} + \sum_1^p \lambda_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i}$$

et l'un au moins des $\lambda_i$ n'est pas nul pour $\rho = 0$, et par conséquent pas identiquement nul, puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un plan. En supposant, quitte à permuter les $\alpha_j$, que c'est $\lambda_p$ qui n'est pas nul, on peut en tirer, quel que soit $\rho$ :

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_p} = \frac{1}{\lambda_p} \left[ \vec{v} - \lambda_0 \vec{u} - \sum_1^{p-1} \lambda_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i} \right].$$

En remplaçant dans la matrice qui définit le $S_{p+1}$ tangent

(1) Nous désignons par $\|a_{ik}\| = 0$ la condition nécessaire et suffisante pour que le tableau des $a_{ik}$ n'ait pas le rang maximum possible.

à $V_{p+1}$, le vecteur $\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial \alpha_p}$ par cette expression, elle devient :

$$\left\| \begin{matrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & \cdots & X_n - x_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial m_n}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_{p-1}} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_{p-1}} & \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_{p-1}} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_{p-1}} & \cdots & \frac{\partial m_n}{\partial \alpha_{p-1}} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_{p-1}} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les équations du $S_{p+1}$ tangent sont donc des polynômes en $\rho$ d'ordre $p - 1$. Lorsque G est singulière, l'enveloppe du $S_{p+1}$ tangent est de classe $p - 1$. Supposons plus généralement que G soit $h$ — singulière, c'est-à-dire que le $S_{p+1}$ tangent contienne un $S_{h+1}$ fixe défini par les vecteurs fixes :

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v^1}, \overrightarrow{v^2} \cdots \overrightarrow{v^h}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{v^1}, \overrightarrow{v^2} \ldots \overrightarrow{v^h}$ figurent donc, quel que soit $\rho$, parmi les vecteurs $\overrightarrow{PT}$ tangents, de sorte qu'on a les relations linéaires :

$$\sum_1^p \lambda_{ij} \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial \alpha_i} = \mu_0^j \overrightarrow{u} + \mu_1^j \overrightarrow{v^j}, \qquad j = 1, 2, \cdots, h.$$

Ces relations sont résolubles par rapport à $h$ des vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial \alpha_i}$, sinon il y aurait au moins un des vecteurs $\mu_0^j \overrightarrow{u} + \mu_1^j \overrightarrow{v^j}$ qui serait combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v^1} \ldots \overrightarrow{v^h}$ définiraient un espace à moins de $h + 1$ dimensions. On peut toujours supposer, quitte à permuter $\alpha_1 \dots \alpha_p$, que l'on a résolu par rapport à

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{p-h+1}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{p-h+2}} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_p} :$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{p-k}} = \sum_1^{p-h} \bar{\lambda}_i^k \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i} + \bar{\mu}_0 \vec{u} + \sum_1^h \bar{\mu}_i^k \vec{v}^i$$

$$(k = 0, 1, \dots, h-1).$$

Ces résultats de résolution portés dans la matrice qui définit le $S_{p+1}$ tangent lui donnent la forme :

$$\left\| \begin{matrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & \cdots & X_n - x_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_n^1 \\ & & & \\ v_1^h & v_2^h & \cdots & v_n^h \\ \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial m_n}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1} \\ & & & \\ \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_{p-h}} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_{p-h}} & \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_{p-h}} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_{p-h}} & \cdots & \frac{\partial \alpha_{p-h}}{\partial m_n} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_{p-h}} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les équations de $S_{p+1}$ sont donc des polynômes en $\rho$ d'ordre $p-h$. Lorsque G est $h$ — singulière, l'enveloppe du $S_{p+1}$ tangent est de classe $p-h$.

### III. — Développoïdes.

Nous appellerons *développoides* (1) une variété réglée pour laquelle toutes les génératrices sont singulières. Une génératrice G est singulière lorsqu'elle rencontre $W_p^p$

(1) Ces variétés ont été également rencontrees par CORRADO SEGRE, Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi

et nous avons vu que cela revient à dire, avec un choix convenable des paramètres, qu'elle rencontre $G_p$. Si ceci a lieu pour toutes les génératrices de $V_{p+1}$, les surfaces réglées $\alpha_1 = C^{te} \ldots \alpha_{p-1} = C^{te}$ sur la variété sont des surfaces dans lesquelles deux génératrices infiniment voisines se rencontrent, c'est-à-dire des développables. Ainsi, quand $\alpha_p$ varie seul, G reste tangente à une courbe C, ou passe par un point fixe P. Lorsque les paramètres $\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}$ varient, la courbe C décrit une variété $V_p$ à laquelle G reste tangente, ou bien le point P, dans la seconde hypothèse, décrit une variété $V_{p-1}$ que toutes les droites G rencontrent.

Réciproquement, si $V_{p+1}$ est le lieu d'une droite dépendant de $p$ paramètres qui, soit touche constamment une variété $V_p$, soit rencontre constamment une variété $V_{p-1}$, c'est une développoïde. En effet, dans la première hypothèse les droites G définissent sur $V_p$ un champ d'éléments de contact qui, sous des conditions convenables de régularité, admettra des courbes intégrales; chacune de ces courbes est l'arête de rebroussement d'une surface développable tracée sur $V_{p+1}$ et toute génératrice de $V_{p+1}$ appartenant à une telle développable, $V_{p+1}$, est une développoïde. Dans la seconde hypothèse, $V_{p+1}$ est évidemment un lieu de surfaces coniques et toute génératrice appartient à un tel cône, de sorte que la même conclusion est valable.

---

(*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 30, 1910, p. 87, avec rectification p. 346). L'auteur les appelle développables. Nous croyons devoir réserver ce qualificatif pour les variétés qui peuvent être développées, c'est-à-dire appliquées sur $S_{p+1}$ avec conservation des éléments métriques. Ces dernières variétés ont été déterminées par M. ELIE CARTAN, Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1919, p. 125 et 1920, p. 132).

*Les développoïdes* $V_{p+1}$ *sont engendrées par des droites (dépendant de* p *paramètres) qui restent tangentes à une variété* $V_p$ *ou rencontrent une variété* $V_{p-1}$.

Nous désignerons la variété $V_p$ (ou $V_{p-1}$) sous le nom d'*arête* de la développoïde.

Plus généralement nous appellerons h-*développoide* une variété pour laquelle toutes les génératrices sont $h$-singulières. Le long de chacune des génératrices, le $S_{p+1}$ tangent passe par un $S_{h+1}$ fixe et enveloppe un cône rationnel de classe $p - h$. En particulier les variétés $V_{h+1}$ à $h + 1$ dimensions, qui sont $h$-développoïdes, ont un $S_{h+1}$ tangent fixe le long de toute génératrice. Pour se convaincre de l'existence de telles variétés, il suffit de remarquer qu'un cône à $h + 1$ dimensions est $h$-dévcloppoïde.

Comme la condition nécessaire et suffisante pour que G soit $h$-singulière est qu'elle rencontre $W_p^p$ en $h$ points, s'il est possible, par un choix convenable des paramètres, d'exprimer ces conditions sur toute la variété (ce qui nécessite certaines conditions d'intégrabilité) par l'incidence de G avec $G_1, G_2, \dots G_h$, nous pourrons considérer $V_{p+1}$ comme engendrée par ses sous-variétés $\alpha_{h+1} = C^{te}$, ... $\alpha_p = C^{te}$ qui sont des $V_{h+1}$ elles-mêmes $h$-développoïdes. Dans ce cas, une $V_{p+1}$ qui est $h$-développoide est le lieu d'une $V_{h+1}$ $h$-développoide qui varie en dépendant de $p - h$ paramètres.

Sur une telle variété $h$-développoïde, les surfaces $\alpha_i = C^{te}$ $(i \neq k < h)$ sont des développables, puisque $G_k$ rencontre G. Leurs arêtes de rebroussement engendrent une $V_p$ (ou $V_{p-1}$) qui est une arête de la développoïde. Une $h$-développoïde admet ainsi $h$ arêtes sur lesquelles les courbes $\alpha_i = C^{te}$ $(i \neq k < h)$ forment des réseaux.

Réciproquement, si sur l'arête d'une développoïde les courbes enveloppes des génératrices admettent des courbes associées formant réseau, la variété est une 2-développoïde en vertu de la définition des réseaux (les courbes associées sont telles que lorsqu'un point parcourt l'une d'elles, la tangente en ce point à la courbe de la première famille qui y passe admet une enveloppe). Si les courbes associées forment avec la première famille un système $h$-uple, la variété est une $h$-développoïde.

La recherche de variétés $h$-développoïdes se ramène ainsi à la détermination de systèmes $h$-uples de courbes tels que deux quelconques des familles forment un réseau [1].

Ceci permet de donner, pour montrer que les cônes ne répondent pas seuls à la définition, un exemple simple de $V_3$ de $S_5$ lieu de $\infty^2$ droites et 2-développoïde : Considérons dans $S_5$ la quadrique de Klein représentant les droites de $S_3$. Sur cette quadrique, le complexe des tangentes à une surface F de $S_3$ est représenté par une variété $V_3$ qui constitue l'exemple proposé de 2-développoïde. En effet, les tangentes en un point P à F forment un faisceau représenté par une génératrice rectiligne G de $V_3$. Quand P décrit F, on engendre ainsi $V_3$ comme lieu de droites dépendant de 2 paramètres. En particulier quand P décrit un asymptotique de F deux faisceaux voisins ont un rayon commun et la génératrice G correspondante décrit une développable. Les deux familles d'asymptotiques définissent les deux familles requises de développables de $V_3$, qui est bien une 2-développoïde [2].

---

[1] Pour la considération de tels systèmes $h$-uples, cf. ELIE CARTAN, *Leçons sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales.* Cours professé en 1936-1937.

[2] LUCIEN GODEAUX, Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1927, p. 812 et 1928, p. 31).

Comme exemple du cas où les arêtes, sans être réduites à un point, n'ont pas la dimension maxima, il nous suffira de citer la variété $V_{p+1}$ lieu des cordes des courbes d'une famille dépendant de $p - 2$ paramètres sur une $V_{p-1}$, car la $V_3$ lieu des cordes d'une courbe est évidemment 2-développoïde, chaque génératrice appartenant à deux cônes. Une telle $V_{p+1}$ est donc une 2-développoïde ayant $V_{p-1}$ pour arête.

### IV. — Raccordement des hypersurfaces.

Considérons dans $S_n$ une hypersurface lieu de droites dépendant de $n - 2$ paramètres et soit G une des génératrices. Cherchons en combien de points une autre hypersurface passant aussi par G doit lui être tangente pour que l'on soit assuré qu'elles ont même hyperplan tangent en tout point de G, c'est-à-dire qu'elles se raccordent le long de G. Notre problème peut encore être énoncé plus simplement ainsi : Etant donnée une droite G considérée comme appartenant à une hypersurface réglée, en combien de points de G pouvons-nous choisir arbitrairement l'hyperplan tangent (passant par G) pour que la loi de répartition des hyperplans tangents aux différents points de G soit complètement déterminée ?

Nous savons que si G est génératrice ordinaire de l'hypersurface, les hyperplans tangents enveloppent un cône rationnel de classe $n - 2$ ayant G pour sommet. Ce cône est entièrement défini par son sommet G et sa base dans un $S_{n-2}$ non sécant à G. De même si G est génératrice $p$-singulière de l'hypersurface, c'est-à-dire si l'hypersurface admet un $S_{p+1}$ tangent fixe tout le long de G, les hyperplans tangents enveloppent un cône rationnel ayant $S_{p+1}$ pour sommet et dont la classe est $k = n - 2 - p$. Ce cône est entièrement défini par son sommet $S_{p+1}$ et sa base dans un $S_k$ non sécant à G (car $p+1+k+1=n$).

Cette base dans $S_k$ est une enveloppe rationnelle d'hyperplans $S_{k-1}$ dépendant d'un paramètre, dont la classe est $k$. D'autre part, cette enveloppe n'est pas un cône, car si $S_{k-1}$ passait par un point fixe $\sigma$ de $S_k$, ceci signifierait que dans $S_n$ l'hyperplan tangent en un point variable sur G passe constamment par $S_{p+1}$ et $\sigma$ qui n'est pas dans $S_{p+1}$ (car $S_{p+1}$ et $S_k$ sont dépourvus de point commun) : il y aurait un $S_{p+2}$ tangent fixe et G serait $(p+1)$—singulière, ce que nous ne supposons pas.

Effectuons dans $S_k$ une transformation par polaires réciproques : L'enveloppe de $S_{k-1}$ à un paramètre se transforme en une courbe C. Cette courbe est rationnelle, d'ordre $k$. L'enveloppe n'étant pas un cône, son $S_{k-1}$ courant n'a aucun point fixe, de sorte que le point courant de C ne reste pas contenu dans un hyperplan fixe de $S_k$. Ceci signifie que C est normale. La courbe C rationnelle normale de $S_k$ est celle dont on peut ramener la représentation à la forme

$$x_0=1,\ x_1=t,\ x_2=t^2,\cdots,x_k=t^k.$$

Elle est entièrement définie par la donnée de $k+3$ points et est la courbe commune à toutes les hyperquadriques ayant $k-2$ de ces points comme points doubles et passant simplement par les 5 autres.

La donnée de l'hyperplan tangent en un point M de G équivaut à celle d'un point de C, mais, dans le problème qui nous occupe, nous ne pouvons pas choisir arbitrairement les hyperplans tangents en $k+3$ points de G. Nous avons vu en effet que lorsque M décrit G, l'hyperplan tangent enveloppe un cône rationnel dont les espaces générateurs sont en correspondance homographique (le paramètre de M sur G est en même temps le paramètre de l'hyperplan tangent dans son enveloppe). Il y a donc correspondance homographique entre le point M de G et le point M' de C qui représente l'hyperplan tangent en M. Le choix des hyperplans tangents en $k+3$ points de G conduira à une courbe C unique passant par $k+3$ points M' donnés ; mais sur la courbe C solution les points M' n'auront en général pas les mêmes invariants projectifs que les points M sur G.

Montrons que l'on peut au contraire choisir arbitrairement les hyperplans tangents en $k+2$ points de G, c'est-à-dire choisir arbitrairement $k+2$ couples M M'. C est alors l'intersection de toutes les hyperquadriques ayant $k-2$ des points M' comme points doubles et passant simplement par les quatres autres points M' en les admettant avec un rapport anharmonique égal à celui des quatre points M correspondants.

En effet, nous pouvons choisir la représentation paramétrique de C de façon que la correspondance homographique entre M et M' s'exprime par l'égalité des paramètres. Notre problème est alors ramené au suivant : Construire une courbe rationnelle normale de $S_k$ définie par un certain nombre de points munis de leurs paramètres.

Si la représentation de G est choisie de façon que $M_1 M_2 M_3 M_4 \ldots M_i$ aient pour paramètres $0, 1, \infty, \rho_4 \ldots \rho_i$, la courbe C devra être située sur toutes les hyperquadriques ayant les points $M'_j$ doubles ($j>3$ et $j \neq k$) et passant par $M'_1 M'_2 M'_3 M'_k$ simplement, ces points ayants sur ce cône du second ordre le rapport anharmonique $\rho_k$, ce qui détermine complètement ces quadriques. Ces quadriques, en nombre $i-3$, ont en commun, en dehors de l'espace linéaire défini par les $M'_j$ $(j>3)$, une variété à $k-(i-3)$ dimensions, qui sera une courbe rationnelle normale de $S_k$ lorsque $k-(i-3)=1$, ce qui exige $i=k+2$.

La représentation de C étant alors fixée, le point M′ correspondant au point courant M de G est bien déterminé par son paramètre, et l'hyperplan tangent en M est bien déterminé. Donc :

*La condition nécessaire et suffisante pour que deux hypersurfaces se raccordent le long d'une génératrice* G p-*singulière est la coïncidence des hyperplans tangents en* $k+2 = n-p$ *points de* G.

En particulier, si G est une *génératrice ordinaire,* il faut et il suffit que les hypersurfaces aient *même hyperplan tangent en* n *points* de G pour qu'elles se raccordent.

Les propriétés de la courbe rationnelle normale de $S_k$ nous permettent encore de donner un critère pour la détermination du degré de singularité d'une génératrice d'une hypersurface réglée : $h+1$ points quelconques de la courbe $(h \leq k)$ définissent un espace linéaire $S_h$ coupant au moins $h+1$ fois la courbe et dépendant de $h+1$ paramètres. Cependant il n'y a aucun de ces $S_h$ qui coupe la courbe en plus de $h+1$ points. En effet, un hyperplan joignant un $S_h$ qui contiendrait $h+2$ points de la courbe, à $k-1-h$ points de celle-ci, la couperait en $h+2+k-1-h = k+1$ points, et comme elle est d'ordre $k$ il la contiendrait tout entière.

Par conséquent, si G est une génératrice $p$-singulière de $V_{n-1}$, les hyperplans tangents aux points de G ont un $S_{p+1}$ fixe commun, et $h+2$ quelconques d'entre eux n'ont jamais un $S_{n-h-1}$ commun tant que $h < k$.

En particulier, si G est une génératrice ordinaire, $h+2$ quelconques des hyperplans tangents n'ont jamais un $S_{n-h-1}$ commun tant que $h < n-2$, mais naturellement des hyperplans tangents en nombre quelconque ont toujours G en commun.

Ceci peut encore s'énoncer sous la forme suivante qui nous sera utile :

*Etant donnée une génératrice* G *d'une hypersurface réglée* $V_{n-1}$, *si l'on peut trouver* $h+2$ *hyperplans tangents en autant de points de* G *ayant en commun un* $S_{p+1}$ *avec* $p \geq n-h-2$, *alors tous les hyperplans tangents en des points de* G *passent par ce même* $S_{p+1}$ *et la génératrice est* p-*singulière.*

**V. — Variété focale propre des congruences de droites.**

Considérons dans l'espace à $n$ dimensions $S_n$ une congruence engendrée par une droite G dépendant de $n-1$ paramètres $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$. Représentons la droite G par un de ses points M et un vecteur $\vec{u}$ porté par elle. Le point courant P de G est donc défini par

$$\vec{P} = \vec{M} + \rho\vec{u},$$

où $\vec{M}$ et $\vec{u}$ dépendent de $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$.

On appelle foyer de la droite G un point tel que lorsque G décrit la congruence, elle reste tangente au lieu de son foyer.

Lorsque G décrit la congruence, en prenant pour $\rho$ une fonction de $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$, P décrit une hypersurface dont l'hyperplan tangent est défini par le lieu des vecteurs $\vec{PT}$ :

$$\vec{PT} = \sum_1^{n-1} \lambda_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i} = \sum_1^{n-1} \lambda_i \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_i} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \vec{u} \right),$$

ou encore, en utilisant la notation du produit extérieur :

$$\left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1}\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}}\ \vec{PT} \right) = 0.$$

En particulier si la fonction $\rho$ définit un foyer F de G, la droite G figure parmi les tangentes en F, c'est-à-dire que l'un des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{FT}}$ est le vecteur $\vec{u}$ :

$$\vec{u} = \sum_1^{n-1} \lambda_i \frac{\partial \vec{\mathrm{F}}}{\partial \alpha_i} = \sum_1^{n-1} \lambda_i \left( \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \alpha_i} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \vec{u} \right),$$

qui s'écrit encore

$$\left( \frac{\partial \vec{\mathrm{F}}}{\partial \alpha_1} \, \frac{\partial \vec{\mathrm{F}}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \vec{\mathrm{F}}}{\partial \alpha_{n-1}} \, \vec{u} \right) = 0,$$

soit

$$\vec{u} = \sum_1^{n-1} \lambda_i \left( \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \alpha_i} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_i} \right),$$

$$\left( \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_1}, \; \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \alpha_2} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \alpha_{n-1}} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_{n-1}}, \vec{u} \right) = 0.$$

Si $\vec{\mathrm{M}}$ et $\vec{u}$ ont respectivement pour composantes $m_1 \, m_2 \ldots m_n$, $u_1 \, u_2 \ldots u_n$,

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_2} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_{n-1}} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_{n-1}} & u_1 \\ \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_2} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_{n-1}} + \rho \frac{\partial u_2}{\alpha_{n-1}} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial m_n}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial m_n}{\partial \alpha_2} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial m_n}{\partial \alpha_{n-1}} + \rho \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_{n-1}} & u_n \end{array} \right\| = 0.$$

Cette équation est un polynôme en $\rho$ d'ordre $n-1$ dont les $n-1$ racines donnent $n-1$ foyers situés sur la droite G. Lorsque G décrit la congruence les foyers décrivent une variété, en général hypersurface, qui peut être réductible, que nous appellerons hypersurface focale propre, à laquelle G reste tangente en chacun de ses foyers.

Comme les droites de $S_n$ dépendent de $2n-2$ paramètres, il est clair que les droites de la congruence ne vérifient pas d'autres conditions que ces $n-1$ conditions de contact.

*Une congruence est donc formée des droites qui touchent en* n — 1 *points (foyers) une hypersurface (focale propre).*

Pour que nos énoncés englobent la totalité des éventualités possibles, il nous est nécessaire d'attirer l'attention sur le fait que le mot «hypersurface» que nous employerons toujours pour désigner la focale doit être pris avec sa signification tangentielle. Le noyau ponctuel de cette enveloppe peut ne pas avoir la dimension effective $n-1$, c'est-à-dire qu'une racine $\rho$ de l'équation focale peut ne pas contenir $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ sous forme essentielle ; mais dans un tel cas, la génératrice G est contenue dans l'un des hyperplans tangents en F à la focale. Bien que, dans ce cas, par un point F de la focale passent une infinité de droites de la congruence, il n'y en a qu'un nombre fini qui sont dans un des hyperplans tangents en F comme dans le cas général : un élément de contact de la focale appartient à un nombre fini de droites G de la congruence.

Avec cette convention de langage, l'expression «une variété $V_k$ à $k$ dimensions tracée sur l'hypersurface focale», dont le sens ne présente aucune obscurité dans le cas où la variété focale a la dimension $n-1$, doit être interprétée, dans les autres cas, comme désignant l'enveloppe d'une famille d'hyperplans tangents à la focale et dépendant de $k$ paramètres (et son noyau ponctuel aura une dimension qui pourra dépasser celle de la focale).

Nous allons obtenir les propriétés d'une congruence de droites en étudiant les variétés réglées extraites de celle-ci, c'est-à-dire engendrées par des droites qui appartiennent à la congruence.

Considérons une droite G de la congruence, sur laquelle les foyers sont $F_1$, $F_2$, ... $F_{n-1}$. En donnant à G, qui reste dans la congruence, une variation dépendant de $k$ paramètres, elle engendre une $V_{k+1}$ extraite de la congruence et les foyers décrivent des $V_k$ tracées sur l'hypersurface focale. Comme l'élément de contact $F_1$ de l'hypersurface focale n'appartient qu'à un nombre fini de droites de la congruence, il suffira que des conditions assez générales de continuité soient réalisées pour que l'on sache quelle est la droite de la congruence qui s'appuie à l'hypersurface focale en un élément de contact voisin de $F_1$ et qui tend vers G lorsque cet élément tend vers $F_1$. Il en résulte que, localement au moins, la variété $V_{k+1}$ est bien déterminée par la connaissance de la variété $V_k$ lieu de $F_1$ sur l'hypersurface focale. Nous appellerons une telle $V_k$ *la directrice* de $V_{k+1}$, et plus précisément nous désignerons les $n - 1$ variétés $V_k$ tracées sur l'hypersurface focale qui peuvent être arbitrairement substituées l'une à l'autre pour définir la variété $V_{k+1}$ extraite de la congruence, sous le nom de *directrices locales associées*.

### VI. — Propriétés des hypersurfaces extraites de la congruence.

Considérons une hypersurface $V_{n-1}$ extraite de la congruence et définie au voisinage de la génératrice G par une directrice locale $V_{n-2}$. L'hyperplan tangent à $V_{n-1}$ au foyer $F_i$ de G situé sur $V_{n-2}$ contient l'espace $S_{n-2}$ tangent en $F_i$ à la directrice et la génératrice G. Si G et $V_{n-1}$ sont les plus générales possibles, $S_{n-2}$ et G définissent complètement cet hyperplan tangent, et comme la directrice est tracée sur l'hypersurface focale, $S_{n-2}$ est contenu dans l'hyperplan tangent en $F_i$ à l'hypersurface focale. Cet hyperplan contient aussi G par définition du foyer; il en résulte qu'il est confondu avec le précédent :

*L'hyperplan tangent à une hypersurface extraite de la congruence en un foyer est l'hyperplan tangent à l'hypersurface focale.*

Comme sur la droite G il y a $n - 1$ foyers, pour que deux hypersurfaces extraites de la congruence se raccordent le long de G il faut et il suffit qu'elles soient tangentes en un point de G qui ne soit pas foyer.

Remarquons encore que si G est une droite générique de la congruence les $n - 1$ hyperplans tangents focaux n'ont en commun que la droite G, et cette droite est par conséquent génératrice ordinaire sur les hypersurfaces extraites de la congruence ayant des directrices génériques.

Il en résulte que, pour que G soit génératrice singulière de l'hypersurface extraite, il faut et il suffit que le raisonnement précédent tombe en défaut pour un des foyers de G, c'est-à-dire que l'une des directrices locales associées soit tangente à G. Plus généralement, *pour que* G *soit génératrice* p*-singulière de l'hypersurface extraite, il faut et il suffit que* p *des directrices locales associées soient tangentes à* G. Les points d'indétermination de l'hyperplan tangent sont alors les $p$ foyers correspondant à ces $p$ directrices.

Proposons-nous maintenant de déterminer les développoïdes extraites de la congruence. Comme un point d'indétermination sur une génératrice est nécessairement un foyer, l'arête d'une développoïde extraite de la congruence est nécessairement une de ses directrices, par exemple la directrice $V_{n-2}$ relative au foyer $F_i$. Nous avons vu également qu'une hypersurface développoïde est le lieu d'une surface développable qui varie en dépendant de $n-3$ paramètres, l'arête de rebroussement de cette développable engendrant l'arête de l'hypersurface. La directrice $V_{n-2}$ doit donc être le lieu d'une courbe dépendant de $n-3$ paramètres, telle que la génératrice G de la congruence lui reste constamment tangente.

Or, une droite qui décrit la congruence définit sur chacune des nappes de l'hypersurface focale propre un champ d'éléments de contact qui, sous des conditions convenables de régularité, admettra des courbes intégrales. Chacune de ces courbes est l'arête de rebroussement d'une développable extraite de la congruence. *Une droite* G *de la congruence est ainsi génératrice commune à* n — 1 *surfaces développables extraites de la congruence*, dont les arêtes de rebroussement $\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{n-1}$ tracées sur l'hypersurface focale sont tangentes à G en $F_1\ F_2 \dots F_{n-1}$ respectivement.

Il en résulte *qu'il y a* n — 1 *familles de développoïdes contenant une génératrice* G ; ce sont les hypersurfaces ayant une de leurs directrices engendrée par des courbes $\Gamma_i$ qui dépendent de $n-3$ paramètres. Les hyperplans tangents aux développoïdes de la $k$-ème famille (dont une directrice est lieu de courbes $\Gamma_k$) en un point qui décrit G sont confondus avec l'hyperplan tangent à l'hypersurface focale en tous les points $F_i$ autres que $F_k$ qui est sur l'arête. Il en résulte que *le plan tangent fixe le long de* G *est le même pour toutes les développoïdes d'une même famille :* c'est le plan commun aux $n-2$ hyperplans tangents à l'hypersurface focale en les $n-2$ foyers de G autres que celui qui décrit l'arête.

Puisqu'il y a dans la définition d'une développoïde extraite de la congruence une fonction arbitraire de $n-3$ arguments, on peut se demander s'il n'y a pas moyen de choisir cette fonction de façon à obtenir une 2-développoïde extraite de la congruence et contenant la génératrice G donnée de celle-ci. S'il existe une telle 2-développoïde, ses génératrices qui sont 2-singulières restent tangentes à deux directrices associées qui sont les deux arêtes, de sorte que cette 2-développoïde appartient à la fois à deux familles de développoïdes. En supposant, pour fixer les idées, que les arêtes sont les lieux de $F_1$ et de $F_2$, ceci veut dire que la première de ces deux arêtes, qui est un lieu de courbes $\Gamma_1$, doit être en outre lieu de courbes associées aux courbes $\Gamma_2$, puisqu'elle est la directrice associée à la seconde arête. Par tout point de l'hypersurface focale voisin de $F_1$ passent une courbe $\Gamma_1$ et une courbe $C_2$, et en particulier par $F_1$ passent une courbe $\overline{\Gamma_1}$ et une courbe $\overline{C_2}$ : Mais il n'est en général pas possible de trouver une surface lieu de courbes $\Gamma_1$ et de courbes $C_2$, c'est-à-dire que la surface lieu des courbes $C_2$ qui s'appuient sur $\overline{\Gamma_1}$ et la surface lieu des courbes $\Gamma_1$ qui s'appuient sur $\overline{C_2}$ ont en commun $\overline{\Gamma_1}\,\overline{C_2}$ et éventuellement d'autres courbes, mais elles ne coïncident pas.

Il en résulte que *par une génératrice G générique d'une congruence il ne passe aucune 2-développoïde extraite de la congruence.*

### VII. — Congruence de $S_n$ considérée comme engendrant une variété $(n-1)$—développoïde.

Supposons l'espace $S_n$, dans lequel se trouve la congruence de droites G étudiée, plongé dans un espace linéaire plus ample $S_r$. Nous pouvons alors considérer $S_n$ comme une variété réglée, lieu des génératrices G. Appliquons-lui les méthodes d'étude qui nous ont servi pour les variétés réglées générales du § 1. Nous associons au point M qui décrit G les positions $M_1\ M_2\ \ldots\ M_{n-1}$ que prend ce point quand on fait varier isolément chacun des paramètres $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$. Les points $M_1 M_2 \dots M_{n-1}$ décrivent des droites $G_1 G_2 \dots G_{n-1}$ de $S_n$ et l'espace linéaire $S_{n-2}$ qui unit les $n - 1$ points $M_i$ décrit dans $S_n$ une hypersurface $W_{n-1}^{n-1}$ rationnelle d'ordre $n - 1$.

L'hypersurface $W_{n-1}^{n-1}$ est coupée par G en $n - 1$ points, de sorte que G est une génératrice ($n - 1$)-singulière. La variété réglée $S_n$ est donc une ($n - 1$) -développoïde et son espace tangent en un point M de G ne varie pas quand M décrit G ; c'est évidemment $S_n$ lui-même. Les $n - 1$ points d'indétermination de G décrivent, lorsque G décrit $S_n$, $n - 1$ hypersurfaces de $S_n$ qui sont ses arêtes. Nous savons que G reste tangente aux différentes arêtes ; nous retrouvons donc sous un autre aspect l'hypersurface focale de la congruence.

*Les* n — 1 *nappes de l'hypersurface focale d'une congruence de* $S_n$ *sont les* n — 1 *arêtes de* $S_n$ *considéré comme constituant une variété* (n — 1) *-développoïde.*

Dans la conception actuelle de la congruence, les développables et développoïdes extraites sont immédiatement en évidence, puisque nous avons vu qu'une ($n - 1$) -développoïde est de $n - 1$ façons différentes le lieu d'une surface développable.

Pour étudier une variété générale extraite de la congruence, de dimension $k$, par exemple, nous devons supposer les paramètres $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ liés par $n - k$ relations. Dans ces conditions les points $M_1 M_2 \dots M_{n-1}$ ne sont plus linéairement indépendants, mais, au contraire, ils définissent un $S_{k-2}$ qui décrit une $W_{k-1}^{k-1}$ appartenant à $W_{n-1}^{n-1}$. En particulier, les $W_{n-2}^{n-2}$ associées à la génératrice G dans les différentes hypersurfaces extraites de la congruence sont tracées sur l'hypersurface $W_{n-1}^{n-1}$, et l'hyperplan tangent en M est la limite de l'hyperplan qui joint G à un $S_{n-3}$ de l'espace $M_1 M_2 \dots M_{n-1}$. Il en résulte que pour que l'hyperplan tangent en M soit indépendant de l'hypersurface extraite, il faut et il suffit que l'hyperplan G $S_{n-3}$ ait une limite indépendante du choix de $S_{n-3}$ dans $M_1 M_2 \ldots M_{n-1}$ ; autrement dit, il faut et il suffit que $M_1 M_2 \ldots M_{n-1}$ coupe G. Alors M est un foyer. Nous voyons ainsi *que les deux définitions du foyer* de G :

*a)* Point de contact de G avec son enveloppe ;

*b)* Point où toutes les hypersurfaces extraites ont même hyperplan tangent, *sont équivalentes*.

## VIII. — Droites spéciales. Hypersurfaces focales singulières.

Après avoir examiné les propriétés relatives à une génératrice G générique de la congruence, voyons s'il existe des génératrices particulières pour lesquelles ces propriétés sont modifiées d'une façon essentielle. Les propriétés que nous avons rencontrées tirent leur origine du fait que sur une droite G il y a $n - 1$ foyers, qui peuvent d'ailleurs ne pas être tous distincts. Est-il admissible que pour certaines droites de la congruence ce nombre soit dépassé ?

Supposons que sur G existent $n$ foyers, c'est-à-dire $n$ points en lesquels toutes les hypersurfaces extraites de la congruence ont même hyperplan tangent. Nous savons alors que ces hypersurfaces se raccordent tout le long de G : tous les points de G sont alors des foyers. Il est clair qu'un tel cas sera réalisé si G est tracée sur l'hypersurface focale propre, mais une telle circonstance ne se présentera que pour des congruences très particulières, car dans une congruence générale, l'hypersurface focale propre ne contient aucune droite.

Admettons d'abord que G ait seulement $n - 1$ foyers propres et voyons s'il est possible qu'en un point M distinct des foyers propres $F_1 F_2 \ldots F_{n-1}$, toutes les hypersurfaces extraites aient même hyperplan tangent. Parmi ces hypersurfaces extraites figurent toutes les développoïdes dont l'arête contient $F_i$. Les hyperplans tangents à ces développoïdes en M ont un plan commun, le plan commun aux hyperplans $H_1 H_2 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_{n-1}$ tangents à l'hypersurface focale propre en $F_1 F_2 \ldots F_{i-1} F_{i+1} \ldots F_{n-1}$. Soit $P_i$ ce plan, qui doit évidemment appartenir à l'hyperplan H tangent commun en M. Nous avons ainsi $n-1$ plans $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$ qui doivent appartenir à H. Naturellement, pour G générique ces plans ne sont pas dans un même hyperplan et le point M n'existe pas. Une importante propriété des plans $P_i$ est la suivante :

*Si parmi les plans* $P_i$ *on en peut trouver* k *situés dans un même* $S_k$ *sans qu'il y en ait* $k-1$ *dans un même* $S_{k-1}$, *alors, tous sont situés dans cet* $S_k$ *qui est commun à* $H_1 H_2 \ldots H_{n-1}$.

Vérifions cette propriété pour $k=2$, en supposant, par exemple, que $P_1$ et $P_2$ soient confondus en un même plan P : P appartient à $H_2 \ldots H_{n-1}$ par définition de $P_1$ et à $H_1$ par définition de $P_2$. Les hyperplans $H_1 H_2 \ldots H_{n-1}$ passent tous par P, et tous les plans $P_i$ sont confondus avec P.

Supposons maintenant $k > 2$. On peut toujours supposer, quitte à permuter les indices $1, 2, \ldots n-1$, que ce sont les plans $P_1 P_2 \ldots P_k$ qui sont dans un même $S_k$. Tous les hyperplans $H_i$ pour lesquels $i > k$ contiennent tous les plans $P_1 \ldots P_k$. Tous les hyperplans $H_i$ pour lesquels $i \leq k$ en contiennent $k-1$. Comme, par hypothèse, $k-1$ plans $P_i$, et à fortiori les $k$ plans $P_i$, ne sont pas dans un même $S_{k-1}$, l'espace linéaire minimum qui les contient est $S_k$, qui appartient ainsi à tous les hyperplans $H_i$. Alors un plan $P_i$ pour lequel $i > k$ est aussi un plan quelconque de $S_k$ passant par G.

Ainsi pour qu'il existe, associé au point M, un hyperplan H contenant tous les plans $P_i$, il faut que $k$ d'entre eux ($2 \leq k \leq n-1$) soient dans un même $S_k$ qui les contiendra tous, et cet $S_k$ sera alors commun à $H_1 \dots H_{n-1}$ et H, quel que soit d'ailleurs M sur G. Autrement dit, une condition nécessaire pour que G soit lieu de foyers est que les hyperplans tangents à l'hypersurface focale en ses foyers propres aient un $S_k$ commun ($k \geq 2$).

L'hypothèse la moins restrictive est évidemment $k = 2$.

Nous appellerons *droite spéciale* de la congruence *une génératrice telle que les* n — 1 *hyperplans tangents focaux propres aient un plan commun.*

La condition pour que $n - 1$ hyperplans de $S_n$ aient un plan commun s'exprime au moyen d'une seule relation : *les droites spéciales d'une congruence dépendent donc de* n — 2 paramètres.

Soit G une droite spéciale de la congruence : une hypersurface extraite de la congruence et contenant G admet en $F_1 F_2 \dots F_{n-1}$ les hyperplans tangents $H_1 H_2 \dots H_{n-1}$ qui passent par un même plan P. Or nous avons vu à la fin du § IV que dans ces conditions tous les hyperplans tangents à l'hypersurface en des points de G passent aussi par P et G est génératrice singulière.

*Les droites spéciales sont des génératrices singulières pour les hypersurfaces extraites de la congruence qui les contient.*

Nous avons vu également que deux hypersurfaces qui ont en commun une génératrice singulière G, et qui ont les mêmes hyperplans tangents $H_1$ $H_2$ ... $H_{n-1}$ en $n - 1$

points $F_1 F_2 \dots F_{n-1}$ de cette droite, se raccordent tout le long de la droite. Il en résulte que :

*En un point quelconque d'une droite spéciale, toutes les hypersurfaces extraites de la congruence ont le même hyperplan tangent.*

Une droite spéciale est donc un lieu de foyers, et la condition nécessaire que nous avions rencontrée pour qu'une droite soit lieu de foyers est aussi suffisante. Nous appellerons de tels foyers, qui ne sont pas situés sur l'hypersurface focale propre, *foyers singuliers*. Le lieu des foyers singuliers est une hypersurface réglée, puisque les droites spéciales dépendent de $n - 2$ paramètres : nous l'appellerons *l'hypersurface focale singulière*. On peut d'ailleurs remarquer que cette hypersurface, qui est extraite de la congruence, admet toutes ses génératrices, qui sont spéciales, pour génératrices singulières : c'est donc une *développoïde*.

Notre raisonnement suppose essentiellement que G contient $n - 1$ foyers propres et ce nombre seulement. Or il peut arriver, sans que G soit tracée sur l'hypersurface focale propre, qu'elle soit $n$ fois tangente à cette hypersurface. Il y a alors sur G $n$ foyers propres, et les hypersurfaces extraites de la congruence contenant G ont même hyperplan tangent en chacun des $n$ foyers propres. Toutefois leur raccordement le long de G a une signification singulière, car les génératrices voisines de G sur une hypersurface extraite n'ont que $n-1$ foyers propres, et G est de $n$ façons différentes la limite d'une telle génératrice, suivant que l'on fait tendre ses $n - 1$ foyers vers $n - 1$ des points $F_1 F_2 \dots F_n$ de G, le point $F_i$ restant se présentant alors comme un contact accidentel. Ceci montre qu'il y a $n$ nappes de l'hypersurface extraite qui se croisent en G.

Ainsi, *les droites qui ont* n *contacts avec l'hypersurface focale propre sont des lieux de foyers singuliers : elles sont multiples d'ordre* n *pour les hypersurfaces extraites de la congruence.*

Comme imposer à une droite de la congruence un contact supplémentaire avec l'hypersurface focale propre est une condition qui s'exprime au moyen d'une seule relation, il y a généralement dans la congruence des droites qui touchent $n$ fois l'hypersurface focale propre et qui dépendent de $n - 2$ paramètres. Leur lieu est une hypersurface réglée extraite de la congruence et que nous appellerons la *seconde hypersurface focale singulière.*

Quand on considère la congruence de $S_n$ comme engendrant une variété $(n-1)$-développoïde, les foyers d'une génératrice G se présentent comme les limites des $n - 1$ points communs à G et à l'hypersurface $W_{n-1}^{n-1}$ associée. Nous obtiendrons donc les droites lieux de foyers lorsque G est tout entière située sur $W_{n-1}^{n-1}$. Une telle circonstance peut se produire de deux façons différentes, car sur $W_{n-1}^{n-1}$ il y a deux catégories de génératrices rectilignes : celles qui sont situées dans ses différents $S_{n-2}$ et celles qui coupent tous les $S_{n-2}$ en un point.

Lorsque G est située dans un $S_{n-2}$ joignant $M_1 M_2 \ldots M_{n-1}$ correspondant à M, pour toute hypersurface extraite de la congruence, l'hyperplan tangent en un point P de G est la limite de l'hyperplan joignant G à un certain $S_{n-3}$ contenu dans le $S_{n-2}$ associé à P, qui ne rencontre pas G en général, sauf lorsque P vient en M. L'hyperplan tangent à l'hypersurface extraite est donc en général déterminé pour tout point P de G autre que M. Au contraire, le $S_{n-2}$ associé à M contenant G, tout $S_{n-3}$ de ce $S_{n-2}$ rencontre G, de sorte que M est point d'indétermination pour toute hypersurface extraite, et G est singulière sur toute hypersurface extraite : la droite G est une droite spéciale.

Lorsque G est située sur $W_{n-1}^{n-1}$ dont elle rencontre tous les $S_{n-2}$ en un point, il est aisé de voir, par un raisonnement identique au précédent, qu'en aucun point de G l'hyperplan tangent à une hypersurface extraite de la congruence n'est en général indéterminé. G est donc en général génératrice ordinaire pour toute nappe d'hypersurface extraite qui la contient. La génératrice G appartient donc à la seconde hypersurface focale singulière.

Ainsi, *les droites spéciales de la congruence sont limites de droites situées dans un* $S_{n-2}$ *de leur* $W_{n-1}^{n-1}$ *associée, et les autres droites focales singulières sont limites de droites unisécantes à tous les* $S_{n-2}$ *de leur* $W_{n-1}^{n-1}$ *associée.*

Lorsqu'on étudie les génératrices de la congruence issues d'un point P de $S_n$, si P est situé sur la seconde hypersurface focale singulière, la droite focale qui passe en P étant multiple d'ordre $n$ pour toute hypersurface extraite qui passe en P, est multiple d'ordre $n$ pour le groupe des génératrices issues de P, car le cône circonscrit de sommet P à l'hypersurface focale propre admet le long de la droite focale une singularité algébroïde constituée de $n$ nappes linéaires. Si P est situé sur la développoïde focale singulière, la droite spéciale qui passe en P est double dans le groupe des génératrices issues de P, car le cône circonscrit de sommet P à l'hypersurface focale propre admet le long de la droite spéciale une singularité algébroïde constituée de $n - 1$ nappes linéaires ayant un plan tangent commun.

Donc, *dans le groupe de droites de la congruence issues d'un point, les droites spéciales, s'il y en a, sont doubles, et les autres droites focales singulières sont* n-*uples.*

Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer que la notion de variété focale était essentiellement tangentielle. L'existence d'hypersurfaces focales singulières lieux d'éléments multiples de la figure accentue encore ce caractère.

En résumé : *Le lieu des foyers d'une congruence se compose des trois variétés suivantes :*

a) *La variété focale propre, que les droites de la congruence touchent en* n — 1 *points ;*

b) *L'hypersurface réglée lieu des droites qui touchent la variété précédente en* n *points ;*

c) *L'hypersurface développoïde lieu des droites telles que les hyperplans tangents à la focale propre en leurs foyers propres aient un plan commun.*

### IX. — Démonstrations analytiques des propriétés les plus importantes des paragraphes précédents.

Nous avons représenté le point courant P de la droite G de la congruence par

$$\vec{P} = \vec{M} + \rho \vec{u},$$

où $\vec{M}$ et $\vec{u}$ sont fonctions des $n-1$ paramètres $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$, et nous avons trouvé les $n-1$ foyers propres comme solutions de l'équation du $(n-1)^{ème}$ ordre :

$$\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}} \vec{u} \right| = 0. \tag{1}$$

Lorsque G admet $n$ foyers propres, cette équation admet $n$ racines ; elle est donc identiquement vérifiée.

Considérons une hypersurface extraite : on peut la définir par

$$\alpha_{n-1} = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}).$$

Posons alors

$$\frac{\delta \vec{P}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Si $\overrightarrow{PT}$ désigne un vecteur quelconque tangent en P à l'hypersurface extraite, l'équation de l'hyperplan tangent s'écrit

$$\left|\frac{\delta\vec{P}}{\partial\alpha_1}\;\frac{\delta\vec{P}}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\delta\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|=0;$$

en développant le premier vecteur

$$\left|\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_1}\;\frac{\delta\vec{P}}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\delta\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}\left|\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-1}}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|=0,$$

car dans le second terme le premier vecteur se retranche, avec un coefficient convenable, de tous les $\frac{\delta\vec{P}}{\partial\alpha_i}$ pour les ramener aux $\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_i}$. En continuant ainsi sur les autres vecteurs, l'équation de l'hyperplan tangent s'écrit

$$\left|\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_1}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|+$$
$$+\sum_1^{n-2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\left|\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{i-1}}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-1}}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{i+1}}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|=0,$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_1}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|+\\&+\sum_1^{n-2}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\left|\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{i-1}}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{i+1}}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-1}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

avec

$$\varepsilon_i=(-1)^{n-2-i}.$$

Pour que cet hyperplan ne dépende pas de $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, il faut que

$$\left|\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{i-1}}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{i+1}}\cdots\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-2}}\;\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha_{n-1}}\;\vec{u}\;\overrightarrow{PT}\right|=0,$$

c'est-à-dire que l'hyperplan tangent doit contenir tous les vecteurs $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_k}$ autres que $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i}$, et par conséquent, pour qu'il soit indépendant de $\varphi$, il faut qu'il contienne tous les vecteurs $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i}$, et $\vec{u}$. Ces vecteurs ne sont dans un hyperplan que lorsque (1) est vérifiée, c'est-à-dire quand P est un foyer.

Réciproquement si P est un foyer, en mettant (1) sous la forme

$$\vec{u} = \sum_1^{n-1} \lambda_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i}, \tag{3'}$$

l'équation (2) de l'hyperplan tangent se réduit à

$$\lambda_{n-1} \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}} \vec{PT} \right| +$$

$$+ \sum_1^{n-2} \varepsilon_i \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \lambda_i \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{i-1}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{i+1}} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i} \vec{PT} \right| = 0,$$

ou

$$\left(\lambda_{n-1} - \sum_1^{n-2} \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}\right) \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}} \vec{PT} \right| = 0.$$

L'hyperplan tangent est bien indépendant de $\varphi$. Il est d'ailleurs indéterminé pour les variétés particulières qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\lambda_{n-1} - \sum_1^{n-2} \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0. \tag{4}$$

Cette équation détermine les développoïdes extraites de la congruence, dont l'arête est située sur celle des nappes focales pour laquelle on a déterminé, au moyen de (3), les coefficients $\lambda_i$.

Pour que $\varphi$ définisse une 2-développoïde extraite de la congruence, il faut et il suffit que cette fonction vérifie deux équations (4) dans lesquelles les coefficients sont calculés pour deux nappes focales. Or un tel système de deux équations aux dérivées partielles n'est généralement pas intégrable, et la condition d'intégrabilité est d'ailleurs classique. Il n'y a donc pas en général plus de 2-développoïdes extraites.

Examinons pour terminer comment se présente l'équation (2) lorsque la génératrice est une droite spéciale. M décrit une hypersurface quelconque de $S_n$ et nous pouvons toujours supposer la représentation paramétrique choisie de façon que le plan fixe par lequel passent tous les hyperplans tangents soit celui des vecteurs $\vec{u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}}$. La condition pour que G soit spéciale s'écrit alors

$$\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}} \vec{u} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} \right| +$$
$$+ \sum_1^{n-2} \varepsilon_i \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{i-1}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{i+1}} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}} \vec{u} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} \right| \equiv 0,$$

l'identité ayant lieu par rapport à $\rho$ et $\varphi$. Les coefficients des dérivées partielles s'écrivent

$$\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{i-1}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{i+1}} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_{n-1}} \vec{u} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} \right| \equiv 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n-2),$$

ce qui nécessite

$$\left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_{n-1}} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} \vec{u} \right| = 0.$$

Comme par hypothèse $\vec{u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}}$ définissent le plan tangent fixe, $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_{n-1}}$ est dans ce plan :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_{n-1}} = \lambda \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} + \mu \vec{u}.$$

Moyennant cette condition, notre identité se réduit à

$$\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}} \, \vec{u} \, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} \right| \equiv 0.$$

L'un au moins des vecteurs $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i}$ figure effectivement dans cette indentité, sinon $\vec{u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}}$ seraient colinéaires et ne définiraient pas le plan tangent fixe; par un changement éventuel de notations, on peut supposer que c'est $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}}$ :

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}} = \sum_1^{n-3} \xi_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_i} + \xi_{n-2} \vec{u} + \xi_{n-1} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}}.$$

Les $\xi$ sont des fonctions de $\rho$ en général.

Comme

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_{n-1}} = (1 + \lambda\rho) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} + \mu\rho \vec{u},$$

il suffit de remplacer dans l'équation (2) qui représente l'hyperplan tangent, les vecteurs $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}}$ et $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}}$ par leurs expressions précédentes, pour obtenir, à un facteur numérique près qui dépend de $\rho$ et de $\varphi$,

$$\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-3}} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_{n-1}} \, \vec{u} \, \overrightarrow{PT} \right| = 0.$$

Ainsi, le seul fait que cet hyperplan passe par un plan fixe entraîne bien qu'il est indépendant de $\varphi$. Si nous portons aussi les expressions de $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-2}}$ et $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_{n-1}}$ dans l'équation aux foyers (1), elle devient manifestement une identité : une droite spéciale est bien un lieu de foyers.

# CHAPITRE II

## PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CONGRUENCES LINÉAIRES.

Une congruence de l'espace à $r$ dimensions est *algébrique* lorsque les génératrices de la congruence issues d'un point arbitrairement variable sont construites algébriquement à partir de ce point. Il revient au même de dire que les coordonnées plückeriennes généralisées d'une droite qui décrit la congruence sont liées par $r-1$ relations algébriques. Les variétés focales propre et singulières d'une congruence algébrique sont évidemment des variétés algébriques, et toute congruence dont la focale propre est algébrique est une congruence algébrique.

Nous appellerons *ordre* d'une congruence algébrique le nombre de génératrices de la congruence qui passent par un point générique de $S_r$. En particulier, nous dirons qu'une congruence est *linéaire* lorsqu'elle est algébrique d'ordre un.

L'ensemble des droites de la congruence situées dans un hyperplan générique engendre une variété à $r-2$ dimensions : $V^m_{r-2}$, dont l'ordre $m$ sera appelé la *première classe* de la congruence.

Plus généralement, l'ensemble des droites de la congruence situées dans un espace linéaire $S_{r-h}$ à $r-h$ dimensions génériques est une figure réglée à $r-1-2h$ paramètres, c'est-à-dire une variété $V^{m_h}_{r-2h}$ dont l'ordre $m_h$ sera appelé la h-ème *classe* de la congruence.

La variété $V^{m_h}_{r-2h}$ a d'ailleurs effectivement la dimension $r-2h$ et non une dimension moindre; sinon, par un point générique de cette variété passeraient une infinité de droites de la congruence; ce point serait foyer singulier et toute droite de la congruence serait singulière, ce qui est absurde.

### I. — Dimensions des variétés focales

Nous dirons qu'une *congruence* est *à foyers distincts* lorsque, pour une droite *générique* de la congruence, l'équation aux $r - 1$ foyers n'admet aucune racine multiple. L'existence de congruences qui ne vérifient pas cette condition est immédiatement mise en évidence dans $S_3$ par la considération des tangentes à une surface donnée le long d'une courbe tracée sur celle-ci.

*Si une congruence de* $S_r$ *est à foyers distincts, la variété focale propre est à au moins* $r - 2$ *dimensions.*

Ce théorème est évident dans $S_3$, car les seules congruences ayant une focale propre ponctuelle sont des assemblages d'un nombre fini de gerbes, et sur tout rayon les deux foyers sont confondus.

Dans $S_4$ ce théorème signifie qu'une congruence à foyers distincts ne peut pas avoir pour focale propre une courbe : en effet cette courbe aurait des trisécantes dépendant de trois paramètres, ce qui est visiblement absurde, les cordes d'une courbe ne dépendant que de deux paramètres.

Dans $S_5$ ce théorème signifie qu'une congruence à foyers distincts ne peut avoir pour focale propre une surface; il faudrait en effet que toute corde de la surface fût tétrasécante : une section hyperplane serait alors une courbe dont toute corde est tétrasécante. Or une courbe dont toute corde est trisécante (et à fortiori tétrasécante) est plane [1]. La surface dont toute section hyperplane

[1] Cf. L. GODEAUX, *Cours de Géométrie supérieure*, fasc. IV, § 7, p. 7 (Liége, Bourguignon, 1941).

est plane est une surface de $S_3$. Alors elle admet bien des tétrasécantes dépendant de quatre paramètres, mais leur lieu est $S_3$, et non une congruence.

Nous allons maintenant raisonner par récurrence et supposer le théorème vrai pour les dimensions inférieures à $r$. Moyennant cette hypothèse, nous devrons montrer que dans $S_r$ on ne peut pas trouver de variété $V_{r-3-\lambda}$ $(\lambda \geq 0)$ à $r - 3 - \lambda$ dimensions, admettant une congruence de $(r - 1)$ -sécantes. A cet effet, coupons une telle variété par un hyperplan générique $S_{r-1}$ : nous obtiendrons une variété $V_{r-4-\lambda}$ qui admettra des $(r-1)$-sécantes dépendant de $r - 3$ paramètres. Supposons que ces droites engendrent une variété réglée $W_{r-2}$ à $r - 2$ dimensions. En projetant cette figure d'un point de $S_{r-1}$ sur $S_{r-2}$ nous obtiendrons une variété $V'_{r-4-\lambda}$ de $S_{r-2}$ admettant une congruence de $(r - 1)$ -sécantes. La focale propre de cette congruence est une sous-variété de $V'_{r-4-\lambda}$ coupée par chaque droite en $r-3$ points focaux. Mais, le théorème étant vrai dans $S_{r-2}$, la focale propre de cette congruence a une dimension au moins égale à $r-4$. Il en résulte que $\lambda = 0$ et que la focale propre est $V'_{r-4}$ elle-même. Chaque droite étant $(r-1)$ -sécante à $V'_{r-4}$ admet deux foyers supplémentaires et est donc singulière : tous les points de $S_{r-2}$ sont des foyers, ce qui est absurde. Ainsi les $(r - 1)$ -sécantes de $V'_{r-4-\lambda}$, engendrent une variété $W_{r-3-\mu}$ $(\mu \geq 0)$ qui a moins de $r - 2$ dimensions, telle que par chaque point de $W_{r-3-\mu}$ il passe une infinité de droites de la famille. Cette propriété ayant lieu dans tout hyperplan $S_{r-1}$ de $S_r$, on en conclut que $V_{r-3-\lambda}$ est située sur une variété $W_{r-2-\mu}$ lieu de ses $(r-1)$ -sécantes, telle que par chacun de ses points il en passe une infinité. Ces droites ne forment donc pas une congruence.

En particulier, par exemple, les variétés $V_3$ de $S_6$

admettant des pentasécantes dépendant de cinq paramètres sont les intersections des hypersurfaces du cinquième ordre avec les variétés $W_4$ lieu d'un faisceau de $S_3$. Tout $S_3$ de $W_4$ contient une surface du cinquième ordre de $V_3$ et est donc le lieu d'une infinité à quatre paramètres de pentasécantes de $V_3$.

### II. — Variétés focales des congruences linéaires.

Un foyer propre d'une congruence est un point par lequel passent deux génératrices infiniment voisines de la congruence; un foyer singulier est un point tel que dans le groupe des génératrices qui y passent, l'une au moins est multiple. Dans une congruence linéaire, c'est-à-dire telle que par un point générique de l'espace il passe une seule droite de la congruence, un foyer propre ou singulier est donc nécessairement un point d'indétermination, une équation linéaire qui admet deux racines ou une racine multiple étant nécessairement une identité. Il résulte de là que

*Les variétés focales d'une congruence linéaire sont à* r — 2 *dimensions au plus.*

En comparant ce résultat avec le théorème précédent, on voit donc que

*La variété focale propre d'une congruence linéaire à foyers distincts est une variété* $\Omega_{r-2}$ *à* r — 2 dimensions.

Les variétés focales singulières sont de deux catégories : il y a les variétés lieux des droites qui admettent plus de $r-1$ foyers propres, c'est-à-dire les variétés lieux des droites $(r+\lambda)$ -sécantes à $\Omega_{r-2}$ $(\lambda \geq 0)$, que nous désignerons par $\Theta_0\ \Theta_1 \ldots \Theta_\lambda$. Il y a, d'autre part, la variété $\Sigma$ lieu des droites G spéciales, qui ont $r-1$ foyers propres, mais qui sont telles que les hyperplans focaux aient un plan commun, c'est-à-dire, puisque ces hyperplans joignent G aux $S_{r-2}$ tangents à $\Omega_{r-2}$ en leurs foyers propres, que ces $r-1$ $S_{r-2}$ doivent avoir un point commun. Nous avons vu que les droites singulières et spéciales dépendent de $r-2$ paramètres. Comme les variétés $\Theta_i$ et $\Sigma$ ont au plus la dimension $r-2$, ce so n des lieux de droites tels que par tout point il en passe une infinité.

Cette propriété est suffisamment caractéristique pour permettre de préciser notablement la nature de ces variétés focales. Examinons les premières valeurs de $r$ :

Dans $S_3$ les variétés focales sont des courbes. Or l'existence d'une courbe dégénérée en droites, telle que par chacun de ses points il en passe une infinité, est manifestement absurde.

*Dans* $S_3$ *les congruences linéaires n'ont pas de foyers singuliers.*

Dans $S_4$ les variétés focales sont des surfaces. Or une surface réglée telle que par chaque point passent une infinité de génératrices est nécessairement un plan.

Dans $S_5$ les variétés focales sont des variétés à 3 dimensions. Projetons une variété à 3 dimensions de $S_5$ telle que par tout point passent une infinité de génératrices formant un cône $\Gamma_\nu$ d'ordre $\nu$, sur $S_4$ et coupons par un $S_3$. Nous obtenons une surface réglée telle que par tout point passent $\nu$ génératrices :

*a)* Si $\nu > 2$, on a nécessairement $\nu = \infty$, la surface étant un plan ; la variété coupée par tout hyperplan suivant un plan est alors un $S_3$.

*b)* Si $\nu = 2$, la surface est une quadrique, et la variété, coupée par tout hyperplan suivant une quadrique, est une $V_3^2$ de $S_4$.

*c)* Si $\nu = 1$, alors les cônes $\Gamma_\nu$ sont des plans, et la variété est le lieu d'un plan qui varie à un paramètre.

*Dans* $S_5$ *les variétés focales singulières sont soit des* $S_3$, *soit des* $V_3^2$, *soit des variétés lieu d'un faisceau de plans de genre quelconque.*

Nous pourrions poursuivre un tel raisonnement par projection et section. On ramène ainsi le problème à celui de la détermination de variétés qui contiennent un nombre fini de droites passant par chaque point. Le nombre maximum fini de ces droites pour une $V_r$ est $r!$, qui est atteint pour la variété $V_r^r$ de $S_{r+1}$ dont l'ordre est égal à la dimension [1]. Quand le nombre des génératrices est inférieur à ce maximum, les types de variétés obtenues sont en nombre croissant avec la dimension. Il en résulte que les variétés $V_r$ qui contiennent un cône de génératrices en chaque point sont soit des *variétés algébriques très particulières* (solution dépendant d'un certain nombre de paramètres projectifs), soit des *lieux à un paramètre de* $V_{r-1}$ *ayant la même propriété* (solution dépendant d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires). La solution la plus générale est constituée par un *lieu de plans* qui varient arbitrairement à $r-2$ paramètres [2].

Notons encore que, puisque sur toute droite singulière il y a un nombre fini, au moins égal à $r-1$, de foyers ordinaires, toute génératrice d'un cône $\Gamma_v$ coupe $\Omega_{r-2}^n$ suivant ces foyers et $\Gamma_v$ coupe $\Omega_{r-2}^n$ suivant une courbe. Il en résulte que les variétés focales singulières rencontrent $\Omega_{r-2}^n$ suivant des variétés à $r-3$ dimensions : chaque point M d'une telle $V_{r-3}$ est le sommet d'un cône $\Gamma_v$ qui

(1) Cette propriété, qui est bien connue pour $r=2$, a été rencontrée pour $r=3$ par CHARLES H. SISAM, On varieties of three dimensions with six right lines through each point (*Amer. Journ. of Màthem.*, 52, 1922, p. 91).

(2) E. G. TOGLIATTI, Sulle varietà a $k$ dimensioni contenenti almeno $\infty^k$ rette (*Atti della Reale Accademia di Torino*, 57, 1922, p. 91). Le cas de $k=4$ est seul examiné.

engendre, quand M décrit $V_{r-3}$, la variété focale singulière correspondante. C'est ainsi que dans $S_4$ un plan focal singulier coupe la surface focale propre suivant une courbe d'ordre au moins égal à trois, dont toutes les droites du plan sont trisécantes. De même dans $S_5$ un $S_3$ focal singulier contient un complexe de droites spéciales : $S_3$ coupe $\Omega_3^n$ suivant une surface d'ordre au moins égal à trois et une courbe, notre complexe de tétrasécantes à $\Omega_3^n$ étant alors le complexe des sécantes à la courbe; une $V_3^2$ focale singulière est située dans un hyperplan qui coupe $\Omega_3^n$ suivant une surface dégénérée dont une des parties est située sur $V_3^2$ et est l'intersection de $V_3^2$ avec une hypersurface d'ordre au moins égal à quatre, coupée en au moins quatre points par toute génératrice de $V_3^2$. Enfin une variété focale singulière lieu de plans est lieu des plans sécants à $\Omega_3^n$ suivant des courbes d'ordre au moins égal à quatre.

### III. — Ordre de la variété focale propre.

Désignons par $n$ l'ordre de la variété focale propre $\Omega_{r-2}^n$ d'une congruence linéaire de classe $m$. Les droites de la congruence qui sont dans un hyperplan engendrent une $V_{r-2}^m$; *les droites* G *de la congruence qui s'appuient sur un* $S_{r-2}$ *engendrent une* $V_{r-1}^{m+1}$ *d'ordre* m + 1, car elle est coupée par un hyperplan passant par $S_{r-2}$ suivant $S_{r-2}$ simple et $V_{r-2}^m$.

Considérons alors deux telles variétés $V_{r-1}^{m+1}$ et $V'^{m+1}_{r-1}$ : elles ont en commun une variété lieu des droites G qui rencontrent à la fois $S_{r-2}$ et $S'_{r-2}$ de base de ces variétés. Le reste de l'intersection est évidemment lieu de foyers, puisque, en un tel point, la génératrice de $V_{r-1}$ et celle de $V'_{r-1}$ sont distinctes : nous obtenons donc $\Omega_{r-2}^n$ et éventuellement certains lieux K de foyers singuliers.

Les variétés $V_{r-1}^{m+1}$ et $V'^{m+1}_{r-1}$ définissent un faisceau linéaire $|V_{r-1}^{m+1}|$. Par un point M de l'espace, il passe une variété $V''^{m+1}_{r-1}$ de ce faisceau (qui n'est généralement pas lieu des droites G qui rencontrent un même $S_{r-2}$). Par M il passe aussi une droite G. Or G coupe $V_{r-1}^{m+1}$ en $m+1$ points, et par un de ces points passent G et la génératrice de $V_{r-1}^{m+1}$ : ces $m-1$ points sont donc des foyers de la congruence. Si l'on a pris soin de choisir M hors des variétés focales singulières, G est génératrice ordinaire de la congruence, et ces foyers sont sur $\Omega_{r-2}^{n}$. *Si la variété* $\Omega_{r-2}^{n}$ *est multiple d'ordre* k *sur les* $V_{r-1}^{m+1}$, comme il y a $r-1$ foyers, on a

$$\boxed{(r-1)\,k = m+1}\,. \tag{1}$$

Mais G coupe alors $V''^{m+1}_{r-1}$ sur $\Omega_{r-2}^{n}$ en $(r-1)\,k = m+1$ points et en M, donc en $m+2$ points : elle est tout entière sur $V''^{m+1}_{r-1}$. Les variétés du faisceau $|V_{r-1}^{m+1}|$ sont donc des lieux de droites de la congruence, qui, nous l'avons dit, ne rencontrent pas en général un même $S_{r-2}$. Soit alors P un point pris sur la base du faisceau, mais hors de la variété des droites de G qui s'appuient sur $S_{r-2}$ et $S'_{r-2}$, et hors de $\Omega_{r-2}^{n}$, c'est-à-dire sur K. P est le sommet d'un cône $\Gamma_\nu$ de droites singulières qui, ayant sur toutes les $V_{r-1}^{m+1}$ leurs $r-1$ foyers ordinaires et le point P, sont contenues tout entières aussi dans toutes les $V_{r-1}^{m+1}$, donc dans K : K *s'identifie donc avec les variétés focales singulières*, et d'ailleurs tout foyer singulier F est le sommet d'un cône $\Gamma_\nu$ $(\nu \geq 1)$ qui rencontre $S_{r-2}$ en au moins un point A; F est donc contenu dans $V_{r-1}^{m+1}$ comme situé sur une génératrice de la congruence issue d'un tel point A. Pour la même raison F est sur $V'^{m+1}_{r-1}$;

F appartient donc à K, qui contient ainsi effectivement toutes les variétés focales singulières.

Cherchons maintenant l'ordre de la variété $W_{r-2}$ lieu des droites G qui s'appuient sur $S_{r-2}$ et $S'_{r-2}$ : Un hyperplan H passant par $S'_{r-2}$ coupe $W_{r-2}$ suivant une variété $W_{r-3}$ qui comprend la section par $S'_{r-2}$ de $V_{r-1}^{m+1}$, c'est-à-dire une $V_{r-3}^{m+1}$, et H coupe $S_{r-2}$ suivant un $S_{r-3}$ qui coupe la variété $V_{r-2}^{m}$ lieu des droites G situées dans H suivant une $V_{r-4}^{m}$ : La variété engendrée par les droites G qui s'appuient sur $V_{r-4}^{m}$ complète l'intersection de H et $W_{r-2}$. Or dans H, un $\overline{S}_{r-2}$ passant par $S_{r-3}$ contient des droites G formant une $V_{r-4}^{m_2}$ qui, avec $V_{r-4}^{m}$, constitue la section par $\overline{S}_{r-2}$ de cette variété complémentaire, qui est donc une $V_{r-3}^{m+m_2}$ d'ordre $m + m_2$ :

*La variété* $W_{r-2}$ *lieu des droites* G *qui s'appuient sur deux* $S_{r-2}$ *est d'ordre* $2m + m_2 + 1$.

Si nous désignons par $\rho$ l'ordre de la variété simple à laquelle équivaut dans l'intersection de $V_{r-2}^{m+1}$ et $V'^{m+1}_{r-2}$ la variété K (cette variété, réunion de diverses focales singulières est en effet composée en général de parties qui ont sur les $V_{r-2}^{m+1}$ des multiplicités diverses) [1], en exprimant que cette intersection contient, outre K, $\Omega_{r-2}^{n}$ qui est multiple d'ordre $k$ et $W_{r-2}$ qui est simple, nous obtenons

$$(m+1)^2 = nk^2 + 2m + m_2 + 1 + \rho$$

ou

$$\boxed{m^2 = nk^2 + m_2 + \rho}\,. \tag{2}$$

---

[1] Pour étudier les diverses variétés focales singulières nous désignerons leurs ordres par $n_i$ et leurs multiplicités pour les $V_{r-2}^{m+1}$ par $k_i$; on aura alors

$$\rho = \sum_i n_i k_i^2.$$

En comparant cette relation avec la relation (1), on a immédiatement

$$[(r-1)^2-n]\cdot k^2-2(r-1)k-(m_2+\rho-1)=0.$$

Comme les entiers $m$, $m_2$, $k$ sont essentiellement positifs pour que les droites G existent, cette relation montre que

$$\boxed{n<(r-1)^2}, \qquad (3)$$

ce qui fournit une limitation maxima de *l'ordre de la variété focale propre.*

La relation (2) pouvait également très simplement être obtenue par le raisonnement suivant : considérons un $S_{r-2}$ générique fixe, et dans cet $S_{r-2}$ un point P non foyer. Par P passe une droite G de la congruence qui détermine avec $S_{r-2}$ un hyperplan, dans lequel est située une $V_{r-2}^m$ lieu des droites de la congruence. Cette $V_{r-2}^m$ coupe $S_{r-2}$ suivant une $V_{r-3}^m$ qui décrit, quand P varie, un faisceau, puisque l'hyperplan en décrit un. La base de ce faisceau est obtenue quand P est tel que l'hyperplan soit indéterminé, G étant dans $S_{r-2}$, ou bien quand P est un foyer par lequel passe une génératrice de chaque $V_{r-3}^m$. Ceci fournit la section de $\Omega_{r-2}^n$ par $S_{r-2}$ qui a la multiplicité $k'$ que les foyers propres ont sur les $V_{r-2}^m$, les sections des variétés $\Theta_i$ et $\Sigma$ qui interviennent de la même façon, et enfin la variété $V_{r-4}^{m_2}$ lieu des droites G dans $S_{r-2}$, dont les génératrices sont les $(r-1)$-sécantes de la première. On a donc

$$m^2=nk'^2+m_2+\rho'.$$

Mais les nombres $k'$ et $\rho'$ sont les mêmes que les nombres $k$ et $\rho$ de la relation (2), car en coupant $V_{r-1}^{m+1}$ relative à $S_{r-2}$ par un hyperplan issu de $S_{r-2}$ on obtient $S_{r-2}$

et $V^m_{r-2}$ et les foyers ont évidemment même multiplicité sur $V^{m+1}_{r-1}$ et $V^m_{r-2}$.

La limitation obtenue pour l'ordre $n$ de la variété focale propre $\Omega^n_{r-2}$ permet immédiatement de retrouver les résultats classiques pour les petites valeurs de $r$ :

Dans $S_2$ on a une variété focale d'ordre $n < 1$, qui se réduit donc à un seul point.

Dans $S_3$ on a une courbe focale d'ordre $n < 4$ : parmi ces courbes la seule cubique est effectivement gauche et convient.

Dans $S_4$ on obtient des surfaces focales d'ordre $n < 9$ : ces surfaces sont : la surface $F^4$ projection d'une surface de Veronese, la réglée $R^5$ rationnelle, la surface $F^5$ projection de la surface de Caporali, et la surface $F^6$ de Veronese et Bordiga (1).

Dans les chapitres suivants nous nous préoccuperons spécialement du cas de $S_5$, en nous efforçant de déterminer des types généraux de congruences linéaires, existant aussi dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions.

### IV. — Transformation birationnelle d'Ascione.

Désignons toujours par $\Omega^n_{r-2}$ la variété focale propre de la congruence linéaire étudiée, par $V^m_{r-2}$ le lieu des droites de la congruence situées dans un hyperplan,

---

(1) ASCIONE, Sul complesso di 1° ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un $S_4$ (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 5, t. VI, 1887).

F. SEVERI, Intorno ai punti doppi impropri di una superficie dello spazio a quattro dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XV, 1901, p. 33), qui rectifie une erreur d'Ascione.

G. MARLETTA, Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni (*ibid.*, t. XXVIII, 1909, p. 353).

par $\Theta_i$ et $\Sigma$ les variétés focales singulières. Désignons aussi par $\Phi^m$ la section de $V_{r-2}^m$ par un $S_{r-2}$ de son hyperplan et pour éviter de multiplier les notations, par (V, H) l'intersection de la variété V par un hyperplan H.

Considérons alors dans $S_r$ deux hyperplans fixes H, H′ dont l'intersection est $S_{r-2}^0$. Par un point P de H passe une droite de la congruence qui recoupe H′ en un point P′ et inversement : on définit ainsi une *transformation birationnelle* T, qui a été étudiée par Ascione (*loc. cit.*, § précédent) dans $S_4$.

Déterminons les *points fondamentaux de* T, dans H, par exemple :

*a)* Par un point de $(\Omega_{r-2}^n$, H) passent une infinité de droites de la congruence formant un cône $\gamma$ d'ordre $k$. (Ce nombre $k$ est le même que la multiplicité $k$ précédemment définie, comme nous le verrons plus loin). Ce cône coupe H′ suivant une courbe qui décrit une variété $W'_{r-2}$ dans H′.

*b)* Par un point de ($\Theta$, H), foyer singulier, passent une infinité de droites de la congruence, formant un cône $\Gamma_\nu$ qui coupe H′ suivant une courbe qui décrit ($\Theta$, H′), car $\Gamma_\nu$ est tout entier sur $\Theta$.

*c)* Par un point de $\Phi'^m$ intersection de $V'^m_{r-2}$ relative à H′ avec $S_{r-2}^0$ passe une droite G entièrement contenue dans H′, qui décrit, lorsque le point décrit $\Phi'^m$, la variété $V'^m_{r-2}$.

Il n'y a manifestement pas d'autres éléments fondamentaux, le point P′ n'étant indéterminé que si la droite PP′ l'est, ou bien si elle est contenue dans H′.

Etudions maintenant le *transformé d'un hyperplan* $S_{r-2}$ de H : nous avons vu que les droites de la congruence qui s'appuient sur un $S_{r-2}$ engendrent une variété $V_{r-1}^{m+1}$. Celle-ci coupe H′ suivant la variété cherchée $V_{r-2}^{m+1}$. *Un hy-*

*perplan de* H *se transforme en* $V_{r-2}^{m+1}$ *et* T *est d'ordre* $m+1$.

Notons que la Jacobienne du système linéaire $|V_{r-2}^{m+1}|$ est d'ordre $rm$, et elle est formée de $V_{r-2}^{\prime m}$ et de $W_{r-2}^{\prime}$; donc cette dernière variété est d'ordre $(r-1)\,m$.

Etudions de même la *transformée d'une droite* de H. Les droites de la congruence qui s'appuient sur une droite donnée engendrent une surface réglée sur laquelle la droite est directrice simple. Si l'on coupe cette réglée par un hyperplan $S_{r-1}$ contenant sa directrice, la section est composée, outre cette directrice, de génératrices, qui sont donc les génératrices de la $V_{r-2}^{m}$ située dans l'hyperplan et sécantes à la directrice. Par définition de l'ordre de $V_{r-2}^{m}$ il y en a $m$ et *la réglée* $R^{m+1}$ *est d'ordre* $m+1$. *La transformée d'une droite est* donc la *courbe* $C^{m+1}$ section de cette réglée par H'.

Comme une droite de H rencontre $W_{r-2}^{(r-1)m}$ en $(r-1)\,m$ points, la courbe $C^{m+1}$ s'appuie en $(r-1)\,m$ points sur $(\Omega_{r-2}^{n}, H')$. De même une droite de H rencontre $V_{r-2}^{m}$ en $m$ points, de sorte que $C^{m+1}$ s'appuie en $m$ points sur $\Phi^{m}$. Or $(\Omega_{r-2}^{n}, H')$ est multiple d'ordre $k$ pour les variétés $V_{r-2}^{m+1}$ et $\Phi^{m}$ est simple puisque par un point de $\Phi^{m}$ passe une seule droite de la congruence, et que par un point de $\Omega_{r-2}^{n}$ il en passe un cône d'ordre $k$.

Exprimons alors que la courbe $C^{m+1}$ transformée d'une droite rencontre une $V_{r-2}^{m+1}$ transformée d'un hyperplan en un seul point en dehors des variétés fondamentales :

$$(m+1)^2 = (r-1)\,mk + m + 1$$

ou

$$\boxed{m+1 = (r-1)\,k}\,.$$

Nous retrouvons ainsi la relation (1) du § III.

Reprenons alors la Jacobienne du système linéaire $|V_{r-2}^{m+1}|$ : toute variété base multiple d'ordre $s$ pour le système est multiple d'ordre $rs - 1$ pour la Jacobienne, car si l'on a

$$V \equiv x_0^{n-s} \varphi_s (x_1 x_2) + x_0^{n-s-1} \varphi_{s+1} (x_1 x_2 x_3 \cdots) + \cdots = 0,$$

en prenant $x_1 = x_2 = 0$ pour espace tangent en 0 à la base multiple d'ordre $s$, le terme de degré le plus élevé en $x_0$ de la Jacobienne est

$$\sum \left| (n-s)\, x_0^{n-s-1} \varphi_s \quad x_0^{n-s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} \quad x_0^{n-s-1} \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_2} \cdots x_0^{n-s-1} \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_i} \cdots \right| = 0.$$

dont le coefficient est

$$\left| \varphi_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_2} \cdots \right| + \left| \varphi_s \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_3} \cdots \right| + \left| \varphi_{s+1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial x_3} \cdots \right|$$

qui est visiblement d'ordre $rs - 1$. Parmi les surfaces fondamentales de H' figurent $(\Omega^n_{r-2}, H')$ qui est multiple d'ordre $k$ pour les $V'^{m+1}_{r-2}$ et $\Phi^m$ qui est simple pour ces variétés. Il y a en outre les variétés $(\Theta, H')$ qui ont des multiplicités diverses. La Jacobienne passe $rk - 1$ fois par $(\Omega^n_{r-2}, H')$ et $r - 1$ fois par $\Phi^m$ : elle se compose de $V'^m_{r-2}$ et de $W'^{(r-1)m}_{r-2}$. Or $V'^m_{r-2}$ passe $k$ fois par $(\Omega^n_{r-2}\ H')$ et une fois par $\Phi_m$. Il en résulte que $W'^{(r-1)m}_{r-2}$ passe $(r-1)\,k-1 = m$ fois par $(\Omega^n_{r-2}, H')$ et $r-2$ fois par $\Phi^m$ :

*La variété* W' *admet* $(\Omega, H')$ *comme multiple d'ordre* m *et* $\Phi$ *comme multiple d'ordre* r — 2.

Soit $\Sigma$ la variété focale spéciale telle que par un de ses points passe un cône $\Gamma_\nu$ d'ordre $\nu$ de droites spéciales, droites qui ont comme on sait $r - 1$ foyers ordinaires et sont lieux de foyers singuliers : $(\Sigma, H)$ est une variété réglée telle que par tout point passent $\nu$ droites de la variété. Soit P un point de $(\Sigma, H)$ et considérons un $S_{r-2}$ de H passant par P : La $V^{m+1}_{r-1}$ lieu des droites G qui s'appuient sur $S_{r-2}$ contient tout le cône $\Gamma_\nu$ de sommet P, dont la trace sur H' est la courbe $C'^\nu$ lieu du transformé P' de P. Les génératrices PP′ du cône étant spéciales, les $V^{m+1}_{r-1}$ extraites de la congruence ont même $S_{r-1}$ tangent en P′. Donc leurs sections par H′ qui sont *les* $V^{m+1}_{r-2}$ *transformées des* $S_{r-2}$ *passant par* P ont même $S_{r-2}$ tangent en tout point P′ de $C'_{\nu}$ : elles *se raccordent tout le long de* $C'_{\nu}$.

Désignons par $h$ la multiplicité de (Σ, H) sur les $V'^{m+1}_{r-2}$ de H, qui sont transformées en les $S'_{r-2}$ de H′ : $h$ est aussi la multiplicité de Σ sur les $V^{m+1}_{r-1}$. Considérons une droite de H passant par P : elle coupe les $V'^{m+1}_{r-2}$ en $m+1$ points dont $h$ sont confondus en P et $m+1-h$ distincts. La transformée d'une droite passant par P est une courbe d'ordre $m+1$ qui se compose donc d'une courbe d'ordre $m+1-h$ et d'une courbe d'ordre $h$ provenant de P, qui est évidemment la courbe $C'^{\nu}$, de sorte que $h=\nu$. Si, en particulier on considère les $V'^{m+1}_{r-2}$ tangentes à la droite donnée en P, qui forment un système linéaire à $r-2$ paramètres, les $S'_{r-2}$ correspondants passent par un point fixe de $C'^{\nu}$ et ne rencontrent plus la courbe d'ordre $m+1-h$ qu'en $m-h$ points : Cette courbe s'appuie donc constamment en un point sur $C'^{\nu}$.

*Il en résulte que* Σ *a la multiplicité* $\nu$ *sur les* $V^{m+1}_{r-1}$.

Ce raisonnement qui est également valable quand P est un foyer propre, $C'^{\nu}$ étant remplacée par (γ, H′), montre que $\Omega^{n}_{r-2}$ qui a la multiplicité $k$ est lieu de sommets de cônes d'ordre $k$ appartenant à la congruence, comme nous l'avions annoncé plus haut.

Considérons alors un point P de H foyer propre, et une droite D passant par P : Les $V'^{m+1}_{r-2}$ du système homaloïdal tangentes à D en P dépendent de $r-2$ paramètres et il leur correspond les $S'_{r-2}$ de H′ qui passent par un point P′. Si nous désignons par $\overline{S}_{r-3}$ le $S_{r-3}$ tangent en P à ($\Omega^{n}_{r-2}$, H), les $V'^{m+1}_{r-2}$ considérées touchent toutes le $S_{r-2}$ défini par $\overline{S}_{r-3}$ et D. Lorsque ce $S_{r-2}$ varie dans H en passant par $\overline{S}_{r-3}$, le point P′ décrit la courbe ($\gamma$, H′) qui est ainsi en correspondance birationnelle avec un faisceau linéaire, donc est rationnelle. Ainsi :

*Les cônes $\gamma$ décrits par les droites* G *qui ont un foyer propre commun sont rationnels.*

Les courbes ($\gamma$, H′) décrivent la variété $W'_{r-2}$ et forment sur elle une congruence linéaire, puisque par un point P′ de $W'_{r-2}$ passe une seule droite G de la congruence donnée, qui coupe H au point unique P, foyer propre puisque transformé dans $T^{-1}$ d'un point de $W'_{r-2}$, sommet du seul cône $\gamma$ dont la trace passe par P′ :

*Les variétés $W_{r-2}$ et $W'_{r-2}$ sont les lieux de congruences linéaires de courbes rationnelles.*

Puisqu'un cône $\gamma$ est rationnel, il est naturel de se demander s'il possède des génératrices multiples : on voit sans difficulté qu'il n'en est rien en général, car une telle génératrice serait au moins $r$-sécante à $\Phi^n_{r-2}$ ; elle serait singulière et les droites singulières coupent $\Omega^n_{r-2}$ aux seuls points des $V_{r-3}$ communes à $\Omega^n_{r-2}$ et aux variétés focales singulières $\Theta_i$ : il n'en passe pas par un point générique de $\Omega^n_{r-2}$. Lorsque le sommet de $\gamma$ est sur une variété $\Theta_i$, le cône $\gamma$ dégénère en comprenant comme partie le cône $\Gamma_v$ de la variété focale singulière.

Un cône $\gamma$ possède dans H des génératrices en nombre $k$; par conséquent la courbe ($\gamma$, H′) s'appuie en $k$ points sur $\Phi_m$. Cette courbe ne s'appuie ordinairement pas sur ($\Theta$, H′) ; soit $x$ le nombre de ses points d'appui avec ($\Omega^n_{r-2}$, H′) : cette courbe d'ordre $k$ est transformée dans $T^{-1}$ en un point de H, de sorte que

$$k(m+1) = xk + k + 0$$

ou

$$x = m.$$

D'ailleurs si P est un point de ($\Omega^n_{r-2}$, H), la variété $V^{m+1}_{r-2}$

homologue d'un $S_{r-2}$ de H ne passant pas par P ne peut pas rencontrer $(\gamma, H')$ qui est homologue de P en dehors des éléments fondamentaux, ce que traduit la même relation :

*Les courbes* $(\gamma, H')$ *s'appuient en* k *points sur* $\Phi_m$ *et en* m *points sur* $(\Omega, H')$.

Ces points d'appui sont aussi les traces sur H' de la courbe commune au cône $\gamma$ et à $\Omega^n_{r-2}$, et le résultat peut s'énoncer encore ainsi :

*Le cône* $\gamma$ *des droites* G *issues d'un point de* $\Omega^n_{r-2}$ *recoupe cette variété suivant une courbe d'ordre* m.

Ceci est d'ailleurs en accord avec le fait, démontré plus haut, que $(\Omega^n_{r-2}, H)$ est multiple d'ordre $m$ pour $W_{r-2}$, car si P est un point de $(\Omega^n_{r-2}, H)$ sa multiplicité pour $W_{r-2}$ est égale au nombre des génératrices de la congruence qui ont un foyer propre P' dans H' et qui coupent H en P : Ces génératrices sont sur le cône $\gamma$ de sommet P, leurs foyers propres sont sur une courbe d'ordre $m$, qui coupe H' aux $m$ points P' qui redonnent P comme point de $W_{r-2}$.

La variété $(\Sigma, H)$ appartient à $V^m_{r-2}$ homologue de $\Phi^m$, puisqu'elle est lieu de droites G situées dans H : elle a sur $V^m_{r-2}$ la multiplicité $\nu$, comme sur toute variété extraite de la congruence.

D'autre part, la variété $(\Sigma, H)$ appartient aussi à la variété fondamentale $W_{r-2}$, car parmi les génératrices de la congruence passant par un point de $(\Sigma, H)$, il y en a un nombre fini qui ont un foyer propre dans H'. Désignons par $x$ la multiplicité de $(\Sigma, H)$ sur $W_{r-2}$, et reprenons une droite de H passant par un point P de $(\Sigma, H)$ : cette droite rencontre $W_{r-2}$ en $(r-1)m - x$ points autres que P, et $V^m_{r-2}$ en $m - \nu$ points autres que P. Sa transformée proprement dite, qui est d'ordre $m + 1 - \nu$, rencontre donc $(\Omega^n_{r-2}, H')$ en $(r-1)m-x$ points, $\Phi^m$ en $m-\nu$ points et la courbe fondamentale $C^\nu$ située sur $(\Sigma, H')$ en un point : comme elle rencontre les $V^{m+1}_{r-2}$ transformées des $S_{r-2}$ de H en un seul point en dehors des éléments fondamentaux, on a

$$(m+1)(m+1-\nu)=[(r-1)m-x]k+(m-\nu)+\nu+1$$

et, puisque

$$m+1=(r-1)k,$$

ceci donne

$$x=(r-1)\nu.$$

*La variété* W *admet* $(\Sigma, H)$ *avec la multiplicité* $(r-1)\nu$.

D'ailleurs, cette multiplicité est aussi le nombre de génératrices de la congruence qui passent par un point de $(\Sigma, H)$ et qui ont un foyer propre dans H', c'est-à-dire l'ordre de la courbe intersection de $\Gamma_\nu$ avec $\Omega^n_{r-2}$. Or $\Gamma_\nu$ est d'ordre $\nu$ et chacune de ses génératrices coupe $\Omega^n_{r-2}$ en $r-1$ points, de sorte que cet ordre est bien $(r-1)\nu$.

Prenons maintenant un point P de M situé sur une variété focale singulière $\Theta_i$ lieu des droites G qui admettent $r+i$ foyers propres. Nous supposerons d'abord, pour simplifier, que $\Theta_i$ est un lieu de plans, de sorte que les génératrices qui passent par un point forment un faisceau linéaire. Toute droite d'un tel faisceau compte pour

$$C^{r-1}_{r+i}=\frac{(r+i)!}{(r-1)!\,(i+1)!}$$

droites de la congruence, puisque tel est le nombre des nappes qui se croisent suivant G sur toute hypersurface extraite de la congruence et contenant cette droite : en particulier, telle est la multiplicité de $\Theta_i$ pour $V^{m+1}_{r-1}$.

Prenons alors P en $P_1$ point de rencontre de $(\Theta_i, H)$ avec $\Omega^n_{r-2}$ : les droites G passant par $P_1$ forment un cône $\gamma$

d'ordre $k$ qui se décompose en le plan $\Pi$ de $\Theta_i$ et un cône $\gamma_1$. Le plan $\Pi$ doit être compté avec une certaine multiplicité : sur $\gamma_1$ une génératrice rencontre $\Omega^n_{r-2}$ en $r-2$ points autres que $P_1$ ; sur $\Pi$ chacune rencontre $\Omega^n_{r-2}$ en $r+i-1$ points autres que $P_1$, qui forment $C^{r-2}_{r+i-1}$ groupes de $r-2$ points. Ceci est donc la multiplicité de $\Pi$, et $\gamma_1$ est d'ordre

$$\nu' = k - C^{r-2}_{r+i-1}.$$

Coupons ce cône $\gamma$ dégénéré par un $S_{r-1}$ passant par $P_1$ et ne contenant pas $\Pi$. Il coupe $\gamma_1$ suivant $\nu'$ génératrices qui contiennent chacune $r-2$ points de $\Omega^n_{r-2}$ en dehors de $P_1$, et $\Pi$ suivant une droite qui s'appuie en $r+i-1$ points sur $\Omega^n_{r-2}$ en dehors de $P_1$ ; chacun de ces $r+i-1$ points doit être associé à $r-3$ autres points pour former avec $P_1$ un groupe ordinaire de foyers propres ; il doit donc être compté $C^{r-3}_{r+i-2}$ fois. Comme $\gamma$ coupe $\Omega^n_{r-2}$ en dehors de $P_1$ en $(r-2)\,k$ points on doit avoir

$$(r-2)\,k = \nu'(r-2) + (r+i-1)\,C^{r-3}_{r+i-2}.$$

En remplaçant $\nu'$ par sa valeur, cette relation se réduit à

$$(r-2)\,C^{r-2}_{r+i-1} = (r+i-1)\,C^{r-3}_{r+i-2},$$

qui est bien vérifiée quand C désigne le symbole habituel des combinaisons.

Cette relation est également vérifiée par tout produit d'un tel symbole par une fonction arbitraire de $i$ et toute solution de cette relation récurrente donne pour $\Theta_i$ une multiplicité

$$k_i = \xi(i)\,C^{r-1}_{r+i}.$$

Mais si nous faisons $i = -1$ pour appliquer ce raisonnement à la variété spéciale $\Sigma$, nous aurons pour multiplicité $\nu$, comme nous l'avons montré, de sorte que la signification géométrique de $\xi(i)$ est l'ordre $\nu_i$ du cône $\Gamma_{\nu_i}$ des génératrices $\Theta_i$ passant par un de ses points :

*La multiplicité d'une variété focale singulière $\Theta_i$ est donc*

$$k_i = \nu_i \, C_{r+i}^{r-1}.$$

Nous allons d'ailleurs le vérifier en reprenant un point P de $(\Theta_i, H)$ et une droite D issue de P dans H. Les $V_{r-2}^{m+1}$ de H coupent D en $m+1-k_i$ points en dehors de P ; les hyperplans de H' coupent donc la transformée D' de D en $m+1-k_i$ points, et D' est une courbe d'ordre $m+1$ dégénérée en une courbe d'ordre $m+1-k_i$ et une courbe fondamentale d'ordre $k_i$ lieu du point P' correspondant à P. Cette dernière courbe n'est autre que la trace du cône $\Gamma_{\nu_i}$ sur H' comptée avec la multiplicité $C_{r+i}^{r-1}$.

En particulier les $V'^{m+1}_{r-2}$ tangentes à D en P correspondent à des $S'_{r-2}$ de H' qui passent par un point fixe de $(\Gamma_{\nu_i}, H')$ et recoupent la transformée proprement dite de D en $m-k_i$ points, de sorte que cette transformée rencontre $(\Gamma_{\nu_i}, H')$ en un point.

Cette étude des multiplicités des variétés focales nous permet de donner l'expression précise du terme $\rho$ dans la relation (2) du § III : Si $\Sigma$ est d'ordre $n_\sigma$ et lieu de cônes d'ordre $\nu$, si $\Theta_i$ est d'ordre $n_i$ et lieu de cônes d'ordre $\nu_i$ dont les génératrices sont $r+i$ fois sécantes à $\Omega_{r-2}^{n}$, l'expression de $\rho$ est

$$\boxed{\rho = n_\sigma \nu^2 + n_0 \nu_0^2 r^2 + n_1 \nu_1^2 \frac{r^2(r+1)^2}{4} + \cdots + n_i \nu_i^2 [C_{r+i}^{r-1}]^2 + \cdots} \cdot \quad (2')$$

Pour terminer cette étude de la transformation birationnelle T, déterminons l'ordre des variétés transformées des $S_{r-3}$ de H. A cet effet remarquons que les $V_{r-2}^{m+1}$ de H', transformées des $S_{r-2}$ de H, contiennent $\Phi^m$ simple, transformée de $V_{r-2}^m$ lieu des droites de la congruence situées dans H, qui s'appuient évidemment sur $S_{r-2}$. A un $S_{r-3}$ de H correspond dans H' l'intersection de deux $V_{r-2}^{m+1}$, c'est-à-dire une $V_{r-3}$ d'ordre

$$(m+1)^2 - nk^2 - \rho - m.$$

Or, d'après la relation (2),

$$m^2 = nk^2 + m_2 + \rho.$$

Cet ordre s'écrit

$$nk^2 + m_2 + \rho + 2m + 1 - nk^2 - \rho - m = m + m_2 + 1.$$

*Les transformées des* $S_{r-3}$ *sont des variétés d'ordre* $m + m_2 + 1$.

D'ailleurs les droites d'un $S_{r-1}$ qui s'appuient sur un $S_{r-3}$ engendrent une variété $V_{r-3}^{m+m_2}$ d'ordre $m + m_2$ tracée sur $V_{r-2}^m$, car un $S_{r-2}$ passant par $S_{r-3}$ coupe cette variété suivant la section de $V_{r-2}^m$ par $S_{r-3}$ qui est une $V_{r-4}^m$ et la variété $V_{r-4}^{m_2}$ lieu des droites de la congruence situées dans $S_{r-2}$; un plan $S_2$ de $S_{r-1}$ coupe $V_{r-3}^{m+m_2}$ en $m + m_2$ points dont les génératrices sont sécantes communes à $S_{r-3}$ et $S_2$. De plus ces deux espaces situés dans $S_{r-1}$ ont un point commun par lequel passe une génératrice de la congruence non située dans $S_{r-1}$, qui s'appuie à la fois sur $S_{r-3}$ et $S_2$ : il y a donc en définitive $m + m_2 + 1$ droites G sécantes communes à un $S_{r-3}$ et un $S_2$ génériques de $S_r$.

Ce raisonnement prouve en même temps que la variété $V_3$ lieu des droites G qui s'appuient sur un plan $S_2$ est d'ordre $m + m_2 + 1$. En effet elle est coupée par un $S_{r-1}$ contenant ce plan suivant ce plan directeur simple, et une surface réglée d'ordre $m + m_2$, comme on le voit en la coupant par un $S_{r-2}$ de $S_{r-1}$ :

*Les plans sont transformés en des surfaces d'ordre* $m + m_2 + 1$.

Remarquons que, d'une manière générale, *les variétés homologues des* $S_k$ *et les variétés homologues des* $S_{r-1-k}$ *ont même ordre* : Cet ordre est en effet le nombre des droites G qui s'appuient à la fois sur un $S_k$ et sur un $S_{r-1-k}$ génériques de $S_r$.

## V. — Étude particulière des congruences linéaires de $S_5$.

Dans l'espace à cinq dimensions, une congruence linéaire admet deux classes :

$m$ : ordre de la variété $V_3^m$ des droites situées dans un hyperplan.

$\mu$ : nombre des droites situées dans un $S_3$.

Les relations fondamentales s'écrivent :

$$m + 1 = 4k,$$
$$m^2 = nk^2 + \mu + \rho,$$
$$n < 16,$$

$n$ étant l'ordre de la focale propre $\Omega_3^n$ dont les tétrasécantes engendrent la congruence. Ce nombre ne suffit d'ailleurs pas à caractériser cette variété et il y a lieu de faire intervenir d'autres invariants projectifs. Nous désignerons par $\pi$ le genre de la section de $\Omega_3^n$ par un $S_3$ générique.

La seconde classe $\mu$ est le nombre des tétrasécantes d'une courbe gauche d'ordre $n$, de genre $\pi$, qui est donné par la formule classique :

$$\mu = \frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{12} - \frac{(n-3)(n-4)}{2}\pi + \frac{\pi(\pi-1)}{2}.$$

Cette formule nous permet d'obtenir une limitation maxima de $\pi$, les tétrasécantes de $\Omega_3^n$ devant exister effectivement :

$$\pi^2 - \pi\left[1 + (n-3)(n-4)\right] + \frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{6} > 0$$

dont le discriminant s'écrit

$$\Delta = \left[1 + (n-3)(n-4)\right]^2 - \frac{2}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)$$
$$= 1 + \frac{1}{3}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6),$$

et le maximum $\pi_m$ de $\pi$ est la partie entière de

$$\frac{1 + (n-3)(n-4) - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

D'où le tableau des valeurs de $\pi_m$ :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $\pi_m =$ | 0 | 2 | 4 | 7 | 9 | 13 | 16 | 20 | 24 | 29 | 35. |

Si nous tenons présente la classification des courbes gauches (¹), nous pourrons améliorer les valeurs ci-dessus en remarquant que certaines valeurs de $\pi$ ne correspondent à aucune courbe ($n = 10$, $\pi = 13$; $n = 11$, $\pi = 16$; $n = 12$, $\pi = 20$; $n = 13$, $\pi = 23$; $n = 14$, $\pi = 28$ et $29$; $n = 15$, $\pi = 32$, $33$, $34$ et $35$).

Considérons un plan $\sigma$ et un hyperplan $S_4$ passant par $\sigma$; les $S_3$ de $S_4$ qui passent par $\sigma$ contiennent chacun $\mu$ tétrasécantes de la courbe. Les traces de ces $\mu$ tetrasécantes sur $\sigma$ forment un groupe $G_\mu$ de points de la courbe $C^m$ section de $V_3^m$ située dans $S_4$ par $\sigma$. Quand $S_3$ varie dans le faisceau de base $\sigma$, $G_\mu$ décrit sur $C_m$ une série linéaire $g_\mu^1$, car par un point P de $C^m$ passe une droite de la congruence qui définit avec $\sigma$ un $S_3$ auquel correspond un groupe $G_\mu$ unique contenant P.

Supposons que la courbe section de $\Omega_3^n$ par $S_3$ soit située sur une quadrique : cette quadrique contient aussi

---

(¹) G HALPHEN, Memoire sur la classification des courbes gauches algebriques (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, LII$^e$ cahier, 1882, p 1) les $\mu$ tétrasécantes : $G_\mu$ est donc situé sur une conique qui passe par les $n \geq 5$ points communs à $\Omega_3^n$ et $\sigma$. Cette conique est fixe et par conséquent confondue avec $C^m$. Mais ceci est incompatible avec $m = 4k - 1$.

De même, si la courbe section de $\Omega_3^n$ par $S_3$ appartient à une surface cubique, cette surface cubique contient aussi les $\mu$ tétrasécantes et le groupe $G_\mu$ est situé sur une cubique qui passe par $n$ points fixes communs à $\Omega_3^n$ et $\sigma$. Si $n \geq 10$ cette cubique est fixe et est par conséquent confondue avec $C^m$. Ceci impose : $m = 3$, $k = 1$. On a alors

$$9 = n + \mu + \rho,$$

ou $n > 9$, ce qui est impossible.

Considérons de même le cas $n = 8$, $\pi = 7$, $\mu = 1$. Prenons un plan $\sigma$ qui coupe $\Omega_3^8$ en $A_1 \dots A_8$. Par un point M arbitraire de $\sigma$ passe une droite de la congruence qui définit avec $\sigma$ un $S_3$, sécant à $\Omega_3^8$ suivant une courbe qui appartient à un faisceau de surfaces cubiques dont l'intersection résiduelle est la tétrasécante passant par M. Il en résulte que $A_1 \dots A_8$ et M sont les points-base d'un faisceau de cubiques. Mais M étant arbitraire dans $\sigma$, ceci est impossible.

Le tableau des valeurs maxima de $\pi$ est ainsi ramené à

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $\pi_m =$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28. |

Coupons maintenant $\Omega_3^n$ par un hyperplan ; nous obtenons une surface d'ordre $n$ à sections de genre $\pi$. F. Severi a déterminé les relations qui lient les caractères projectifs d'une surface de $S_4$ douée de singularités normales [1], en utilisant des formules de Zeuthen. On peut d'ailleurs

[1] Cf. F. SEVERI, *loc. cit.*, § 3, p. 46. L'auteur rectifie une erreur antérieure de Caporali.

obtenir très simplement ces relations sur la projection de la surface sur $S_3$; elles expriment :

1. L'intersection de la seconde polaire d'un point P avec la section plane.

2. L'intersection de la seconde polaire d'un point P avec la courbe double.

3. La formule de Pluecker pour la section plane.

4. La formule de Pluecker appliquée au cône des tangentes issues d'un point.

5. La formule de Pluecker appliquée au cône projetant la courbe double.

6. La coïncidence de deux intersections avec une tangente issue d'un point P.

7. La coïncidence de deux intersections avec une sécante à la courbe double issue d'un point P.

Exprimées au moyen de $n$, $\pi$, du nombre $t$ de points triples apparents et de la classe $n'$ de la surface, les formules de Severi s'écrivent

$$b = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi,$$

où $b$ est l'ordre de la surface double apparente de $\Omega_3^n$.

$$p = \frac{1}{16}\left[5n^3 - 37n^2 + 72n - 24 - 2(7n-20)\pi - 30t + 2n'\right],$$

où $p$ est *le genre des sections planes de cette surface double apparente.*

$$d = \frac{1}{8}\left[n(n-1)(n-4) - 6n\pi - 6t + 2n'\right],$$

où $d$ est *l'ordre de la courbe double impropre de* $\Omega_3^n$.

$$j = \frac{1}{4}\left[-(n-1)(n^2-8n+8) + 2(3n-4)\pi + 6t - 2n'\right],$$

où $j$ est *l'ordre de la courbe de rebroussement apparent* *de* $\Omega_3^n$. Remarquons que $t$ est aussi *l'ordre de la courbe triple apparente de* $\Omega_3^n$.

En utilisant ces expressions nous allons obtenir la valeur de $k$ : nous avons vu en effet que $k$ est l'ordre du cône des tétrasécantes de $\Omega_3^n$ issues d'un point de cette variété; c'est donc le nombre de tétrasécantes à une section hyperplane de $\Omega_3^n$ passant par un de ses points, c'est-à-dire le nombre de points triples apparents de la surface quand on la projette d'un de ses points.

Or lorsqu'on projette la surface d'un de ses points P, on obtient dans $S_3$ une surface d'ordre $\bar{n} = n - 1$, dont les sections planes sont de genre $\bar{\pi} = \pi$. D'autre part, la classe $n'$ de la surface est le nombre des sections hyperplanes tangentes passant par un plan donné, et la classe de la projection est le nombre des sections hyperplanes tangentes passant par un plan donné issu de P : ce nombre est encore $n'$, sauf si quelque section hyperplane solution dégénère en comportant une droite passant par P, ce qui n'a pas lieu pour un point P générique de la surface, sauf si elle est réglée. Nous poserons donc

$$\bar{n}' = n' - \varepsilon,$$

*où* $\varepsilon$ *vaut un si* $\Omega_3^n$ *est lieu d'un faisceau de plans de genre* $\pi$, *et zéro dans tous les autres cas.*

On peut retrouver ce résultat immédiatement en remarquant que $n'$ est le nombre de courbes de la surface appartenant à un faisceau et ayant un point double, de sorte que $n'$ varie comme l'invariant relatif de Zeuthen-Segre de la surface [1].

---

[1] Cf. ENRIQUES-CAMPEDELLI, Sur la classification des surfaces algébriques et particulièrement de genre zéro (*Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della Reale Università di Roma*, 1931-1932-1933, partie II, chap. I, § 1, n° 5).

Pour obtenir l'expression de $k = \bar{t}$, nous allons écrire que la surface et sa projection ont même genre arithmétique :

$$p_a = \bar{p}_a.$$

Or l'expression du genre arithmétique d'une surface à singularités normales :

$$p_a = C^3_{n-1} - (n-4)\,b + 2t + p - 1,$$

se réduit, au moyen des formules de Severi, à

$$p_a = -\frac{1}{48}(n-1)(n^2 - 8n + 24) + \frac{(n-12)\,\pi + l + n'}{8}.$$

On a par conséquent

$$\bar{p}_a = -\frac{1}{48}(n-2)(n^2 - 10n + 33) + \frac{(n-13)\,\pi + k + n' - \varepsilon}{8}$$

et la conservation du genre arithmétique se réduit par

$$\boxed{k = t + \pi - 1 - \frac{(n-3)(n-4)}{2} + \varepsilon.}\,.$$

La première classe $m$ est l'ordre de la variété lieu des tétrasécantes d'une surface de $S_4$. On peut exprimer $m$ en fonction des caractères projectifs de la surface : cette expression a été déterminée par L. Roth [1] par la méthode fonctionnelle de Cayley. Exprimée au moyen de $n, \pi, t, n'$ la formule de L. Roth se réduit à

$$m = -\frac{1}{48}(n-1)(2n^3 - 19n^2 + 60n - 72) - \frac{\pi}{8}(n-8) + \\ + \frac{\pi^2}{2} + \frac{8n-33}{8}\,t - \frac{n'}{8}.$$

En remplaçant $m$ et $k$ par leurs valeurs dans

$$m + 1 = 4\,k,$$

(1) Léonard Roth, Some formulae for surfaces in higher space (*Proceedings of the Cambridge philosophical Society*, vol. XXV, 1929, p. 390).

nous pouvons obtenir une condition liant $n, \pi, t, n'$ nécessaire pour qu'une surface soit section hyperplane d'une variété focale propre $\Omega_3^n$ de congruence linéaire. Toutefois cette condition est très peu maniable, et nous ne l'utiliserons que pour des valeurs numériques de $n$ et $\pi$ ; elle se réduit alors à une relation linéaire en n' et $t$ facile à écrire.

Dans le mémoire de L. Roth on trouve encore un grand nombre de relations concernant les plurisécantes d'une surfaçe de $S_4$, dont certaines nous seront utiles : Nous retiendrons notamment pour l'étude des variétés focales singulières, qui sont des $S_3$, des $V_3^2$ ou des lieux de plans, que :

1° Le lieu des pentasécantes de la surface est une réglée d'ordre :

$$\mu_5 = 5\,C_n^5 - \frac{3}{2}\,a\,C_n^3 + \frac{1}{3}\,C_n^2\,(8\,a + 2j + n' + 6) - \frac{3nn'}{2} -$$
$$-\frac{11}{4}\,jn - \frac{9}{2}\,an - \frac{1}{3}\,aj - \frac{1}{6}\,an' + \frac{1}{4}\,a^2n - \frac{5}{6}\,a^2 + 3a +$$
$$+ 12j + 7n' - 3n + \varepsilon n,$$

où

$$a = 2\,(n + \pi - 1),$$

$\mu_5$ est aussi l'ordre que nous avons désigné par $n_0$ de $\Theta_0$. .

2° $\Theta_0$ coupe $\Omega_3^n$ suivant une surface dont l'ordre est aussi celui de la courbe commune à leurs sections hyperplanes, c'est-à-dire :

$$m_5 = 15\,C_n^5 + 3\,C_n^3 - 4\,a\,C_n^3 + \frac{1}{3}\,C_n^2\,(19a + 4j + 2n') +$$
$$+ \frac{5}{4}\,n\,C_a^2 - \frac{13}{6}\,a^2 - n\left(\frac{11}{4}\,j + \frac{97}{8}\,a + \frac{3}{2}\,n'\right) - \frac{2}{3}\,aj -$$
$$- \frac{1}{3}\,an' + \varepsilon n^2 + 50\,a - 24\,n + \varepsilon\,(4n - 7a).$$

# CHAPITRE III

## ÉTUDE DU CAS OU LA VARIÉTÉ FOCALE PROPRE EST LE LIEU D'UN FAISCEAU D'ESPACES LINÉAIRES.

Considérons dans l'espace $S_r$ la variété focale propre $\Omega^n_{r-2}$ d'une congruence linéaire, et faisons l'hypothèse supplémentaire que $\Omega^n_{r-2}$ est lieu d'un faisceau de $S_{r-3}$. L'importance de cette étude est immédiatement mise en évidence par la remarque suivante :

*Sauf pour* $r=4$, *toute variété* $\Omega^n_{r-2}$ *focale propre d'une congruence linéaire à sections curvilignes rationnelles est le lieu d'un faisceau rationnel de* $S_{r-3}$.

En effet ses sections superficielles sont, d'après un théorème de Kronecker et Castelnuovo (1) qui est l'extension aux hyperespaces d'un théorème de Picard (2), soit la surface de Veronese (3) ou l'une de ses projections, soit une surface réglée. Le cas de la surface de Veronese ou ses projections ne peut se présenter, puisqu'elle est du $4^{ème}$ ordre, que pour $r-1 \leq 4$, car une droite générique admet $r-1$ foyers.

Pour $r=5$, la valeur $n=4$ n'est pas admissible, car une quartique gauche n'a pas de tétrasécante. Pour $r=4$, elle est au contraire admissible, et la projection sur $S_4$ d'une surface de Veronese est la surface focale d'une

---

(1) G. CASTELNUOVO, Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piani riduttibili (*Rendiconti Accademia dei Lincei*, vol. III, 1894).

Cf. aussi E. BOMPIANI, Il teorema di Kronecker-Castelnuovo (*Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, 1932).

(2) La démonstration de E. Picard date de 1878. Elle est reproduite dans PICARD et SIMART, t. II, chap. III, p. 59.

(3) G. VERONESE, La superficie omaloïde normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario (*Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, série III, vol. 19, 1884).

congruence linéaire, comme cela a été montré par Ascione [1]. Pour $r \leqq 3$, la variété focale a moins de 2 dimensions, mais sa détermination est classique.

### I. — Formules de Castelnuovo et de Severi.

Considérons alors dans $S_r$ une variété $\Omega^n_{r-2}$ lieu d'un faisceau de $S_{r-3}$ de genre $\pi$. Dire que par un point générique de $S_r$ il passe une $(r-1)$-sécante à $\Omega^n_{r-2}$ et une seule, c'est dire que l'hypersurface $\Omega'^n_{r-2}$ projection générique de $\Omega^n_{r-2}$ sur $S_{r-1}$ admet un point $(r-1)$-uple et un seul.

Effectuons dans $S_{r-1}$ une transformation par polaire réciproque : la variété $\Omega'^n_{r-2}$ se transforme en une réglée de genre $\pi$, car c'est le lieu d'un faisceau de genre $\pi$ de droites. L'ordre de cette réglée est le nombre de ses points situés dans un $S_{r-3}$, c'est-à-dire le nombre des hyperplans tangents à $\Omega'^n_{r-2}$ passant par une droite. Or un tel hyperplan contient la droite et le $S_{r-3}$ générateur du point de contact : il nous suffit donc de trouver combien de $S_{r-3}$ générateurs rencontrent une droite générique, c'est-à-dire l'ordre de $\Omega'^n_{r-2}$ : ce nombre est $n$. Soit donc $\Gamma^n_\pi$ la réglée obtenue. Par hypothèse $\Omega'^n_{r-2}$ admet un point $(r-1)$-uple, ce qui signifie qu'il y a un $S_{r-2}$ et un seul qui touche $r-i$ fois $\Gamma^n_\pi$, c'est-à-dire contient $r-1$ génératrices de cette réglée. Le nombre de ces $S_{r-2}$ a été déterminé par Castelnuovo [2] :

$$N = C^{r-1}_{n-r+2} - \pi\, C^{r-3}_{n-r} + C^2_\pi\, C^{r-5}_{n-r-2} - \cdots.$$

---

(1) ASCIONE, Sul complesso di 1° ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un $S_4$ (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 5, t. VI, 1897, 1er semestre).

(2) G. CASTELNUOVO, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. III, 1889). Reproduit dans les *Memorie Scelte*, p. 49, § 4.

Il nous suffit donc de résoudre en $n$ et $\pi$ la relation $N = 1$.

Commençons par remarquer que cette relation nous donne les solutions classiques des cas $r = 2$, $r = 3$.

1° Pour $r = 2$, la condition s'écrit

$$C_n^1 = 1,$$

où $n = 1$. La seule famille linéaire de droites dans le plan est celle des droites passant par un point.

2° Pour $r = 3$, la condition s'écrit

$$C_{n-1}^2 - \pi C_{n-3}^0 = 1,$$

ou

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi = 1;$$

donc

$$\pi = \frac{n(n-3)}{2}.$$

La valeur trouvée pour $\pi$ n'est inférieure au genre maximum d'une courbe gauche [1] que si $n \leq 3$. En effet pour $n = 2k$, on doit avoir

$$\pi = k(2k-3) \leq (k-1)^2, \quad k^2 - k - 1 \leq 0, \quad k = 0, \quad k = 1;$$

pour $n = 2k + 1$, on doit avoir

$$\pi = (2k+1)(k-1) \leq k(k-1), \quad (k+1)(k-1) \leq 0, \quad k = 1.$$

Pour $n \leq 3$ seule la cubique est effectivement gauche et constitue la solution classique.

Le fait que pour $r = 3$ nous sommes amenés à écarter certaines solutions arithmétiques de la relation obtenue

---

[1] La détermination du genre maximum d'une courbe de $S_r$ est due à G. CASTELNUOVO, Ricerche di geometria (*Atti dell' Accademia di Torino*, t. XXIV, 1889). La démonstration se trouve également dans L. GODEAUX, *Cours de Géométrie supérieure*, fasc. IV, p. 29, Liége, 1941.

à l'aide de la formule de Castelnuovo nous invite à examiner ses conditions de validité :

Il suffit de se reporter à la démonstration énumérative de Castelnuovo pour voir immédiatement que la relation

$$N = 1$$

est une *condition nécessaire* mais *non suffisante* à notre problème, et que pour qu'une solution de cette relation convienne, il faut en outre :

1° Que la variété $\Omega^n_{r-2}$ existe, afin qu'on puisse appliquer à $\Gamma^n_\pi$ la démonstration.

2° Que les $(r-1)$-sécantes de $\Omega^n_{r-2}$ forment effectivement une congruence et ne décrivent pas une variété.

Une telle hypothèse se produira par exemple si $\Omega^n_{r-2}$ obtenue est un cône, car si par un point M il passe une $(r-1)$-sécante G de ce cône, ceci veut dire que le plan SG joignant le sommet de ce cône à G coupe le cône suivant $r-1$ génératrices, et toute droite de ce plan est aussi $(r-1)$-sécante. Il passe donc par M une infinité de $(r-1)$-sécantes, et les $(r-1)$-sécantes d'un cône décrivent une hypersurface conique lieu de plans.

Remarquons encore que dans $S_r$ la variété $\Omega^n_{r-2}$ lieu d'un faisceau de genre $\pi$ de $S_{r-3}$ a la propriété suivante :

Sur $r-1$ espaces linéaires $S_{r-3}$ de $S_r$ s'appuient un nombre fini de droites (une seule dans $S_3$ et $S_4$, trois dans $S_5$, etc.) qui appartiennent à la congruence des $(r-1)$-sécantes de $\Omega^n_{r-2}$ quand on a choisi les espaces $S_{r-3}$ parmi ses espaces générateurs.

Considérons alors, d'une part, un hyperplan H de $S_r$, d'autre part, la variété $W_{r-1}$ représentant biunivoquement les groupes de $r-1$ points d'une courbe de genre $\pi$ birationnellement équivalente à $\Omega^n_{r-2}$. Par un point de H passe une seule génératrice de la congruence, qui définit un groupe de $r-1$ espaces générateurs de $\Omega^n_{r-2}$ auxquels elle s'appuie, donc un point de $W_{r-1}$. Réciproquement, un point de $W_{r-1}$ définit sur $\Omega^n_{r-2}$ un groupe de $r-1$ espaces générateurs, donc un certain nombre fini de génératrices de la congruence, dont les traces sur H forment un groupe de points. Il en résulte que la variété $W_{r-1}$ est une variété unirationnelle : c'est-à-dire est transformée rationnelle d'un $S_{r-1}$ : elle est même rationnelle pour $r=3$ et $r=4$ puisque dans ces deux cas la correspondance avec H est biunivoque. Or F. Severi a démontré [1] que le genre géométrique de la variété $W_{r-1}$ est lié à $\pi$ par la relation

$$P_g = C_\pi^{r-1} = \frac{\pi(\pi-1)\cdots(\pi-r+2)}{(r-1)!}.$$

On doit avoir $P_g = 0$ [2] ; donc

$$\pi \leq r-2.$$

**II. — Détermination des solutions dans $S_4$ et $S_5$.**

Pour $r=4$ la condition de Castelnuovo s'écrit

$$C^3_{n-2} - \pi\, C^1_{n-4} = 1$$

ou

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} - \pi(n-4) = 1;$$

d'où

$$\pi = \frac{(n-5)(n^2-4n+6}{6(n-4)},$$

---

(1) F. SEVERI, Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica (*Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, vol. 38, 1903).

F. SEVERI, Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 5, vol. $XX_1$, 1911, p. 537; en particulier § 5, p. 541).

(2) Cf. L. GODEAUX, *Questions non résolues de Géométrie algébrique*, Hermann, 1933, p. 16, § 7.

la seconde condition s'écrit :

$$\pi \leq 2.$$

Pour qu'une surface ne contienne pas ses trisécantes il faut évidemment $n \geq 3$ et nous avons vu dans la théorie générale des congruences linéaires qu'on a également $n \leq 8$. En donnant à $n$ les valeurs entières de 3 à 8 on a les solutions

$$n = 3, \qquad \pi = 1,$$
$$n = 5, \qquad \pi = 0.$$

Pour $n = 3$ $\pi = 1$, comme il n'existe pas de cubiques gauches de genre 1, les sections hyperplanes de la surface sont toutes planes, de sorte que la surface est contenue entièrement dans un $S_3$, qui est alors aussi le lieu des trisécantes. Cette solution ne convient donc pas.

Il reste le cas $n = 5$, $\pi = 0$. La réglée rationnelle du cinquième ordre est effectivement la surface focale propre d'une congruence linéaire. Elle est omise dans l'étude de Ascione, et a été obtenue par Severi [1] qui relève cette omission.

Passons maintenant à l'étude de l'espace à cinq dimensions $S_5$. La relation de Castelnuovo s'écrit

$$C_{n-3}^{4} - \pi\, C_{n-5}^{2} + C_{\pi}^{2} = 1,$$

ou

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{24} - \pi \frac{(n-5)(n-6)}{2} + \frac{\pi(\pi-1)}{2} = 1,$$

soit

$$\pi^2 - \pi(n^2 - 11n + 31) + \frac{(n-2)(n-7)(n^2-9n+24)}{12} = 0,$$

---

[1] FRANCESCO SEVERI, Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 15, 1901, p. 33).

équation qui a pour discriminant :

$$\Delta = (n^2 - 11n + 31)^2 - \frac{1}{3}(n-2)(n-7)(n^2 - 9n + 24),$$

$$\Delta = \frac{2}{3}(n-5)(n-6)^2(n-7) + 9.$$

La seconde condition s'écrit

$$\pi \leq 3.$$

Pour que la variété ne contienne pas ses tétrasécantes, il faut $n \geq 4$, et nous avons vu dans la théorie générale des congruences linéaires que $n \leq 15$.

Pour $4 \leq n \leq 15$ le discriminant n'est carré parfait que pour

$$n = 5, 6, 7, 10;$$

et, étant donnée la limitation de $\pi$, nous avons les solutions entières :

$$\begin{array}{lll} n = 5, & \pi = -1, & \pi = 2, \\ n = 6, & \pi = -1, & \pi = 2, \\ n = 7, & \pi = 0, & \pi = 3. \end{array}$$

Les valeurs négatives de $\pi$ sont inacceptables. Les courbes d'ordre 5 et de genre 2 n'ont pas de tétrasécantes : elles ne conviennent pas. Il reste les trois hypothèses :

$$\begin{cases} n = 6, \\ \pi = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} n = 7, \\ \pi = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} n = 7, \\ \pi = 3. \end{cases}$$

Les formules de Severi relatives aux surfaces de $S_4$, appliquées au cas d'une surface réglée de genre $\pi$ et d'ordre $n$, donnent pour nombre des points triples apparents :

$$t = \frac{(n-5)(n^2 - 4n + 6)}{6} - (n-4)\pi + 1 = C^3_{n-2} - \pi C^1_{n-4},$$

relation qu'on peut encore obtenir en écrivant que le genre arithmétique est $-\pi$. On a d'ailleurs déjà obtenu cette expression du nombre des trisécantes dans $S_4$ au début de ce paragraphe.

On en déduit la valeur de $k$ :

$$k = t + \pi - \frac{(n-3)\cdot(n-4)}{2},$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} - (n-5)\pi.$$

Les hypothèses $n=6$, $\pi=2$ et $n=7$, $\pi=3$ donnent pour $k$ des valeurs négatives inacceptables. Il reste l'hypothèse :

$$n = 7, \quad \pi = 0, \quad k = 4, \quad m = 15, \quad \mu = 20, \quad \rho = 93.$$

Montrons que la variété $\Omega_3^7$ générale à sections de genre nul est la variété focale d'une congruence linéaire de $S_5$.

A cet effet nous appliquerons le principe de la conservation du nombre et nous supposerons la variété décomposée en 7 espaces à trois dimensions $\Sigma_1$ $\Sigma_2$ ... $\Sigma_7$ considérés chacun comme le lieu d'un faisceau de plans, chaque faisceau admettant un plan commun avec le suivant, plan qui sera virtuellement considéré comme simple sur la variété.

L'arête de chaque faisceau sera aussi virtuellement considérée comme simple sur la variété [1].

Considérons alors un point M et cherchons d'abord le lieu des cordes passant par M. Une corde passant par M ne peut pas rencontrer deux plans du même $\Sigma_i$, sinon elle serait entièrement contenue dans $\Sigma_i$. Elle ne peut pas non

---

[1] La justification complètement rigoureuse d'un tel procédé pourrait être établie en suivant pas à pas les études faites sur ce sujet par F. Severi dans le cas des courbes. Cf. : *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* (5), 24-1 (1915), pp. 877, p. 1011 et (5), 25-1 (1916), p. 459, p. 551 et *Vorlesungen über Algebrische Geometrie*, pp. 353-401.

plus rencontrer deux $\Sigma_i$ consécutifs car elle serait entièrement contenu dans l'hyperplan qu'ils déterminent (¹). Au contraire à tout couple d'espaces $\Sigma_i$ non consécutifs correspondent des cordes passant par M et décrivant un $S_3$ incident commun. Comme il y a 15 tels couples $\Sigma_1\Sigma_3$, $\Sigma_1\Sigma_4$, $\Sigma_1\Sigma_5$, $\Sigma_1\Sigma_6$, $\Sigma_1\Sigma_7$, $\Sigma_2\Sigma_4$, $\Sigma_2\Sigma_5$, $\Sigma_2\Sigma_6$, $\Sigma_2\Sigma_7$, $\Sigma_3\Sigma_5$, $\Sigma_3\Sigma_6$, $\Sigma_3\Sigma_7$, $\Sigma_4\Sigma_6$, $\Sigma_4\Sigma_7$, $\Sigma_5\Sigma_7$, il en résulte que *la surface*

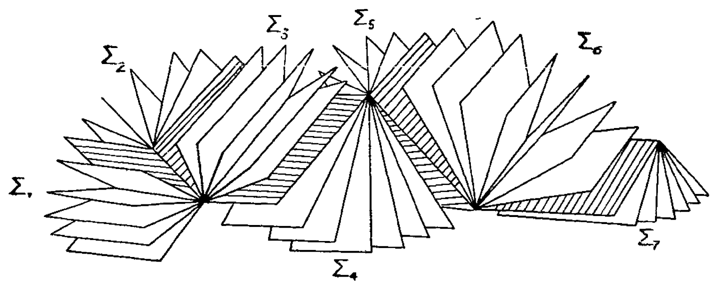


FIG. 1.

*double apparente de* $\Phi_3^7$ *est une surface du 15ème ordre.* Ce résultat pouvait d'ailleurs être obtenu directement, car la projection sur $S_4$ d'une $\Omega_3^7$ admet pour section hyperplane une réglée du 7ème ordre rationnelle, dont la courbe double est d'ordre

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 15.$$

Etudions maintenant les trisécantes : elles sont situées dans tous les plans incidents communs à tous les ternes formés de trois $\Sigma_i$ dont deux quelconques ne sont pas consécutifs. Il y a dix ternes : $\Sigma_1\Sigma_3\Sigma_5$, $\Sigma_1\Sigma_3\Sigma_6$, $\Sigma_1\Sigma_3\Sigma_7$, $\Sigma_1\Sigma_4\Sigma_6$, $\Sigma_1\Sigma_4\Sigma_7$, $\Sigma_1\Sigma_5\Sigma_7$, $\Sigma_2\Sigma_4\Sigma_6$, $\Sigma_2\Sigma_4\Sigma_7$, $\Sigma_2\Sigma_5\Sigma_7$, $\Sigma_3\Sigma_5\Sigma_7$. Il en résulte que *la courbe triple apparente de* $\Omega_3^7$ *est du*

(¹) Une droite rencontrant un plan commun à deux $\Sigma_i$ consécutifs est unisécante à $\Omega_3^7$, puisque ces plans sont virtuellement simples sur $\Omega_3^7$.

*10ème ordre*. Ceci est d'ailleurs en accord avec le fait que la formule indiquée plus haut pour le calcul de $t$ donne $t = 10$.

Enfin nous obtiendrons les tétrasécantes à $\Omega_3^7$ issues de M en cherchant toutes les droites qui s'appuient sur 4 espaces $\Sigma_i$ dont deux quelconques ne sont pas consécutifs : Il n'y a qu'une hypothèse : $\Sigma_1 \Sigma_3 \Sigma_5 \Sigma_7$, qui définit effectivement une sécante commune issue de M. *La congruence des tétrasécantes est donc bien linéaire.*

La vérification sur la forme dégénérée des caractères $m = 15$, $k = 4$ se fait sans difficulté : coupons $\Omega_3^7$ dégénérée en $\Sigma_1 \Sigma_2 .. \Sigma_7$ par un hyperplan. Nous obtenons une réglée du septième ordre dégénérée en $\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_7$. Une tétrasécante de cette réglée peut soit s'appuyer aux quatre plans $\Pi_1 \Pi_3 \Pi_5 \Pi_7$ deux à deux gauches : on obtient ainsi la variété $V_3^3$ à dix points doubles (1) ; soit rencontrer deux plans consécutifs : elle est alors dans le $S_3$ qu'ils déterminent, et décrit dans ce $S_3$ une congruence linéaire ayant pour directrices les traces sur $S_3$ des deux autres plans d'appui, qui doivent ainsi être gauches entre eux et avec les précédents. On obtient ainsi :

1° L'espace $\Pi_1 \Pi_2$ triple, lieu des congruences $\Pi_4 \Pi_6$, $\Pi_4 \Pi_7$, $\Pi_5 \Pi_7$ ; l'espace $\Pi_6 \Pi_7$ triple, lieu des congruences $\Pi_1 \Pi_3$, $\Pi_1 \Pi_4$, $\Pi_2 \Pi_4$ ;

2° L'espace $\Pi_2 \Pi_3$ simple, lieu de la congruence $\Pi_5 \Pi_7$ ; l'espace $\Pi_5 \Pi_6$ simple, lieu de la congruence $\Pi_1 \Pi_3$ ;

3° L'espace $\Pi_3 \Pi_4$ double, lieu des congruences $\Pi_1 \Pi_6$, $\Pi_1 \Pi_7$ ; l'espace $\Pi_4 \Pi_5$ double, lieu des congruences $\Pi_2 \Pi_7$, $\Pi_1 \Pi_7$.

Au total nous avons bien une variété du quinzième ordre. La section de cette variété $V_3^{15}$ par un plan, sur

(1) CORRADO SEGRE, *Atti Accademia di Torino*, 22 (1887), p. 791.

lequel $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_7$ ont pour traces les points $O_1 O_2 \dots O_7$, est donc constituée par une cubique passant par $O_1O_3O_5O_7$, les droites $O_2O_3$ et $O_5O_6$ simples, les droites $O_3O_4$ et $O_4O_5$ doubles et les droites $O_1O_2$ et $O_6O_7$ triples. Les points $O_1\ O_2 \dots O_7$ sont donc quadruples pour la courbe section, et l'on a bien $k = 4$.

### III. — Étude de la variété $\Omega_3^7$ à sections curvilignes rationnelles.

Puisque nous obtenons ainsi une congruence linéaire de $S_5$, étudions un peu plus profondément la variété $\Omega_3^7$ ainsi définie. Nous avons trouvé pour $\rho$ la valeur 93. Il est facile de voir que la valeur élevée trouvée pour ce nombre provient de ce qu'il existe des variétés focales singulières de deux espèces : il y a en effet sur $\Omega_3^7$ des quartiques planes, dont les plans décrivent une variété spéciale, simple, et des quintiques planes, dont les plans décrivent une variété focale singulière quintuple. Pour montrer l'existence de cette dernière variété il suffit de constater qu'il existe effectivement des pentasécantes de $\Omega_3^7$. Pour cela considérons un hyperplan passant par un plan $S_2$ de $\Omega_3^7$ : Il recoupe $\Omega_3^7$ suivant une réglée rationnelle du sixième ordre $\Gamma_2^6$ sécante à $S_2$ suivant une droite D. Un autre hyperplan passant par $S_2$ recoupe suivant $\Gamma'^6_2$ : il a en commun avec le premier un $S_3$ qui passe par $S_2$, donc coupe $\Gamma_2^6$ suivant D, et une quintique rationnelle unisécante à D, au point où D coupe la droite analogue D'. Ainsi un $S_3$ passant par un plan de $\Omega_3^7$ recoupe cette variété suivant une quintique rationnelle. Cette courbe admet une tétrasécante, qui coupe le plan en un point et qui est par conséquent une pentasécante de $\Omega_3^7$.

Pour étudier la *variété focale singulière lieu des pentasécantes*, reprenons la forme dégénérée de $\Omega_3^7$ en $\Sigma_1\Sigma_2 \dots \Sigma_7$.

Pour qu'une droite rencontre cinq espaces $\Sigma_i$ il est néces-saire qu'elle rencontre deux espaces consécutifs : elle est alors située dans l'hyperplan qu'ils déterminent. Mais la pentasécante ne peut rencontrer trois espaces consécutifs $\Sigma_{i-1}\,\Sigma_i\,\Sigma_{i+1}$, car elle serait alors à la fois dans les deux hyperplans $\Sigma_{i-1}\,\Sigma_i$ et $\Sigma_i\,\Sigma_{i+1}$, c'est-à-dire dans l'espace $\Sigma_i$ ; elle couperait alors tous les plans d'un faisceau et appartiendrait à $\Omega_3^7$, solution qui ne peut convenir. Il en résulte que les pentasécantes rencontrent deux couples d'espaces $\Sigma_i$ consécutifs et sont ainsi situées dans le $S_3$ commun aux deux hyperplans qu'ils définissent. Nous avons ainsi trois $S_3$ constituant le lieu des pentasécantes, correspondant aux trois solutions :

$$\Sigma_1\,\Sigma_3\,\Sigma_4\,\Sigma_6\,\Sigma_7\,;\quad \Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_4\,\Sigma_6\,\Sigma_7\,;\quad \Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_4\,\Sigma_5\,\Sigma_7.$$

Dans le premier de ces espaces, par exemple, les pentasécantes sont toutes les droites qui s'appuient sur la droite $\Delta_1$ trace de $\Sigma_1$, et nous pouvons considérer cet espace comme engendré par le faisceau de plans d'axe $\Delta_1$. Dans le second espace on a de même un faisceau de plans d'axe $\Delta_4$, et dans le troisième un faisceau d'axe $\Delta_7$. D'autre part, $\Delta_1\,\Delta_4$ sont coplanaires, dans le plan commun aux trois hyperplans $\Sigma_1\,\Sigma_2$, $\Sigma_3\,\Sigma_4$ et $\Sigma_6\,\Sigma_7$. De même $\Delta_4\,\Delta_7$ sont coplanaires dans le plan commun aux trois hyperplans $\Sigma_1\,\Sigma_2$, $\Sigma_4\,\Sigma_5$ et $\Sigma_6\,\Sigma_7$. Au contraire, $\Delta_1\,\Delta_7$ sont gauches, car les $S_3$ lieux extrêmes n'ont en commun qu'une droite, d'ailleurs située dans $\Sigma_4$. Il en résulte que le lieu des pentasécantes est une variété à 3 dimensions, du 3ème ordre, lieu d'un faisceau rationnel de plans : *Il existe une variété $V_3^3$ de Segre dont les plans coupent $\Omega_3^7$ suivant des quintiques planes.*

Cette variété de Segre est une variété focale singulière de la congruence, qui intervient dans $\rho$ pour

$$\rho_1 = 3 \times 5^2 = 75.$$

Il en résulte, ce qui serait d'ailleurs facile à vérifier, que les pentasécantes d'une réglée rationnelle du 7ème ordre de $S_4$ décrivent une surface réglée cubique rationnelle normale. Les formules de L. Roth donnent effectivement pour $n = 7$, $\pi = 0$ les valeurs $\mu_5 = 3$ et $m_5 = 12$, de sorte que

*la surface commune à $V_3^3$ et $\Omega_3^7$ est une surface du douzième ordre.*

De cette valeur $\rho_1$ on déduit que

*la variété focale spéciale lieu des quartiques planes de $\Omega_3^7$* intervient dans $\rho$ pour

$$\rho_2 = 93 - 75 = 18;$$

tel est donc son ordre.

L'étude des variétés $V_3^n$ rationnelles lieux d'un faisceau de plans a été entreprise par C. Segre [1], qui a montré en particulier que *les variétés $\Omega_3^7$ sont normales dans* $S_9$, où elles peuvent être transformées projectivement en l'un des types suivants (après avoir excepté quatre types de cônes qui ne peuvent convenir à notre étude) :

$$\begin{array}{rllllllllll}
\mathrm{I)} & 1, & \lambda, & \mu, & \mu\lambda, & \nu, & \nu\lambda, & \nu\lambda^2, & \nu\lambda^3, & \nu\lambda^4. & \nu\lambda^5, \\
\mathrm{II)} & 1, & \lambda, & \mu, & \mu\lambda, & \mu\lambda^2, & \nu, & \nu\lambda, & \nu\lambda^2, & \nu\lambda^3, & \nu\lambda^4, \\
\mathrm{III)} & 1, & \lambda, & \mu, & \mu\lambda, & \mu\lambda^2, & \mu\lambda^3, & \nu, & \nu\lambda, & \nu\lambda^2, & \nu\lambda^3, \\
\mathrm{IV)} & 1, & \lambda, & \lambda^2, & \mu, & \mu\lambda, & \mu\lambda^2, & \nu, & \nu\lambda, & \nu\lambda^2, & \nu\lambda^3.
\end{array}$$

Les variétés des types **I**, **II**, **III** admettent une directrice rectiligne et la variété du type **IV** a pour directrice minima une conique.

---

(1) CORRADO SEGRE, Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani (*Atti della Reale Accademia di Torino*, t. XXI, pp. 95-115).

En projection sur $S_5$, la variété $\Omega_3^7$ est donc représentée par des expressions

$$X_i = p_0^i(t) + \mu_1 p_1^i(t) + \mu_2 p_2^i(t),$$

où les polynômes $p^i$ sont d'ordres respectifs $p_0\ p_1\ p_2$ vérifiant

$$p_0 + p_1 + p_2 = 7,$$
$$1 \leq p_0 \leq p_1 \leq p_2.$$

Etudions les cordes d'une telle variété, et pour cela plaçons-nous dans l'espace $S_9$ où $\Omega_3^7$ est normale. Nous poserons

$$x_k = \mu_i\, t_\alpha + \rho \mu'_i\, t'^\alpha,$$

avec en particulier

$$x_0 = 1 + \rho.$$

Toute directrice non rectiligne nous fournit des relations involutives entre $t$ et $t'$. Ainsi une directrice du second ordre nous donne

$$\begin{aligned} x_k &= \mu \quad + \rho\mu', \\ x_{k+1} &= \mu t \ + \rho\mu' t', \\ x_{k+2} &= \mu t^2 + \rho\mu' t'^2, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{vmatrix} x_k & 1 & 1 \\ x_{k+1} & t & t' \\ x_{k+2} & t^2 & t'^2 \end{vmatrix} = 0;$$

donc

$$x_{k+2} - x_{k+1}(t + t') + x_k\, tt' = 0.$$

D'une manière précise, toute directrice normale $C^m$ d'ordre $m$ nous fournit par la considération de 3 coordonnées consécutives quelconques une telle relation involutive, soit $m - 1$ relations. Nous aurons donc dans tous les cas 4 relations involutives entre $t$ et $t'$. En éliminant $t + t'$ et $tt'$, il en résulte que la variété lieu des cordes de $\Omega_3^7$ dans $S_9$ s'obtient en annulant une matrice à 4 lignes et 3 colonnes dont les éléments sont des coordonnées : Par exemple pour le type admettant pour directrice minima une conique, on obtient [1]

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \right\| = 0;$$

il est facile de voir que les deux dernières lignes sont les mêmes dans les quatre types de $\Omega_3^7$. Cette *variété des cordes est donc une variété* $W_7^6$ *d'ordre* 6 commune à deux variétés cubiques qui ont déjà en commun la variété d'ordre trois :

$$\left\| \begin{matrix} x_6 & x_7 & x_8 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix} \right\| = 0,$$

intersection résiduelle de deux hyperquadriques passant par un même $S_7$.

Pour obtenir la variété de $S_5$, nous projetons la variété normale de $S_9$ à partir d'un $S_3$. Nous obtiendrons les cordes issues d'un point de $S_5$, c'est-à-dire la surface double apparente de $\Omega_3^7$, en coupant dans $S_9$ la variété $W_7^6$ des cordes par un $S_4$ passant par le $S_3$ de projection. Cette surface double apparente est donc birationnellement équivalente à la surface sextique $F_2^6$ de $S_4$ intersection de deux variétés cubiques qui ont en outre une réglée cubique normale $F_2^3$ commune. *Cette surface sextique* $F_2^6$ *est rationnelle* et sa représentation plane sur $S_2$ peut être obtenue ainsi : Par un point de $F_2^6$ passe un plan sécant à $F_2^3$ suivant une conique, ce plan coupe $S_2$ en un point. Réciproquement, par un point de $S_2$ passe un plan sécant

(1) Cf. note chap. I, p. 6.

à $F_2^3$ suivant une conique. Ce plan recoupe les deux variétés cubiques suivant des droites, et par conséquent $F_2^6$ en un point.

Il en résulte que *la surface double apparente* $F_3^{15}$ *de* $\Omega_3^7$ *est une surface rationnelle.*

Notre étude des cordes de $\Omega_3^7$ normale de $S_9$ montre que lorsqu'on projette cette variété d'un $S_3$ sur $S_5$, on obtient une variété focale propre $\Omega_3^7$ qui admet une courbe double, dont les points sont en correspondance biunivoque avec les points de la courbe section de $W_7^6$ par $S_3$, c'est-à-dire une sextique gauche de genre 3 (résiduelle d'une cubique gauche dans l'intersection de deux surfaces cubiques).

Quand on coupe $\Omega_3^7$ de $S_5$ par un hyperplan, on obtient une réglée rationnelle du 7ème ordre qui admet, d'après les formules de Severi, 10 points doubles impropres. Il en résulte que *la courbe double impropre de* $\Omega_3^7$ *de* $S_5$ *est du dixième ordre et de genre trois.*

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat sur la forme dégénérée de $\Omega_3^7$ : considérons la variété dégénérée $\Sigma_1 \Sigma_2 \ldots \Sigma_7$ située dans $S_6$ et projetons-la d'un point extérieur M sur $S_5$. Nous aurons une corde passant par M lorsque nous associerons deux espaces $\Sigma_i$ $\Sigma_j$ non situés dans un même $S_4$ ni dans un même $S_5$, donc dont les indices diffèrent de plus de 2 unités. Et tout couple $\Sigma_i$ $\Sigma_j$ vérifiant cette condition admet un plan incident commun passant par M. Nous avons donc une courbe double de $\Omega_3^7$ dans $S_5$ dont l'ordre est égal au nombre des couples $i\,j$ tels que $i < j \leq 7$ et $j - i > 2$; on vérifie sans peine qu'il y en a dix (14, 15, 16, 17, 25, 26, 27, 36, 37, 47). Les dix plans issus de M sont d'ailleurs tels que deux d'entre eux qui correspondent à un indice commun, les deux autres étant consécutifs, ont une droite commune, de sorte qu'il y a 12 droites de connexion; ces 10 plans représentent bien un cône de genre

$$\pi = C_9^2 - C_{10}^2 + 12 = 3.$$

On vérifie de même que, si par M passe une trisécante de $\Omega_3^7$, elle doit s'appuyer sur $\Sigma_1 \Sigma_4 \Sigma_7$. Mais les trois $S_4$ unissant M à $\Sigma_1 \Sigma_4 \Sigma_7$ dans $S_6$ n'ont en général que le point M commun. Il en résulte que *$\Omega_3^7$ de $S_5$ n'a pas de point triple en général.*

L'étude directe sur la représentation

$$X_i = p_0^i(t) + \mu_1 p_1^i(t) + \mu_2 p_2^i(t)$$

des tétrasécantes issues d'un point $(y_0\, y_1 \ldots y_5)$ peut être conduite ainsi : Une droite issue du point $y$ peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
X_2 y_0 - X_0 y_2 &= \lambda_1 \,(X_1 y_0 - X_0 y_1),\\
X_3 y_0 - X_0 y_3 &= \lambda_2 \,(X_1 y_0 - X_0 y_1),\\
X_4 y_0 - X_0 y_4 &= \lambda_3 \,(X_1 y_0 - X_0 y_1),\\
X_5 y_0 - X_0 y_5 &= \lambda_4 \,(X_1 y_0 - X_0 y_1).
\end{aligned}$$

En remplaçant les $X_i$ par leurs expressions et en éliminant $\mu_1\, \mu_2$ qui figurent linéairement, on obtient deux relations qui sont des polynômes en $t$, d'ordre 7 en général, à coefficients linéaires en $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$. Nous obtiendrons une tétrasécante lorsque ces deux équations auront 4 racines communes en $t$, ce qui fournit 4 conditions entre les $\lambda_i$. Le calcul explicite sur les expressions $X_i$ les plus générales demande une certaine patience : nous nous bornerons à l'exposer sur un exemple numérique simple.

Considérons la variété $\Omega_3^7$ représentée par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = t^2, \quad x_2 = t^4 + \alpha t, \quad x_3 = \mu, \quad x_4 = \mu t + \nu, \quad x_5 = \nu t^2,$$

$\alpha$ étant un paramètre.

Les tétrasécantes issues d'un point générique $(1\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)$ sont de la forme

$$\begin{aligned} x_2 - y_2 &= \lambda_1\ (x_1 - y_1), \\ x_3 - y_3 &= \lambda_2\ (x_1 - y_1), \\ x_4 - y_4 &= \lambda_3\ (x_1 - y_1), \\ x_5 - y_4 &= \lambda_4\ (x_1 - y_1). \end{aligned}$$

En remplaçant les $x_i$ par leurs expressions en $t$, $\mu$, $\nu$, nous obtenons

$$\begin{aligned} t^4 + \alpha t - y_2 &= \lambda_1\ (t^2 - y_1), \\ \mu - y_3 &= \lambda_2\ (t^2 - y_1), \\ \nu + \mu t - y_4 &= \lambda_3\ (t^2 - y_1), \\ \nu t^2 - y_5 &= \lambda_4\ (t^2 - y_1). \end{aligned}$$

En éliminant $\mu$ et $\nu$ entre ces relations on obtient

$$t^4 + \alpha t - y_2 = \lambda_1 (t^2 - y_1),$$
$$(\lambda_2 t^3 - \lambda_3 t^2 + \lambda_4)(t^2 - y_1) = -y_3 t^3 + y_4 t^2 - y_5.$$

Ces deux relations doivent admettre les quatre racines de la première : la seconde s'écrit

$$(\lambda_2 t - \lambda_3)\, t^4 + (y_3 - \lambda_2 y_1)\, t^3 + (\lambda_4 + \lambda_3 y_1 - y_4)\, t^2 + y_5 - \lambda_4 y_1 = 0.$$

En portant

$$t^4 = \lambda_1 t^2 - \alpha t + (y_2 - \lambda_1 y_1),$$

nous obtenons une équation du 3ème ordre qui doit être une identité :

$$\begin{aligned} (\lambda_2 t - \lambda_3)(\lambda_1 t^2 - \alpha t + y_2 - \lambda_1 y_1) + (y_3 - \lambda_2 y_1)\, t^3 \\ + (\lambda_4 + \lambda_3 y_1 - y_1)\, t^2 + y_5 - \lambda_4 y_1 \equiv 0. \end{aligned}$$

D'où les conditions :

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 + y_3 - \lambda_2 y_1 &= 0, \\ -\alpha\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_3 y_1 - y_4 &= 0, \\ \lambda_2 (y_2 - \lambda_1 y_1) + \lambda_3 \alpha &= 0, \\ -\lambda_3 (y_2 - \lambda_1 y_1) + y_5 - \lambda_4 y_1 &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant $\lambda_1 \lambda_2$ entre la première et la troisième, $\lambda_1 \lambda_3$ entre la seconde et la dernière, on obtient

$$\lambda_2 y_2 + \lambda_3 \alpha + y_1 y_3 - \lambda_2 y_1^2 = 0,$$
$$-\lambda_3 y_2 - \lambda_2 \alpha y_1 + y_5 + \lambda_3 y_1^2 - y_1 y_4 = 0.$$

Ces deux relations sont linéaires en $\lambda_2 \lambda_3$, compatibles, et donnent $\lambda_2 \neq 0$. Ces relations étant résolues, la première des conditions écrites donnera $\lambda_1$ rationnellement, et ensuite la seconde donnera $\lambda_4$. *La tétrasécante passant par le point* y *est donc bien unique.* Nous ferons encore au sujet de cet exemple une remarque :

La variété $\Omega_3^7$ étudiée admet le plan $t = 0$ double lorsque $\alpha = 0$, la solution obtenue garde un sens :

$$\lambda_1 = \frac{y_2}{y_1} \quad \lambda_2 = \frac{y_1 y_3}{y_1^2 - y_2} \quad \lambda_3 = \frac{y_1 y_4 - y_5}{y_1^2 - y_2} \quad \lambda_4 = \frac{y_5}{y_1}.$$

Les foyers de la droite passant par le point $y$ sont :

$t = 0$ double, dans le plan double $O_0 O_3 O_4$.

$t^2 = \dfrac{y_2}{y_1}$ qui donne $\mu = 0, \quad \nu = \dfrac{y_5}{y_1},$

c'est-à-dire un second foyer double sur la réglée cubique directrice :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \theta^2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \nu, \quad x_5 = \nu\theta,$$

sécante au plan $O_0 O_3 O_4$ suivant $O_0 O_4$.

Nous aurons l'occasion de retrouver la congruence linéaire des droites qui s'appuient sur une réglée cubique et un plan passant par une de ses génératrices, comme dégénérescence de la congruence linéaire des cordes d'une réglée normale du quatrième ordre de $S_5$.

### IV. — Généralisation

**Étude du cas** $\pi = 0$ **dans** $S_r$, ($r$ étant quelconque).

Nous avons étudié les cas de $r \leq 5$ et nous avons vu que dès que $r > 4$, les variétés $\Omega_{r-2}^n$ focales propres de congruences linéaires, à sections curvilignes rationnelles, sont lieux de faisceaux rationnels de $S_{r-3}$.

La formule de Castelnuovo appliquée au cas $\pi = 0$ donne

$$N = C_{n-r+2}^{r-1}.$$

On a donc $N = 1$ pour $n = 2r - 3$.

Etudions *la variété* $\Omega_{r-2}^{2r-3}$ *lieu d'un faisceau rationnel de* $S_{r-3}$, en utilisant une voie analogue à celle de Segre pour le cas des variétés à trois dimensions. Sa représentation sera de la forme

$$X_i = p_0^i(t) + \mu_1 p_1^i(t) + \cdots + \mu_k p_k^i(t) + \cdots + \mu_{r-3} p_{r-3}^i(t),$$

les polynômes $p_0^i \ldots p_{r-3}^i$ ayant respectivement comme ordres $p_0\, p_1 \ldots p_{r-3}$.

Comme nous excluons les cônes, on peut toujours supposer

$$1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{r-3}.$$

Pour que l'ordre de la variété soit $2r - 3$, il faut et il suffit que

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots + p_{r-3} = 2r - 3.$$

Il en résulte que $\Omega_{r-2}^{2r-3}$ est normale dans $S_{3r-6}$, et la seule variété n'admettant aucune directrice rectiligne est obtenue pour

$$p_0 = p_1 = \cdots = p_{r-4} = 2, \qquad p_{r-3} = 3,$$

soit

$$\begin{array}{llll} x_0 = 1 & x_1 = t & x_2 = t^2 & x_3 = \mu_1 \cdots, \\ x_{3k} = \mu_k & x_{3k+1} = \mu_k t & x_{3k+2} = \mu_k t_2 \cdots, & \\ x_{3r-9} = \mu_{r-3} & x_{3r-8} = \mu_{r-3} t & x_{3r-7} = \mu_{r-3} t^2 & x_{3r-6} = \mu_{r-3} t^3, \end{array}$$

qui doit être projetée sur $S_r$ à partir d'un $S_{2r-7}$ arbitraire.

Pour démontrer que *les variétés* $\Omega_{r-2}^{2r-3}$ *ainsi obtenues* *sont bien les variétés focales propres de congruences linéaires*, nous appliquerons encore le principe de dégénérescence, et nous définirons $\Omega_{r-2}^{2r-3}$ au moyen d'une suite de $2r-3$ faisceaux linéaires de $S_{r-3}$ situés dans des espaces $\Sigma_1 \Sigma_2 \ldots \Sigma_{2r-3}$ à $r-2$ dimensions, tels que deux faisceanx consécutifs aient un élément commun $S_{r-3}$. En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas de $S_5$, nous voyons que l'ordre de la variété $k$-uple apparente de $\Omega_{r-2}^{2r-3}$ est égal au nombre $\Theta_{2r-3}^k$ des combinaisons de $2r-3$ indices, pris $k$ à $k$, de façon qu'il n'y ait jamais deux indices consécutifs dans une même combinaison. On peut déterminer explicitement ce nombre en fonction de $r$ et $k$ par des procédés récurrents. Toutefois il nous suffit, pour montrer que la congruence obtenue est linéaire, de montrer que $\Theta_{2r-3}^{r-1} = 1$, ce qui est évident, la seule combinaison répondant à la question étant celle des $r-1$ indices impairs :

$$\Sigma_1 \Sigma_3 \ldots \Sigma_{2r-3}.$$

L'étude analytique directe peut être entreprise par une méthode analogue à celle que nous avons indiquée dans $S_5$. Nous allons traiter un exemple :

Soit la variété $\Omega_{r-2}^{2r-3}$ de $S_r$ :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = t^2, \quad x_2 = t^{r-1} + a_1 t^{r-3} + a_2 t^{r-4} + \cdots + a_{r-5} t^3 + \alpha t,$$
$$x_3 = \mu_1, \quad x_4 = \mu_1 t + \mu_2, \quad x_5 = \mu_2 t + \mu_3 \cdots,$$
$$x_{r-1} = \mu_{r-4} t + \mu_{r-3}, \quad x_r = \mu_{r-3} t^2.$$

Une $(r-1)$-sécante de cette variété issue du point $(y_0 = 1, y_1 y_2 \ldots y_r)$ est de la forme

$$x_2 - y_2 = \lambda_1 \; (x_1 - y_1),$$
$$x_3 - y_3 = \lambda_2 \; (x_1 - y_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_r - y_r = \lambda_{r-1} (x_1 - y_1).$$

En remplaçant les $x_i$ par leurs expressions en $t\,\mu_1 \dots \mu_{r-3}$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
t^{r-1} + a_1 t^{r-3} + \cdots + a_{r-5} t^3 + \alpha t - y_2 &= \lambda_1 (t^2 - y_1), \\
\mu_1 - y_3 &= \lambda_2 (t^2 - y_1), \\
\mu_1 t + \mu_2 - y_4 &= \lambda_3 (t^2 - y_1), \\
&\dots\dots\dots \\
\mu_{r-4} t + \mu_{r-3} - y_{r-1} &= \lambda_{r-2} (t^2 - y_1), \\
\mu_{r-3} t^2 - y_r &= \lambda_{r-1} (t^2 - y_1).
\end{aligned}
$$

En éliminant $\mu_1\,\mu_2 \dots \mu_{r-3}$ entre les $r-2$ dernières relations, nous sommes ramené à écrire que les deux équations

$$
\begin{gathered}
t^{r-1} + a_1 t^{r-3} + \cdots + a_{r-5} t^3 - \lambda_1 t^2 + \alpha t - (y_2 - \lambda_1 y_1) = 0, \\
y_r - t^2 y_{r-1} + t^3 y_{r-2} - \cdots - (-1)^{r-2} t^{r-2} y_3 + \\
+ (t^2 - y_1)\left[\lambda_{r-1} - t^2 \lambda_{r-2} + t^3 \lambda_{r-3} - \cdots - (-1)^{r-2} t^{r-2} \lambda_2\right] = 0,
\end{gathered}
$$

ont $r-1$ racines communes, c'est-à-dire ont en commun toutes les racines de la première. La seconde s'écrit

$$
\begin{aligned}
(y_r - y_1 \lambda_{r-1}) + t^2(-y_{r-1} + y_1 \lambda_{r-2} + \lambda_{r-1}) + t^3 (y_{r-2} - y_1 \lambda_{r-3}) - \\
- t^4 (y_{r-3} - y_1 \lambda_{r-4} + \lambda_{r-2}) + \cdots \\
+ (-1)^{r-1} t^{r-2} (y_3 - y_1 \lambda_2 + \lambda_4) + (-1)^{r-2} t^{r-1} (\lambda_3 - t\lambda_2) = 0.
\end{aligned}
$$

En portant

$$
t^{r-1} = - a_1 t^{r-3} - \cdots - a_{r-5} t^3 + \lambda_1 t^2 - \alpha t + (\lambda_2 - \lambda_1 y_1),
$$

nous obtenons l'équation

$$
\begin{aligned}
(y_r - y_1 \lambda_{r-1}) - t^2 (y_{r-1} - y_1 \lambda_{r-2} - y_{r-1}) + t^3 (y_{r-2} - y_1 \lambda_{r-3}) - \\
- t^4 (y_{r-3} - y_1 \lambda_{r-4} + \lambda_{r-2}) + \cdots + (-1)^{r-1} t^{r-2} (y_3 - y_1 \lambda_2 + \lambda_4) + \\
+ (-1)^{r-2} (\lambda_3 - t\lambda_2)(- a_1 t^{r-3} - \cdots - a_{r-5} t^3 + \lambda_1 t^2 - \alpha t + y_2 - \lambda_1 y_1) \equiv 0
\end{aligned}
$$

qui, étant d'ordre $r-2$, doit être une identité.

D'où les conditions :

$$y_r - y_1\lambda_{r-1} + (-1)^{r-2}\lambda_3(y_2 - \lambda_1 y_1) = 0,$$
$$\alpha\lambda_3 + \lambda_2(y_2 - \lambda_1 y_1) = 0,$$
$$-y_{r-1} + y_1\lambda_{r-2} + \lambda_{r-1} + (-1)^{r-2}(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\alpha) = 0,$$
$$y_{r-2} - y_1\lambda_{r-3} + (-1)^{r-2}(-\lambda_1\lambda_2 - \alpha_{r-5}\lambda_3) = 0,$$
$$y_{r-3} - y_1\lambda_{r-4} + \lambda_{r-2} - (-1)^{r-2}(a_{r-5}\lambda_2 - a_{r-6}\lambda_3) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{r-3-i} - y_1\lambda_{r-4-i} + \lambda_{r-2-i} + (-1)^{r-3-i}(a_{r-5-i}\lambda_2 - a_{r-6-i}\lambda_3) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_3 - y_1\lambda_2 + \lambda_4 - a_1\lambda_2 = 0.$$

Les $r - 5$ dernières relations permettent de déterminer par récurrence $\lambda_4\ \lambda_5 \ldots \lambda_{r-2}$ en fonction de $\lambda_2\ \lambda_3$. En les résolvant, on obtient ($k = 1, 2 \ldots$)

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{2k+2} = \lambda_2(y_1^k + a_1 y_1^{k-1} + a_3 y_1^{k-2} + \ldots + a_{2k-1}) + \\ \quad + \lambda_3(a_2 y_1^{k-2} + a_4 y_1^{k-3} + \ldots + a_{2k-2}) - y_3 y_1^{k-1} - \\ \qquad - y_5 y_1^{k-2} - \ldots - y_{2k+1}, \\ \lambda_{2k+3} = \lambda_3(y_1^k + a_1 y_1^{k-1} + a_3 y_1^{k-2} + \ldots + a_{2k-1}) - \\ \quad - \lambda_2(a_2 y_1^{k-1} + a_4 y_1^{k-2} + \ldots + a_{2k}) - y_4 y_1^{k-1} - \\ \qquad - y_6 y_1^{k-2} - \ldots - y_{2k+2}. \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

Transformons maintenant les quatre premières relations, qui sont quadratiques du type bilinéaire. En combinant la première et la troisième, puis la deuxième et la quatrième, nous obtenons

$$\left.\begin{array}{l} y_r - y_1 y_{r-1} + y_1^2\lambda_{r-2} + (-1)^{r-2}(\lambda_3 y_2 + \lambda_2\alpha y_1) = 0, \\ y_1 y_{r-2} - y_1^2\lambda_{r-3} + (-1)^{r-3}(\alpha\lambda_3 + y_2\lambda_2 + a_{r-5} y_1\lambda_3) = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

Enfin, nous conservons les deux premières relations :

$$\left.\begin{array}{l} y_r - y_1\lambda_{r-1} + (-1)^{r-2}\lambda_3(y_2 - \lambda_1 y_1) = 0, \\ \alpha\lambda_3 + \lambda_2(y_2 - \lambda_1 y_1) = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

En remplaçant dans (II) $\lambda_{r-2}$ et $\lambda_{r-3}$ par leur valeurs obtenues dans (I), le système (II) devient un système de deux équations linéaires en $\lambda_2$ $\lambda_3$. Ce système résolu, (I) donne $\lambda_3 \ldots \lambda_{r-2}$, et (III) donne $\lambda_1$, puis $\lambda_{r-1}$ linéairement. Pour s'assurer que la résolution en $\lambda_2$ et $\lambda_3$ est effectivement possible et unique, nous devrons distinguer deux cas suivant la parité de $r$ :

1° $r = 2h$. On a alors

$$\lambda_{r-2} = \lambda_2 (y_1^{h-2} + a_1 y_1^{h-3} + \ldots + a_{r-5}) + \lambda_3 (a_2 y_1^{h-4} + \ldots + a_{r-6}) - \\ - y_3 y_1^{h-3} - \ldots - y_{r-3},$$

$$\lambda_{r-3} = \lambda_3 (y_1^{h-3} + a_1 y_1^{h-4} + \ldots + a_{r-7}) - \lambda_2 (a_2 y_1^{h-4} + \ldots + a_{r-6}) - \\ - y_4 y_1^{h-4} - \ldots - y_{r-4},$$

et le système (II) prend la forme

$$\lambda_2 (y_1^h + a_1 y_1^{h-1} + \ldots + a_{r-5} y_1^2 + \alpha y_1) + \\ + \lambda_3 (a_2 y_1^{h-2} + \ldots + a_{r-6} y_1^2 + y_2) = y_3 y_1^{h-1} + \ldots + y_{r-3} y_1^2 + \\ + y_{r-1} y_1 - y_r,$$

$$\lambda_2 (a_2 y_1^{h-2} + \ldots + a_{r-6} y_1^2 - y_2) - \\ - \lambda_3 (y_1^{h-1} + a_1 y_1^{h-2} + \ldots + a_{r-7} y_1^2 + a_{r-5} y_1 + \alpha) = \\ = - y_4 y_1^{h-2} - \ldots - y_{r-4} y_1^2 - y_{r-2} y_1.$$

Ce système admet manifestement une solution unique en général.

2° $r = 2h + 1$. On a alors

$$\lambda_{r-2} = \lambda_3 (y_1^{h-2} + a_1 y_1^{h-3} + \ldots + a_{r-6}) - \\ - \lambda_2 (a_2 y_1^{h-3} + \ldots + a_{r-5}) - y_4 y_1^{h-3} - \ldots - y_{r-3},$$

$$\lambda_{r-3} = \lambda_2 (y_1^{h-2} + a_1 y_1^{h-3} + \ldots + a_{r-6}) + \\ + \lambda_3 (a_2 y_1^{h-4} + \ldots + a_{r-7}) - y_3 y_1^{h-3} - \ldots - y_{r-4},$$

et le système (II) prend la forme

$$\lambda_2 (a_2 y_1^{h-1} + \ldots + a_{r-5} y_1^2 + \alpha y_1) - \\ - \lambda_3 (y_1^h + a_1 y_1^{h-1} + \ldots + a_{r-6} y_1^2 - y_2) = - y_4 y_1^{h-1} - \ldots - \\ - y_{r-3} y_1^2 - y_{r-1} y_1 + y_r,$$

$$\lambda_2 (y_1^h + a_1 y_1^{h-1} + \ldots + a_{r-6} y_1^2 - y_2) + \\ + \lambda_3 (a_2 y_1^{h-1} + \ldots + a_{r-7} y_1^2 - a_{r-5} y_1 - \alpha) = y_3 y_1^{h-1} + \ldots + \\ + y_{r-4} y_1^2 + y_{r-2} y_1.$$

Ce système admet manifestement une solution unique en général.

Ainsi, nous obtenons $\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}$ en fonctions rationnelles de $\lambda_1 \ldots \lambda_r$, et *la congruence est bien linéaire.*

## CHAPITRE IV

### ÉTUDE DES VARIÉTÉS FOCALES PROPRES A SECTIONS CURVILIGNES ELLIPTIQUES.

Les surfaces à sections elliptiques sont, d'après un théorème de Del Pezzo [1], soit des réglées elliptiques, soit des surfaces rationnelles représentées sur le plan par des cubiques. Nous écarterons le cas des surfaces réglées, qui correspond à des variétés focales lieux d'un faisceau d'espaces linéaires dont l'étude fait l'objet du chapitre III.

Parmi les surfaces focales de congruences linéaires de $S_4$ figure la projection de la *surface* $F_2^5$ *de Caporali,* représentée sur le plan par les cubiques qui passent par quatre points $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$. Rappelons rapidement les propriétés caractéristiques de cette surface. Il existe sur $F_2^5$ *cinq faisceaux de coniques* représentés respectivement par les quatre faisceaux de droites issues des points $O_i$ et le faisceau de coniques passant par $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$. Dans chaque faisceau il y a trois coniques dégénérées et ceci met en évidence *dix droites* de $F_2^5$ représentées par les voisinages du premier ordre des points $O_i$ et les droites $O_i\,O_j$. Ces dix droites jouent le même rôle et les coniques d'un faisceau s'appuient constamment aux quatre d'entre elles qui ne lui appartiennent pas en tant que coniques

(1) P. Del Pezzo, Sulle superficie dell' $n^{mo}$ ordine immerse nello spazio di $n$ dimensioni (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. I, 1887).

dégénérées : les cinq faisceaux de coniques jouent aussi le même rôle.

Pour étudier une des cinq générations, prenons deux coniques C, C′ passant par $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$. On peut leur associer, pour représenter des sections hyperplanes de $F_2^5$ normale de $S_5$, des droites quelconques du plan, et réciproquement toute droite du plan peut être associée à une conique quelconque du faisceau : si $D_1, D_2, D_3$ sont trois droites formant triangle, $F_2^5$ est donc représentée par

$$x_1 = CD_1, x_2 = CD_2, x_3 = CD_3, x_4 = C'D_1, x_5 = C'D_2, x_6 = C'D_3,$$

et les plans des coniques décrivent la *variété* $V_3^3$ *de Segre* :

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{x_2}{x_5} = \frac{x_3}{x_6}.$$

Il en résulte que $F_2^5$ peut être considérée comme *l'intersection d'une* $V_3^3$ *de Segre et d'une quadrique qui ont déjà un plan commun.* Les cordes de $F_2^5$ passant par un point donné sont des cordes de $V_3^3$ et sont par conséquent situées dans un $S_3$ sécant à $V_3^3$ suivant une quadrique, et par conséquent à $F_2^5$ suivant une cubique gauche. Comme il y a une corde et une seule de cette cubique qui passe par un point donné, *la congruence des cordes de* $F_2^5$ *de* $S_5$ *est une congruence linéaire.*

En conséquence, dans $S_4$ la projection de $F_2^5$ admet un point double impropre. En projection sur $S_3$ elle admet une courbe double du cinquième ordre, car la section plane est une quintique elliptique qui a cinq points doubles, et cette courbe double est unicursale, puisque chacun de ses points est associé biunivoquement à un point de la droite axe de projection dans $S_5$.

Comme dans un faisceau de cubiques il y a 12 cubiques à point double, la classe de $F_2^5$ est $n' = 12$, et la surface étant unicursale a un genre arithmétique nul, de sorte que

$$p_a = 0 = -\frac{1}{48} \cdot 4\,(25 - 40 + 24) + \frac{-7 + t + 12}{8},$$

d'où

$$t = 1.$$

*La surface de Caporali a un point triple apparent et un seul.*

L'existence de cette solution dans $S_4$ nous incite à examiner s'il y a dans les espaces à plus de quatre dimensions des variétés focales de congruences linéaires à sections curvilignes elliptiques.

D'après une note de F. Enriques (1), les variétés à trois dimensions à sections elliptiques sont soit des lieux d'un faisceau elliptique de plans, soit des cônes rationnels, soit des variétés rationnelles représentées sur $S_3$ par l'un des systèmes linéaires suivants :

*a)* Système à 7 paramètres des surfaces cubiques passant par trois droites deux à deux gauches.

*b)* Système à 7 paramètres des surfaces cubiques déterminées par un point base double et une cubique gauche base passant simplement par lui.

*c)* Système à 7 paramètres des surfaces cubiques déterminées par un point base double biplanaire avec en celui-ci un plan osculateur fixe, et une cubique plane base y ayant un point double.

*d)* Systèmes à 8 ou 9 paramètres des quadriques sans ou avec un point base simple.

Ces variétés sont d'ordres 6,7,8; nous allons les étudier.

---

(1) F. Enriques, Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 1894-I, pp. 481 et 536).

**I. — Surface du sixième ordre de $S_4$ à sections elliptiques.**

Une surface non réglée du sixième ordre à sections elliptiques est représentée sur le plan par les cubiques ayant trois points bases $A_1$, $A_2$, $A_3$.

Pour les mêmes raisons que plus haut, la surface est de classe $n' = 12$ et a un genre arithmétique nul :

$$p_a = 0 = -\frac{1}{48} \cdot 5(36 - 48 + 24) + \frac{-6 + t + 12}{8},$$

d'où

$$t = 4.$$

On en déduit alors

$$k = 1.$$

La formule de L. Roth donne $m = 3$ et la relation fondamentale $m + 1 = 4k$ est donc vérifiée. D'autre part, la formule des tétrasécantes donne $\mu = 3$ et on en déduit $\rho = 0$, en accord avec la seconde formule de L. Roth qui donne $\mu_5 = 0$. Ceci nous incite à une étude plus approfondie.

La surface $F_2^6$ est représentée par un système linéaire à quatre paramètres de cubiques $|\gamma_3|$ passant par $A_1, A_2, A_3$. Dans ce système il y a une cubique qui contient une droite donnée du plan : elle est alors complétée par une conique passant par $A_1$, $A_2$, $A_3$. Réciproquement, étant donnée une telle conique, il y a une $\gamma_3$ qui la contient et est complétée par une droite. On a ainsi une correspondance birationnelle entre le réseau des droites du plan et celui des coniques passant par $A_1$, $A_2$, $A_3$. Ces courbes représentent deux réseaux de cubiques gauches tracées sur $F_2^6$, telles que l'hyperplan de l'une d'elles contient encore une cubique de l'autre système, ces deux cubiques étant alors bisécantes. Il est facile de vérifier que deux cubiques gauches bisécantes ont 3 cordes communes, de sorte qu'*on a bien* $\mu = 3$.

Considérons une section hyperplane générique : c'est une sextique gauche de genre 1 ; elle est située sur un faisceau de surfaces cubiques qui se recoupent suivant les tétrasécantes (1). Supposons alors que les tétrasécantes d'une variété $\Omega_3^6$ à sections elliptiques forment une congruence linéaire, et considérons un plan $\sigma$ et un $S_4$ passant par $\sigma$, dans lequel des droites de la congruence décrivent une $V_3^m$ passant $k$ fois par la surface section de $\Omega_3^6$. Nous aurons dans $\sigma$ une courbe $C^m$ passant $k$ fois par les six points communs à $\sigma$ et $\Omega_3^6$. Menons un $S_3$ par $\sigma$ dans $S_4$ : il y a un faisceau de surfaces cubiques $F_2^3$ passant par la courbe section de $\Omega_3^6$ par $S_3$ et ses trois tétrasécantes ; ce faisceau est coupé par $\sigma$ suivant un faisceau de cubiques ayant en commun avec $C^m$ les six points $k$-uples bases et le groupe $G_3$ des traces des trois tétrasécantes qui sont aussi sur $V_3^m$. Chaque cubique coupe en outre $C^m$ suivant

$$3m - 6k - 3 = 3(4k - 1) - 6k - 3 = 6(k - 1)$$

autres points variables.

Un $S_3$ définit un groupe $G_3$ sur $C^m$. Réciproquement un point de $C^m$ définit un $S_3$ contenant $\sigma$ et la génératrice de ce point, de sorte que les groupes $G_3$ sont en correspondance biunivoque avec le faisceau des $S_3$ passant par $\sigma$, donc $|G_3| = g_3^1$.

Etudions maintenant le système complet des cubiques passant par les six points $k$-uples de $C^m$. Une telle cubique recoupe $C^m$ en $3m - 6k = 6k - 3$ points : nous définissons ainsi sur $C^m$ une $g_{6k-3}^3$. Par un groupe $G_3$ passe un faisceau de nos cubiques, de sorte qu'un groupe $G_3$ appartient à une infinité à un paramètre de groupes de $g_{6k-3}^3$.

(1) PETOT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, $1886_{\mathrm{I}}$ (t. 102), p. 805.

Supposons d'abord $g^3_{6k-3}$ simple et rapportons projectivement ses groupes aux plans d'un espace $\Sigma_3$. La courbe $C^m$ est alors représentée par une courbe $C^{6k-3}$. A trois points d'un groupe $G_3$ appartenant à une infinité à un paramètre de groupes de $g^3_{6k-3}$ correspondent trois points de $C^{6k-3}$ appartenant à une infinité à un paramètre de plans, donc à une trisécante de $C^{6k-3}$. Par un point de $C^{6k-3}$ passe une seule trisécante, puisqu'un point de $C^m$ appartient à un seul groupe $G_3$. Le genre de $C^{6k-3}$ est donc

$$\pi' = \frac{1}{2}(6k-5)(6k-6)-1 = 3(k-1)(6k-5)-1.$$

Mais la courbe $C^{6k-3}$ d'ordre impair ($6k-3=2\nu+1$ avec $\nu = 3k-2$) a un genre maximum qui a été déterminé par Castelnuovo [1],

$$\pi' \leq \nu(\nu-1);$$

on doit donc avoir

$$3(k-1)(6k-5)-1 \leq (3k-2)(3k-3)$$

ou

$$9(k-1)^2 \leq 1,$$

ce qui impose $k=1$. La courbe $C^{6k-3}$ sera alors une cubique gauche qui devra avoir une infinité de trisécantes, ce qui est absurde.

Nous ne pouvons donc pas supposer que $g^3_{6k-3}$ est simple : cette série est donc composée au moyen de $g^1_3$. Un groupe de $g^3_{6k-3}$ est formé de $2k-1$ groupes $G_3$, et si nous rapportons projectivement ces groupes aux plans d'un espace $\Sigma_3$, $C_m$ sera représentée par une $C^{2k-1}$ triple

[1] CASTELNUOVO, Ricerche di Geometria (*Atti dell' Accademia di Torino*, t. XXIV, 1889). La démonstration est reproduite dans : L. GODEAUX, *Cours de Géométrie supérieure*, fasc. IV, p. 29.

qui ne peut pas avoir de corde, car si une droite joint deux points de $C^{2k-1}$, les plans passant par cette droite seront représentés par un faisceau de cubiques joignant les six points bases aux deux groupes $G_3$ représentant les deux points pris sur $C^{2k-1}$; ces cubiques auraient douze points communs. Ceci signifie que $C^{2k-1}$ est une droite; alors $2k-1=1$,

$$k=1, \quad m=3.$$

L'hypothèse d'une congruence linéaire est donc admissible.

Cherchons maintenant à *déterminer les groupes de quatre points* $P_1 P_2 P_3 P_4$ du plan, *représentant les points d'appui d'une tétrasécante* à la surface $F_2^6$ de $S_4$, représentée par le système linéaire à 4 paramètres de cubiques $|\gamma_3|$ passant par trois points bases $O_1, O_2, O_3$. Comme $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ représentent des points alignés, c'est-à-dire des points communs à un réseau d'hyperplans $S_3$. il passe un réseau de cubiques $\gamma_3$ par $O_1\ O_2\ O_3\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ et par conséquent une cubique $\gamma_3$ décomposée en la droite $O_1 O_2$ et la conique $O_3\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4$, une cubique $\gamma_3$ décomposée en $O_1\ O_3$ et la conique $O_2 P_1 P_2 P_3 P_4$ et enfin une cubique $\gamma_3$ décomposée en $O_2\ O_3$ et la conique $O_1\ P_1\ P_2\ P_3 P_4$. Or, dans le système à quatre paramètres $|\gamma_3|$ il y a un réseau de cubiques décomposées en $O_1\ O_2$ et une conique passant par $O_3$. En répétant ce raisonnement pour $O_2 O_3$ et $O_3 O_1$, on met en évidence trois réseaux de coniques ayant chacun un point base $O_1$, $O_2$ ou $O_3$ et servant de constituantes à des cubiques $\gamma_3$ du système $|\gamma_3|$. Les coniques $O_1 P_1 P_2 P_3 P_4$, $O_2 P_1 P_2 P_3 P_4$, $O_3 P_1 P_2 P_3 P_4$ appartiennent respectivement à ces trois réseaux et forment évidemment un faisceau ayant les points $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ pour points de base. Pour déterminer les groupes $P_1\ P_2 P_3 P_4$, c'est-à-dire ces faisceaux de coniques, rapportons projectivemeut les coniques du plan aux points de $S_5$ : nos trois réseaux sont représentés par trois plans, et nous devons déterminer les droites incidentes à la fois aux trois plans. Ces droites sont les génératrices d'une $V_3^3$ de Segre. A ces génératrices, qui forment une entité rationnelle à deux paramètres, correspondent *les groupes, à deux paramètres, de quatre points* $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ *formant une involution* rationnelle : pour vérifier que c'est bien une involution, cherchons les groupes contenant un point $P_1$ donné. Les coniques passant par $P_1$ sont représentées par les points d'un hyperplan de $S_5$ qui coupe $V_3^3$ suivant une réglée cubique ayant une directrice rectiligne unique, et cette directrice représente le groupe unique contenant $P_1$.

Le raisonnement précédent doit être modifié lorsque deux de nos réseaux ont une conique $\gamma_2$ commune, ce qui aura lieu en particulier si l'un des réseaux est remplacé par un système plus ample. La conique $\gamma_2$ passe par deux des points $O_i$ et est contenue dans deux cubiques de $|\gamma_3|$ : elle représente donc une quartique plane de $F_2^6$. Toutes les droites de ce plan sont des tétrasécantes. D'ailleurs la $V_3^3$ définie au moyen de trois plans dont deux ont un point commun M dégénère en un $S_3$ lieu d'une gerbe de sommet M qui représente les tétrasécantes spéciales, et une $V_3^2$ ayant M double. Si l'on a une congruence linéaire, ce cas ne doit se présenter qu'un nombre fini de fois au plus, puisqu'on a $\rho = 0$.

Etudions maintenant *la correspondance birationnelle entre le réseau des droites du plan et celui des coniques passant par* $O_1\,O_2\,O_3$, mise en évidence plus haut, une droite et une conique étant associées lorsqu'elles sont les composantes d'une même cubique de $|\gamma_3|$. Représentons la droite par

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (1)$$

et la conique par

$$A_1x_2x_3 + A_2x_3x_1 + A_3x_1x_2 = 0, \tag{2}$$

en prenant $O_1\,O_2\,O_3$ pour triangle de référence dans le plan représentatif de $F_2^6$. Le système $|\gamma_3|$ s'écrit

$$\Sigma\lambda_i f_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5, \tag{3}$$

avec

$$f_i = \Sigma\, a_{ijk}^1\, x_i x_j x_k.$$

Le produit des polynômes (1), (2) appartient à (3) : en identifiant nous aurons 7 relations linéaires par rapport aux $\lambda_i$, d'où les conditions (¹)

$$\left\| \begin{matrix} u_1A_3 & u_1A_2 & u_2A_3 & u_2A_1 & u_3A_2 & u_3A_1 & u_1A_1 + u_2A_2 + u_3A_3 \\ a_{112}^1 & a_{113}^1 & a_{221}^1 & a_{223}^1 & a_{331}^1 & a_{332}^1 & a_{123}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{112}^5 & a_{113}^5 & a_{221}^5 & a_{223}^5 & a_{331}^5 & a_{332}^5 & a_{123}^5 \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire deux relations

$$\begin{gathered} \alpha u_1A_3 + \beta u_1A_2 + \gamma u_2A_3 + \delta u_2A_1 + \varepsilon u_3A_2 + \varphi u_3A_1 + \\ + \eta\,(u_1A_1 + u_2A_2 + u_3A_3) = 0, \\ \alpha' u_1A_3 + \beta' u_1A_2 + \gamma' u_2A_3 + \delta' u_2A_1 + \varepsilon' u_3A_2 + \varphi' u_3A_1 + \\ + \eta'\,(u_1A_1 + u_2A_2 + u_3A_3) = 0, \end{gathered}$$

où les coefficients sont certaines fonctions des $a_{ijk}^l$. Comme ce sont deux formes bilinéaires par rapport aux $u_i$ et $A_i$, elles représentent une *transformation birationnelle quadratique* : en effet en les ordonnant par rapport aux $A_i$, par exemple, on a deux formes linéaires à coefficients linéaires en $u_i$ dont les solutions sont des déterminants du second ordre, donc des polynômes du second degré en $u_i$.

Il existe donc trois droites fondamentales $U_1U_2$, $U_2U_3$,

(¹) Cf. note chap. I, p. 6.

$U_3U_1$ qui admettent chacune un faisceau de coniques associées, ayant pour points bases $O_1O_2O_3$ et $U'_3$, $U'_1$, $U'_2$ respectivement. Réciproquement chacune des coniques $O_1O_2O_3U'_1U'_2$, $O_1O_2O_3U'_2U'_3$, $O_1O_2O_3U'_3U'_1$ est associée à toutes les droites d'un faisceau qui a pour sommet $U_3$, $U_1$, $U_2$ respectivement.

Chacun de ces éléments fondamentaux représente donc *une cubique plane unicursale de* $F_2^6$ *dont le plan recoupe en outre* $F_2^6$ *suivant un point.* Toute droite issue de ce point et située dans le plan est tétrasécante à $F_2^6$.

Or si la congruence des tétrasécantes d'une variété $\Omega_3^6$ est linéaire, comme on a $k = 1$ et $m = 3$, les droites de la congruence qui s'appuient à $\Omega_3^6$ en un point donné forment un faisceau linéaire situé dans un plan qui recoupe $\Omega_3^6$ suivant une cubique. Nous avons ainsi une *congruence de plans* $\gamma$ *de* $S_5$, *d'ordre quatre* (par un point passe une droite G unique sur laquelle les quatre foyers définissent quatre plans $\gamma$ passant par G) *et de classe six* (il y a six plans $\gamma$ dans un hyperplan).

Il nous reste à examiner les différentes variétés $\Omega_3^6$ à sections de genre un, pour discriminer celles d'entre elles qui donnent lieu à des congruences linéaires.

### II. — Variété du sixième ordre à sections curvilignes elliptiques de première espèce.

Nous désignerons ainsi les variétés représentées par le système linéaire à 7 paramètres des surfaces cubiques passant par trois droites deux à deux gauches. La variété est normale dans $S_7$. Cette variété contient trois congruences de génératrices rectilignes, représentées par les droites qui s'appuient sur deux des droites bases : par un point quelconque de $\Omega_3^6$ il passe une droite et une seule de chaque famille. Les génératrices d'une famille qui s'appuient sur une génératrice fixe d'une autre famille engendrent une quadrique représentée par un plan passant par une droite base : $\Omega_3^6$ peut ainsi être considérée de trois façons différentes comme le lieu d'un faisceau rationnel de quadriques. Par un point quelconque de $\Phi_3^6$ il passe une quadrique de chaque faisceau. Le faisceau des quadriques engendrées par des génératrices des deux premières familles coupe les génératrices de la troisième famille suivant des ponctuelles homographiques. Il en résulte que, pour la variété $\Omega_3^6$ normale de $S_7$, le lieu des $S_3$ contenant les quadriques d'un faisceau est une $V_4^4$ de Segre. *Il passe donc par* $\Phi_3^6$ *trois variétés* $V_4^4$ *de Segre.*

Si nous rapportons projectivement $S_7$ à un octaèdre de référence constitué par douze génératrices de $\Omega_3^6$ ($O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ sommets d'un quadrilatère gauche situé sur une quadrique de $\Omega_3^6$, $O_5\ O_6\ O_7\ O_8$ sommets d'un quadrilatère analogue, situé sur une quadrique de la même famille, les points $O_i$ et $O_{4+i}$ étant sur une même génératrice de $V_4^4$), nous représentons $\Omega_3^6$ par

$$X_1=1,\quad X_2=x,\quad X_3=y,\quad X_4=xy,\quad X_5=z,\quad X_6=xz,\quad X_7=yz,\quad X_8=xyz.$$

Et les trois $V_4^4$ sont

$$\frac{X_5}{X_1}=\frac{X_6}{X_2}=\frac{X_7}{X_3}=\frac{X_8}{X_4};\quad \frac{X_2}{X_1}=\frac{X_4}{X_3}=\frac{X_6}{X_5}=\frac{X_8}{X_7};$$
$$\frac{X_3}{X_1}=\frac{X_4}{X_2}=\frac{X_7}{X_5}=\frac{X_8}{X_6}.$$

Ainsi *la variété $\Omega_3^6$ de $S_7$ de première espèce peut aussi être représentée sur $S_3$ au moyen des surfaces cubiques qui ont trois points bases doubles.*

Soit M un point de $S_7$ et proposons-nous de trouver les cordes de $\Omega_3^6$ qui passent par M. A cet effet, considérons $\Omega_3^6$ comme lieu d'un faisceau de quadriques dont les $S_3$ décrivent $V_4^4$. Les cordes de $\Omega_3^6$ sont aussi des cordes de $V_4^4$. Les cordes de $V_4^4$ passant par M sont situées dans un $S_3'$ qui coupe $V_4^4$ suivant une quadrique et $\Omega_3^6$ suivant deux génératrices de $V_4^4$. Dans $S_3$, il passe par M une droite et une seule qui s'appuie sur deux droites données, de sorte que

*Dans* $S_7$, *la congruence des cordes de* $\Omega_3^6$ *de première espèce est une congruence linéaire.*

Comme deux génératrices de $V_4^4$ ne sont jamais concourantes, la corde de $\Omega_3^6$ qui passe par M ne peut être indéterminée que si le $S_3$ des cordes de $V_4^4$ issues de M est lui-même indéterminé, c'est-à-dire si M est sur $V_4^4$. Alors par M passe un $S_3$ de $V_4^4$ qui contient une quadrique de $\Omega_3^6$ et par M passent des cordes de $\Omega_3^6$ dépendant de deux paramètres :

*Les trois* $V_4^4$ *passant par* $\Omega_3^6$ *sont donc les seules variétés focales singulières de cette congruence.*

Ainsi quand on projette $\Omega_3^6$ normale de $S_7$ d'un point générique sur $S_6$, on obtient une variété $\Omega_3^6$ qui admet un point double impropre, et lorsque le centre de projection se trouve sur l'une des $V_4^4$ passant par $\Omega_3^6$, la projection de $\Omega_3^6$ admet un plan double impropre.

Etudions maintenant la projection $\Omega_3^6$ sur $S_5$ à partir d'une droite $\Delta$ générique de $S_7$, d'une variété $\Omega'^6_3$ normale à sections elliptiques de première espèce.

$\Omega_3^6$ admet une courbe double impropre d'ordre trois puisque la section hyperplane de $\Omega_3^6$ admet trois points doubles impropres d'après la formule de Severi. D'ailleurs pour obtenir les cordes de $\Omega'^6_3$ qui s'appuient sur $\Delta$, cherchons d'abord les cordes $V_4^4$ qui s'appuient sur $\Delta$ : Cette droite $\Delta$ est projetée d'un $S_3$ qui décrit $V_4^4$ sur un $S_3'$ fixe de cette variété suivant une droite qui décrit une quadrique, car chaque point de $\Delta$ est projeté suivant un point qui décrit une droite. Il en résulte que les cordes de $V_4^4$ qui s'appuient sur $\Delta$ ont comme traces sur $V_4^4$ une $\overline{\Omega}_3^6$ à sections elliptiques de première espèce. Cette $\overline{\Omega}_3^6$ coupe la variété $\Omega'^6_3$ donnée suivant une réglée elliptique de huitième ordre $R_8$. Les cordes de $\Omega'^6_3$ qui s'appuient sur $\Delta$ ont leurs traces sur une courbe tracée sur $R_8$ et unisécante aux génératrices, car deux génératrices correspondant à une même corde, issue d'un point M de $\Delta$, sont les deux génératrices qui s'appuient sur la droite que décrit la projection de M dans $S'_3$ de $V_4^4$. Cette courbe elliptique C est d'ailleurs l'intersection des trois réglées elliptiques $R_8$ obtenues sur les trois $V_4^4$ qui passent par $\Omega'^6_3$. La courbe elliptique C est une sextique, car si on la coupe par un hyperplan contenant un $S_3$ d'une $V_4^4$, cet hyperplan contient une biquadratique commune à $S_3$ et $R_8$ et recoupe $R_8$ suivant quatre génératrices unisécantes à la courbe C. D'autre part, la courbe C est bisécante à la biquadratique en des points qui correspondent à la génératrice de la quadrique de $S'_3$ projection de $\Delta$ à partir de $S_3$. Cette sextique elliptique C est projetée doublement de $\Delta$ suivant une cubique gauche unicursale, les cordes de $\Omega'^6_3$ issues des points de $\Delta$ engendrant une réglée rationnelle du quatrième ordre de $S_5$ dont $\Delta$ est directrice simple. Sur une réglée elliptique du huitième ordre de $V_4^4$ il y a de telles sextiques elliptiques dépendant de quatre paramètres, dont les $S_5$ forment une famille telle que par une droite générique de $S_7$ il en passe un et un seul.

Ainsi $\Omega_3^6$ *admet une cubique gauche double impropre.*

Passons maintenant à l'étude de la surface double apparente de $\Omega_3^6$ : on l'obtient en projetant $\Omega'^6_3$ de $S_7$ sur $S_4$ à partir d'un plan. Comme par un point du plan il passe une seule corde de $\Omega'^6_3$, la surface double apparente est rationnelle. L'ordre de cette surface double est aussi l'ordre de la congruence des cordes d'une sextique gauche elliptique de $S_3$, c'est-à-dire neuf : d'ailleurs la section hyperplane de $\Omega_3^6$ de $S_5$ admet une courbe double apparente qui est, d'après les formules de Severi, d'ordre 9 et de genre 1.

Ainsi *la surface double apparente de $\Omega_3^6$ est une surface rationnelle du neuvième ordre à sections hyperplanes elliptiques*. Sur cette surface double, la courbe de rebroussement apparent est d'ordre $j = 12$.

L'étude des éléments triples apparents de $\Omega_3^6$ est aussi celle des plans trisécants de $\Omega'^6_3$ de $S_7$ : ces plans trisécants dépendent de 9 paramètres, et les droites qu'ils contiennent dépendent au maximum de 11 paramètres : il en résulte que par une droite $\Delta$ générique de $S_7$ il ne passe aucun plan trisécant de $\Omega'^6_3$ et $\Omega_3^6$ *de* $S_5$ *n'a pas de point triple impropre*. Ceci est d'ailleurs en accord avec le fait que la courbe double, qui est une cubique gauche, ne peut avoir de point triple.

Etudions alors le complexe des droites $\Delta$ par lesquelles passe un plan trisécant de $\Omega'^6_3$. Un tel plan est aussi trisécant, en $M_1\ M_2\ M_3$ par exemple, de $V_4^4$ qui contient $\Omega'^6_3$. Les génératrices $V_4^4$ qui passent par $M_1\ M_2\ M_3$ définissent un $S_5$ qui coupe $V_4^4$ suivant la $V_3^3$ lieu des plans qui s'appuient sur ces trois génératrices. $S_5$ contient évidemment le plan $M_1\ M_2 M_3$ et par conséquent toute droite $\Delta$ de ce plan. Une $V_3^3$ de $V_4^4$ étant le lieu des génératrices de $V_4^4$ qui rencontrent un plan donné dans un de ses $S_3$, les $V_3^3$ de $V_4^4$ dépendent de trois paramètres, de même que les $S_5$ qui les contiennent. Il en résulte que les droites $\Delta$ par lesquelles passent des plans trisécants à $V_4^4$ forment un 11-complexe, dont font partie les droites par lesquelles passent des plans trisécants à $\Omega'^6_3$. Les droites $\Delta$ passant par un point P de $S_7$ appartiennent aux $S_5$ passant par P.

Les cordes de $V_3^3$ dans un tel $S_5$, qui passent par P, engendrent un $S_3$ et sont par conséquent toutes les cordes de $V_4^4$ passant par P. Les $S_5$ passant par P ont ainsi un $S_3$ fixe, sécant à $V_4^4$ suivant une quadrique. Si l'on projette $V_4^4$ d'un tel $S_3$ sur un $S_3$ indépendant pris dans $S_7$, on obtient une quadrique sur laquelle les $V_3^3$ situées dans les $S_5$ issus du $S_3$ centre de projection sont représentées par les génératrices d'un système. Le cône du complexe des droites $\Delta$ de sommet P, lieu des $S_5$ passant par P, est donc un cône $V_6^2$ ayant un $S_3$ double, et *le complexe des droites* $\Delta$ *situées dans un* $S_3$ $(i \leq 7)$ *est un complexe quadratique*. En particulier les droites $\Delta$ d'un plan enveloppent dans celui-ci une conique.

Par une droite $\Delta$ issue de P sur le cône $V_6^2$, il passe un seul $S_5$ générateur, qui contient une $V_3^3$ de $V_4^4$. Dans un $S_3$ de $V_4^4$, $V_3^3$ admet un plan et $\Omega'^6_3$ une quadrique qui coupe ce plan suivant une conique. Les génératrices de $V_4^4$ s'appuyant sur cette conique engendrent une réglée rationnelle normale $F_2^4$ de $S_5$ intersection de $S_5$ avec $\Omega'^6_3$. Les cordes de $\Omega'^6_3$ s'appuyant sur une droite $\Delta$ du complexe sont donc les cordes de $F_2^4$, qui rencontrent $F_2^4$ suivant une sextique elliptique, et engendrent une réglée rationnelle normale du 4ème ordre admettant $\Delta$ pour directrice. Par $\Delta$, il ne passe pas en général de plan trisécant à $F_2^4$ : $F_2^4$ de $S_5$ se projette de $\Delta$ sur un $S_3$ suivant une réglée du 4ème ordre admettant une cubique gauche double. Si $\Delta$ appartient à un $S_3$ de $S_5$ sécant à $F_2^4$ suivant une cubique gauche, et dans ce cas seulement, $F_2^4$ se projette alors suivant une réglée du 4ème ordre admettant une droite triple.

Ainsi *par une droite du 11-complexe quadratique relatif à* $V_4^4$, *il ne passe aucun plan trisécant à* $\Omega'^6_3$, *sauf si cette droite appartient au 10-complexe* engendré par tous les $S_3$ sécants à $\Omega'^6_3$ suivant une cubique gauche. Alors par une telle droite passent une infinité de plans trisécants engendrant le $S_3$ correspondant. Remarquons d'ailleurs que, puisque $\Omega'^6_3$ est située sur trois $V^4_4$, il y a trois 11-complexes quadratiques de droites $\Delta$, et comme tout $S_3$ commun à deux $S_5$, pris dans deux de ces complexes, coupe $\Omega'^6_3$ suivant une cubique gauche intersection des deux $V^3_3$ avec ce $S_3$, nos *trois complexes forment un faisceau*, et *leur 10-complexe commun est du quatrième ordre*. En particulier, dans un plan donné de $S_7$, les trois complexes quadratiques admettent des enveloppes de seconde classe d'un même faisceau tangentiel, et par chacune des quatre tangentes communes de ces coniques, il passe un $S_3$ lieu de plans trisécants. Quand on projette $\Omega'^6_3$ d'un plan sur $S_4$, on obtient donc une variété qui admet quatre droites triples : *La courbe triple apparente de $\Omega^6_3$ est formée de quatre droites*, en accord avec le résultat $t=4$.

Prenons alors dans un plan $\Pi$ de $S_7$, les quatre droites bases du faisceau tangentiel $D_1 D_2 D_3 D_4$. Par le point $M_{12}$ commun à $D_1$ et $D_2$ passe une corde de $\Omega'^6_3$, qui s'appuie sur la variété en $M_3$, $M_4$. Les cordes de $\Omega'^6_3$ qui rencontrent $D_1$ sont situées dans un $S_3$ passant par $D_1$ et engendrent une réglée $F^4_2$ passant doublement par la cubique gauche que ce $S_3$ détache sur $\Omega'^6_3$. Les $S_3$ relatifs à $D_1$ et $D_2$ ont en commun la droite $M_{12} M_3 M_4$; ils sont situés dans un même $S_5$ contenant $D_1$ et $D_2$ : en projection sur $S_4$ à partir de $\Pi$, les deux droites triples obtenues sont donc coplanaires. Les quatre droites triples apparentes de $\Omega^6_3$ sont deux à deux coplanaires. Le point commun relatif aux deux droites triples projetées à partir de $D_1$ et $D_2$ est la trace du $S_3$ joignant $\Pi$ à $M_{12} M_3 M_4$ : les plans $D_1 M_3 M_4$ et $D_2 M_3 M_4$ sont trisécants à $\Omega'^6_3$ qu'ils recoupent respectivement en $M_2$ et $M_1$. Nous avons ainsi par $\Pi$ un $S_3$ tétrasécant à $V_3^6$ en $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$. Toute face du tétraèdre $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ étant un plan trisécant à $\Omega'^6_3$, sécant à $\Pi$, coupe $\Pi$ suivant une des droites D, et toute arête de ce tétraèdre, commune à deux faces, passe par l'intersection des droites D correspondantes. Ainsi le quadrilatère complet $D_1\,D_2\,D_3\,D_4$ est la section par $\Pi$ d'un tétraèdre dont les sommets sont sur $\Omega'^6_3$; et *les quatre droites triples apparentes de $\Omega^6_3$ sont concourantes en un point quadruple apparent de cette variété.*

Il en résulte que *la variété $\Omega^6_3$ de $S_5$ à sections elliptiques, de première espèce admet une congruence linéaire de tétrasécantes.*

Notons encore au passage que si l'on projette $\Omega'^6_3$ de $S_7$ sur $S_5$ à partir d'une droite génératrice d'une des trois $V_4^4$ qui la contiennent, la $V_4^4$ en question a pour trace sur $S_5$

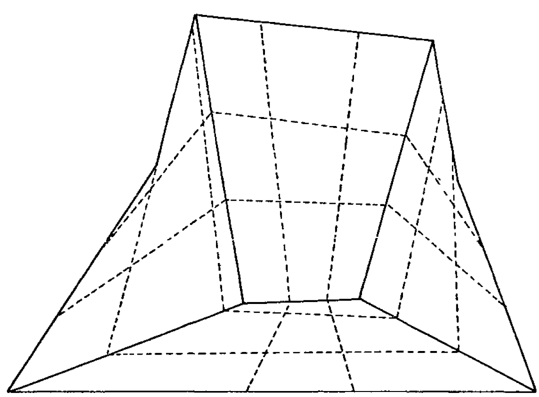

FIG. 2.

une $V_3^3$ de Segre, dont les plans sont les traces des $S_3$ de $V_4^4$. Comme chacun d'eux contient une quadrique de $\Omega'^6_3$, cette dernière variété est projetée suivant $V_3^3$ double. Dans un $S_3$ de $V_4^4$, la droite centre de projection admet un point d'où l'on peut mener un cône du second ordre circonscrit.

La conique de contact, projetée sur le plan correspondant de $V_3^3$ aussi suivant une conique, décrit dans $S_7$ et en projection une réglée rationnelle normale $F_2^4$ qui est la surface de diramation. *Sur cette forme double de* $V_3^3$, *la tétrasécante issue d'un point de* $S_5$ *devient la corde de* $F_2^4$ *passant par ce point.*

Remarquons encore, avant d'abandonner cette variété $\Omega'^6_3$ de $S_7$ à sections elliptiques de première espèce, qu'en la projetant sur l'espace ordinaire, sa triple génération au moyen de quadriques fournit un théorème connu de géométrie textile (Cf. Blaschke und Bol. «Geometrie der Gewebe», Springer, § 14, p. 132) et montre en outre une propriété globale de ce tissu : par un point générique de l'espace, il passe six surfaces de chaque système (réelles ou non).

### III. — Variétés du sixième ordre à sections curvilignes elliptiques de deuxième espèce.

Nous désignerons ainsi les variétés représentées par le système linéaire à 7 paramètres des surfaces cubiques passant par une cubique gauche Γ et ayant un point double en un point O de celle-ci. La variété normale $\Omega'^6_3$ appartient à $S_7$. Elle contient deux congruences de droites représentées par les droites de $S_3$ qui passent par O et les cordes de la cubique Γ. Par tout point de $\Omega'^6_3$ passe une droite de chaque famille; deux droites de la même famille ne se rencontrent jamais. Les droites d'une famille qui s'appuient à une droite de l'autre engendrent une réglée cubique représentée soit par un plan passant par O, soit par une quadrique passant par la cubique gauche Γ.

On met ainsi en évidence sur $\Omega'^6_3$ deux familles à deux paramètres de réglées $F_2^3$ qui sont des réseaux, car par deux points arbitraires de $\Omega'^6_3$ il passe une $F_2^3$ de chaque famille. Deux $F_2^3$ de la même famille ont une génératrice commune et deux $F_2^3$ de familles différentes ont une conique commune, représentée par une conique passant par O et bisécante à Γ. Deux telles $F_2^3$ constituent donc une section hyperplane.

Etudions dans $S_7$ les cordes de $\Omega'^6_3$. Soient $M_1$, $M_2$ les points communs à $\Omega'^6_3$ et une de ses cordes : par $M_1$ et $M_2$ passe une conique de $\Omega'^6_3$ intersection des $F_2^3$ de chaque famille passant par $M_1$ et $M_2$. La corde $M_1 M_2$ est donc tout entière dans le plan de cette conique, plan commun aux $S_4$ coupant $\Omega'^6_3$ suivant les deux $F_2^3$. Or ce plan, qui peut décrire tous les $S_4$ d'un réseau, engendre une variété $W_6$ à six dimensions, et il y a ainsi un lieu des cordes de $\Omega'^6_3$. D'autre part, si P appartient à une corde de $\Omega'^6_3$, il est dans le plan d'une conique de $\Omega'^6_3$ et alors il passe par P un faisceau de cordes de $\Omega'^6_3$ situé dans ce plan.

Ainsi, *en projection sur* $S_6$ *d'un point générique de* $S_7$, *la variété* $\Omega'^6_3$ *n'a pas de point double impropre.*

*Si on projette* $\Omega'^6_3$ sur $S_5$ à partir d'une droite Δ de $S_7$, on obtient *une* $\Omega^6_3$ *qui admet trois droites doubles impropres* (car $d = 3$ d'après les formules de Severi), ces droites correspondant aux trois faisceaux de cordes de $\Omega'^6_3$ issues des points communs à Δ et à $W_6^3$, qui est donc une variété cubique.

*En projection sur* $S_4$ â partir d'un plan de $S_7$, *on obtient une* $\Omega^6_3$ *qui admet une surface double d'ordre neuf* à sections de genre un (car $b = 9$, $p = 1$ d'après les formules de Severi) *qui est une réglée elliptique* dont les génératrices correspondent aux faisceaux de cordes issues des points de la cubique commune au plan centre de projection et à $W_6^3$.

La vérification analytique est d'ailleurs très simple : si l'on choisit O pour origine des coordonnées, et les axes tels que la cubique Γ soit représentée par

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3,$$

la variété $\Omega'^6_3$ est représentée par

$$X_1 = x(x^2-y),\ X_2 = y(x^2-y),\ X_3 = z(x^2-y),\ X_4 = x(z-xy),$$
$$X_5 = y(z-xy),\ X_6 = z(z-xy),\ X_7 = y(xz-y^2),\ X_8 = z(xz-y^2).$$

$W^3_6$ lieu des plans des coniques de $\Omega'^6_3$ est aussi le lieu des deux réseaux de $S_4$ qui la coupent suivant ses $F^3_2$. Prenons les $F^3_2$ représentées par les plans

$$z = \alpha x + \beta y,$$

elles sont situées dans les $S_4$ :

$$\begin{aligned} X_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2, \\ X_6 &= \alpha X_4 + \beta X_5, \\ X_8 &= \alpha (X_3 + X_5) + \beta X_7, \end{aligned}$$

dont le lieu est bien une variété cubique

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \\ X_3 + X_5 & X_7 & X_8 \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie que dans $S_5$ *les trois droites doubles impropres sont deux à deux gauches*, car si l'on prend pour Δ la droite $O_3 O_5$ qui recoupe $W^3_6$ en U (0, 0, 1, 0, — 1, 0, 0, 0), on obtient comme plans correspondants : $O_1 O_3 O_8$ ; $O_4 O_5 O_7$, et le plan $X_3 + X_5 = 0$ dans $O_2 O_3 O_5 O_6$, c'est-à-dire le plan $O_2 O_6 U$.

On voit aisément sur l'équation de la variété cubique $W^3_6$ que les points doubles de cette variété sont précisément les points de $\Omega'^6_3$. Il en résulte que les droites Δ par lesquelles passe un plan trisécant de $\Omega'^6_3$ forment effectivement un 11-complexe, et que *la quartique triple* *apparente de* $\Omega_3^6$ *n'est pas dégénérée.* Par conséquent *il n'y a aucun point quadruple apparent.* En effet il suffit de vérifier que par $\Delta$ ne passent pas une infinité de plans trisécants. Or il n'en peut passer deux; car si $T_1 T_2 T_3$, $T'_1 T'_2 T'_3$ sont deux tels plans, la droite $T_1 T_2$, corde de $\Omega'^6_3$, rencontre $\Delta$ en un point $M_3$ de $W_6^3$: il en est de même de $T'_1 T'_2$ et ceci ayant lieu pour chacun des côtés des triangles $T_1 T_2 T_3$, $T'_1 T'_2 T'_3$, ces triangles sont homologiques et les côtés homologues passent par $M_1 M_2 M_3$ intersections de $\Delta$ avec $W_6^3$. Alors le plan de $W_6^3$ relatif à $M_1$ coupe $\Omega'^6_3$ suivant une conique qui passe par $T_2 T_3 T'_2 T'_3$, et de même en permutant circulairement. Il passe donc par $T_1$ et $T'_1$ deux coniques de $\Omega'^6_3$, ce qui est impossible si elles ne dégénèrent pas en ayant la droite $T_1 T'_1$ commune. Mais si les trois droites $T_i T'_i$ sont des génératrices dont deux quelconques forment une conique, c'est que deux quelconques sont de familles différentes, ce qui est absurde.

*La quartique triple de* $\Omega_3^6$ *dans* $S_4$ *est une quartique rationnelle normale et la surface double, réglée du neuvième ordre elliptique, est le lieu des cordes de cette quartique qui joignent deux à deux les quatre points d'un groupe qui décrit une série linéaire* $g_4^1$. En effet, si l'on projette sur un plan cette réglée à partir de deux de ses points triples pris sur la quartique, on obtient bien une enveloppe de troisième classe elliptique, car les cordes d'une conique qui joignent les points d'un groupe d'une série $g_4^1$ sont les composantes des coniques dégénérées du réseau linéaire défini par la conique donnée et le faisceau des coniques qui découpent sur elle la série $g_4^1$, et ces coniques dégénérées enveloppent la Cayleyenne du réseau.

Parmi les variétés du sixième ordre à sections curvilignes elliptiques de seconde espèce, on rencontre un type particulier qui est la projection des variétés du septième et du huitième ordre à sections curvilignes elliptiques : Ce sont les *variétés représentées sur* $S_3$ *par un système linéaire de quadriques*. En particulier la variété est du sixième ordre quand elle est représentée par un système linéaire de quadriques ayant deux points bases $O_1, O_2$. Les deux familles de génératrices rectilignes sont représentées par les droites issues de $O_1$ ou de $O_2$. La variété $\Omega_3^6$ de $S_5$ est représentée par un système linéaire à cinq paramètres $|Q|$ de telles quadriques, et si $P_1 P_2 P_3 P_4$ représentent les traces d'une tétrasécante, il passe par $O_1\ O_2\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ des quadriques de $|Q|$ dépendant de trois paramètres. Or six points définissent une cubique gauche C, et il y a un réseau de $|Q|$ contenant cette cubique. Cette courbe C représente donc une quartique plane de $\Omega_3^6$. La tétrasécante considérée est donc spéciale, et $\Omega_3^6$, dont toutes les tétrasécantes sont spéciales, a *ses tétrasécantes* qui *décrivent une hypersurface lieu des plans qui coupent* $\Omega_3^6$ *suivant des quartiques*.

Ce résultat nous invite à étudier les quartiques situées sur les variétés $\Omega_3^6$ générales de seconde espèce. Nous avons vu que les coniques de la variété sont représentées par les coniques passant par O et bisécantes à la cubique base Γ. La section de $\Omega_3'^6$ par un $S_5$ contenant une telle conique contient en outre une courbe $C_4$ du quatrième ordre représentée par une biquadratique ayant O double et tétrasécante à Γ. $C_4$ est donc rationnelle et bisécante à la conique. Nous allons montrer que la famille des quartiques rationnelles ainsi mises en évidence sur $\Omega_3'^6$ est telle que par quatre points arbitraires de $\Omega_3'^6$ il en passe une et une seule.

Il revient au même de montrer que par quatre points arbitraires de $S_3$ il passe une biquadratique et une seule ayant O double et tétrasécante à Γ. Soient $M_1 M_2 M_3 M_4$ les points donnés : les quadriques passant par O $M_1 M_2 M_3 M_4$ forment un système linéaire à quatre paramètres, et chacune d'elles coupe $\Gamma$ en cinq points. Nous avons ainsi sur $\Gamma$ une $g_5^4$. Rapportons projectivement les quadriques du système considéré aux hyperplans d'un espace $S_4$ : la courbe $\Gamma$ sera représentée par une quintique rationnelle $C_5$, et quatre points de $C_5$ représentent quatre points d'une biquadratique passant par O $M_1 M_2 M_3 M_4$ et tétrasécante à $\Gamma$ lorsque ce sont les traces d'un plan tétrasécant à $C_5$.

*Les plans tétrasécants à une quintique rationnelle de* $S_4$ *forment une congruence linéaire* que nous allons étudier : En effet, si nous projetons d'un point P de $S_4$ sur un $S_3$, la quintique rationnelle projection admet, comme il est connu, une tétrasécante et une seule, trace d'un plan de $S_4$ passant par P. D'autre part, la quintique rationnelle de $S_4$ admet une trisécante unique [1]. (Car cinq points de $C_5$ situés dans un même hyperplan ont des paramètres liés par une relation multilinéaire symétrique qui sera vérifiée quels que soient $t_4$ et $t_5$ si les coefficients de $t_4 t_5$, $t_4 + t_5$ et indépendants de $t_4$ et $t_5$ sont nuls : ceci fournit trois relations multilinéaires symétriques en $t_1$, $t_2$, $t_3$ ; les fonctions symétriques élémentaires de $t_1$, $t_2$, $t_3$ sont ainsi déterminées par trois équations linéaires indépendantes, et il y a bien sur $C_5$ un groupe unique de trois points alignés.) Si l'on projette la quintique de $\Delta$ sur un plan, on obtient une conique : $C_5$ est ainsi située sur une hyperquadrique ayant $\Delta$ pour droite double. Associons projectivement les points de $\Delta$ et ceux de $C_5$ de manière que les trois points de $C_5$ situés sur $\Delta$ soient confondus

(1) D'après BERZOLARI (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 9, 1895) et CASTELNUOVO (*ibidem*, t. 3, 1889), une courbe d'ordre $n$ et de genre $p$ de $S_4$ admet $N = C^3_{n-2} - (n-4)p$ trisécantes.

avec leurs homologues. Les droites qui joignent les points homologues engendrent une réglée qui admet $\Delta$ pour directrice simple, et que tout hyperplan passant par $\Delta$ coupe suivant deux génératrices. C'est une réglée du troisième ordre $F_2^3$ évidemment située sur la quadrique précédente.

*Ainsi la surface focale de cette congruence linéaire de plans est la réglée cubique* $F_2^3$, car, de tout point de cette réglée, $C_5$ se projette suivant une quintique, ou éventuellement une quartique, tracée sur une quadrique projection de $F_2^3$ et ayant les génératrices d'un système, celui auquel appartient la projection de $\Delta$, respectivement pour tétrasécantes ou trisécantes. Il passe donc par un tel point une infinité de plans tétrasécants à $C_5$. D'ailleurs la famille de plans s'identifie avec celle des plans des coniques de $F_2^3$ : en effet, tout plan tétrasécant à $C_5$ est en même temps tétrasécant, en des points non tous alignés, à $F_2^3$ qui passe par $C_5$ ; il coupe donc $F_2^3$ suivant une conique.

Cherchons maintenant dans cette congruence de plans ceux qui représentent une biquadratique passant par $O\,M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ tétrasécante à $\Gamma$ qui ait en outre $O$ pour point double. Ceci signifie que parmi les quadriques passant par la biquadratique, il y a un cône de sommet $O$. Or les cônes de sommet $O$ passant par $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ forment un faisceau contenu dans le système linéaire étudié : ils sont représentés par les hyperplans d'un faisceau, qui coupent $C_5$ en un point fixe $\omega$ représentatif de $O$, qui fait évidemment partie du groupe $G_5$ relatif à tout cône de sommet $O$. Ce faisceau d'hyperplans a pour base un plan $\Pi$ passant par $\omega$ et nous devons déterminer les plans tétrasécants à $C_5$ par lesquels passe un hyperplan contenant $\Pi$. L'hyperplan coupera alors $F_2^3$ suivant la conique située dans le plan tétrasécant et la génératrice de $\omega$. Cet hyperplan existe et est unique : c'est l'hyperplan qui joint $\Pi$ à la génératrice de $F_2^3$ issue de $\omega$.

Ainsi il existe bien une biquadratique unique ayant O double, tétrasécante à $\Gamma$ et passant par $M_1 M_2 M_3 M_4$, c'est-à-dire que *par quatre points arbitraires de* $\Omega'^6_3$ *passe une quartique rationnelle et une seule tracée sur* $\Omega'^6_3$.

Supposons alors que par un plan de $S_7$ passe un $S_3$ tétrasécant à $\Omega'^6_3$ : par les quatre traces de $S_3$ passe une quartique rationnelle de $\Omega'^6_3$ tout entière contenue dans un $S_4$ passant par $S_3$, et par conséquent par notre plan. Mais alors tout $S_3$ de $S_4$ passant par ce plan coupe aussi la quartique et aussi $\Omega'^6_3$ en quatre points : il passe alors par le plan un faisceau linéaire de $S_3$ tétrasécants à $\Omega'^6_3$. Ceci montre que lorsqu'on projette $\Omega'^6_3$ de $S_7$ à partir d'un plan sur $S_4$, on obtient une variété qui n'a généralement pas de point quadruple : si elle en a un, elle en a une infinité situés en ligne droite. Il revient au même de dire que *les tétrasécantes de* $\Omega^6_3$ *de seconde espèce dans* $S_5$ *sont réparties sur une variété lieu de plans qui coupent* $\Omega^6_3$ *suivant des quartiques rationnelles.*

### IV. — Variétés du sixième ordre à sections curvilignes elliptiques de troisième espèce.

Nous appellerons ainsi les variétés représentées par le système linéaire à 7 paramètres de surfaces cubiques ayant en un point donné O un point double biplanaire, dont l'un des plans tangents $\Pi$ est fixe, ces surfaces passant en outre par une cubique plane fixe $\Gamma$ dans un plan passant par O. Cette cubique $\Gamma$ doit donc être choisie avec un point double en dont O, une des tangentes est la trace de $\Pi$.

Si l'on prend $\Pi$ pour plan $x=0$ et la seconde tangente de $\Gamma$ pour axe OY, le plan de $\Gamma$ étant $z = 0$, on peut écrire

$$\Gamma \equiv f_3(xy) + xy = 0,$$

et la variété $\Omega'^6_3$ normale de $S_7$ est représentée par

$$X_1 = \Gamma, \quad X_2 = xz, \quad X_3 = x^2 z, \quad X_4 = xyz,$$
$$X_5 = y^2 z, \quad X_6 = xz^2, \quad X_7 = yz^2, \quad X_8 = z^3.$$

Cette variété contient une congruence de droites : par tout point de la variété il en passe une et une seule; ces droites sont représentées par les droites passant par O. Les sections hyperplanes passant par $O_1$, $O_2$ sont représentées par le plan $z = 0$ de $\Gamma$ et les cônes du second ordre de sommet O. En particulier un $S_5$ passant par $O_1 O_2$ coupe donc $\Omega'^6_3$ suivant quatre génératrices rectilignes, ce qui montre que $O_1 O_2$ *est une directrice double propre pour* $\Omega'^6_3$. Le lieu des plans joignant $O_1 O_2$ aux génératrices de $\Omega'^6_3$ est le cône ayant $O_1 O_2$ pour sommet, et pour base

$$X_3 = x^2, \quad X_4 = xy, \quad X_5 = y^2, \quad X_6 = xz, \quad X_7 = yz, \quad X_8 = z^2,$$

qui est une surface $F^4_2$ de Veronese.

Les plans passant par O représentent des réglées cubiques $F^3_2$ lieux des génératrices qui s'appuient à une conique projetée de $O_1 O_2$ sur une conique de $F^4_2$. Il en résulte en particulier que les cordes de $\Omega'^6_3$ sont situées sur le cône $W^3_6$ ayant $O_1 O_2$ pour sommet, et pour base la variété $M^3_4$ lieu des cordes de $F^4_2$ : $W^3_6$ est aussi le lieu des $S_5$ contenant les $F^3_2$ de $\Omega'^6_3$, et par tout point P de $W^3_6$ il passe un tel $S_5$ : les cordes de $\Omega'^6_3$ issues de P décrivent le plan issu de P qui coupe $F^3_2$ suivant une conique.

Il y a donc sur les projections de $\Omega'^6_3$ sur des espaces à 6, 5, 4 dimensions, *outre la droite double propre*, projection de $O_1 O_2$, *les mêmes éléments doubles impropres que pour une variété de seconde espèce.*

Ceci nous incite à étudier les quartiques rationnelles de $\Omega'^6_3$ : les coniques de $\Omega'^6_3$ sont représentées par les coniques passant par O, tangentes à $\Pi$, et unisécantes à $\Gamma$ en dehors de O : elles dépendent de quatre paramètres et par deux points arbitraires de $\Omega'^6_3$, il en passe une et une seule. Les sections de $\Omega'^6_3$ par des $S_5$ sont représentées par des sextiques ayant en O un point triple dont les tangentes sont situées dans $\Pi$, et trisécantes à $\Gamma$. Il en résulte que les quartiques résiduelles des coniques par rapport au système des sections par des $S_5$ sont représentées par les biquadratiques ayant en O un point double dont les tangentes sont dans $\Pi$, et bisécantes à $\Gamma$. Ces courbes dépendent de 8 paramètres; cherchons celles qui passent par quatre points arbitraires de $\Omega'^6_3$ représentés par $M_1 M_2 M_3 M_4$. Les biquadratiques qui les représentent sont donc situées sur les quadriques passant par $M_1 M_2 M_3 M_4$ et O, et ayant en O le plan $\Pi$ pour plan tangent. Ces quadriques forment un réseau : rapportons les projectivement aux droites d'un plan $\varpi$. Chaque quadrique coupe $\varpi$ en dehors de O en trois points, de sorte que $\Gamma$ est représentée sur $\varpi$ par une cubique unicursale $\gamma$. Deux de nos quadriques ont en commun une biquadratique passant par $M_1 M_2 M_3 M_4$ et ayant O pour point double à tangentes situées dans $\Pi$; une telle biquadratique est ainsi représentée par un point de $\varpi$, elle est sécante à $\Gamma$ si le point représentatif est situé sur $\gamma$, et elle est bisécante à $\Gamma$ lorsque le point représentatif est point double de $\gamma$. Il existe donc une solution et une seule.

Ainsi, par quatre points arbitraires d'une variété $\Omega'^6_3$ de 3ème espèce de $S_7$ il passe une quartique unicursale de la variété. En projection sur $S_5$, les quatre traces d'une tétrasécante de $\Omega^6_3$ sont situées sur une quartique rationnelle de $\Omega^6_3$, quartique qui est donc plane ; *les tétrasé-*

*cantes de $\Omega_3^6$ décrivent les plans d'une hypersurface, et non une congruence linéaire.*

En résumé, seules les variétés du sixième ordre à sections curvilignes elliptiques de première espèce nous ont conduit à une congruence linéaire de tétrasécantes.

On peut se proposer, par comparaison, d'examiner comment est constituée la famille des quartiques rationnelles sur $\Omega_3^6$ de $S_7$ de première espèce : si l'on représente $\Omega_3^6$ sur $S_3$ au moyen des surfaces cubiques qui passent par trois droites $D_1, D_2, D_3$ deux à deux gauches, les coniques d'une des trois familles sont représentées par les coniques bisécantes à $D_1$ et unisécantes à $D_2$ et $D_3$. Elles dépendent de quatre paramètres comme pour les variétés de deuxième et de troisième espèce, mais par deux points génériques de $\Omega'^6_3$ il n'en passe aucune ; au contraire, par deux points dont les images sont coplanaires avec $D_1$ il en passe un faisceau linéaire, le plan passant par $D_1$ représentant d'ailleurs une quadrique de $\Omega'^6_3$. Les résiduelles des coniques par rapport au système des sections par les $S_5$, qui sont représentées par des sextiques tétrasécantes à $D_1$, $D_2$, $D_3$, sont donc représentées par des monoquadratiques trisécantes à $D_2$ et $D_3$ et admettant $D_1$ comme corde. Ces courbes dépendent de huit paramètres comme pour les variétés de deuxième et de troisième espèce, mais par quatre points génériques de $\Omega'^6_3$ il n'en passe aucune car il ne passe aucune quadrique dans $S_3$ par $D_2$ et $D_3$ et par quatre points arbitraires. Si au contraire les quatre points représentatifs sont sur une même quadrique avec $D_2$ et $D_3$, cette quadrique coupe $D_1$ en deux points qui doivent être sur la monoquadratique, et par six points d'une quadrique il passe un faisceau linéaire de monoquadratiques ayant les génératrices d'un système donné, celui de $D_2$, pour trisécantes. De sorte que si par quatre points de $\Omega'^6_3$ de première espèce il passe une quartique rationnelle de la variété, il en passe un faisceau.

### V. — Variétés du septième ordre à sections curvilignes elliptiques.

Les variétés du septième ordre à sections curvilignes elliptiques sont représentées par le système linéaire à huit paramètres des quadriques ayant un point-base donné O. Ces variétés sont normales dans $S_8$ et contiennent une congruence de génératrices rectilignes, représentée par la gerbe des droites issues de O :

*Par un point de $\Omega^7_3$ passe une génératrice rectiligne et une seule.*

Toute section hyperplane de $\Omega^7_3$ contient en général deux génératrices rectilignes. Toutefois elle est réglée quand elle est représentée sur $S_3$ par un cône du second ordre de sommet O.

De tels cônes forment un système linéaire à cinq paramètres et représentent dans $S_8$ les hyperplans passant par un plan fixe $\Pi$. Ce plan $\Pi$ appartient à $\Omega^7_3$; la section hyperplane contenant $\Pi$ est complétée par une réglée du sixième ordre rationnelle normale dont la conique directrice est dans $\Pi$ (un cône de sommet O recoupe en effet deux quadriques passant par O en six points variables). *Les génératrices rectilignes de $\Omega^7_3$ rencontrent toutes* $\Pi$.

La variété $\Omega^7_3$ contient également une famille à quatre paramètres de coniques représentées par les droites de $S_3$ : *par deux points pris arbitrairement sur $\Omega^7_3$ passe une conique et une seule tracée sur cette variété.* L'ensemble des génératrices rectilignes de $\Omega^7_3$ qui rencontrent une conique fixe engendre une réglée cubique normale de $S_4$ représentée par un plan passant par O. Une section hyperplane contenant une telle réglée cubique est complétée par une surface du quatrième ordre située dans un $S_5$ représentée par un plan générique de $S_3$. Cette surface du quatrième ordre qui contient un réseau homaloïdal de coniques, représenté par le réseau des droites du plan, est une surface de Veronese. Une telle surface de Veronese et une réglée cubique de $\Omega_3^7$ ont une conique commune.

De l'existence de la famille des coniques situées sur $\Omega_3^7$ nous déduisons une propriété de ses cordes : le lieu des cordes de $\Omega_3^7$ est aussi le lieu des plans des coniques de $\Omega_3^7$, car une corde coupant $\Omega_3^7$ en M, M' est aussi corde de la conique de cette variété, qui passe par M et M'. Par un point de ce lieu passent alors une infinité de cordes formant un faisceau linéaire. En d'autres termes, la projection de $\Omega_3^7$ sur $S_6$ n'admet en général pas de point double; si elle en admet un, elle admet alors toute une droite double. La projection de $\Omega_3^7$ sur $S_5$ admet une courbe double impropre dégénérée en droites, elle admet une surface double apparente réglée. On peut préciser ceci en déterminant les caractères au moyen des formules de Severi.

La section hyperplane est une surface d'ordre $n = 7$ à sections de genre $\pi = 1$, représentée sur le plan par les cubiques passant par deux points fixes. Il en résulte que sa classe est $n' = 12$, et $t = 10$ (car $p_a = 0$, la surface étant rationnelle). Les formules de Severi donnent alors :

$$d = 6, \qquad a = 14, \qquad b = 14, \qquad p = 3,$$

Et nous voyons que

*La variété $\Omega_3^7$ à sections elliptiques de $S_5$ admet six droites doubles impropres et une surface double apparente réglée du quatorzième ordre et de genre* **3**. *La courbe triple apparente est du dixième ordre.*

Si la congruence des tétrasécantes est linéaire, ses caractères doivent être, d'après les formules du Chapitre II,

$$k = 4, \qquad m = 15, \qquad \mu = 14, \qquad \rho = 99.$$

Montrons d'abord que la variété admet effectivement des tétrasécantes dépendant de quatre paramètres.

Nous avons vu que $\Omega_3^7$ contient une famille à 4 paramètres de coniques, représentées par les droites de $S_3$. Coupons $\Omega_3^7$ par le plan d'une telle conique : autrement dit, dans $S_3$ considérons les quadriques du système linéaire à 5 paramètres représentatif de $\Omega_3^7$ qui contiennent une droite donnée D. Ces quadriques forment un réseau qui admet outre D quatre points-base dont l'un est O; la variété $\Omega_3^7$ recoupe donc le plan de la conique en trois points $M_1, M_2, M_3$. Les trois droites $M_1M_2$, $M_2M_3$ et $M_1M_3$ sont *trétrasécantes à* $\Omega_3^7$. Réciproquement toute tétrasécante de $\Omega_3^7$ peut être obtenue 6 fois de cette façon puisque par deux de ses points d'appui à $\Omega_3^7$ passe une conique de la variété.

Montrons maintenant que *les tétrasécantes situées dans un hyperplan engendrent effectivement une variété* $V_3^{15}$ *du quinzième ordre*. A cet effet, choisissons un hyperplan passant par $\Pi$; il recoupe $\Omega_3^7$ suivant une réglée rationnelle du sixième ordre $F_2^6$ dont la directrice minima est une conique située dans $\Pi$. Le lieu des tétrasécantes situées dans cet hyperplan se compose :

*a)* Du lieu des tétrasécantes de $F_2^6$ qui est du troisième ordre, comme on le vérifie en supposant $F_2^6$ dégénérée en six faisceaux-plans $\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6$ dont deux consécutifs ont un rayon commun virtuellement simple; les tétrasécantes sont alors appuyées soit sur $\Phi_1\,\Phi_2\,\Phi_4\,\Phi_6$, soit sur $\Phi_1\,\Phi_3\,\Phi_4\,\Phi_6$, soit sur $\Phi_1\,\Phi_3\,\Phi_5\,\Phi_6$. Elles engendrent des congruences linéaires dans les espaces à trois dimensions

$\Phi_1 \Phi_2$, $\Phi_3 \Phi_4$ et $\Phi_5 \Phi_6$. On peut aussi raisonner de la manière suivante :

Coupons le lieu des tétrasécantes de $F_2^6$ par une droite que nous choisirons trisécante à $F_2^6$ ; il n'y a aucune tétrasécante qui la rencontre en dehors de $F_2^6$, car le plan de ces deux droites couperait $F_2^6$ en 7 points. D'autre part, par un point de $F_2^6$ il passe une seule tétrasécante de cette surface, car de ce point elle se projette suivant une réglée rationnelle $F_2^5$ qui a un seul point triple. La trisécante rencontre donc le lieu des tétrasécantes en trois points simples.

*b)* Du lieu des trisécantes à $F_2^6$ qui rencontrent $\Pi$. Par un point arbitraire de l'espace on peut mener quatre trisécantes à $F_2^6$, car $t = 4$. Ce sont d'ailleurs, sur la forme dégénérée, les droites qui s'appuient sur $\Phi_1 \Phi_3 \Phi_5$, ou $\Phi_1 \Phi_3 \Phi_6$, ou $\Phi_1 \Phi_4 \Phi_6$, ou enfin $\Phi_2 \Phi_4 \Phi_6$. $\Pi$ est donc quadruple pour cette variété. Si on la coupe par un $S_3$ issu de $\Pi$ qui recoupe $F_2^6$ suivant quatre génératrices, on obtient outre $\Pi$ les quatre quadriques lieux des trisécantes de ce système de quatre droites. L'ordre de cette variété est donc

$$4 \times 2 + 4 = 12,$$

et l'on a bien

$$m = 12 + 3 = 15.$$

Ceci nous incite à vérifier que la congruence des tétrasécantes de $\Omega_3^7$ est bien linéaire. Nous ferons cette vérification analytiquement, après avoir fait quelques remarques géométriques préalables.

Dire que la congruence des tétrasécantes $\Omega_3^7$ est linéaire signifie que, en projection sur $S_4$, la variété admet un point quadruple et un seul. Elle est représentée sur $S_3$ par un système $|Q|$ de quadriques passant par $O$ et dépendant linéairement de quatre paramètres ; il y a dans ce système un faisceau linéaire de cônes de sommet O qui représentent le faisceau des sections passant par Π. Dans ce faisceau prenons pour cônes de base deux cônes dégénérés, et posons

$$Q_4 = xy, \qquad Q_5 = z(z - x - y).$$

Les trois autres quadriques de base, qui par hypothèse ne sont pas des cônes, ont en O des plans tangents qui décrivent toute la gerbe de sommet O ; on peut prendre celles qui ont pour plans tangents les plans de coordonnées :

$$Q_1 = x - A_1 x^2 - A_1' y^2 - B_1 xz - B_1' yz,$$
$$Q_2 = y - A_2 x^2 - A_2' y^2 - B_2 xz - B_2' yz,$$
$$Q_3 = z - A_3 x^2 - A_3' y^2 - B_3 xz - B_3' yz,$$

(les termes en $xy$ et $z^2$ étant éliminés par combinaison linéaire avec $Q_4$ et $Q_5$).

Dire que la variété admet un point quadruple, c'est dire qu'*il existe dans l'espace un groupe* G *de quatre points distincts de* O *qui impose une seule condition aux quadriques* Q. Le système des quadriques Q qui passent par G contient donc un cône du faisceau

$$Q_5 = \mu_4 Q_4.$$

Nous pouvons écrire que ce système est extrait de

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 + \lambda_4 Q_4 + \lambda_5 Q_5 = 0,$$

en posant

$$\lambda_4 = -\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3 - \lambda_5 \mu_4.$$

De sorte que $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ doivent être choisis pour que les quadriques

$$Q_i - \mu_i Q_4 = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$
$$Q_5 - \mu_4 Q_4 = 0,$$

aient quatre points communs en dehors de O. Or les quadriques

$$Q_1 - \mu_1 Q_4 = 0,$$
$$Q_5 - \mu_4 Q_4 = 0$$

ont en commun une biquadratique à point double O, donc unicursale, que nous représenterons paramétriquement en posant

$$z = \lambda x,$$
$$\lambda(\lambda - 1)x = (\lambda + \mu_4)y,$$
$$\frac{1}{x} = A_1 + B_1\lambda + A'_1\frac{\lambda^2(\lambda-1)^2}{(\lambda+\mu_4)^2} + (B'_1\lambda + \mu_1)\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda+\mu_4}.$$

Coupons par cette biquadratique les deux autres quadriques

$$Q_2 - \mu_2 Q_4 = 0,$$
$$Q_3 - \mu_3 Q_4 = 0.$$

Nous obtenons

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda+\mu_4}\cdot\frac{1}{x} = A_2 + B_2\lambda + A'_2\frac{\lambda^2(\lambda-1)^2}{(\lambda+\mu_4)^2} + (B'_2\lambda + \mu_2)\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda+\mu_4},$$
$$\lambda\cdot\frac{1}{x} = A_3 + B_3\lambda + A'_3\frac{\lambda^2(\lambda-1)^2}{(\lambda+\mu_4)^2} + (B'_3\lambda + \mu_3)\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda+\mu_4},$$

soit en posant

$$P_i \equiv (A_i + B_i\lambda)(\lambda+\mu_4)^2 +$$
$$A'_i\lambda^2(\lambda-1)^2 + (B'_i\lambda + \mu_i)\lambda(\lambda-1)(\lambda+\mu_4),$$

les relations

$$\lambda(\lambda-1)P_1 = (\lambda+\mu_4)P_2 = (\lambda-1)P_3,$$

qui doivent avoir quatre racines communes en $\lambda$.

Les deux équations

$$\lambda P_1 = P_3,$$
$$(\lambda+\mu_4)P_2 = (\lambda-1)P_3$$

sont du cinquième ordre en $\lambda$ ; mais on peut leur substituer

$$f \equiv (A'_1 + B'_1)[(\lambda + \mu_4) P_2 - (\lambda - 1) P_3] -$$
$$- (A'_2 + B'_2 - A'_3 - B'_3)[\lambda P_1 - P_3] = 0,$$
$$g \equiv \frac{1}{\lambda} \{ A_3 [(\lambda + \mu_4) P_2 - (\lambda - 1) P_3] +$$
$$+ (A_2 \mu_4 + A_3)[\lambda P_1 - P_3] \} = 0,$$

qui sont du quatrième ordre. Nous devons déterminer $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ de façon que le rapport $f/g$ soit indépendant de $\lambda$. La valeur de ce quotient peut en particulier être obtenue pour $\lambda = -\mu_4$,

$$f/g = \frac{(A'_1 + B'_1) A'_3 (1 + \mu_4) + (A'_2 + B'_2 - A'_3 - B'_3)(A'_1 \mu_4 + A'_3)}{A_2 A'_1 \mu_4 + A_3 A'_1 + A_2 A'_3 - A_3 A'_3}.$$

Elle peut aussi être obtenue pour $\lambda = 1$,

$$f/g = \frac{(A'_1 + B'_1)(A_2 + B_2)(1 + \mu_4) - (A'_2 + B'_2 - A'_3 - B'_3)(A_1 + B_1 - A_3 - B_3)}{A_3 (A_2 + B_2)(1 + \mu_4) + (A_1 + B_1 - A_3 - B_3)(A_2 \mu_4 + A_3)}.$$

Ces deux expressions, homographiques en $\mu_4$, ne sont égales que pour une seule valeur de $\mu_4$, et leur valeur commune $\xi$ est bien déterminée et unique. Par ce choix imposé pour $\mu_4$, l'équation

$$f - \xi g = 0$$

se réduit au second ordre en $\lambda$, après élimination du facteur $(\lambda + \mu_4)(\lambda - 1)$. Comme $f$ et $g$ sont linéaires en $\mu_1, \mu_2, \mu_3$, l'annulation identique du trinôme précédent conduit à un système de trois équations linéaires en $\mu_1, \mu_2, \mu_3$, qui sont à leur tour déterminées de façon unique, comme on le vérifie sans peine.

La solution étant unique, *la congruence des tétrasécantes de $\Omega_3^7$ est bien linéaire.*

Nous avons vu que cette congruence admet des variétés focales singulières, puisque

$$\rho = 99.$$

Nous allons en déterminer la structure. Considérons la variété $\Omega_3^7$ de $S_5$ représentée par le système linéaire $|Q|$ à cinq paramètres de quadriques passant par O. Un plan passant par O représente une réglée cubique $F_2^3$ tracée sur $\Omega_3^7$. L'hyperplan de cette réglée recoupe $\Omega_3^7$ suivant une surface de $F_2^4$ projection d'une surface de Veronese, représentée par un plan. Il y a ainsi dans $S_3$ un réseau de plans qui représentent des $F_2^4$ situées dans des hyperplans. Soit

$$u'x + v'y + w'z + h't = 0$$

un tel plan qui, associé à

$$ux + vy + wz = 0,$$

représente une section hyperplane

$$\Sigma\lambda_i Q_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

avec

$$\begin{aligned} Q_i \equiv A_i x^2 + A'_i y^2 + A''_i z^2 + 2\,B_i yz + 2\,B'_i zx + 2\,B''_i xy + \\ + 2\,C_i xt + 2\,C'_i yt + 2\,C''_i zt. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned} uu' &= \Sigma\lambda_i A_i,\\ vv' &= \Sigma\lambda_i A'_i,\\ ww' &= \Sigma\lambda_i A''_i,\\ vw' + wv' &= 2\,\Sigma\lambda_i B_i,\\ uw' + wu' &= 2\,\Sigma\lambda_i B'_i,\\ vu' + uv' &= 2\,\Sigma\lambda_i B''_i,\\ uh' &= 2\,\Sigma\lambda_i C_i,\\ vh' &= 2\,\Sigma\lambda_i C'_i,\\ wh' &= 2\,\Sigma\lambda_i C''_i. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

L'élimination des $\lambda_i$ conduit à trois relations linéaires entre $uu'$, $vv'$, $ww'$, $vw' + wv'$, $uw' + wu'$, $vu' + uv'$, $uh'$, $vh'$ et $wh'$, qui définissent la correspondance entre les deux plans associés. Ces trois relations ordonnées en $u, v, w$, sont compatibles si $u', v', w', h'$, qui interviennent linéairement dans les coefficients, vérifient une relation homogène du troisième ordre, exprimée par l'annulation d'un déterminant.

*Les plans représentant des* $F_2^4$ *hyperplanes ont une enveloppe* $E^3$ *de troisième classe.* Les trois relations bilinéaires en $u, v, w, u', v', w', h'$ établissent une correspondance birationnelle entre $E_3$ et la gerbe de plans de sommet O, qui, à une transformation par polaires réciproques près, est la représentation classique d'une surface cubique sur un plan. On sait qu'il y a dans le plan six points fondamentaux qui correspondent à des droites de la surface cubique et deux points distincts du plan représentent toujours deux points distincts de la surface cubique. Il y a donc dans la gerbe de sommet O six plans auxquels correspondent dans $E^3$ des faisceaux linéaires de plans, et un plan de $E^3$ correspond toujours à un seul plan passant par O.

*Il y a donc, parmi les réglées* $F_2^3$ *de* $\Omega_3^7$, *six réglées qui sont situées dans des* $S_3$. Au contraire, il n'y a aucune $F_2^4$ située dans un $S_3$. Une réglée cubique de $S_3$ admet une directrice double qui provient de la projection double d'une conique de $F_2^3$ normale de $S_4$ : nous retrouvons ainsi *les six droites doubles impropres de* $\Omega_3^7$.

Notons que si nous avions considéré la variété $\Omega_3^7$ en projection sur $S_4$, nous aurions pu faire un calcul analogue, qui conduisait aux relations (1) où $i = 1, 2, \ldots 5$. L'élimination des $\lambda_i$ conduisait alors à quatre relations linéaires entre $uu'$, $vv'$, $ww'$, $vw' + wv'$, $uw' + wu'$,

$vu' + uv'$, $uh'$, $vh'$, $wh'$. Ces quatre relations ordonnées en $u'$, $v'$, $w'$, $h'$ sont compatibles lorsque $u$, $v$, $w$ qui interviennent linéairement dans les coefficients vérifient une relation homogène du quatrième ordre, exprimée par l'annulation d'un déterminant. Les plans passant par O qui représentent des $F_2^3$ hyperplanes, c'est-à-dire des $F_2^3$ situées dans des $S_3$, sont les plans tangents à un certain cône de quatrième classe, de genre trois. Nous retrouvons ainsi que *la surface double apparente de* $\Omega_3^7$ *est une réglée de genre trois.*

Considérons alors dans $S_5$ un des six $S_3$ qui contiennent une réglée cubique de $\Omega_3^7$ : le faisceau des hyperplans passant par $S_3$ recoupe $\Omega_3^7$ suivant les $F_2^4$ représentées par le faisceau de plans associé au plan fondamental image de $F_2^3$. Ces $F_2^4$ ont en commun une conique $\Omega_3^7$ représentée par l'axe du faisceau de plans. de sorte que $S_3$ *coupe* $\Omega_3^7$ *suivant* $F_2^3$ *et une conique* C. Il y a ainsi dans $S_3$ un complexe quadratique de tétrasécantes à $\Omega_3^7$; l'ensemble des sécantes à C, et $S_3$ *est donc une variété focale spéciale de la congruence,* multiple d'ordre $2^2 = 4$. D'ailleurs, tout plan d'un tel $S_3$ coupe $\Omega_3^7$ suivant une cubique plane et deux points, et contient deux faisceaux de tétrasécantes spéciales. Réciproquement toute cubique plane de $\Omega_3^7$ est représentée par une conique passant par O qui est contenue dans un réseau de $|Q|$ et les quadriques d'un réseau qui passent par une conique ont encore deux points-base, il y en a un faisceau qui contiennent le plan de la conique, de sorte qu'une cubique plane de $\Omega_3^7$ est nécessairement située dans un des six $S_3$ spéciaux.

Les *six* $S_3$ *spéciaux* interviennent dans $\rho$ pour

$$\rho_1 = 6 \times 2^2 = 24.$$

*Il n'y a pas sur* $\Omega_3^7$ *de quartiques planes*, car une quartique de $\Omega_3^7$ située dans un $S_3$ de section curviligne est résiduelle d'une cubique et est représentée par une conique quelconque. Si cette quartique est plane il passe par la conique représentative un réseau de $|Q|$ ; il y aurait alors un faisceau de $|Q|$ dégénéré en le plan de cette conique et un faisceau de plans passant par O ; nous avons vu qu'aucun plan de $E^3$ n'est associé à tout un faisceau de la gerbe O.

Il n'y a donc pas d'autre variété focale spéciale. Par contre, il y a une variété focale singulière lieu des pentasécantes de $\Omega_3^7$. L'existence des pentasécantes de $\Omega_3^7$ est immédiatement mise en évidence par le fait que dans un $S_3$ spécial le plan de la conique coupe $\Omega_3^7$ suivant une conique et une cubique; c'est le lieu d'un réseau de pentasécantes.

Les formules de L. Roth appliquées à la détermination des pentasécantes de la section hyperplane de $\Omega_3^7$ donnent

$$\mu_5 = 3, \qquad m_5 = 14.$$

Il y a *une* $V_3^3$ *de Segre focale singulière, dont les plans coupent* $\Omega_3^7$ *suivant des quintiques planes. Cette* $V_3^3$ *coupe* $\Omega_3^7$ *suivant une surface du quatorzième ordre.*

Cette variété focale singulière intervient dans $\rho$ pour

$$\rho_2 = 3.5^2 = 75,$$

et nous avons

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 99,$$

de sorte qu'il n'y a pas d'autres variétés focales singulières.

Monsieur Lucien Godeaux me communique quelques remarques qui permettent de démontrer de façon purement géométrique que les tétrasécantes de $\Omega_3^7$ forment une congruence linéaire.

Nous avons vu, en coupant $\Omega_3^7$ par les plans de ses coniques, qu'il existe effectivement des tétrasécantes. Ces tétrasécantes forment une congruence et non une variété, puisqu'il n'y a pas sur $\Omega_3^7$ de quartiques planes.

Projetons alors $\Omega_3^7$ sur $S_4$ à partir d'un point M. Un plan de conique passant par M donne une génératrice de la surface double $F^{14}$, et comme $\Omega_3^7$ admet trois points dans ce plan, trois trisécantes de $\Omega_3^7$ passent par M ; les génératrices de $F^{14}$ sont des trisécantes de la courbe triple apparente $C^{10}$.

Or dans $S_4$ un hyperplan $S_3$ coupe $\Omega_3^7$ suivant une surface d'ordre sept, ce qui montre que $F^{14}$ est certainement gauche. La courbe $C^{10}$ n'est pas située dans un $S_3$ puisqu'il en serait de même de toutes ses trisécantes.

Supposons alors que $\Omega_3^7$ ait deux points quadruples apparents; ces points sont quadruples aussi pour $C^{10}$ et l'hyperplan $S_3$ qui les joint à une génératrice de $F^{14}$ trisécante à $C^{10}$, coupe cette courbe en onze points, ce qui est absurde.

*La congruence des tétrasécantes est donc linéaire.*

Le point quadruple apparent est sextuple pour $F^{14}$. En projetant cette surface de ce point sur $S_3$, on obtient une surface $F^8$ qui est lieu des trisécantes d'une sextique projection de la courbe triple. *La courbe triple est donc de genre trois.*

Dans l'espace $S_3$ représentatif de $\Omega_3^7$, l'enveloppe E des plans ne passant pas par O, qui font partie des quadriques $|Q|$ décomposées, peut être déterminée ainsi : les plans de E qui passent par une droite donnée D font partie des quadriques du réseau contenant D. Ce sont donc les plans joignant D aux trois points-base autres que O de ce réseau, et E est de troisième classe.

**VI. — Variétés du huitième ordre à sections curvilignes elliptiques.**

Les variétés du huitième ordre à sections curvilignes elliptiques sont représentées par le système linéaire de toutes les quadriques. En particulier une variété $\Omega_3^8$ de $S_5$ est représentée par un système linéaire à cinq paramètres de quadriques sans point base. Par deux points quelconques de $\Omega_3^8$ passe une conique et une seule tracée sur la variété, et cette conique est représentée par une droite de $S_3$. Les hyperplans passant par le plan de cette conique forment un réseau linéaire, et ils sont représentés par les quadriques d'un réseau linéaire passant par la droite représentative. Ces quadriques ont donc en outre quatre points communs. *Le plan d'une conique de $\Omega_3^8$ recoupe la variété en quatre points* $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$. Toute droite $P_iP_r$ est donc tétrasécante à $\Omega_3^8$ et réciproquement; si nous considérons une tétrasécante arbitraire de $\Omega_3^8$, par deux de ses points d'appui sur $\Omega_3^8$, $M_1$, $M_2$ par exemple, il passe une conique C tracée sur $\Omega_3^8$, dont le plan recoupe $\Omega_3^8$ en quatre points $P_1, P_2, P_3, P_4$ dont deux $P_1$, $P_2$, par exemple, sont sur la tétrasécante choisie. Mais $P_3\,P_4$ est aussi une tétrasécante qui rencontre $P_1\,P_2$ en un point Q.

Ceci montre que *les tétrasécantes de $\Omega_3^8$ ne forment pas une congruence linéaire*, puisque $P_1\,P_2$, droite générique de la congruence, serait spéciale, comme rencontrant en Q une autre droite de la congruence.

Ce raisonnement serait en défaut ([1]) si le point Q appartenait à la conique C, c'est-à-dire si $P_3\,P_4$ passait soit par $M_1$, soit par $M_2$. Mais cette circonstance ne se présente que pour certaines tétrasécantes exceptionnelles : dans un plan sécant à $\Omega_3^8$ suivant une conique C, cette conique n'est en général pas circonscrite au triangle formé par les

([1]) L'étude des variétés $\Omega_3^8$ particulières contenant une surface double doit être faite à part.

points de concours des côtés opposés du quadrilatère complet $P_1 P_2 P_3 P_4$. La vérification analytique se fait d'ailleurs ainsi : $\Omega_3^8$ est représentée sur $S_3$ par le système linéaire

$$\Sigma \lambda_i f_i = 0, \qquad i = 1, 2, ..., 6.$$

Prenons le plan de la conique C pour plan $O_4 O_5 O_6$, représenté par le réseau

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0.$$

Nous pouvons supposer dans $S_3$ les coordonnées choisies de façon que C soit représentée par $y = z = 0$, les quatres points bases supplémentaires du réseau étant les points

$$(0, 0, 1, 0), \quad (0, 1, 0, 0) \quad (0, 1, 1, 1), \quad (1, 1, -1, 0).$$

On a alors, par exemple

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv x(y+z), \\ f_2 &\equiv t(y-z), \\ f_3 &\equiv xy + yz - zt. \end{aligned}$$

Dans le plan de C, les points $O_4$, $O_5$, $O_6$ peuvent être choisis de façon que cette conique ait pour équation

$$x_5^2 - x_4 x_6 = 0.$$

On aura alors

$$\begin{aligned} f_4 &\equiv t^2 + y(ax + by + cz + dt) + z(ux + vz + wt), \\ f_5 &\equiv tx + y(a'x + b'y + c'z + d't) + z(u'x + v'y + w'z), \\ f_6 &\equiv x^2 + y(a''x + b''y + c''z + d''t) + z(u''x + v''y + w''z). \end{aligned}$$

Les quatre points $P_i$ ont alors pour coordonnées

$$P_1 \left\{ X_4 = v, \quad X_5 = v', \quad X_6 = v'', \right.$$

$$P_2 \left\{ X_4 = b, \quad X_5 = b', \quad X_6 = b'', \right.$$

$$P_3 \left\{ \begin{aligned} X_4 &= 1 + b + c + d + v + w, \\ X_5 &= b' + c' + d' + v' + w', \\ X_6 &= b'' + c'' + d'' + v'' + w'', \end{aligned} \right.$$

$$P_4 \left\{ \begin{aligned} X_4 &= a + b - c - u + v, \\ X_5 &= a' + b' - c' - u' + v', \\ X_6 &= 1 + a'' + b'' - c'' - u'' + v''. \end{aligned} \right.$$

On peut toujours choisir $v$, $v'$, $v''$ pour que $P_1$ soit un point arbitraire donné, $b, b'$, $b''$ pour placer $P_2$ arbitrairement, $w$, $w'$, $w''$ pour placer $P_3$ arbitrairement et $a$, $a'$, $a''$ pour placer $P_4$ arbitrairement. Il en résulte que, en général, l'intersection de $P_1 P_2$ avec $P_3 P_4$ n'est pas située sur C. Les trois conditions de passage d'une conique C par les points Q de son plan ne sont pas identiquement vérifiées.

Déterminons rapidement les caractères projectifs de la section hyperplane de $\Omega_3^8$ qui est représentée par un système de cubiques ayant un point base. Comme dans un faisceau de cubiques il y a 12 cubiques à point double, la surface est de classe

$$n' = 12.$$

D'autre part, la surface étant rationnelle, on a

$$p_a = -\frac{7}{48}(64 - 64 + 24) + \frac{-4 + t + 12}{8} = \frac{t - 20}{8} = 0;$$

d'où l'on tire

$$t = 20.$$

Cette valeur portée dans $k$ donne

$$k = 20 + 1 - 1 - \frac{5.4}{2} = 10.$$

D'autre part, la formule de L. Roth donne pour ordre du lieu de tétrasécantes

$$m = -\frac{7}{48}(16.64 - 19.64 + 480 - 72) + \frac{1}{2} + \frac{31}{8}20 - \frac{12}{8} = 45.$$

Et ces nombres ne vérifient pas la relation fondamentale

$$m = 4\,k - 1.$$

*La congruence des tétrasécantes de $\Omega_3^8$ n'est pas linéaire.*

### VII. — Variétés à sections curvilignes elliptiques dans $S_r$ ($r > 5$).

Nous avons vu qu'une variété focale propre de congruence ne peut pas être un cône. Or il résulte d'une étude de G. Scorza [1] qu'en faisant abstraction des cônes, des variétés cubiques $V_k^3$ normales dans $S_{k+1}$ (les $V_k^3$ de $S_{k+2}$ sont à sections rationnelles) et des variétés lieux d'un faisceau elliptique de $S_{k-1}$, qui rentrent dans le cadre du chapitre III, les variétés à sections elliptiques sont :

*a)* Les surfaces de Del Pezzo et les variétés de Enriques que nous venons d'étudier;

*b)* La variété $V_6^5$ de $S_9$ qui représente les droites de $S_4$, et ses sections par $S_8$ et $S_7$, ainsi que leurs projections;

*c)* La variété $V_4^6$ de $S_8$ de Segre qui représente les couples de points de deux plans;

*d)* La variété $V_4^6$ de $S_8$ intersection résiduelle d'un cône $W_5^4$ projetant d'un plan une surface de Veronese et d'une quadrique qui passe par le sommet du cône et contient un de ses cônes $V'^2_4$;

*e)* La variété $V_k^4$ de $S_{k+2}$ base d'un faisceau de quadriques, qui n'admet évidemment aucune trisécante.

Une variété focale propre de congruence linéaire dans $S_6$ ne peut être une $V_4^5$ à sections elliptiques, car sa section superficielle serait la projection d'une surface de Caporali qui n'a pas de tétrasécante, ni à fortiori de pentasécante.

Cette variété focale ne peut pas être une des $V_4^6$ à sections elliptiques, car nous avons vu que la section superficielle $F_2^6$ admet des tétrasécantes mais aucune pentasécante. Dans $S_r$ où $r > 6$ les droites de la congruence admettent $r - 1 > 5$ foyers, et ceci nécessite que la

(1) G. Scorza, Le varietà a curve sezioni ellittiche (*Annali di Matematica*, III, t. XV, 1908, p. 217).

variété focale soit d'ordre supérieur à cinq, de sorte que les $V_5^5$ de $S_7$ et $V_6^5$ de $S_8$ ne peuvent convenir.

Ainsi *dans* $S_r$ *où* r > 5 *il n'y a pas de variétés focales propres de congruences linéaires dont les sections curvilignes sont elliptiques.*

## CHAPITRE V

### AUTRES TYPES GÉNERAUX DE CONGRUENCES LINÉAIRES DE $S_r$.

Dans les chapitres précédents, nous avons eu l'occasion de remarquer que des hypothèses faites sur la variété focale propre d'une congruence linéaire pouvaient, suivant les cas, nous conduire soit à des solutions ayant un caractère général, soit à des solutions ayant un caractère accidentel; c'est ainsi que l'hypothèse des sections curvilignes rationnelles conduit à toute une série de congruences linéaires de $S_r$ dont les variétés focales $\Omega_{r-2}^{2r-3}$ sont des lieux de $S_{r-3}$; au contraire l'hypothèse des sections curvilignes elliptiques conduit à des solutions accidentelles, la congruence des trisécantes d'une surface $F_2^5$ de $S_4$ et les congruences des tétrasécantes des variétés $\Omega_3^6$ de première espèce et $\Omega_3^7$ de $S_5$, auxquelles il ne correspond rien dans les espaces à plus de cinq dimensions.

Nous nous proposons maintenant d'indiquer quelques procédés généraux permettant d'obtenir des congruences linéaires dans l'espace projectif à un nombre quelconque de dimensions, *la variété focale propre* étant toujours supposée, comme dans tout ce qui précède, *non décomposée* (¹). Nous indiquerons dans chaque cas à quelles

(¹) Lorsque $r$ croît, les congruences linéaires de $S_r$ à focale propre dégénérée peuvent présenter une diversité qui devient extrêmement grande : il suffira de se reporter à l'étude détaillée faite par MARLETTA (*loc. cit.*) sur le cas de $S_4$ pour concevoir la grande croissance du nombre d'hypothèses possibles dans $S_r$.

solutions connues de $S_4$ elles se réduisent et après avoir simplement constaté que la génération obtenue fournit une congruence linéaire de $S_r$, nous limiterons l'étude détaillée au cas de $S_5$.

### I. — Congruence commune à un système linéaire de complexes linéaires.

Dans l'espace ordinaire $S_3$, deux complexes linéaires ont en commun une congruence linéaire, base du faisceau qu'ils définissent. Cette congruence est aussi de première classe; mais sa variété focale est dégénérée en deux droites non sécantes, généralement distinctes.

Dans l'espace projectif $S_r$ une droite est représentée par un système de $C^2_{r+1}$ coordonnées grassmanniennes homogènes, et l'on appelle complexe linéaire le $(2r-3)$ -complexe des droites dont les coordonnées grassmanniennes annulent une forme linéaire. Il est clair que les droites d'un tel complexe qui passent par un point donné de $S_r$ engendrent un hyperplan.

Considérons dans $S_r$ un système linéaire à $p$ paramètres de complexes linéaires : ces complexes ont en commun un $(2r-3-p)$ -complexe (si $p < r-2$) qui est tel que les droites du complexe qui passent par un point donné de $S_r$ engendrent un espace linéaire commun à $p+1$ hyperplans indépendants, c'est-à-dire un $S_{r-p-1}$.

En particulier *un système linéaire à* r — 2 *paramètres de complexes linéaires de* $S_r$ *définit une congruence linéaire de* $S_r$ *commune à tous ces complexes*, la droite de la congruence issue d'un point de $S_r$ étant l'intersection des $r-1$ hyperplans polaires pris par rapport à $r-1$ complexes indépendants du système.

La variété focale propre de cette congruence n'est pas dégénérée, lorsqu'on se place dans un espace à plus de trois dimensions. En effet, dans $S_4$ l'étude d'un réseau linéaire de complexes linéaires a été entreprise par G. Castelnuovo [1], qui a montré que les droites communes à ces complexes sont les trisécantes d'une *surface* $F_2^4$ *du quatrième ordre, projection de la surface de Veronese.* Nous avons déjà signalé cette solution de $S_4$ au début du chapitre III comme étant la seule variété focale à sections curvilignes rationnelles qui ne soit pas lieu d'un faisceau rationnel de sous-espaces linéaires. Cette congruence est de seconde classe, car les droites situées dans un hyperplan $S_3$ sont les droites communes à un réseau de complexes linéaires de $S_3$; elles engendrent une quadrique. Cette congruence ne comporte aucun plan focal spécial ou singulier.

Dans $S_5$ les systèmes linéaires de complexes linéaires ont fait l'objet d'une étude de F. Palatini [2], qui montre par des considérations énumératives que les droites communes à un système à 3 paramètres de complexes linéaires sont les tétrasécantes d'une variété réglée à trois dimensions du septième ordre que nous désignerons par $\Omega_3^7$; *les génératrices de* $\Omega_3^7$ *sont les axes des complexes spéciaux du système.*

Nous allons utiliser les relations générales obtenues dans le chapitre II pour avoir une connaissance plus approfondie de cette variété $\Omega_3^7$ et de la congruence de ses tétrasécantes.

Pour connaître la première classe $m$ de cette congruence, nous devons déterminer l'ordre de la variété lieu des droites qui appartiennent à un système linéaire à trois paramètres de complexes linéaires de $S_4$. Or dans $S_4$ les

(1) G. CASTELNUOVO, Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni (*Atti del Reale Istituto Veneto*, 1891, p. 855).

(2) F. PALATINI, Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni (*ibidem*, t. LX, 1900-1901, p. 371).

droites communes à un réseau de complexes linéaires sont les trisécantes de la surface $F_2^4$ projection de la surface de Veronese, et forment une congruence de classe 2. Les droites de cette congruence qui appartiennent encore à un complexe linéaire indépendant du réseau *engendrent une variété du troisième ordre*, puisque tel est en particulier l'ordre du lieu des droites qui s'appuient sur un plan. On a donc $m = 3$. Ceci entraîne $k = 1$. D'ailleurs un foyer de la congruence de $S_5$ est évidemment un point tel que les quatre hyperplans polaires ont un plan commun et non une droite unique, de sorte que *les genératrices issues d'un point de la focale propre engendrent un plan.*

Pour connaître la seconde classe de $\mu$ cette congruence, nous devons déterminer le nombre des droites communes à un système linéaire à trois paramètres de complexes linéaires de l'espace ordinaire; ce nombre est évidemment

$$\mu = 2.$$

Or les courbes du septième ordre de $S_3$ qui ont deux tétrasécantes sont les courbes de genre quatre

$$\pi = 4.$$

D'autre part,

$$\rho = m^2 - n k^2 - \mu = 9 - 7 - 2 = 0.$$

Il n'y a *pas de variété focale spéciale, ni singulière.*

Montrons que, réciproquement, *toute variété* $\Omega_3^7$ *à sections curvilignes de genre quatre, focale propre d'une congruence linéaire de* $S_5$, est identique à la précédente. En effet, montrons d'abord que si les tétrasécantes de $\Omega_3^7$ forment une congruence linéaire, celle-ci est nécessairement de première classe

$$m = 3.$$

A cet effet, considérons dans $S_5$ un hyperplan H et dans celui-ci un plan $\sigma$. Les droites G situées dans H engendrent une variété $V_3^m$ dont la trace sur $\sigma$ est une courbe $C^m$ qui admet sept points $A_1, A_2, \ldots, A_7$ multiples d'ordre $k$, traces sur $\sigma$ de $\Omega_3^7$. Menons par $\sigma$, dans H, un $S_3$ arbitraire qui coupe $\Omega_3^7$ suivant une courbe du septième ordre de genre quatre; cette courbe forme avec ses deux tétrasécantes la base d'un faisceau de surfaces cubiques $\Phi^3$. Chaque $S_3$ passant par $\sigma$ contient deux tétrasécantes qui ont pour traces sur $C^m$ un groupe $G_2$ et tout point M de $C^m$ appartient à un groupe unique, celui qu'on obtient à partir du $S_3$ qui joint $\sigma$ à la génératrice de la congruence issue de M, qui est bien dans H puisque M est sur $C^m$. Les groupes $G_2$ forment donc sur $C^m$ une série linéaire $g_2^1$ et $C^m$ est hyperelliptique. Tout groupe $G_2$ appartient avec $A_1, A_2, \ldots, A_7$ à un faisceau de cubiques traces des surfaces $\Phi^3$ sur $\sigma$; en d'autres termes les cubiques passant par $A_1, A_2, \ldots, A_7$ définissent dans $\sigma$ une involution de Geiser, et $C^m$ appartient à cette involution. Si l'on représente le plan $\sigma$ sur une surface cubique F, les sections planes de F étant les images des cubiques passant par $A_1 A_2 \ldots A_6$, le point $A_7$ est l'image d'un point $\alpha$ de F et l'involution de Geiser de $\sigma$ est représentée sur F par les couples de points alignés sur $\alpha$. La courbe $C^m$ est donc représentée sur F par l'intersection avec F d'un cône de sommet $\alpha$. Comme $C^m$, section plane générique de $V_3^m$, n'est pas dégénérée, il en est de même de son image sur F, et le cône de sommet $\alpha$ n'est pas dégénéré. Par conséquent, sur $\sigma$, $C^m$ fait partie d'un multiple du système des sections planes de F; elle admet les points $A_i$ avec la multiplicité $k$; c'est donc une courbe d'ordre

$$m = 3k,$$

mais en vertu de la relation fondamentale

$$m = 4k - 1,$$

ceci signifie que

$$k = 1, \qquad m = 3, \qquad \rho = 0.$$

Considérons alors une surface section hyperplane de $\Omega_3^7$, et appliquons-lui les formules que nous avons rencontrées au chapitre II : Pour $n = 7$, $\pi = 4$, la valeur de $k$ est

$$k = t - 3,$$

et la lormule de Roth se réduit à

$$m = -\frac{35}{8} + \frac{23}{8} t - \frac{n'}{8}.$$

Les valeurs trouvées pour $k$ et $m$ imposent donc

$$t = 4, \qquad n' = 33.$$

Les formules de Severi permettent alors de calculer tous les invariants projectifs de la surface

$$j = 22, \qquad b = 11, \qquad p = 6, \qquad d = 0.$$

*La variété $\Omega_3^7$ de $S_5$ à sections de genre 4, focale d'une congruence linéaire, n'admet pas de courbe double impropre. Sa surface double apparente est du onzième ordre; sa courbe triple apparente est dégénérée en quatre droites concourantes au point quadruple apparent.*

En portant ces caractères projectifs dans la formule de Roth donnant les pentasécantes, on a

$$\mu_5 = 0,$$

en accord avec

$$\rho = 0.$$

Une surface du septième ordre à sections de genre quatre est soit rationnelle, soit référable à une réglée elliptique. Dans le premier cas on a $p_a = 0$, dans le second $p_a = -1$. Or nous avons calculé $p_a$ en fonction de $n$, $\pi$, $t$, $n'$ ; on obtient

$$p_a = 0.$$

*La variété $\Omega_3^7$ est à sections superficielles rationnelles.*

Nous allons alors rechercher la représentation plane de la surface $F_2^7$ section hyperplane de $\Omega_3^7$.

Projetons $F_2^7$ d'un de ses points sur $S_3$ ; nous obtenons une surface $F'^6_2$ du sixième ordre à sections planes de genre quatre, qui possède donc une courbe double $\delta$ du sixième ordre. Puisque $k = 1$, par tout point de $F_2^7$ passe une tétrasécante à cette surface et $F'^6_2$ possède un point triple O qui est triple aussi pour $\delta$. Les adjointes aux sections planes de $F'^6_2$ sont découpées par les surfaces cubiques ayant un point double en O.

Or les surfaces cubiques ayant un point double en O dépendent de quinze paramètres et déterminent sur $\delta$ une série linéaire $g_{12}^{12-x}$, en désignant par $x$ le genre de $\delta$. Or, la surface F' étant rationnelle, parmi ces surfaces cubiques, celles qui passent par $\delta$ dépendent de trois paramètres, et l'on doit avoir

$$15 - (12 - x + 1) = 3,$$

d'où

$$x = 1.$$

Le cône projetant $\delta$ de O est cubique et elliptique. Il fait partie du système des surfaces cubiques $\varphi_3$ ayant un point double en O et passant par $\delta$. Projetons une des surfaces $\varphi_3$ autre que le cône, du point O sur un plan P ; $\varphi_3$ est représentée sur ce plan P de façon que ses sections planes correspondent aux cubiques $\gamma_3$ qui passent par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ d'une conique $\gamma_2$ image du voisinage de O. La courbe $\delta$ de $\varphi_3$ est projetée sur P suivant une cubique qui coupe les $\gamma_3$ en neuf points dont six, correspondant à une section plane générique de $\delta$, varient en dehors des points-base ; l'image de $\delta$ est une cubique $\delta_3$ qui passe par $A_1$, $A_2$, $A_3$.

Considérons alors une seconde surface $\varphi'_3$ du système $|\varphi_3|$ : elle coupe $\varphi_3$ suivant une courbe du neuvième ordre ayant O quadruple et décomposée en $\delta$, et une cubique gauche passant par O ; cette intersection est représentée sur P par une courbe du neuvième ordre admettant $A_1, A_2, \ldots, A_6$ triples et qui comprend la courbe $\gamma_2$ comptée deux fois, la cubique $\delta_3$ et une conique passant par $A_4, A_5, A_6$ image de la cubique gauche. En particulier si $\varphi'_3$ est le cône projetant $\delta$, la conique est confondue avec $\gamma_2$ et la cubique gauche qui eomplète $\delta$ est dégénérée en les trois droites $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$. Dans P les coniques passant par $A_4$, $A_5$, $A_6$ forment un système homaloïdal. Donc, les surfaces $\varphi_3$ de $|\varphi_3|$ se coupent deux à deux suivant des cubiques gauches et forment un système homaloïdal.

En rapportant projectivement les surfaces $\varphi_3$ aux plans d'un espace à trois dimensions $\overline{S}$, on obtient une transformation birationnelle T, qui transforme F' en une certaine surface $\overline{F'}$. Cette surface $\overline{F'}$ a pour sections planes les transformées dans T des sections de F' par les $\varphi_3$, c'est-à-dire des adjointes aux sections planes de F'. Or la section de $\varphi_3$ par F' est représentée sur P par une courbe du dix-huitième ordre qui passe six fois par $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et qui comprend $\gamma_2$ comptée trois fois, image du point triple O, $\delta_3$ comptée deux fois, image de la courbe double $\delta$; il reste une sextique qui admet $A_4, A_5, A_6$ pour points triples et $A_1$, $A_2$, $A_3$ pour points simples. Les adjointes aux sections planes de F' sont donc des sextiques elliptiques. Elles forment un système de degré trois, car les cubiques communes à deux $\varphi_3$, représentées par les coniques passant par $A_4$, $A_5$, $A_6$ rencontrent $\delta$ représentée par la cubique $\delta_3$ en six points variables, et par conséquent elles rencontrent F', en dehors de O et $\delta$, en

$$3 \times 6 - 3 - 6 \times 2 = 3$$

points. Ainsi $\overline{F'}$ est une surface cubique à sections planes elliptiques. Voyons comment sont transformées les sections planes de F' dans la transformation T. Puisque les droites de $\overline{S}$ sont les transformées des cubiques gauches passant par O, communes à deux $\varphi_3$ de l'espace initial S, un plan de S se transforme en une surface cubique $\overline{\varphi}_3$ de $\overline{S}$. Si $d$ est une droite de S issue de O, les $\varphi_3$ qui touchent $d$ en O forment un réseau qui est transformé par T en un réseau de plans de $\overline{S}$, dont le point commun décrit une surface fondamentale transformée de O, et cette surface est un plan $\sigma$, puisque les cubiques qui se transforment en droites passent simplement par O.

D'autre part, la courbe $\delta$ admet une infinité de trisécantes, car par chacun de ses points il en passe deux, comme on le voit en projetant $\delta$ de ce point sur un plan auxiliaire. Soit $t$ une de ces trisécantes. Il y a un réseau de surfaces $\varphi_3$ contenant $t$, et à $t$ correspond un point de $\overline{S}$ qui décrit une courbe fondamentale, dont l'ordre est aussi le nombre des trisécantes de $\delta$ situées dans une surface $\varphi_3$ générique ; or dans la représentation de $\varphi_3$ sur le plan P les droites de $\varphi_3$ ne passant pas par O sont représentées par les droites $A_i\,A_j$, et trois d'entre elles sont trisécantes à $\delta_3$, à savoir $A_4\,A_5$, $A_5\,A_6$, $A_4\,A_6$. On a donc dans $\overline{S}$ une cubique fondamentale $\Delta_3$.

Enfin, considérons une génératrice du cône projetant $\delta$ de O ; il y a un réseau de surfaces $\varphi_3$ qui la contiennent, et il lui correspond un point de $\overline{S}$ situé dans le plan $\sigma$, dont le lieu, lorsqu'elle décrit le cône, est une cubique elliptique fondamentale $\Delta'_3$ ($\varphi_3$ contient en effet trois de ces droites : $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$).

Les surfaces $\overline{\varphi}_3$ passent par $\Delta_3$ et $\Delta'_3$, et $\Delta_3$ est une cubique gauche trisécante à $\Delta'_3$, car les points infiniment voisins de ceux de $\delta$ sont transformés en droites qui s'appuient en un point sur $\Delta'_3$ et en deux points sur $\Delta_3$. On vérifie sans difficulté que sur toute $\overline{\varphi}_3$ il y a six cordes de $\Delta_3$ sécantes à $\Delta'_3$.

Une trisécante de $\delta$ ne rencontre pas F′ en dehors des trois points doubles situés sur $\delta$; par conséquent $\overline{F'}$ ne contient pas $\Delta_3$. Mais une génératrice du cône projetant $\delta$ de O rencontre F′ au point triple O, en un point double sur $\delta$ et en un point variable simple, de sorte que $\overline{F'}$ passe par $\Delta'_3$.

La transformation T réalise une représentation de F′ sur $\overline{F'}$ dans laquelle les sections planes de F′ sont représentées par les sections de $\overline{F'}$ par les surfaces $\bar{\varphi}_3$, qui sont constituées de la courbe fixe $\Delta'_3$ et de sextiques gauches de genre quatre passant par les six traces de $\Delta_3$ sur $\overline{F'}$ en dehors de $\Delta'_3$.

Si alors nous représentons la surface cubique $\overline{F'}$ sur un plan $\overline{P}$, les sections planes de $\overline{F'}$ étant représentées par les cubiques $\bar{\gamma}_3$ qui passent par six points $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_6$ (non situés sur une même conique), les sections de $\overline{F'}$ par les surfaces $\bar{\varphi}_3$ sont représentées par des courbes du neuvième ordre admettant les points $\overline{A}_i$ triples et six points-base simples images des traces de $\Delta_3$. Ces courbes contiennent comme composante fixe une cubique $\bar{\gamma}$ image de $\Delta'_3$ et comme composantes variables des sextiques admettant les six points $\overline{A}_i$ doubles et les six points-base simples.

Ainsi *les sections hyperplanes de $\Omega^7_3$ sont représentées sur le plan par un système linéaire de sextiques ayant six points-base doubles et cinq points-base simples.*

Si nous désignons par $\sigma$ la surabondance éventuelle de ce système linéaire, le système complet $|C^6|$ a la dimension

$$r = 27 - 6 \times 3 - 5 + \sigma = 4 + \sigma.$$

Puisque $k = 1$, tout point M de $\Omega^7_3$ appartient à un plan qui coupe $\Omega^7_3$ suivant M et une cubique $\Gamma$, et le faisceau de droites de centre M dans ce plan est le lieu des tétrasécantes à $\Omega_3^7$ issues de M. Dans tout hyperplan il y a un nombre fini de ces plans.

Considérons alors le système $|C_6|$ des sextiques ayant $A_1, A_2, \ldots, A_6$ doubles et $B_1, B_2, \ldots, B_5$ simples, et la cubique passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6, B_1, B_2, B_3$. Cette cubique $\Gamma_{45}$ est elliptique et les $C_6$ découpent sur elle une série linéaire $g_3^2$ ; par conséquent les $C_6$ qui la contiennent dépendent de $r - 3 = 1 + \sigma$ paramètres. Or ces sextiques sont composées de $\Gamma_{45}$ et d'une cubique qui doit passer par $A_1, A_2, \ldots, A_6, B_4, B_5$ et qui varie donc dans un faisceau. Ainsi

$$\sigma = 0, \qquad r = 4.$$

*La surface* $F_2^7$ *de* $S_4$ *est normale,* le système représentatif étant complet.

Il en résulte que $\Gamma_{45}$ représente une cubique plane de $F_2^7$, dont le plan $\Pi_{45}$ recoupe $F_2^7$ en un point $M_{45}$ dont l'image est le neuvième point commun aux cubiques passant par $A_1, A_2, \ldots, A_6, B_4, B_5$.

Nous mettons ainsi en évidence dix plans $\Pi_{ij}$ qui coupent chacun $F_2^7$ suivant une cubique elliptique et un point $M_{ij}$ : nous allons étudier cette configuration, en convenant d'appeler le point $M_{ij}$, centre du faisceau de tétrasécantes contenues dans $\Pi_{ij}$, pôle de ce plan, qui inversement sera dit polaire de $M_{ij}$.

Dans le faisceau des cubiques passant par $A_1, A_2, \ldots, A_6, B_4, B_5$ figurent les cubiques $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ de sorte que le point $M_{45}$ appartient non seulement à son plan polaire $\Pi_{45}$, mais aussi aux trois plans $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$. De même tout plan, $\Pi_{12}$ par exemple, contient non seulement son pôle $M_{12}$, mais aussi trois autres points $M_{34}, M_{35}, M_{45}$.

La droite qui joint deux points ayant un indice commun est dans un seul plan : $M_{12}\,M_{23}$ est dans le seul plan $\Pi_{45}$. De même deux plans ayant un indice commun ont un seul point commun : $\Pi_{12}, \Pi_{23}$ se coupent en $M_{45}$.

La droite qui joint deux points sans indices communs est commune à deux plans sans indices communs : les plans polaires de ces deux points. L'hyperplan défini par ces deux plans coupe donc $F_2^7$ suivant deux cubiques planes et une droite. C'est ainsi que la droite $M_{12}\,M_{34}$ est commune aux deux plans $\Pi_{12}$, $\Pi_{34}$ qui définissent un hyperplan sécant à $F_2^7$ suivant les deux cubiques représentées par $\Gamma_{12}$, $\Gamma_{34}$ et une droite $D_5$ représentée par le voisinage de $B_5$. Cet hyperplan contient, outre $D_5$, les points $M_{12}$, $M_{34}$ pôles de $\Pi_{12}$, $\Pi_{34}$ et les points $M_{35}$, $M_{45}$, $M_{15}$, $M_{25}$ contenus par couples dans ces plans.

Mais le même raisonnement est valable pour l'hyperplan sécant à $F_2^7$ suivant les deux cubiques représentées par $\Gamma_{13}, \Gamma_{24}$ ou par $\Gamma_{14}, \Gamma_{23}$. Les trois sextiques dégénérées en deux cubiques font d'ailleurs partie d'un même faisceau dont les points-base sont $A_1, A_2, \ldots, A_6$, $B_5$ doubles, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ simples et les quatre points représentatifs de $M_{15}$, $M_{25}$, $M_{35}$, $M_{45}$. Il en résulte que ces quatre points sont situés dans un même plan $X_5$ qui passe par $D_5$.

Nous mettons ainsi en évidence cinq nouveaux plans $X_i$, qui vérifient les relations d'incidence suivantes :

$X_1, X_2, X_3$ sont tous trois incidents à $\Pi_{45}$ qui coupe $X_4$ en un seul point $M_{45}$,
$X_1, X_2, X_4$ sont tous trois incidents à $\Pi_{35}$ qui coupe $X_3$ en un seul point $M_{35}$,
$X_1, X_3, X_4$ sont tous trois incidents à $\Pi_{25}$ qui coupe $X_2$ en un seul point $M_{25}$,
$X_2, X_3, X_4$ sont tous trois incidents à $\Pi_{15}$ qui coupe $X_1$ en un seul point $M_{15}$

et ces quatre points $M_{12}$, $M_{25}$, $M_{35}$, $M_{45}$ sont dans un plan $X_5$ : *Les cinq plans $X_i$ forment donc un quintuple tel que toute droite qui rencontre quatre d'entre eux rencontre aussi le cinquième* [1]. Les points $M_{ij}$ sont alors les dix

---

[1] On pourra comparer utilement cette démonstration avec celle donnée par M. MOMET dans sa thèse, *Du théorème anallagmatique du Pentacycle de Stéphanos*, qui est une propriété équivalente.

points doubles d'une variété cubique $V_3^3$ qui contient les quinze plans $\Pi_{ij}$ et $X_k$ [1]. Or, nous avons trouvé que $\Omega_3^7$ vérifiait

$$m = 3.$$

Le lieu des tétrasécantes de $F_2^7$ est donc une variété cubique qui contient les dix plans $\Pi_{ij}$ lieu de faisceaux de tétrasécantes; cette variété est confondue avec $V_3^3$.

*Les tétrasécantes de* $F_2^7$ *engendrent une* $V_3^3$ *à dix points doubles dont les plans d'un quintuple coupent* $F_2^7$ *suivant une droite et les quatre points doubles, simples pour* $F_2^7$; *les dix autres plans coupent* $F_2^7$ *suivant une cubique passant par trois des points doubles, et suivant le quatrième point double.*

Or, les droites sécantes communes aux plans d'un quintuple de $V_3^3$ sont précisément les droites communes à un système linéaire à trois paramètres de complexes linéaires de $S_4$; il suffit pour le voir de rapporter ce système linéaire à quatre complexes de ce système, lieux de droites sécantes à un plan $X_i$.

Puisque toute surface $F_2^7$ représentée par le système $|C_6|$ a les mêmes propriétés que la section hyperplane de la variété $\Omega_3^7$ de Palatini, examinons quelles sont les variétés du septième ordre qui ont de telles sections hyperplanes. Ces variétés à sections superficielles rationnelles sont rationnelles [2], et comme la surface contient cinq droites, la variété peut soit contenir cinq plans, soit être le lieu d'une famille à deux paramètres de droites.

(1) C. SEGRE, *Atti della Reale Accademia di Torino*, t. 22 (1887), p. 791.

(2) G. FANO, Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali (*Annali di Matematica*, 3, t. 24, 1915, p. 49).

Seul le cas où les courbes communes sont de genre un peut être birationnellement équivalent à la variété cubique générale de $S_4$ qui est irrationnelle (FANO, 1943).

Dans le premier cas la variété $\Omega_3^7$ est représentée sur $S_3$ par le système linéaire de toutes les surfaces cubiques $F^3$ qui passent par une cubique plane donnée $C^3$, et par cinq points simples donnés $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Deux surfaces $F^3$ se coupent suivant $C^3$ et une sextique gauche de genre quatre passant les points $A_i$ et six fois sécante à $C^3$. Une troisième surface $F^3$ coupe cette sextique en dix-huit points dont six sont sur $C^3$, et cinq points $A_i$ étant fixes, il reste sept points variables. Parmi les surfaces $F^3$ il y a un système à quatre paramètres composé du plan de $C^3$ et d'une quadrique passant par $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Toute cubique gauche passant par $A_1, A_2, \ldots, A_5$ appartient à un réseau de ces quadriques et représente par conséquent une quartique plane de $\Omega_3^7$. Il passe une cubique gauche et une seule par $A_1, A_2, \ldots, A_5$ et un point arbitraire de l'espace, de sorte que tout point de $\Omega_3^7$ appartient à une telle quartique dont le plan contient toutes les tétrasécantes qui en sont issues. Autrement dit, il y a sur $\Omega_3^7$ un réseau de quartiques planes dont les plans engendrent une $V_4$ lieu des tétrasécantes de $\Omega_3^7$.

*Cette variété $\Omega_3^7$ n'est pas la variété focale d'une congruence linéaire.*

Dans le second cas, la variété $\Omega_3^7$ est représentée sur $S_3$ par un système de monoïdes de sommet O et l'on vérifie aisément que toutes ces représentations se ramènent au modèle minimum suivant : système linéaire à cinq paramètres des surfaces du septième ordre ayant le point O sextuple, six droites-base doubles issues de O, cinq droites-base simples issues de O et une section plane base simple dans un plan ne passant pas par O. Soient en effet P le plan de la section plane C, et $OA_1, \ldots, OA_6$ les six droites-base doubles, $OB_1, \ldots, OB_5$ les cinq droites-base simples. Un monoïde F du système est représenté sur

P, par projection à partir de O, au moyen des courbes du septième ordre $C^7$ qui admettent $A_1, \ldots, A_6$ doubles, $B_1, \ldots, B_5$ simples, et treize autres points-base simples $C_1, \ldots, C_{13}$; il existe une sextique $C^6$ admettant tous ces points avec la même multiplicité, et qui représente le voisinage de O. Lorsqu'on coupe F par une surface du septième ordre, l'intersection est projetée suivant une courbe $C^{49}$ d'ordre 49 admettant les points $A_i$ avec la multiplicité 14 et les points $B_i$ et $C_i$ avec la multiplicité 7. Lorsque la surface admet O sextuple, $C^{49}$ contient six fois la courbe $C^6$ et il reste une composante $C^{13}$ d'ordre 13 ayant les points $A_i$ doubles, les points $B_i$ et $C_i$ simples. Lorsque la surface passe en outre par les droites $OA_i$ en les admettant comme droites doubles et par les droites $OB_i$ simplement, la composante $C^{13}$ admet les points $A_i$ quadruples, les points $B_i$ doubles et les points $C_i$ simples. Finalement, la surface appartient au système linéaire si elle contient en outre la courbe plane $C^7$; le reste de l'intersection est alors représenté par la composante résiduelle de $C^{13}$ qui est une sextique $C^6$ admettant les points $A_i$ doubles et les points $B_i$ simples : c'est bien la représentation que nous avons trouvée de $F_2^7$. La sextique $C^6$ de genre quatre représente une courbe de F d'ordre

$$7 \times 6 - 6 \times 4 - 5 = 13$$

de genre quatre, formant un système linéaire de degré 7, qui s'appuie sur C en 13 points. La courbe C est elle-même de genre 9. Les droites passant par O sont les images des génératrices rectilignes de $\Omega_3^7$.

Remarquons que le système des cônes tangents en O aux monoïdes, qui est le système linéaire des cônes du sixième ordre admettant $OA_1, \ldots, OA_6$ doubles et $OB_1, \ldots, OB_5$ simples, est de dimension quatre, et il y a un faisceau de monoïdes admettant l'un de ces cônes de tangentes et la section plane C dans P; ces monoïdes sont homologiques de l'une d'elles par rapport au centre O et au plan P. Le système linéaire à cinq paramètres représentatif de $\Omega_3^7$ est donc complet.

*La variété* $\Omega_3^7$ *à sections curvilignes de genre quatre de Palatini est donc normale dans* $S_5$ *et représentée rationnellement sur* $S_3$ *par un système de monoïdes* $F^7$.

Notons encore, puisque l'occasion se présente, que cette variété $\Omega_3^7$ et la variété $\Omega_3^6$ à sections curvilignes elliptiques de première espèce sont les seules variétés focales propres de congruences linéaires de $S_5$ pour lesquelles on a $k = 1$. En effet, d'après la relation fondamentale (2), l'hypothèse

$$k = 1, \qquad m = 3,$$

entraîne

$$9 = n + \mu + \rho.$$

Soit

$$n + \mu \leq 9,$$

qui n'admet, puisque $n > 5$, que les solutions $n = 6, \pi = 1$, $n = 7$, $\pi = 4$, $n = 8$, $\pi = 7$, cette dernière ayant été exclue au chapitre II.

## II. — Congruences linéaires définies au moyen d'un système de réciprocités, cas particulier.

Reprenons dans $S_3$ la congruence linéaire, définie comme lieu des cordes d'une cubique gauche. Diverses définitions de la cubique gauche vont nous suggérer des généralisations possibles aux hyperespaces.

On peut définir dans $S_3$ la cubique gauche comme l'intersection résiduelle de deux quadriques qui ont une droite commune. Ces deux quadriques définissent un faisceau et les génératrices de toutes les quadriques d'un faisceau forment une congruence quadratique car, par un point générique de $S_3$, il passe une quadrique du faisceau sur laquelle deux génératrices se coupent au point donné. L'intérêt d'avoir choisi comme base du faisceau une biquadratique dégénérée en une droite et une cubique est de faire dégénérer cette congruence quadratique en deux congruences linéaires; l'une a pour focale la cubique, l'autre est engendrée par les sécantes communes à la droite et à la cubique. Ce cas (ou ses dégénérescences) est d'ailleurs le seul dans lequel les deux systèmes de génératrices sont séparés rationnellement sur chaque quadrique.

Une congruence linéaire de $S_4$ peut être obtenue par la génération analogue suivante : Considérons la surface obtenue en projetant sur $S_4$ l'intersection résiduelle de trois hyperquadriques de $S_5$ qui passent par le centre de projection et ont en outre un plan commun (ne passant pas par le centre de projection). Par un choix convenable du repère projectif on peut toujours supposer que le centre de projection est $O_6$ et le plan commun $O_1O_2O_3$. On projette la surface $F_2^7$ résiduelle du plan sur $O_1O_2O_3O_4O_5$ et recherche ses trisécantes passant par un point générique qu'on peut supposer être $O_5$. La projection de $F_2^7$ d'un de ses points est une surface $F_2^6$. On vérifie sans difficulté que cette surface est la *surface de Veronese-Bordiga* à sections de genre trois, représentée sur le plan au moyen des quartiques ayant dix points-base simples. Cette surface admet effectivement un point triple apparent unique, et figure dans les déterminations d'Ascione et Severi. L'étude des trisécantes de $F_2^6$ issues de $O_5$ est aussi l'étude des plans de $S_5$ qui passent par $O_5\,O_6$ et coupent $F_2^7$ en trois points autres que $O_6$; les trois hyperquadriques sont alors coupées par ce plan suivant des coniques d'un même faisceau. Si ces quadriques ont pour équations

$$x_4 L_4 + x_5 L_5 + x_6 L_6 + a\, x_5^2 + b\, x_5 x_6 = 0,$$
$$x_4 L_4' + x_5 L_5' + x_6 L_6' + a' x_5^2 + b' x_5 x_6 = 0,$$
$$x_4 L_4'' + x_5 L_5'' + x_6 L_6'' + a'' x_5^2 + b'' x_5 x_6 = 0,$$

les L étant des formes linéaires en $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ et les $a$, $b$ des constantes, la condition s'écrit

$$\begin{Vmatrix} L_4 & L_5 & L_6 & a & b \\ L_4' & L_5' & L_6' & a' & b' \\ L_4'' & L_5'' & L_6'' & a'' & b'' \end{Vmatrix} = 0,$$

qui admet visiblement une solution unique (1).

L'extension à $S_r$ quelconque d'une telle définition se fait sans difficulté; il suffit de projeter sur $S_r$ l'intersection de $r-1$ *hyperquadriques de* $S_{2r-3}$ à partir *d'un* $S_{r-4}$ *appartenant à toutes ces hyperquadriques. Si ces hyperquadriques ont en commun un* $S_{r-2}$ *indépendant du centre de projection*, l'intersection résiduelle est projetée suivant *une variété* $\Omega_{r-2}$ *de* $S_r$ *qui est la focale propre d'une congruence linéaire.*

En effet, si ces hyperquadriques sont projetées de $O_{r+2}\, O_{r+3} \ldots O_{2r-2}$ sur $O_1\, O_2 \ldots O_{r+1}$ et ont en commun $O_1\, O_2 \ldots O_{r-1}$, leurs équations sont

$$\begin{aligned} F^i \equiv x_r L_r^i + x_{r+1} L_{r+1}^i + \cdots + x_{2r-2} L_{2r-2}^i + \\ + a_{r+1}^i x_{r+1}^2 + a_{r+2}^i x_{r+1} x_{r+2} + \cdots + a_{2r-2}^i x_{r+1} x_{2r-2} = 0, \end{aligned}$$

les $L_j^i$ étant des formes linéaires en $x_1$, $x_2$, ..., $x_r$ et les $a_j^i$ des constantes, l'indice $i$ variant de 1 à $r-1$. On peut supposer le repère projectif choisi de façon que $O_r$ soit le point générique d'où l'on mène à la variété $\Omega_{r-2}$ les $(r-1)$-sécantes. Il revient alors au même de déterminer

(1) Cf. note chap. I, p. 6.

dans $S_{2r-3}$ les espaces $S_{r-2}$ passant par le centre de projection $S_{r-4}$ et par $O_r$, qui coupent les $r-1$ hyperquadriques, en dehors de $S_{r-4}$, en $r-1$ points. Or de telles hyperquadriques sections appartiennent à un système linéaire à $r-3$ paramètres, c'est-à-dire qu'elles sont liées par une relation linéaire. Ceci s'écrit

$$\left\|\begin{matrix} L_r^1 & L_{r+1}^1 & \cdots & L_{2r-2}^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_{2r-2}^1 \\ L_r^2 & L_{r+1}^2 & \cdots & L_{2r-2}^2 & a_{r+1}^2 & \cdots & a_{2r-2}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_r^r & L_{r+1}^{r-1} & \cdots & L_{2r-2}^{r-1} & a_{2r-2}^{r-1} & \cdots & a_{2r-2}^{r-1} \end{matrix}\right\| = 0.$$

La suppression du facteur $x_r$ dans la première colonne de cette matrice élimine les solutions dans lesquelles un point d'appui appartiendrait à $S_{r-2}$ et non à $\Omega_{r-2}$ ; et l'annulation de cette matrice conduit évidemment, pour un choix générique des $L_j^i$, à une solution unique.

Pour déterminer l'ordre de la variété $\Omega_{r-2}$ de $S_r$, montrons que ses équations s'obtiennent par l'annulation d'une matrice. La projection de l'intersection complète des $r-1$ hyperquadriques de $S_{2r-3}$ sur $S_r$ s'obtient en effet en éliminant $x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots x_{2r-2}$, ce qui donne

$$\left\|\begin{matrix} x_r L_r^1 + x_{r+1} L_{r+1}^1 + a_{r+1}^1 x_{r+1}^2 & L_{r+2}^1 + a_{r+2}^1 x_{r+1} & \cdots & L_{2r-2}^1 + a_{2r-2}^1 x_{r+1} \\ x_r L_r^2 + x_{r+1} L_{r+1}^2 + a_{r+1}^2 x_{r+1}^2 & L_{r+2}^2 + a_{r+2}^2 x_{r+1} & \cdots & L_{2r-2}^1 + a_{2r-2}^1 x_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_r L_r^r + x_{r+1} L_{r+1}^{r-1} + a_{r+1}^{r-1} x_{r+1}^2 & L_{r+2}^{r-1} + a_{r+2}^{r-1} x_{r+1} & \cdots & L_{2r-2}^{r-1} + a_{2r-2}^{r-1} x_{r+1} \end{matrix}\right\| = 0.$$

Cette matrice a $r-2$ colonnes dont la première est quadratique et les autres linéaires et il y a $r-1$ lignes. La projection sur $S_r$ de l'intersection complète, qui est formée d'un $S_{r-2}$ et de $\Omega_{r-2}^n$, est donc située sur deux hypersurfaces d'ordre $r-1$ qui ont en commun la variété représentée par l'annulation de la matrice obtenue en supprimant les deux dernières lignes. Si $n'$ est l'ordre de cette variété,

$$n + 1 = (r-1)^2 - n'.$$

La variété résiduelle $\Omega^{n'}_{r-2}$ est représentée par une matrice de $r - 2$ colonnes dont la première est quadratique et les autres linéaires, avec $r - 3$ lignes; c'est l'intersection de deux hypersurfaces d'ordre $r - 2$ et $r - 3$ respectivement, obtenues en supprimant la première, puis la seconde colonne. L'intersection résiduelle est obtenue en supprimant ces deux premières colonnes; soit $n''$ son ordre. On a :

$$n' = (r-2)(r-3) - n'',$$

et $\Omega^{n''}_{r-2}$ est représentée par une matrice à $r - 4$ colonnes et $r - 3$ lignes dont tous les coefficients sont linéaires. Son ordre, qu'on pourrait calculer par récurrence en réitérant le procédé précédent, est donné par une formule classique [1] :

$$n'' = \frac{(r-3)(r-4)}{2}.$$

On en déduit immédiatement *l'ordre de* $\Omega^{n}_{r-2}$,

$$n = \frac{r(r-1)}{2}.$$

*Notons encore que la variété* $\Omega^{n}_{r-2}$ *est rationnelle*, car en projetant $\Omega^{n}_{r-2}$ à partir du $S_{r-2}$ qui complète l'intersection des $r - 1$ hyperquadriques sur un $S'_{r-2}$ linéairement indépendant de $S_{2r-3}$, tout point de $\Omega^{n}_{r-2}$ définit avec $S_{r-2}$ un $S_{r-1}$ qui coupe $S'_{r-2}$ en un point et réciproquement tout point de $S'_{r-2}$ définit avec $S_{r-2}$ un $S_{r-1}$ qui coupe chaque hyperquadrique suivant $S_{r-2}$ et par conséquent suivant un autre espace linéaire de même dimension $\Sigma_{r-2}$; on a ainsi dans $S_{r-1}$ un groupe de $r - 1$ espaces $\Sigma_{r-2}$ qui ont un point commun en général unique [2].

---

(1) C. SEGRE, Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. 9, $1900_2$, p. 253).

(2) L. GAUTHIER, Rationalité de l'intersection de $p$ hyperquadriques dans l'espace $Sr$ à $r$ dimention (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liége, 1944)*.

Nous étudierons plus particulièrement la *variété rationnelle* $\Omega_3^{10}$ *de* $S_5$ définie par ce procédé.

Nous obtenons $\Omega_3^{10}$ comme projection sur $S_5$ de l'intersection résiduelle de quatre hyperquadriques de $S_7$ ayant en commun $O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ et l'axe de projection $O_7\ O_8$ :

$$x_5 L_5^i + x_6 L_6^i + x_7 L_7^i + x_8 L_8^i + a_6^i x_6^2 + a_7^i x_6 x_7 + a_8^i x_6 x_8 = 0.$$

où $i = 1, 2, 3, 4$, et

$$L_j^i = b_{j1}^i x_1 + b_{j2}^i x_2 + b_{j3}^i x_3 + b_{j4}^i x_4 + b_{j5}^i x_5.$$

En ordonnant les équations de ces quatre quadriques par rapport à $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, on a

$$x_1 M_1^i + x_2 M_2^i + x_3 M_3^i + x_4 M_4^i + Q^i = 0,$$

avec $i = 1, 2, 3, 4$, et

$$M_j^i = b_{5j}^i x_5 + b_{6j}^i x_6 + b_{7j}^i x_7 + b_{8j}^i x_8,$$

$$Q^i = x_5(b_{55}^i x_5 + b_{65}^i x_6 + b_{75}^i x_7 + b_{85}^i x_8) + a_6^i x_6^2 + a_7^i x_6 x_7 + a_8^i x_6 x.$$

Pour avoir la représentation de $\Omega_3^{10}$ sur $S_3$, projetons la section hyperplane de la variété de $S_7$ par

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_8 x_8 = 0,$$

en prenant $O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ comme centre de projection. Il suffit, pour cela, d'éliminer $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ : on obtient

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 x_5 + \lambda_6 x_6 + \lambda_7 x_7 + \lambda_8 x_8 \\ M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 & M_4^1 & Q^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 & M_4^2 & Q^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 & M_4^3 & Q^3 \\ M_1^4 & M_2^4 & M_3^4 & M_4^4 & Q^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous obtenons un système linéaire à sept paramètres de surfaces du cinquième ordre $F_2^5$. Ce système admet pour courbe-base $\Gamma$ la courbe représentée par la matrice

$$\begin{Vmatrix} M_1^1 & \cdots & M_4^1 & Q^1 \\ M_1^2 & \cdots & M_4^2 & Q^2 \\ M_1^3 & \cdots & M_4^3 & Q^3 \\ M_1^4 & \cdots & M_4^4 & Q^4 \end{Vmatrix} = 0.$$

C'est donc la courbe commune à la surface

$$\begin{vmatrix} M_1^1 & \cdots & M_4^1 \\ M_1^2 & \cdots & M_4^2 \\ M_1^3 & \cdots & M_4^3 \\ M_1^4 & \cdots & M_4^4 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est une surface du quatrième ordre $F^4$ de genres $p_a = P_4 = 1$, et à la surface

$$\begin{vmatrix} M_1^1 & \cdots & M_3^1 & Q^1 \\ M_1^2 & \cdots & M_3^2 & Q^2 \\ M_1^3 & \cdots & M_3^3 & Q^3 \\ M_1^4 & \cdots & M_3^4 & Q^4 \end{vmatrix} = 0,$$

du cinquième ordre, qui coupe déjà $F^4$ suivant la courbe

$$\left\| \begin{matrix} M_1^1 & \cdots & M_3^1 \\ M_1^2 & \cdots & M_3^2 \\ M_1^3 & \cdots & M_3^3 \\ M_1^4 & \cdots & M_3^4 \end{matrix} \right\| = 0,$$

qui est une sextique $\Gamma^6$ de genre trois. La courbe $\Gamma$ est donc du quatorzième ordre, et pour avoir son genre il suffit de remarquer que les surfaces du cinquième ordre qui ne contiennent pas $F^4$ comme partie dépendent linéairement de $55 - 4 = 51$ paramètres indépendants et découpent sur $\Gamma^6$ une série linéaire $g_{30}^{27}$, de sorte que celles qui contiennent $\Gamma^6$ dépendent de $51 - (27 + 1) = 23$ paramètres, et $\Gamma^{14}$ est de genre 23. Deux surfaces du système $F_2^5$ se coupent, en dehors de $\Gamma^{14}$ fixe, suivant une courbe d'ordre onze qui s'appuie en 40 points sur $\Gamma^{14}$, car la variété de $S_7$ est du quinzième ordre.

La variété $\Omega_3^{10}$ est la projection de la précédente à partir de $O_7\,O_8$, qui s'obtient en faisant $\lambda_7 = \lambda_8 = 0$, ce qui a pour effet d'extraire du système linéaire $|F_2^5|$ un système $|F_2'^5|$ à cinq paramètres. Si nous remarquons que

$$Q^i = x_5 N_5^i + x_6 N_6^i,$$

les $N_j^i$ étant linéaires, nous voyons que les surfaces $F_2'^5$ représentatives des sections hyperplanes de $\Omega_3^{10}$ passent par la droite $O_7\,O_8$. Cette droite D est située sur la surface du cinquième ordre qui nous a servi à définir $\Gamma^{14}$, mais non sur $F^4$, ni sur les surfaces qui définissent la sextique résiduelle : c'est donc une tétrasécante de $\Gamma^{14}$. Les surfaces $F_2'^5$ se coupent deux à deux, en dehors de $\Gamma^{14}$ et D, suivant une courbe du dixième ordre qui s'appuie en 36 points sur $\Gamma^{14}$ et en quatre points sur D.

Remarquons encore que cette courbe-base dégénérée en $\Gamma^{14}$ et D est de genre

$$23 + 0 + 4 - 1 = 26\ ;$$

$\Omega_3^{10}$ *est représentée par les surfaces* $F_2'^5$ *qui passent par une courbe* $\Gamma^{14}$ *de genre* 23 *et une de ses tétrasécantes.*

Une autre définition classique de la cubique gauche de $S_3$ consiste à engendrer la courbe comme lieu du point commun à trois plans qui varient dans des faisceaux deux à deux homographiques. En choisissant les plans de bases des faisceaux deux à deux homologues, on a

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda P_1', \\ P_2 &= \lambda P_2', \\ P_3 &= \lambda P_3', \end{aligned}$$

et la cubique est représentée par

$$\begin{Vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1' & P_2' & P_3' \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette équation signifie aussi que les deux formes linéaires

$$\begin{cases} L \equiv UP_1 + VP_2 + WP_3 = 0, \\ L' \equiv UP_2' + VP_2' + WP_3' = 0 \end{cases}$$

ne sont pas indépendantes. Nous avons donc deux plans qui varient à deux paramètres, leur intersection décrit une congruence, et pour un point générique de l'espace, L, L′ sont indépendantes, de sorte que la congruence est linéaire; pour un point de la cubique, L, L′ sont dépendantes, et par ce point passent une infinité de droites; la cubique gauche est la focale.

Cette génération de la congruence linéaire de $S_3$ suggère une extension très simple à $S_r$.

Considérons dans $S_r$ une droite définie comme intersection de $r - 1$ hyperplans

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1, \\ \cdot \\ a_{r-1,1}x_1 + \cdots + a_{r-1,r}x_r = b_{r-1}. \end{cases}$$

Si les coefficients $a_{ij}$ dépendent de $r - 1$ paramètres $y_1, \ldots, y_{r-1}$, la droite décrit une congruence. Dans l'espace Y chaque hyperplan est représenté par une hypersurface qui varie dans un système linéaire. Les droites de la congruence qui passent par un point donné correspondent aux points communs aux $r - 1$ hypersurfaces associées à ce point; en particulier *la congruence est linéaire* lorsque les hypersurfaces ainsi associées projectivement deux à deux ont un seul point commun. Le cas le plus simple est celui où les $a_{ij}$ sont linéaires en $y_1, \ldots, y_{r-1}$. On a alors dans Y des *systèmes linéaires d'hyperplans*, et un foyer est un point auquel correspondent des hyperplans qui ont une droite commune au lieu d'un seul point.

En ordonnant par rapport aux $y_i$,

$$\begin{cases} y_0 f_{01} + y_1 f_{11} + y_2 f_{21} + \cdots + y_{r-1} f_{r-1,1} = 0, \\ \cdots \\ y_0 f_{0,r-1} + y_1 f_{1,r-1} + \cdots + y_{r-1} f_{r-1,r-1} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

la variété focale est

$$\begin{Vmatrix} f_{01} & f_{11} & \cdots & f_{r-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{0,r-1} & f_{1,r-1} & \cdots & f_{r-1,r-1} \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette matrice a $r - 1$ lignes et $r$ colonnes à éléments linéaires; *la variété focale $\Omega^n_{r-3}$ est donc d'ordre*

$$n = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Cette variété est évidemment située sur toutes les hypersurfaces

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{r-1} \\ f_{01} & f_{11} & \cdots & f_{r-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{0,r-1} & f_{1,r-1} & \cdots & f_{r-1,r-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Autrement dit, $\Omega^n_{r-2}$ *appartient à toutes les* $V^{r-1}_{r-1}$ *d'un système linéaire à* r — 1 *paramètres*. Les variétés $V^{r-1}_{r-1}$ de ce système qui passent par un point donné M hors de $\Omega^n_{r-2}$ rencontrent la génératrice G de la congruence en $r - 1$ points sur $\Omega^n_{r-2}$ et en M; elles contiennent G. Les *variétés* $V^{r-1}_{r-1}$ *du système linéaire sont des lieux de droites de la congruence*. Deux variétés $V^{r-1}_{r-1}$ dont les paramètres sont respectivement $\lambda_i$ et $\mu_i$ se coupent en dehors de $\Omega^n_{r-2}$ suivant une variété

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{r-1} \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{r-1} \\ f_{01} & f_{11} & \cdots & f_{r-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{0,r-1} & f_{1,r-1} & \cdots & f_{r-1,r-1} \end{Vmatrix} = 0,$$

d'ordre

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2},$$

irréductible. Il en résulte que les variétés $V^{r-1}_{r-1}$ du système linéaire n'ont pas d'autre variété-base que $\Omega^n_{r-2}$. En conséquence, *il n'y a pas dans la congruence de variétés focales singulières* lieux de droites contenant plus de $r - 1$ foyers propres, mais *seulement une variété spéciale*.

Pour étudier une section hyperplane générique de $\Omega^n_{r-2}$, il nous suffit, notre système de référence n'étant pas particularisé, de faire

$$x_{r-1} = 0.$$

Les équations bilinéaires (1) deviennent alors celles de $r-1$ *réciprocités de* $S_{r-1}$. Elles définissent entre l'espace Y et l'espace X ($S_{r-1}$) une transformation birationnelle $T_{r-1}$ classique [1]. Cette transformation est symétrique d'ordre $r-1$ ; à une droite correspond une courbe $C^{r-1}$ et à un hyperplan, une variété $V^{r-1}_{r-2}$. Tout foyer de l'espace X est un point fondamental auquel correspond une droite dans Y. Une droite de X qui s'appuie en $p$ points sur $\Omega^n_{r-2}$ est donc transformée en une courbe $C^{r-1}$ décomposée en une courbe $C^{r-1-p}$ et $p$ droites fondamentales. Ceci montre que

$$p \leq r-1.$$

Il n'y a donc, comme nous l'avions déjà rencontré, aucune droite contenant plus de $r-1$ foyers propres.

Inversement, tout point fondamental de Y est tel que la droite G correspondante de la congruence soit entièrement contenue dans X ; il correspond donc à une droite de $V^m_{r-2}$ lieu des droites G de l'hyperplan X. La courbe $C^{r-1}$ correspondante à une droite rencontre en un seul point non fondamental la variété $V^{r-1}_{r-2}$ qui correspond à un hyperplan ; une droite rencontre donc $V^m_{r-2}$ en

$$m = (r-1)^2 - 1 = r(r-2)$$

points. On a donc

$$m = r(r-2), \qquad k = r-1.$$

---

[1] La transformation (3,3) de $S_3$ est exposée dans L. GODEAUX, *Cours de Géométrie supérieure*, fasc. III.

Considérons maintenant *dans* $S_r$ *un système de* r *réciprocités*

$$\varphi_k(x, y) = \Sigma a_k^{ij} x_i y_j = \Sigma y_j f_{kj} = \Sigma x_i f'_{ki} = 0,$$

où

$$i, j = 0, 1, \cdots, r, \qquad k = 0, 1, \cdots, r-1,$$

les coefficients étant choisis de façon que pour $j = 1, 2, \ldots r-1$ les $f_{kj}$ soient précisément ceux du système (1). On définit ainsi dans $S_r$ une transformation birationnelle symétrique $T_r$ du type cité plus haut. A un hyperplan

$$\xi_0 y_0 + \xi_1 y_1 + \cdots + \xi_r y_r = 0$$

correspond l'hypersurface

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{r-1} & \xi_r \\ f_{0,0} & f_{0,1} & \cdots & f_{0,r-1} & f_{0,r} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \cdots & f_{1,r-1} & f_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{r-1,0} & f_{r-1,1} & \cdots & f_{r-1,r-1} & f_{r-1,r} \end{vmatrix} = 0.$$

En particulier, à l'espace linéaire $S_{r-2}$ d'équations

$$y_0 = y_r = 0,$$

correspond la variété

$$\begin{Vmatrix} f_{0,1} & \cdots & f_{0,r-1} \\ f_{1,1} & \cdots & f_{1,r-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{r-1,1} & \cdots & f_{r-1,r-1} \end{Vmatrix} = 0.$$

On reconnaît, à l'interversion près des lignes et des colonnes, la matrice qui définit $\Omega^n_{r-2}$. *La variété focale propre* $\Omega^n_{r-2}$, transformée birationnelle d'un $S_{r-2}$, *est donc rationnelle.*

Nous obtiendrons la représentation de $\Omega^n_{r-2}$ sur $S_{r-2}$ en cherchant dans $y_0 = y_r = 0$ les transformées des sections hyperplanes de $\Omega^n_{r-2}$ :

$$y_0 = y_r = \begin{vmatrix} \xi'_0 & \xi'_1 & \cdots & \xi'_r \\ f'_{0,0} & f'_{0,1} & \cdots & f'_{0,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{r-1,0} & f'_{r-1,1} & \cdots & f'_{r-1,r} \end{vmatrix} = 0;$$

$\Omega^n_{r-2}$ est représentée au moyen d'un *système linéaire à* r *paramètres de variétés* $V^r_{r-3}$ *d'ordre* r passant par la variété

$$y_0 = y_r = 0 \quad \left\| \begin{matrix} f'_{0,0} & f'_{0,1} & \cdots & f'_{0,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{r-1,0} & f'_{r-1,1} & \cdots & f'_{r-1,r} \end{matrix} \right\| = 0,$$

qui est une variété d'ordre

$$\frac{r(r+1)}{2}.$$

Etant donnée l'analogie des propriétés trouvées pour cette congruence et pour la précédente, il y a lieu de rechercher si nous n'avons pas deux générations de la même congruence. Effectivement dans $S_3$ nous avons dans les deux cas la cubique gauche focale, et dans $S_4$ une surface de Veronese-Bordiga. Mais si nous examinons attentivement le résultat obtenu dans $S_5$ nous avons ici : *Une variété* $\Omega^{10}_3$ *rationnelle* représentée sur $S_3$ au moyen d'un *système linéaire de surfaces du cinquième ordre* passant par *une courbe* $\Gamma^{15}$ *du quinzième ordre.*

Soit $\pi$ le genre de cette courbe $\Gamma^{15}$; les surfaces du cinquième ordre découpent sur $\Gamma^{15}$ une série linéaire $g^{75-\pi}_{75}$, et parmi ces surfaces qui dépendent linéairement de 55 paramètres, celles qui passent par $\Gamma^{15}$ dépendent de 5 paramètres. On a donc

$$55 - (75 - \pi + 1) = 5,$$

d'où

$$\pi = 26.$$

Il en résulte que la variété $\Omega^{10}_3$ que nous venons d'obtenir *admet la précédente comme cas particulier projectif.* C'est donc sur la variété générale que nous achèverons l'étude de la congruence linéaire correspondante.

Deux surfaces $F^5$ passant par $\Gamma^{15}$ se recoupent suivant une courbe $\Gamma^{10}$ de genre 11 qui s'appuie en 40 points sur $\Gamma^{15}$. Cette courbe $\Gamma^{10}$ a été rencontrée par Stuyvaert (1). La formule des tétrasécantes donne alors pour la section curviligne de $\Omega_3^{10}$, qui est aussi une courbe du dixième ordre de genre onze :

$$\mu = 20.$$

On en déduit

$$\rho = 45;$$

tel est l'ordre de la variété focale spéciale. Pour étudier cette variété focale remarquons que dans l'espace $S_3$ représentatif de $\Omega_3^{10}$ tout plan coupe $\Gamma^{15}$ en quinze points et par 14 quelconques d'entre eux on peut faire passer une quartique plane $\gamma_4$. Les surfaces $F_5$ du système linéaire $|F_5|$ représentatif des sections hyperplanes de $\Omega_3^{10}$ découpent sur $\gamma_4$ une série linéaire $g_6^3$. Il y a donc un faisceau de surfaces $F_5$ qui contiennent $\gamma_4$; ces surfaces se recoupent suivant une courbe $\gamma_6$ qui s'appuie en $40 - 14 = 26$ points sur $\Gamma^{15}$. Cette courbe $\gamma_6$ représente donc une courbe C de $\Omega_3^{10}$ qui est d'ordre $5 \times 6 - 26 = 4$. Or $\gamma_6$ et $\gamma_4$ se coupent en six points et leur réunion constitue une courbe de genre onze, de sorte que $\gamma_6$ est de genre trois. La quartique $C^4$ de $\Omega_3^{10}$ est donc de genre trois, ce qui montre qu'elle est plane. Inversement les surfaces $F^5$ découpent sur $\gamma_6$ une série linéaire $g_4^2$ qui est la série canonique de $\gamma_6$, car il y a un réseau de surfaces $F^5$ passant par $\gamma_6$, correspondant au réseau des hyperplans passant par $C^4$. Ainsi les courbes $\gamma_4$ dépendent de 3 paramètres et celles qui fournissent une même $\gamma_6$ dépendent de deux paramètres ; les courbes $\gamma_6$, et par conséquent les quartiques $C^4$, dépendent d'un paramètre.

*La variété focale spéciale $\Sigma_3^{45}$ d'ordre quarante-cinq est le lieu d'un faisceau de plans qui coupent $\Omega_3^{10}$ suivant des quartiques de genre trois.*

---

(1) STUYVAERT, Cinq études de Géométrie analytique (*Mémoires de la Société des Sciences de Liége*, 1907, t. VII, p. 37).

Comme nous savons que $k = 4$, nous en déduisons ($n = 10$, $\pi = 11$)

$$t = 15,$$

et comme $m = 15$, la formule de L. Roth nous donne alors

$$n' = 105.$$

Ces caractères reportés dans les formules de Severi donnent

$$b = 25, \qquad p = 41, \qquad d = 0, \qquad j = 50.$$

*La variété focale propre* $\Omega_3^{10}$ *n'admet pas de courbe double impropre. Sa surface double apparente est du vingt-cinquième ordre à sections de genre 41. La courbe triple apparente est du quinzième ordre. Il y a un point quadruple apparent.*

Remarquons encore que ces caractères portés dans la seconde formule de L. Roth donnent

$$\mu_5 = 0,$$

en accord avec le fait, déjà rencontré, que $\Omega_3^{10}$ n'a pas de pentasécantes.

### III. — Congruences linéaires engendrées par un faisceau d'hypersurfaces.

Dans l'exemple précédent nous avons vu que la variété focale propre $\Omega_{r-2}^{n}$ appartient à un système linéaire de variétés $V_{r-1}^{r-1}$ qui sont lieux de droites de la congruence. Ceci suggère un mode de génération de congruences linéaires au moyen d'hypersurfaces réglées. Supposons que toutes les hypersurfaces d'un faisceau linéaire soient simplement réglées. Par un point M de $S_r$ passe une hypersurface H du faisceau, et sur cette hypersurface il passe par M une génératrice rectiligne unique, qui décrit donc *une congruence linéaire*. Plus généralement, tel sera encore le cas lorsque H multiplement réglée contiendra un système de droites qui l'engendre une seule fois.

C'est ainsi que dans $S_3$ un faisceau de quadriques est formé de surfaces réglées, et fixer une génératrice a pour effet de séparer analytiquement les deux systèmes de génératrices.

Dans $S_r$ une hypersurface d'ordre inférieur à $r - 1$ contient une infinité de droites passant par chacun de ses points; il en résulte que nous devons prendre des hypersurfaces ayant au moins cet ordre. Remarquons encore qu'en général, il ne suffit nullement d'avoir choisi deux hypersurfaces réglées pour que toute hypersurface du faisceau qu'elles déterminent soit réglée, sauf toutefois si ce sont des $V_{r-1}^{r-1}$; nous nous limiterons à l'examen de ce cas, en nous plaçant dans l'espace $S_5$, notre méthode conduisant dans $S_r$ à la discussion d'un nombre croissant de solutions.

Considérons donc dans $S_5$ un faisceau de $V_4^4$; une telle variété contient généralement un système irréductible de génératrices tel que par un point il en passe $4! = 24$. Toutefois il est bien connu que les variétés $V_{r-1}^{r-1}$ de Segre contiennent un faisceau rationnel de $S_{r-2}$ et un système linéaire de génératrices. Nous supposerons donc pour commencer que les variétés $V_4^4$ sont projections de $V_4^4$ de Segre.

Nous avons vu au chapitre IV que la projection d'une $V_4^4$ de Segre de $S_7$ sur $S_5$ à partir d'une droite $\Delta$ est une $V_4^4$ admettant une $V_3^3$ de Segre double, les cordes de $V_4^4$ qui s'appuient sur $\Delta$ engendrant une variété $\Omega_3^6$ à sections elliptiques de première espèce. Pour que le faisceau défini par deux telles $V_4^4$ de $S_5$ contienne uniquement des $V_4^4$ de cette nature, il est nécessaire et suffisant que la $V_3^3$ double soit fixe, d'après le théorème de Bertini. Comme $\Omega_3^6$ est un lieu de génératrices des $V_4^4$, les génératrices des $V_4^4$ ne rencontrent pas $V_3^3$; elles sont donc tétrasécantes à la variété résiduelle $\Omega_3^4$. Mais une variété $V_4^4$ qui admet $V_3^3$ double est l'enveloppe d'un faisceau quadratique d'hyperquadriques; on peut en effet, en désignant par A, B, C, A', B', C' six formes linéaires, représenter $V_3^3$ par

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

et $V_4^4$ par

$$(AC' - CA')^2 - (AB' - BA')(BC' - CB') = 0.$$

Représentons le réseau des hyperquadriques qui passent par $V_3^3$ projectivement sur le réseau des droites d'un plan $\varpi$; toute variété $V_4^4$ ayant $V_3^3$ double est représentée par une conique de $\varpi$. Un faisceau de $V_4^4$ est représenté par un faisceau linéaire ponctuel de coniques. Aux trois coniques dégénérées du faisceau correspondent trois $V_4^4$ dégénérées en couples de quadriques qui se coupent deux à deux hors de $V_3^3$ suivant quatre espaces linéaires $S_3$ représentés par les quatre points-base du faisceau de coniques. Nous avons donc la *congruence des droites qui s'appuient sur quatre* $S_3$ *fixes de* $S_5$. Supposons maintenant que la droite $\Delta$ de $S_7$ d'où l'on projette $V_4^4$ appartienne au II — complexe quadratique des droites par lesquelles passent des plans trisécants de $V_4^4$. Par $\Delta$ passe un $S_5$ coupant $V_4^4$ suivant une $V_3^3$. En projection sur $S_5$ nous obtiendrons une $V_4^4$ ayant un $S_3$ triple $\Sigma$; en conséquence.

*Deux variétés* $V_4^4$ *ayant un même* $S_3$ *triple* $\Sigma$ *se recoupent suivant une variété* $\Omega_3^7$ *dont les tétrasécantes forment une congruence linéaire.* Car les génératrices des $V_4^4$ du faisceau ne rencontrent pas $\Sigma$. Cette variété $\Omega_3^7$ est d'ailleurs le lieu d'un faisceau rationnel de plans, puisque tout hyperplan passant par $\Sigma$ recoupe les deux $V_4^4$ chacune suivant un $S_3$, donc $\Omega_3^7$ suivant un plan associé projectivement à l'hyperplan du faisceau. Nous retrouvons ainsi les congruences linéaires du chapitre III.

Nous pouvons évidemment substituer aux $V_4^4$ projections de variétés de Segre d'autres $V_4^4$, pourvu qu'elles aient la propriété essentielle de contenir un système simple de droite ; ce sera encore le cas des $V_4^4$ qui contiennent un faisceau de $V_3^3$ projections de variétés de Segre.

Plaçons-nous donc dans le cas, en quelque sorte intermédiaire entre les deux précédents, où il y a une variété $V_3^3$ située dans un hyperplan H parmi les variétés-base du faisceau. H recoupe chaque $V_4^4$ suivant un $S_3$ qui ne doit pas rester fixe, car toute droite de la congruence coupe H en un point qui, s'il appartient à une variété fixe, est foyer, la variété fixe faisant alors partie de la variété focale propre dégénérée. $S_3$ varie donc dans un faisceau linéaire, et les droites de la congruence s'appuient sur $S_3$ Etant donné un point M de $S_5$, la variété $V_4^4$ du faisceau qui passe par M contient un certain $S_3$ du faisceau, et la droite de la congruence est située dans l'hyperplan $S_3$ M qui coupe $V_4^4$ suivant $S_3$ et une $V_3^3$ dont nous voulons qu'elle soit projection d'une $V_3^3$ de Segre, c'est-à-dire qu'elle ait un plan double. Ce plan double fait partie de la base du faisceau d'après le théorème de Bertini ; s'il varie, il décrit un $S_3$ qui est alors double pour toutes les $V_4^4$.

*a)* Considérons donc un faisceau de $V_4^4$ qui ont un $S_3$ fixe double et sont coupées par un hyperplan donné H suivant une $V_3^3$ qui admet la trace de $S_3$ comme plan double. Il reste une *variété-base* $\Omega_3^9$ *qui est la focale propre d'une congruence linéaire*, dont les génératrices sont les droites des $V_3^3$, qui dépendent de deux paramètres, situées sur les diverses $V_4^4$. Les génératrices de $V_3^3$ ne rencontrent en effet pas son plan double.

Tout hyperplan passant par $S_3$ recoupe chaque $V_4^4$ suivant une $V_3^2$ et ces hyperquadriques, qui forment faisceau, ont en commun un plan de la $V_3^3$ base; il reste une réglée cubique normale $F_2^3$ tracée sur $\Omega_3^9$. $F_2^3$ coupe $S_3$ suivant une cubique gauche. $S_3$ coupe donc $\Omega_3^9$ suivant une surface sextique $F_2^6$ qui est le lieu d'un faisceau rationnel de cubiques gauches; cette surface est rationnelle d'après un théorème de Noether [1].

Ainsi $\Omega_3^9$ *est réglée et rationnelle.*

La variété $\Omega_3^9$ contient *un plan directeur simple* qui est, dans H, le plan-base du faisceau résiduel de $V_3^3$; les directrices des $F_2^3$ de $\Omega_3^9$ décrivent dans ce plan un faisceau linéaire.

*b)* Si le plan double des $V_3^3$ est fixe, il est dans H et se confond avec le plan-base du faisceau de $S_3$. Comme ce plan est double aussi pour la $V_3^3$ contenue dans H, il est triple pour les $V_4^4$, et cette condition suffit. Nous avons ainsi un faisceau de $V_4^4$ qui ont un plan P fixe triple, et sont coupées par un hyperplan H passant par P suivant une $V_3^3$ qui admet P comme plan double. Il reste une *variété-base* $\Omega_3^{13}$ *qui est la focale propre d'une congruence linéaire*, dont les génératrices sont les droites des $V_3^3$ situées sur chaque $V_4^4$.

La variété $\Omega_3^{13}$ *admet le plan* P *comme multiple d'ordre sept.*

Tout $S_3'$ passant par P recoupe chaque $V_4^4$ suivant un plan, et par conséquent $\Omega_3^{13}$ suivant une droite qui est ainsi mise en correspondance biunivoque avec $S_3$ d'un réseau linéaire.

Ainsi $\Omega_3^{13}$ *est réglée et rationnelle.*

---

(1) M. NOETHER, Ueber Flächen welche schaaren rationaler curven besitzen [*Mathematische Annalen*, Band III (1871)].

**IV. — Congruences dont tous les foyers sont multiples.**

Nous n'avons examiné dans tout ce mémoire que les congruences linéaires à foyers distincts. Les congruences à foyers multiples ne sont cependant pas dénuées d'intérêt; nous allons terminer par quelques brèves indications à leur sujet.

Il est clair que si tous les foyers d'un rayon générique de la congruence n'ont pas la même multiplicité, la variété focale propre dégénère. Pour des raisons déjà indiquées, nous écarterons ce cas. L'étude des congruences à foyers tous de même multiplicité ne se présente que lorsque $r-1$ admet des diviseurs. Nous poserons donc

$$r-1=hr',$$

et nous supposerons que sur chaque rayon de la congruence il y a $r'$ foyers tous multiples d'ordre $h$.

Nous nous bornerons, dans le cas général, à reprendre, à titre d'exemple, l'étude des *variétés lieux d'un faisceau rationnel d'espaces linéaires,* en utilisant la méthode de dégénérescence développée au chapitre III.

Une droite appartenant à la congruence vérifie $r-1$ conditions, de sorte que le fait de rencontrer la variété focale propre en un foyer impose à cette droite $h$ conditions, ce qui signifie que cette variété a la dimension

$$r-1-h.$$

Considérons alors la variété $\Omega^n_{r-1-h}$ lieu d'un faisceau rationnel d'espaces $S_{r-2-h}$, dégénérée en $n$ faisceaux linéaires $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ dont deux consécutifs ont un élément commun, et recherchons les droites issues d'un point donné M, qui s'appuient en $r'$ points sur cette variété. Or il existe une droite et une seule passant par M et rencontrant $r'$ espaces $S_{r-1-h}$ indépendants, car l'intersection de $r'$ espaces $S_{r-h}$ est un espace linéaire $S_{r-r'h}$, c'est-à-dire une droite. Nous avons donc à dénombrer dans $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les suites de $r'$ espaces deux à deux indépendants. Or deux de ces espaces dont les indices diffèrent de $\delta$ sont, du fait de l'incidence de deux espaces consécutifs, situés dans un même $S_k$, où

$$k = r - 1 - h + \delta \quad \text{si} \quad \delta \leq h + 1,$$
$$k = r \quad \text{si} \quad \delta > h + 1.$$

Ils sont donc indépendants lorsque

$$\delta \geq h + 1.$$

Le nombre des droites passant par M est donc égal au nombre $\Theta$ $(n, r', h)$ des combinaisons de $r'$ indices choisis dans la suite $1, 2, \ldots, n$, dont deux consécutifs diffèrent d'au moins $h + 1$ unités. Ce nombre peut être déterminé explicitement en fonction de $n$, $r'$ et $h$ par des procédés récurrents. Mais il nous suffit de remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour que ce nombre soit un est

$$n = 1 + (r' - 1)(h + 1),$$

la seule combinaison répondant à la question étant alors

$$\Sigma_1 \, \Sigma_{h+2} \, \Sigma_{2h+3} \cdots \Sigma_n,$$

il faut donc prendre

$$n = r - 1 - h + r',$$

et ceci suffit.

*Les variétés $\Omega_{r-1-h}^{r-1-h+r'}$ lieux d'un faisceau rationnel d'espaces linéaires sont focales propres de congruences linéaires à foyers tous multiples d'ordre* h.

Dans les espaces à un nombre impair de dimensions $r = 2h + 1$, on rencontre en particulier des variétés $\Omega_h$ dont les cordes constituent des congruences linéaires. Nous en avons incidemment rencontré quelques-unes dans les chapitres précédents ; dans $S_3$ la cubique gauche répond évidemment seule à cette propriété. Dans $S_5$ nous avons rencontré à la fin du chapitre III, § III, une dégénérescence de la *réglée normale du quatrième ordre,* que l'on obtient encore ci-dessus en faisant $r=5$, $r'=2$, $h=2$, et au début du chapitre IV la *surface de Caporali* $F_2^5$. Ce sont *les deux seules surfaces de* $S_5$ *qui ont cette propriété,* car une corde générique d'une telle surface ne peut rencontrer une autre corde; leur point commun serait foyer singulier. En projetant une section hyperplane d'une telle surface d'une de ses cordes génériques sur un plan, on obtient une courbe plane d'ordre $n-2$, sans point double, de sorte que

$$\pi = \frac{(n-3)(n-4)}{2},$$

et cette valeur du genre de la section hyperplane n'est inférieure au maximum du genre d'une courbe de $S_4$ que pour $n \leq 5$. Les surfaces, qui doivent être gauches, sont donc des $F_2^4$ à sections rationnelles ou des $F_2^5$ à sections elliptiques. La surface $F_2^4$ de Veronese a ses cordes situées sur une variété $M_4^3$, elle ne convient pas. Il reste les deux surfaces citées.

Dans $S_7$ nous avons rencontré au chapitre IV, § II, la *variété* $\Omega_3^6$ *à sections curvilignes elliptiques de première espèce* dont les cordes engendrent une congruence linéaire. En faisant $r=7$, $r'=2$, $h=3$ dans le résultat précédent, nous obtenons aussi la *variété* $\Omega_3^5$ *lieu d'un faisceau rationnel de plans.* Par la première de ces variétés passent, nous l'avons vu, trois variétés $V_4^4$ de Segre, et on peut la considérer comme l'intersection résiduelle d'une $V_4^4$ avec une hyperquadrique qui ont déjà deux $S_3$ communs. Par la variété $\Omega_3^5$ passent une infinité à quatre paramètres de variétés $V_4^4$ de Segre qui peuvent être obtenues comme lieux des $S_3$ réunissant un plan variable de $\Omega_3^5$ à un point d'une de ses cordes en correspondance homographique, les points communs à la corde et à $\Omega_3^5$ étant associés aux plans de $\Omega_3^5$ qui y passent (il y a une infinité à six paramètres de cordes, à chacune desquelles correspondent une simple infinité d'homographies, mais chacune des $V_4^4$ admet une infinité à trois paramètres de telles générations). Une $V_4^4$ passant par $\Omega_3^5$ contient un plan de $\Omega_3^5$ dans chacun de ses $S_3$, et en projection d'un $S_3$ de $V_4^4$ sur un autre $S_3$ de $V_4^4$, ces plans ont une enveloppe de seconde classe, c'est-à-dire un cône du second ordre dont le sommet est la trace de la directrice rectiligne de $\Omega_3^5$. Ceci montre que $\Omega_3^5$ peut être considérée comme l'intersection résiduelle d'une $V_4^4$ de Segre avec une hyperquadrique qui ont une $V_3^3$ commune.

D'autre part, ceci montre que toutes les $V_4^4$ passant par $\Omega_3^5$, et par conséquent $\Omega_3^5$ elle-même, sont situées sur une variété $V_5^3$ lieu d'un faisceau rationnel de $S_4$, à savoir le $S_1$ -cône lieu des $S_4$ qui joignent la directrice rectiligne de $\Omega_3^5$ aux plans de la $V_3^3$ de Segre lieu des plans des coniques de la directrice $F_2^4$ de $\Omega_3^5$. Remarquons d'ailleurs que tout $S_4$ de $V_5^3$ coupe $\Omega_3^5$ suivant une réglée rationnelle normale $F_2^3$. Par tout point M de $V_5^3$ passe un $S_4$ de cette variété ; il passe donc par M une infinité de cordes de $\Omega_3^5$ formant un faisceau linéaire.

*La congruence linéaire dont la focale propre est $\Omega_3^5$ admet une variété focale spéciale $V_5^3$ lieu des plans des coniques de $\Omega_3^5$.*

La première classe de cette congruence, ordre de la variété $V_5^{m_1}$ lieu des cordes de la section hyperplane de $\Omega_3^5$, qui est une réglée rationnelle normale $F_2^5$ de $S_6$, est

$$m_1 = 3.$$

La seconde classe de cette congruence est l'ordre de la variété $V_5^{m_2}$ lieu des cordes de la quintique rationnelle normale de $S_5$, c'est-à-dire aussi le nombre des points doubles d'une quintique rationnelle plane, soit

$$m_2 = 6.$$

La relation fondamentale (2),

$$m_1^2 = n\,k^2 + m_2 + \rho,$$

où nous devons faire $n = 0$, puisque la variété focale propre a une dimension inférieure à cinq, nous donne

$$\rho = 3,$$

ce qui montre que $V_5^3$ *est la seule variété focale singulière*, et qu'elle est simple.

La définition des deux variétés précédentes comme intersection partielle d'une $V_4^4$ de Segre et d'une hyperquadrique suggère une généralisation [1].

Considérons dans $S_{2h+1}$ une variété de Segre $V_{h+1}^{h+1}$ et une hyperquadrique et cherchons à quelles conditions leur intersection est la variété focale propre d'une congruence linéaire à deux foyers. Considérons un point M de $S_{2h+1}$ et cherchons les cordes de la variété issues de M. Ce sont des cordes de $V_{h+1}^{h+1}$ et les cordes de $V_{h+1}^{h+1}$ passant par M engendrent un espace linéaire $S_3$ qui coupe $V_{h+1}^{h+1}$ suivant une quadrique dont les génératrices de l'un des systèmes sont les traces des $S_h$ générateurs. Comme $S_3$ coupe l'hyperquadrique suivant une quadrique, il coupe la variété intersection suivant une biquadratique qui admet deux cordes passant par M. Nous aurons une congruence linéaire dans les seuls cas où cette biquadratique dégénère en une droite et une cubiqne, ou une quadrilatère gauche. Si la droite commune est trace d'un $S_h$, ceci signifie que $V_{h+1}^{h+1}$ et l'hyperquadrique ont un $S_h$ commun.

---

(1) J'ai donné des applications de ces propriétés dans : Sur certaines variétés cubiques rationnelles sans point double [*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 216, ($1943_1$), p. 435].

Il reste une *variété* $\Omega_h^{2h+1}$ *rationnelle* représentée sur $S_h$ au moyen d'un système linéaire de variétés cubiques qui passent par l'intersection de deux quadriques. Cette variété généralise la surface de Caporali.

Si la droite commune n'est pas trace d'un $S_h$, ceci signifie que $V_{h+1}^{h+1}$ et l'hyperquadrique ont une $V_h^h$ de Segre commune ; il reste une *variété* $\Omega_h^{h+2}$ *rationnelle*, qui est le lieu d'un faisceau rationnel de $S_{h-1}$ situés dans les $S_{h+1}$ de $V_{h+1}^{h+1}$.

Si deux droites communes de même système sont traces de $S_h$, ceci signifie que $V_{h+1}^{h+1}$ et l'hyperquadrique ont deux $S_h$ communs ; il reste une *variété* $\Omega_h^{2h}$ *rationnelle* représentée sur $S_h$ par un système de variétés cubiques qui ont un point double-base O, un cône du second ordre $V_{h-2}^2$ base de sommet O et un $S_{h-2}$ base simple ne passant pas par O. Cette variété généralise la variété $\Omega_3^6$ à sections elliptiques de première espèce.

Si deux droites communes appartiennent à l'autre système, ceci signifie que $V_{h+1}^{h+1}$ et l'hyperquadrique ont deux $V_h^h$ communes ; il reste deux $S_h$, et la congruence des droites qui s'appuient sur deux $S_h$ indépendants est évidemment linéaire.

Pour terminer, examinons rapidement les diverses *congruences linéaires qui ont un seul foyer* sur un rayon générique.

Si ce foyer est fixe, la congruence est constituée par une *gerbe de rayons*.

Si ce foyer décrit une courbe, c'est une *courbe unicursale* de $S_{r-2}$ et l'on associe dans une *correspondance rationnelle* les points de cette courbe aux hyperplans passant par $S_{r-2}$. Par un point M passe un seul hyperplan auquel correspond un foyer sur la courbe, qui achève de définir le rayon FM. Les rayons issus d'un foyer F se répartissent en diverses gerbes situées dans les hyperplans correspondants de F. *L'espace* $S_{r-2}$ *est une variété focale spéciale*, car par chacun de ses points passent toutes les droites qui unissent ce point aux divers points de la courbe focale propre.

Si le foyer décrit une surface, c'est une *surface unicursale* de $S_{r-3}$, et l'on associe dans une *correspondance rationnelle* les points de cette surface au réseau des $S_{r-2}$ passant par $S_{r-3}$; *l'espace* $S_{r-3}$ *est évidemment une variété focale spéciale.*

De façon générale, si le foyer décrit une variété $\Omega_k$, c'est une *variété unirationnelle* $\Omega_k$ *de* $S_{r-1-k}$, et l'on associe dans une *correspondance rationnelle* les points d'un espace linéaire $S_k$ sur lequel $\Omega_k$ est représentée par une involution I, aux espaces $S_{r-k}$ passant par $S_{r-1-k}$. Par un point M de $S_r$ passe un espace $S_{r-k}$ qui est associé à un point de $S_k$ et par conséquent à un point F de $\Omega_k$ qui achève de définir le rayon FM. Les rayons issus d'un point F de $\Omega_k$ constituent diverses gerbes dans les $S_{r-k}$ associés à chacun des points de $S_k$ constituant le groupe de l'involution I représentant F.

Dans $S_{2h+1}$ le cas où la variété focale propre a la dimension maxima s'obtient en associant les points d'un $S_h$ en correspondance rationnelle avec les $S_{h+1}$ qui le contiennent, et cette congruence généralise la congruence classique de $S_3$ qui admet une seule directrice rectiligne.

Ces congruences comportent, on le voit, un haut degré d'arbitraire, tant dans le choix de la variété focale propre que dans celui de la congruence associée à cette variété (au total $r - 1$ *fonctions rationnelles arbitraires de* k *arguments*).

## QUELQUES REMARQUES POSTLIMINAIRES

Nous avons rencontré au cours de cette étude diverses variétés focales propres de congruences linéaires. Certaines d'entre elles présentent un caractère régulier, en ce sens qu'elles peuvent être considérées comme membres d'une suite de variétés appartenant aux hyperespaces successifs $S_{r-1}$, $S_r$, $S_{r+1}$, etc... D'autres, les variétés à sections elliptiques, présentent un caractère accidentel, en ce sens qu'elles n'existent que dans $S_4$ et $S_5$. Nous pouvons cependant faire à leur sujet deux remarques générales :

1° Toutes les variétés rencontrées dans $S_r$ peuvent être considérées comme constituant une partie de la *base d'un faisceau de* $V_{r-1}^{r-1}$. La base d'un faisceau général de $V_{r-1}^{r-1}$ est la variété focale d'une congruence d'ordre $(r-1)!$. Il serait intéressant de savoir si toute variété focale propre d'une congruence linéaire est ainsi une dégénérescence de celle-ci ; on trouverait là une nouvelle justification de la limitation rencontrée au chapitre II :

$$n < (r-1)^2,$$

2° Toutes les variétés rencontrées dans $S_r$ sont *rationnelles* et il serait intéressant de savoir si toute variété $\Omega_{r-2}^{n}$ de $S_r$ qui présente un point $(r-1)$-uple apparent et un seul est de ce fait rationnelle, ou unirationnelle.

Mais on rencontre, en géométrie algébrique, des cas si déconcertants, où des propriétés vraies dans les espaces à un petit nombre de dimensions cessent de l'être dans les espaces supérieurs, qu'il serait présomptueux de croire à la généralité des deux propositions précédentes du seul fait de leur validité dans les espaces à trois et quatre dimensions.

# TABLE DES MATIÈRES