JEAN BRACONNIER

Sur les groupes topologiques localement compacts

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1945

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1945__280__R1_0>

SUR LES GROUPES TOPOLOGIQUES LOCALEMENT COMPACTS.

Thése présentée devant l'Université de NANCY
par M. Jean Braconnier, en vue de l'obtention du grade de
Docteur és Sciences Mathématiques
le 16 Juin 1945.

Husson, président

Jury: M. H. Cartan, ~~président,~~
M. Delsarte, M. Dieudonné, ~~M. Dubreil~~, examinateurs.

23883 T

INTRODUCTION

L'étude de la théorie générale des groupes topologiques a été inaugurée il y a à peine vingt années. Depuis 1926, de nombreuses monographies ont été publiées à son sujet: les plus importantes sont celles de L.Pontrjagin et de A. Weil. Ces travaux ont permis d'élucider dans une certaine mesure la structure des groupes compacts et des groupes abéliens localement compacts. Mais, si, parmi ceux-ci, les groupes connexes sont relativement bien connus maintenant, les groupes totalement discontinus, et par suite, les groupes localement compacts les plus généraux, n'ont été l'objet que de recherches assez fragmentaires, au moins quant à leurs structure de groupe topolégique. J'ai essayé ici d'apporter quelque contribution à ces recherches.

La généralisation de certaines propriétés des groupes discrets m'a fourni, d'une part, un procédé d'exploration important: telles sont l'introduction de la notion de produit local de groupes topologiques et celle des groupes de nombres p-adiques. D'autre part, la théorie de la dualité dans les groupes abéliens localement compacts, telle qu'elle a été déroulée dans ces dernières années par L. Pontrjagin et A. Weil, s'est révélée comme un moyen d'étude très efficace. Sur un plan plus général, les travaux récents de N. Bourbaki sur les structures fondamentales de l'analyse mathématiques m'ont fourni un moyen d'exposition et de recherche d'une grande puissance. Conformément aux principes de cet auteur, j'ai essayé de donner à ce travail une solide armature logique, par l'emploi de la méthode axiomatique, de la notion de structure, par la présentation des faits sous forme de définitions, propositions et théorèmes.

Dans le §I du Chapitre I, j'ai rappelé et précisé les résultats actuels de la théorie des groupes abéliens localement compacts. Aux §§ 2 & 3, j'ai introduit et étudié deux notions utilisées par la suite: celle de sous-groupe pur d'un groupe topologique au § 2 et celle de produit local et de produit direct local de groupes topologiques au §2 ; cette dernière notion s'est révélée particulièrement intéressante, tant pour la simplification qu'elle apporte dans l'énoncé des résultats généraux que par la fabrication d'exemples tératologiques. Enfin, dans le § 4, on trouvera un exposé rapide de certaines propriétés des groupes abéliens compacts connexes.

Dans le chapitre II se trouve exposée la notion de groupe topologique primaire (associé à un entier premier p) . Dans les §§ 2,3 & 4, sont étudiés plus particulièrement les groupes abéliens localement compacts primaires à l'aide des groupes de nombres p-adiques. Cette étude est justifiée par le rôle qu'elle joue dans le chapitre III.

Dans ce chapitre sont examinées certaines propriétés des groupes abéliens localement compacts. Au § I, j'ai déterminé la structure des groupes abéliens localement compacts totalement discontinus ainsi que leur dual à l'aide des résultats du chapitre II; au § 2, la structure des groupes abéliens localement compacts dont tout élément est d'ordre fini est déterminée et les groupes abéliens localement compacts les plus généraux sont caractérisés comme sous-groupes fermés de groupes topologiques bien déterminés. Les résultats ainsi obtenus sont encore loin d'être suffisants pour apporter une solution complète au problème de la détermination de la structure des groupes abéliens localement compacts. Cependant ils permettent déjà une étude approfondie- que je n'ai pas abordée ici- de structures d'algèbre topologique plus riches: celles des anneaux, corps et espaces vectoriels localement compacts.

Dans le chapitre IV, j'ai défini le groupe topologique des automorphismes d'un groupe localement compact. Dans les §§ I & 2, j'ai donné quelques propriétés élémentaires de ce groupe: on obtient de cette façon des groupes topologiques qui jouent un rôle important en algèbre topologique. Dans un prochain travail, je reviendrai moins superficiellement sur leurs propriétés, en particulier sur celles des groupes de Galois d'un corps localement compact. Dans le § 3, j'ai défini le module d'un automorphisme d'un groupe localement compact, nombre réel associé à cet automorphisme et jouissant des principales propriétés du déterminant d'une transformation linéaire de l'espace numérique à n dimensions.

Cette notion permet d'ailleurs de présenter de façon très simple l'étude de la structure des corps localement compacts.

La plupart des résultats de ce travail ont été résumés et publiés dans trois notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences *) , dont une en collaboration avec M.J. Dieudonné.

Un progrès nouveau dans l'étude de la structure des groupes localement compacts me parait lié à une extension de la notion de limite projective de groupes topologiques (correspondant, par exemple, à la notion de produit direct local) et d'une étude systématique des groupes localement compacts dont les structures uniformes droite et gauche sont identiques, qui jouissent de propriétés généralisant celles des groupes compacts, des groupes discrets et des groupes abéliens.

Je voudrais, en terminant, exprimer toute ma reconnaissance à M. Jean-Dieudonné. Au cours de la rédaction de ce travail, j'ai trouvé, près de lui, les conseils les plus amicaux et surtout les plus riches d'expérience et d'érudition.

---

*) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 218; 1944, pp. 304-305; 218,1944,pp.577 -579;220,1945,pp. - .

Chapitre I.

§I. - Groupes abéliens localement compacts.[1])

Rappelons le théorème suivant[2]):

Théorème I.- Tout groupe abélien localement compact est isomorphe à un produit de groupes $R^n \times G$, G étant un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe ouvert compact. Pour que deux groupes localement compacts $R^n \times G$ et $R^{n'} \times G'$ soient isomorphes, il faut et il suffit que $n = n'$ et que G et G' soient isomorphes.

L'étude de la structure des groupes abéliens localement compacts est ainsi ramenée à celle de la structure des groupes topologiques ayant un sous-groupe ouvert compact.

Le dual d'un groupe abélien localement compact G est le sous-groupe $\hat{G}$ de T^G formé par les représentations continues de G dans le tore T , appelées caractères de G, et muni de la topologie suivante: si $V(C,U)$ est l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{G}$ tels que $\hat{x}(C) \subset U$ avec $U \subset T$ et $C \subset G$, quand U décrit le filtre des voisinages de 0 dans T et C l'ensemble des parties compactes de G, $V(C,U)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'élément neutre de $\hat{G}$ [3]). On a le

Théorème 2.- Soit G un groupe abélien localement compact, $\hat{G}$ son dual. $\hat{G}$ est un groupe abélien localement compact et le dual de $\hat{G}$ est G. Si H est un sous-groupe fermé de G, l'ensemble des caractères $\hat{x}$ de G tels que $\hat{x}(H) = \{0\}$ est un sous-groupe fermé H^* de $\hat{G}$, qu'on appelle le conjugué de H dans $\hat{G}$. Le conjugué de H^* dans G est H. Si H' est un autre sous-groupe fermé de G, le conjugué de $\overline{H+H'}$ est $H^* \cap H'^*$. Si G est discret, $\hat{G}$ est compact et inversement.

Soit f une représentation continue du groupe abélien localement compact G dans le groupe abélien localement compact G', dont le dual est $\hat{G}'$. Si $\hat{x}' \in \hat{G}'$, $\hat{x}' \circ f$ est un caractère $\hat{x}$ de G et $\hat{x}' \to \hat{x}$ est une représentation continue [4]) de $\hat{G}'$ dans $\hat{G}$ qu'on note $\hat{f}$ et qu'on appelle la transposée de f. Si H est un sous-groupe fermé de G, $\overset{-1}{\hat{f}}(H^*)$ est un sous-groupe fermé de $\hat{G}'$, conjugué du sous-groupe fermé $\overline{f(H)}$ de G'. En effet, si $\hat{y} \in \overline{f(H)}^*$, quel que soit $x \in H$, $\langle x, \hat{f}(\hat{y})\rangle = \langle f(x), \hat{y}\rangle = 0$ et $\hat{f}(\hat{y}) \in H^*$, c'est-à-dire $\hat{y} \in \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)$; donc $\overline{f(H)}^* \subset \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)$. Inversement, soit $y \in f(H)$; il existe $x \in H$ tel que $y = f(x)$ et $\langle y, \hat{y}\rangle = \langle f(x), \hat{y}\rangle = \langle x, \hat{f}(\hat{y})\rangle = 0$ si $\hat{y} \in \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)$; donc $y \in \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)^*$ et $f(H) \subset \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)^*$; comme $\overset{-1}{\hat{f}}(H^*)^*$ est fermé dans G', $\overline{f(H)} \subset \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)^*$ c'est-à-dire $\overline{f(H)}^* \supset \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)$, donc $\overline{f(H)}^* = \overset{-1}{\hat{f}}(H^*)$. En particulier, le conjugué de $\overline{f(G)}$ est $\overset{-1}{\hat{f}}(0)$.

La transposée de $\hat{f}$ est f. Si f est un homomorphisme de G dans G', $\hat{f}$ est un homomorphisme de $\hat{G}'$ dans $\hat{G}$ et f(G) est un sous-groupe fermé de G' ; le conjugué de f(G) dans $\hat{G}'$ est $\overset{-1}{\hat{f}}(0)$. Si H' est un sous-groupe fermé de G contenu dans le sous-groupe fermé H, on a $H^* \subset H'^*$ et le dual de H/H' est H'^*/H^*. Enfin si H est un sous-groupe ouvert de G, son conjugué H^* dans $\hat{G}$ est un sous-groupe compact et inversement. En effet, H^* est dual du groupe discret G/H.

Soit G un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe ouvert compact H; G est localement compact. Le conjugué H^* de H dans le dual $\hat{G}$ de G est un sous-groupe ouvert compact de $\hat{G}$. L'intersection K des sous-groupes ouverts de G est un sous-groupe compact de G car $K \subset H$: c'est la composante connexe de 0 dans G[5]). ([illegible]) La réunion F des sous-groupes compacts de G est un sous-groupe ouvert de G car $H \subset F$: c'est l'ensemble des éléments x de G tels que le sous-groupe engendré par x soit relativement compact. Si K' est la composante connexe de 0 dans $\hat{G}$, K' est le conjugué de F dans $\hat{G}$[6]): en effet, quel que soit le sous-groupe compact H de G, on a $H \subset F$ et $F^* \subset H^*$, donc $F^* \subset K'$ et $K'^* \subset F$; d'autre part $K' \subset H^*$, donc $H \subset K'^*$ et $F \subset K'^*$. Il en résulte que F/K est un groupe abélien localement compact totalement discontinu (en abrégé l.c. t.d.) ainsi que son dual. G/F est un groupe abélien discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, car il est dual du groupe compact connexe K'.

Dans les chapitres qui suivent, nous déterminerons dans une certaine mesure la structure des groupes topologiques K, G/F et F/K ; de cette étude nous déduirons certaines propriétés de la structure du groupe G lui-même.

§2.- Produit local et produit direct local de groupes topologiques .

Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de groupes topologiques séparés, H_ι un sous-groupe ouvert de G_ι, et H le groupe topologique $\prod_{\iota \in I} H_\iota$. Le filtre des voisinages de l'élément neutre dans H forme un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans une topologie compatible avec la structure de groupe de $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$.

Définition I.- On dit que le groupe topologique G ainsi défini est le produit local des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes ouverts H_ι .

Si $(J_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ est une partition de I; G est isomorphe au produit local, relativement aux sous-groupes $\prod_{\iota \in J_\varkappa} H_\iota$, des groupes produits locaux des familles de groupes $(G_\iota)_{\iota \in J_\varkappa}$ relativement aux sous-groupes H_ι .

Si H'_ι est un sous-groupe ouvert de H_ι égal à H_ι pour tout $\iota \in I$, sauf pour un nombre fini, le produit local des G_ι , relativement aux H'_ι , est égal au produit local des G_ι , relativement aux H_ι . En particulier, si pour tout $\iota \in I$, excepté un nombre fini, $H_\iota = G_\iota$, le produit local des G_ι , relativement aux H_ι , est identique au groupe topologique $\prod_{\iota \in I} G_\iota$.

Soit G un groupe produit local d'une famille de groupes $(G_\iota)_{\iota \in I}$, relativement aux sous-groupes ouverts H_ι , et J

une partie finie de I. Si $J' = \complement J$, le groupe topologique $G_J = \prod_{\iota \in J} G_\iota$ est isomorphe au sous-groupe distingué fermé de G formé par les $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ avec $x_\iota = e_\iota$ pour $\iota \in J'$. Dans tout ce qui suit, nous identifierons ces deux groupes. Le sous-groupe K_J de G, formé par les $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ avec $x_\iota \in H_\iota$ pour tout $\iota \in J'$, est ouvert dans G, car $H \subset K_J$ et K_J est isomorphe au groupe topologique $\prod_{\iota \in J} G_\iota \times \prod_{\iota \in J'} H_\iota$. Si $J = \{\iota\}$, on pose $K_J = K_\iota$. Si pour tout $\iota \in I$, H_ι est un sous-groupe distingué de G_ι, H et K_J sont des sous-groupes distingués de G et K_J/H est un sous-groupe du groupe discret G/H isomorphe à $\prod_{\iota \in J} G_\iota / H_\iota$.

Si G'_ι est la composante connexe de e_ι dans G_ι, la composante connexe de l'élément neutre dans G est $\prod_{\iota \in I} G'_\iota$, car c'est la composante connexe de l'élément neutre dans H.

Pour que G soit complet, il faut et il suffit que chacun des G_ι le soit. C'est nécessaire, car G_ι est un sous-groupe fermé, donc complet, de G; c'est suffisant, car H est un sous-groupe ouvert complet de G.

Proposition I.- Pour qu'un groupe topologique G produit local de groupes G_ι, relativement à des sous-groupes ouverts H_ι, soit localement compact, il faut et il suffit que tous les G_ι le soient et que, pour tout $\iota \in I$, excepté pour un nombre fini, H_ι soit compact.

En effet, si G est localement compact, pour toute partie finie J de I, K_J est lowalement compact et isomorphe à $\prod_{\iota \in J} G_\iota \times \prod_{\iota \in \complement J} H_\iota$; donc, pour tout $\iota \in I$, G_ι est localement compact et tous les H_ι, excepté au plus un nombre fini, sont compacts. La réciproque est triviale.

Soit G le produit local de groupes G_ι, relativement à des sous-groupes H_ι. Quand J décrit l'ensemble des parties finies de I, la réunion G' des sous-groupes K_J est formée par les $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ tels que $x_\iota \in H_\iota$ excepté au plus pour un nombre fini d'indices ι. C'est un sous-groupe ouvert de G car $H \subset G'$ et pour toute partie finie J de I on a $G_J \subset K_J \subset G'$.

Définition 2.- Le groupe topologique G' ainsi défini est appelé le produit direct local des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes ouverts H_ι.

Si pour tout $\iota \in I$, H' est un sous-groupe ouvert de H_ι, égal à H_ι excepté pour un nombre fini d'indices ι, le produit direct local des G_ι, relativement aux H'_ι, est identique au produit direct local des G_ι, relativement aux H_ι.

Si pour tout $\iota \in I$, H_ι est un sous-groupe distingué de G_ι, G' et H sont des sous-groupes distingués ouverts de G [7]. Le groupe discret G'/H est engendré par la réunion des sous-groupes K_J/H. Comme, pour toute partie finie J de I, K_J/H est isomorphe à $\prod_{\iota \in J} K_\iota/H$, G'/H est produit direct des sous-groupes K_ι/H, respectivement isomorphes à G_ι/H_ι [8].

Pour que G' soit localement compact, il faut et il suffit que tous les G_ι le soient et que pour tout $\iota \in I$, excepté pour un nombre fini, H_ι soit compact. En effet, G' est un sous-groupe ouvert de G.

<u>Proposition 2.</u>- <u>Soit</u> G <u>le produit direct local des groupes</u> G_ι, <u>relativement aux sous-groupes ouverts</u> H_ι ; <u>pour que</u> G <u>soit compact, (resp. discret), il faut et il suffit que pour tout</u> $\iota \in I$, G_ι <u>soit compact (resp. discret) et que</u> $H_\iota = G_\iota$ (<u>resp.</u> $H_\iota = \{e_\iota\}$), <u>excepté au plus pour un nombre fini d'indices</u> ι. G <u>est alors le produit des groupes</u> G_ι (<u>resp. le produit direct des sous-groupes</u> G_ι).

En effet, si G est compact, tous les G_ι sont compacts et G/H est un groupe compact discret, donc un groupe fini. Comme il est produit direct des sous-groupes G_ι/H_ι , on a $G_\iota = H_\iota$ excepté au plus pour un nombre fini d'indices ι. G est donc produit des groupes G_ι . La réciproque est triviale .

Si G est discret, tous les G_ι sont discrets et H est un groupe fini. Comme il est produit des groupes H_ι , on a $H_\iota = \{e_\iota\}$ excepté au plus pour un nombre fini d'indices ι. G est produit direct des sous-groupes G_ι . La réciproque est triviale.

Pour que le groupe G, produit direct local des groupes G_ι , relativement aux sous-groupes H_ι , soit <u>abélien</u>, il faut et il suffit que chacun des G_ι le soit. Si, dans ce cas G et les G_ι sont notés <u>additivement</u>, on dit que G est <u>somme directe locale</u> des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes H_ι .

Théorème I.- Soit G un groupe abélien localement compact somme directe locale de groupes G_ι, relativement à des sous-groupes ouverts compacts H_ι ; alors le dual $\hat{G}$ de G est somme directe locale des groupes $\hat{G}_\iota$, duals des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes ouverts compacts H_ι^*, conjugués des H_ι dans $\hat{G}_\iota$.

Soit H le groupe compact produit des groupes compacts H_ι. On sait [3]) que le dual $\hat{H}$ de H est somme directe de sous-groupes isomorphes à $\hat{H}_\iota$; autrement dit, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in H$ et si $\hat{x} \in \hat{H}$, il existe une partie finie J de I, dépendant de $\hat{x}$, et des $\hat{x}_\iota \in \hat{H}_\iota$ pour $\iota \in J$ tels que $\hat{x}(x) = \sum_{\iota \in J} \hat{x}_\iota(x_\iota)$.

Soit maintenant $\hat{x} \in \hat{G}$ un caractère du groupe G. La restriction de $\hat{x}$ à G_ι (resp. H) est un caractère de G_ι, $\hat{x}_\iota \in \hat{G}_\iota$ (resp. de H, $\hat{y} \in \hat{H}$). Soit $x \in G$; il existe alors une partie finie J' de I, dépendant de x, telle que, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, $x_\iota \in H_\iota$ pour $\iota \notin J'$. Posons $y = (y_\iota)_{\iota \in I} \in H$, avec $y_\iota = e_\iota$ si $\iota \in J'$ et $y_\iota = x_\iota$ si $\iota \notin J'$. On a :

$$\hat{x}(x) = \hat{y}(y) + \sum_{\iota \in J'} \hat{x}_\iota(x_\iota)$$

Mais $\hat{y} \in \hat{H}$; il existe dand une partie finie J de I et des $\hat{y}_\iota \in \hat{H}_\iota$ pour $\iota \in J$ tels que

$$\hat{y}(y) = \sum_{\iota \in J} \hat{y}_\iota(y_\iota) = \sum_{\iota \in K} \hat{y}_\iota(y_\iota)$$
$$= \sum_{\iota \in K} \hat{y}_\iota(x_\iota) \qquad \text{en posant } K = J \cap \complement J'.$$

Si $x_\iota \in H_\iota$, on a :

$$\hat{x}(x_\iota) = \hat{x}_\iota(x_\iota) = \hat{y}(x_\iota) = \begin{cases} 0 & \text{si } \iota \notin J, \\ \hat{y}_\iota(x_\iota) & \text{si } \iota \in J. \end{cases}$$

Donc, si $\iota \notin J$, $\hat{x}_\iota$ est un caractère de G_ι apartenant à H_ι^* et si $\iota \in J$, $\hat{y}_\iota$ est la restriction à H_ι de $\hat{x}_\iota$. Il en résulte que

$$\hat{x}(x) = \sum_{\iota \in J'} \hat{x}_\iota(x_\iota) + \sum_{\iota \in J}{}' \hat{x}_\iota(x_\iota)$$
$$= \sum_{\iota \in J \cup J'} \hat{x}_\iota(x_\iota)$$

Pour tout $\iota \notin J$, on a $\hat{x}_\iota \in H_\iota^*$ et pour tout $\iota \in I$, H_ι^*, conjugué du sous-groupe ouvert compact H_ι de G_ι, est un sous-groupe ouvert compact de $\widehat{G}_\iota$, donc $(\hat{x}_\iota)$ est un élément de la somme directe locale des $\widehat{G}_\iota$, relativement aux sous-groupes H_ι^*. Inversement, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in G$ et si $(\hat{x}_\iota)_{\iota \in I}$ est un élément de la somme directe locale des $\widehat{G}_\iota$, relativement aux sous-grouépes H_ι^*, posons $\hat{x}(x) = \sum_{\iota \in L} \hat{x}_\iota(x_\iota)$; L étant l'ensemble fini des indices ι tels que $x_\iota \notin H_\iota$ ou $\hat{x}_\iota \notin H_\iota^*$. $x \to \hat{x}(x)$ est un caractère de $\hat{x}$ de G. En effet, c'est évidemment une représentation de G dans T et cette représentation est continue, car elle est continue sur le sous-groupe ouvert H de G. On vérifie facilement que $\hat{x} \to (\hat{x}_\iota)_{\iota \in I}$ est un isomorphisme (de structure algébrique) φ de $\widehat{G}$ sur la somme directe locale des $\widehat{G}_\iota$, relativement aux sous-groupes H_ι^*. Si $\hat{x} = \varphi^{-1}((\hat{x}_\iota)_{\iota \in I})$ appartient au conjugué H^* de H dans G, on a $\hat{x}_\iota \in H_\iota^*$ pour tout $\iota \in I$ et inversement. Donc

$\varphi(H^*) = \prod_{\iota \in I} H_\iota^*$. La restriction de φ à H^* est un isomorphisme du sous-groupe ouvert compact H^* de $\widehat{G}$ sur le sous-groupe ouvert compact $\prod_{\iota \in I} H_\iota^*$ de la somme directe locale des $\widehat{H}_\iota$, relativement aux H_ι^*. En effet, G/H est somme directe des sous-groupes G_ι/H_ι et, comme H^* est dual de G/H et H_ι^* dual de G_ι/H_ι, on a $H^* = \prod_{\iota\in I} H_\iota^*$ à une isomorphie prés; donc, si $\hat{x} \in H^*$, on a $\hat{x} = (\hat{x}_\iota)_{\iota\in I}$, avec $\hat{x}_\iota \in H_\iota^*$ et $\varphi(\hat{x}) = (\hat{x}_\iota)_{\iota\in I}$. Donc φ est un isomorphisme du groupe topologique $\hat{G}$ sur la somme directe locale des groupes $\hat{G}_\iota$, relativement aux sous-groupes H_ι^*.

§3.- Sous-groupes purs d'un groupe topologique abélien.

Soit G un groupe topologique abélien séparé et n un entier rationnel. $x \to nx$ est un endomorphisme continu f_n de G.

On notera qu'en général f_n n'est pas un homomorphisme dans G, même si f_n est une représentation biunivoque de G sur lui-même. En effet, soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille infinie de groupes discrets isomorphes à Q et H_ι le sous-groupe des entiers rationels de G_ι. Soit G le groupe topologique abélien produit local des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes ouverts H_ι. f_n est une représentation biunivoque continue de G sur lui-même, pour tout entier n. $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est un sous-groupe ouvert de G; $f_n(H)$ est l'ensemble des $(nx_\iota)_{\iota \in I}$, avec $x_\iota \in H_\iota$; si $f_n(H)$ était ouvert, il existerait une partie finie J de I telle que, si $H'_\iota = H_\iota$ pour $\iota \notin J$ et $H'_\iota = \{0\}$ pour $\iota \in J$, $\prod_{\iota \in I} H'_\iota \subset f_n(H)$, ce qui est absurde. Donc $f_n(H)$ n'est pas ouvert et f_n n'est pas un homomorphisme [10]).

Si $n > 0$, f_{-n} est composé de f_n et de la symétrie $x \to -x$. Si n et n' sont deux entiers 0, on a $f_n \circ f_{n'} = f_{n'} \circ f_n = f_{nn'}$. Soit $G_{(n)}$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $nx = 0$ et $G^{(n)}$ l'ensemble des $x \in G$ de la forme $x = nx'$. On a $\overset{-1}{f_n}(0) = G_{(n)}$ et $f_n(G) = G^{(n)}$; $G_{(n)}$ est donc un sous-groupe fermé de G.

Proposition I.- Si G est un groupe abélien séparé, somme directe locale d'une famille de groupes $(G_\iota)_{\iota\in I}$, relativement à des sous-groupes H_ι, $G(n)$ est un groupe séparé, somme directe locale de la famille de groupes $(G_{\iota(n)})_{\iota\in I}$, relativement aux sous-groupes ouverts $H_{\iota(n)}$ de $G_{\iota(n)}$.

En effet, si $x = (x_\iota)_{\iota\in I} \in G_{(n)}$, il existe une partie finie J de I telleque $x_\iota \in H_\iota$ si $\iota \notin J$; donc, pour tout $\iota \in I$, $x_\iota \in G_{\iota(n)}$ et, si $\iota\notin J$, $x_\iota \in H_\iota \cap G_{\iota(n)}$. Inversement, si $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ appartient à la somme directe locale des $G_{\iota(n)}$, relativement aux $H_{\iota(n)}$, on a $nx_\iota = 0$ et $nx = 0$, donc $x \in G_{(n)}$.

$G^{(\infty)} = \bigcap_{n>0} G^{(n)}$ est un sous-groupe de G. Si $x \in G^{(\infty)}$, on dit que x est de hauteur infinie dans G.

Définition I.- On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe abélien séparé G est pur si, pour tout entier $n > 0$, $H^{(n)} = G^{(n)} \cap H$. [11]).

Si H est un sous-groupe pur de G, $H^{(\infty)} = G^{(\infty)} \cap H$.

Proposition 2.- Pour qu'un sous-groupe H d'un groupe abélien séparé G soit pur, il faut et il suffit que, pour tout entier premier p, on sait $H^{(p^k)} = G^{(p^k)} \cap H$, pour tout entier $k > 0$.

C'est évidemment nécessaire. Pour montrer que c'est suffisant, on peut se borner à montrer que, si p est un entier premier et q un entier premier avec p, "$H^{(p^k)} = G^{(p^k)} \cap H$ et

$H^{(q)} = G^{(q)} \cap H$ " entraine " $H^{(p^k q)} \supset G^{(p^k q)} \cap H$ ". Soit $x \in G^{(p^k q)} \cap H$. Il existe $z \in G$ tel que $x = p^k q z$. Donc $x \in G^{(p^k)} \cap H = H^{(p^k)}$ et il existe $y \in H$ tel que $x = p^k y$; donc $p^k(y-qz) = 0$ et l'ordre de $y-qz$ est une puissance de p inférieure à p^k. p et q étant premiers entre eux, dans le groupe cyclique engendré par $y-qz$, il existe z' tel que $y-qz = qz'$ et on a $y = q(z+z')$. Donc $y \in G^{(q)} \cap H = H^{(q)}$ et il existe $y' \in H$ tel que $y = qy'$. D'où $x = p^k q y' \in H^{(p^k q)}$.

On notera qu'en général, si H est un sous-groupe pur d'un groupe abélien séparé G, sons adhérence $\bar{H}$ n'est pas un sous-groupe pur de G.

Par exemple, soit G le groupe abélien localement compact, produit local d'une famille infinie $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes isomorphes à $Z/(4)$, relativement aux sous-groupes H_ι de G_ι isomorphes à $Z/(2)$. On a $G^{(2)} = \prod_{\iota \in I} H_\iota$, $G^{(4)} = \{0\}$ et $G^{(p^k)} = G$ si p est un entier premier > 2. Soit H le sous-groupe de G, somme directe des sous-groupes G_ι. $H^{(2)}$ est somme directe des sous-groupes H_ι et $H^{(2)} = G^{(2)} \cap H$. $H^{(4)} = \{0\}$ et $H^{(p^k)} = H = G^{(p^k)} \cap H$ si $p > 2$. donc H est pur. L'adhérence $\bar{H}$ du sous-groupe H est la somme directe locale des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes H_ι et $\bar{H}^{(2)}$ est la somme directe de la famille de sous-groupes $(H_\iota)_{\iota\in I}$; I étant infini, $\overline{H}^{(2)}$ n'est pas fermé et est partout dense dans $\prod_{\iota\in I} H_\iota = G^{(2)}$ Donc $\overline{H}^{(2)} \neq G^{(2)} \cap \overline{H}$ et $\overline{H}$ n'est pas un sous-groupe pur de G.

Cependant, si H est un sous-groupe pur relativement compact d'un groupe abélien séparé G dont tous les éléments sont de hauteur infinie, son adhérence $\overline{H}$ est encore un sous-groupe pur de G. En effet, on a $\overline{H} = \overline{H}^{(n)} = \overline{H^{(n)}}$, car $f_n(\overline{H}) = \overline{f_n(H)}$, puisque $\overline{H}$ est compact .

On remarquera que, si H est un sous-groupe de G dont tous les éléments so t de hauteur infinie dans H, H est pur.

Si G est un groupe abélien séparé produit de deux groupes H et K, H et K sont deux sous-groupes purs de G.

Proposition 3.- Si G est un groupe abélien séparé et si H est un sous-groupe pur ouvert dont tous les éléme ts sont de hauteur infinie.[12]), G est isomorphe à H × (G/H) [13]).

Définition 2.- On dit qu'un groupe abélein séparé est réduit si tout sous-groupe pur fermé d nt tout élément est de hauteur infinie se réduit à {0} .

Dans un groupe abélien discret G, la réunion de tous les sous-groupes purs do t tout éléme t est de hauteur infinie est un sous-groupe H de G ayant des mêmes propriétés et, d'après la propositio 3, G est produit de H et d'un groupe réduit isomorphe à G/H.

ou : si tout sous groupe H dt tt él. est de haut. inf. ds H se réduit à {0}

Théorème [illegible].- Si G est un groupe abélien localement compact, il existe un groupe abélien localement compact $\tilde{G}$ dont tous les éléments sont de hauteur infinie et un sous-groupe ouvert G' de $\tilde{G}$, isomorphe à G et tel que tous les éléments de $\tilde{G}/G'$ soient d'ordre fini.

Soit G un groupe abélien localement compact, S un système de générateurs de G et H un groupe abélien (non topologique) somme directe d'une famille $(H_y)_{y \in S}$ de sous-groupes isomorphes à Q. Désignons par H'_y le sous-groupe des entiers rationnels de H_y: H'_y est un sous-groupe cyclique infini engendré par un élément z_y de H. La somme directe H' de la famille $(H'_y)_{y \in S}$ est un sous-groupe de H et, si $z \in H'$, il existe une partie finie X de S et des entiers n_y $(y \in X)$ déterminés de façon unique tels que $z = \sum_{y \in X} n_y z_y$. On vérifie facilement que $z \to \sum_{y \in X} n_y y$ est une représentation du groupe H' sur le groupe (non topologique) G. Si K désigne le sous-groupe de H formé par les éléments $\sum_{y \in X} n_y z_y$ tels que $\sum_{y \in X} n_y y = 0$, $\sum_{y \in X} n_y y \to K + \sum_{y \in X} n_y z_y$ est un isomorphisme φ du groupe G sur le groupe quotient G' H'/K. G' est un sous-groupe du groupe quotient $\tilde{G} = H/K$, dont tous les éléments sont évidemment de hauteur infinie. D'autre part, H/H' est isomorphe à $\tilde{G}/G'$ et tous les éléments de H/H' sont d'ordre fini: en effet, H/H' est somme directe de la famille de sous-groupes $(H_y/H'_y)y \in S$ de sous-groupes isomorphes à Q/Z. Enfin, l'image $\varphi(\mathfrak{V})$ par φ du filtre $\mathfrak{V}$

des voisinages de o dans G est une base de filtre dans $\widetilde{G}$ et il est immédiat que $\varphi(\mathfrak{B})$ est un système fondamental de voisinages de O dans une topologie compatible avec la structure de groupe de $\widetilde{G}$: φ est un isomorphisme du groupe topologique G dans le groupe $\widetilde{G}$ muni de cette topologie et $G' = \varphi(G)$ est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$. Si V est un voisinage compact de O dans G, $\varphi(V)$ est un voisinage compact de O dans $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}$ est localement compact, d'où le théorème [14]).

Si G est totalement discontinu, il en est de même de $\widetilde{G}$. En effet, comme G' est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$, la composante connexe de O dans $\widetilde{G}$ est identique à la composante connexe de O dans G', c'est-à-dire à $\{0\}$;

Si G est réunion de sous-groupes compacts, il en est de même de $\widetilde{G}$. En effet, comme tous les éléments de $\widetilde{G}/G'$ sont d'ordre fini, si $x \in \widetilde{G}$, il existe un entier n tel que $nx \in G'$. Soit H l'adhérence du sous-groupe engendré par nx dans G'. H est compact et le sous-groupe engendré par x dans $\widetilde{G}$ est contenu dans l'ensemble compact $\bigcup_{k=0}^{n-1}(kx+H)$, donc relativement compact, d'où la propriété.

Dans le cas où G est un groupe abélien discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, on peut préciser le théorème I par le théorème 2 et la proposition 4.

Théorème 2.- Soit G un groupe abélien discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini; il existe alors un groupe discret $\widetilde{G}$ somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à Q et un sous-groupe G' de $\widetilde{G}$ isomorphe à G et tel que tous les éléments de $\widetilde{G}/G'$ soient d'ordre fini.

En effet, G est un Z-module régulier et, d'après un théorème de C. Chevalley [15], il existe un espace vectoriel $\widetilde{G}$ par rapport au corps Q contenant un sous-module G' isomorphe à G et tel que $\widetilde{G} = Q\, G'$. Si $x \in \widetilde{G}$, il existe des entiers n et n tels que $m/n\; x = x' \in G'$, c'est-à-dire $mx = nx' \in G'$ et la classe de x dans $\widetilde{G}/G'$ est d'ordre fini. D'autre part, l'espace vectoriel $\widetilde{G}$ est somme directe d'une famille de sous-modules $(Q\, x_\iota)_{\iota \in I}$, donc isomorphes à Q, d'où le théorème.

En particulier si tous les éléments de G sont de hauteur infinie, $\widetilde{G} = G'$ et G est somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à Q.

On identifie les groupes G et G' et on dit que le groupe $\widetilde{G}$ est associé à G. Ce groupe $\widetilde{G}$ est déterminé à une isomorphie près par la condition de contenir un sous-groupe G' isomorphe à G et tel que toutes les classes de $\widetilde{G}/G'$ soient d'ordre fini. Plus précisément:

Proposition 4.- Soit G et G_1 deux groupes abéliens discrets dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}_1$ les groupes qui leur sont associés; alors tout isomorphisme f de G sur G_1 se prolonge de façon unique en un isomorphisme de $\widetilde{G}$ sur $\widetilde{G}_1$.

En effet; on a $\widetilde{G} = Q\,G$ et $\widetilde{G}_1 = Q\, G_1$ et le théorème de C.Chevalley déjà cité montre qu'il existe un isomorphisme $\bar{f}$ de $\widetilde{G}$ sur $\widetilde{G}_1$ prolongeant f. Ce prolongement est unique; en effet, soit $\bar{f}'$ un autre isomorphisme de $\tilde{G}$ sur $\tilde{G}_1$ prolongeant f ; on a si $x \in G$, $nx = x' \in G$ et $\bar{f}'(x) = \bar{f}'(1/_n x') = 1/_n \bar{f}'(x') = 1/_n f(x') = 1/_n \bar{f}(x') = \bar{f}(x)$, par définition.

Soit G un groupe abélien localement compact, $\hat{G}$ son dual et $\hat{f}_n$ le transposé de l'endomorphisme f_n. $\hat{f}_n$ n'est autre que l'endomorphisme continu $\hat{x} \to n\hat{x}$ de $\hat{G}$ car on a $\langle x, \hat{f}_n(\hat{x})\rangle = \langle f_n(x), \hat{x}\rangle = \langle nx, \hat{x}\rangle = \langle x, n\hat{x}\rangle$. Le conjugué dans $\hat{G}$ du sous-groupe fermé $G_{(n)}$ de G est donc l'adhérence du sous-groupe $\hat{G}^{(n)}$ de $\hat{G}$. En effet, $\overset{-1}{f_n}(0) = G_{(n)}$ et $\hat{f}_n(\hat{G}) = \hat{G}^{(n)}$.

Proposition 5.- Si G est un groupe abélien localement compact ayant un sous-groupe pur ouvert compact, pour tout entier $n > 0$, f_n est un homomorphisme de G dans lui-même.

Soit H un sous-groupe pur ouvert compact de G. La restriction de f_n à H coïncide avec l'endomorphisme $x \to nx$ de H. Cet endomorphisme est continu et, comme H est compact, c'est un homomorphisme de H dans lui-même. On a $f_n(H) = H^{(n)} = H \cap G^{(n)} = H \cap f_n(G)$; $f_n(H)$ est donc un sous-groupe ouvert de $G^{(n)}$ et f_n est un homomorphisme de G dans lui-même.

De plus, $G^{(n)}$ est alors un sous-groupe fermé de G isomorphe à $G/G_{(n)}$. Le transposé $\hat{f}_n$ de f_n est aussi un homomorphisme de $\hat{G}$ dans lui-même et $\hat{G}^{(n)}$ est un sous-groupe fermé de $\hat{G}$ conjugué dans $\hat{G}$ du sous-groupe $G_{(n)}$ de G. En particulier, $\hat{G}^{(n)} = \hat{G}$ équivaut à $G_{(n)} = \{0\}$.

Corollaire.- Pour qu'un groupe abélien compact G ait tous ses éléments $\neq 0$ d'ordre infini, il faut et il suffit que tous les éléments du groupe discret $\hat{G}$ soient de hauteur infinie.

§4.- Groupes abéliens localement compacts connexes.

Proposition I.- Dans un groupe abélien compact, l'ensemble des éléments de hauteur infinie est un sous-groupe pur fermé, identique à la composante connexe de l'élément neutre.

Soit G un groupe abélien compact; $G^{(n)}$ est un sous-groupe fermé de G et $G^{(\infty)} = \bigcap_{n>0} G^{(n)}$ est aussi un sous-groupe fermé de G. Si $\hat{G}$ est le groupe abélien discret dual de G, le conjugué dans G de $\hat{G}_{(n)}$ est le sous-groupe $G^{(n)}$; donc, dans G, $G^{(\infty)}$ est le conjugué du sous-groupe $\bigcup_{n>0} \hat{G}_{(n)}$, c'est-à-dire le sous-groupe $\hat{F}$ des éléments d'ordre fini de $\hat{G}$. $G^{(\infty)}$ est donc identique à la composante connexe de 0 dans G[16]. Le dual de $G^{(\infty)}$ est le groupe quotient $\hat{G}/\hat{F}$ dont toutes les classes différentes de $\hat{F}$ sont d'ordre infini: tous les éléments de $G^{(\infty)}$ sont donc de hauteur infinie dans $G^{(\infty)}$, d'après le raisonnement précédent appliqué au groupe $G^{(\infty)}$, et $G^{(\infty)}$ est un sous-groupe pur de G.

La comp. connexe $G^{(\infty)}$ de $G^{(\infty)}$ propre même, or tous él. de G sont de hauteur infinie d

Corollaire.- Dans un groupe abélien localement compact, la composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe pur fermé dont tous les éléments sont de hauteur infinie.

En effet, si $R^n \times G$ est un groupe abélien localement compact, G étant un groupe abélien ayant un sous-groupe ouvert compact, la composante connexe de 0 dans G est un groupe compact connexe K dont tous les éléments sont de hauteur infinie et la composante connexe de 0 dans $R^n \times G$ est $R^n \times K$.

Soit G un groupe abélien séparé ayant un sous-groupe ouvert compact. La composante connexe de l'élément neutre de G est un sous-groupe (pur) compact K dont tous les éléments sont de hauteur infinie[16]. On peut donc prolonger l'application identique de K sur lui-même en une représentation f de G sur K[17]. $\overset{-1}{f}(0) = K'$ est un sous-groupe de G et le groupe (non topologique) G est isomorphe au produit des groupes K et K'. Pour que le groupe topologique G soit isomorphe à $K \times K'$, il faut et il suffit que la représentation f soit continue ou bien que K' soit un sous-groupe fermé de G[18]. Il en est ainsi, en particulier, d'après la proposition 3 du §3, lorsque K est un sous-groupe ouvert de G. Donc:

Proposition 2.- Si dans un groupe abélien localement compact G, la composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe ouvert G' de G, G est isomorphe au produit du groupe connexe G' et d'un groupe discret G/G'.

Plus particulièrement, il en est ainsi lorsque G est localement connexe. En effet, il existe alors un voisinage connexe V de 0 et la composante connexe de 0 contient V.

Soit G un groupe compact connexe. Ou bien G est localement connexe, ou bien tous les points de G sont des points singuliers[19]: en effet, s'il existe un élément x de G tel que tout système fondamental de voisinages de x contienne un voisinage non connexe, il en est de même pour tout système fondamental de voisinages d'un élément quelconque de G. Dans ce dernier cas, on dit que G est non localement connexe.

Si G est un groupe abélien compact connexe, tous les éléments $\neq 0$ du groupe abélien discret $\hat{G}$, dual de G, sont d'ordre infini et inversement.

Définition I.- Le groupe abélien compact $\mathcal{S}$, dual du groupe additif discret de Q, est appelé groupe solénoïdal[20]).

Le groupe $\mathcal{S}$ est un groupe connexe, non localement connexe, à une dimension. Tous ses éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini. Tout sous-groupe fermé de $\mathcal{S}$ et $\neq \mathcal{S}$ est totalement discontinu.

Théorème I.- Soit G un groupe abélien compact connexe; il existe alors un groupe $\tilde{G}$, produit d'une famille de groupes solénoïdaux et un sous-groupe fermé totalement discontinu H de $\tilde{G}$ tel que G soit isomorphe à $\tilde{G}/H$. Le groupe $\tilde{G}$ est déterminé à une isomorphie près, par cette propriété.

En effet, le dual $\hat{G}$ du groupe G est un groupe discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini. Le groupe $\tilde{G}$, dual du groupe G' associé au groupe $\hat{G}$, est produit de groupes isomorphes à $\cancel{Q}\mathcal{S}$, car G' est somme directe de sous-groupes isomorphes à Q. Si H désigne le conjugué de G dans $\tilde{G}$, H est un sous-groupe fermé de $\tilde{G}$, dual de $G'/\hat{G}$, donc totalement discontinu et $\tilde{G}/H$ est isomorphe au dual de $\hat{G}$, c'est-à-dire à G. Enfin, si G_1 est un autre groupe abélien compact connexe et $\tilde{G}_1$ le groupe dual du groupe G'_1, associé au groupe discret $\hat{G}_1$ dual de G_1, tout isomorphisme $\hat{f}$ de $\hat{G}$ sur $\hat{G}_1$

se prolonge de façon unique en un isomorphisme $\hat{f}'$ de $\hat{G}'$ sur $\hat{G}'_1$, donc tout isomorphisme $\overset{-1}{f}$ de G sur G_1 se prolonge de façon unique en un isomorphisme $\overset{-1}{f}{}'$ de $\tilde{G}$ sur $\tilde{G}_1$. H est un groupe abélien compact totalement discontinu dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini; nous déterminerons sa structure dans le §4 du Chapitre III.

En particulier, si tous les éléments $\neq 0$ du groupe G sont d'ordre infini, G est produit d'une famille de groupes solénoïdaux.

Si G a un nombre fini n de dimensions, dans son dual $\hat{G}$, il y a exactement n éléments linéairement indépendants [11]) et le groupe associé à $\hat{G}$ est somme directe de n sous-groupes isomorphes à Q . Donc:

Proposition 3.- Si G est un groupe abélien compact connexe à n dimensions, il est isomorphe au quotient S^n/H de S^n par un sous-groupe fermé totalement discontinu H.

La réciproque est triviale.

D'autre part, on sait [11]) que tout groupe compact G est limite projective d'une famille $(L_\iota)_{\iota\in I}$ de groupes de Lie compacts. Si G est connexe, tous les L_ι le sont aussi et si G a n dimensions, on peut supposer que tous les L_ι ont n dimensions. Donc tout groupe abélien compact connexe est limite projective d'une famille de groupes $(T^{n_\iota})_{\iota\in I}$. En particulier:

<u>Proposition 4</u>.- *Si G est un groupe abélien compact connexe à n dimensions, il existe un groupe abélien compact G' totalement discontinu, ayant un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 et tel que G soit isomorphe au quotient de $R^n \times G'$ par un sous-groupe isomorphe à Z^n* [23]).

Nous déteminerons la structure du groupe G' dans le §4 du chapitre II et dans le §I du Chapitre III.

Si G est *localement connexe*, il est isomorphe à T^n.

Notes du Chapitre I.

[1]) Dans ce travail, nous adoptons la formalisation et les notations de M.Bourbaki (VI). Conformément à cette convention, Z désigne l'anneau des entiers rationnels, Q le corps des nombres rationnels, R le corps localement compact des nombres réels, T le groupe compact R/Z. Dans ce qui suit, Z, Q, R désignent les groupes additifs de ces anneaux et corps. Si G est un groupe, nous désignerons par xy le composé de x et y. Si G est abélien, nous utiliserons la notation additive $x+y$ pour le composé de x et y et l'élément neutre de G sera désigné par 0.

[2])Ce théorème est démontré par E.R. van Kampen (III),§IV; Th. 2. Cf. L.Pontrjagin (V),Ch;V,§§2,3 et 5. On a plus géné- référ
ralement le théorème suivant: Si G est un groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques, G est isomorphe à un produit de groupes $R^n \times G'$, où G' est un groupe topologique ayant un sous-groupe distingué ouvert compact . groupe de la form

[3]) On notera indifféremment la valeur du caractère $\hat{x} \in \hat{G}$ au point $x \in G$ par $\hat{x}(x)$ ou $\langle x,\hat{x}\rangle$. Sur la théorie de la dualité, en particulier sur la démonstration du théorème 2, on consultera les ouvrages de L. Pontrjagin (V), Ch.V, §§30-34, et de A.Weil (VII), Ch. VI, §28.

[4]) Ces proriétés sont démontrées par A.Weil (VII), Ch.VI, §28.

[5]) Voir N. Bourbaki (VI), Topologie générale, Ch.III, §3, Ex.18.

[6]) En particulier, si G est compact, la composante connexe de 0 est le conjugué du sous-groupe des éléments d'ordre fini du groupe discret $\hat{G}$.

[8]) Voir N.Bourbaki (VI), Algèbre, Ch.I, §6, Ex.18.

[9]) Voir L.Pontrjagin (V) Ch.V,§34 et E.R. van Kampen (III), §3,6,m).

[7]) On voit facilement que G' est l'adhérence dans G du produit direct de la famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes de G.

[10]) Un autre exemple du fait que f_n n'est pas un homomorphisme est le suivant: soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille infinie de groupes isomorphes à $Z/(p^2)$, H_ι le sous-groupe de G_ι isomorphe à $Z/(p)$ et G le groupe abélien localement compact somme directe locale de G_ι, relativement aux H_ι. $f_p(G)$ est partout dense dans $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ et $\neq H$; donc f_p n'est pas un homomorphisme.

[11]) La notion de sous-groupe pur (Servanzuntergruppe) a été introduite par H.Prüfer (I), et, plus récemment, par L.Kulikoff (VIII). Dans ce dernier mémoire, on trouvera des propriétés des sous-groupes purs d'un groupe abélien discret. Une définition équivalente dans le cas où tous les éléments $\neq 0$ du groupe G sont d'ordre infini a été donnée et étudiée par E.Liapin, dans "On the décomposition of abélian groups into direct sum of rational groups", Rec.Math.Moscou. N.3.N°6,pp.205-235,Moscou,1940.

12) On trouvera une démonstration de cette proposition, connue sous le nom de Lemme d'Alexander, dans A. Weil (VII), Ch VI, /§26, Lemme I. Cf. Aussi R. Baer (IV)

13) Cette proposition est aussi exacte dans le cas où tous les éléments de H sont d'ordre borné. Voir L.Kulikoff (VIII), Th. 5.

14) Ce théorème est évidemment encore exact dans le cas où G n'est pas localement compact; mais alors $\widetilde{G}$ n'est pas localement compact.

15) Ce théorème de Chevalley s'énonce ainsi: *Soit M un module régulier sur un anneau d'intégrité A; il existe un espace vectoriel $\widetilde{M}$ sur le corps des quotients K de A et un sous-module (sur A) M' de $\widetilde{M}$ isomorphe à M et tel que $\widetilde{M} = KM'$. Si M_1 est un autre A-module régulier et si $\widetilde{M}_1$ est l'espace vectoriel qui lui est ainsi associé, tout isomorphisme de M sur M_1 se prolonge de façon unique en un isomorphisme de $\widetilde{M}$ sur $\widetilde{M}_1$*. Voir C.Chevalley, L'arithmétique dans les algèbres de matrices, Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 323; Hermann, Paris, Appendice I, p.27. Pour le cas présent, voir R. Baer (IV)

16) Voir note 6.

17) Voir A. Weil (VII), Ch.I, §4 et Ch. 3, §26, Lemme I.

18) Voir N. Bourbaki (VI), Topologie Générale, Ch. 3, §2, Ex.19

19) On dit qu'un point x d'un espace topologique compact connexe E est *singulier* si tout système fondamental de voisinage de x contient un ensemble non connexe. Voir N.Bourbaki

(VI), Topologie Générale Ch.II, §4, Ex. I7.

[20]) Le groupe solénoïdal S a été défini et étudié par D.van Dantzig, dans "Uber topologisch-homogene Continua", Fundamenta Mathematica, vol. I4, pp.I02-I25, 1930.

[21]) Voir E.R. van Kampen (III) , §3,6,h) et A.Weil (VII), Ch. 6, §29.

[22]) On trouvera une démonstration de ce fait dans A.Weil (VII), Ch .5, §25.

[23]) Voir A.Weil (VII), Ch.5, § 25.

Chapitre II.

§I.- Groupes topologiques primaires. (abéliens ou non)

Définition I.- On dit qu'un groupe topologique séparé G est primaire (associé à l'entier premier p), si, pour tout $x \in G$, la représentation $n \to x_n$ de Z (muni de la structure p-adique) dans G se prolonge par continuité en une représentation de Z_p dans G [1]). x^n

La représentation ainsi obtenue, qu'on note $q \to x^q$, est unique et est un homomorphisme π_x de Z_p dans G, car Z_p est compact et G séparé. Donc, pour tout $x \in G$, $\pi_x(Z_p)$ est un sous-groupe abélien compact de G et c'est le plus petit sous-groupe fermé contenant x, car c'est l'adhérence du sous-groupe engendré par x, D'autre part, $\pi_x^{-1}(e)$ est un sous-groupe fermé de Z_p, donc un p^r (resp. $\{0\}$) si x est d'ordre fini (resp. infini) et $\pi_x(Z_p)$, isomorphe à $Z_p/\pi_x^{-1}(e)$, est isomorphe à $Z/(p^r)$ (resp. Z_p).

Proposition I.- Etant donné un groupe topologique séparé G, il existe au plus un entier premier p tel que G soit primaire (ass. à p) .

Soit G un groupe primaire (ass. à p) et primaire (ass. à $p' \neq p$). Alors, si $x \in G$, $\pi_x(Z_p) = \pi'_x(Z_{p'})$ car c'est l'adhérence du sous-groupe engendré par x, ce qui est absurde si $x \neq e$, d'après ce qui précède.

Tout sous-groupe <u>fermé</u> d'un groupe primaire (ass. à p) est évidemment un groupe primaire (ass. au même entier).

<u>Proposition 2.-</u> <u>Tout sous-groupe fini d'un groupe primaire (ass. à p) a pour ordre une puissance de</u> p.

En effet, tout élément d'ordre fini d'un groupe primaire G (ass. à p) a pour ordre une puissance de p. Si H est un sous-groupe <u>fini</u> de G d'ordre n et si p' est un diviseur premier de n, il existe $x \in G$ d'ordre p' [2]), mais x a pour ordre une puissance de p, donc $p = p'$ et $n = p^r$.

<u>Proposition ~~4~~.-</u> <u>L'image par une représentation continue d'un groupe primaire (ass. à p) dans un groupe séparé est un groupe primaire (ass. au même entier).</u> 3

En effet, G étant un groupe primaire (ass. à p) et f une représentation continue de G dans un groupe séparé, pour tout $x \in G$, $q \to f(x^q)$ est une représentation continue de Z_p dans G, prolongeant la représentation $n \to f(x^n) = (f(x))^n$ de Z dans G.

<u>Corollaire.-</u> <u>Si H est un sous-groupe distingué fermé d'un groupe primaire G (ass. à p), G/H est un groupe primaire (ass. au même entier).</u>

En effet, G/H est l'image de G pas l'homomorphisme canonique $x \to xH$.

<u>Proposition ~~5~~.-</u> <u>Soit</u> $(G_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille de groupes topologiques séparés; pour que le groupe $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ soit primaire-(ass. à p) il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, G_ι soit primaire (ass. à p).</u> 4

En effet, si, pour tout $\iota \in I$, G_ι est primaire (ass. à p) quel que soit $x_\iota \in G_\iota$, $q \to (x_\iota^q)_{\iota \in I}$ est une représentation continue de Z_p dans $\prod_{\iota \in I} G_\iota$, prolongeant la représentation $n \to (x_\iota^n)_{\iota \in I}$. Inversement, si $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ est primaire (ass. à p), pour tout $\iota \in I$, $pr_\iota(G) = G_\iota$ est un groupe primaire (ass. à p), d'après la proposition 2.

Il en résulte que, pour qu'un groupe topologique G, limite projective [3]) d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes topologiques séparés, relativement à des homomorphismes $f_{\iota\varkappa}$, soit primaire (ass. à p), il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, G_ι soit primaire (ass. à p). C'est suffisant car G est un sous-groupe fermé de $\prod_{\iota \in I} G_\iota$. C'ést nécessaire, car G_ι est l'image de G par l'homomorphisme f_ι de G sur G_ι.

Proposition 5.- Pour qu'un groupe séparé complet G soit primaire (ass. à p), il faut et il suffit que, pour tout $x \in G$, la représentation $n \to x^n$ de Z (muni de la structure p-adique) dans G soit continue.

C'est évidemment nécessaire; c'est suffisant d'après la proposition suivante: Toute représentation continue d'un sous-groupe partout dense d'un groupe complet G dans un groupe complet G' peut être prolongée par continuité en une représentation continue de G dans G' [4]).

Si G est un groupe primaire (ass. à p) non complet et admettant un groupe complété $\tilde{G}$, le groupe topologique $\tilde{G}$ n'est pas en général primaire (ass. à p).

Par exemple, dans le tore T , qui n'est primaire (associé à aucun entier premier p), le sous-groupe des éléments dont l'ordre est une puissance de p est partout dense et primaire (ass. à p).

Cependant le groupe complété $\tilde{G}$ d'un groupe abélien primaire G (ass. à p) est primaire (ass. au même entier) dans le cas où l'application $(n,x) \to nx$ de $Z \times G$ sur G est continue (Z étant muni de la structure p-adique). En effet, $(n,x) \to nx$ est une application bilinéaire continue de $Z \times G$ sur G et on peut la prolonger par continuité [5]) en une application bilinéaire continue $(q,x) \to qx$ de $Z_p \times \tilde{G}$ sur $\tilde{G}$ et, d'après le théorème de continuité partielle [6]), pour tout $x \in \tilde{G}$, la représentation $q \to qx$ de Z_p dans $\tilde{G}$ est continue et prolonge la représentation $n \to nx$; donc $\tilde{G}$ est primaire (ass. à p).

Définition 2.- On dit qu'un groupe est un p-groupe si chacun de ses éléments a pour ordre une puissance de l'entier premier p.

Proposition 6.- Pour qu'un groupe discret soit primaire (ass. à p) il faut et il suffit qu'il soit un p-groupe.

Toute structure topologique séparée compatible avec la structure d'un p-groupe en fait un groupe primaire (ass. à p). Cela résulte trivialement de la définition I.

<u>**Proposition 7.-**</u> <u>**Soit G un groupe séparé complet et H un sous-groupe distingué ouvert de G; pour que G soit primaire (ass. à p), il faut et il suffit que H et G/H soient des groupes primaires (ass. à p).**</u>

C'est nécessaire d'après le corollaire de la proposition 3. C'est suffisant, car, si G/H est primaire (ass. à p), c'est un p-groupe discret et, pour tout $x \in G$, il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que $x^{p^r} \in H$. D'autre part, H est ouvert, donc complet et, pour tout $x \in H$ et tout voisinage V de 0 dans G, il existe un entier $r' \geqslant 0$ tel que, pour tout $k \geqslant 0$ $x^{kp^{r'}} \in V \cap H$. Donc, pour tout $x \in G$ et tout voisinage V de e il existe $s = r + r'$ tel que, pour tout $k > 0$, $x^{kp^s} \in V \cap H \subset V$, ce qui entraine la continuité de la représentation $n \to x^n$ de Z (muni de la structure p-adique) dans G et, comme G est complet, il est primaire (ass. à p).

Il en résulte que, pour que la <u>somme directe locale</u> d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupe abéliens complets, relativement à des sous-groupes ouverts H, soit primaire (ass. à p), il faut et il suffit que chacun des groupes G_ι soit primaire (ass. à p). C'est nécessaire, car G_ι est isomorphe à un sous-groupe fermé de G. C'est suffisant, car, si, pour tout $\iota \in I$, G est primaire (ass. à p), $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est primaire (ass. à p) et G/H est un p-groupe discret, car il est somme directe de p-groupes discrets isomorphes à G_ι/H_ι.

§2.- Groupes localement compacts primaires (ass. à p) .

Proposition I.- Tout groupe compact primaire (ass. à p) est limite projective d'une famille de p-groupes finis et inversement.

Tout groupe compact G est limite projective d'une famille $(L_\iota)_{\iota\in I}$ de groupes de Lie compacts. Pour que G soit primaire (ass. à p), il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, L_ι le soit, c'est-à-dire soit un p-groupe fini. En effet, soit H_ι unnsous-groupe fermé à un paramètre de L_ι . H_ι est localement isomorphe à T ou bien discret. Il n'est primaire (ass. à p) que dans ce dernier cas et c'est alors un p-groupe fini. On en déduit que L_ι est aussi un p-groupe fini. La réciproque est triviale.

Proposition 2.- Pour qu'un groupe compact G soit primaire (ass. à p), il faut et il suffit qu'il soit totalement discontinu et que, pour chacun des sous-groupes distingués ouverts H de G, G/H soit un p-groupe fini.

C'est nécessaire, car la composante connexe de e dans G est limite projective des composantes connexes des éléments neutres des L_ι [7]), donc $\{e\}$; pour tout sous-groupe distingué ouvert H de G, G/H est un groupe compact discret primaire (ass. à p), c'est-à-dire un p-groupe fini. C'est suffisant, car, si G est compact et totalement discontinu, l'ensemble $\mathfrak{F}$ des sous-groupes distingués ouverts de G est un système fondamental de voisinages de e); G est donc primaire (ass. à p), car c'est un sous-groupe fermé du groupe primaire $\prod_{H \in \mathfrak{F}} G/H$. En particulier, tout groupe abélien compact primaire (ass. à p) est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe produit de p-groupes cycliques.

De la proposition 2 du §I on déduit immédiatement:

Proposition 3.-L'image d'un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) par chacun de ses caractères est un sous-groupe cyclique de T dont l'ordre est une puissance de p, ou bien la réunion de tous ces sous-groupes. ?

Théorème I.- Le groupe dual d'un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) est primaire (ass. au même entier).

Soit G un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) et $\hat{G}$ son dual. Montrons d'abord que, si G est compact, $\hat{G}$ est un p-groupe discret; en effet, si $\hat{x}$ est un caractère de G, $\hat{x}(G)$ est un sous-groupe fermé de T, donc un groupe cyclique d'ordre p^r, d'après la proposition précédente. Autrement dit, pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, il existe $r \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in G$, $p^r\hat{x}(x) = 0$ et $\hat{x}$ est d'ordre p^r dans $\hat{G}$, qui est donc un p-groupe. Supposons maintenant G localement compact; alors $\hat{G}$ est localement compact et totalement discontinu; en effet, pour tout $x \in G$, le sous-groupe engendré par x est relativement compact [9]). Donc, dans $\hat{G}$, l'ensemble $\mathfrak{F}$ des sous-groupes ouverts compacts de $\hat{G}$ est un système fondamental de voisinages de 0. Si $H^* \in \mathfrak{F}$, $\hat{G}/H^*$ est dual d'un sous-groupe ouvert compact H de G, conjugué de H^*. H est primaire (ass. à p), donc $\hat{G}/H^*$ est un p-groupe, d'après la remarque précédents. Pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$ et tout $H^* \in \mathfrak{F}$, il existe donc un entier $r \geqslant 0$ tel que $kp^r\hat{x} \in H^*$ pour tout entier k. ceci entraine la continuité de la représentation $n \to n\hat{x}$ de $\mathbb{Z}$ (muni de la structure p-adique) dans $\hat{G}$, pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$. $\hat{G}$ étant complet est primaire (ass. à p).

De plus la valeur au point x du caractère $q\hat{x}$ ($q \in \mathbb{Z}_p$) est égale à la valeur au point qx du caractère $\hat{x}$. En effet, on a $q\hat{x}(x) = \lim\limits_{\substack{n \to q \\ n \in \mathbb{Z}}} n\hat{x}(x) = \lim\limits_{\substack{n \to q \\ n \in \mathbb{Z}}} \hat{x}(nx) = \hat{x}(\lim\limits_{\substack{n \to q \\ n \in \mathbb{Z}}} nx) = \hat{x}(qx)$, car $\hat{x}$ est continu.

Corollaire I.- Pour qu'un groupe abélien localement compact G soit primaire (ass. à p), il faut et il suffit qu'il soit totalement discontinu et que, pour tout sous-groupe ouvert compact H de G, G/H soit un p-groupe.

Corollaire 2.- Tout groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) est limite projective d'une famille de p-groupes discrets.

En effet, soit G un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p). Il est complet et l'ensemble $\mathfrak{F}$ des sous-groupes ouverts compacts de G est un système fondamental de voisinages de 0, dans G est limite projective de la famille $(G/H)_{H \in \mathfrak{F}}$ de p-groupes abéliens discrets [10]) .

Proposition 4.- Si G est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p), $(q,x) \to qx$ est une application bilinéaire continue de $Z_p \times G$ sur G .

Comme G est abélien, pour tout x et $y \in G$, $n(x+y) = nx + ny$; d'autre part, on a $(m+n)x = mx+nx$. Donc $(n,x) \to nx$ est une application bilinéaire de $Z \times G$ sur G. Montrons qu'elle est continue en tout point (n,x) de $Z \times G$, (Z étant muni de la structure p-adique). L'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G est un système fondamental de voisinages de 0 dans G. Pour tout $x \in G$ et tout sous-groupes ouvert compact H de G, il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que $kp^r x \in H$ pour tout entier k, car $n \to nx$ est une représentation continue de Z dans G. D'autre part, on a, pour tout entier n

$$(n + kp^r)(x + x') = nx + nx' + kp^r x + kp^r x' \quad ;$$

donc, pour tout $x' \in H$

$$(n + kp^r)(x + x') \in nx+H+H+H = nx+H,$$

et ceci montre que $(n,x) \to nx$ est une application bilinéaire continue de $Z \times G$ sur G. On peut la prolonger par continuité en une application bilinéaire continue $(q,x) \to f(q,x)$ de $Z_p \times G$ sur G [5]), car G est complet, D'après le théorème de continuité partielle [6]), la représentation

$q \to f(q,x)$ de Z_p dans G est continue et elle prolonge la représentation $n \to nx$ de Z dans G; elle coincide donc avec la représentation $q \to qx$ de Z_p dans G, car celle-ci est la seule à jouir de ces deux propriétés. Donc $(q,x) \to qx$ $f(q,x)$ est une application bilinéaire continue de $Z_p \times G$ sur G.

En particulier, d'après le théorème de continuité partielle, $x \to qx$ est un endomorphisme continu de G, pour tout $q \in Z_p$.

Il résulte de cette proposition que, si G est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p), la loi de groupe et la loi de composition externe $(q,x) \to qx$ font de G un Z_p-module topologique [11]) localement compact. Il y a identité entre les sous-modules fermés de G et les sous-groupes fermés (donc primaires (ass. à p)) de G et il y a identité entre les endomorphismes continus du Z_p-module G et les endomorphismes continus du groupe G.

Soit q un entier p-adique d'ordre p^r. Alors $\pi_{qx}(Z_p) = q\,\pi_x(Z_p)$ est un sous-groupe fermé de $\pi_x(Z_p)$. $\pi_x(Z_p)$ étant, en tant que Z_p-module, isomorphe à Z_p ou à un de ~~ses~~ ~~sous~~-modules ~~fermés~~ quotients, $\pi_{qx}(Z_p)$ est donc identique à $\pi_{p^r x}(Z_p)$.

Définition I.- Si G est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p), on dit que $a \in G$ est de hauteur p^r dans G si r est le plus grand entier tel que $a = p^r x$ ait une solution dans G.

On a donc la

<u>Proposition 5.- Si q est un entier p-adique d'ordre p^r, pour que l'équation $a = qx$ ait une solution x dans G, il faut et il suffit que a soit de hauteur p^r dans G.</u>

On en déduit que $G^{(p^r)}$ est l'ensemble des éléments de G de hauteur $\geqslant p^r$ et on a

$$G_{(n)} = G_{(p^r)} \quad \text{et} \quad G^{(n)} = G^{(p^r)} \text{ si } n \in p^r \cap \complement p^{r+1} \quad \text{et}$$

$$G_{(p^r)} \subset G_{(p^{r+1})} \quad \text{et} \quad G^{(p^r)} \supset G^{(p^{r+1})}, \; G_{(1)} = \{0\} \quad \text{et } G^{(1)} = G \; .$$

De là il résulte que, pour que le Z_p-module G soit <u>régulier</u>, il faut et il suffit que chacun de ses éléments $\neq 0$ soit d'ordre infini.

<u>Proposition 6.- Soit G un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p), $\hat{G}$ son dual; si le sous-groupe des éléments d'ordre fini (resp. de hauteur infinie) de G est partout dense, tous les éléments de $\hat{G}$ sont de hauteur finie (resp. d'ordre infini)</u> .

Cela résulte immédiatement du fait que le conjugué dans $\hat{G}$ de $\overline{G^{(p^r)}}$ (resp. $G_{(p^r)}$) est $\hat{G}_{(p^r)}$ (resp. $\overline{\hat{G}^{(p^r)}}$)[12] .

<u>Définition 2.- On dit qu'un groupe abélien localement compact G primaire (ass. à p) est de rang n si tout sous-module de G, somme directe de sous-modules engendrés par un élément est somme directe de n au plus de ces sous-modules</u> .

On sait [13]) que si G est un Z_p-module (non topologique) , de rang I, il est isomorphe à Q_p, Z_p, Q_p/Z_p, ou $Z/(p^r)$ et que si G est de rang n, il est somme directe de n-sous-modules de rang I. La seule topologie d'espace localement compact compatible avec la structure de p-groupe de Q_p/Z_p est la topologie discrète, car Q_p/Z_p est dénombrable [14]). Il en résulte que la seule structure de groupe localement compact primaire (ass. à p) compatible avec la structure de groupe de Q_p est la structure habituelle. En effet, si est primaire (ass. àp), l'ensemble $Z_p = \pi_1(Z_p)$ des entiers p-adiques est compact et Q_p/Z_p est discret; donc Z_p est aussi ouvert et les voisinages de 0 dans Z_p forment un système fondamental de voisinages de 0 dans Q_p. Il en résulte que tout groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) de rang I est isomorphe à Q_p, Z_p, Q_p/Z_p ou $Z/(p^r)$ et plus généralement:

Proposition 7.- Tout groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) de rang fini n est produit de n groupes isomorphes à Q_p, Z_p, Q_p/Z_p, ou $Z/(p^r)$.

La proposition 6 du §3 donne une autre caractérisation des groupes abéliens compacts primaires (ass. à p) de rang fini.

§3.- p-groupes abéliens discrets et groupes abéliens compacts primaires (ass. à p).

Théorème I.- Pour qu'un p-groupe abélien discret ait tous ses éléments de hauteur infinie, il faut et il suffit qu'il soit somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p [15].

C'est évidemment suffisant, car tout élément de Q_p/Z_p est de hauteur infinie, Montrons que c'est nécessaire. Soit G un p-groupe abélien discret dont tous les éléments sont de hauteur infinie. Montrons d'abord que, pour tout $x \in G$, il existe un sous - groupe H_x de G contenant x et isomorphe à Q_p/Z_p. Définissons par récurrence la suite $(x_n)_{n\in N}$ d'éléments de G: posons $x = x_0$ et soit x_n défini par $x_{n-1} = px_n$, pour tout entier $n>0$. Si H_x est le sous-groupe de G engendré par $\{x_0,x_1,x_2,\ldots,\}$, on a $x \in H_x$ et, si $y\in H_x$

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \qquad (n \text{ et } a_i \text{ entiers positifs})$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i p^{n-i} x_n = kx_n = p^m k x_{n+m} .$$

pour tout entier $m \geqslant 0$. Donc dans H_x, tout élément est de hauteur infinie. D'autre part, si x' est un élément d'ordre p de H_x, on peut par le même procédé associer à x' un sous-groupe $H_{x'}$ de H_x et $x'_n \to p^{-n}$ définit un isomorphisme de $H_{x'}$ sur Q_p/Z_p. Mais on a $H_x = H_{x'}$; en effet, $H_{x'} \neq \{0\}$ et si $H_x \neq H_{x'}$, il existe $y = kx_n \in H_x \cap \complement H_{x'}$; donc $x_{n'} \notin H_{x'}$, pour tout $n' \geqslant n$ et $H_{x'}$ qui a un nombre fini de générateurs, est fini, ce qui est absurde. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties X de G telles que la somme $H_X = \sum_{x \in X} H_x$ soit directe. On voit facilement que l'ensemble $\mathcal{F}$, ordonné par inclusion, est de caractère fini, donc inductif et possède un élément maximal Y[16]. H_Y est un sous-groupe pur de G dont tous les éléments sont de hauteur infinie. Montrons que $G = H_Y$. Supposons que $G \neq H^Y$. Il existe, d'après la proposition 8 du §3 du Chapitre I, un sous-groupe $K \neq \{0\}$ de G tel que G soit somme directe de K et de H_Y. Si $x \in K$ et $x \neq 0$, pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe $y \in H_Y$ et $x \in K$ tels que $x = p^n(y+z)$, c'est-à-dire $x - p^n z = p^n y$. Or $H_Y \cap K = \{0\}$, donc $x = p^n z$ et K est un sous-groupe pur de G dont tous les éléments sont de hauteur infinie. D'après ce qui précède, il existe un sous-groupe H_x de K isomorphe à Q_p/Z_p et la somme $H_x + H_Y$ est directe, donc $\{x\} \cup Y \in \mathcal{F}$, ce qui est contradictoire, car Y est maximal. Donc $G = H_Y$, d'où le théorème.

Proposition I.- Pour que deux p-groupes abéliens discrets G et G', respectivement sommes directes des familles $(H_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(K_\mu)_{\mu \in J}$ de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p soient isomorphes, il faut et il suffit que I et J soient équipotents.

C'est évidemment suffisant. C'est nécessaire, car $G_{(p)}$ resp. $G'_{(p)}$ est alors somme directe de la famille $(H_{\iota(p)})_{\iota \in I}$ (resp. $K_{\mu(p)})_{\mu \in J}$) de sous-groupes cycliques d'ordre p; ces sous-groupes sont simples, d'où le résultat[17].

Proposition 2.- Tout p-groupe abélien discret est somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p et d'un sous-groupe réduit.

En effet, dans un p-groupe abélien discret G, il existe un plus grand sous-groupe pur H dont tous les éléments sont de hauteur infinie et G/H est réduit. G est isomorphe à $H \times (G/H)$ d'après la proposition 3 du §3 du Chapitre I.

Proposition 3.- Tout p-groupe abélien discret est isomorphe à un sous-groupe d'un p-groupe abélien discret, somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p.

Soit G un p-groupe abélien discret, S un système de générateurs de G, H_x le sous-groupe d'ordre p^{n_x} engendré par $x \in S$ et $(K_x)_{x \in S}$ une famille de groupes isomorphes à Q_p/Z_p. Quel que soit $x \in S$, il existe un élément unique $y_x \in K_x$ engendrant un sous-groupe H'_x de K_x isomorphe à H_x. Soit G' un groupe abélien discret somme directe des groupes K_x et H' le sous-groupe de G' somme directe des sous-groupes H'_x. G' est un p-groupe abélien discret dont tous les éléments sont de hauteur infinie. Si $y \in H'$, il existe une partie finie X de S et des entiers r_x $(0 \leqslant r_x < n_x,\ x \in X)$ déterminés de façon unique tels que $y = \sum_{x \in X} p^{r_x} y_x$. On vérifie facilement que $y \to \sum_{x \in X} p^{r_x} x$ est une représentation de H' sur G. Si K désigne le sous-groupe de H' formé par les éléments $\sum_{x \in X} p^{r_x} y_x$ tels que $\sum_{x \in X} p^{r_x} x = 0$, G est isomorphe au groupe quotient H'/K. H'/K est un sous-groupe du p-groupe quotient G'/K dont tous les éléments sont évidemment de hauteur infinie. G'/K est donc somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p, d'après le théorème I, d'où la proposition.

<u>Théorème 2</u>.- <u>Pour qu'un groupe abélien compact primaire (ass. à p) ait tous ses éléments $\neq 0$ d'ordre infini, il faut et il suffit qu'il soit produit de groupes isomorphes à Z_p.</u>

En effet, si G est un groupe abélien compact primaire (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, son dual $\hat{G}$ est un p-groupe abélein discret dont tous les éléments sont de hauteur infinie, d'après la proposition 6 du §2. $\hat{G}$ est donc somme directe d'une famille $(\hat{H}_\iota)_{\iota\in I}$ de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p et G est isomorphe au produit des groupes H_ι duals des $\hat{H}_\iota$, donc isomorphes à Z_p. La réciproque est triviale.

<u>Proposition 4</u>.- <u>Pour que deux groupes abéliens compacts primaires (ass. à p) respectivement produits des familles $(H_\lambda)_{\lambda\in I}$ et $(K_\mu)_{\mu\in J}$ des groupes isomorphes à Z_p, soient isomorphes, il faut et il suffit que I et J soient équipotents.</u>

Cela résulte immédiatement de la proposition I.

<u>Théorème 3</u>.- <u>Pour qu'un groupe abélien compact primaire (ass. à p) soit un p-groupe, il faut et il suffit qu'il soit produit de groupes cycliques d'ordres bornés</u> .

C'est évidemment suffisant. Montrons que c'est nécessaire. Soit G un p-groupe abélien discret tel que son dual $\hat{G}$ soit un p-groupe abélien compact. Tous les éléments $\neq 0$ de G sont de hauteur finie, d'après la proposition 6 du §2. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties X de G telles que la somme H_X des sous-groupes engendrés par les $x \in X$ soit directe et soit un sous-groupe pur de G. On voit facilement que l'ensemble $\mathfrak{F}$, ordonné par inclusion, est de caractère fini, donc inductif et possède un élément maximal Y. H_Y est un sous-groupe pur de G, somme directe de la famille des sous-groupes cycliques engendrés par les $x \in Y$. Montrons que $G = H_Y$. Supposons $G \neq H_Y$. Tous les éléments $\neq H_Y$ du groupe quotient G/H_T sont de hauteur finie, car dans son dual $H_Y^* \subset \hat{G}$, tous les éléments sont d'ordre fini. Il existe donc dans G/H_Y une classe $\dot{y}$ d'ordre p et de hauteur p^{r-1}. Il existe $\dot{x} \in G/H_Y$ tel que $\dot{y} = p^{r-1}\dot{x}$ et $\dot{x}$ est de hauteur 1 et d'ordre p^r. Le sous-groupe engendré par $\dot{x}$ dans G/H_Y est pur: en effet, si $\dot{z} = p^k\dot{x}$ $(0 \leqslant k < r)$ était de hauteur $p^{k'} > p^k$, on aurait $p^{r-k-1}\dot{z} = \dot{y}$ et $\dot{y}$ serait de hauteur $p^{k'+r-k-1} > p^{r-1}$, ce qui n'est pas. Soit $x' \in G$ un représentant de la classe $\dot{x}$, x' est d'ordre $p^{r'} \geqslant p^r$, sinon $\dot{x}$ serait d'ordre $< p^r$. On a $p^r x' \in H_Y$ et, comme H_Y est pur, il existe $x'' \in H_Y$ tel que $p^r x' = p^r x''$ et $x = x' - x''$ est d'ordre p^r et appartient à la classe $\dot{x}$. La somme de H_Y et du sous-groupe H_x engendré par x est directe. En effet, supposons qu'on ait $p^n x \in H_Y$ $(o < n < r)$; alors $p^n x' - p^n x'' \in H_Y$ et $p^n x' \in H_Y$. On a donc $n \geqslant r$, sinon la classe $\dot{x}$ de x' serait d'ordre $< p^r$. D'où, $n = r$, $p^n x = 0$ et $H_x \cap H_Y = \{0\}$. Montrons que le sous-groupe $H_x + H_Y$ est pur. Soit $y \in H_x + H_Y$ de hauteur p^k dans G. Il existe $y' \in G$, $z \in H_Y$ et un entier n tels que $y = p^k y' = p^n x + z$. Si $\dot{y}'$ désigne la classe de y' dans G/H_Y, on a $p^k \dot{y}' = p^n \dot{x}$; mais le sous-groupe engendré par $\dot{x}$ est pur et on a $k \leqslant n$. On a donc $z = p^k y' - p^n x = p^k(y' - p^{n-k}x)$. Comme H_Y est pur, il existe $z' \in H_Y$ telque $z = p^k z'$, c'est-à-dire $y = p^k(p^{n-k}x + z')$ et y est de hauteur p^k dans $H_x + H_Y$, qui est ainsi un sous-groupe pur de G. Donc $\{x\} \cup Y \in \mathfrak{F}$, ce qui est contradictoire, car Y est maximal. Donc $G = H_Y$, et G est somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par les $x \in Y$. Son dual $\hat{G}$ est produit d'une famille $(Z/(p^{r_x}))_{x \in Y}$ de groupes cycliques, r_x étant d'ordre de $x \in Y$. Supposons que, pour tout entier $r > 0$, il existe $r_x > r$. Soit $\hat{z} = (\hat{y}_x)_{x \in Y}$, $\hat{y}_x$ engendrant $Z/(p^{r_x})$. Pour tout entier $r \geqslant 0$, $p^r \hat{z} = (p^r \hat{y}_x)_{x \in Y} \neq 0$, ce qui est contradictoire, car $\hat{z}$ est d'ordre fini dans $\hat{G}$. Il existe donc un entier r tel que, pour tout $x \in Y$, $r_x \leqslant r$ et tous les éléments de $\hat{G}$ sont ainsi d'ordre $\leqslant p^r$, d'où le théorème.

<u>Théorème 4.-</u> <u>Pour qu'un p-groupe abélien discret ait tous ses éléments d'ordre $\leqslant p^r$, il faut et il suffit qu'il soit somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques dont l'ordre divise p^r.</u> [18]).

C'est évidemment suffisant. C'est nécessaire, car, si G est un p-groupe abélien discret dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant p^r$, pour chacun de ses caractères $\hat{x}$, on a $p^r\hat{x}(x) = \hat{x}(p^r x) = 0$ et le dualde G est un p-groupe abélien compact $\hat{G}$ dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant p^r$; il est donc produit d'une famille $(\mathbb{Z}/(p^{r_\iota}))_{\iota \in I}$ de groupes cycliques d'ordre $p^{r_\iota} \leqslant p^r$. G est donc somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes aux $\mathbb{Z}/(p^{r_\iota})$.

Pro osition 5.- Soit G (resp. G') un p-groupe abélien discret, somme directe d'une famille $((H_{\lambda_r})_{\lambda_r \in I_r})_{r=1,2,\ldots}$ (resp. $((H'_{\mu_r})_{\mu_r \in J_r})_{r=1,2,\ldots}$) de sous-groupes, H_{λ_r} et H'_{μ_r} étant cycliques d'ordre p^r; pour que G et G' soient isomorphes, il faut et il suffit que, pour tout $r > 0$, I_r et J_r soient équipotents.

C'est évidemment suffisant. Montrons que c'est nécessaire. Pour tout entier $r > 0$; posons $(G^{(p^r)})_{(p)} = G_r$ et $\sum_{\lambda_r \in I_r} H_{\lambda_r} = H_r$ (resp. $G'^{(p^r)}_{(p)} = G'_r$ et $\sum_{\mu_r \in J_r} H'_{\mu_r} = H'_r$). Alors G_{r-1} (resp. G'_{r-1}) est somme directe de G_r et de H_r (resp. de G'_r et de H'_r) et G_{r-1}/G_r (resp. G'_{r-1}/G'_r) est isomorphe à H_r (resp. H'_r) donc somme directe de sous-groupes simples. G et G' étant isomorphes, H_r et H'_r le sont aussi et I_r et J_r sont équipotents. [17]).

On déduit facilement de cette proposition, à l'aide de la théorie de la dualité, les conditions d'isomorphie de deux p-groupes compacts.

<u>Théorème 5.- Soit G un p-groupe abélien discret tel que toutes les classes de $G/G^{(\infty)}$ soient d'ordre $\leqslant p^r$; G est alors somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques d'ordres $\leqslant p^r$ et de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p.</u>

En effet, si $x \in G^{(\infty)}$, quel que soit l'entier $n \geqslant 0$, il existe $x_{n+r} \in G$ tel que $x = p^{n+r}x'_n$. On a $p^r x_{n+r} = x'_n \in G^{(\infty)}$ et $x = p^n x'_n$. Donc $G^{(\infty)}$ est un sous-groupe pur de G et il est identique au plus grand sous-groupe pur de G dont tous les éléments sont de hauteur infinie. G est donc somme directe de $G^{(\infty)}$ et d'un sous-groupe isomorphe à $G/G^{(\infty)}$, d'après la proposition 3 du §3 du Chapitre I. $G^{(\infty)}$ est somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p d'après le théorème 0 et $G/G^{(\infty)}$ est somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques d'ordres $\leqslant p^r$, d'après le théorème 4; d'où le résultat.

La réciproque est triviale.

<u>Proposition 6.- Soit G un groupe abélien compact primaire (ass. à p); pour que G soit de rang fini, il faut et il suffit que $G^{(p)}$ soit un sous-groupe ouvert de G.</u>

C'est évidemment suffisant, Montrons que c'est nécessaire. Soit $\hat{G}$ un groupe abélien compact primaire (ass. à p) tel que $\hat{G}^{(p)}$ soit un sous-groupe ouvert de G. Si $n \geqslant 1$, $\hat{G}^{(p^n)}$ est alors un sous-groupe ouvert de $\hat{G}$, car $\hat{x} \to p\hat{x}$ est un homomorphisme de $\hat{G}$ dans lui-même. Le dual G de $\hat{G}$ est un p-groupe discret et $G_{(p^n)}$, conjugué du sous-groupe ouvert $\hat{G}^{(p^n)}$, est un sous-groupe compact, donc fini, de G. $G_{(p^n)}$ est donc somme directe d'une suite finie de sous-groupes G_{k,i_k} ($k = 1,\ldots,n$, $i_k \in J_k$ si $k = 1,\ldots,n-1$, $i_n \in I_n$, J_k et I_n étant des ensembles finis d'indices) G_{k,i_k} étant un sous-groupe cyclique d'ordre p ($k = 1,\ldots,n-1,n$). Si x_{n,i_n} engendre G_{n,i_n}, soit J_n l'ensemble des $i_n \in I_n$ tels que $x_{n,i_n} \notin G^{(p)}$. On voit facilement que $G_{(p^{n+1})}$ est somme directe des sous-groupes G_{k,i_k} ($i_k \in J_k$, $k = 1,\ldots,n-1,n$) et d'une suite $(G_{n+1,i_{n+1}})_{i_{n+1} \in I_{n+1}}$ de sous-groupes cycliques d'ordre p^{n+1}. Supposons que, pour tout n, il existe un $n' > n$ tel que $J_{n'}$ ne soit pas vide. Alors il existe un r tel que la somme directe $\sum_{k=1}^{r} \sum_{i_k \in J_k} G_{k,i_k}$ ait une puissance strictement supérieure à celle de $G_{(p)}$, ce qui est absurde. Il existe donc un n tel que, si $n' > n$, $J_{n'}$ soit vide. Posons $H = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_k \in J_k} G_{k,i_k}$ et $K = \sum_{\substack{k>n \\ i_k \in I_k}} G_{k,i_k}$. H et K sont des sous-groupes de G et il est clair que G est somme directe de H et de K. Soit x un générateur de $G_{n',i_{n'}}$ avec $n' > n$. Alors $x \in G^{(p)}$ et $x = p(y+z)$, avec $y \in H$ et $z \in K$; on a $x - pz = py \in K$. Mais $H \cap K = \{0\}$; donc $py = 0$ et $x = pz$. D'où $x \in K^{(p)}$. Ceci montre que $K = K^{(p)}$; tous les éléments de K sont donc de hauteur infinie dans K. K est par suite somme directe d'une famille $(K_i)_{i \in I}$ de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p. $K_{(p)}$ est somme directe de la famille $(K_{i(p)})_{i \in I}$ et fini. I est donc fini. H étant somme directe d'un nombre fini de sous-groupes cycliques, G est de rang fini et il en est évidemment de même de son dual $\hat{G}$.

Les p-groupes ábéliens discrets dénombrables jouissent de propriétés particulières. Rappelons le théorème suivant [9]):

Théorème 6.- Pour qu'un p-groupe abélien discret dénombrable ait tous ses éléments $\neq 0$, de hauteur finie, il faut et il suffit qu'il soit somme directe d'une suite de sous-groupes cycliques.

En général, si G est un groupe abélien discret dont la puissance est supérieure au continu, et dont tous les éléments $\neq 0$ sont de hauteur finie, G n'est pas somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques. En effet, L. Kulikoff [10]) a montré qu'il existe de tels groupes G tels que, pour toute décomposition de G en somme directe d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes de G, il existe un $\iota \in I$ tel que H_ι ait une puissance supréiruer au continue

La théorème 5 permet de déterminer complètement la structure des p-groupes abéliens discrets dénombrables. Une telle étude a été faite par H.Ulm et L. Zippín [11]).

Si maintenant G est un groupe abélien compact primaire (ass. à p) ayant un système fondamental dénombrable de voisinages de O, son dual $\hat{G}$ est un p-groupe abélien discret dénombrable. L'étude de la structure de $\hat{G}$ se ramène ainsi à celle de la structure de G. Les résultats ainsi obtenus ont été exposés par W. Krull [11]). Signalons la propriété suivante qui résulte immédiatement du théorème 6 et de la

proposition 6 du §2:

Théorème 7.- Pour que, dans un groupe abélien compact G primaire (ass. à p) ayant un système fondamental dénombrable de voisinages de 0, le sous-groupe des éléments d'ordre fini soit partout dense, il faut et il suffit que G soit produit de groupes cycliques.

§4.- Structure de certains groupes abéliens localement compacts primaires (ass. à p).

Nous donnons ici quelques propriétés de la structure de certains groupes abéliens localement compacts primaires (ass. à p), tout d'abord des groupes dont tout élément $\neq 0$ est d'ordre infini.

Théorème I.- Soit G un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) dont tout élément $\neq 0$ est d'ordre infini ; il existe alors un espace vectoriel topologique $\widetilde{G}$ sur le corps Q_p, localement compact et tel que G soit isomorphe à un sous-module ouvert G' de $\widetilde{G}$ tel que $\widetilde{G} = Q_p\ G'$ [23]).

G est un Z_p -module régulier. D'après un théorème de C.Chevalley déjà cité [24]), il existe un espace vectoriel $\widetilde{G}$ sur le corps (non topologique) Q_p, un sous-module G' de $\widetilde{G}$ tel que $\widetilde{G} = Q_p\ G'$ est un isomorphisme φ de G sur G'. Si $\mathfrak{V}$ est le filtre des voisinages de 0 dans G, $\varphi(\mathfrak{V})$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie compatible avec la structure de groupe additif de $\widetilde{G}$. $\widetilde{G}$ muni de cette topologie est localement compact et φ est un isomorphisme du groupe topologique G dans le groupe topologique $\widetilde{G}$. G' est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$ et un groupe primaire (ass. à p); $\widetilde{G}/G'$ est un p-groupe. Donc, d'après la proposition 6 du §I, $\widetilde{G}$ est un groupe abélien primaire (ass. à p). L'ensemble des sous-groupes ouverts de $\widetilde{G}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans G. Soit K un sous-groupe ouvert de G et q un nombre p-adique. Si n est le plus petit entier tel que $q \in p^{-n}$, l'image réciproque K' de K par la représentation continue $x \to p^n x$ est un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}$ et on a, si $x' \in K'$, $qx' \in$ H. $\tilde{G}/K$ est un p-groupe discret; soit p^r l'ordre de la classe de x dans $\tilde{G}/K$: on a $p^r x \in K$. Donc, quel que soit l'entier p-adique q' et x' appartenant au sous-groupe ouvert $K \cap K'$ de $\tilde{G}$, on a

$$(q+p^r q')(x+x') = qx+qx'+ q^r q'x+p^r q' x'$$
$$\in qx+K+K+K \subset qx+K.$$

Donc $(q,x) \to qx$ est une application bilinéaire continue de $Q_p \times \tilde{G}$ sur $\tilde{G}$ et $\tilde{G}$ est un espace vectoriel topologique sur le corps Q_p, d'où le théorème.

Dans ce qui suit, nous identifierons les Z_p-modules G et G' et l'espace vectoriel $\tilde{G}$ sera dit associé au groupe G. Cet espace est déterminé à une isomorphie près par la condition de contenir un Z_p-module ouvert G' isomorphe à G et tel que $\tilde{G} = Q_p G'$. Plus précisément :

Proposition I.- Soit G et G_1 deux groupe abéliens localement compacts primaires (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, $\tilde{G}$ et $\tilde{G}_1$ les espaces vectoriels sur Q_p qui leur sont respectivement associés; alors tout isomorphisme f de G sur G_1 se prolonge de manière unique en un isomorphisme $\tilde{f}$ de $\tilde{G}$ sur $\tilde{G}_1$.

Le théorème de Chevalley montre qu'il existe un isomorphisme $\tilde{f}$ unique du groupe (non topologique) $\tilde{G}$ sur le groupe $\tilde{G}_1$, prolongeant f. Mais G (resp. G_1) étant un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}$ (resp. $\tilde{G}_1$), $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$ sont continus.

Nous allons maintenant construire effectivement l'espace vectoriel $\tilde{G}$ associé à un groupe abélien localement compact G primaire (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini. Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. H est un groupe abélien compact primaire (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infinis; d'après le théorème 2 du §3, H est produit d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes isomorphes à Z_p. Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de groupes isomorphes à Q_p. H_ι peut être identifié au sous-groupe des entiers p-adiques de G_ι. Soit G_0 le produit local des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes ouverts compacts H_ι ; G_0 est un espace vectoriel (non topologique) sur Q_p ; $H' = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est un ensemble ouvert compact de G_0 et un Z_p-module. Soit φ l'isomorphisme du Z_p-module H sur H' et $\tilde{G}$ le sous-espace vectoriel engendré par H' dans G_0 [15]. Soit x G. G/H étant un p-groupe, il existe un plus petit entier r tel que $p^r x \in H$. Soit $(x_\iota)_{\iota \in I} = \varphi(p^r x)$; x_ι est un entier p-adique appartenant à H_ι et $p^{-r} x_\iota$ est un nombre p-adique appartenant à G_ι. On a $(p^r(p^{-r} x_\iota))_{\iota \in I} \in H'$ et on vérifie facilement que $x \to (p^{-r} x_\iota)_{\iota \in I}$ est un isomorphisme $\overline{\varphi}$ du groupe (non topologique) G sur un sous-groupe G' de $\tilde{G}$, prolongeant φ. On a évidemment $\widetilde{G} = Q_p H' = Q_p G'$. Donc, d'après le théorème de Chevalley, il existe un isomorphisme de l'espace vectoriel (non topologique) $\widetilde{G}$ ainsi obtenu sur l'espace vectoriel associé au groupe G et cet isomorphisme est continu, ainsi que son application réciproque, car $\bar{\varphi}(G) = G'$ est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{G}$ isomorphe à G. Ceci montre que $\widetilde{G}$ est un espace vectoriel topologique sur le corps Q_p qu'on peut identifier avec l'espace vectoriel associé à G.

Soit H_1 un sous-groupe ouvert compact de G, différent de H. $K = H \cap H_1$ est un sous-groupe ouvert compact de G et de H_1; H/K est donc un p-groupe fini et le dual de H et le dual de K sont des p-groupes discrets équipotents. D'après la proposition I du §3, ils sont sommes directes de familles équipotentes de sous-groupes isomorphes à Q_p/Z_p. K est donc produit d'une famille de groupes isomorphes à Z_p, équipotente à la famille $(H_\iota)_{\iota\in I}$ et il en est de même de H_1. Autrement dit, la puissance de l'ensemble d'indice I est un invariant du groupe G. On dit que c'est le rang du groupe primaire (ass. à p) G. Cette remarque et la construction précédente montrent que l'espace vectoriel $\widetilde{G}$, associé au groupe G, est entièrement déterminé par la donnée de la puissance de l'ensemble I. Plus précisément:

Proposition 2.- Soient G et G_1 deux groupes abéliens localement compacts primaires (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}_1$ les espaces vectoriels sur

Q_p qui leur sont respectivement associés; pour que $\tilde{G}$ et $\tilde{G}_1$ soient isomorphes, il faut et il suffit que les groupes G et G_1 soient localement isomorphes ou bien aient même rang.

Si G et G_1 sont localement isomorphes, il existe un homéomorphisme φ d'un voisinage V de O dans G sur le voisinage $\varphi(V)$ de O dans G_1, mais V contient un sous-groupe ouvert compact H et la restriction de φ à H est un isomorphisme de H sur le sous-groupe ouvert compact $\varphi(H)$ de G_1, donc G et G_1 ont même rang. La réciproque est triviale. D'où la proposition 2.-

Nous allons maintenant examiner la structure des p-groupes abéliens localement compacts.

Théorème 2.- Tout groupe abélien localement compact dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre p est produit d'un groupe compact, produit d'une famille de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$; et d'un groupe discret, somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/(p)$.

Soit G un groupe abélien localement compact dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre p: G est primaire (ass. à p). Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. Le groupe (non topologique) G est isomorphe au produit des groupes H et G/H, car il est somme directe des sous-groupes simples, d'après le théorème 4 du §3[26]). Donc tout $x \in G$ est de la forme (x_1, x_2) avec $x_1 \in H$ et $x_2 \in G/H$ et $x \to x_2$ est une repré-

sentation f de G sur F/G. Cette représentation est continue car $\overset{-1}{f}(0) = H$ est un sous-groupe ouvert de G. Donc le groupe topologique G est isomorphe au produit $H \times (G/H)$. H est un p-groupe compact dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre p; H est donc produit d'une famille de groupes isomorphes à $Z/(p)$. G/H est un p-groupe discret dont tout les éléments $\neq 0$ sont d'ordre p; G/H est donc somme directe d'une famille de sous-groupes isomorphes à $Z/(p)$.
La réciproque est triviale.

Comme la somme directe locale de groupes topologiques est associative, ce résultat peut s'énoncer ainsi:

Corollaire.- Tout groupe abélien localementcompact dont tout élément $\neq 0$ est d'ordre p est somme directe locale de groupes isomorphes à $Z/(p)$ et inversement.

Théorème 3.- Si G est un p-groupe abélien localement compact, G est isomorphe à un sous-groupe ouvert d'un groupe abélien localement compact G_0 produit local d'une famille de groupes isomorphes à Q_p/Z_p, relativement à des sous-groupes cycliques d'ordres bornés.

Soit G un p-groupe abélien localement compact et H un sous-groupe ouvert compact de G. H est un p-groupe abélien compact. D'après le théorème 3 du §3; H est produit d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in J}$ de groupes cycliques d'ordres bornés, G/H est un p-groupe discret G'. Soit $\tilde{G}'$ le p-groupe abélien associé à G' d'après la proposition 3 du §3: G' est un sous-groupe de G' et $\tilde{G}'$ est somme directe d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in J'}$ de groupe isomorphes à Q_p/Z_p. Soit I l'ensemble somme des ensembles d'indices J et J' et $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de groupes isomorphes à Q_p/Z_p. Si $\iota \in J$, on peut identifier H_ι à un sous-groupe cyclique bien déterminé de G_ι. Posons $H_\iota = \{0\}$ si $\iota \in J'$. Soit G_0 le groupe abélien localement compact produit local de la famille de groupes $(G_\iota)_{\iota \in I}$, relativement aux sous-groupes cycliques d'ordres bornés H_ι. Tous les éléments de G_0 sont de hauteur infinie. $\tilde{G}'$ est un sous-groupe discret de G_0 et $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est un sous-groupe ouvert compact de G_0. D'après le théorème 2 du §4, $G_{(p)}$ est produit du sous-groupe ouvert compact $H_{(p)}$ de $G_{(p)}$ et d'un sous-groupe discret G_1 de G. $H + G_{(p)}$ est produit des groupes G_1 et H. En effet, H est compact, G_1 discret et $H \cap G_1 = \{0\}$ [27]. G_1 est isomorphe au sous-groupe $(H+G_{(p)})/H$ de G/H, donc à un sous-groupe de $\tilde{G}' \subset G_0$. Soit ψ l'isomorphisme de G_1 dans G_0 ainsi défini. Si $y \in H+G_{(p)}$, on a $y = z+(x_\iota)_{\iota \in I}$, avec $z \in G_1$ et $x_\iota \in H_\iota$, et on voit immédiatement que $y \to \psi(z)+(x)_{\iota \in I}$ est un isomorphisme φ du sous-groupe ouvert $H + G_{(p)}$ de G dans G_0. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des isomorphismes φ_L d'un sous-groupe fermé L de G dans G_0, prolongeant l'isomorphisme φ, on voit facilement que l'ensemble $\mathcal{F}$, ordonné par la relation "φ_L est prolongé par $\varphi_{L'}$", est inductif et, par suite, possède un élément maximal φ_L. L est un sous-groupe formé de G contenant $H + G_{(p)}$. Supposons $G \neq L$. Il existe donc $x \notin L$ tel que $px \in L$. Soit $y' = \varphi_L(px)$. y' est de hauteur infinie dans G_o; il existe donx $y \in G_o$ tel que $y' = py$. On a $y \notin \varphi_L(L)$, sinon il existerait $x_1 \in L$ tel que $y = \varphi_L(x_1)$ et $\varphi_L(px) = py = p\,\varphi_L(x_1) = \varphi_L(px_1)$. Comme φ_L est un isomorphisme, on a $px = px_1$ et $p(x-x_1) = 0$ c'est-à-dire $x-x_1 \in G_{(p)}$, d'où $x \in x_1 + G_{(p)} \subset L$, car $G_{(p)} \subset L$, ce qui est contradictoire, car $x \notin L$. La classe de y dans le groupe quotient $G_o/\varphi_L(L)$ est donc d'ordre p. Soit L' le sous-groupe ouvert de G engendré par $L \cup \{x\}$. Si $z \in L'$, on a $z = kx + x'$, avec $0 \leq k < p$ et $x' \in L$ bien déterminés et on voit facilement que $z \to ky + \varphi_L(x')$ est un homomorphisme $\varphi_{L'}$ de L' dans G_o, car L est un sous-groupe ouvert de G. Soit $kx + x' \in L'$ tel que $ky + \varphi_L(x') = 0$. On a $ky = -\varphi_L(x') \in \varphi_L(L)$, donc $k = 0$ et, par suite, $x' = 0$. Donc $\bar{\varphi}_{L'}^{1}(0) = \{0\}$ et $\varphi_{L'}$ est un isomorphisme de $L' \supset L$ dans G_o, prolongeant l'isomorphisme φ_L, donc φ. D'où $\varphi_{L'} \in \mathcal{F}$, ce qui est absurde car φ_L est un élément maximal de $\mathcal{F}$. Donc $L' = G$, d'où le résultat.

On remarquera que le groupe G_o ainsi défini est totalement discontinu, mais non primaire (ass. à p). Cependant l'ensemble $\tilde{G}$ des éléments d'ordre fini de G_o est un sous-groupe pur ouvert de G_0[28]). $\tilde{G}$ est donc un p-groupe abélien localement compact et G est isomorphe à un sous-groupe ouvert G' de $\tilde{G}$. Dans ce qui suit, on identifiera les deux groupes G et G' et on dira que le p-groupe abélien localement compact $\tilde{G}$ ainsi défini est associé au groupe G.

Les démonstrations des théorèmes 2 et 3 sont très différentes. On remarque pourtant une grande analogie dans la définition du p-groupe associé à un p-groupe abélien localement compact et dans celle de l'espace vectoriel associé à un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini. En effet, si G est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, il existe un groupe G_0 produit local d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes isomorphes à Q_p , relativement à des sous-groupes H_ι , tel que G soit isomorphe à un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}$, $\tilde{G}$ étant l'image réciproque du sous-groupe des éléments d'ordre fini de G_0/H par l'homomorphisme canonique de G_0 sur G_0/H, avec $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$. Si G est un p-groupe abélien localement compact, il existe un groupe G_0 produit local d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes isomorphes à Q_p/Z_p , relativement à des sous-groupes H_ι , tel que G soit isomorphe à un sous-groupe ouvert de $\tilde{G}$, $\tilde{G}$ étant l'image réciproque du sous-groupe des éléments d'ordre fini de G_o/H par l'homomorphisme canonique de G_o sur G_o/H, avec $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$; En effet, tous les éléments de H étant d'ordre borné, l'ensemble des éléments d'ordre fini de G_o est $\tilde{G}$. Cependant l'arbitraire qui règne dans la définition du p-groupe discret associé à G/H ne permet pas d'écrire des conditions d'isomorphie analogues à celles des propositions I et 2.

Si G est un p-groupe abélien compact ou discret -(resp. localement compact) dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant p^r$ (resp. $\leqslant p$), G est somme directe locale d'une famille de groupes cycliques d'ordres p^r (resp. p), relativement à certains sous-groupes. Mais si G est un groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre p^r (r 1), G n'est pas en général somme directe locale d'une famille de groupes cycliques d'ordres p^r.

Par exemple, soit G un groupe topologique, produit local d'une famille infinie $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes isomorphes à $Z/(p^2)$, relativement aux sous-groupes H_ι de G_ι isomorphes à $Z/(p)$. Tous les éléments de G sont d'ordre $\leqslant p^2$ et G est localement compact et non compact. $G^{(p)} = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ est un sous-groupe ouvert compact de G. Supposons que G soit isomorphe à un groupe G', somme directe locale d'une famille $(G'_\kappa)_{\kappa \in K}$ de groupes isomor-

pies à $Z/(p^2)$, relativement à des sous-groupes H'_κ.
L'ensemble des $\kappa \in K$ tels que $H'_\kappa \neq G'_\kappa$ est infini, sinon G' et par suite G seraient compacts, ce qui n'est pas. C'est produit du groupe compact $G_1 = \prod_\kappa G'_\kappa$, avec $G'_\kappa = H'_\kappa$ et du groupe G_2, somme directe locale des groupes G'_κ tels que $G'_\kappa \neq H'_\kappa$, relativement aux sous-groupes H'_κ. $G_1^{(p)}$ est le sous-groupe compact de G_1, produit des sous-groupes cycliques d'ordre p de $G'^{(p)}_\kappa$. $G_2^{(p)}$ est un sous-groupe partout dense de $\overline{G_2^{(p)}}$, différent de $\overline{G_2^{(p)}}$ si $\overline{G_2^{(p)}}$ est compact. $G'^{(p)}$ est égal à $G_1^{(p)} \times G_2^{(p)}$ et non compact, ce qui est absurde, car $G^{(p)}$ et $G'^{(p)}$ sont isomorphes. G n'est donc isomorphe à aucun groupe G' somme directe locale de groupes isomorphes à $Z/(p^2)$ relativement à des sous-groupes quelconques.

Cependant on a la proposition suivante;

<u>Proposition 3</u>.- <u>Tout groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre $\leq p^r$ est isomorphe à un sous-groupe ouvert d'un groupe produit local de groupes isomorphes à $Z/(p^r)$.</u>

En effet, avec les notations de la démonstration du théorème 3, le sous-groupe fermé $G_{(p^r)}$ de G est isomorphe au sous-groupe $G' \cap \mathcal{E}_{(p^r)}$ de $\widetilde{G}_{(p^r)}$. D'après la proposition I du §3 du chapitre I, $\widetilde{G}_{(p^r)}$ est isomorphe à la somme directe locale de la famille de groupes $(G_{\iota(p^r)})_{\iota \in I}$, relativement aux sous-groupes $H_i \cap G_{Z(p^r)}$ et $G_{Z(p^r)}$ est les sous-groupe cyclique d'ordre p^r de G_Z. Si tous les éléments de G sont d'ordre $\leqslant p^r$, on a $G = G_{(p^r)}$, d'où le résultat.

La réciproque est triviale.

Notes du Chapitre II.

[1]) Conformément aux notations adoptées, Z_p (resp. Q_p) désigne l'anneau compact des entiers p-adiques (resp. le corps localement compact des nombres p-adiques). $\mathfrak{p}$ désigne l'idéal principal (p) de Z_p . On dit qu'un entier p-adique est d'ordre p^r s'il appartient à $\mathfrak{p}^r \cap \complement \mathfrak{p}^{r+1}$. Une définition équivalente à celle des groupes primaires compacts a été introduite par N. Jacobson, dans "Locally compact totally disconnected rings". american Journal of Mathematics, T.LVIII, 1936, p.433.

[2]) Voir A.Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2.Kap. , §I4, Satz 40.

[3]) La théorie des limites projectives, avec les notations utilisées ici, est exposée par A.Weil (VII), Ch.I, §5.

[4]) Voir N.Bourbaki (VI), Topologie générale, Ch. III, §3 Remarque suivant la proposition 6.

[5]) Voir N. Bourbaki (VI), Topologie générale, Ch. III, §5 TH.I

[6]) Voir N. Bourbaki (VI), Topologie générale, Ch. I, §8 Th. 2.

[7]) Voir A.Weil (VII), Ch/ V, § 25.

[8]) Voir N. Bourbaki, (VI), Topologie générale, Ch. III, §3 Ex. I9

[9]) Voir Chapitre I - fin du §I.

[10]) Voir A.Weil (VII), Ch. I, §5 , p. 25.

[11]) Soit A un anneau topologique et M un A-module. On dit que M est un A-module topologique si M est muni d'une topologie compatible avec la structure de groupe abélien de M et telle que la loi de composition externe $(\lambda, x) \to \lambda x$ soit une application bilinéaire continue de $A \times M$ sur M.

[12]) Voir Chapitre I, Proposition 5.

[13]) Voir H. Prüfer (I) et W. Krull (IX), §I.

[14]) D'après un théorème bien connu de Baire, qui appliqué aux groupes topologiques, donne le résultat suivant: La seule structure topologique d'espace localement compact compatible avec la structure de groupe d'un groupe dénombrable est la topologie discrète. Dans le cas actuel, on peut le voir autrement: si Q_p/Z_p est localement compact et primaire (ass. à p), l'ensemble des sous-groupes ouvert compacts de est un système fondamental de voisinages de 0; tout sous-groupe de Q_p/Z_p est cyclique et fini ; donc Q_p/Z_p est discret.

[15]) Ce théorème est démontré, dans le cas d'un groupe dénombrable, et sans l'axiome de choix, par H. Prüfer (I), et L. Zippin (II), §4, Theorem 4.3. Voir aussi R.Baer (IV), I et II.

[16]) Voir N. Bourbaki (VI), Theorie des ensembles, Facs. de résultats, §6, N° 10 et II.

[17]) En effet, on a le théorème bien connu: Si un groupe

abélien à opérateurs complètement réductible est somme directe d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes stables simples et somme directe d'une famille $(H'_\kappa)_{\kappa \in K}$ de sous-groupes stables simples, il existe une application biunivoque φ de I sur K telle que, pour tout $\iota \in$ I, H soit isomorphe à $H'_{\varphi(\iota)}$

Voir par exemple N.Bourbaki (VI), Algèbre , Ch.I, §6, Ex. I8

On peut aussi démontrer cette proposition en remarquant que G et I -(resp. G' et I') sont équipotents.

[18]) Ce théorème a été démontré, dans le cas d'un groupe dénombrable, par H. Prüfer (I), p. 48 et 57 et, dans le cas général, par R.Baer, dans "Der Kern, eine charakteristische Untergruppe", Compositio Mathematica, Vol.I, I934, §5 Lemma I, par une méthode directe tout à fait différente.

A ce sujet, ainsi que pour le Théorème 5, on pourra consulter R.Baer (IV).

[19]) On ~~en~~ trouvera la démonstration dans L.Zippin (II) §6;

[20]) Voir L.Kulikoff (VIII) §3. Nous n'avons pu consulter le mémoire original de L.Kulikoff et renvoyons au résumé de ce mémoire, paru dans le Zentralblatt, Vol 25 , 1942 , pp. 299-300.

[21]) Voir L.Zippin (II) §7 et H.Ulm , "Zur Therie der abzählbar-undendlichen Abelschen Gruppen". Mathematische Annalen, T.I07, I933, pp. 774-803.

[22]) Dans le groupe compact G il existe alors une suite décroissante $(G_n)_{n>0}$ de sous-groupes ouverts telle que $\bigcap_{n>0} G_n = \{0\}$. Les groupes abéliens compacts primaires (ass. àp)

ayant un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 sont donc identiques aux groupes "séparables" compacts introduits par W.Krullé (IX), §9. Plus généralement, les groupes abéliens localement compacts primaires (ass. à p) ayant un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 sont identiques aux groupes "séparables complets" (separabel abgeschlossen) de W.Krull. L'absence de l'introduction systématique d'une topologie sur ces groupes nuit à la clarté et à la concision du mémoire de W.Krull.

23) Soit K un corps topologique et E un espace vectoriel sur K. On dit que E est un espace vectoriel topologique si E est muni d'une topologie compatible avec la structure de groupe abélien de G et telle que la loi de composition $(\lambda, x) \to \lambda x$ soit une application bilinéaire continue de $K \times E$ sur E. Dans ce §, nous dirons, par abus de langage, que H est un sous-module d'un espace vectoriel G sur Q_p si H est un sous-module par rapport à Z_p.

24) Voir la note 16) du Chapitre I.

25) G est l'image réciproque du sous-groupe des éléments d'ordre fini de G_0/H par l'homomorphisme canonique de G_0 sur G_0/H.

26) On a en effet le théorème suivant qui complète celui de la note 17): Soit G un groupe abélien à opérateurs complètement réductible, somme directe d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes stables simples; si H est un sous-groupe stable

de G, il existe une sous-famille $(H_\iota)_{\iota \in J}$ de la famille $(H_\iota)_{\iota \in I}$ telle que G soit somme directe de H et des groupes H_ι de cette sous-famille.

[27]) Voir N. Bourbaki (VI), Topologie Générale, Ch. III, §6. Ex. 18.

[28]) On voit que G est la composante primaire (ass. à p) du groupe abélien localement compact totalement discontinu G_0. Voir Chapitre III, §1.

Chapitre III.

§I.- Composante primaire (ass. à p) ; d'un groupe topologique.

Définition I.- L'ensemble G_p des éléments x d'un groupe topologique séparé G tels que la représentation $n \to x^n$ de Z dans G se prolonge ~~par continuité~~ en une représentation de Z_p dans G est appelé la composante primaire (associée à p) de G.

Si $x \in G_p$ et si π_x est la représentation de Z_p dans G qui prolonge la représentation $n \to x^n$, π_x est un homomorphisme de Z_p dans G et $\pi_x(Z_p)$ est l'adhérence du sous-groupe engendré par x; c'est un sous-groupe abélien compact de G, isomorphe à Z_p ou cyclique d'ordre p^r et on a $\pi_x(Z_p) \subset G_p$. Si p' est un entier premier différent de p, on a $G_p \cap G_{p'} = \{\emptyset\}$, car si $x \in G_p \cap G_{p'}$, on a $\pi_x(Z_p) = \pi'_x(Z_{p'})$, ce qui est absurde, si $x \neq \emptyset$.

Si H est un sous-groupe fermé de G, la composante primaire (ass. à p) de H est $H_p = H \cap G_p$: on a évidemment $H_p \subset G_p$ et si $x \in H \cap G_p$, $\pi_x(Z_p) \subset H$ et $x \in H_p$.

Si G est complet, pour qu'un élément $x \in G$ appartienne à G_p, il faut et il suffit que la représentation $n \to x^n$ de Z (muni de la structure p-adique) dans G soit continue.

La composante primaire (ass. à p) d'un groupe discret G est l'ensemble des éléments de G dont l'ordre est une puissance de p.

En général, l'ensemble G_p n'est pas fermé et n'est pas un sous-groupe de G.

Toutefois, si G est abélien ~~compact~~, G_p est un sous-groupe.

Dans le tore T, la composante primaire (ass. à p) est l'ensemble des éléments dont l'ordre est une puissance de p ; cet ensemble est un sous-groupe partout dense de T, et, par suite, non fermé. Dans le groupe tétraédrique discret $\mathfrak{T}$, la composante primaire (ass. à 2) est l'ensemble des éléments dont l'ordre est une puissance de 2: cet ensemble n'est pas un sous-groupe de $\mathfrak{T}$.

Soit H un groupe topologique séparé et $\mathfrak{F}_p$ l'ensemble des sous-groupes primaires (ass. à p) de G. Si $H \in \mathfrak{F}_p$, $H \subset G_p$. Soit $\mathfrak{G}$ une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{F}_p$, ordonné par inclusion et K le sous-groupe ~~engendré par~~ $\bigcup_{H \in \mathfrak{G}} H$. Si $x \in K$, il existe une partie finie de $\mathfrak{G}$ dont le plus grand élément H' contient x. On peut donc prolonger par continuité la représentation $n \to x^n$ en une représentation π_x de Z_p dans G ; celle-ci est unique et $\pi_x(Z_p) \subset H' \subset K$. Donc $K \in \mathfrak{F}_p$ et $\mathfrak{F}_p$ est inductif. D'après le théorème de Zorn, il possède un élément maximal.

Définition 2.- On dit qu'un sous-groupe maximal de $\mathfrak{F}_p$ est un sous-groupe de Sylow (ass. à p) de G [1]).

Proposition I.- Si G est un groupe localement compact totalement discontinu dont les deux structures uniformes sont identiques, tout sous-groupe de Sylow (ass. à p) de G est fermé.

(En particulier, si G abélien loc. compact est totalt discontinu, G_p est fermé)

Soit H_p un sous-groupe de Sylow (ass. à p) de G et $x \in \overline{H}_p$. L'ensemble des sous-groupes distingués ouverts compact de G étant un système fondamental de voisinages de e [2]), quel que soit le sous-groupe distingué ouvert compact H de G, il existe $y \in H_p$ tel que $x \in Hy$. La représentation $n \to y^n$ de Z (muni de la structure p-adique) dans G est continue; il existe donc un entier $n \geqslant 0$ tel que $y^{kp^n} \in H$, pour tout entier $k > 0$, et $x^{kp^n} \in Hy^{kp^n} \subset H$, car H est distingué. La représentation $n \to x^n$ de Z (muni de la structure p-adique) dans G est donc continue et on a $x \in G_p$. Comme $\overline{H}_p$ est un sous-groupe fermé de G, on a $\pi_x(Z_p) \subset \overline{H}_p$. $\overline{H}_p$ est donc un sous-groupe primaire (ass. à p) de G contenant H_p, ce qui est absurde si $H_p \neq \overline{H}_p$, car H_p est maximal. Donc $H_p = \overline{H}_p$.

Le même raisonnement montre d'ailleurs que la composante primaire (ass. à p) G_p de G est un ensemble fermé.

Si G est un groupe abélien, la composante primaire (ass. à p) de G est évidemment le seul sous-groupe de Sylow (ass. à p) de G. En effet, si $x \in G_p$ et $y \in G_p$, la représentation continue $q \to qx-qy$ de Z_p dans G prolonge la représentation $n \to n(x-y) = nx-ny$ de Z dans G et G_p est un sous-groupe de G. Valable si G est abélien compact

Si donc G est un groupe abélien totalement discontinu, la composante primaire (ass. à p) de G est un sous-groupe fermé de G.

Proposition 2.- Tout groupe abélien compact totalement discontinu est produit de ses composantes primaires.[3])

Soit G un groupe abélien compact totalement discontinu, G_p la composante primaire (ass. à p) de G et $\hat{G}$ le dual de G. On sait que $\hat{G}$ est un groupe abélien discret dont tous les éléments sont d'ordre fini. La composante primaire (ass. à p) de $\hat{G}$ est l'ensemble $\hat{G}_p$ des éléments dont l'ordre est une puissance de p; il est bien connu [4]) que $\hat{G}$ est somme directe de ses composantes primaires $\hat{G}_p$ $(p = 2, 3, \ldots)$. Soit G'_p le conjugué dans G du sous-groupe $\sum_{q \neq p} \hat{G}_q$ de $\hat{G}$. G est isomorphe au produit des groupes G'_p $(p = 2, 3, \ldots)$ [5]). G_p est isomorphe à $\hat{G} / \sum_{q \neq p} \hat{G}_q$: G'_p est donc dual de $\hat{G}_p$ et primaire (ass. à p). On a ainsi $G'_p \subset G_p$ et, par suite, $G_p^* \subset \sum_{q \neq p} \hat{G}_q$, G_p^* désignant le conjugué de G_p dans $\hat{G}$. D'autre part, $\hat{G}/G_p^*$ est le dual de G_p; c'est par suite un p-groupe. $(\sum_{q \neq p} \hat{G}_q)/G_p^*$ est un sous-groupe de $\hat{G}/G_p^*$, c'est-à-dire un p-groupe, ce qui est absurde, car dans $\sum_{q \neq p} \hat{G}_q$, aucun élément $\neq 0$ n'a pour ordre un multiple de p. Donc $\sum_{q \neq p} \hat{G}_q = G_p^*$ et $G'_p = G_p$.

Plus généralement:

Théorème I.- Soit G un groupe abélien localement compact totalement discontinu, ainsi que son dual et H un sous-groupe ouvert compact quelconque de G; G est isomorphe à la somme directe locale de ses composantes primaires G_p, $(p = 2, 3, \ldots)$, relativement aux composantes primaires $H \cap G_p$ de H.

(Remarquer que H est le produit des $H \cap G_p$) [prop. 2 ci-dessus]

H est un groupe abélien compact totalement discontinu. D'après la proposition précédente, il est produit de ses composantes primaires qui sont, on l'a vu, égales à $H \cap G_p$ ($p = 2, 3, \ldots$). Soit $x \in G$ et H_x le sous-groupe ouvert de G engendré par $H \cup \{x\}$. La classe de x dans G/H est d'ordre fini: en effet, le conjugué H^* de H dans le dual $\hat{G}$ de G est un sous-groupe compact totalement discontinu ; c'est le dual du groupe discret G/H dont tous les éléments sont ainsi d'ordre fini.
Le groupe H_x est donc réunion des classes $nx + H$ qui sont compactes et en nombre fini. Le groupe H_x est donc compact et isomorphe au produit de ses composantes primaires $H_x \cap G_p$ ($p = 2, 3, \ldots$). Soit x_p la projection de x, dans $H_x \cap G_p$. Le groupe quotient H_x/H étant d'ordre fini, la classe de x_p dans $(H_x \cap G_p)/(H \cap G_p)$ est d'ordre fini et cet ordre est une puissance de p. Par suite, on a $x_p \in H \cap G_p$, sauf pour les entiers premiers p (en nombre fini) qui divisent l'ordre de H_x/H. G' étant la somme directe locale des groupes G_p ($p = 2, 3, \ldots$), relativement aux sous-groupes ouverts $H \cap G_p$, on voit ainsi que $x \to (x_p)_{p = 2, 3, \ldots}$ est un isomorphisme φ de G dans G'. Mais la somme $H + \sum_{i=1}^{n} G_{p_i}$ est un sous-groupe de G, pour toute suite finie d'entiers premiers $(p_i)_{i=1,\ldots,n}$ et G' est, par définition, réunion des sous-groupes $H + \prod_{i=1}^{n} G_{p_i} = \varphi(H + \sum_{i=1}^{n} G_{p_i})$. Donc $\varphi(G) = G'$, d'où le théorème.

Ce théorème admet une réciproque; plus précisément:

Proposition 3.- Soit (G_p) une suite de groupes abéliens localement compacts primaires (associés aux différents entiers premiers p) et H_p un sous-groupe ouvert compact de G_p; la somme directe locale des groupes G_p relativement aux sous-groupes H_p est un groupe abélien localement compact totalement discontinu, ainsi que son dual, et G_p est la composante primaire (ass. à p) de G.

En effet, soit G la somme directe locale des G_p, relativement aux H_p, G'_p la composante primaire (ass. à p) de G. G est localement compact et totalement discontinu et son dual $\hat{G}$, somme directe locale des groupes primaires $\hat{G}_p$, relativement aux sous-groupes H_p^*, est aussi totalement discontinu. Enfin, on a $G_p \subset G'_p$; inversement, si $x \in G'_p$, on a $x = (x_q)_{q = 2,3,\dots}$, avec $x_q \in G_q$. Comme $x \to x_q$ est une représentation continue de G'_p dans G_q, on a $x_q \in G'_p$. Or $G'_p \cap G'_q = \{0\}$, si $p \neq q$; on a donc $x_q = 0$ si $p \neq q$ et $x \in G_p$. Donc $G'_p \subset G_p$ et $G'_p = G_p$.

De plus on a les conditions d'isomorphie suivantes, qui résultent immédiatement du §2 du Chapitre I:

Proposition 4.- Soit G (resp. G') un groupe abélien localement compact, somme directe locale de ses composantes primaires G_p (resp. G'_p), relativement à des sous-groupes ouverts compacts H_p (resp. H'_p); pour que G et G' soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme φ_p de G_p sur G'_p tel que, pour tous les entiers premiers p, excepté au plus un nombre fini, $H'_p = \varphi_p(H_p)$.

On notera qu'en général, la donnée d'une suite de groupes abéliens localement compacts primaires (ass. à p) $(G_p)_{p=2,3,\ldots}$ ne suffit pas à <u>déterminer à une isomorphie près</u> un groupe abélien G, localement compact totalement discontinu, ainsi que son dual, dont la composante primaire (ass. à p) est isomorphe à G_p.

Un exemple trivial de ce fait est le suivant. Soit G le groupe compact produit des groupes $Z/(p)$ $(p=2,3,\ldots)$ et G' le groupe discret somme directe de sous-groupes isomorphes à $Z/(p)$ $(p=2,3,\ldots)$. Les composantes primaires (ass. à p) de G et G' sont évidemment isomorphes à $Z/(p)$. Cependant les groupes topologiques G et G' ne sont pas isomorphes, car il sont infinis.

§2.- Structure de certains groupes abéliens localement compacts.

Nous allons étudier ici la structure des groupes abéliens localement compacts, à l'aide des résultats obtenus dans le §4 du Chapitre I, le §4 du Chapitre II et le §I du Chapitre III.

Examinons d'abord les groupes abéliens localement compacts dont tout élément est d'ordre fini.

Proposition I.- Tout groupe abélien localement compact dont tout élément est d'ordre fini est totalement discontinu, ainsi que son dual.

En effet, soit G un groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre fini. G possède un sous-groupe ouvert compact H. Soit $\hat{H}$ le dual de H; $\hat{H}$ est isomorphe au groupe $\hat{G}/H^*$, quotient du dual $\hat{G}$ de G par le conjugué H^* de H dans $\hat{G}$. Si $\hat{x} \in \hat{H}$, $\hat{x}(H)$ est un sous-groupe fermé de T dont tous les éléments sont d'ordre fini, c'est-à-dire un groupe cyclique fini. Tous les éléments de $\hat{H}$ sont donc d'ordre fini et H est totalement discontinu [7]). Comme H est ouvert dans G, la composante connexe de 0 dans G est identique à la composante connexe de 0 dans H et se réduit donc à $\{0\}$: G est totalement discontinu. H^* est un groupe compact totalement discontinu, car il est dual du groupe discret G/H dont tous les éléments sont d'ordre fini. Comme H^* est ouvert dans $\hat{G}$, on voit comme précédemment que $\hat{G}$ est totalement discontinu.

Soit G un groupe abélien compact dont tous les éléments sont d'ordre fini. G est produit de ses composantes primaires G_p $(p = 2,3,\dots)$, qui sont des p-groupes abéliens compacts. Quel que soit $x \in G$, on a $x = (x_p)_{p=2,3,\dots}$, avec $x_p \in G_p$ et il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $kx = 0$, donc $kx_p = 0$. Par suite, pour tous les entiers premiers p qui ne divisent pas k, on a $x_p = 0$. Il en résulte que, pour tous les entiers premiers p, excepté un nombre fini, $G_p = \{0\}$ et G est produit d'un nombre fini de p-groupes compacts G_p $(p = p_1, p_2, \dots, p_n, p_1 < p_2 < \dots < p_n)$. D'après le théorème 3 du §4 du Chapitre II, G_p est produit d'une famille de p-groupes cycliques d'ordres bornés. Donc tous les éléments de G sont d'ordre borné et on a le théorème suivant:

Théorème I.- Tout groupe abélien compact dont tout élément est d'ordre fini est produit d'une famille de groupes cycliques d'ordres bornés. [8]).

La réciproque est triviale.

$G_{(p_i)}$ est produit d'une famille $(H_\iota)_{\iota \in I(p_i^{r_i})}$, $(0 < r_i \leqslant k_i)$ de groupes cycliques d'ordre borné, H étant un groupe d'ordre $p_i^{r_i}$, si $\iota \in I(p_i^{r_i})$. On dit que les $\sum_{i=1}^{n} k_i$ ensembles d'indices $I(p_i^{r_i})$, $(0 < r_i \leqslant k_i$, $i = 1,2,\dots,n)$ sont associés au groupe G. Ceci permet d'écrire les conditions d'imorphie suivantes:

Proposition 2.- Soit G (resp. G') un groupe abélien compact dont tous les éléments sont d'ordre fini, $I(p_i^{r_i})$, $(0 < r_i \leq k_i$, $i = 1,2,\dots,n)$ (resp. $I'(q_j^{s_j})$, $(0 < s_j \leq l_j$, $j = 1,2,\dots,n'))$, les ensembles d'indices qui lui sont associés. Pour que G et G' soient isomorphes, il faut et il suffit que $n = n'$, $p_i = q_i$ et $k_i = l_i$ pour tout $i = 1,2,\dots,n$ et que, pour tout r_i $(0 < r_i \leq k_i, i = 1,2,\dots,n)$, $I(p_i^{r_i})$ et $I'(p_i^{r_i})$ soient équipotants.

Cela résulte immédiatement de la proposition 5 du §2 du Chapitre II et de la proposition 4 du §1 du Chapitre III.

Soit maintenant G un groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre fini, H un sous-groupe ouvert compact de G et G_p la composante primaire (ass. à p) de G. G_p est un p-groupe abélien localement compact et G est somme directe locale des groupes G_p $(p = 2,3,\dots)$, relativement aux sous-groupes ouverts compacts $H \cap G_p$. $H \cap G_p$ est la composante primaire (ass. à p) de H et le groupe compact H est isomorphe au produit des groupes $H \cap G_p$ $(p = 2,3,\dots)$ Mais, d'après le théorème précédent, $H \cap G_p = \{0\}$, sauf pour un nombre fini d'entiers premiers p_i $(i = 1,2,\dots,n)$. Donc si $p \neq p_i$, G_p est un p-groupe discret. Soit G_0 le groupe discret somme directe des p-groupes G_p $(p \neq p_i)$ et G_1 le groupe somme directe locale des groupes G_{p_i} $(i = 1,2,\dots n)$, relativement aux sous-groupes $H \cap G_{p_i}$. G_1 est isomorphe au groupe localement compact $\prod_{i=1}^{n} G_{p_i}$. Comme la somme directe locale de groupes est associative, G est isomorphe à $G_0 \times G_1$. D'où:

Théorème 2.- Tout groupe abélien localement compact dont tous les éléments sont d'ordre fini est produit d'un nombre fini de p_i-groupes localement compacts $(i = 1,2,\dots,n)$ et d'un groupe abélien discret, somme directe de p-groupes discrets $(p \neq p_i,\ i = 1,2,\dots,n)$.

Signalons encore la proposition suivante:

Proposition 3.- Si G est un groupe abélien compact totalement discontinu dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini, G est produit ~~de~~ famille~~s~~ de groupes isomorphes à d'une famille

$\mathbb{Z}_p$ $(p = 2,3,\dots)$.

Cela résulte de la proposition 2 du §1 du Chapitre III et du théorème 2 du §3 du Chapitre II.

Nous allons maintenant caractériser les groupes abéliens localement compacts généraux comme sous-groupes fermés de groupes topologiques dont on peut étudier la structure à l'aide des résultats précédents. Rappelons que tout groupe abélien localement compact est de la forme $R^n \times G$, où G est un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe ouvert compact.

Soit d'abord G un groupe abélien localement compact totalement discontinu et $\hat{G}$ son dual. La réunion F des sous-groupes compacts de G est un sous-groupe ouvert F de G. G/F est un groupe abélien discret dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini et F est dual de $\hat{G}/\hat{K}$, $\hat{K}$ étant la composante connexe de $\hat{G}$. Soit S une partie de G telle que les classes

$y + F (y \in S)$ forment un système de générateurs de G/F. Soit K' un groupe abélien discret, somme directe d'une famille de sous-groupes cycliques infinis engendrés par une famille $(z_y)_{y \in S}$ d'éléments de K'. Si $z \in K'$, il existe une partie finie X de S et des entiers n_y $(y \in X)$, déterminés de façon unique et tels que $z = \sum_{y \in X} n_y z_y$. On vérifie facilement que $z \to \sum_{y \in X} n_y y$ est une représentation de K' dans G. Donc l'application $(x,z) \to x + \sum_{y \in X} n_y y$ est une représentation φ du groupe (non topologique) $F \times K'$ sur G. Cette représentation est un homomorphisme, car sa restriction au sous-groupe ouvert F de $F \times K'$ coïncide avec l'automorphisme identique du sous-groupe ouvert F de G. Le dual $\hat{K}'$ de K' est isomorphe à T^S et le transposé $\hat{\varphi}$ de φ est un isomorphisme de $\hat{G}$ dans le groupe $\hat{K}' \times (\hat{G}/\hat{K})$, dual de $F \times K'$.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par G un groupe topologique abélien ayant un sous-groupe ouvert compact, par F la réunion des sous-groupes compacts de G et par K la composante connexe de O. F est un sous-groupe ouvert de G et K un sous-groupe compact de F. Le raisonnement précédent appliqué à F (au lieu de $\hat{G}$) permet d'écrire le résultat suivant:

Proposition 4.- Si S est un système de générateurs du dual de K, F est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe $T^S \times (F/K)$.

G/F est un groupe abélien discret G_2 dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini [9]). $G_1 = F/K$ est un groupe abélien localement compact totalement discontinu ainsi que son dual. Soit $\tilde{G}_1$ le groupe abélien localement compact associé au groupe G_1, d'après le théorème I du §3 du Chapitre I. Tout les éléments de $\tilde{G}_1$ sont de hauteur infinie et G_1 est isomorphe à un sous-groupe ouvert G'_1 de $\tilde{G}_1$ tel que tous les éléments de $\tilde{G}_1/G'_1$ soient d'ordre fini. On a vu au §3 du Chapitre I, que $\tilde{G}_1$ est totalement discontinu, ainsi que son dual. D'après le théorème I du §I du Chapitre III, $\tilde{G}_1$ est somme directe locale de ses composantes primaires (associés aux différents entiers premiers p)[10]. Avec ces notations, on a le théorème suivant, S désignant un système de générateurs du dual de K:

Théorème 3.- Si G est un groupe abélien ayant un sous-groupe ouvert compact, G est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe abélien localement compact $T^S \times \tilde{G}_1 \times G_2$.

Soit G_0 le groupe topologique $T^S \times \tilde{G}_1 \times G_2$. D'après la proposition précédente, il existe un isomorphisme ψ du sous-groupe ouvert F de G dans le sous-groupe ouvert $T^S \times \tilde{G}_1$ de G_0. Tous les éléments de $T^S \times \tilde{G}_1$ sont de hauteur infinie ; on peut donc prolonger[11] en une représentation continue $\overline{\psi}$ de G dans $T^S \times \tilde{G}_1$. Soit $x \in G$ et $\dot{x}$ la classe de x dans $G/F = G_2$. $(\overline{\psi}(x), \dot{x})$ est un élément de G_0 et $x \to (\overline{\psi}(x), \dot{x})$ est une représentation φ du groupe (non topologique) G dans le groupe G_0. Cette représentation est continue, car elle prolonge l'isomorphisme ψ du sous-groupe ouvert F de G dans G_0. φ est biunivoque. En effet, soit x et x' dans G tels que $\varphi(x) = \varphi(x')$. On a $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x')$ et la classe de x dans G/F est identique à celle de x'. Autrement dit, on a $x-x' \in F$ et $\bar{\psi}(x-x') = \psi(x-x') = \psi(x) - \psi(x') = 0$, d'où $x = x'$, car ψ est un isomorphisme. Enfin l'application réciproque $\overset{-1}{\varphi}$ de φ est continue. En effet, il est clair que $(T^S \times \tilde{G}_1) \cap \varphi(G) = \varphi(F)$. D'autre part, l'image de $\varphi(G)$ par l'homomorphisme canonique de G_0 sur $G_0/(T^S \times \tilde{G}_1)$ est identique à $G_0/(T^S \times \tilde{G}_1)$ [12] c'est-à-dire au groupe discret G_2: en effet, on a $(T^S \times \tilde{G}_1) + \varphi(G) = G_0$. La restriction de cet homomorphisme à $\varphi(G)$ est donc une représentation continue f de $\varphi(G)$ sur $G_0/(T^S \times \tilde{G}_1)$ et $\overset{-1}{f}(0) = (T^S \times \tilde{G}_1) \cap \varphi(G) = \varphi(F)$. Il existe donc une représentation biunivoque continue de $\varphi(G)/\varphi(F)$ sur G_2 et, comme G_2 est discret, cette représentation est un isomorphisme. $\varphi(G)/\varphi(F)$ est donc discret et $\varphi(F)$ est un sous-groupe ouvert de $\varphi(G)$. La restriction de φ au sous-groupe ouvert F de G coïncide avec l'isomorphisme ψ de F sur le sous-groupe ouvert $\varphi(F) = \psi(F)$ de $\varphi(G)$. Donc l'application $\overset{-1}{\varphi}$ est continue. On a ainsi montré que φ est un isomorphisme, d'où le théorème.

Notes du Chapitre III.

[1]) Cette définition, dans le cas des groupes finis, coïncide avec la définition classique des sous-groupes de Sylow. On trouvera des propriétés des sous-groupes de Sylow d'un groupe infini discret dans le mémoire de R.Baer intitulé "Sylow-theorems for infinite groups", Duke Mathematical Journal; Vol.6, I940, pp.598-6I4 .

[2]) Voir N.Bourbaki (VI), Topologie Générale, Ch.III; §3,Ex.I9

[3]) N.Jacobson a esquissé une démonstration directe de ce résultat. Voir "Locally compact totally disconnected rings", American Journal of Mathematics, T.LVIII, I936,pp.433-438.

[4]) Voir par exemple L.Zippin (II), §§I et 2.

[5]) Voir la démonstration du théorème I du §2 du Ch.I et L. Pontrjagin (V), Ch.V,§34.

[6]) Voir le Théorème I du §2 du Ch.I.

[7]) Voir la note [6]) du Ch.I.

[8]) Ce théorème et la proposition 2 sont l'extension la plus grande possible du théorème de Gauss-Kronecker sur la décomposition d'un groupe abélien fini en somme directe de sous-groupes cycliques. Remarquons, à ce sujet, que de nombreuses propriétés des groupes finis s'étendent non pas, comme il semblerait naturel, aux groupes infinis discrets, mais aux groupes infinis compacts.

[9]) On pourra étudier la structure de groupe G_1 a l'aide des résultats obtenus par A.Malcev dans "Torsionsfreie Abelsche gruppen von endlichen rang", Recueil Mathématique de

T;4, N.S., 1938, pp.45-67.

10) Si $\tilde{G}_p$ désigne la composante primaire (ass. à p) de $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_p$ est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) dont tous les éléments sont de hauteur infinie, car $\tilde{G}_p$ est un sous-groupe pur fermé de $\tilde{G}_1$.

11) Voir A.Weil (VII), Ch.VI, §26, Lemme I.

12) Voir N.Bourbaki (VI), Topologie Générale, Ch.III, §[illegible], Prop.I2.

Chapitre IV.

§I.- Groupe d'automorphisme d'un groupe localement compact.

Soit G un groupe topologique séparé et $\mathcal{G}(G)$ le groupe des automorphismes de la structure de groupe topologique de G. Si $u \in \mathcal{G}(G)$, u est un automorphisme de la structure de groupe de G, u est continu et uniformément continu à droite et à gauche, ainsi que l'automorphisme réciproque u^{-1}. C et U étant des parties de G, on désigne par $W(C,U)$ l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que, pour tout $x \in C$, $u(x)x^{-1} \in U$; Quand C décrit l'ensemble des parties compactes de G et U un système fondamental de voisinages de l'élément neutre e de G, $W(C,U)$ décrit une base de filtre $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{G}(G)$, car $W(C \cup C', U \cap U') \subset W(C,U) \cap W(C',U')$ et l'intersection des $W(C,U)$ est l'automorphisme identique.

Supposons que G soit localement compact. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les axiomes (GV'_{I}), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}) des systèmes fondamentaux de voisinages de l'élément neutre dans un groupe topologique [1]). En effet, si U est un voisinage de e et C une partie compacte de G, il existe un voisinage compact U' de e tel que $U'^3 \subset U$; $C' = C \cup U'$ est une partie compacte de G et on a $W(C',U') \circ W(C',U') \subset W(C,U)$. En effet, si u et v $\in W(C',U')$, pour tout $x \in C'$, $u(x) \in U'x$, $v(x) \in U'x$ et $u(U') \subset U'^2$, donc $u(v(x)) \subset u(U')u(x) \subset U'^3 x \subset Ux$ et $u \cdot v \in W(C,U)$. L'aciome (GV'_I) est donc vérifié. L'intersection des $W(C,U)$ est l'automorphisme identique et l'axiome (GV'_{III}) est aussi vérifié. Soit enfin C une partie compacte de G, U un voisinage de e et $u_0 \in \mathcal{G}(G)$; alors $C' = C \cup u_0(C)$ est une partie compacte de G et $U' = U \cap \overset{-1}{u}_0(U)$ est un voisinage de e et on a $\overset{-1}{u}_0 \circ W(C',U') \circ u_0 \subset W(C,U)$. En effet, si $u \in W(C',U')$ et si $v = \overset{-1}{u}_0 \circ u \cdot u_0$, pour tout $x \in C$, $v(x) \in \overset{-1}{u}_0(U'u_0(x)) \subset \overset{-1}{u}_0(U')x \subset Ux$, donc $v \in W(C,U)$ et l'axiome (GV'_{IV}) est vérifié. De même, les ensembles $\overset{-1}{W}(C,U)$ décrivent une base de filtre $\overset{-1}{\mathfrak{B}}$ vérifiant les axiomes (GV'_I), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}). Donc, si $u \in \mathcal{G}(G)$, les bases de filtres $u \circ \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B} \circ u$ (resp $u \circ \overset{-1}{\mathfrak{B}}$ et $\overset{-1}{\mathfrak{B}} \circ u$) sont équivalentes et forment un système fondamental de voisinages de u dans une topologie séparée $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) sur le groupe $\mathcal{G}$ (G) telle que l'application $(u,v) \to u \cdot v$ de $\mathcal{G}(G) \times \mathcal{G}(G)$ sur $\mathcal{G}(G)$ soit continur. Pour que la topologie $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) soit compatible avec la structure de groupe de $\mathcal{G}(G)$, il faut et il suffit que l'application $u \to \overset{-1}{u}$ de $\mathcal{G}(G)$ sur lui-même soit continue, c'est-à-dire que les deux topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soient identiques. Il n'en est généralement pas ainsi.

En effet, nous allons construire un groupe localement compact G dont le groupe d'automorphiemes $\mathcal{G}(G)$ n'a pas cette propriété. Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille infinie de groupes topologiques isomorphes à Q_p et H_ι le sous-groupe des entiers p-adiques de G_ι ; H_ι est un sous-groupe ouvert compact de G_ι. Soit G la somme directe locale des groupes G_ι, relativement aux sous-groupes H_ι et $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$, G est un groupe abélien localement compact totalement discontinu et H est un sous-groupe ouvert compact de G. Soit C une partie compacte de G, il existe des $x_i \in G$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ tels que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + H) = C'$ et C' est une partie compacte de G. Si $x_i = (x_{i,\iota})_{\iota \in I}$, on a $x_{i,\iota} \in H_\iota$ excepté si ι appartient à une partie finie J_i de I et $pr_\iota(C') = \bigcup_{i=1}^{n} pr(x_i + H) = \bigcup_{i=1}^{n} (x_{i,\iota} + H_\iota)$. $J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ est une partie finie de I et, si $\iota \notin J$, $pr_\iota(C') = H_\iota$. On a $C \subset C' \subset \prod_{\iota \in I} pr_\iota(C') = C''$ et C'' est une partie compacte de G. Soit U un voisinage de 0; il existe une partie finie J' de I et un sous-groupe ouvert H'_ι de H_ι tel que $H'_\iota = H_\iota$ si $\iota \notin J'$ et que $\prod_{\iota \in I} H'_\iota = U' \subset U$. U' est un voisinage de 0. I étant infini, soit $\kappa \notin J \cup J'$. Soit $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in G$ et $x'_\iota = x_\iota$ si $\iota \neq \kappa$ et $x'_\kappa = p x_\kappa$. Alors $x \to (x'_\iota)_{\iota \in I}$ est un automorphisme u du groupe topologique G. On a $u \in W(C'', U')$ (car, si $\iota \neq \kappa$, $x'_\iota - x_\iota = 0 \in H'_\iota$ et, si $x_\kappa \in H_\kappa$, $x'_\kappa - x_\kappa = (p-1)x_\kappa \in H_\kappa = H'_\kappa$; donc, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in C''$, $u(x) - x = (x'_\iota - x_\iota)_{\iota \in I} \in \prod_{\iota \in I} H'_\iota = U'$) et $u \notin W(H,H)$ (car, si $x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in H$, avec $x_\kappa \in H_\kappa \cap \complement H_\kappa^{(p)}$, $x_\kappa - p^{-1} x_\kappa = (1 - p^{-1}) x_\kappa \notin H_\kappa$ et $u(x) - x \notin H$).

Il résulte de ceci que, lorsque $W(C,U)$ décrit $\mathfrak{B}$, $W(C'',U')$ décrit une base de filtre équivalente à $\mathfrak{B}$ et, pour tout

$W(C'', U')$, il existe un $u \in W(C'', U')$ tel que $u \notin W(H, H)$. Donc l'application $u \to \overset{-1}{u}$ n'est pas continue sur le groupe $\mathcal{G}^{*}(G)$.

Cependant, si G est le groupe R^n (resp. Q_p^n), les topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont identiques; le groupe $\mathcal{G}(R^n)$ (resp. $\mathcal{G}(Q_p^n)$) est le groupe linéaire réel (resp. p-adique) de rang n, munie de la topologie habituelle.

Si G est un groupe compact et si $W(U)$ est l'ensemble des automorphismes u de G tels que $u(x)x^{-1} \in U$ pour tout $x \in G$, quand U décrit un système fondamental de voisinages de e, $W(U)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans les topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui sont ainsi identiques. En effet, $W(U)$ $\overset{-1}{W}(U^{-1})$, car si $\overset{-1}{u} \in W(U^{-1})$ et $x \in G$, $\overset{-1}{u}(u(x)) = x \in U^{-1}u(x)$ et $u(x)$ décrit G quand x décrit G.

Si G est un groupe discret et si $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est l'ensemble des automorphismes u de G tels que $u(x_i) = x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors quand $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ décrit l'ensemble des parties finies de G, $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$ qui décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans les topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui sont ainsi identiques.

Soit $\mathcal{C}$ la borne supérieure [2]) des topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et $V(C, U)$ l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x)x^{-1} \in U$ et $\overset{-1}{u}(x)x^{-1} \in U$

pour tout $x \in G$. Lorsque C décrit l'ensemble des parties compactes de G et U un système fondamental de voisinages de e, V(C,U) décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans la topologie $\mathcal{E}$ et on voit comme précédemment que celle-ci vérifie les axiomes (GV'_x), (GV'_m) et (GV''_m). De plus, V(C,U) étant symétrique, l'application $u \to u^{-1}$ de $\mathcal{G}(G)$ sur lui-même est continue. La topologie $\mathcal{E}$ vérifie donc l'axiome (GV'_x) [1]; elle est donc compatible avec la structure de groupe de $\mathcal{G}(G)$. La topologie est appelée topologie de G. Birkhoff [3]).

Définition I.- On dit que le groupe $\mathcal{G}(G)$, muni de la topologie de G. Birkhoff, est le groupe d'automorphismes du groupe localement compact G.

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, $\mathcal{G}(G)$ désignera le groupe topologique ainsi défini.

Soit G un groupe localement compact; si $s \in G$, l'automorphisme intérieur $x \to sxs^{-1}$ est un automorphisme $u_s \in \mathcal{G}(G)$ et l'ensemble des automorphismes intérieurs est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}(G)$.

Proposition I.- Si G est un groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques, $s \to u_s$ est une représentation continue de G dans $\mathcal{G}(G)$ [4]).

$s \to u_s$ est une représentation de G dans $\mathcal{G}(G)$, car, si $s \in G$ et $t \in G$, $u_s(u_t(x)) = stxt^{-1}s^{-1} = u_{st}(x)$. Cette représentation est continue. En effet, quel que soit le voisinage U de e, il existe un voisinage symétrique U' de e tel que pour tout $x \in G$, $xU'x^{-1} = U'$ et $U'^2 \subset U$ [5]).; donc $U'xU'x^{-1} \subset U'^2 \subset U$, et, si $x \in U'$, $sxs^{-1}x^{-1} \in U$ et $s^{-1}xsx^{-1} \in U$, pour tout x appartenant à une partie compacte quelconque C de G; donc $u_s \in V(C,U)$.

L'image réciproque de l'automorphisme identique par cette représentation est le centre de G.

Corollaire.- Si G est un groupe compact et si Z est son centre, l'ensemble des automorphismes intérieurs de G est un sous-groupe compact de $\mathcal{G}(G)$, isomorphe ` G/Z.

En effet, les deux structures uniformes de G sont identiques et $s \to u_s$ est un homomorphisme de G dans $\mathcal{G}(G)$.

Proposition 2.- Pour tout $x \in G$, $u \to u(x)$ est une application continue de $\mathcal{G}(G)$ dans G.

En effet, soit U un voisinage de e. L'ensemble des v (G) tels que $v(x)u(x)^{-1} \in U$ est $W(\{x\},U)\cdot u \supset V(\{x\},U)\cdot u$ qui est un voisinage de u dans $\mathcal{G}(G)$.

En particulier, l'ensemnle des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) = x$ est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}(G)$ [6]).

Soit H un sous-groupe de G et $u \in \mathcal{G}(G)$ tel que $u(x) = x$ quel que soit $x \in H$. On a $u(H) = H$ et, par suite, $\bar{H}$ est un sous-groupe fermé de G tel que $\overline{u(H)} = \bar{H} = u(\bar{H})$. La restriction de u à $\bar{H}$ est donc un automorphisme de $\bar{H}$, prolongeant l'automorphisme identique de H ; c'est donc l'automorphisme identique de $\bar{H}$.

Comme $H \subset \bar{H}$, l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) = x$ pour tout $x \in \bar{H}$ est égal à l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) = x$ pour tout $x \in H$. Cet ensemble est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}(G)$, car il est l'intersection des sous-groupes fermés de $\mathcal{G}(G)$ formés par les $u(x) = x$, quand x décrit H.

Définition 2.- Si H est un sous-groupe fermé de G, le sous-groupe fermé $\mathcal{C}(H)$ de $\mathcal{G}(G)$ formé par les $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) = x$ pour tout $x \in H$ est appelé le centralisateur de H dans $\mathcal{G}(G)$ [7]).

Soit K un corps topologique localement compact, K' un sous-corps fermé de K. L'ensemble des automorphismes du corps K qui appartiennent au centralisateur $\mathcal{C}(K')$ de K' est un sous-groupe fermé $\mathcal{G}(K,K')$ de $\mathcal{G}(K)$, qu'on appelle le groupe de Galois de K par rapport à K'. Les groupes de Galois topologiques ainsi définis jouent un rôle important dans la théorie des corps localement compacts, en particulier dans la théorie des corps discrets [8]).

Soit H un sous-groupe de G et $u \in \mathcal{G}(G)$ tel que $u(H) = H$. On a $u(\bar{H}) = \bar{H}$, car $H = u(H)$ est un sous-groupe partout dense dans $\bar{H}$ et dans $u(\bar{H}) = \overline{u(H)}$.

Si H est un sous-groupe fermé de G, l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(H) = H$ est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}(G)$. En effet, si $u(H) = H$ et $v(H) = H$, $v^{-1}(H) = H$ et $u(v^{-1}(H)) = u(H) = H$; c'est un ensemble fermé, car c'est l'intersection des ensembles, fermés d'après la proposition 2, formés par les $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x) \in H$, quand x décrit H.

Définition 3.- Si H est un sous-groupe fermé de G, le sous-groupe fermé $\mathcal{N}(H)$ de $\mathcal{G}(G)$ formé par les $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(H) = H$ est appelé le normalisateur de H dans $\mathcal{G}(G)$. [*]).

Le centralisateur $\mathcal{C}(H)$ de H est un sous-groupe distingué fermé de $\mathcal{N}(H)$. En effet, si $u \in \mathcal{N}(H)$, $v \in \mathcal{C}(H)$ et $x \in H$, on a $u(v(u^{-1}(x))) = u(u^{-1}(x)) = x$, car $u(x) \in H$; donc $u.v.u^{-1} \in \mathcal{C}(H)$.

Proposition 3.- Si H est un sous-groupe ouvert compact de G, son normalisateur est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$.

En effet, montrons que $\mathcal{N}(H) = V(H,H)$. Si $u \in \mathcal{N}(H)$ et si $x \in H$, $u(x) \in H$ et $u(x)x^{-1} \in H$; de même $u^{-1}(x)x^{-1} \in H$; donc $u \in V(H,H)$. Inversement, si $u \in V(H,H)$ et si $x \in H$, $u(x)x^{-1} \in H$ et $u(H) \subset H$; de même $u^{-1}(H) \subset H$; d'où $u(H) = H$. On en déduit la proposition, car $V(H,H)$ est un voisinage de l'automorphisme identique.

Soit H un sous-groupe fermé de G et $u \in \mathcal{N}(H)$. La restriction u_H de u à H est un automorphisme de H,. On vérifie facilement que $u \to u_H$ est une représentation de $\mathcal{N}(H)$ sur le sous-groupe de $\mathcal{G}(H)$ formé par les automorphismes u_H de H qui peuvent être prolongés en un automorphisme de G. Cette représentation est continue. En effet, si $u \in \mathcal{N}(H) \cap V(C,U)$,

C étant une partie compacte de G et U un voisinage de e, que quel que soit $x \in H$, on a $u(x) \in H$, $u(x)x^{-1} \in Hx^{-1} = H$ et, quel que soit $x \in C$, $u(x)x^{-1} \in U$,; donc, si $x \in C \cap H$, $u(x)x^{-1} \in U \cap H$; de même $\overset{-1}{u}(x)x^{-1} \in U \cap H$, si $x \in C \cap H$; donc $\acute{u} \in V(C \cap H, U \cap H)$. $V(C \cap H, U \cap H)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans $\mathfrak{N}(H)$ et l'image inverse de $V(C \cap H, U \cap H)$ par $u \to u_H$ contient $\mathfrak{N}(H) \cap V(C,U)$, donc est ouvert dans $\mathfrak{N}(H)$. En résumé:

<u>Proposition 4.-</u> <u>Si H est un sous-groupe fermé de G et si $u \in \mathfrak{N}(H)$, la restriction u_H de u à H est un automorphisme de H et $u \to u_H$ est une représentation continue de $\mathfrak{N}(H)$ dans $\mathcal{G}(H)$.</u>

L'image réciproque de l'automorphisme identique de H par cette représentation est l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que, pour tout $x \in H$, $u(x) = x$, c'est-à-dire $\mathcal{C}(H)$. $u \to u_H$ n'est généralement pas un <u>homomorphisme</u>.

Soit maintenant H un sous-groupe <u>distingué</u> fermé de G. G/H est un groupe localement compact; soit $\mathcal{G}(G/H)$ son groupe d'automorphismes. Si $u \in \mathfrak{N}(H)$ et si $x \in G$ et $y \in G$, $xy^{-1} \in H$ équivaut à $u(x)u(y)^{-1} \in H$ ou à $\overset{-1}{u}(x)\overset{-1}{u}(y)^{-1} \in H$ et on a $u(xyH) = u(x)u(y)H = u(x)Hu(y)H$; et $\overset{-1}{u}(xy)H = \overset{-1}{u}(x)\overset{-1}{u}(y)H = \overset{-1}{u}(x)H\overset{-1}{u}(y)H$. Donc $xH \to u(x)H$ est automorphisme $\dot{u}$ du groupe (non topologique) G/H. Si U est un voisinage de e, $u(U)H = u(UH)$ est ouvert dans G/H; donc $\dot{u}$ est bicontinu et $\dot{u} \in \mathcal{G}(G/H)$. On voit facilement que $u \to \dot{u}$ est une représentation de $\pi(H)$ dans $\mathcal{G}(G/H)$ et cette représentation est continue. En effet, soit U un voisinage compact de e et C' une partie compacte de G/H. Il existe des $x_i \in G(i = 1,2,\dots,n)$ tels que $C' \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i UH$; soit $C = \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$; C est une partie compacte de G et CH une partie compacte de G/H contenant C'. Si $u \in \pi(H) \cap V(C,U)$, quel que soit $x \in C$, on a $u(x)x^{-1} \in U$, $u(xH)x^{-1}H = u(x)x^{-1}H \subset UH$. De même $\overset{-1}{u}(xH)x^{-1}H \subset UH$ et $u \in V(CH,UH) \subset V(C',UH)$. $V(C',UH)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique de $\mathcal{G}(G/H)$ et l'image réciproque de $V(C',UH)$ par $u \to \dot{u}$ contient $\pi(H) \cap V(C,U)$, donc est ouverte dans $\pi(H)$. En résumé:

Proposition 5.- Si H est un sous-groupe distingué fermé de G et si $u \in \pi(H)$, $xH \to u(x)H$ est un automorphisme $\dot{u} \in \mathcal{G}(G/H)$ et $u \to \dot{u}$ est une représentation continue de $\pi(H)$ dans $\mathcal{G}(G/H)$.

L'image réciproque de l'automorphisme identique de G/H par $u \to \dot{u}$ est le sous-groupe distingué fermé $\mathcal{Z}(H)$ de $\pi(H)$ formé par les $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que, pour tout $x \in G$, $u(xH) = xH$, c'est-à-dire $u(x)x^{-1} \in H$ et $\overset{-1}{u}(x)x^{-1} \in H$. $\mathcal{C}(H) \cap \mathcal{Z}(H)$ est un sous-groupe abélien fermé [9]) de $\mathcal{G}(G)$. $u \to \dot{u}$ n'est généralement pas un homomorphisme.

L'intersection des normalisateurs de tous les sous-groupes fermés de G est appelée le noyau [*]) de $\mathcal{G}(G)$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}(G)$, car c'est l'intersection des sous-groupes fermés $\pi(H)$, quand H décrit l'ensemble des sous-groupes fermés de G. On désigne le noyau de $\mathcal{G}(G)$ par $\mathcal{K}(G)$. $\mathcal{K}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}(G)$, car si $u \in \mathcal{K}(G)$ et si $v \in \mathcal{G}(G)$, on a, pour tout sous-groupe fermé H de G, $u(\overset{-1}{v}(H)) = \overset{-1}{v}(H)$ et $v(u(\overset{-1}{v}(H))) = v(\overset{-1}{v}(H)) = H$, donc $v \cdot u \cdot v^{-1} \in \mathcal{K}(G)$.

Proposition 6.- Pour qu'un automorphisme $u \in \mathcal{G}(H)$ appartienne à $\mathcal{K}(G)$, il faut et il suffit que, pour tout sous-groupe cyclique H de G, $u(\bar{H}) = \bar{H}$ [10]).

Soit H un sous-groupe cyclique de G; si $u \in \mathcal{K}(G)$, $u(\bar{H}) = \bar{H}$. Inversement, si H est un sous-groupe fermé quelconque de G et si, pour tout sous-groupe H_x de G engendré par $x \in G$, $u(\bar{H}_x) = \bar{H}_x$, on a, si $x \in H$, $u(x) \in u(H_x) \subset u(\bar{H}_x) = H_x \subset H$ donc $u \in \mathcal{G}(G)$.

Définition 4.- Un sous-groupe fermé H de G est dit caractéristique si $\mathcal{H}(H) = \mathcal{G}(G)$.

Tout sous-groupe caractéristique est distingué. Si H est un sous-groupe de G tel que $u(H) = H$ pour tout $u \in \mathcal{G}(G)$, son adhérence H est un sous-groupe caractéristique de G.

Théorème I.- Soit G un groupe localement compact, produit d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-groupes fermés caractéristiques; le groupe topologique $\mathcal{G}(G)$ est isomorphe au produit de la famille de groupes $(\mathcal{G}(G_\iota))_{\iota \in I}$.

Remarquons que tous les G_ι sont localement compacts et même compacts, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Soit $u \in \mathcal{G}(G)$. La restriction de u à G_ι est un automorphisme u_ι du groupe topologique G_ι et on a $u(x) = (u_\iota(pr_\iota(x)))_{\iota \in I}$ En effet, si J est une partie finie de I, l'application $J \to u_\iota(pr_\iota(x)))_{\iota \in J}$ a pour limite u(x) suivant le filtre des sections

de l'ensemble des parties finies de I, ordonnée par la relation $\subset$, car u_ι est continu pour tout $\iota \in I$.
Inversement si $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$, $(u_\iota \circ pr_\iota)_{\iota \in I}$ est un automorphisme u du groupe (non topologique) G. $u_\iota \circ pr_\iota$ et $u_\iota^{-1} \circ pr_\iota$ étant continus, u est un homéomorphisme de G et sa restriction à G_ι est u_ι. On vérifie facilement que $u \to (u_\iota)_{\iota \in I}$ est un isomorphisme φ du groupe (non topologique) $\mathcal{G}(G)$ sur le groupe $\prod_{\iota \in I} \mathcal{G}(G_\iota)$. Soit $U = \prod_{\iota \in I} U_\iota$ un voisinage de e dans G, défini comme il suit: U_ι est un voisinage de e_ι dans G_ι égal à G_ι excepté si ι appartient à une partie finie J de I. Si C est une partie compacte de G, $pr_\iota(C) = C_\iota$ est une partie compacte de G_ι ; on a $C \subset \prod_{\iota \in I} C_\iota = C'$ et C' est une partie compacte de G. On a donc $V(C',U) \subset V(C,U)$. Si $V_\iota(C_\iota, U_\iota)$ est l'ensemble des $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$ tels que $u_\iota(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$ et $u_\iota^{-1}(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$ pour tout $x_\iota \in C_\iota$, alors pour tout $\iota \notin J$, $V_\iota(C_\iota, U_\iota) = \mathcal{G}(G_\iota)$. Donc $\prod_{\iota \in I} V_\iota(C_\iota, U_\iota)$ est un voisinage de l'élément neutre du groupe topologique $\prod_{\iota \in I} \mathcal{G}(G_\iota)$ et on a $\varphi(V(C,U)) \supset \varphi(V(C',U)) = \prod_{\iota \in I} V_\iota(C_\iota, U_\iota)$; donc l'isomorphisme φ^{-1} est continu. D'autre part, soit $\prod_{\iota \in I} V_\iota$ un voisinage de l'élément neutre de $\prod_{\iota \in I} \mathcal{G}(G_\iota)$, défini comme il suit: V_ι est un voisinage de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G_\iota)$ égal à $\mathcal{G}(G_\iota)$ excepté si ι appartient à une partie finie J de I et, si $\iota \in J$, V_ι est l'ensemble $V_\iota(C_\iota, U_\iota)$ des $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$ tels que $u_\iota(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$ et $u_\iota^{-1}(x_\iota)x_\iota^{-1} \in U_\iota$, quel que soit $x_\iota \in C_\iota$ (U_ι étant un voisinage de e_ι dans G_ι et C_ι une partie compacte de G_ι). Soit $U_\iota = G_\iota$ et C_ι une partie compacte quelconque de G_ι, pour $\iota \notin J$. Alors, pour tout $\iota \notin J$, $\mathcal{G}(G_\iota) = V_\iota = V_\iota(C_\iota, U_\iota)$. $U = \prod_{\iota \in I} U_\iota$ est un voisinage de e dans G et $C = \prod_{\iota \in I} C_\iota$

est une partie compacte de G; donc V(C,U) est un voisinage de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$ et $V(C,U) = \varphi^{-1}(\prod_{\iota \in I} V_\iota)$; l'isomorphisme φ est donc continu et φ est un isomorphisme de $\mathcal{G}(G)$ sur $\prod_{\iota \in I} \mathcal{G}(G_\iota)$.

Théorème 2.- *Si G est un groupe abélien localement compacte et si $\hat{G}$ est son dual, les groupes topologiques $\mathcal{G}(G)$ et $\mathcal{G}(\hat{G})$ sont isomorphes.*

Si $u \in \mathcal{G}(G)$, on sait [11]) que son transposé $\hat{u}$ est un automorphisme du groupe topologique $\hat{G}$ et on a, si $v \in \mathcal{G}(G)$, $\widehat{u \cdot v} = \hat{v} \cdot \hat{u}$. Donc $u \to \hat{u}^{-1}$ est un isomorphisme φ du groupe (non topologique) $\mathcal{G}(G)$ sur le groupe $\mathcal{G}(\hat{G})$. Quand U décrit le filtre des voisinages de 0 dans $\mathcal{T}$ et C (resp. $\hat{C}$) l'ensemble des parties compactes de G (resp. $\hat{G}$), l'ensemble $V(C,\hat{C},U)$ des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $\langle u(x)-x,\hat{x}\rangle \in U$ et $\langle u^{-1}(x)-x,\hat{x}\rangle \in U$ (resp. l'ensemble $\hat{V}(C,\hat{C},U)$ des $\hat{u} \in \mathcal{G}(\hat{G})$ tels que $\langle x,\hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\rangle \in U$ et $\langle x,\hat{u}^{-1}(\hat{x})-\hat{x}\rangle \in U$) quels que soient $x \in C$ et $\hat{x} \in C$, décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$ (resp. dans $\mathcal{G}(\hat{G})$). On a $\langle u(x)-x,\hat{x}\rangle = \langle u(x),\hat{x}\rangle - \langle x,\hat{x}\rangle = \langle x,\hat{u}(\hat{x})\rangle - \langle x,\hat{x}\rangle = \langle x,\hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\rangle$; de même $\langle u^{-1}(x)-x,\hat{x}\rangle = \langle x,\hat{u}^{-1}(\hat{x})-\hat{x}\rangle$. Donc $\hat{V}(C,\hat{C},U) = \varphi(V(C,\hat{C},U))$ et φ est un homéomorphisme de $\mathcal{G}(G)$ sur $\mathcal{G}(\hat{G})$.

Avec ces notations et celles de la proposition 5, on a la

Proposition 7.- *Si H est un sous-groupe fermé de G et si H^* est son conjugué dans $\hat{G}$, on a* $\varphi(\mathcal{N}(H)) = \mathcal{N}(H^*)$ *et* $\varphi(\mathcal{C}(H)) = \mathcal{Z}(H^*)$.

En effet, si $x \in H$ et $\hat{x} \in H^*$, on a $\langle u(x),\hat{x}\rangle = \langle x,\hat{u}(\hat{x})\rangle$. Si

$u \in \mathcal{N}(H)$, on a $u(x) \in H$, $\langle u(x), \hat{x}\rangle = 0$, donc $\hat{u}(\hat{x}) \in H^*$ et $\hat{u} \in \mathcal{N}(H^*)$

Si $\hat{u} \in \mathcal{N}(H^*)$, on a $\hat{u}(\hat{x}) \in H^*$, $\langle x, \hat{u}(\hat{x})\rangle = 0$, donc $u(x) \in H$ et $u \in \mathcal{N}(H)$. D'où $\varphi(\mathcal{N}(H)) = \mathcal{N}(H^*)$.

D'autre part, si $x \in H$ et $\hat{x} \in \hat{G}$, on a $\langle u(x)-x, \hat{x}\rangle = \langle u(x), \hat{x}\rangle - \langle x, \hat{x}\rangle = \langle x, \hat{u}(\hat{x})\rangle - \langle x, \hat{x}\rangle = \langle x, \hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\rangle$. Si $u \in \mathcal{N}(H)$, on a $u(x) = x$ et $\langle x, \hat{u}(\hat{x})-\hat{x}\rangle = 0$; donc $\hat{u}(\hat{x})-\hat{x} \in H^*$ pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$ et, de même, $\vec{\hat{u}}(\hat{x})-\hat{x} \in H^*$; d'où $\hat{u} \in \mathcal{Z}(H^*)$. Inversement, si $\hat{u} \in \mathcal{Z}(H^*)$, on a $\hat{u}(\hat{x})-\hat{x} \in H^*$ et $\langle u(x)-x, \hat{x}\rangle = 0$ donc $u(x) = x$ pour tout $x \in H$, c'est-à-dire $u \in \mathcal{C}(H)$. D'où $\varphi(\mathcal{C}(H)) = \mathcal{Z}(H^*)$.

§ 2.- Groupe d'automorphismes d'un groupe localement compact totalement discontinu.

Proposition I.- *Si G est un groupe localement compact totalement discontinu, l'ensemble des sous-groupes ouverts de $\mathcal{G}(G)$ est un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique.*

Soit H un sous-groupe ouvert compact de G et C une partie compacte de G. $C' = C \cup H$ est une partie compacte de G et on a $V(C',H) \subset V(C,H)$. Si $u \in V(C',H)$ et $v \in V(C',H)$, on, a pour tout $x \in C'$, $u(x) \in Hx$ et $v(x) \in Hx$, $u(H) \subset H$ et $v^{-1}(H) \subset H$; donc $u(x^{-1}(x)) \in u(H)u(x) \subset Hx$ et, de même, $v(u^{-1}(x)) \in Hx$. Donc $u \cdot v^{-1} \in V(C',H)$. $V(C',H)$ est donc un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$. D'autre part, quand C décrit l'ensemble des parties compactes de G et H l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G (qui est un système fondamental de voisinages de e) $V(C',H)$ décrit un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$.

Corollaire.- *Si G est un groupe localement compact totalement discontinu, $\mathcal{G}(G)$ est un groupe totalement discontinu.*

En effet, $V(C',H)$ est ouvert et fermé; la composante connexe de l'automorphisme identique est contenue dans l'intersection de $V(C',H)$ et par suite, se réduit à l'automorphisme identique.

Soit G un groupe abélien localement compact totalement discontinu ainsi que son dual. On a vu que G est somme directe locale de ses composantes primaires G_p ($p = 2;3;\dots$), relativement à des sous-groupes ouverts compacts H_p.

Théorème I.- Le groupe d'automorphismes $\mathcal{G}(G)$ est produit direct local des groupes d'automorphismes $\mathcal{G}(G_p)$, ($p = 2,3,\dots$), relativement aux sous-groupes ouverts $\mathcal{N}(H_p)$.

En effet, il est clair que, pour tout entier premier p, G_p est un sous-groupe caractéristique de G. Donc, si $u \in \mathcal{G}(G)$ la restriction de u à G_p est un automorphisme u_p de G_p. $H = \prod_p H_p$ et $u(H) \cap H = H'$ sont des sous-groupes ouverts compacts de G et $u(H)/H'$ est un groupe fini d'ordre $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$. En remarquant que la composante primaire (ass. à p) de H (resp. de u(H)) est H_p (resp. $u(H_p)$), on voit que pour tous les entiers premiers p différents des p_i ($i = I,2,\dots,m$), on a $u(H_p) \subset H_p$, c'est-à-dire $u_p(H_p) \subset H_p$. De même, pour tous les entiers premiers p différents d'entiers p_j ($j = I, 2,\dots,m'$), on a $u_p^{-1}(H_p) \subset H_p$. Donc, pour tous les entiers premier p différents des p_i et des p_j ($i = I,2,\dots,m$, $j = I, 2,\dots,m'$), on a $u_p(H_p) = H_p$, c'est-à-dire $u_p \in \mathcal{N}(H_p)$. Inversement, soit $(u_p)_{p=2,3,\dots}$ un élément du produit direct local $\mathcal{G}$ des groupes $\mathcal{G}(G_p)$, relativement aux sous-groupes ouverts $\mathcal{N}(H_p)$. Si $x = (x_p)_{p=2,3,\dots}$, avec $x_p \in G_p$ pour tout entier premier p et $x_p \in H_p$ pour tous les entiers premiers p, excepté un nombre fini, on a $u_p(x_p) \in H_p$ pour tous les entiers premiers p, excepté un nombre fini; donc $(u_p(x_p))_{p=2,3,\ldots} \in G$. On vérifie facilement que $x \to (u_p(x_p))_{p=2,3,\ldots}$ est un automorphisme u du groupe (non topologique) G. D'autre part, soit $H' = \prod_p H'_p$ un voisinage de 0 dans G, H'_p étant un sous-groupe ouvert compact de G_p, égal à H_p, excepté pour un nombre fini d'entiers premiers p_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, $u_p(H_p)$ est un sous-groupe ouvert compact de G_p, égal à H_p si $p \neq p_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, et $u(H') = \prod_p u_p(H_p)$ est un sous-groupe ouvert compact de G. Ceci montre que u est un isomorphisme bicontinu de G sur lui-même: $u \in \mathcal{G}(G)$. Ces remarques montrant que $u \to (u_p)_{p=2,3,\ldots}$ est un isomorphisme φ du groupe (non topologique) $\mathcal{G}(G)$ sur le groupe $\mathcal{G}$. Soit $V_p(C_p,H'_p)$ le voisinage de l'automorphisme identique de G_p formé par les $u_p \in \mathcal{G}(G_p)$ tels que $u_p(x_p) - x_p \in H'_p$ et $\overset{-1}{u}_p(x_p) - x_p \in H'_p$ pour tout $x_p \in G_p$, C_p étant une partie compacte de G_p contenant H_p et H'_p un sous-groupe ouvert de H_p tels que $C_p = H'_p = H_p$ excepté pour un nombre fini d'entiers premiers p_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. On a $V_p(C_p,H'_p) \subset \mathcal{N}(H_p)$ pour tout entier premier p et $V_p(C_p,H'_p) = \mathcal{N}(H_p)$ si $p \neq p_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Les ensembles $\prod_p V_p(C_p,H'_p)$ forment donc un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans $\mathcal{G}$. Pour que φ soit bicontinu, il faut et il suffit que les $\overset{-1}{\varphi}(\prod_p V_p(C_p,H'_p))$ forment un système fondamental de voisinages de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$. Nous allons démontrer cette dernière propriété. C_p et H'_p étant choisis comme précédemment, $C'' = \prod_p C_p$ est une partie compacte de G et $H' = \prod_p H'_p$ est un sous-groupe ouvert de H; il est bien clair que l'on a $\varphi(\prod_p V_p(C_p, H'_p)) \subset V(C'', H')$. D'autre part, soit $H' = \prod_p H'_p$ un sous-groupe ouvert de H, H'_p étant un sous-groupe ouvert de H_p, égal à H_p excepté pour un nombre fini d'entiers premiers p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, et soit C une partie compacte de G contenant H. Il existe des éléments $x_j \in G$ $(j = 1, 2, \ldots, n')$ tels que $C \subset \bigcup_{j=1}^{n'} (x_j + H) = C'$ et C' est une partie compacte de G. Si $x_j = (x_{j,p})_{p = 2,3,\ldots}$, on a $x_{j,p} \in H_p$, excepté pour un nombre fini d'entiers premiers $p_{j,k}$ $(k = 1, 2, 3 \ldots, n_j)$. Posons $C_p = \bigcup_{j=1}^{n'} (x_{j,p} + H_p)$. C_p est une partie compacte de G_p contenant H_p et on a $C_p = H_p$ si $p \neq p_{j,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_j, j = 1, 2, \ldots, n')$. $C'' = \prod_p C_p$ est une partie compacte de G contenant C et on a $V(C'', H') \subset V(C, H')$, d'où le résultat.

<u>Corollaire</u>.- <u>Si G est un groupe abélien compact totalement discontinu (resp. un groupe discret dont tout élément est d'ordre fini) on a</u> $\mathcal{G}(G) = \prod_p \mathcal{G}(G_p)$.

Soit maintenant G un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p). Remarquons d'abord que le groupe topologique $\mathcal{G}(G)$ n'est pas en général <u>primaire</u> (ass. à p).

Des exemples de ce fait sont fournis par les groupes d'automorphismes de $Z/(p^r)$ et de Q_p. En effet, d'une part, tout automorphisme de $Z/(p^r)$ est de la forme $x \to ax$, où a est premier avec p et le groupe d'automorphismes de $Z/(p^r)$ est un groupe $\mathcal{H}(p^r)$ d'ordre $p^{r-1}(p-1)$. Pour qu'un automorphisme appartenant à $\mathcal{H}(p^r)$ ait pour ordre une puissance de p; il faut et il suffit qu'il soit de la forme $x \to (1+pu)x$ avec $u \in Z/(p^r)$. D'autre part tout automorphisme de Q_p est de la forme $x \to ax$, où $a \in Q_p^*$ et le groupe d'automorphismes de Q_p est isomorphe au groupe multiplicatif Q_p^*. Pour que la représentation $n \to a^n$ de Z (muni de la structure p-adique) dans Q_p^* soit continue, il faut et il suffit que $a \in 1+p$. Ces remarques peuvent se généraliser de la façon suivante:

<u>Proposition 2.-</u> <u>Soit G un groupe abélien compact primaire (ass. à p); l'ensemble des automorphismes $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x)-x \in G^{(p)}$ pour tout $x \in G$, est un sous-groupe de $\mathcal{G}(G)$ primaire (ass. à p).</u>

Soit G un p-groupe abélien discret et u un automorphisme de G appartenant au centralisateur $\mathcal{C}(G_{(p)})$ de $G_{(p)}$; Posons $u(x)-x = v(x)$. $x \to v(x)$ est un endomorphisme de G et on a $v^n(G_{(p^n)}) = \{0\}$ si $n \geqslant 1$. En effet, on a $v(G_{(p)}) = \{0\}$; supposons que $v^{n-1}(G_{(p^{n-1})}) = \{0\}$; si $x \in G_{(p^n)}$ on a $px \in G_{(p^{n-1})}$ et $p v^{n-1}(x) = v^{n-1}(px) = 0$; donc $v(px) \in G_{(p)}$ et $v^n(x) - v(v^{n-1}(x)) = 0$; d'où $v^n(G_{(p^n)}) = \{0\}$. Soit maintenant $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une partie finie de G et $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le voisinage de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$, formé par les $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x_i) = x_i$ pour $i = 1,2,\dots,n$. Si r est le plus petit entier tel que $p^r x_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$, et si $u \in \mathcal{C}(G_{(p)})$, on a $u^{n'p^r} \in V(x_1, x_2, \dots x_n)$ pour tout entier n'. En effet, on a

$$\begin{aligned} u^{p^r}(x_i) &= x_i + \sum_{k=1}^{p^r-1} C_{p^r}^k v^k(x_i) + v^{p^r}(x_i) \\ &= x_i + \sum_{k=1}^{p^r-1} v^k(C_{p^r}^k x_i) \qquad \text{car } v^{p^r}(x_i) = 0 \\ &= x_i \qquad \text{car, puisque } p^{r-k} \text{ divise } C_{p^r}^k \ (0 < k < n), \end{aligned}$$

$C_{p^r}^k x_i \in G_{(p^k)}$ et $v^k(C_{p^r}^k x_i) = 0$; donc $u^{p^r} \in V(x_1, x, \dots, x_n)$ et, comme $V(x, x, \dots, x_n)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$, $u^{n'p^r} \in V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ceci montre que $n \to u^n$ est une représentation continue de Z (muni de la structure p-adique) dans $\mathcal{C}(G_{(p)})$.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}(G_{(p)})$ est complet. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{C}(G_{(p)})$. Pour tout $x \in G$, l'image de $\mathcal{F}$ par l'extension de l'application continue $u \to u(x)$ est une base de filtre de Cauchy sur G. Comme G est complet, cette base de filtre converge vers un élément $u_0(x)$ de G. On vérifie facilement que $x \to u_0(x)$ est un endomorphisme de G et que $u_0(x) = x$ si $x \in G_{(p)}$. Posons $u_0(x) - x = v_0(x)$. $x \to v_0(x)$ est un endomorphisme de G et on vérifie, comme précédemment, que $v_0^n(G_{(p^n)}) = \{0\}$ si $n \geq 1$. Soit $x \in G$ et p^n l'ordre de x. $x \to x + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_0^k(x)$ est un endomorphisme u_0' de G et on a

$$\begin{aligned} u_0(u_0'(x)) &= u_0'(u_0(x)) \\ &= x + v_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_0^k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_0^{k+1}(x) \\ &= x \qquad \text{car } v_0^n(x) = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que u_o est un automorphisme de G et on voit facilement que $u_o \in \mathcal{C}(G_{(p)})$. Montrons maintenant que le filtre $\mathfrak{F}$ converge vers u_o. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ une partie finie de G. Il existe $M \in \mathfrak{F}$ tels que $M \cdot M^{-1} \subset V(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Pour tout $i = 1, 2, \dots, m$, il existe un $u_i \in M$ tel que $u_i(x_i) = u_o(x_i)$. Mais pour tout $u \in M$, on a $u(x_i) = u_i(x_i)$, car $u \cdot u_i^{-1} \in V(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Donc $u(x_i) = u_i(x_i) = u_o(x_i)$ et $M \subset u_o \cdot V(x, x, \dots, x_m)$. Il en résulte que $\mathfrak{F}$ converge vers u_o et $(G_{(p)})$ est complet.

La proposition 3 du §I du Chapitre II montre que $\mathcal{C}(G_{(p)})$ est primaire (ass. à p). Si $\hat{G}$ désigne le dual de G, $\hat{G}$ est un groupe abélien compact primaire (ass. à p) et $\hat{G}^{(p)}$ est le conjugué de $G_{(p)}$ dans $\hat{G}$. L'ensemble des $\hat{u} \in \mathcal{G}(\hat{G})$ tels que $\hat{u}(\hat{x}) - \hat{x} \in \hat{G}^{(p)}$, pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, est $\mathcal{Z}(\hat{G}^{(p)})$. $\mathcal{Z}(\hat{G}^{(p)})$ est isomorphe à $\mathcal{C}(G_{(p)})$ d'après la proposition 7 du § I et, par suite, primaire (ass. à p).

Lorsque $\hat{G}$ est de rang <u>fini</u>, $\hat{G}^{(p)}$ est un sous-groupe ouvert de $\hat{G}$, d'après la proposition 6 du § 3 du Chapitre II; $\mathcal{Z}(\hat{G}^{(p)}) = V(\hat{G}, \hat{G}^{(p)})$ est donc un sous-groupe <u>ouvert</u> de $\mathcal{G}(\hat{G})$.

<u>Corollaire.-</u> <u>Si G est un p-groupe abélien discret, $\mathcal{C}(G_{(p)})$ est un sous-groupe primaire (ass. à p) de</u> $\mathcal{G}(G)$.

Lorsque G est un p-groupe abélien discret convenablement choisi, cette démonstration montre l'existence de groupes complets primaires (ass. à p) qui ne sont ni <u>abéliens</u> ni <u>localement compacts</u> et qui ne sont pas des <u>p-groupes</u>.

Proposition 3.- Si G est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) et si $q \in 1+\mathfrak{p}$, $x \to qx$ est un automorphisme u_q du groupe topologique G et l'ensemble des automorphismes u_q de G est un sous-groupe [12]) compact du centre de $\mathcal{G}(G)$, isomorphe à Z_p ou cyclique d'ordre p^n.

En effet, d'après la proposition 4 du §2 du Chapitre II, $x \to qx$ est un endomorphisme continu de G sur lui-même, car, d'après la proposition 5 du §2 du Chapitre II, quel que soit $y \in G$, il existe $x \in G$ tel que $y = qy$. D'autre part, u_q est biunivoque, car s'il existe $x' \in G$ tel que $qx = qx'$, on a $q(x-x') = 0$ et $x = x'$, d'après la proposition 5 déjà citée. Enfin, si $q \in 1+p$, q^{-1} est un entier p-adique appartenant à $1+\mathfrak{p}$ et u_q^{-1} est un endomorphisme continu de G et c'est évidemment l'application réciproque de u_q, qui est ainsi un automorphisme du groupe topologique G. $q \to u_q$ est une représentation du groupe multiplicatif $1+\mathfrak{p}$ dans le groupe $\mathcal{G}(G)$. En effet, quel que soit $x \in G$ et quels que soient $q \in 1+\mathfrak{p}$ et $q' \in 1+\mathfrak{p}$, on a $u_q(u_{q'}(x)) = u_q(q'x) = qq'x = u_{qq'}(x)$. Soit C une partie compacte de G et H un sous-groupe ouvert compact de G; il existe des $x_i \in G$ $(i = 1,2,\dots,n)$ tels que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + H)$ et la classe $x_i + H$ est d'ordre fini p^{r_i} dans le p-groupe G/H. Si $r = \max(r_1, r_2, \dots, r_n)$, pour tout $i = 1,2,\dots,n$, on a $p^{r_i} x_i \in H$ et, si $q' \in \mathfrak{p}^r$, $q' x_i \in H$. Si $x \in C$, il existe un x_i et $y \in H$ tels que $x = x_i + y$ et, si $q \in 1+\mathfrak{p}^r$, on a $q-1 \in \mathfrak{p}^r$ et $qx - x = (q-1)x = (q-1)x_i + (q-1)y \in H+H = H$, car $(q-1)x_i \in H$;

$q^{-1} \in 1+\mathfrak{p}^r$ et on a, de même, $q^{-1}x - x \in H$ pour tout $x \in C$; donc $u_q \in V(C,H)$. Il en résulte que $q \to u_q$ est une représentation continue de $1+\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{G}(G)$ et, comme $1+\mathfrak{p}$ est compact, c'est un homomorphisme. L'image de $1+\mathfrak{p}$ par celui-ci est donc un sous-groupe de $\mathcal{G}(G)$ isomorphe à Z_p ou à $Z/(p^n)$. Si $u \in \mathcal{G}(G)$, $u(u_q(x)) = u(qx) = qu(x) = u_q(u(x))$, car u est continu; donc $u \circ u_q = u_q \circ u$ et u_q appartient au centre de $\mathcal{G}(G)$.

Notons qu'il y a identité entre les automorphismes d'un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) G et les automorphismes de G, considéré comme Z_p-module localement compact.

En particulier:

Proposition 4.- Si G est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à p) dont tous les éléments $\neq 0$ sont d'ordre infini et si $\tilde{G}$ est l'espace vectoriel sur Q_p qui lui est associé, $\mathcal{G}(G)$ est le sous-groupe fermé $\pi(G)$ du groupe $\mathcal{G}(\tilde{G})$ des transformations linéaires de $\tilde{G}$.

Cela résulte immédiatement de la proposition I du §4 du Chapitre II.

§3.- Mesure de Haar et groupe d'automorphismes d'un groupe localement compact.

Soit G un groupe localement compact et $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes formé par les fonctions complexes f définies et continues sur G et telles que $\complement \overset{-1}{f}(0)$ soit relátivement compact. Si $f \in \mathcal{L}$ est nulle en dehors dè l'ensemble compact C et si $u \in \mathcal{G}(G)$, $f \cdot \overset{-1}{u}$ s'est une fonction définie et continue sur G et nulle en dehors de l'ensemble compact u(C); donc $f \cdot \overset{-1}{u} \in \mathcal{L}$. Si $f \in \mathcal{L}$ et $g \in \mathcal{L}$, on a $(f+g) \circ \overset{-1}{u} = f \circ \overset{-1}{u} + g \circ \overset{-1}{u}$ et $\lambda f \circ \overset{-1}{u} = \lambda (f \cdot \overset{-1}{u})$, pour tout nombre complexe λ. On voit ainsi que $f \rightarrow f \circ \overset{-1}{u}$ est une transformation linéaire T_u de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$.

Soit $I(f) = \int f(x)dx$ l'intégrale de Haar sur G ($f \in \mathcal{L}$) [13]. Si $u \in \mathcal{G}(G)$, $f \cdot \overset{-1}{u} \in \mathcal{L}$; posons $I_u(f) = \int f(\overset{-1}{u}(x))dx$. $I_u = I \cdot T_u$ est une fonctionnelle linéaire positive définie sur $\mathcal{L}$ et on a, si $s \in G$:

$$\begin{aligned} I_u(f \circ \gamma_s) &= \int f(s\overset{-1}{u}(x)) \, dx \\ &= \int f(\overset{-1}{u}(u(s)x)) \, dx \\ &= \int f(\overset{-1}{u}(x)) \, dx \\ &= I_u(f), \end{aligned}$$

car I est invariante à gauche; I_u est donc aussi invariante à gauche et, par suite, ne diffère de I que par un facteur multiplicatif $\Delta(u) > 0$:

$$\int f(\overset{-1}{u}(x)) \, dx = \Delta(u) \int f(x) \, dx \quad .$$

<u>Définition I.</u>- Δ (u) est appelé de module de l'automorphisme u $\in \mathcal{G}$(G).

Si c'est le groupe additif de R^n (resp. Q_p^n), à tout automorphisme u de G correspond une matrice carrée à n lignes à coefficients réels (resp. p-adiques) dont le déterminant est un nombre réel (resp.p-adique) $\delta(u) \neq 0$ et on a $|\delta(u)| = \Delta(u)$ [14]).

<u>Proposition I.</u>- u $\to \Delta$ (u) est une représentation continue du groupe topologique $\mathcal{G}$(G) dans le groupe multiplicatif localement compact R_+^* des nombres réels > 0;

En effet, si f $\in \mathcal{L}$ et si u $\in \mathcal{G}$(G), et v $\in \mathcal{G}$(G), on a

$$\Delta(u.v) \int f(x)\,dx = \int f(v^{-1}(u^{-1}(x)))\,dx$$
$$= \Delta(u) \int f(v^{-1}(x))\,dx$$
$$= \Delta(u)\,\Delta(v) \int f(x)\,dx$$

donc $\Delta(u.v) = \Delta(u)\,\Delta(v)$ et u $\to \Delta$(u) est une représentation de $\mathcal{G}$(G) dans R_+^*. Montrons qu'elle est continue. Soit f $\in \mathcal{L}$ telle que $\int f(x)\,dx = 1$. f est nulle endehors d'un ensemble compact C. Soit V un voisinage compact de e. f est uniformément continue; donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact $U \subset V$ tel que si $yz^{-1} \in U$, $|f(y)-f(z)| \leq \varepsilon$ UC et VC sont des ensembles compacts, mesurables et de mesures $m(VC) \geq m(UC) > 0$. Si $x \in UC$ et $u \in V(UC,U)$ on a $u^{-1}(x)x^{-1} \in U$ et $|f(u^{-1}(x))-f(x)| \leq \varepsilon$. Donc:

$$|\Delta(u)-1| = |\Delta(u)-1| \int f(x)\, dx$$
$$= \left| \int_{u(C)} f(\overset{-1}{u}(x))\, dx - \int_C f(x)\, dx \right|$$
$$= \left| \int_{VC} f(\overset{-1}{u}(x))\, dx - \int_{VC} f(x)\, dx \right| \quad \text{car } u(C) \subset VC$$
$$\leq \int_{VC} | f(\overset{-1}{u}(x))-f(x)|\, dx \leq \sup_{y \in VC} | f(\overset{-1}{u}(y))-f(y)| \int \varphi_{VC}(x)\, dx$$
$$\leq \varepsilon \int \varphi_{VC}(x)\, dx \leq \varepsilon\, m(VC)$$

En particulier $\Delta(\overset{-1}{u}) = \Delta(u)^{-1}$ et

$$\Delta(u) \int f(u(x))\, dx = \int f(x)\, dx .$$

Si u_s désigne l'automorphisme intérieur $x \to sxs^{-1}$, l'application composée de Δ et de $s \to u_s$ est une représentation de G dans le groupe $\mathbb{R}^*_+$, qu'on appelle le module de s et qu'on désigne par $\Delta(s)$ et on a

$$\Delta(s) \int f(x)\, dx = \int f(\overset{-1}{u_s}(x))\, dx = \int f(s^{-1}xs)\, dx$$
$$= \int f(xs)\, dx \quad ,$$

car I est invariante à gauche. En vertu de la continuité uniforme de f, $s \to \Delta(s)$ est une représentation continue de G dans $\mathbb{R}^*_+$ [15].

Soit $f \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{G}(G)$ et p un nombre réel $\geq$. On a

$$\left(\int |f(\overset{-1}{u}(x))|^p\, dx\right)^{1/p} = \Delta(u)^{1/p} \left(\int | f(x) |^p\, dx\right)^{1/p}$$

Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$\left(\int |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \Delta(u)^{-1/p}\varepsilon$ entraine $\left(\int |f(u(x))|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \varepsilon$

et T_u est une transformation linéaire bicontinue de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$, muni de la topologie déterminée par la norme $\left(\int |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$. Si $\mathcal{L}_p$ désigne le complété de $\mathcal{L}$ [16] muni de la structure uniforme définie à l'aide de cette norme, on a $\mathcal{L}_p = \tilde{\mathcal{L}} = T_u(\tilde{\mathcal{L}}) = T_u(\mathcal{L}_p)$ et T_u est une transformation linéaire bicontinue de l'espace $\mathcal{L}_p$ [17].

De plus, on vérifie facilement que T_u est une transformation linéaire bicontinue de l'espace $\mathcal{L}_\infty$, complété de l'espace $\mathcal{L}$, <u>normé</u> par $\sup_{x\in G} |f(x)|$.

<u>Proposition 2</u>.- <u>Si $f \in \mathcal{L}_p$, $u \to f\circ \overset{-1}{u}$ est une application continue de</u> $\mathcal{G}(G)$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_p$.

En effet, soit $f \in \mathcal{L}_p$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{L}$ tel que $(\int |f(x)-g(x)|^p dx)^{1/p} \leqslant \varepsilon$. g est nulle en dehors d'un ensemble compact C. Soit V un voisinage compact de e. g est uniformément continue; donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact $U \subset V$ tel que, si $yz^{-1} \in U$, $|g(y)-g(z)| \leqslant \varepsilon$

UC et VC sont des ensembles compacts, mesurables et de mesures $m(VC) \geqslant m(UC) > 0$. Si $x \in UC$ et si $\overset{-1}{u}.v \in V(UC,U)$, on a $\overset{-1}{u}(v(x))x^{-1} \in U$ et $|g(\overset{-1}{u}(v(x)))-g(x)| \leqslant \varepsilon$. Donc

$$\Delta(\overset{-1}{v})^{1/p}\left(\int |g(\overset{-1}{u}(x))-g(\overset{-1}{v}(x))|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int |g(\overset{-1}{u}(v(x)))-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int_{UC} |g(\overset{-1}{u}(v(x)))-g(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{car } \overset{-1}{u}(v(C)) \subset UC$$
$$\leqslant \left(\int (\sup_{y\in UC} |g(\overset{-1}{u}(v(y)))-g(y)|)^p \varphi_{UC}(x)\, dx\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \varepsilon \left(\int \varphi_{UC}(x)\, dx\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon\, m(VC)^{1/p}$$

D'autre part

$$\left(\int |f(\overset{-1}{u}(x))-g(\overset{-1}{u}(x))|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \Delta(u)^{1/p}\varepsilon$$
$$\left(\int |f(\overset{-1}{v}(x))-g(\overset{-1}{v}(x))|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \Delta(v)^{1/p}\varepsilon \qquad \text{et}$$
$$\left(\int |f(\overset{-1}{u}(x))-f(\overset{-1}{v}(x))|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f(\overset{-1}{u}(x))-g(\overset{-1}{u}(x))|^p dx\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int |f(\overset{-1}{v}(x))-g(\overset{-1}{v}(x))|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int |g(\overset{-1}{u}(x))-g(\overset{-1}{v}(x))|^p dx\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \Delta(u)^{1/p}\varepsilon + \Delta(v)^{1/p}\varepsilon + m(VC)^{1/p}\Delta(v)^{1/p}\varepsilon \leqslant \Delta(u)^{1/p}\varepsilon + k\ \Delta(v)^{1/p}\varepsilon$$

En vertu de la continuité de la représentation , il existe un voisinage $V(C',U')$ de l'automorphisme identique dans $\mathcal{G}(G)$ tel que, si $u^{-1} \circ v \in V(C',U')$, $\Delta(v)^{1/p} \leq \Delta(u)^{1/p} + \varepsilon$. Donc si $u \circ v^{-1} \in V(UC),U) \cap V(C',U')$, on a

$$\left(\int |f(u^{-1}(x))-f(v^{-1}(x))|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \Delta(u)^{1/p}\varepsilon + k(\Delta(u)^{1/p} + \varepsilon)\,\varepsilon$$
$$= k_1\,\varepsilon + k_2\,\varepsilon^2 .$$

<u>Proposition 3.-</u> <u>Si E est un ensemble mesurable et de mesure m(E) et si u</u> $\in \mathcal{G}(G)$, <u>u(E) est aussi mesurable et sa mesure est</u> $\Delta(u)m(E)$.

En effet, $m(u(E)) = \int \varphi_{u(E)}(x)\, dx = \Delta(u) \int \varphi_{u(E)}(u(x))\, dx$
$= \Delta(u) \int \varphi_E(x)\, dx = \Delta(u)m(E)$.

<u>Proposition 4.-</u> <u>Si G est un groupe topologique ayant un sous-groupe ouvert compact,</u> Δ <u>est un homomorphisme du groupe topologique</u> $\mathcal{G}(G)$ <u>dans le groupe discret</u> Q_+^* <u>des nombres rationnels</u> >0.

En effet, soit H un sous-groupe ouvert compact de G et soit $u \in \mathcal{G}(G)$. $u(H)$ et $H' = H \cap u(H)$ sont des sous-groupes ouverts compacts de G. H' est donc un sous-groupe d'indice fini n (resp. n') de u(H) (resp. de H) et il existe des $x_i \in G$ $(i = 1,2,\dots,n)$ (resp. des $x'_j \in G$,) $(j = 1,2,\dots,n')$ tels que les classes x_iH' (resp. x'_jH') forment une <u>partition</u> de u(H) (resp. de H). H, u(H) et H' étant ouverts et compacts sont mesurables et de mesures finies > 0; Onna

$$m(H) = m\left(\bigcup_{j=1}^{n'} x'_jH'\right) = \sum_{j=1}^{n'} m(x'_jH') = n'm(H') \quad \text{et}$$
$$m(u(H)) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_iH'\right) = \sum_{i=1}^{n} m(x_iH') = n(H') = {}^{n}/_{n'}\; m(H).$$

D'autre part $m(u(H)) = \Delta(u)m(H)$.

Donc $\Delta(u) = {}^{n}/_{n'}$

et Δ est une représentation de $\mathcal{G}(G)$ dans Q_+^*. $\pi(H)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$ et, si $u \in \mathcal{G}(H)$, $u(H) = H$ et $\Delta(u)m(H) = m(u(H)) = m(H)$; donc $\Delta(u) = 1$, c'est-à-dire $\pi(H) \subset \overset{-1}{\Delta}(1)$. Donc $\overset{-1}{\Delta}(1)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}(G)$ et Δ est une représentation continue de $\mathcal{G}(G)$ dans le groupe discret Q_+^*, donc un homomorphisme.

Corollaire.- $\overset{-1}{\Delta}(1)$ est un sous-groupe distingué ouvert de $\mathcal{G}(G)$ et $\mathcal{G}(G)/\overset{-1}{\Delta}(1)$ est isomorphe à un sous-groupe de Q_+^*

Si G est un groupe compact (resp. discret), G(resp. $\{0\}$) est un sous-groupe ouvert compact de G et la démonstration précédente montre que, pour tout $u \in \mathcal{G}(G)$ on a $\Delta(u) = 1$.

Si G est un groupe abélien localement compact primaire (ass. à l'entier premier p), si H est un sous-groupe ouvert compact de G et si $u \in \mathcal{G}(G)$, $H' = H \cap u(H)$ est un sous-groupe d'indice p^r (resp. $p^{r'}$) de $u(H)$ (resp? de H) et un a $\Delta(u) = p^{r-r'}$. Δ est donc un homomorphisme de $\mathcal{G}(G)$ dans le groupe (multiplicatif) cyclique discret formé par les puissances de p.

Définition 2.- On dit qu'un groupe localement compact est unimodulaire si, pour tout $s \in G$, $\Delta(s) = 1$.

Proposition 5.- Tout groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques est unimodulaire.

Soit $\dot{G}$ un groupe localement compact dont les deux structures uniformes sont identiques et V un voisinage compact de e; il existe un voisinage U de e tel que, pour tout $s \in G$, $sUs^{-1} \subset V$, l'adhérence U' de $\bigcup_{s \in G} sUs^{-1} \subset V$ est donc un voisinage compact de e tel que, pour tout $s \in G$, $sU's^{-1} = U'$. U' est donc mesurable et de mesure finie $m(U') > 0$ et on a

$$m(U') = m(xU's^{-1}) = \Delta(s)m(U')$$

c'est-à-dire $\Delta(s) = 1$.

Soit H un sous-groupe distingué fermé d'un groupe localement compact G. Désignons par $\dot{x}$ la classe de $x \in G$ dans le groupe quotient localement compact G/H et par $\int g(y)dy$ et $\int h(\dot{x})d\dot{x}$ les intégrales de Haar respectives des groupes H et G/H. Soit $f \in \mathcal{L}$, nulle en dehors d'un ensemble compact C. $y \to f(xy)$ est une fonction définie et continue sur H, nulle en dehors de la partie compacte $x^{-1}C \cap H$ de H; $\int f(xy)dy$ est constant sur la classe $\dot{x}$ de x et $\dot{x} \to \int f(xy)dy$ est une fonction définie et continue sur G/H, nulle en dehors de la partie compacte $\dot{C}H$ de G/H. On a, en choisissant convenablement les facteurs multiplicatifs qui restent indéterminés dans la mesure de Haar sur H et G/H:

$$\int \left(\int f(xy)dy \right) d\dot{x} = \int f(x) \quad dx \qquad ^{18})$$

Soit $u \in \mathcal{H}(H)$, u_H la restriction de u à H et $\dot{u}$ l'automorphisme de G/H, $xH \to u(x)H$. On a $u_H \in \mathcal{G}(H)$ et $\dot{u} \in \mathcal{G}(G/H)$ et

$$\Delta(u) \int f(x)dx = \int f(\overset{-1}{u}(x)) \quad dx$$

$$= \int \left(\int f(\overset{-1}{u}(xy)dy \right) d\dot{x} = \int \left(\int f(\overset{-1}{u}(x)\overset{-1}{u}(y)) \quad dy \right) d\dot{x}$$

$$= \Delta(u_H) \int (\int f(\dot{u}^{-1}(x)y) \quad dy) \quad d\dot{x}$$
$$= \Delta(\dot{u}) \; \Delta(u_H) \; \int (\int f(xy)dy) \; d\dot{x}$$
$$= \Delta(u) \; \Delta(u_H) \; \int f(x) \; dx.$$

Donc $\Delta(u) = \Delta(\dot{u}) \; \Delta(u_H)$.

Proposition 6.- Si H est un sous-groupe distingué fermé d'un groupe localement compact G et si $u \in \mathfrak{M}(H)$, on a $\Delta(u) = \Delta(\dot{u}) \; \Delta(u_H)$.

Soit G un groupe localement compact, produit d'une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ des sous-groupes caractéristiques fermés. Il existe une partie finie J de I telle que, si $\iota \notin J$, G_ι est compact.

Proposition 7.- Si $u \in \mathcal{G}(G)$, la restriction de u à G_ι est un automorphisme $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$ et on a $\Delta(u) = \prod_{\iota \in J} \Delta(u_\iota)$, $\Delta(u_\iota)$ désignant le module de $u_\iota \in \mathcal{G}(G_\iota)$.

G est produit du groupe compact $\prod_{\iota \in \complement J} G_\iota$ et du groupe localement compact $\prod_{\iota \in J} G_\iota$. Le module de la restriction de u à $\prod_{\iota \in \complement J} G_\iota$ étant 1, il suffit donc de démontrer la proposition pour une suite finie $(G_i)_{i = 1,2,\dots n}$ de sous-groupes caractéristiques de G telle que $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$. Pour cela, il suffit de démontrer la proposition pour $n = 2$ et de raisonner par récurrence sur n.

Soit donc G un groupe localement compact, produit de deux sous-groupes caractéristiques G_1 et G_2 et soit $u \in \mathcal{G}(G)$. La restriction de u à G (resp. G_2) est un automorphisme u_1 de G_1 (resp. u_2 de G_2). G_2 est isomorphe à G/G_1 et on a, d'après la proposition précédente $\Delta(u) = \Delta(u_1) \; \Delta(u_2)$.

[illegible] ?

<u>Proposition 8.</u>- <u>Soit G un groupe abélien localement compact $\hat{G}$ son dual, $u \in \mathcal{G}(G)$ et $\hat{u} \in \mathcal{G}(\hat{G})$ le transposé de u; alors le module de u et le module de $\hat{u}$ sont égaux.</u>

En effet, soit $f \in \mathcal{L}$. On a, en choisissant convenablement les facteurs multiplicatifs qui restent indéterminés dans les mesures de Haar sur G et $\hat{G}$:

$$\begin{aligned}\Delta(u) \int |f(x)|^2 dx &= \Delta(u)^2 \int |f(u(x))|^2 dx \\ &= \Delta(u) \int \left| \int f(u(x))\, e^{2\pi i \langle x, \hat{x} \rangle} dx \right|^2 d\hat{x}\end{aligned}$$

d'aprés le <u>théorème de Plancherel-Weil</u> [19]; donc:

$$\begin{aligned}\Delta(u) \int |f(x)|^2 dx &= \int \left| \Delta(u) \int f(u(x))\, e^{2\pi i \langle x, \hat{x} \rangle} dx \right|^2 d\hat{x} \\ &= \int \left| \int f(x)\, e^{2\pi i \langle \overset{-1}{u}(x), \hat{x} \rangle} dx \right|^2 d\hat{x} \\ &= \int \left| \int f(x)\, e^{2\pi i \langle x, \overset{-1}{\hat{u}}(\hat{x}) \rangle} dx \right|^2 d\hat{x} \\ &= \Delta(\hat{u}) \int \left| \int f(x)\, e^{2\pi i \langle x, \hat{x} \rangle} dx \right|^2 d\hat{x} \\ &= \Delta(\hat{u}) \int |f(x)|^2 dx\end{aligned}$$

d'aprés le même théorème. Donc $\Delta(u) = \Delta(\hat{u})$.

Notes du Chapitre IV.

[1]) On trouvera un énoncé des axiomes (GV'_I), (GV'_{II}), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}) que vérifie un système fondamental de voisinages de l'élément neutre d'un groupe topologique dans N. Bourbaki (VI), Topologie Générale, Ch. III, §I, N° 2.

[2]) Voir N. Bourbaki (VI), Topologie générale, Ch. I, §2.

[3]) Une topologie analogue a été définie par G. Birkhoff sur le groupe d'automorphismes d'un espace localement compact satisfaisant au "II° Axiome de Dénombrabilité", dans le mémoire "The topology of transformation-set", Annals of Mathematics T.35, 1934, pp. 861-875 .

[4]) On peut même montrer que, dans ce cas, l'image de G par la représentation continue $s \to u_s$ est relativement compacte dans $\mathcal{G}(G)$.

[5]) Voir N. Bourbaki (VI), Topologie Générale, Ch. III, §3, Ex.3

[6]) Plus généralement, si A et B désignent des parties fermées de G, l'ensemble des $u \in \mathcal{G}(G)$ tels que $u(x)x^{-1} \in B$ et $u^{-1}(x)x^{-1} \in B$ pour tout $x \in A$ est un ensemble fermé $V(A,B)$ de $\mathcal{G}(G)$; on a, avec les notations de ce §, $\mathcal{N}(H) = V(H,H)$, $\mathcal{C}(H) = V(H, \{0\})$ et $\mathcal{I}(H) = V(G,H)$.

[7]) Si u_s est l'automorphisme intérieur $x \to sxs^{-1}$, l'image réciproque de $\mathcal{C}(H)$ (resp. $\mathcal{N}(H)$, $\mathcal{K}(G)$) par $s \to u_s$ est un sous-groupe fermé de G qu'on appelle centralisateur de H (resp. normalisateur de H, noyau) dans G. Voir par exemple H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, II, §4.

[8]) Cette définition des groupes de Galois coïncide avec celle déjà donnée dans les cas étudiés. Voir par exemple W. Krull, Galoische Theorie der unendlichen Normalkörper, Mathematische annalen, T.100,1928,pp.687-898.

[9]) Voir H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, II, aufgabe 6. .

[10]) Le noyau de $\bar{G}$, dans le cas d'un groupe discret, a été défini et étudié par R. Baer dans "Der Kern, eine charakteristische Untergruppe " Compositio Mathematica, T.I. 1934, pp. 254-283.

[11]) Voir Chapitre I, §I .

[12]) Voir R. Baer, "Primary abelian groups and their automorphisms", American Journal of Mathematics, Vol. LIX,1937,pp. 99-120. On trouvera dans ce travail d'autres propriétés du groupe d'automorphismes d'un p-groupe abélien discret.

[13]) Au sujet de l'intégrale de Haar, on pourra consulter le mémoire de A. Weil (VII), Ch. II. En particulier les notations utilisées ici sont celles de ce mémoire.

[14]) Si q est un nombre p-adique, on pose $|q| = p^{-r}$, si $q \in \mathfrak{p}^r \cap \complement\, \mathfrak{p}^{r+1}$.

[15]) Voir A. Weil (VII), Ch. 2, §8.

[16]) Voir A. Weil (VII), Ch. II, §7.

[17]) De plus, si $(f,g) \to f*g = \int f(y)g(y^{-1}x)dy$ est le <u>produit de composition</u>, loi multiplicative qui fait de $\mathcal{L}_1$ un <u>anneau topologique</u>, on a $(f\cdot u^{-1})*(g\cdot u^{-1}) = \Delta(u)(f*g)\cdot u^{-1}$; en effet:

$$(f\circ u^{-1}) * (g\circ u^{-1}) = \int f(u^{-1}(y))g(u^{-1}(y^{-1}x))\,dy = \int f(u^{-1}(y))g((u^{-1}(y))^{-1}\,u^{-1}(x))\,dy$$

$$= \Delta(u)\int f(y)g(y^{-1}u^{-1}(x))\,dy = \Delta(u)(f*g)\circ u^{-1}.$$

(18) Voir A.Weil (VII), Ch. II, §9.

(19) Voir A.Weil (VII) Ch. VI, §30. Cette propriété des modules de u et û a lieu même si les facteurs multiplicatifs qui restent indéterminés dans la mesure de Haar sur G et $\hat{G}$ ne sont pas choisis de telle sorte que l'égalité

$$\int |f(x)|^2\,dx = \int \left|\int f(x)\,e^{2\pi i\langle x,\hat{x}\rangle}\,dx\right|^2 d\hat{x}$$

qui constitue le <u>théorème de Plancherel-Weil</u>, ait lieu, car $\Delta(u)$ et $\Delta(\hat{u})$ sont indépendants de ce choix.

Bibliographie

(I) H. Prüfer, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Mathematische Zeitschrift, vol. 17, Berlin 1923, pp. 35-6I.

(II) L. Kippin, Countable torsion groups, Annals of Mathematics, 2e série, T. 36 , Princeton 1935, pp. 86-99.

(III) E.R. van Kampen, Locally bicompact Abelian groups and their character groups, Annals of Mathematics, 2e série. T. 36, Princeton 1935, pp. 448-463.

(IV) R. Baer, The subgroups of the element of finite order of an Abelian group. Annals of Mathematics, 2e série, T. 37 Princeton 1936, pp. 766-78I.

(V) L. Pontrjagin, Topological groups, Princeton mathematical series, Vol. 2., (Princeton University Press), Princeton 1939.

(VI) N.Bourbaki, Elements de mathématiques, Livres I,II,III, Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 848,856,9I6, 934, Paris, (Hermann) 1940-1942.)

(VII) A. Weil; l'intégration dans les groupes topologiques, et ses applications, Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 869, Paris (Hermann) I940.

(VIII) L. Kulikoff, Zur Theorie der Gruppen von beliebiger Mächtigkeit, Recueil Mathématique de Moscou, N.S. , Vol. 9. Moscou 194I, pp. I65-I8I.

(IX) W. Krull, Ueber separable, insbesondere kompakte separable Gruppen, Journal für die reine une angewandte Mathematik, Vol. I84, Berlin 1942, pp. I9-48.

Table des matières

Décembre 1943 - Février 1945.